



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

**“Actividades y experiencias que favorecen la comprensión del concepto
de límite en estudiantes sin nociones previas del cálculo”**

TESIS

**Que para obtener el título de
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas**

Presenta:

MARLÉN SUAZO SOLORIO

Asesor:

Doctor en Matemática Educativa Armando Sepúlveda López

Morelia, Michoacán. Abril del 2015.



A mi papá:

Gilberto Suazo Bermúdez, que hoy ya no está conmigo pero lo llevo en mi corazón y ha estado siempre en mis pensamientos. Sin él nada de esto sería posible, por eso, a él dedico lo que he logrado y lograré por el resto de mi vida. Claro que no lo hubiese alcanzado jamás sin la ayuda de la persona más importante en mi vida, el hombre por el cual logré llegar a la meta y quien fue mi inspiración a lo largo de ésta. A él está dedicado este trabajo, y todo lo que invertí de mí misma en el transcurso de estos últimos años, es sólo por él y para él. Le doy gracias por darme la vida, por enseñarme que la vida se disfruta cada día, con lo poco o mucho que tengamos, mientras haya personas a nuestro alrededor que nos amen y que valoren nuestra existencia, hay que disfrutarlos. Le agradezco su amor incondicional de padre, ese amor que nadie más puede dar; y sé que si viviera, daría su vida por mí, por ver nuestro sueño hecho realidad. Gracias papi, gracias por los años maravillosos que me regalaste a tu lado, por ese hogar tan maravilloso que amé y que sé, algún día volveré a tener. Siempre te amaré.

AGRADECIMIENTOS

Doy gracias a Dios porque es él quien escoge la familia y los amigos que tenemos. Porque sé, que Dios tiene un propósito con mi vida y si aún sigo aquí, tal vez sea porque no lo ha concluido. Gracias a Dios porque siempre ha estado conmigo, en momentos de felicidad y de tristeza, porque aunque muchas veces me ha llevado por desolados desiertos, aún ahí, su mano me ha guiado. Le agradezco por tener cuidado de mí y siempre poner personas a mi alrededor que me recuerden su existencia. Y aun cuando muchas veces lo sentí tan lejos, sé que sólo quería enseñarme que todo lo puedo en él, quien me fortalece.

Agradezco a mi familia, y aunque no soy el mejor ejemplo, sé que están orgullosos de que haya completado esta etapa en mi vida, ¡al fin! Gracias a mi mamá Juventina y a mis hermanos Beto y Beli por animarme y creer en mí, por su paciencia para que llegara a cumplir este logro. A mi abuelita Virginia, que con su ejemplo me enseñaba a seguir adelante cada día, a luchar siempre pase lo que pase. Gracias abue por amarnos con ese amor de madre que siempre nos has dado. Gracias a mis tíos Lorena y Raymundo, que son como mis papás adoptivos. Gracias tía por apoyarnos incondicionalmente, por poner su vida por mis hermanos y por mí, por darnos ese amor que tanto necesitamos. Gracias Raymundo por ser el mejor ejemplo que podríamos tener, sabes que tú me inspiraste para estudiar esta carrera, un hombre sabio e inteligente que siempre lucha por lo que quiere y lo consigue; gracias por dar sin esperar nada a cambio, por considerarnos hijos legítimos y no hacer diferencia con los tuyos. Gracias a mis tíos: José Manuel, Selene y Daniel (y sus respectivos espos@s) y a todos

mis primos, porque sin su amor, no lo habría logrado. Gracias a todos y cada uno de ustedes, por su apoyo moral y económico. Los amo y siempre daré gracias a Dios por sus vidas.

Gracias a mis amigos, esos que dicen son la familia que uno escoge. Y ciertamente, uno los escoge de tal manera que complementen tu vida. Gracias amigas, porque cuando estuve lejos de mi hogar, ustedes me hicieron sentir en él, porque en las buenas y en las malas, itodas para una y una para todas! A Perla porque fue con ella que comenzamos esta aventura, y ambas aprendimos que el compañerismo y la amistad es lo más importante cuando te encuentras lejos de casa. Y como uno cosecha lo que siembra, pronto segaremos lo bueno que pasamos a lo largo de todos estos años. Gracias a Rosaura porque has sido una gran amiga, que nos ha apoyado en todo e incondicionalmente, gracias amiga porque sabemos que contamos siempre contigo. Gracias a Monse, a Francisco Javier, a Esmeralda, a Blanca de Jesús, a Cinthia Elizabeth y a todos los que no alcanzo a mencionar, por su amistad incondicional y por ser parte de mi vida, los quiero.

Y gracias a la mejor amiga que he tenido y a quien Dios puso en mi camino para ser como esa hermana que nunca tuve, y no sólo a ella, sino a su familia completa quienes me adoptaron y me hicieron formar parte de ellos. Sabes que lo mío no son las palabras, pero lo intenté. Gracias Martha, por los momentos tristes y los momentos alegres que hemos pasado, por cuando hubo risas y cuando sólo hubo lágrimas, y aunque no tengo cómo agradecer y pagar lo que has hecho por mí, doy gracias a Dios por ponerte en mi camino. Muchas veces pensé que no había un propósito para cumplir juntas pero hoy tengo la firme convicción de que Dios no se equivoca, y

también sé que los planes de Dios son perfectos y todo tiene su tiempo. Así que ni modo, nos soportaremos otro ratito hasta cumplir para lo que hemos sido llamadas. Te quiero amiga. Gracias a tu familia por permitirme pertenecer. Los quiero.

Gracias a mi asesor, el Dr. Armando Sepúlveda por todo su apoyo y compromiso. Gracias maestro, porque me dio la oportunidad de trabajar con usted aun en las condiciones en que estaba, y de verdad agradezco mucho su tiempo que sé, es muy valioso. Que Dios lo bendiga siempre en todo.

ÍNDICE

CONTENIDO	Pág.
CAPÍTULO I. Planteamiento del problema.....	1
1.1 Introducción.....	1
1.2 Justificación	3
1.3 Planteamiento del problema.....	5
1.4 Objetivos y/o preguntas de investigación	7
CAPÍTULO II. Revisión de literatura	8
2.1 Introducción	8
2.2 Reseña histórica.....	9
2.3 Definición de límite.....	10
2.4 Dificultades de aprendizaje	12
2.5 La importancia de actividades	18
CAPÍTULO III. Metodología	27
3.1 Introducción	27
3.2 Actividades diseñadas.....	28
3.3 Actividad 1. Los saltos de Yaya	30
3.4 Actividad 2. El terreno de Don Juanito	31
3.5 Sujetos	37
3.6 Metodología.....	38
3.7 Fuentes de datos.....	39
CAPÍTULO IV. Análisis y resultados	40
4.1 Introducción	40
4.2 Actividad “Los saltos de Yaya”	42
4.3 Actividad “El terreno de Don Juanito”	57
CAPÍTULO V. Conclusiones	71
Anexo A.....	76
Anexo B.....	79
Bibliografía.....	83

Resumen

Este trabajo de investigación tiene como objetivo estudiar el comportamiento de estudiantes de bachillerato frente a actividades relacionadas con nociones asociadas al concepto de límite; es decir, qué tipos de acercamientos utilizan para atacarlas, si llegan o no a la solución y qué obstáculos encuentran en el proceso, etc. Se utilizaron dos actividades: “los saltos de Yaya” y “el terreno de Don Juanito”. Ambas tienen como objetivo introducir el concepto de límite en estudiantes sin nociones previas del cálculo. La metodología utilizada fue la propuesta por Sepúlveda y Santos (2006), que consta de cinco pasos: actividad previa, trabajo en equipo, presentaciones, discusión colectiva y trabajo individual. Después de la recolección y análisis de los datos, los resultados obtenidos fueron realmente favorables. Se distinguieron diferentes tipos de acercamientos por parte de los estudiantes al concepto, así como un trabajo en clases productivo por parte de los mismos. Es claro que el concepto de límite es difícil y árido para casi todos los estudiantes, sin embargo, la finalidad de nuestro trabajo es precisamente facilitar eso, es decir, si de todos modos son conceptos que se tienen que enseñar, entonces hay que buscar la manera más óptima de lograrlo.

Palabras clave: límite, cálculo, actividades y discusión colectiva.

Abstract

This research aims to study the behavior of high school students face related notions associated to the concept of limit activities; ie what types of approaches used to attack them, whether or not the solution and what obstacles come in the process, etc. Regarding the activities, they used two "breaks Yaya" and "the land of Don Juanito". Both aim to introduce the concept of limit on students without previous notions of calculus. The methodology used was that proposed by Sepulveda and Santos (2006), which consists of five steps: previous activity, teamwork, presentations, group discussion and individual work. After collecting and analyzing the data, the results were really friendly. Different types of approaches by the students to the concept as well as work in productive classes by themselves were distinguished. It is clear that the concept of limit is hard and dry for most students, however, the purpose of our work is to facilitate that, ie if anyway they are concepts that have to teach, then we must seek the to achieve more optimal way.

Keywords: limit, calculus, activities, collective discussion.

CAPÍTULO I. Planteamiento del problema

1.1 Introducción

Para la finalidad de la investigación, se diseñaron un par de actividades las cuales fueron implementadas a nivel medio superior, con el objetivo de recolectar y analizar datos respecto a la solución de las mismas. Nuestro objetivo fue cómo es que estudiantes de bachillerato abordan el concepto de límite, aun cuando no han llevado cursos sobre el cálculo. Se utilizó una metodología bien específica, la cual se basa en el trabajo cooperativo, y otro de nuestros propósitos era ver cómo ésta favorecía para entender dicho concepto.

Es un trabajo de carácter cualitativo y se juzgará de acuerdo al desempeño de los estudiantes frente a las actividades diseñadas para la mejora de su aprendizaje. En la investigación se documentan dos actividades diseñadas específicamente para estudiantes de bachillerato, los cuales aún no tienen noción del concepto de límite, con el propósito de analizar su desarrollo e identificar cuáles de ellas, y a través de qué experiencias, se favorece la comprensión de nociones asociadas a dicho concepto en cursos previos al cálculo. Estas actividades fueron aplicadas en sesiones de aproximadamente dos horas, en el horario habitual de una escuela.

Para la selección de los participantes no se tomó ninguna consideración especial en cuanto a sus habilidades; el único requisito fue que se encontraran cursando asignaturas previas al cálculo. Los estudiantes pertenecen a un grupo de cuarto semestre (Técnico en Mecánica) del Centro de Estudios Tecnológicos Industrial y de Servicios No. 34, Plantel Lázaro Cárdenas, del turno vespertino.

El cálculo es una actividad natural y primordial para el hombre, que inicia en el momento en que empieza a relacionar unas cosas con otras, ya sea en el pensamiento o en un discurso. El cálculo lógico natural como razonamiento es el primer cálculo elemental del ser humano. Sin embargo, el cálculo en sentido lógico matemático, aparece cuando se toma conciencia de esta capacidad de razonar y

trata de formalizarse; siendo justamente el último grado del bachillerato la etapa escolar donde se comienza a desarrollar este tipo razonamiento.

Además, el cálculo es la rama de las matemáticas encargada del estudio de los fenómenos de cambio; fenómenos que ocurren en la naturaleza y en la vida cotidiana.

Más particularmente, el concepto de límite formaliza la noción intuitiva de aproximación cuando un punto de una sucesión o función se acerca a otro y los parámetros de dicha sucesión o función se acercan a un determinado valor.

Sin duda, el cálculo es una de las ramas de las matemáticas básicas en la que existen mayores dificultades para su enseñanza y aprendizaje en los diferentes niveles escolares; en particular al abordar el concepto matemático de límite ya que, se afirma, que trae consigo mismo dificultades inherentes al propio concepto.

Por ello, grandes matemáticos como Ian Stewart (1998) y David Tall (2010), por mencionar algunos, se han preocupado por el modo de abordar las definiciones formales. Ellos afirman que debe hacerse considerando el contexto del alumno; de maneras más sutiles y “sensibles”, ya que están convencidos que no resulta favorable aplicar todo el rigor matemático en etapas tempranas de instrucción. Además, Tall (2010) afirma que no es necesario llegar a la adultez para iniciar con el tratamiento de estos contenidos y que con el debido cuidado se pueden ofrecer buenas bases al instruir en estos temas a niños pequeños. Con base en estas ideas y recomendaciones, hemos considerado proponer actividades cuyo diseño facilite la enseñanza y promuevan el aprendizaje del concepto de límite, y que contribuyan al futuro entendimiento del cálculo en general.

En este trabajo estamos interesados en una propuesta metodológica que permite la implementación de actividades en grupos de aprendizaje cooperativo, propuesta por Sepúlveda y Santos (2006), diseñada con base en diferentes teorías del ámbito constructivista, que incluyen no sólo el trabajo individual sino también el trabajo en equipo, esperando que el profesor saque provecho del diseño y aplicación de actividades de este tipo, para lograr abrir paso a la exploración de conceptos abstractos como el de límite, en edades relativamente tempranas.

Para realizar nuestra investigación, se implementaron y analizaron dos actividades que buscan mejorar el aprendizaje. Dichas actividades fueron aplicadas en un grupo escolar de 27 estudiantes de cuarto semestre de bachillerato del CETIS 34 de Lázaro Cárdenas, Michoacán, que aceptaron participar en la aplicación. Las actividades aplicadas fueron “Los Saltos de Yaya” y “El terreno de Don Juanito”; cada una de ellas se aplicó en un día diferente, en una misma semana. La primera fue ajustada un poco para el contexto de nuestro sistema escolar; la segunda surgió como consecuencia de la primera, ya que la intención era profundizar en el concepto de límite; por lo tanto, las características de ambas son muy similares.

1.2 Justificación

La importancia del estudio de las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite se justifica por varias razones. Primero, este es uno de los conceptos más importantes del Análisis Matemático, ya que es necesario para introducir otros conceptos como continuidad, derivada, integral y, por lo tanto, su estudio se hace necesario. Sin embargo, para los alumnos es un concepto árido, poco atractivo, demasiado abstracto, que suelen olvidar con demasiada facilidad y, en suma, es uno de los más difíciles de enseñar y aprender.

Existe el reconocimiento de que el concepto matemático de límite es una noción particularmente difícil. Cornu (1994) menciona que didácticamente es muy importante la distinción entre la definición y el concepto en sí mismo. Además, se debe prestar atención a las concepciones espontáneas que se puedan tener de dicho concepto, ya que éstas no desaparecen cuando los estudiantes pasan a una nueva lección matemática. Para Cornu (1994, p.154) los problemas que se presentan con la noción de aproximación al límite, son:

- La aproximación; eventualmente estática y lejana.
- La aproximación sin alcanzarlo.
- La aproximación justo alcanzándolo.

- El tratar de parecerse a... -sin variación, como “este azul tiende a violeta”).
- La confusión generada porque al final los términos siempre toman el mismo valor.

Con base en estos problemas respecto a la noción de aproximación, surgen diversas propuestas en cuanto a la enseñanza de las matemáticas y sobre cómo diseñar actividades que favorezcan el aprendizaje; ya que diferentes estudios realizados en nuestro sistema educativo muestran que el nivel de entendimiento de los conceptos matemáticos, en general, es muy bajo. Por ello la necesidad buscar alternativas, que se propicie el aprendizaje a través de la implementación de actividades en grupos de aprendizaje cooperativo, donde los estudiantes tienen la oportunidad de exponer y debatir sus ideas en pequeños grupos y en el grupo completo, y de reflexionar sobre diferentes acercamientos que permita ir evolucionando sobre el nivel de comprensión de los conceptos involucrados.

Una dinámica que aleje a los estudiantes del aprendizaje memorístico y rutinario, que le permite resolver sólo cierto tipo de problemas que quedan a nivel de ejercicios los cuales, incluso, les alcanza para aprobar sus evaluaciones, pero rara vez comprenden lo que están haciendo. Quizá sea por eso que no solamente no valoran la conveniencia de aprender cálculo, sino que además, lo consideran inútil para su formación.

En este contexto, Arcos (2008) recomienda ofrecer a los alumnos de bachillerato y escuelas de ingeniería, un cálculo que recupere las cualidades didácticas del cálculo de Leibniz. Un cálculo basado en cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes, que permita una mejor comprensión de los conceptos básicos de la materia.

Por su parte, Azcárate (1996), basándose en los trabajos de Cornu (1994) y Sierpiska (1990), manifiesta que la enorme dificultad de la enseñanza del concepto de límite se debe a su riqueza y complejidad; además, que los aspectos

cognitivos implicados en este concepto no se pueden generar a partir de la definición matemática.

Si bien, nos ha quedado clara la dificultad ante la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite, nuestra propuesta es problematizar su enseñanza; es decir, incorporar la resolución de problemas en la práctica docente. Además sugerir libros de texto que adopten esta línea, que son nuevas formas de abordar conceptos referentes a las matemáticas del cambio; particularmente con Tall (2010), Stewart (1988), Arcos y Sepúlveda (2014), entre otros.

Todas estas razones nos han llevado a investigar dichas dificultades de enseñanza y aprendizaje, y a cómo favorecen actividades diseñadas a propósito, con una metodología apropiada; tales son las propuestas en este trabajo de investigación.

1.3 Planteamiento del problema

Desde siglos atrás y hasta la actualidad, hemos visto que los resultados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en cualquier nivel escolar, no son buenos. Muy particularmente, si hablamos del cálculo o de conceptos tan abstractos como límite, el resultado no es muy diferente. Es por esto, que muchos investigadores han dedicado sus esfuerzos, al estudio de estas dificultades.

En nuestro caso, desarrollamos este trabajo con estudiantes que aún no han llevado el curso de cálculo en el bachillerato, con el objetivo de sumergirlos desde una edad relativamente temprana a conceptos abstractos, para así, facilitar su comprensión cuando se enfrenten directamente a ellos.

El siguiente, es nuestro problema de investigación:

¿QUÉ TIPO DE ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS FAVORECEN LA
COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE EN ESTUDIANTES SIN
NOCIONES PREVIAS DEL CÁLCULO?

Nuestro interés se centra en justificar la promoción de un ambiente de aprendizaje en el salón de clases, donde los estudiantes tengan oportunidad de desarrollar recursos y procesos matemáticos que les ayuden a resolver diversos tipos de problemas. Dicho ambiente se genera como consecuencia de dos aspectos fundamentales: i) las características que poseen los problemas que se presentan a los estudiantes; y ii) el segundo está asociado con las formas de trabajo en el aula.

Por ello, cobra relevancia identificar principios que guíen el diseño de problemas que promueven el desarrollo de esos recursos y estrategias matemáticas en los estudiantes.

Asimismo, en dicha implementación se contempla la combinación del trabajo de los estudiantes en pequeños grupos, cuyo fundamento se encuentra en los grupos de aprendizaje cooperativo, donde muestren su entendimiento inicial del problema y presenten sus acercamientos espontáneos a todo el grupo, expongan y defiendan sus ideas ante los demás mediante la discusión colectiva y, finalmente, elaboren un reporte individual de la actividad realizada.

No hemos tomado en cuenta que los alumnos tengan conocimientos previos respecto a la actividad o al concepto mismo. Pero sí, que las actividades propuestas sean variadas en cuanto a su resolución y fáciles de entender; que animen a los estudiantes a experimentar y visualizar series infinitas que se aproximan a “algo”. Todo ello con el fin de promover la creatividad, el descubrimiento, la comunicación de resultados, así como la formación y argumentación de conjeturas.

1.4 Objetivos y/o preguntas de investigación

El objetivo es analizar los resultados de la implementación de dos actividades, diseñadas de tal manera que se introduzca la intuición del concepto de límite. No se trata qué tanto se logra aprender el concepto, sino más bien facilitar el entendimiento y generar en los estudiantes la intuición del límite a través de la aproximación. Estas actividades fueron presentadas a un grupo de estudiantes de bachillerato que están a punto de iniciar con el cálculo. La intención es averiguar de qué manera influyen estas actividades en la construcción del concepto de límite, en personas que no han estado expuestas a dichos conocimientos.

Otro de nuestros objetivos al realizar esta investigación es analizar las dificultades que presentan los alumnos al enfrentarse a situaciones problemáticas que involucran el concepto de límite, considerando que aún no lo conocen y qué caminos toman para llegar a la solución.

También, identificar los procesos matemáticos desarrollados por los alumnos que logran la comprensión de este concepto. Para de esta forma averiguar de qué manera contribuyen las actividades propuestas en la formación inicial de estos conceptos.

Así, nuestras preguntas de investigación son:

1. ¿Qué características deben tener las actividades propuestas, para que los estudiantes expresen lo que saben y estén dispuestos a investigar lo que desconocen?
2. ¿Qué procesos matemáticos desarrollan los estudiantes cuando se enfrentan a problemas que involucran el concepto de límite?
3. ¿A qué obstáculos se enfrentan los estudiantes al momento de aprender el concepto de límite?
4. ¿Las actividades propuestas contribuyeron para que los alumnos logren la comprensión intuitiva del concepto de límite?
5. ¿Qué papel juega el profesor en el desarrollo de dichas actividades?

CAPÍTULO II. Revisión de literatura

2.1 Introducción

En este capítulo exponemos algunos aspectos teóricos y resultados de investigaciones con respecto a la problemática del aprendizaje del concepto de límite. Presentaremos una breve reseña del desarrollo histórico y su influencia en la formalización del concepto. Se mencionan también algunas ideas y propuestas de varios investigadores para superar las dificultades de aprendizaje de dicho concepto.

Durante la vida educativa del ser humano, específicamente en el aprendizaje de las matemáticas en el nivel básico, se pueden identificar muchas problemáticas en el desarrollo del proceso enseñanza aprendizaje, se puede mencionar por ejemplo la falta de una planeación didáctica por parte del maestro, así como las dificultades de aprendizaje del mismo alumno en la materia.

En las últimas décadas se han señalado algunas notables deficiencias en la enseñanza de las matemáticas. Muchas de ellas tienen que ver con el papel que “se le asigna” o asume el estudiante en el proceso educativo, ya que en el modelo tradicional regularmente juega un papel pasivo, sólo como un “receptor” de la información que, supuestamente, habría de transmitirle el profesor.

Tal situación impide que se tenga, en la mayor parte de los alumnos, un aprendizaje significativo y prácticamente una nula capacidad para resolver problemas. Al respecto de la manera en la que tradicionalmente se resuelven problemas en las aulas, Schoenfeld señala:

Raramente la presentación de la solución de un problema por parte del maestro dura más de cinco o diez minutos. A los estudiantes nunca les queda la impresión de que uno puede dedicar horas (mucho menos días, semanas o meses) trabajando en un problema... Se les priva de la oportunidad de mostrar algún progreso en la resolución de problemas

complicados y como consecuencia se les reprime de la esperanza destacarlos, a aquellos que son capaces de trabajar estos problemas.

(Citado por Santos, 1997)

2.2 Reseña histórica

Algunas de las ideas fundamentales del cálculo se remontan a los antiguos matemáticos griegos del tiempo de Arquímedes (287-212 a C.), así como a los trabajos de los primeros años del siglo XVII realizados por René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), por mencionar algunos. Sin embargo, la invención del cálculo se atribuye a Isaac Newton (1642-1725) y a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) debido a que ellos iniciaron la generalización y unificación de estos conceptos matemáticos.

No podemos dejar de mencionar a personajes del siglo XVII Y XVIII tales como: Johann Bernoulli (1654-1705), Leonhard Euler (1707-1783) y Joseph L. Lagrange (1736-1748), que también intervinieron en el desarrollo del cálculo. No obstante, no fue sino hasta el siglo XIX en que se establecieron los fundamentos de las nociones y los procesos del cálculo por matemáticos como Bernhard Bolzano (1781-1848), Augustin L. Cauchy (1789-1857), Karl Weierstras (1815-1897) y Richard Dedekin (1831-1916).

El infinito va de la mano con el cálculo; vulgarmente se utiliza la palabra infinito para denotar algo muy grande, ilimitado o imposible de contar. Pero el infinito va más allá de lo «muy grande» y de la posibilidad humana (temporal) de contar. La noción de infinito como idea de algo ilimitado o inalcanzable, ha sido una fuente de confusión a través de la historia. Perturbó a los antiguos griegos, quienes trataron inútilmente de comprenderlo sometiendo el infinito a la intuición del sentido común, la cual, lamentablemente, estaba inspirada en un mundo finito y, generalmente, los condujo a conclusiones contradictorias y paradójicas, como la famosa carrera donde Aquiles nunca alcanza a la tortuga.

Por su parte, Aristóteles trató de enfrentar el problema del infinito a través de dos representaciones, dos concepciones complementarias y cuya interacción dialéctica ha influido el propio desarrollo de la matemática. En el tercer libro de su obra Física, Aristóteles distingue dos tipos de infinito; el infinito como un proceso de crecimiento sin final o de subdivisión sin final y el infinito como una totalidad completa. El primero es el infinito potencial y el segundo el infinito actual.

La noción de infinito potencial se centra en la operación reiterativa e ilimitada, es decir, en la recursividad interminable, por muy grande que sea un número natural siempre podemos concebir uno mayor, y uno mayor que este último y así sucesivamente, donde esta última expresión y “así sucesivamente” encierra la misma idea de reiteración ilimitada, al infinito. Este tipo de infinito potencial es el que sirve de base a la noción de límite del cálculo infinitesimal. Por su parte, la noción de infinito como totalidad fue ampliamente desarrollada en la geometría al dividir un segmento de recta en un número infinito de puntos y el infinito actual de los infinitesimales sirvió de soporte heurístico para la posterior formalización del cálculo infinitesimal.

Fue así que esta discusión influyó en las diferentes definiciones de límite que se presentaron a lo largo de la historia, y que aún hoy, causa confusión y controversias en quienes se introducen en este concepto.

2.3 Definición de límite

Una definición informal, como la que se estudia en el bachillerato podría ser: Sea $f(x)$ definida en un intervalo abierto alrededor de x_0 , excepto, posiblemente, en el mismo punto x_0 . Si $f(x)$ se acerca tanto como queramos a L para toda x lo suficientemente cerca de x_0 , decimos que f se aproxima al límite L cuando x se acerca a x_0 y escribimos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

El cual se lee como “el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es L ”. Esta definición es “informal” ya que frases como “tanto como queramos” y “suficientemente cerca”, son imprecisas; su significado depende del contexto. Para un mecánico que fabrica un pistón, cerca significa milésimas de pulgadas. Para un astrónomo que estudia las galaxias distantes, cerca significa algunos miles de años luz. A pesar de ello, la definición es lo bastante clara para permitirnos reconocer y evaluar límites de funciones específicas.

Sabemos que el concepto es fundamental para el cálculo, de manera que para poder profundizar en el conocimiento de la materia es imprescindible, tanto el manejo práctico de las reglas para el cálculo de límites, como la comprensión teórica del concepto de límite, por tanto la definición con ε y δ se puede escribir de la siguiente manera:

El hecho de que $f(x)$ está tan cerca de L como queramos, quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$\text{si } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

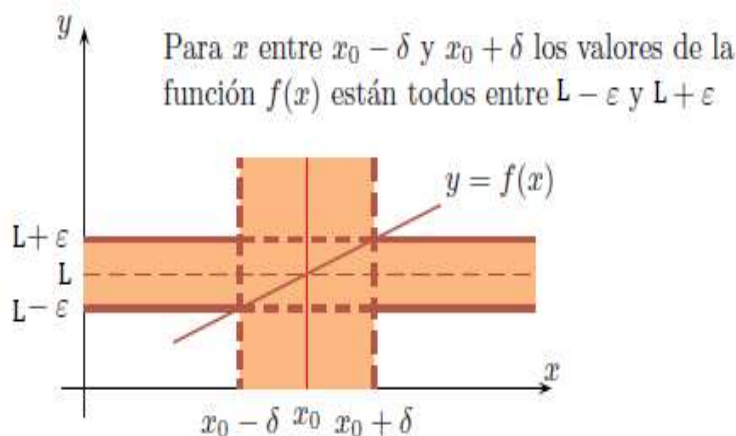


Ilustración 1: La definición de límite se refleja en el gráfico.

A pesar de la importancia de la definición $\varepsilon - \delta$, a nivel teórico, especialmente en la demostración de teoremas, a nivel práctico, en el cálculo de límites, la definición $\varepsilon - \delta$ no es útil. La definición $\varepsilon - \delta$ solamente nos permite comprobar si un límite dado es correcto o no, pero no nos permite calcular límites. Además, su aplicación para comprobar límites suele ser artificial y difícil.

2.4 Dificultades de aprendizaje

La enseñanza de la matemática tiene la finalidad de desarrollar la capacidad de razonamiento y la facultad de la abstracción. Su rigor lógico y sus métodos aplicados a los distintos fenómenos y aspectos de la realidad deben ir unidos a la observación y la experimentación para potenciar el aprendizaje.

El desarrollo de la observación, la intuición, la creatividad y el razonamiento lógico, junto con la acción del alumno, son principios básicos sobre los que se construye el hacer matemático. La enseñanza de la matemática tiene que apostar por acciones meta cognitivas para el aprendizaje, para ello es importante:

- Basar la educación en la experiencia, el descubrimiento y la construcción de los conceptos, procedimientos y estrategias; más que en la instrucción.
- Basar la educación en estrategias de falsación o contraejemplos, evitando el “bien” o “mal” como autoridad que sustituye a la evidencia. Extender y transferir los conocimientos generando articuladas redes de aplicación.
- Atender a la manipulación de materiales con actividades que optimicen el entendimiento, que provoquen, desafíen y motiven al alumno. Simplicidad, claridad y precisión en el lenguaje utilizado en la presentación de las actividades o enunciación de los conceptos. Respetar al alumno cuando vive el acto de pensar. Potenciar la autoestima, la confianza, la seguridad,...
- Habituarse al alumno a explicar, fundamentar mediante argumentos lógicos sus conclusiones, evitando eso de “porque sí”. Familiarizarles con las reglas de la lógica para permitir el desarrollo y la mejora del pensamiento. Esta

familiarización no debe ser penosa y ardua para el alumno, sino todo lo contrario: una forma de jugar a crear relaciones, contrastando las respuestas antes de optar por una de ellas.

Sin embargo, se debe tomar en cuenta que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas puede ser considerada como una actividad compleja del ser humano. Por un lado, se debe considerar la importancia que tiene el proceso de enseñanza-aprendizaje para el desarrollo de la sociedad y por el otro, las dificultades que plantea llevarlo a cabo.

Con relación a la importancia de este proceso en la sociedad, el NCTM (2000), identifica algunos aspectos fundamentales acerca del por qué es relevante el estudio de las matemáticas:

- Es un factor sobresaliente en el desarrollo de la cultura universal;
- Representa un soporte para el desarrollo científico y tecnológico de la sociedad;
- Es un elemento fundamental en el desarrollo científico de otras disciplinas correspondientes a las ciencias exactas, ciencias sociales, ciencias médicas, ciencias biológicas, etcétera.

La compleja evolución de la historia de esta ciencia, muestra que el conocimiento matemático fue construido como respuesta a preguntas que fueron transformadas en muchos problemas provenientes de diferentes orígenes y contextos; tales como problemas de orden práctico, problemas vinculados a otras ciencias y también problemas de investigación internos a la propia matemática. De este modo, se puede decir que la actividad de resolución de problemas ha sido el centro de la elaboración del conocimiento matemático generando la convicción de que “hacer matemática es resolver problemas”.

En el campo de la educación matemática figuran varias líneas de desarrollo que se ubican en diferentes áreas particulares del mismo campo o de otras, las cuales

pertenecen a diversas disciplinas. La resolución de problemas es, sin duda alguna, la línea sobre la que se han centrado el mayor número de esfuerzos, tanto por lo escrito como por el desarrollo de proyectos de investigación en los últimos 20 años.

Al parecer, la resolución de problemas es función de varias categorías de factores interdependientes, como la adquisición y utilización de conocimientos, control, creencias, y contextos sociales y culturales, que implican ir más allá de la aplicación de procedimientos y conocimientos bien aprendidos (Lester y Kehle, 2003).

Al resolver problemas se aprende a razonar matemáticamente, lo que es uno de los objetivos básicos para la formación de los estudiantes. Con ello aumentan su confianza, tornándose más perseverantes y mejorando su espíritu investigador, proporcionándoles un contexto en el que los conceptos pueden ser aprendidos y las capacidades desarrolladas. Por todo esto, la resolución de problemas está siendo muy estudiada e investigada por los educadores. Sin embargo, su finalidad no debe ser la búsqueda de soluciones concretas para algunos problemas particulares sino facilitar el desarrollo de las capacidades básicas, de los conceptos fundamentales y de las relaciones que pueda haber entre ellos.

Entre las finalidades de la resolución de problemas tenemos:

- Hacer que el estudiante piense productivamente.
- Desarrollar su razonamiento.
- Enseñarle a enfrentar situaciones nuevas.
- Darle la oportunidad de involucrarse con las aplicaciones de la matemática.
- Hacer que las sesiones de aprendizaje de matemática sean más interesantes y desafiantes.
- Equiparlo con estrategias para resolver problemas.
- Darle una buena base matemática.

Por ejemplo, en lo que se refiere al campo conceptual, para Vergnaud (1991) un concepto adquiere sentido para el sujeto a través de situaciones y problemas. El campo conceptual está constituido por problemas que permiten el desarrollo de un concepto, operaciones que son necesarias de utilizar para la resolución de esos problemas, dentro de un sistema matemático.

De hecho, recientemente Balacheff y Gaudin (2009) han añadido una cuarta componente, que es sobre una estructura de control y que en su conjunto ellas forman las concepciones. Este añadido es fundamental en la didáctica de las matemáticas ya que la construcción de conceptos pasa por la construcción de concepciones. Un aspecto de corte práctico es de saber cuál es el campo conceptual para cada concepto que se quiere enseñar.

De hecho, ¡allí radica el principal problema! Para cada concepto matemático, ¿qué tipo de problemas o actividades son importantes de seleccionar para que el aprendizaje sea efectivo? Los investigadores proporcionan buenos ejemplos de lo que puede incluirse en ese campo conceptual; pero, para la mayoría de los conceptos que el profesor debe tratar en el aula, el profesor no cuenta con suficientes actividades que le permitan desarrollar una enseñanza adecuada de las matemáticas.

En nuestra investigación en general, se ha considerado el modelo de comprensión de Sierpinska (1990), que propone la comprensión como un acto que está inmerso en un proceso de interpretación, y que se desarrolla en forma de dialéctica, lo que produce un nuevo conocimiento, ligado a cuatro actos de comprensión (identificación, discriminación, generalización y sintetización). Aquí se considera la comprensión en el sentido que el proceso de interpretación está relacionado con sus representaciones y, por tanto, con el dominio del concepto como indican Castro y Castro (1997). Para estos autores, los conceptos matemáticos se pueden expresar por varios sistemas, dando lugar a lo que Janvier *et al.* (1993) llama representaciones sinónimas (las representaciones diferentes de un mismo objeto matemático). Particularmente, en el concepto de límite, nosotros consideramos estos cuatro sistemas de representación: verbal, numérico, gráfico y simbólico.

Como ya se ha indicado, la idea de comprensión está ligada a los sistemas de representación y, según Romero (2000), la comprensión se caracteriza a partir de una serie de actividades asociadas a los sistemas de representación, como las que se enuncian en este trabajo, actividades que se ilustran con referencias a la didáctica del concepto de límite, que es el objeto de nuestra investigación.

Son numerosos los obstáculos que antes y después de la enseñanza manifiestan los alumnos con respecto al concepto de límite. En lo que se refiere a este concepto, Cornu (1983) identifica los siguientes obstáculos epistemológicos:

- Sentido común de la palabra límite, lo que induce a concepciones persistentes de límite como barrera infranqueable o como último término de un proceso.
- Sobregeneralización de las propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos.
- Aspecto metafísico de la noción, ligado con el infinito, ya que introduce una nueva forma de razonamiento.
- Los conceptos infinitamente grandes y cantidades infinitamente pequeñas.

Para el tratamiento del obstáculo geométrico del concepto de límite, es necesario retomar aspectos que tiene que ver con la disposición del aula, donde se brinde un ambiente caracterizado por promover una interacción del estudiante con las actividades que se proponen. Cornu, (1991, citado en Blázquez, 1999, p. 42) observa que “No basta con presentar una exposición clara del concepto a los alumnos para que éstos lo adquieran” defiende, sin embargo, “la elaboración de actividades que les hagan darse cuenta de sus ideas espontáneas, imágenes, intuición, experiencias anteriores, etc.” de igual manera, defiende “la participación del estudiante en su proceso de abstracción y el uso del ordenador como herramienta para que el estudiante construya el concepto”.

Particularmente, Cornu (1981) investigó las dificultades relacionadas con la noción de límite y la expresión “tiende a”, con alumnos universitarios de primero de matemáticas. Descubrió que sus intuiciones y “modelos espontáneos” respecto a

esas nociones estaban coloreados por ideas cotidianas como la de que no se puede traspasar el límite, aunque se esté en condiciones de superar el límite de velocidad permitida.

Varios ejemplos confirman que los significados múltiples constituyen un problema característico de muchos términos matemáticos. Determinadas palabras de uso cotidiano se escogen con frecuencia a causa de las imágenes o fenómenos ligados a nuestra existencia, pero que no siempre sus significados matemáticos se ajustan a ellas con precisión.

Es así como Blázquez y Ortega (2002) consideran conveniente presentar al alumno distintos sistemas de representación de la idea de límite, antes de trabajar con la definición formal. Como son:

- Verbal: es una aproximación óptima de los valores que toma una función en un entorno del punto en cuestión.
- Numérico: es un proceso de tendencia basado en una tabla de valores de la variable independiente y sus correspondientes imágenes, donde se mejora cualquier aproximación al límite con valores muy cercanos al punto de interés.
- Gráfico: el límite se representa como un punto en el eje de las ordenadas tal que a todo entorno que lo contiene le corresponde otro entorno del punto de interés sobre el eje x , en el que se proyecta.
- Algebraico: corresponde a la definición topológica, donde aparecen $\varepsilon - \delta$ que no son otra cosa que los controles de las aproximaciones.

Entendemos que la inclusión de estas representaciones favorecería la construcción de una imagen conceptual más amplia, operativa y con mayores posibilidades de que la definición conceptual del sujeto sea próxima a lo matemáticamente correcto.

También proponemos un cambio en la visión y en las perspectivas de lo que tradicionalmente significa la evaluación, para el profesor de matemáticas; ésta debe tomar en cuenta todo el trabajo que realiza el estudiante para resolver una

tarea y no sólo el resultado o respuesta final; además, debe servir como una fuente de retroalimentación para la actividad que realiza el profesor, convirtiéndose en una fuente de información para la toma de decisiones instruccionales. Sin duda, el papel del profesor es de suma importancia a la hora de una instrucción adecuada, ya que sin su participación, aunque la actividad esté bien diseñada, difícilmente logrará su objetivo.

De la misma manera, se debe considerar que un factor determinante en la complejidad del sistema educativo nacional es la diversidad en la formación matemática de los profesores del nivel medio superior; y si a esto agregamos la existencia de distintos planes y programas de estudio, se originan diferentes perfiles de egreso de los estudiantes en cuanto a sus niveles de competencia y a la adquisición de habilidades. Es decir, alumnos del mismo bachillerato que estudiaron cursos distintos de matemáticas, impartidos en una escuela con el mismo nombre, egresan con desiguales niveles de exigencia y con diferentes resultados en el aprendizaje.

En la introducción de los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares (NCTM, 2000), se comenta que los estudiantes se ocupan de la solución de problemas planteados por el profesor, quien debe tener un conocimiento profundo de las matemáticas involucradas, y éste los ayuda a plantear conjeturas interviniendo en momentos clave, sin que proporcione ideas que eliminen el reto de la misma.

2.5 La importancia de actividades

El cambio en la práctica de las matemáticas, obliga a reexaminar la educación matemática. Además de contenidos, las actividades propuestas y realizadas en el aula transmiten también mensajes implícitos sobre qué son las matemáticas. He ahí la importancia del diseño de actividades sumamente atractivas para los

estudiantes y fáciles de entender, sin importar qué tan abstracto sea el concepto que se quiere abordar.

Las actividades propuestas deben, por un lado, constituir un reto para su curiosidad, que los estimule a expresar lo que ya saben y los incite a investigar lo que desconocen, por medio de la discusión, la experimentación y el intercambio de experiencias (NCTM, 2000). La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas implican un comportamiento complejo que requiere de reflexión y de un esfuerzo continuo para lograr una disposición por la enseñanza efectiva y un aprendizaje con entendimiento. En el NCTM (2000) se plantea:

En la enseñanza efectiva, se emplean tareas que poseen cualidades para ideas matemáticas importantes y para comprometer y retar intelectualmente a los estudiantes. Las tareas seleccionadas pueden despertar la curiosidad de los estudiantes y atraerlos hacia las matemáticas, ya que pueden ser conectadas con experiencias de los estudiantes del mundo real, y ello puede originarse en contextos que son puramente matemáticos... La solución de tales tareas puede ser desde distintos caminos... Pero estas tareas por sí solas no son suficientes para una enseñanza efectiva. Los profesores también deben decidir qué aspectos de una tarea deben resaltarse, cómo organizar y orquestar el trabajo de los estudiantes, qué preguntas hacer al considerar una variedad de experiencias, y cómo apoyar a los estudiantes que no han realizado los procesos de pensamiento, sin eliminar el reto que contiene la tarea. (pp. 18, 19)

Por otro lado, las actividades deben permitir inferir las maneras de cómo los estudiantes están pensando matemáticamente, las demandas esenciales contenidas en la tarea y observar la evolución de ciclos de entendimiento durante su interacción con los problemas; por ejemplo, en el nivel que emplean recursos y utilizan estrategias en el proceso de solución de la actividad (Lesh *et al.*, 2000).

Las actividades diseñadas para la enseñanza son secuencias integradas de procedimientos y recursos utilizados por el formador con el propósito de desarrollar en los estudiantes capacidades para la adquisición, interpretación y procesamiento de la información; y la utilización de éstas en la generación de nuevos conocimientos, su aplicación en las diversas áreas en las que se desempeñan la vida diaria para, de este modo, promover aprendizajes significativos. Las actividades deben ser diseñadas de modo que estimulen a los estudiantes a observar, analizar, opinar, formular hipótesis, buscar soluciones y descubrir el conocimiento por sí mismos.

Para que una institución pueda ser generadora y socializadora de conocimientos, es conveniente que sus estrategias de enseñanza sean continuamente actualizadas, atendiendo a las exigencias y necesidades de la sociedad.

Desde una perspectiva histórica la resolución de problemas ha sido siempre el motor que ha impulsado el desarrollo de la matemática. Pero, este papel clave de los problemas no se traduce, en general, como la actividad principal en las sesiones de aprendizaje de matemática de nuestros institutos como eje del desarrollo del currículo.

En los primeros años de la década de los años 80 del siglo XX, el NTCM de los Estados Unidos de Norte América hizo algunas recomendaciones sobre la enseñanza de la matemática, las que tuvieron una gran repercusión en todo el mundo. La primera de esas recomendaciones decía: “El Consejo Nacional de Profesores de Matemática recomienda que en los años 80 la Resolución de Problemas sea el principal objetivo de la enseñanza de matemática en las escuelas”.

A partir de la publicación de esas recomendaciones, hasta hoy, la mayoría de los congresos, cursos y seminarios, tanto nacionales como internacionales, vienen dando una importancia muy grande a este tema en todos los niveles de la enseñanza.

Existen varias estrategias metodológicas para la enseñanza de la matemática, además de la resolución de problemas, existen actividades lúdicas y modelaje.

Las cuales están desarrolladas con la preocupación de proponer el uso de recursos variados que permitan atender a las necesidades y habilidades de los diferentes estudiantes, además de incidir en aspectos tales como:

- Potenciar una actitud activa.
- Despertar la curiosidad del estudiante por el tema.
- Debatir con los colegas.
- Compartir el conocimiento con el grupo.
- Fomentar la iniciativa y la toma de decisión.
- Trabajo en equipo.

El NCTM también propone la resolución de problemas como una actividad fundamental que los estudiantes deben realizar en forma individual y colectiva, pues propicia un ambiente para el aprendizaje significativo de los estudiantes y la intervención de otros procesos. Por ejemplo, la búsqueda de conexiones y el empleo de distintas representaciones, o la necesidad de justificar los pasos dados en la solución de un problema y comunicar los resultados obtenidos.

Con este tipo de actividades, se espera que los estudiantes desarrollen ciertas habilidades para el estudio y entendimiento de las matemáticas, las cuales están vinculadas con los aspectos característicos del quehacer de la disciplina.

Santos (1997b) sugiere algunos criterios para guiar el diseño de problemas que ofrezcan un potencial matemático para el salón de clases:

1. Los problemas, sin ser fáciles, deben ser accesibles a una gran variedad de estudiantes con diferentes antecedentes o recursos matemáticos;
2. Los problemas deben demandar de los estudiantes un plan de reflexión. Es decir, que no puedan resolverse instantáneamente;
3. Los problemas deben involucrar varias formas de solución. Algunas formas o caminos para obtener la solución pueden revelar o ilustrar la riqueza de las ideas matemáticas, así como mostrar conexiones existentes entre las diferentes áreas de esta disciplina;

4. Las soluciones de los problemas pueden permitir y facilitar el uso de las ideas matemáticas, sin necesidad de recurrir a trucos o consideraciones muy sofisticadas;
5. Los problemas deben de servir de plataformas para realizar diversas exploraciones matemáticas. Así los estudiantes tendrán la oportunidad de identificar algunas metas parciales, cambiar las condiciones iniciales del problema, identificar problemas relacionados, etc.;
6. Cuando un alumno resuelva un problema, deberá ser posible identificar los procesos y operaciones empleadas, así como recuperar y analizar tanto el plan de solución como las estrategias utilizadas, y
7. Los problemas deben situarse en contextos donde los estudiantes puedan utilizar o acceder a las experiencias y recursos matemáticos previamente estudiados, con cierta naturalidad [...] Aquí lo importante es el tipo de discusión que se fomente en el salón de clases. (pp. 283, 284)

Entonces, si reconocemos que uno de los propósitos de la matemática, como el de otras ciencias, es el de resolver problemas, es claro que las actividades relacionadas con la resolución de problemas, deberán tener un alto valor didáctico.

Como consecuencia, existe la propuesta de los Paquetes de Evaluación Balanceada del grupo de investigadores encabezado por Schoenfeld (*Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum* 1 y 2, 1999, 2000), quienes diseñaron tareas o actividades, las cuales reúnen estas cualidades: que sean atractivas y fáciles de entender para los estudiantes; que contengan contenidos fundamentales del currículum; y que por su diseño, permitan recuperar los procesos de pensamiento que utilizaron los estudiantes en sus intentos de solución. Estos paquetes contienen 27 tareas que cubren diversos contenidos de nuestro sistema escolar, de tercer grado de secundaria a tercero de bachillerato. Se destaca la importancia del uso de tareas que contienen problemas con dichas cualidades, ya que permiten compartir la satisfacción que se tiene al “reconstruir”

las matemáticas y que, a su vez, puede ayudar a responder la pregunta planteada, frecuentemente, por los estudiantes con relación a la utilidad del conocimiento matemático.

Con este tipo de actividades, se espera que los estudiantes desarrollen ciertas habilidades para el estudio y entendimiento de las matemáticas; es decir, con acciones cotidianas que realiza una persona que se encuentra inmerso en resolver problemas. Estas acciones han sido identificadas por Schoenfeld (1992), Mason, Burton y Stacey (1987), como las características del pensamiento matemático y son: tomar casos particulares, plantear conjeturas, descubrir patrones y relaciones, hacer generalizaciones, justificar resultados.

Con el fin de contribuir al diseño de actividades que sirvan para promover el aprendizaje, un grupo de investigadores se ha dedicado a establecer las bases y principios para la creación de “actividades de pensamiento revelador” o “de generación de modelos” (Lesh *et al.*, 2000), sentando las bases para una nueva teoría sobre el aprendizaje en educación matemática. Estas actividades tienen la cualidad de permitir a los estudiantes revelar sus ideas iniciales, después se presenta un proceso de evolución que es producto de su interacción con la tarea, con el medio ambiente o con otros compañeros de su salón de clases y el profesor.

De esta manera, se extienden sus ideas y las expresan a través de modelos que son la base de un entendimiento matemático profundo, las cuales son incorporadas, de alguna manera, en una diversidad de formas de representación. Es decir, se generan ciclos de entendimiento que evolucionan a través de sus interpretaciones iniciales, intermedias y finales, con lo cual se puede percibir el nivel de matematización que los estudiantes están logrando. La identificación de estos ciclos en términos de los recursos matemáticos, estrategias y representaciones, generan información útil para analizar los acercamientos de los estudiantes en la resolución de problemas.

En particular, Lesh y Kelly (2000) así como Doerr y English (2003) han documentado que cuando los estudiantes tratan con tareas o problemas que les

son significativos, desencadenan ideas matemáticas fundamentales. Además, frecuentemente, sus soluciones van más allá de la situación escolar y, eventualmente, construyen modelos para resolver las tareas. De la observación y análisis de su trabajo surge un mejor entendimiento de las fortalezas y debilidades de los estudiantes, los cuales capacitan a los profesores para la toma de decisiones en la instrucción, que contribuyan a lograr una enseñanza más efectiva.

Doerr y English (2003) destacan la importancia de que las actividades estén planteadas a los estudiantes en ricos contextos familiares, y tengan el potencial de provocar constructos significativos matemáticamente; es decir, que sean generativas y contribuyan a fomentar habilidades de los estudiantes para expresarse y hacer generalizaciones, a partir de sus entendimientos y conjeturas iniciales. Y estamos seguros, que las tareas que hemos seleccionado para este estudio reúnen estas cualidades. Estos investigadores también señalan que el método de implementación de las actividades en el aula, debe promover el aprendizaje a través de la revisión y procesos de refinamiento de sus maneras de pensar sobre los datos y relaciones que involucran las actividades, originando múltiples ciclos de interpretación; lo que permite identificar momentos cruciales en los cuales los estudiantes realizan pasos importantes en la solución de los problemas involucrados.

Castro y Castro (1997, p. 103), menciona que dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones y el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema y en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades.

Particularmente, muchos libros mencionan que se necesitan de ideas básicas para iniciar el estudio del cálculo. Entre los temas necesarios, se menciona el estudio de los números reales, las coordenadas en el plano cartesiano, las funciones y la trigonometría, por mencionar algunos. Pero el concepto que marca la diferencia entre el cálculo, el álgebra y la trigonometría, es el límite. El límite es fundamental

para determinar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto. Es por eso que nos hemos centrado en el estudio de este concepto.

Por esta razón en los Principios y estándares, el NCTM (2000) plantea los contenidos matemáticos que deben estudiarse durante el bachillerato: números y operaciones, álgebra, geometría, medición, análisis de datos y probabilidad. Mientras se estudian estos contenidos, se recomienda impulsar y desarrollar los procesos referidos en el NCTM (2000). El estudio de los estándares de proceso destacan las formas para adquirir y aplicar esos conocimientos, por ejemplo para las representaciones menciona que las ideas matemáticas pueden ser representadas en formas variadas: imágenes, materiales concretos, tablas, gráficos, números, y letras, hojas de cálculo y muchas otras cosas más.

La forma en la cuales se representan las ideas matemáticas son fundamentales para determinar cómo las personas comprenden y utilizan estas ideas. Muchas de las representaciones que damos ahora por ciertas, han sido el resultado de la elaboración cultural que se desarrolló a través de muchos años. Cuando los estudiantes tienen acceso a las representaciones matemáticas y a las ideas que éstas expresan, y cuando además los estudiantes pueden crear representaciones para capturar conceptos matemáticos o relaciones, ellos adquieren un conjunto de herramientas que expanden significativamente su capacidad para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

Sin embargo, los programas de estudios oficiales de la Secretaría de Educación Pública (SEP) establecen que la enseñanza de las matemáticas, en secundaria y bachillerato, tiene como propósito general el desarrollo de las habilidades operatorias, comunicativas y de descubrimiento de los alumnos, quienes deben desarrollar capacidades para:

- Adquirir seguridad y destreza en el empleo de técnicas y procedimientos.
- Reconocer y analizar los distintos aspectos que componen un problema.
- Elaborar conjeturas, comunicarlas y validarlas.
- Comunicar estrategias, procedimientos y resultados de manera clara y concisa.

- Predecir y generar resultados.

En la práctica, el nivel de preparación de los estudiantes dista mucho de este propósito educativo; la situación actual del aprendizaje, causada por el insuficiente nivel de conocimientos de los estudiantes, ha sido el objeto de investigación. La idea es que estas tareas puedan ser utilizadas por los profesores en el aula; sin embargo, su implementación en los sistemas educativos tradicionales plantea retos y dificultades, ya que subsiste una organización escolar rígida donde regularmente se ejerce presión por cubrir los contenidos curriculares y aprobar a los estudiantes; además, las diferencias en la preparación de los profesores son evidentes y la improvisación de reformas curriculares por parte de las autoridades educativas parece ser la norma.

CAPÍTULO III. Metodología

3.1 Introducción

El interés de nuestra investigación es promover un ambiente de aprendizaje en grupos escolares, donde los estudiantes tengan oportunidad de utilizar recursos y desarrollar procesos matemáticos para resolver problemas. Para ello se llevó a cabo la implementación de actividades que permitieron observar lo que los estudiantes sabían y los estimuló a expresar lo que desconocían por medio de la discusión, la experimentación y el intercambio de ideas. El estudio se llevó a cabo con estudiantes de bachillerato, dispuestos a cooperar con la investigación, sin recibir ningún beneficio a cambio y además, sin una instrucción previa de la metodología que se utilizaría.

Durante la instrucción, los estudiantes tuvieron la oportunidad de exhibir sus ideas y formas de abordar las actividades. En particular, resultó relevante que los estudiantes reconocieran la importancia de constatar sus propios acercamientos con aquellos que proponían sus compañeros. En este contexto, en el trabajo de los estudiantes aparecieron múltiples formas de representar e interpretar las actividades. Así, en las actividades de instrucción se combinó el trabajo individual y colectivo en pequeños grupos y con la clase completa, registrándose los hechos relevantes en estas formas de trabajo.

Estas actividades fueron diseñadas de tal manera que ayuden al alumno a tener una noción sobre el concepto de límite, para que de alguna manera les ayude, en un futuro, a tener una forma diferente de entender dicho concepto y no sólo verlo de una manera algebraica como suele enseñárseles en la mayoría de las escuelas.

A continuación describiremos más particularmente cada una de las dos actividades aplicadas y las condiciones en las que se llevó a cabo la investigación.

3.2 Actividades diseñadas

Las actividades seleccionadas debían reunir las siguientes características: involucrar contenidos fundamentales del currículum; deben ser fáciles de entender y resultar atractivas para que los estudiantes expresen lo que piensan con base en sus conocimientos iniciales y que los invite a investigar lo que desconocen mediante la reflexión, la discusión colectiva y el intercambio de experiencias; y que por su diseño, permitan recuperar los intentos de solución que fueron utilizados por los estudiantes.

Considerando dichos propósitos y características, se seleccionaron y ajustaron un par de actividades que involucran contenidos del nivel medio superior, más específicamente, relacionadas con el concepto de límite.

Según Lesh *et al.* (2000), las descripciones y explicaciones que construyen los estudiantes mientras están trabajando, nos revelan cómo están interpretando las situaciones matemáticas que encuentran por descubrimiento, y también, revelan cómo estas situaciones empiezan a ser matematizadas e interpretadas; donde matematizar involucra hacer una descripción simbólica de una situación significativa.

Descripción de la tarea. Consiste en dar una breve explicación de los elementos que la conforman; con el propósito de aclarar al estudiante lo que debe resolver o investigar. El análisis de este componente contribuyó a responder la pregunta relacionada con los recursos involucrados de la disciplina.

Condiciones para su empleo. Tiempo estimado para trabajar el problema; materiales de apoyo que se requieren; forma de trabajo en el aula al implementar la actividad (individual y en equipo). Cada actividad consta de entre 20 a 30 minutos para resolverse, se analizaron con la idea de distinguir las diferentes formas de resolver, para identificar los recursos matemáticos utilizados y los diferentes procesos que intervienen en su solución.

Se diseñaron 2 actividades para aplicarse en el transcurso de una semana regular de clases. A continuación se describe cada una de ellas:

1. Los saltos de Yaya, fue tomada de la investigación llevada a cabo por Elizabeth Virrueta Márquez en su tesis para obtener el grado de Maestra en Educación Matemáticas, en el 2012. Se hicieron sólo algunos pequeños ajustes a dicha actividad para nuestro trabajo, siguiendo las recomendaciones de *Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum*, (1999, 2000), proyecto dirigido por Shoenfeld, en donde sugiere que el diseño debe ir acompañado de una descripción de la tarea, conocimientos previos, condiciones para su empleo e indicadores de desempeño. En esta actividad se les pide construir una expresión del salto “n-ésimo” de Yaya, haciendo uso de una tabla para que fuese más fácil de interpretar para los alumnos y así, determinar el límite de la serie cuando el número de saltos es infinito. Esta actividad está basada en la paradoja de Aquiles y la tortuga, en ella los estudiantes deben mover la posición de un objeto y expresar algebraicamente la posición del mismo.
2. El terreno de Don Juanito. Se tomaron las mismas consideraciones que en la de Los saltos de Yaya, pero ahora, ampliando un poco la perspectiva de ésta primera. Aquí la intención era que los estudiantes analizaran la partición infinita de un terreno, y llegaran a la conclusión de que esa repartición tenía que tener un límite. La idea es la misma que el los saltos de Yaya, pero el diseño de esta segunda actividad favoreció considerablemente en el entendimiento del concepto de límite, ya que por su manera geométrica, visualizaron de una manera más física o cotidiana la existencia de un límite a la hora de terminarse el terreno que se debía repartir.

3.3 Actividad 1. Los saltos de Yaya

Descripción de la actividad

En esta actividad los estudiantes debían representar los saltos de la ranita Yaya al irse aproximando a un estanque, justificando qué era lo que pasaba mientras se acercaba más y más, y si llegaría o no al estanque.

Conocimientos previos

Se espera que los estudiantes tengan conocimientos sobre el manejo y entendimiento de expresiones algebraicas y la manipulación de fracciones.

Condiciones para su empleo

- Organización: los estudiantes trabajarán en equipos de 3 o 4 personas, presentarán sus resultados por equipo, discutirán colectivamente y después de un momento de reflexión resolverán las actividades de manera individual.
- Materiales: hojas de trabajo individual y por equipo. Sin restringir el uso de materiales extra por los alumnos (calculadora, regla, etc.).
- Tiempo estimado: 2 horas aproximadamente.

Indicadores de desempeño

- Realizar los trazos que representarían los saltos de Yaya para acercarse al estanque.
- Expresar de manera algebraica la distancia que le faltaría por recorrer a Yaya, por ejemplo, poder llegar a una expresión tal como $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, en el mejor de los casos.
- Estimar el límite de la suma cuando n tiende a infinito. Es decir, concluir si Yaya llegaría al estanque o no, comprobando así, la existencia del límite.

3.4 Actividad 2. El terreno de Don Juanito

Descripción de la actividad

En esta actividad los estudiantes tenían que analizar la partición de un terreno en infinitos cortes para repartirlos. Se pretendía que analizaran la suma de esta serie infinita y a través de ella, concluir que la suma de esa partición finita era el límite.

Conocimientos previos

Se espera que los estudiantes tengan conocimientos sobre el manejo y entendimiento de expresiones algebraicas y la manipulación de fracciones, además de la concepción de aproximación, respecto a la suma de algo infinito.

Condiciones para su empleo

- Organización: los estudiantes trabajarán en equipos de 3 o 4 personas, presentaran sus resultados por equipo, discutirán colectivamente y después de un momento de reflexión resolverán las actividades de manera individual.
- Materiales: hojas de trabajo individual y por equipo. Sin restringir el uso de materiales extra por los alumnos (calculadora, regla, etc.).
- Tiempo estimado: 2 horas aproximadamente.

Indicadores de desempeño

- Realizar las divisiones del terreno para la repartición.
- Expresar de manera algebraica la porción del terreno que va faltando por repartir. Por ejemplo, poder llegar a una expresión tal como $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, en el mejor de los casos.
- Estimar la suma de las porciones del terreno repartido. Es decir, aproximarse al límite de la sucesión de las particiones.

Actividad 1. Los saltos de Yaya

Nombre(s) : _____

INDICACIONES: Analiza la situación que se te plantea y responde a las preguntas; es muy importante que anotes todas las operaciones y trazos que se requieran, aunque las hagas mentalmente o con calculadora. Si utilizas hojas adicionales, no olvides anexarlas al final. Si te equivocas, no borrar.



Yaya es una ranita que vive en un estanque; a ella le gusta contar la cantidad de saltos que necesita hacer para llegar a los objetos que la rodean. Un día, cansada de contar siempre de la misma forma, decide modificar su forma de avanzar y dice: “Ahora cada salto que daré será justo la mitad de la distancia que necesito recorrer para llegar a mi destino”.

Observa el dibujo y ayuda a Yaya a contar los saltos.



Yaya desea llegar al estanque y con el primer salto recorre la mitad de la distancia que inicialmente la separa de ella.

1. Con el primer salto, ¿cuál fue la distancia que recorrió Yaya?
2. ¿Qué distancia le falta recorrer a Yaya para llegar a su destino?
3. Si recorre la mitad de la distancia en cada salto, ¿qué distancia lleva recorrido en el segundo salto?
4. Ilustra los brincos de Yaya en el dibujo anterior y llena la tabla siguiente.

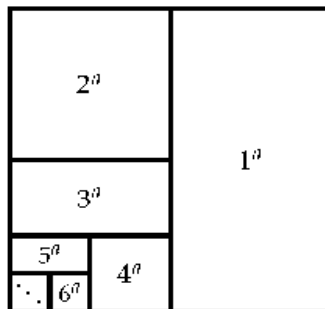
No. de saltos	1	2	3	4	5	6	7				
Distancia por saltar	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$									
Expresión	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$									

5. Observa la tabla, después de 5 saltos, ¿cuánto le falta a Yaya para llegar a su destino? Exprésalo de manera algebraica.
6. Si Yaya diera “n” saltos, ¿qué distancia le falta por recorrer?
7. ¿Qué cantidad de saltos necesita Yaya para llegar al estanque? Argumenta tu respuesta.
8. ¿Qué sucede con la distancia que le falta por recorrer a Yaya a medida que aumenta el número de saltos?
9. ¿En algún momento llegara Yaya al estanque?, ¿por qué?

Actividad 2. El terreno de Don Juanito

Nombre(s): _____

INDICACIONES: Analiza la situación que se te plantea y responde a las preguntas; es muy importante que anotes todas las operaciones y trazos que se requieran, aunque las hagas mentalmente o con calculadora. Si utilizas hojas adicionales, no olvides anexarlas al final. Si te equivocas, no borrares, encierra lo que salió mal y continúa.



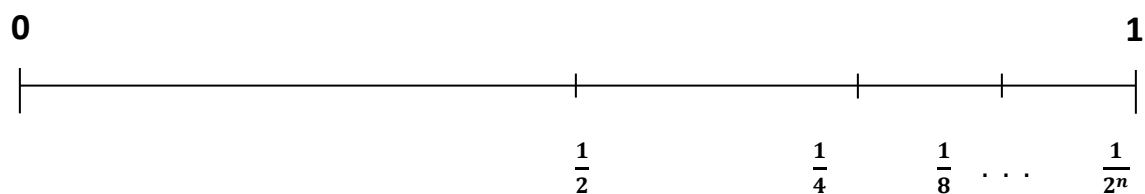
En una ciudad se quiere repartir un terreno donado por el fallecido Don Juanito. El terreno se repartirá entre todas las personas que lleguen al reparto, de tal forma que a la primera persona le tocará la mitad del terreno, a la segunda persona la mitad de lo que haya quedado, a la siguiente, la mitad de lo que haya quedado, y así sucesivamente.

1.- ¿Terminarán algún día de repartir el terreno? ¿Por qué?

2.- Una vez analizada la repartición del terreno, completa la siguiente tabla:

No. de Personas	1 ^o	2 ^o	3 ^o	4 ^o	5 ^o	6 ^o				n ^o
Frac del terreno que le tocó										
Expresión algebraica										

En la siguiente recta se ilustran algunas fracciones que se hicieron al terreno. Puedes ayudarte de ella para trazar más fracciones y ver cuál es la sucesión que se tiene.



3.- ¿Cuál es la sucesión numérica que se tiene de la repartición del terreno?

4.- Después de la 6^o persona, ¿qué porción del total del terreno falta por repartir?

5.- A medida que aumenta el número de personas que llegan al reparto, ¿qué pasa con las fracciones restantes del terreno?

6.- ¿Qué ocurre cuando agregamos más y más términos a la sucesión?
¿Es infinita o finita? ¿Por qué?

7.- ¿La suma se incrementa infinitamente o se aproxima a un número?

8.- Si queremos juntar todas las fracciones del terreno que fueron repartidas, ¿cuánto sería su suma?

3.5 Sujetos

Los sujetos elegidos para la actividad fueron 27 estudiantes del grupo AM de cuarto semestre, Técnicos en Mecánica del Cetis 34, campus Lázaro Cárdenas, Michoacán. Se eligió precisamente un grupo de bachillerato que no estuviera aún familiarizado con el concepto de límite, para analizar cómo las actividades propuestas facilitaban la comprensión de dicho concepto. No era nuestro objetivo que los estudiantes aprendieran límites, sino más bien, que realmente entendieran ese concepto tan abstracto y en el que se tienen tantos problemas; se pretende que lleguen a la concepción de límite mediante la intuición a la aproximación.

Los equipos quedaron conformados de la siguiente manera:

En la actividad Los Saltos de Yaya (primera actividad presentada):

1. Eduardo, Irineo, Luis Ángel y Luis Alfredo (*Equipo de los algebraicos*).
2. Mario, Valente y Fernando (*Equipo algebraicos*).
3. Salvador, Edgar, Ángel y Milleth (*Equipo Salvador*).
4. Noé, Alejandro y Ramón.
5. Erwin, Aurelio y David.
6. Alfredo, Alexis, Miguel y Luis Ángel.
7. Alejandro, Juan Carlos y Arturo.
8. Oscar, Cristian y Samuel.

Los equipos restantes son *los mecanizados*.

En la actividad El terreno de Don Juanito:

1. Salvador, Ángel y Milleth (*Equipo de los negativos*).
2. Ramón, Alejandro, Arturo y Noé (*Equipo de los negativos*).
3. Luis Ángel, Oscar y Eduardo (*Equipo de los acertados*).
4. Mario, Irineo y Edgar (*Equipo de los acertados*).
5. Valente, David y Aurelio.

6. Alexis, Alfredo y Miguel Ángel.
7. Luis Ángel, Juan Carlos, Fernando y Alejandro.
8. Jorge Antonio (sólo participó en la etapa individual de esta actividad).

El resto de los equipos conformaron el grupo de *los visuales*.

3.6 Metodología

En este contexto, se utilizará la forma particular de instrucción propuesta por Sepúlveda y Santos (2006) que consta de cinco pasos:

1. *Actividad previa*. El profesor da al grupo un breve introducción a la tarea, con el propósito de ubicar a los estudiantes en contextos similares al de la tarea; destacando la importancia que presenta su participación en el desarrollo de la sesión.
2. *Trabajo en equipo*. Se organizan los estudiantes en equipo de tres, procurando que en cada uno haya estudiantes con distintos niveles de desempeño, que tengan la posibilidad de interactuar entre ellos y los demás equipos, así como de expresar y comunicar sus ideas. Al concluir el periodo de tiempo asignado al trabajo por equipos, cada uno de ellos entrega su reporte de solución.
3. *Presentaciones*. Cada equipo presenta a toda la clase su solución a la tarea, permitiendo que los miembros de los demás equipos pregunten libremente a quienes exponen.
4. *Discusión colectiva*. El profesor promueve la discusión colectiva entre los estudiantes, con la idea de analizar ventajas y desventajas de los diferentes

métodos de solución presentados y, cuando sea necesario, realizar una sistematización de las ideas e identificar posibles extensiones del problema.

5. *Trabajo individual.* Enseguida, a partir de la discusión colectiva, los estudiantes tienen la posibilidad de volver a la actividad y aplicar los nuevos entendimientos que se generaron como producto de la interacción, abordando individualmente la tarea.

3.7 Fuentes de datos

Hubo tres principales fuentes de datos, una de ellas fue la videograbación, las hojas de trabajo tanto en equipo como individual y por supuesto, la observación. Se tuvieron hojas de trabajo para la parte individual y para la parte en equipo, procurando fueran los mismos equipos en ambas actividades. Se video grabaron los episodios durante la resolución de las actividades en la discusión grupal, con el fin de capturar las controversias entre los diferentes equipos y la discusión grupal en general.

CAPÍTULO IV. Análisis y resultados

4.1 Introducción

Las actividades propuestas fueron aplicadas a 27 estudiantes de bachillerato, de un grupo escolar ordinario de cuarto semestre, en una escuela del sector público de la ciudad de Lázaro Cárdenas, Michoacán. Los muchachos fueron organizados en pequeños grupos de tres (salvo dos equipos de cuatro, dado el número), siguiendo con la metodología planteada; para la integración de los equipos no se tomó ninguna consideración, se dejó a elección de ellos mismos, esperando así, que se pudieran comunicar con la misma confianza que lo venían haciendo a lo largo de su convivencia diaria en la escuela; sin dejar de lado el hecho de que en cada quipo hubiese estudiantes con diferentes niveles de desempeño.

Recordemos la forma de aplicación que consta de 5 etapas: en la primera, el profesor presenta al grupo una breve introducción en cada tarea, aquí no es necesario más de 5 o 10 minutos; en la segunda, se forman equipos de tres integrantes (o cuatro, en su defecto) para trabajar sobre la actividad, con duración aproximada de 40 minutos, según el desempeño del grupo; en la tercera y cuarta etapa, cada equipo presenta su solución al grupo y se lleva a cabo la discusión colectiva promovida por el profesor, tardando alrededor de 30 minutos o más si es necesario, ya que esta es una de las etapas más importantes; y finalmente la quinta etapa, donde cada estudiante revisa la actividad y resuelve de manera individual, aquí el margen de tiempo es de aproximadamente 20 minutos de trabajo, ya que se supone deben responder más fácil y rápidamente.

Entonces, así se procedió para la aplicación de nuestras actividades. No olvidemos que los estudiantes no tuvieron ninguna preparación previa, ni al concepto de límite ni a la forma de trabajo. Sin embargo, la predisposición de ellos y los resultados obtenidos, superaron las expectativas; aunque era un grupo de hombres, los estudiantes cooperaron con nosotros y se mantuvieron participativos durante los dos días de aplicación. La figura 1 muestra al grupo escolar en su trabajo individual.



Figura 1. Los estudiantes trabajando en la etapa individual.

A continuación presentaremos algunos comentarios generales acerca de las características de las preguntas que conformaron las actividades para, posteriormente, centrarnos en aspectos relevantes donde se aprecien distintos acercamientos y la evolución en el manejo de representaciones y razonamientos que utilizaron los estudiantes.

Finalmente, se analizarán los resultados de cada actividad, en el mismo orden en que fueron aplicadas. Se revisaron muy minuciosamente tanto las videograbaciones como las hojas de trabajo, y así obtuvimos el resultado deseado.

4.2 Actividad “Los saltos de Yaya”

Se trata de una actividad que involucra la noción del concepto de límite, utilizando las aproximaciones de los saltos que Yaya hace para llegar al estanque. La actividad se plantea de una manera muy fácil de entender y se reduce a una situación cotidiana, donde los estudiantes pueden pensar no sólo de manera matemática, sino, lógicamente y llegar a una conclusión, que en este caso era saber si Yaya llegaría o no al estanque, o lo que es lo mismo, saber si existía o no un límite.

Las preguntas que se plantean tienen la intención de indagar más allá de la situación, se pretende que los estudiantes justifiquen por qué la ranita sí llega o por qué no llega al estanque, y ver de qué manera se van acercando a ese razonamiento.

Cabe señalar que la actividad, o más específicamente la tabla que se pedía llenar, llevó a la mayoría de los estudiantes a utilizar la calculadora (Figura 2). No se pedía el uso de alguna herramienta de este tipo, sin embargo, podemos notar la dependencia que se tiene de ellas incluso para tareas tan simples como esta.



Figura 2 . Los estudiantes utilizando sus herramientas para llenar la tabla.

Otros, además del uso de la calculadora, hicieron uso de la regla graduada como se muestra en la Figura 3. Su intención era medir la distancia que le faltaría a

Yaya para llegar al estanque. Obviamente, se dieron cuenta que no era necesaria, después de contestar las demás preguntas.

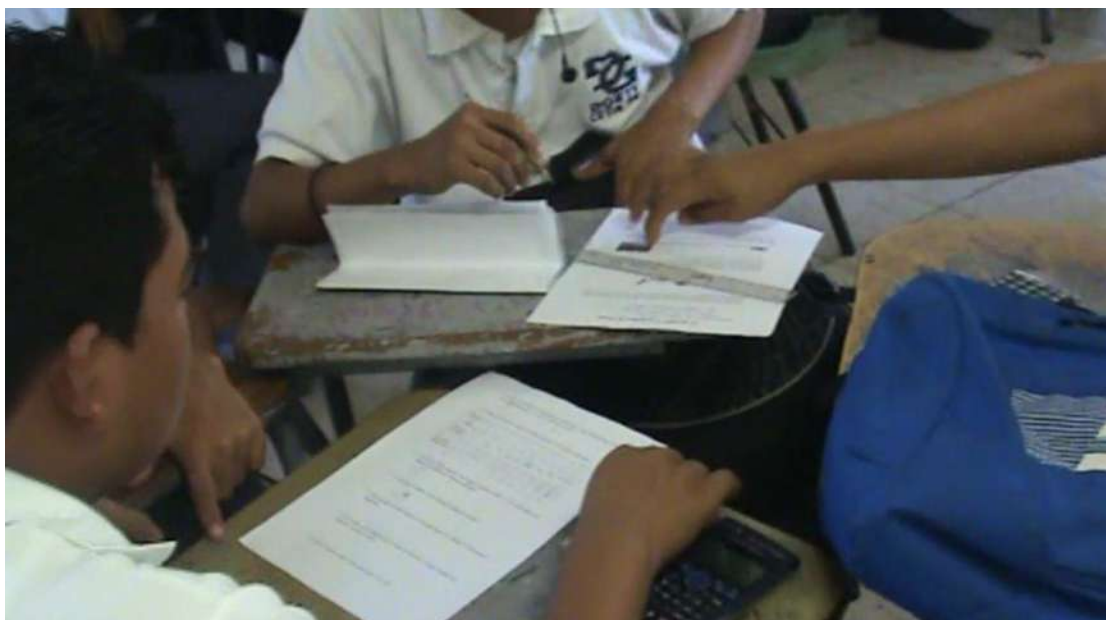


Figura 3. Estudiantes utilizando regla graduada.

En las respuestas en equipo a esta actividad, en general, aparecen tres diferentes tipos de acercamiento a dicha tarea:

1. Un solo equipo contestó de manera correcta casi toda la actividad, pero es curioso que no lo hiciera de manera algebraica como la mayoría, sino simplemente razonando el problema y expresando su respuesta textualmente. En mi criterio, este fue un equipo especial; particularmente, un estudiante, llamado Salvador. Llamaremos a este pequeño grupo, el *equipo Salvador*.
2. Otros dos equipos contestaron de manera más algebraica. Éstos abordaron bien la pregunta generalizada de “ n saltos”, la cual se dificultó a la mayoría del grupo. Incluso, hicieron uso del infinito. Llamaremos a este grupo, *equipo de los algebraicos*.



Figura 4. Eduardo señalando a su compañero cómo escribir el infinito.

3. Y el tercer grupo caracterizado, es el de la mayoría, en este caso, los cinco equipos restantes. Aquí encontramos los únicos que se convencieron que Yaya llegaría al estanque, y su razonamiento se encontraba entre el algebraico y el lógico. Ellos sólo veían la tabla, la cual llenaron observando el patrón de los recuadros que ya estaban llenados, y con ella trataban de contestar las demás preguntas. Sin embargo, en general, obtuvimos importantes resultados de este grupo. Llamaremos a este grupo, *equipo de los mecanizados*.

Una vez hecho este análisis cualitativo, muy general, ahondaremos un poco más en el trabajo individual, haciendo comparación entre cada estudiante y con sus respectivos equipos. Así, descubriremos cuánta influencia tuvo el aprendizaje colectivo. Veremos si los estudiantes tuvieron algún cambio en sus primeras creencias, una vez analizada y discutida la actividad frente al grupo, es decir, hasta qué punto influyó el trabajo colectivo sobre cada individuo.

Analizaremos la actividad por pregunta, considerando sólo las más relevantes, según los resultados obtenidos. Las preguntas en donde hubo más diversidad en general, fueron la 5, 6 y 7.

Ya que en el resto de la actividad, la mayoría de los estudiantes contestaron de manera fácil y rápida. Seguiremos el orden de las preguntas seleccionadas:

5. Observa la tabla, después de 5 saltos, ¿cuánto le falta a Yaya para llegar a su destino? Exprésalo de manera algebraica.

Analicemos primero el *equipo Salvador*. Al momento de la discusión grupal, este equipo resolvió esta pregunta de una manera muy peculiar. A pesar de que en la tabla está expresada la cantidad que le va faltando a Yaya por saltar, el *equipo Salvador* hizo la suma de los saltos previos al 5, y se la restaron a la unidad, que para ellos era la distancia entre Yaya y el estanque (note cómo ven implícitamente el límite). Es curioso que sólo ellos razonaran de esta manera. Este era un equipo de cuatro integrantes, y de ellos, sólo uno contestó equivocadamente esta pregunta en la etapa individual.



Figura 5. Salvador exponiendo cómo respondió a la pregunta 5.

Cabe señalar, que Salvador estaba firmemente convencido que Yaya nunca llegaría al estanque, y que no había alguna manera de que eso pasara.

Él razonaba de manera muy lógica y matemática, pues sabía que analizaban una sucesión infinita y que por lo tanto, Yaya nunca llegaría a su destino, a pesar de hacer uso de la unidad en su respuesta a esta pregunta.

Por cierto, el *equipo Salvador* no ilustró los saltos de Yaya en la recta, cosa que también se pedía.

El *equipo de los algebraicos*. En general, los dos equipos contestaron correctamente la pregunta. Pero como es común, en la etapa individual algunos estudiantes se equivocaron, pero por mucho, evidenciando la ignorancia en cuanto a la respuesta correcta. Creemos que el motivo del por qué se equivocaron en la etapa individual, teniendo correcto la parte en equipo, es porque claramente no todos los integrantes se mostraron participativos a la hora de trabajar en pequeños grupos. Este es un problema muy frecuente, sin embargo, consideramos que la experiencia en esta forma de instrucción podría mejorar estas condiciones. Claro, así es como notamos quiénes sí sabían la respuesta en la etapa de equipo. Otra característica de este grupo, es que sólo uno de los dos equipos ilustró los saltos de Yaya en la recta.

El *equipo de los mecanizados*. En este grupo es donde encontramos una gran variedad en cuanto a la respuesta a esta pregunta. Desde quienes coincidían con la mayoría, afirmando que la respuesta era $(\frac{1}{2})^5$, hasta los que afirmaban que la respuesta era $(\frac{1}{2})^6$.

La siguiente discusión en el grupo nos ayudará a entender el por qué este grupo razonaba de esta manera:

Mario: Observa la tabla, después de 5 saltos, ¿cuánto le falta a Yaya para llegar a su destino? Exprésalo de manera algebraica. Aquí fue de esta manera porque la pregunta nos está diciendo que después del quinto salto cuánto nos falta, y como son once pasos, del quinto al once pues faltan seis.

Marlén: ¿todos están de acuerdo con su compañero?

Salvador: No. O sea que necesitas saber cuánto lleva hasta el quinto salto. Nosotros fuimos sumando los cinco pasos que dio y el resultado fue treinta y un treintaidosavos. O sea que treinta y dos es el entero, ¿no? y ya lleva treinta y uno, o sea que le falta un treintaidosavo. Y la expresión algebraica es un medio a la cinco.



Figura 6. Mario (izquierda) y Salvador (derecha) exponiendo su respuesta a la pregunta 5.

Cabe comentar que la respuesta de Mario no era tan inesperada, ya que la mayoría de los estudiantes de este nivel se dejan llevar por lo primero que observan. En el otro extremo tenemos a Salvador, un estudiante que razonó aún más allá de lo que observaba a simple vista.

6. Si Yaya diera “n” saltos, ¿qué distancia le falta por recorrer?

Equipo Salvador. En el trabajo en equipo, ellos contestaron que a Yaya le faltaría la mitad de lo que recorrió y que dependía de los saltos que llevaba. Sin embargo, en la etapa individual, sólo un integrante mantuvo esa respuesta, ya que el resto contestó correctamente que a Yaya le faltaría $(\frac{1}{2})^n$. Analizando este cambio tan radical, creemos que en la segunda vez que analizaron la actividad desde el principio de manera individual, lo hicieron con mayor cuidado y atención, lo que los llevó a razonar de diferente manera. Claro que no podemos descartar que algunos

notaran el patrón en la tabla, es decir, la regla que se seguía según el salto que Yaya diera. Porque esa era la manera más fácil de contestar a esta pregunta.

Equipo de los algebraicos. Ambos equipos contestaron que le faltaría $(\frac{1}{2})^n$ pero uno de ellos, agregó que n saltos, es decir, interpretaban $(\frac{1}{2})^n = n$. Sin embargo, dos de los integrantes de este equipo, que mal interpretaron la respuesta, contestaron equivocadamente en la etapa individual. En general, contestaron correctamente, aunque no estaban tan seguros de lo que su respuesta significara.

Equipo de los mecanizados. En esta pregunta encontramos varios resultados importantes, que analizaremos muy minuciosamente, equipo por equipo:

Equipo Salvador. A continuación se muestran las respuestas de este equipo en la hoja de trabajo. Fueron los únicos que procedieron de esa manera para contestar la pregunta seis. Sin embargo, en la etapa individual, contestaron $(\frac{1}{2})^n$, salvo un estudiante. Pero, ¿qué fue lo que los llevó a razonar de esa manera, para que contestaran tal cosa en la etapa de equipo? Es claro que sabían que n representaba el número de saltos que daba Yaya, suponemos que la tabla les ayudó a averiguar eso; también sabían que lo que se tenía era una sucesión infinita de saltos, siendo n un salto arbitrario de esa sucesión.

Ahora, queda a la duda si sabían que la distancia que le faltaba por recorrer a Yaya era $(\frac{1}{2})^n$, ya que en la hoja no escribieron literalmente la expresión algebraica, tal vez sí lo sabían, sólo que les faltó expresarlo. Luego, es uno de los pocos equipos que hicieron uso del infinito. Y claro, concluyeron que Yaya nunca llegaría al estanque.

Aunque esta fue una de las preguntas más difíciles de interpretar para los estudiantes, encontramos importantes acercamientos:

David: Si Yaya diera n saltos, ¿qué distancia le falta por recorrer? Pues sería n distancia porque no sabemos los saltos que va a dar.

Marlén: ¿todos están de acuerdo?

Salvador: No. Pues si Yaya da un salto y va recorriendo la mitad de lo que le falta, o sea que le faltaría la mitad de n .

(Y mientras la discusión se llevaba a cabo, Pablo escribía en el pizarrón)

Marlén: ¿qué significa eso Pablo?

David: Lo que le falta.

Marlén: Puedes explicarnos por qué.

David: Porque dice, si diera n saltos. Y como aquí, en la tabla se pone un medio, y el salto que dio, serían n saltos.

Marlén: ¿O sea que tu intuición te dice que esa es la respuesta?

David: Aja.

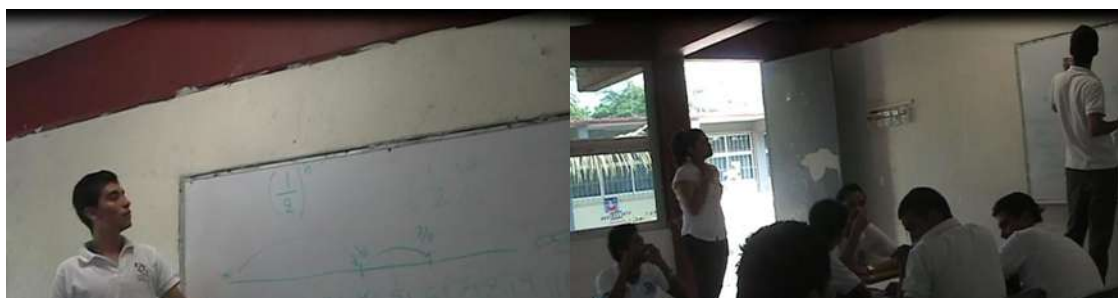


Figura 7. David señalando la distancia que le faltaría por recorrer a Yaya si diera n saltos.

Es fácil ver que la tabla influyó de manera considerable sobre los estudiantes al responder a esta pregunta. Ya que ninguno de ellos argumentó correctamente su respuesta, aun cuando ésta era correcta. Se puede deducir también, que los estudiantes están poco familiarizados con expresiones algebraicas de este tipo, ya que muchos tuvieron dudas acerca del significado de la n . Sin embargo, hubo quienes ni con la tabla, pensaron que esa podría ser la respuesta correcta.

Aún después de esto, en la etapa individual, todos menos un estudiante contestaron correctamente a la pregunta, es decir, escribieron $(\frac{1}{2})^n$ sin justificar su respuesta, claro.

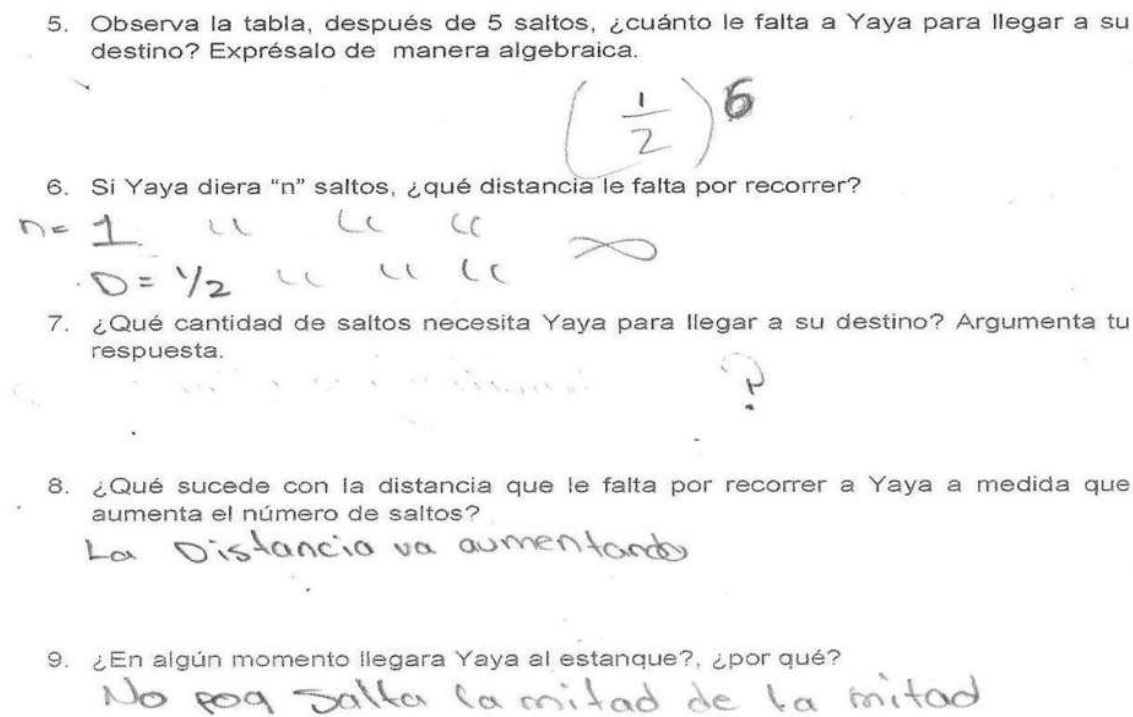


Figura 8. Fragmento de la hoja de trabajo del equipo Salvador.

Equipo de los algebraicos. Este equipo contestó mal a esta pregunta, pero en la etapa individual, ¡todos contestaron correctamente! Nos llamó la atención un estudiante, el cual difirió del resto en cuanto a la pregunta 5, o sea, en equipo habían contestado que a Yaya le faltaba $(\frac{1}{2})^6$, pero él dijo que le faltaba $(\frac{1}{2})^5$ y afirmó que Yaya sí llegaría al estanque, justificando que “llegará el momento en que la distancia ya no se pueda dividir a la mitad”. Es el primer caso que nos encontramos en el cual un estudiante hace su propio razonamiento, sin dejar que influyan las opiniones del resto de sus compañeros, ya que en la discusión grupal, él fue el único que mantuvo su postura de que Yaya tenía que llegar al estanque en algún momento, aunque otros más lo afirmaron en su hoja de trabajo.

Creemos que este estudiante que afirmaba que Yaya llegaría al estanque, no interfirió en el razonamiento del resto porque no tenía los argumentos suficientes, y además, notamos que era un estudiante poco participativo y poco sobresaliente en el grupo.

Equipo de los mecanizados. Ellos contestaron mal a esta pregunta, sin embargo, en la etapa individual, uno contestó correctamente. Además, en equipo contestaron que Yaya sí llegaría al estanque en algún momento porque “se va acercando cada vez más”, pero en la etapa individual, todos afirmaron que Yaya nunca llegaría, suponemos que esto es debido a que se dejaron influenciar por la discusión grupal.

Otro estudiante de este equipo que llamó nuestra atención fue el que contestó lo que se muestra a continuación:

5. Observa la tabla, después de 5 saltos, ¿cuánto le falta a Yaya para llegar a su destino? Exprésalo de manera algebraica.

$31/32$

6. Si Yaya diera "n" saltos, ¿qué distancia le falta por recorrer?

un medio + n

7. ¿Qué cantidad de saltos necesita Yaya para llegar a su destino? Argumenta tu respuesta.

una cantidad más grande "una suma" la disminuyamos

8. ¿Qué sucede con la distancia que le falta por recorrer a Yaya a medida que aumenta el número de saltos?

va disminuyendo

9. ¿En algún momento llegara Yaya al estanque?, ¿por qué?

No, porque la distancia que le falta por recorrer es siempre mayor que la distancia que le falta por recorrer.

Figura 9. Fragmento de la hoja de trabajo de Noé.

Aquí la traducción de la hoja de trabajo de Noé (por cuestiones de resolución de la imagen):

5. Observa la tabla, después de 5 saltos, ¿cuánto le falta a Yaya para llegar a su destino? Exprésalo de manera algebraica.

$31/32$.

6. Si Yaya diera "n" saltos, ¿qué distancia le falta por recorrer?

Un medio a la n.

7. ¿Qué cantidad de saltos necesita Yaya para llegar a su destino? Argumenta tu respuesta.

Una cantidad más grande y cada salto va disminuyendo.

8. ¿Qué sucede con la distancia que le falta por recorrer a Yaya a medida que aumenta el número de saltos?

Va disminuyendo.

9. ¿En algún momento llegará Yaya al estanque? ¿Por qué?

No porque va disminuyendo y cada vez que de un salto será la cantidad mínima y será algo infinito.

Este estudiante fue el único que procedió de esta manera. Podemos observar que en la pregunta 5 sumó la distancia que le faltaba recorrer a Yaya en los cuatro saltos anteriores. También menciona el concepto del infinito, aunque no lo hace adecuadamente pero se entiende su interpretación.

Equipo 4 y 5. Estos dos equipos tuvieron una gran cantidad de variedad en cuanto a sus respuestas. Ninguno coincide en las respuestas de la etapa individual con la etapa en equipo, y la mayoría se equivocó al responder a esta pregunta. Tienen en común, que todos afirmaron, tanto en equipo como individualmente, que Yaya nunca llegaría al estanque, justificando de diferentes maneras, ninguna acertada.

**7. ¿Qué cantidad de saltos necesita Yaya para llegar al estanque?
Argumenta tu respuesta.**

Equipo Salvador. Ellos respondieron a esta pregunta afirmando que “Yaya nunca va a llegar porque cada vez va saltando la mitad de la distancia que le falta”. Un estudiante incluso, en la etapa individual afirmó que “los saltos son infinitos” y por lo tanto, Yaya nunca llegaría.

Equipo algebraicos. Aquí encontramos una fuerte controversia en cuanto a la respuesta a esta pregunta de los dos equipos en general. Un equipo, así como

cada estudiante en la etapa individual, afirmaron que la cantidad necesaria para que Yaya llegara a su destino era infinito, aunque nadie justificó su respuesta. Por otro lado, el otro equipo y todos sus integrantes afirmaron que a Yaya le faltarían 11 saltos, es decir, la cantidad del último recuadro de la tabla. Es obvio que no hicieron ningún razonamiento respecto a esta pregunta. Pero ambos, estaban convencidos de que Yaya nunca llegaría al estanque. Sin embargo, llama la atención un estudiante que justificó que Yaya no llegaría al estanque, de la siguiente manera: “no, porque los saltos van dividiéndose a la mitad y siempre da un resultado = (1 salto) por más mínimo que sea”. Este estudiante, llamado Eduardo, era de los que afirmaron que Yaya necesitaba infinitos saltos para llegar al estanque, y es claro que su noción de aproximación es buena, pero no alcanza al límite, al menos en esta primera actividad, pues Eduardo fue el estudiante más sobresaliente en general.

Equipo de los mecanizados. Sólo un equipo contestó que la respuesta era infinito, así como un integrante de ese equipo; además de otro estudiante de otro equipo. El resto de los estudiantes, tanto en la parte de equipo como en la individual, contestaron diferentes cosas, desde 11 saltos, 22 saltos, un medio, etc.

Es obvio que este grupo de estudiantes no razonaron correctamente ni indagaron más allá en esta actividad. Aunque tres estudiantes de este grupo afirmaron que Yaya sí llegaría algún día al estanque, sin saber la justificación de su respuesta, tal vez prácticamente sólo intuyeron por lógica que Yaya llegaría en algún momento.

A continuación se redacta una discusión que se llevó a cabo, respecto a esta pregunta, y como conclusión para cerrar la primera actividad:

Noé: ¿Qué cantidad de saltos necesita Yaya para llegar al estanque?
Argumenta tu respuesta. Once saltos. Porque en la tabla están once saltos, y son los que va a hacer para llegar al estanque.

(Noooo, no, no...)

Marlén: ¿quién no está de acuerdo?

Eduardo: Yo. Porque cada vez que vas dividiendo, siempre sale una cantidad. Sea mínima, de todos modos va recorriendo algo. No va a llegar nunca, es infinito.

Marlén: a ver, entonces ¿llega Yaya al estanque o no?
(No, no llega)



Figura 10. Los estudiantes afirmando que Yaya no llegaría al estanque nunca.

Juan Carlos: Pero va a llegar un punto en el que el pedazo que va a recorrer debe ser una mitad y ya no va a poder dividirse a la mitad y ya va a llegar.



Figura 11. Marcos defendiendo su postura de que Yaya sí llegaría al estanque.

El Grupo grita: Que no, ¡no llega, no llega!

Juan Carlos era el único que defendía su postura en la discusión grupal. Él estaba seguro que Yaya llegaría al estanque y no le importaba eso del infinito. Y aunque muchos respondieron de manera individual lo mismo que Juan Carlos, sólo él se defendía ante los que aseguraban que Yaya nunca llegaría. Es claro que Juan Carlos veía el problema desde una perspectiva muy diferente a la mayoría de sus compañeros, ya que él se planteaba una situación cotidiana y resolvía el problema de la manera más práctica.

Podemos concluir de esta actividad, que los resultados obtenidos fueron buenos, en el sentido de que los estudiantes se comenzaron a familiarizar con aproximaciones, sucesiones infinitas e incluso el concepto de límite. Tal vez ellos aún no conocen el concepto ni su definición, sin embargo, se logró lo que se pretendía. Y después de abrir camino con esta primera actividad, nuestras expectativas aumentaron a la hora de aplicar la segunda.

4.3 Actividad “El terreno de Don Juanito”

Esta actividad es muy similar a la de los saltos de Yaya, pero abordando la noción del concepto de límite desde una diferente perspectiva, pues aquí, la intención era enfocarlos a la suma de una sucesión infinita y que comprendieran que aunque la sucesión era infinita, su suma es finita. Al plantear así esta actividad, de manera geométrica, se tenía la intención de que los estudiantes ampliaran su visión, pues se partía de una unidad, que era el terreno, y pensamos que sería más fácil para ellos ver que el límite existía, aun cuando no sabían todavía lo que eso significara.

Una gran diferencia entre esta actividad y los saltos de Yaya, fue la tabla. En Yaya se les ilustraba la cantidad que le faltaba, a diferencia que aquí, la cantidad que ya se había repartido. Otra diferencia, y la más importante fue que se agregó un n -ésimo término, lo cual causó mucha controversia.

Con todo esto, los resultados en esta actividad fueron sorprendentes, en el sentido de que muchos estudiantes reflexionaron que Yaya tenía que llegar al estanque, aun cuando anteriormente habían afirmado lo contrario; así como que algún día se tenía que terminar de repartir el terreno de Don Juanito. Y aun cuando en esta actividad hubo equipos que aseguraban que nunca se terminaría de repartir el terreno, creo que la discusión grupal los ayudó a comprender el concepto de límite, es decir, a entender que la suma de la sucesión tenía que aproximarse a algo, y así comenzaría su primera noción del concepto de límite, lo que se pretendía desde un principio.

Una vez analizadas las hojas de trabajo, se distinguieron tres tipos de acercamiento a la actividad el terreno de Don Juanito:

Primero, *el grupo de los negativos*, quienes aseguraban que nunca se acabaría de repartir el terreno, ya que siempre quedaría la mitad de la mitad, y ¡los números son infinitos!, afirmaron.

Algo muy relevante de este grupo de estudiantes, que es conformado por dos equipos del grupo total, es que ellos sabían que la sucesión era infinita y que sí, se

aproximaba a un número; sin embargo, en la última pregunta de la actividad, acerca de la suma de las fracciones del terreno, todos contestaron que no podrían saber, ya que no se especificaba cuántas personas fueron por su parte. De hecho, este grupo defendió su postura aun en la discusión grupal, cuando otros afirmaban lo contrario.

En esta actividad se encontró un poco de ambigüedad en esta última pregunta: Si queremos juntar todas las fracciones del terreno que fueron repartidas, ¿cuánto sería su suma? Por un lado, la mayoría de los estudiantes dieron por hecho que iba a llegar una infinidad de personas a la repartición (que era lo que se pretendía en un principio), tantas como la infinidad de la sucesión, entonces, ellos intuyeron que sí se tendría que terminar el terreno. Y por otro lado, estaban los de este grupo quienes entendieron que necesitaban saber cuántas personas llegaron a la repartición para poder hacer la suma que se les pedía.

Aquí, cabe mencionar que es claro que se debe tener mucho cuidado en cuanto a las especificaciones que se les da a los estudiantes en cuanto a la actividad, ya que se pueden encontrar detalles como estos. Por otro lado, el dibujo que se presenta en la actividad debería aclarar las dudas que pudieran surgir en cuanto a las cuestiones, sin embargo, como lo hemos notado hay estudiantes que no son muy visuales.

A continuación se muestra la hoja de trabajo de Alejandro, el único estudiante que mencionó el cero. Es muy curiosa su manera de responder, y cabe mencionar que Alejandro era del grupito de los más inquietos del salón, de los que incluso bromeaban cuando respondían ante la discusión grupal.

Alejandro considera la sucesión de las fracciones del terreno de una manera individual, es decir, analiza término por término y es por eso que considera que se aproxima a cero. Es claro que no analizó la suma de éstos, sino que su noción de aproximación fue dirigida hacia la convergencia de la sucesión. Y realmente fue el único que procedió de esta manera. Y claro, pertenece al grupo de los negativos, ya que afirmó que no se podían sumar las fracciones del terreno repartidas, ya que no se sabía entre cuántas personas se repartirían.

3.- ¿Cuál es la sucesión numérica que se tiene de la repartición del terreno?

no se termina de repartir la sucesión de números
siguira y siguira

4.- Después de la 6ª persona, ¿qué porción del total del terreno falta por repartir?

$$\frac{1}{64}$$

5.- A medida que aumenta el número de personas que llegan al reparto, ¿qué pasa con las fracciones restantes del terreno?

las fracciones van siendo cada vez mas
pequeñas

6.- ¿Qué ocurre cuando agregamos más y más términos a la sucesión? ¿Es infinita o finita? ¿Por qué?

Es infinita por que nunca llegara a Cero
las fracciones no terminarian si sigue llegando
mas gente

7.- ¿La suma se incrementa infinitamente o se aproxima a un número?

Se aproxima a Cero pero Jamas llega

8.- Si queremos juntar todas las fracciones del terreno que fueron repartidas, ¿cuánto sería su suma?

no se podian sumar por que no terminan

Figura 12. Hoja de trabajo de Alejandro.

Segundo, *el grupo de los acertados*. Este grupo se caracterizó porque aseguraron que nunca se terminaría de repartir el terreno, sin embargo, a la hora de juntar todas las fracciones que fueron repartidas, su suma sería uno, sin importar en cuántas partes se dividió. Es decir, comprendían perfectamente que aunque la sucesión numérica era infinita, su suma será finita.

En la discusión grupal incluso, se llevó a cabo un debate entre este grupo y el grupo de los negativos, pues aquellos afirmaban que no podían saber a cuántas personas se les había dado una fracción del terreno y, por lo tanto, a la hora de sumarlas no se podía saber su suma; por su parte, los acertados respondieron

que no importaba en cuántas partes fuera dividido el terreno, a la hora de juntar todas las fracciones, tenía que resultar el terreno completo.

Es claro que estos dos grupos abordaron la actividad desde diferentes perspectivas. Como se mencionó antes, tal vez notaron alguna ambigüedad la cual los llevó a sus diferentes opiniones.

A diferencia de Alejandro, en la siguiente hoja de trabajo, Oscar tiene un acercamiento completamente diferente. Oscar está convencido de que a la hora de juntar todas las fracciones del terreno, su suma será uno. Sin embargo, afirma que la suma se aproxima a medida que se incrementa, o mejor dicho, su intuición le dice que entre más términos se agreguen a la sucesión, ésta se aproxima más a uno, aunque no lo escribió tal cual.

3.- ¿Cuál es la sucesión numérica que se tiene de la repartición del terreno?

De $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$

4.- Después de la 6ª persona, ¿qué porción del total del terreno falta por repartir?

$\frac{1}{64}$

5.- A medida que aumenta el número de personas que llegan al reparto, ¿qué pasa con las fracciones restantes del terreno?

Las fracciones restantes ~~van aumen~~ se van restando la fracción

6.- ¿Qué ocurre cuando agregamos más y más términos a la sucesión? ¿Es infinita o finita? ¿Por qué?

Si le agregamos mas terminos la sucesion sera infinita.

7.- ¿La suma se incrementa infinitamente o se aproxima a un número?

Se aproxima a un entero cada vez que la suma se incrementa

8.- Si queremos juntar todas las fracciones del terreno que fueron repartidas, ¿cuánto sería su suma?

Si ~~lo~~ juntamos todas sumas va a dar 1 entero

Figura 13. Hoja de trabajo de Oscar.

Otro caso interesante es el de Luis Ángel. Él también asegura que la suma de las fracciones será uno, pero dice que “un entero muy grande”. Este acercamiento en particular, deja ver la forma de razonar de los estudiantes ante algo que involucre el infinito. Porque aunque era la unidad de la que se estaba hablando, Luis Ángel imaginaba que al aproximarse algo tan grande a ésta, su suma tenía que ser algo más grande de lo normal, aunque esto sea un absurdo.

3.- ¿Cuál es la sucesión numérica que se tiene de la repartición del terreno?

un medio por mono

4.- Después de la 6ª persona, ¿qué porción del total del terreno falta por repartir?

un $\frac{1}{64}$

5.- A medida que aumenta el número de personas que llegan al reparto, ¿qué pasa con las fracciones restantes del terreno?

Se aumentan sistemáticamente y algebraicamente

6.- ¿Qué ocurre cuando agregamos más y más términos a la sucesión? ¿Es infinita o finita? ¿Por qué?

Infinitamente indiscutiblemente limitada

7.- ¿La suma se incrementa infinitamente o se aproxima a un número?

Se aproxima lógicamente infinitamente

8.- Si queremos juntar todas las fracciones del terreno que fueron repartidas, ¿cuánto sería su suma?

un entero muy grande

Figura 14. Hoja de trabajo de Luis Ángel.

Aquí la traducción de la hoja de trabajo de Luis Ángel (por cuestiones de resolución de la imagen):

3. ¿Cuál es la sucesión numérica que se tien de la repartición del terreno?

Un medio por mono.

4. Después de la 6ª persona, ¿qué porción del total del terreno falta por repartir?

Un $1/64$.

5. A medida que aumenta el número de personad que llegan al reparto, ¿qué pasa con las fracciones restantes del terreno?

Se aumentan sitemáticamente y algebraicamente.

6. ¿Qué ocurre cuando agregamos más y más términos a la sucesión? ¿Es infinita o finita? ¿Por qué?

Infinitamente indiscutiblemente ilimitada.

7. ¿La suma se incrementa infinitamente o se aproxima a un número?

Se aproxima logicamente infinitamente.

8. si queremos juntar todas las fracciones del terreno que fueron repartidas, ¿cuánto sería su suma?

Un entero muy grande.

En la siguiente hoja de trabajo de Milleth, nos llamó mucho la atención la manera gráfica en que respondió a la última pregunta. Fue el único que hizo esto y además, él también era de los que pensaban que el terreno nunca se terminaría de repartir. Pero queremos resaltar su particular forma de ilustrar esta última pregunta. Milleth era del grupo de Salvador, uno de los grupos más destacados del salón, sin embargo, a la hora de responder de manera individual a la actividad, Milleth consideró sus propios razonamientos, sin dejarse influenciar de sus compañeros.

3.- ¿Cuál es la sucesión numérica que se tiene de la repartición del terreno?

~~1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64~~ **infinito** 

4.- Después de la 6ª persona, ¿qué porción del total del terreno falta por repartir?

falta $1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}\right)$

5.- A medida que aumenta el número de personas que llegan al reparto, ¿qué pasa con las fracciones restantes del terreno?

se les siguen entregando las mitades de las fracciones que tienen.

6.- ¿Qué ocurre cuando agregamos más y más términos a la sucesión? ¿Es infinita o finita? ¿Por qué?

se les siguen entregando mitades.
infinita

7.- ¿La suma se incrementa infinitamente o se aproxima a un número?

infinita.

8.- Si queremos juntar todas las fracciones del terreno que fueron repartidas, ¿cuánto sería su suma?

por ser un entero

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = 1$$

Figura 15. Hoja de trabajo de Milleth.

El siguiente es el grupo de los visuales. Ellos aseguraban que sí, el terreno tenía que terminarse algún día. Justificaban que llegaría el día en que el número llegue a cero. Otros, que el terreno se haría tan pequeño, que ya no alcanzaría a partirse a la mitad. Otro acercamiento de este grupo fue que ellos acertaron en cuanto a que la suma de la sucesión se aproximaba a un número, que también afirmaron, sería la unidad. Hubo quienes justificaron que aunque la suma se incrementaba infinitamente, al mismo tiempo se aproximaba a la unidad.

Aquí veremos la discusión que se llevó a cabo al respecto de la primera pregunta:

Noé: ¿Terminarán algún día de repartir el terreno? ¿Por qué? Sí porque el terreno se irá haciendo más chico y ya no alcanzará.

Alejandro: Sí porque van a ser muchos pedazos y el último va a ser muy chiquito.
Y o sea, pa que quieres un pedazo muy chiquito si no lo vas a ocupar.
Ni modo que puedas partir un centímetro a la mitad, sería ya lo final
del terreno que repartirías.

Marlén: Ok. ¿Todos están de acuerdo?

Eduardo: No, porque igual siempre va a salir algo, la mitad.

Noé: ¿puedes partir un centímetro?

Eduardo: Perate, a ver ¿cómo dice la pregunta?

Noé: ¿Terminarán algún día de repartir el terreno?

Eduardo: No terminarán porque por más pequeño que sea el pedazo

Noé: A ver, parte un milímetro a la mitad.

Eduardo: Sí pues, sí pues, pero de todos modos. No es si pa qué quieres un pedazo, no, de todos modos se va a repartir la mitad de la mitad, de la mitad. Por más pequeño que sea el pedazo, de todos modos sale algo pues.



Figura 16. Eduardo defiende su postura ante el grupo.

Es muy evidente el razonamiento de Eduardo, y difícilmente lo hicieron dudar de ello. Aunque las discusiones a las que llegó con otros compañeros fueron las más interesantes de nuestra investigación.

Ahora, analizaremos particularmente a un estudiante, Jorge, el cual no se presentó a la primera actividad ni a la segunda en grupo, sino solamente a la parte individual de esta última. Jorge dijo que no, que nunca se terminaría de repartir el terreno porque no se sabría entre cuántas personas se iban a repartir. Notemos la similitud con el grupo de los negativos. Y dado su razonamiento inicial, justificó que no podría saber cuánto sería la suma, pues no sabía en cuántas partes se habían partido el terreno.

Entonces, nos preguntaremos si aun sin haber conocido la primera actividad, la mayoría de los estudiantes hubiesen llegado a su mismo razonamiento en esta última. Creemos que la respuesta es no. Dadas las comparaciones de algunos estudiantes, llegamos a la conclusión de que sí influyó la actividad de los saltos de Yaya para que muchos cambiaran de opinión en el terreno de Don Juanito. Podríamos afirmar que la manera de ver, desde otra perspectiva el mismo problema, o el mismo concepto, favoreció a la comprensión de los estudiantes, ya que en la primera actividad les era más difícil concebir que se alcanzaría un límite, a diferencia del terreno, que lo veían como un todo del que se partía para crear una sucesión infinita pero que al final de cuentas tenía que sumar su total inicial.

Al respecto de la sucesión, tuvimos la siguiente discusión en la pregunta seis:

Mario: ¿Qué ocurre cuando agregamos más y más términos a la sucesión?
¿Es infinita o finita? ¿Por qué? Infinita porque cada vez que va saliendo un pedacito de terreno, ese pedacito va a formar otra mitad y esa mitad otra mitad, y así.

Marlén: ¿Alguien cree que sea finita?

Edgar: Pues si pasan todas las personas del mundo, pues sí se acaba, ¿no?
(risas)

Marlén: Ah bueno, ahí ya tenemos una posibilidad. Porque no se especifica cuántas personas van a pasar.

Salvador: Pero ni así se va a acabar.

Marlén: ¿por qué?

Eduardo: Porque va a ser la mitad, de la mitad, de la mitad, de la mitad.....

Salvador: Porque a la última persona le van a dar la mitad del pedazo que quede.

Alejandro: ¿y cuándo llegue cero? ¡Van a partir a la mitad un cero! Ayyyyy

Salvador: Nunca va a dar cero. Si queda uno, la mitad va a ser punto cinco, y la mitad de eso, punto veinticinco.

Eduardo: Y así, siempre da un resultado.

Salvador: Nunca va a llegar a cero.

Esta discusión pone en claro que había estudiantes que aunque no pensaban que tenían completamente la razón, alegaban que no era lógico pensar que nunca se terminaría el terreno. De hecho, Alejandro era uno de los estudiantes más hiperactivos del grupo, su equipo era el de los que nunca trabajan y sólo les gusta el relax. Sin embargo, aun con poca seguridad, alegaba que tenía que existir un límite, es decir, el terreno no podría ser infinito.

En la siguiente pregunta se obtuvo lo siguiente:

Miguel: ¿La suma se incrementa infinitamente o se aproxima a un número? Se incrementa, porque cada vez la fracción va aumentando.

Marlén: ¿Alguien tiene otra opinión?

Eduardo: Yo. Se aproxima a un número, a un entero.

Marlén: ¿Por qué?

Eduardo: Porque dice la suma. Si sumas todas las mitades, te va a dar el entero de donde sacaste todas las mitades.

Salvador: Yo digo que a la vez es infinita y a la vez se aproxima. Porque se va haciendo infinitamente porque se van repartiendo más pedazos y a la vez se va aproximando al entero.

Eduardo: Pero dice la suma.

Salvador: Sí pues, por eso, la suma se va haciendo infinita pero a la vez se va aproximando.

Eduardo: Pero si la suma se va a aproximar al entero.....

Alfredo: Pero no vas a poder hacerla más chica, porque siempre va quedando algo.

Eduardo: Sí, pero ya no sé.

(Risas de todos)

Eduardo: Pero siempre se va aproximando al entero.

Salvador: Es infinita.

Eduardo: ¡Pero se está aproximando de todos modos!



Figura 17. Eduardo tratando de convencer a Salvador.

Esta discusión en particular, fue una de las que dejan más en claro la influencia que tiene la discusión grupal en un estudiante. Eduardo era uno de los estudiantes más participativos del grupo, y en la mayoría de los casos su razonamiento era correcto. Sin embargo, Salvador, otro destacado estudiante, lo influyó de tal manera que Eduardo dudó del razonamiento que ya había hecho anteriormente. Y como no hubo nadie más que apoyara la respuesta de Eduardo, éste no supo cómo defenderse, sin embargo, no cambió de opinión.

Y en la última pregunta se obtuvo lo siguiente:

L Ángel: Si queremos juntar todas las fracciones del terreno que fueron repartidas, ¿cuánto sería su suma? No se podrían sumar porque no se terminaría de repartir el terreno.

Marlén: ¿quién piensa diferente?

Ángel: Pues dependería de las personas que lleguen. Él dice que no se terminaría de repartir pero, ¿si llegan poquitas personas? Así que no se sabe.

Salvador: Nosotros también dijimos que no sabemos cuánto sería la suma, porque no se está diciendo entre cuántas personas se van a repartir.

Eduardo: Pues igual, sería uno. Porque dice, si contaras todas las fracciones del terreno. Pus sería un entero, es casi igual que la anterior. Opinamos lo mismo.

Marlén: ¿nadie más opina igual que sus compañeros?

Arturo: Sí, nosotros. Porque no importa entre cuántas personas sea que se reparta el terreno, cuando se sume todas va a dar uno.

Miguel: Nosotros también decimos que cuando se junten todos los pedazos va a dar uno, a todo el terreno pues.

Salvador: Pero no va a llegar a un entero pues.

Eduardo: Pero mira, si juntas lo de todas las personas del mundo, si la vuelves a juntar se va a volver a hacer lo mismo.

Aurelio: Pero si se acaban las personas y queda un pedacito, por ese pedacito que quede no se va a hacer un entero.

Eduardo: ¿cómo no? si las vuelves a juntar sí.



Figura 18. Eduardo tratando de ilustrar cómo se juntarían todos los pedazos del terreno.

Esta discusión grupal, nos muestra lo que se mencionó anteriormente sobre la ambigüedad de la pregunta. Ya que algunos estudiantes, entre ellos Salvador, pensaban que se necesitaba saber cuántas personas llegaron a la repartición del terreno, para poder saber cuánto sumaban las parte repartidas. Sin embargo, Eduardo no se dio por vencido y seguía afirmando que el límite existía, y que era uno.

CAPÍTULO V. Conclusiones

El objetivo de nuestro trabajo de investigación fue promover el aprendizaje de las matemáticas mediante la aplicación de actividades diseñadas bajo ciertos principios o características, muy específicos, sugeridos por el NCTM (2000) y por el *Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum* (1 y 2, 1999, 2000). Dichas actividades deben ser atractivas y fáciles de entender para los estudiantes, que incluyan un contenido fundamental del currículo y que su diseño permita recuperar los procesos de pensamiento utilizados por los estudiantes en sus intentos de solución. Esto, claramente rompe con la enseñanza tradicional de las matemáticas.

Por otro lado, el NTCM también resalta la importancia de contemplar diferentes escenarios de aprendizaje en la instrucción, donde los estudiantes tengan la oportunidad de combinar el trabajo colectivo, ya sea en pequeños grupos o con la clase completa, y el trabajo individual. Se espera que los estudiantes aprendan a exponer y defender públicamente las ideas que utilizaron en sus intentos por resolver las actividades, así como a comunicar resultados. Para lograr estos propósitos, se requiere de la participación del profesor en momentos precisos donde contribuya al aprendizaje significativo.

Las actividades seleccionadas para el desarrollo de nuestra investigación (Los saltos de Yaya y El terreno de Don Juanito), así como la forma de trabajo utilizada en el aula para su aplicación, parecen favorecer considerablemente el aprendizaje de los estudiantes, ya que, en la mayor parte del tiempo, las actividades mantuvieron la atención y participación de los estudiantes durante el trabajo en pequeños grupos, las presentaciones por equipo y la discusión colectiva.

Incluso, aun fuera del salón de clases, después del primer día de trabajo, los estudiantes comentaban con sus compañeros “si la ranita llegaría o no al estanque”. Eso muestra que la actividad capturó su atención de tal manera que incluso los hizo discutir aun fuera de clases. Y nuevamente señalamos que los

estudiantes no tenían ninguna experiencia en esta forma de instrucción, lo cual innovó su tradicional forma de aprender.

Esto significa que las actividades resultaron ser atractivas para los estudiantes, ya que fomentaron la participación de los estudiantes hasta el grado de volverlos más críticos y reflexivos, ya que ahora cuestionaban las soluciones de sus compañeros, si les parecía que no tenían suficientes argumentos para convencerlos de sus respuestas. Incluso, en la segunda actividad participaron estudiantes que no se habían animado a hacerlo en la primera.

La actividad que causó más controversia en general, fue la de El terreno de Don Juanito, ya que se mencionaba la idea de una sucesión numérica, finita o infinita, etc. Todo esto en el hecho de saber si realmente podríamos unir las particiones que le hiciéramos al terreno, ya que muchos las consideraban infinitas, por tanto, imposibles de unir. Sin embargo, al final todos aceptaron que de alguna manera se tenía que completar el terreno de nuevo, sin importar la cantidad de particiones que se le hicieran.

Es muy importante señalar la influencia que tuvo el hecho de aplicar una actividad antes de ésta última, ya que la primera abrió paso a los estudiantes para que la noción de límite se fuera introduciendo en ellos. Pues ya en la segunda actividad, se notó considerablemente la manera de abordar el problema y razonarlo de una manera correcta. Por lo tanto, es claro que el uso cotidiano de actividades de este tipo, favorece considerablemente la introducción de conceptos tan abstractos como lo es el de límite.

Con base en estos resultados y a lo propuesto por David Tall (2010), se puede concluir que para lograr que los estudiantes expresen lo que saben y estén dispuestos a investigar lo que desconocen, las actividades deben ser novedosas, resueltas bajo el esquema de trabajo colaborativo, dentro del contexto donde se desarrollan los participantes, que involucren una situación problema narrada de manera de historia, que esté planeada para que los tiempos de resolución no resulten agobiantes y que involucren sus conocimientos previos.

En la mayoría de los casos hay respuestas más completas en el reporte del trabajo individual que el correspondiente al trabajo por equipos, tanto en cuanto a operaciones y bosquejos, así como en la argumentación dada.

Esto ilustra la evolución en los niveles de entendimiento de los estudiantes acerca de cada una de las actividades, en asuntos que al principio, en el trabajo por equipos, les resultaban problemáticos, lo cual se refleja en el manejo de recursos matemáticos y en el uso de estrategias propias del pensamiento matemático para resolver problemas.

En cuanto a los procesos matemáticos que utilizaron para la introducción del concepto de límite, nos encontramos que los estudiantes piensan de una manera muy lógica y numéricamente, ya que lograban ver las aproximaciones como algo que, no estaban muy seguros que llegaran a algo. Por un lado, en los Saltos de Yaya, la mayoría aseguró que no llegaría al estanque porque “los números son infinitos, y siempre va a haber una mitad que tenga que saltar”; y por otro lado, en El terreno de Don Juanito, aseguraron que tendría que llegar un momento en el que el terreno se tendría que terminar de repartir. Es decir, lograron reflexionar en el hecho de que tiene que existir un límite, aunque en realidad no conocieran el concepto tal cual, pero se quedaron con la noción de éste.

Y así, notamos que proceden de una manera muy visual, observando patrones (en las tablas, por ejemplo) e interpretando la información figurativa o las imágenes representadas, para así, concebir la iniciación a la adquisición de las nociones espaciales vivenciadas en un entorno cotidiano y de las relaciones de orientación y posición que se dan entre los objetos, personas y lugares, así como la identificación y descripción de las características de las figuras y cuerpos geométricos representados.

Sin duda, existen obstáculos que impiden que los estudiantes reflexionen de una manera correcta sobre algún concepto que se les quiera enseñar. Por ejemplo, la falta de razonamiento lógico para interpretar una situación problema, lo cual, en la mayoría de los casos los lleva a responder equivocadamente a casi la actividad completa. Es decir, si asumimos que no se da una introducción adecuada por el

profesor, y el estudiante no lleva a cabo el primer paso que sugiere Polya para resolver un problema, seguramente se equivocará en algún paso a lo largo de su trabajo. Pero no es el único obstáculo con el que nos podemos encontrar, ya que si desde un principio, la actividad propuesta no capta la mínima atención del alumno, éste se sentirá frustrado al intentar resolverla, y tal vez, ni siquiera lo intente. Es por esto que una tarea del profesor, más que preparar una clase, es diseñar tareas que capturen la atención y el interés de los estudiantes desde su introducción.

Se pudo observar que las actividades propuestas contribuyeron a que los alumnos lograran la comprensión del concepto de límite, sobre todo en la segunda actividad, donde algunos llegaron a la conclusión de que el límite era 1. Si bien no lo dijeron de esa manera, al preguntarles al respecto de la suma de todas las particiones del terreno, llegaron a esa conclusión, cuando nadie antes les mencionó algún número.

Claro que no todos lograron llegar a ese nivel de comprensión, sin embargo, la gran mayoría entendió y reflexionó sobre este concepto.

En cuanto al papel que el profesor debe jugar en el desarrollo de actividades de este tipo y bajo esta forma de instrucción, consideramos que debe ser un mediador entre los estudiantes y el conocimiento. Su participación debe ser en momentos precisos que contribuyan a destrabar posibles controversias, de manera que se logre un avance en el aprendizaje de los estudiantes; sus intervenciones van con el sentido de alentar cambios en la forma de pensar de los estudiantes sobre determinados aspectos de los problemas, los cuales significan un mayor entendimiento de la situación, sin que ello quiera decir eliminar el reto principal de la actividad.

Pese a los obstáculos que pudimos haber encontrado a lo largo de nuestra investigación, obtuvimos resultados positivos y prometedores. Esperamos que muchos educadores reflexionen a cerca de su manera de enseñar, tomando en cuenta nuestra metodología, así como nuestras actividades, las cuales son fáciles de diseñar y de aplicar en clases. Observamos que los estudiantes quedaron

satisfechos con el trabajo realizado y que además, aprendieron una manera novedosa de trabajar, la cual los introdujo en un nuevo concepto que conocerían en un futuro no muy lejano.

En general, podemos afirmar que nuestro trabajo de investigación favoreció de manera muy positiva a la introducción de la noción del concepto de límite. Y no sólo se trata de diseñar una buena actividad para cierto concepto, pues todo va de la mano, desde la metodología hasta la colaboración del profesor. Es decir, consideramos que se debería reflexionar un poco más a la hora de enseñar, ya que la forma de instrucción tradicional está obstruyendo el aprendizaje de los estudiantes en nuestro país.

Anexo A

A continuación se presentarán las transcripciones de las videograbaciones, en donde se pudo rescatar información relevante para la investigación:

Los Saltos de Yaya.

Marlén: El equipo de Mario, pase por favor a resolver la pregunta 5.

Mario: Observa la tabla, después de 5 saltos, ¿cuánto le falta a Yaya para llegar a su destino? Exprésalo de manera algebraica. Aquí fue de esta manera porque la pregunta nos está diciendo que después del quinto salto cuánto nos falta, y como son once pasos, del quinto al once pues faltan seis.

Marlén: ¿todos están de acuerdo con su compañero?

Salvador: No. O sea que necesitas saber cuánto lleva hasta el quinto salto. Nosotros fuimos sumando los cinco pasos que dio y el resultado fue treinta y un treintaidosavos. O sea que treinta y dos es el entero, ¿no? y ya lleva treinta y uno, o sea que le falta un treintaidosavo. Y la expresión algebraica es un medio a la cinco.

Marlén: Mario, ¿qué piensan ahora?

Mario: Pues sí, estamos mal. Le falta eso que dicen ellos.....

Marlén: ok. Sus compañeros respondieron de manera correcta (Salvador), sin embargo, había una manera más fácil de averiguarlo. Si observan la tabla, como decía la pregunta 5, notarían que en la segunda fila dice: distancia que le falta por saltar. Así que la misma tabla respondía la pregunta, claro, tenían que haberla llenado de manera correcta en un principio. ¿Queda claro? Bueno, vayan a su lugar. Vamos a continuar. Equipo de David, pase a resolver la pregunta 6 por favor.

David: Si Yaya diera n saltos, ¿qué distancia le falta por recorrer? Pues sería n distancia porque no sabemos los saltos que va a dar.

Marlén: ¿todos están de acuerdo?

Salvador: No. Pues si Yaya da un salto y va recorriendo la mitad de lo que le falta, o sea que le faltaría la mitad de n .

(Y mientras la discusión se llevaba a cabo, David escribía en el pizarrón $(1/2)^n$)

Marlén: ¿qué significa eso David?

David: Lo que le falta.

Marlén: Puedes explicarnos por qué.

David: Porque dice, si diera n saltos. Y como aquí, en la tabla se pone un medio, y el salto que dio, serían n saltos.

Marlén: ¿O sea que tu intuición te dice que esa es la respuesta?

David: Aja.

Marlén: Bueno, su compañero tiene razón, y la verdad es que la tabla les brindaba mucha información que podían haber utilizado para responder las preguntas. Pero no es la única manera, claro. Pero sí, esa es la respuesta, ¿queda claro por qué? Muy bien, continuemos. Noé, adelante con tu equipo por favor, pregunta 7.

Noé: ¿Qué cantidad de saltos necesita Yaya para llegar al estanque? Argumenta tu respuesta. Once saltos. Porque en la tabla están once saltos, y son los que va a hacer para llegar al estanque.

(Noooo, no, no...)

Marlén: ¿quién no está de acuerdo?

Eduardo: Yo. Porque cada vez que vas dividiendo, siempre sale una cantidad. Sea mínima, de todos modos va recorriendo algo. No va a llegar nunca, es infinito.

Marlén: a ver, entonces ¿llega Yaya al estanque o no?

(No, no llega)

Juan Carlos: Pero va a llegar un punto en el que el pedazo que va a recorrer debe ser una mitad y ya no va a poder dividirse a la mitad y ya va a llegar.

El Grupo grita: Que no, ¡no llega, no llega!

Marlén: A ver, ¿qué pueden responder a eso que acaba de decir su compañero Juan Carlos?

Eduardo: Que no, porque los números son infinitos y no importa que tan chiquito sea el pedazo, de todos modos se puede partir a la mitad. Y pues así nunca va a llegar.

Juan Carlos: Ya pues, digan lo que quieran, pero la ranita sí llega.

Eduardo: ¿Usted qué piensa?

Marlén: Yo creo que esta discusión tiene mucho sentido, y no es malo que cada quien defienda lo que piensa, claro, si tiene argumentos válidos.

Eduardo: Pero, ¿cree que sí llega o no?

Marlén: Por el momento no importa lo que yo crea, necesito saber qué creen ustedes. Así que dejaremos abierta la pregunta.

Anexo B

El Terreno de Don Juanito.

Marlén: Muy bien, vamos a contestar las preguntas. Noé, pasa con tu equipo a responder la primera pregunta por favor.

Noé: ¿Terminarán algún día de repartir el terreno? ¿Por qué? Sí porque el terreno se irá haciendo más chico y ya no alcanzará.

Alejandro: Sí porque van a ser muchos pedazos y el último va a ser muy chiquito. Y o sea, pa que quieres un pedazo muy chiquito si no lo vas a ocupar. Ni modo que puedas partir un centímetro a la mitad, sería ya lo final del terreno que repartirías.

Marlén: Ok. ¿Todos están de acuerdo?

Eduardo: No, porque igual siempre va a salir algo, la mitad.

Noé: ¿puedes partir un centímetro?

Eduardo: Perate, a ver ¿cómo dice la pregunta?

Noé: ¿Terminarán algún día de repartir el terreno?

Eduardo: No terminarán porque por más pequeño que sea el pedazo

Noé: A ver, parte un milímetro a la mitad.

Eduardo: Sí pues, sí pues, pero de todos modos. No es si pa qué quieres un pedazo, no, de todos modos se va a repartir la mitad de la mitad, de la mitad. Por más pequeño que sea el pedazo, de todos modos sale algo pues.

Marlén: Ok. Ok. Está bien que cada quién piense diferente. No esperaba que todos estuvieran de acuerdo con lo que dirían sus compañeros. Sin embargo, dejaremos que todos se hagan sus propias conclusiones y al final, responderé correctamente.

Marlén: Mario, por favor pase a responder la pregunta 6.

Mario: ¿Qué ocurre cuando agregamos más y más términos a la sucesión? ¿Es infinita o finita? ¿Por qué? Infinita porque cada vez que va saliendo un pedacito de terreno, ese pedacito va a formar otra mitad y esa mitad otra mitad, y así.

Marlén: ¿Alguien cree que sea finita?

Edgar: Pues si pasan todas las personas del mundo, pues sí se acaba, ¿no? (risas)

Marlén: Ah bueno, ahí ya tenemos una posibilidad. Porque no se especifica cuántas personas van a pasar.

Salvador: Pero ni así se va a acabar.

Marlén: ¿por qué?

Eduardo: Porque va a ser la mitad, de la mitad, de la mitad, de la mitad.....

Salvador: Porque a la última persona le van a dar la mitad del pedazo que quede.

Alejandro: ¿y cuándo llegue cero? ¡Van a partir a la mitad un cero! Ayyyy

Salvador: Nunca va a dar cero. Si queda uno, la mitad va a ser punto cinco, y la mitad de eso, punto veinticinco.

Eduardo: Y así, siempre da un resultado.

Salvador: Nunca va a llegar a cero.

Marlén: Bueno, a ver muchachos, si van a afirmar una respuesta, recuerden que debemos justificarla. Y está bien si sus compañeros piensa eso, que efectivamente la sucesión será infinita independientemente de cuántas personas vayan. Y también es válido que otros creen que tiene que tener un fin, y hasta dicen que podría ser cero. Todas sus respuestas son muy buenas. Así que continuaremos. Miguel, la pregunta 7 por favor.

Miguel: ¿La suma se incrementa infinitamente o se aproxima a un número? Se incrementa, porque cada vez la fracción va aumentando.

Marlén: ¿Alguien tiene otra opinión?

Eduardo: Yo. Se aproxima a un número, a un entero.

Marlén: ¿Por qué?

Eduardo: Porque dice la suma. Si sumas todas las mitades, te va a dar el entero de donde sacaste todas las mitades.

Salvador: Yo digo que a la vez es infinita y a la vez se aproxima. Porque se va haciendo infinitamente porque se van repartiendo más pedazos y a la vez se va aproximando al entero.

Eduardo: Pero dice la suma.

Salvador: Sí pues, por eso, la suma se va haciendo infinita pero a la vez se va aproximando.

Eduardo: Pero si la suma se va a aproximar al entero.....

Alfredo: Pero no vas a poder hacerla más chica, porque siempre va quedando algo.

Eduardo: Sí, pero ya no sé.
(Risas de todos)

Eduardo: Pero siempre se va aproximando al entero.

Salvador: Es infinita.

Eduardo: ¡Pero se está aproximando de todos modos!

Marlén: Muy bien, excelentes respuestas de todos. En la conclusión, sabrán quiénes tenían la razón. Luis, pasa a responder la pregunta 8 por favor.

L Ángel: Si queremos juntar todas las fracciones del terreno que fueron repartidas, ¿cuánto sería su suma? No se podrían sumar porque no se terminaría de repartir el terreno.

Marlén: ¿quién piensa diferente?

Ángel: Pues dependería de las personas que lleguen. Él dice que no se terminaría de repartir pero, ¿si llegan poquitas personas? Así que no se sabe.

Salvador: Nosotros también dijimos que no sabemos cuánto sería la suma, porque no se está diciendo entre cuántas personas se van a repartir.

Eduardo: Pues igual, sería uno. Porque dice, si contaras todas las fracciones del terreno. Pus sería un entero, es casi igual que la anterior. Opinamos lo mismo.

Marlén: ¿nadie más opina igual que sus compañeros?

Arturo: Sí, nosotros. Porque no importa entre cuántas personas sea que se reparta el terreno, cuando se sume todas va a dar uno.

Miguel: Nosotros también decimos que cuando se junten todos los pedazos va a dar uno, a todo el terreno pues.

Salvador: Pero no va a llegar a un entero pues.

Eduardo: Pero mira, si juntas lo de todas las personas del mundo, si la vuelves a juntar se va a volver a hacer lo mismo.

Aurelio: Pero si se acaban las personas y queda un pedacito, por ese pedacito que quede no se va a hacer un entero.

Eduardo: ¿cómo no? si las vuelves a juntar sí.

Marlén: Muy bien muchachos. Aquí le vamos a dejar. Las opiniones de cada uno son de suma importancia para mí. Les agradezco mucho su participación.

Bibliografía

- Arcos, Q. J. I. (2008). *Cálculo infinitesimal para estudiantes de ingeniería*, Toluca, Estado de México: Editorial Kali.
- Arcos, Q. J. I., Sepúlveda, L. A. (2014). *Desarrollo Conceptual del Cálculo*, Toluca, Estado de México: Editorial Kali.
- Azcárate, G. C., Deulofeu, P. J. (1996). *Funciones y gráficas*, Madrid, España: Editorial Síntesis.
- Balacheff, N., Gaudin, N. (2009, en prensa). "Modeling student's conceptions (the case of functions)". In Hitt F., Holton D. y Thompson P. (Eds), *Research in Collegiate in Mathematics Education*, Volume VII. USA.
- Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum. *High School Assessment Package 1*. (1999). White Plains, N. Y.: Dale Seymours Publications.
- Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum. *High School Assessment Package 2*. (2000). White Plains, N. Y.: Dale Seymours Publications.
- Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). *Los sistemas de representación en la enseñanza del límite*, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, número 3, pp. 219-236.
- Castro, E. & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori-ICE Universitat de Barcelona, 95-124.
- Cornu, B. (1994). Limits. En: Tall, D. (Eds.) *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Doerr, H. M., English, L. D. (2003) "A Modeling Perspective on Students' Mathematical Reasoning About Data. En E. A. Silver (Ed.) *Journal for Research in Mathematics Education* 2, pp 110-136. Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Hagelgans, N. L., Reynolds, B. E., Schwingendorf, K., Vidakovic, D., Dubinsky, E., Shahin, M., Wimbish Jr. G. J. (Eds.). (1995). *A Practical Guide to Cooperative Learning in Collegiate Mathematics*. Mathematical Association of America. NW, Washington, DC. MAA Notes Number 37.
- Janvier, C., Girardon, C. & Morand, J. (1993): Mathematical Symbols and Representations. En P. Wilson (edt.), *Research ideas for the classroom*. Reston VA: N.C.T.M.

- Lesh, R., Kelly, A. (2000). Multitiered Teaching Experiments. En A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 197-230). Mahwa, NJ: Laurence Erlbaum Associates, Inc. Publishers.
- Lester, F. K., Kehle, P. (2003). From problem solving to modelling: An evolution in thinking. En R. Lesh y H. Doerr (Eds.) *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 501-517). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Mason, J., Burton, L., Stacey, K. (1987). *Thinking Mathematically*. New York.: Adison Wesley.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards in School Mathematics*. Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Santos, M. (1997a). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Santos, M. (1997b). La formulación de problemas para una instrucción y evaluación matemática balanceada. En G. Waldegg y D. Block (Eds.), *Estudios en Didáctica*. Consejo Mexicano de Investigación Educativa. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouwns (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan Publishing Co.
- Sepúlveda, A., Santos T.M. (2006). "Desarrollo de episodios de comprensión matemática que exhiben estudiantes de bachillerato en procesos de resolución de problemas". En *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, número 31, pp. 1389-1422, Octubre-Diciembre de 2006.
- Sierpinska, A. (1990): «Some remarks on understanding in mathematics». For the Learning of Mathematics, vol. 10.3, 24-36.
- Stewart, I. (1998). Cambio. En: Steen, L. (Eds.) *La enseñanza agradable de las matemáticas*, (pp. 193- 227). México: Limusa.
- Tall, D. (2010). *A sensible approach to the Calculus*. University of Warwick. United Kingdom, de la www.warick.ac.uk/staff/David.Tall
- Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad. *Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México. Trillas.