UNIVERSIDAD MICHOACANA DE

SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

"Actividades que promueven una idea intuitiva del concepto de límite en estudiantes de bachillerato"

TESIS

Que para obtener el título de

Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

Presenta:

MARTHA GUTIERREZ HERNANDEZ

Asesor:

Doctor en Matemática Educativa Armando Sepúlveda López

Morelia, Michoacán. Abril de 2015.

DEDICATORIA

Siempre he estado pensando cómo agradecerte, por hacerme el regalo más grande más fuerte, haberme regalado todo lo que tienes. Has perdido tu tiempo por mis ilusiones, y cambiaste llorar por luchar en mi nombre, por buscarme un lugar donde fuera valiente para ser feliz conmigo misma.

A mi hermana PETRA GUTIERREZ

Por ayudarme y apoyarme a dar este difícil paso.

A tí dedico hoy este triunfo, porque sin ti no lo hubiera logrado.

A mis hermanos, por estar siempre al pendiente de mi

Y nunca darse por vencidos, por ayudarme y

Hacerme sentir confiada.

A mis padres por ser mi motor para seguir luchando

Agradecimientos

Estoy eternamente agradecida con mi padre **Dios** por su amor y misericordia, tú que me enseñas que en este caminar que se llama vida hay amor, esperanza y fe; gracias Señor por llegar y permanecer en mi vida, eres quien me ha hecho volver a vivir, a ti debo mis logros, porque llegaste a mi corazón cuando más te necesitaba. Gracias por mi hermosa familia y amigos.

La vida es difícil y aburrida cuando la vives sola. Gracias a Dios tengo la dicha de estar rodeada de personas increíbles que me apoyan, quieren y animan, a las cuales hoy quiero hacer mención de una forma especial. Agradezco desde el fondo de mi corazón a:

Mis padres: Felipe Gutiérrez y Teresa Hernández, personas extraordinarias que me dieron la vida y todo lo que tenían para enseñarme valores. Dios los puso en mi vida porque son los mejores e indicados para mí. A ustedes les debo la familia tan maravillosa que hoy tengo, son mi fuerza y mi motivo para seguir luchando, y sin temor a equivocarme me atrevo a decir que son mi todo. A ustedes les dedico hoy este logro esperando sea una razón más de orgullo. Son personas que dieron hasta lo que no tenían y que darían hasta la vida misma por sus hijos. Desde el fondo de mi corazón les agradezco.

A mis hermanos, quienes son los engranes perfectos para lograr que mi vida funcione. Cada uno de ellos aporta y seguirán aportando todo lo necesario para hacerme una mejor persona, a ellos les debo todo lo que hoy soy, por esta razón a continuación les agradezco de una forma especial a:

A Petra Gutiérrez e Inocente Pantoja. Estoy eternamente agradecida con ustedes porque me han dado su cariño incondicional, me trataron como a una hija y me han apoyado en todo; por estas razones son dignos de mi admiración. Agradezco cada momento, palabra de ánimo que me dieron y sobre todo por la gran confianza que me tuvieron para hacerme parte de sus lindas vidas.
Hermana hoy quiero mencionar lo que tú ya sabes, eres increíble. He aprendido que no se necesita de mucho para lograr lo que uno quiere, este paso no lo hubiera dado sino es por ti, ya que fuiste tú quien dio todo, fuiste tú quien nunca perdió las esperanzas, quien me levantó cuando yo ya sentía todo perdido, quien me dio fuerzas cuando yo ya no las tenía y quien tuvo fe en alguien que no tenía esperanzas. Agradezco cada minuto, cada día y cada momento que has invertido en mí, porque tuviste razones suficientes para dejar de creer, pero nunca lo hiciste. Gracias por darme la ayuda económica necesaria para lograr este sueño. Deseo hoy te sientas orgullosa de mí así como yo lo estoy de ti, y desde el fondo de mi corazón te digo que este logo “es tuyo”, te amo y no tengo las palabras para decirte gracias.

Bulmaro Gutiérrez y Edith Gutiérrez, con ustedes estoy eternamente agradecida por enseñarme a ser fuerte, son las personas más luchonas y trabajadoras que he conocido, ustedes supieron dar esperanza cuando no la había. Agradezco el que nunca se hayan dado por vencidos; gracias a ustedes hoy podemos disfrutar de una familia tan excepcional como la nuestra, sé que no se puede tener todo en la vida, pero yo los tengo a ustedes. Gracias por creer en mí, por sus palabras tan sabias y acertadas que siempre me dan, por el apoyo que de una u otra forma me hacen creer ser la persona más afortunada del mundo, gracias por ser la fuerza de la familia.

A Tomasa Gutiérrez y Apolonia Gutiérrez, ustedes me han enseñado que en esta vida llena de tropiezos y dificultades nunca me debo de dar por vencida, me han enseñado a nunca rajarme, y mientras me dan su apoyo incondicional, amor y tiempo, me enseñan a vivir la vida de la mejor manera. Gracias por siempre creer en mí; son el ánimo de la familia y con su sensibilidad y alegría saben sacar a cualquiera de cualquier estado de ánimo en el que se encuentre. La vida no nos ha tratado de la mejor manera y nos ha marcado mucho, pero no sé cómo le hacen para que todo eso quede en el olvido. Gracias por nunca escuchar un no de sus bocas y el hecho de siempre apoyarme aunque no esté en sus posibilidades me hacen pensar que son las mejores, las amo.

A Presi y Bonfi Gutiérrez. No conozco personas más extraordinarias que ustedes, los mejores momentos de mi vida los he pasado con ustedes. Tienen un don especial para creerme la mujer más afortunada del mundo, los amo como no tiene una idea. Gracias por darme de su tiempo y apoyo, sé que en cualquier momento, sea lo que sea ustedes siempre estarán ahí para ayudarme. Perdón por las decepciones y ofensas que les he causado, les estoy eternamente agradecida por ser parte de mi linda familia, ustedes son dignos de mi admiración y la chispa que contagia de buen ánimo a toda la familia.

A Mari, Felipe, Francisco y Esmeralda Gutiérrez. He tenido la dicha de convivir de una forma especial con ustedes, ya que nos tuvimos que apoyar cuando estuvimos solos y sólo nosotros sabemos el calvario que fue todo esto. Ustedes siendo los peques de la familia me han dado lecciones de vida, por un momento creí que era yo quien los tenía que cuidar y aconsejar, pero me demostraron que son ustedes quienes me han cuidado, aconsejado y hasta animado. Los admiro porque han sabido ser buenos hijos y hermanos. Gracias por dejarme ser partícipe de sus vidas, los quiero mucho y a pesar de que no se puede evitar pelear, estoy segura que siempre los tendré.

A Marlén Suazo. Siempre pensé tener los hermanos suficientes como para querer uno más, pero llegaste a ser el engrane perfecto que a mi vida le hacía falta. Gracias por los buenos y malos momentos, por los regaños que nunca han sido suficientes pero que me han ayudado a ser cada día mejor, gracias por experimentar y vivir momentos que serán inolvidables y que aunque nos alejemos estemos seguras que siempre seremos las mejores amigas. Nunca dejaré de dar gracias a Dios por ponerte en mi vida y hacerme parte de la tuya. Tqm.

A mis amigas que son la familia que uno escoge y que gracias a ellas me fue más fácil tolerar el estar lejos de la familia. A ustedes que me hicieron parte de sus locuras, hoy quiero agradecerles desde el fondo de mi corazón a: *Perla, Rosa, Cinthia y Blanca*. Gracias por ese apoyo que solo ustedes saben dar, esos momentos tan locos que sólo pude haber vivido con ustedes. Son las mujeres más locas que me pude haber encontrado y ¿saben qué?, me encanta ser parte de sus locuras y de sus lindas vidas, las quiero mucho y recuerden que a pesar de que cada una de nosotras tomemos rumbos diferentes, siempre habrá en mi corazón esa amistad que para mí es única.

Por último pero no menos importante, agradezco al Dr. Armando Sepúlveda. Gracias profe por darme la oportunidad de trabajar con usted, gracias por su responsabilidad, dedicación y tiempo valioso que se tomó para enseñarnos.

ÍNDICE

Contenido   pág.

Resumen

Este trabajo de investigación tiene como objetivo estudiar el comportamiento de estudiantes de bachillerato frente a actividades relacionadas con nociones asociadas al concepto de límite; es decir, qué tipos de acercamientos utilizan para atacarlas, si llegan o no a la solución y qué obstáculos encuentran en el proceso, etc. Respecto a las actividades, se utilizaron dos: "la cuerda de Luisa" y "Comportamiento de funciones". La metodología utilizada fue la propuesta por Sepúlveda y Santos (2006), que consta de cinco pasos: actividad previa, trabajo en equipo, presentaciones, discusión colectiva y trabajo individual. Después de la recolección y análisis de los datos, los resultados obtenidos fueron realmente favorables. Se distinguieron diferentes tipos de acercamientos por parte de los estudiantes al concepto, así como un trabajo en clases productivo por parte de los mismos. Es claro que el concepto de límite es difícil y árido para casi todos los estudiantes, sin embargo, la finalidad de nuestro trabajo es precisamente facilitar eso, es decir, si de todos modos son conceptos que se tienen que enseñar, entonces hay que buscar la manera más óptima de lograrlo.

Palabras clave: límite, cálculo, actividades y discusión colectiva.

Abstract

This research aims to study the behavior of high school students face related notions associated to the concept of limit activities; ie what types of approaches used to attack them, whether or not the solution and what obstacles come in the process, etc. "Luisa Rope" and "Behavior functions": Regarding the activities, two were used. The methodology used was that proposed by Sepulveda and Santos (2006), which consists of five steps: previous activity, teamwork, presentations, group discussion and individual work. After collecting and analyzing the data, the results were really friendly. Different types of approaches by the students to the concept as well as work in productive classes by themselves were distinguished. It is clear that the concept of limit is hard and dry for most students, however, the purpose of our work is to facilitate that, ie if anyway they are concepts that have to teach, then we must seek the to achieve more optimal way.

Keywords: limit, calculus, activities, collective discussion.

CAPÍTULO I. Planteamiento del problema

1.1. Introducción

El presente trabajo es de carácter cualitativo, se reportan dos actividades hechas para promover y despertar una idea intuitiva sobre el concepto de límite. Dichas actividades fueron aplicadas a estudiantes del Cetis Nº 34, en el plantel de Lázaro Cárdenas en el horario de clases, en un tiempo estimado de dos horas; los grupos que ayudaron a nuestra investigación eran de segundo y sexto semestre. El primero eran alumnos que cursaban el bachillerato de administración, el segundo cursaban el de físico matemático (técnico en mecánica).

El cálculo es una de las materias de mucha importancia en el bachillerato, pero al mismo tiempo compleja. Diversos estudiantes llegan a expresan que especialmente el límite es un concepto difícil de comprender. Este concepto es parte importante del currículo en nuestro sistema educativo y desde siempre su enseñanza no ha dejado de preocupar a profesores e investigadores, que al paso del tiempo ven fracasar los intentos para que los alumnos comprendan su significado y en muchas ocasiones, se reduce a un conjunto de cálculos que tienen poco sentido e interés; la definición en sí es difícil y confusa, más cuando se define en términos de ε y δ.

Son muchos los problemas que acarrea el tratar de comprender el concepto de límite. El interés de investigadores por conocer las razones o motivos, por lo que algunos estudiantes no logran construir el concepto de límite, los lleva a identificar la importancia de estudiar la construcción que realizan los estudiantes sobre los procesos que intervienen en los conceptos matemáticos. Estos investigadores resaltan también, algunos de estos problemas, argumentan también que uno de ellos es la complejidad del tema en sí, otros enfatizan en el quehacer del profesor, ya que los alumnos no alcanzan los rendimientos esperados en esta asignatura.

Ante esta problemática importantes matemáticos como Ian Stewart (1998) y David Tall (2010), por mencionar algunos, se han preocupado y enfocado ante estas dificultades. Proponen enseñar dichos temas de una manera sutil y sensible, ya que están convencidos que no resulta favorable aplicar todo el rigor matemático en etapas tempranas. Al referirse a los trabajos de Cornu (1991) y Sierpinska (1985) manifiestan, que la enorme dificultad de la enseñanza y del aprendizaje del concepto de límite se debe a su riqueza y complejidad tanto como al hecho de que los aspectos cognitivos implicados no se pueden generar puramente a partir de la definición.

Sin embargo, nuestro propósito es desarrollar actividades que ayuden al proceso de construcción del concepto de límite, promover y comprender mejor el concepto en diferentes grados del bachillerato. Se pretendió analizar el desarrollo y experiencias que los estudiantes utilizan al planteárseles actividades en grupos de aprendizaje cooperativos. Tomando algunas recomendaciones, consideramos necesario proponer dos actividades que llevan por nombre: “La cuerda de Luisa” y “Comportamiento de funciones”, estas actividades promueven el aprendizaje del concepto de límite, y ayudan al alumno a descubrir y generar un conocimiento. Se documentan lo que los estudiantes realizan cuando se enfrentan a problemas relacionados con el tema, no se muestra rigor, lo que se espera es encontrar una forma de llamar el interés y curiosidad del alumnos.

Las actividades en esta tesis muestran una metodología propuesta por Sepúlveda y Santos (2006), basada en el aprendizaje cooperativo. Los estudiantes tienen la oportunidad de trabajar en pequeños grupos, presentar y defender sus ideas en el salón de clase , revisar constantemente su trabajo como resultado de crítica y opiniones que se surgieron durante sus presentaciones y discusiones en clase, así como promover una discusión colectiva para exhibir diferentes episodios de comprensión que les permitió tener un más claro concepto y por ultimo aplicar la actividad en forma individual, para ver qué aprendizaje obtienen después de escuchar y analizar las ideas de sus compañeros.

Lo que se analiza es cómo los alumnos construyen una idea intuitiva del concepto de límite. Lo que nos ayudó en esta investigación fueron las hojas de trabajos, videos grabados hechos al momento de aplicar las actividades en equipos e individualmente así como de las discusiones hechas en el salón de clases.

1.2. Justificación

En el transcurso de la historia, son muchas las investigaciones que se hacen sobre la dificultad que se tiene para aprender los diferentes conceptos del cálculo, una de ellas es el de límite. Es muy común escuchar alumnos que por su complejidad, suelen sentir un odio, aburrimiento y un poco entendimiento hacia las matemáticas.

Una de las preocupaciones de los investigadores es averiguar cómo se produce el conocimiento de los alumnos, para Castro y Castro (1997), dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones y el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada una de ellas y en convertir o traducir unas representaciones en otras.

Entender las matemáticas en un problema latente en nuestro sistema educativo, notemos que la comprensión de conceptos como el del límite, necesitan de estrategias mentales, un diseño de enseñanza adecuada a la capacidad y nivel del alumno, que genere un mínimo de interés por el estudio y que le facilite la adquisición de tales conceptos. Muchas veces pueden ser capaces de memorizar y mecanizar la resolución de ejercicios para aprobar sus evaluaciones, pero rara vez comprenden lo que están haciendo; quizá sea por eso que no solamente no valoran la conveniencia de aprender cálculo, sino que además lo consideran inútil para su formación.

Además, Arcos et al. (2007, p.369) recomienda ofrecer a los alumnos de bachillerato y escuelas de ingeniería, un cálculo que recupere las cualidades didácticas del cálculo de Leibniz; un cálculo basado en cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes, que permita una mejor comprensión de los conceptos básicos de la materia.

Por su parte Cornu (1994), señala que es importante que el alumno esté consciente de la complejidad de la noción de límite y de las dificultades que se pueden presentar más que ofrecerle una exposición clara del concepto.

1.3. Problema de investigación

Un problema significativo, que enfrentan profesores e investigadores en la educación matemática, es afrontar que un considerable número de alumnos no sobresalen o dan el rendimiento esperado en esta asignatura.

No se pretende analizar el problema del aprendizaje en forma global, sino centrar nuestra atención sobre un tema de matemáticas (que se considera muy importante) que tanto la historia como la investigación nos indica su dificultad en el proceso de aprendizaje. Se busca una manera en la que se le puede ayudar al alumno a tener una idea intuitiva del concepto de límite. Para esto nos plantearemos el siguiente problema de investigación:

¿QUÉ TIPO DE ACTIVIDADES Y EXPERIENCIAS FAVORECEN LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO?

Nuestro interés se centra en justificar la promoción de un ambiente de aprendizaje en el salón de clases, donde los estudiantes tengan oportunidad de desarrollar recursos y procesos matemáticos, que les ayude a resolver diversos tipos de problemas relacionados con el concepto de límite. Dicho ambiente se genera como consecuencia de aspectos fundamentales, como las características que poseen las actividades que se presentan a los estudiantes, estas características están asociados con las formas de trabajo en el aula.

Por ello, cobra relevancia identificar principios que guíen el diseño de actividades que promueven el desarrollo de esos recursos y estrategias matemáticas en los estudiantes. Asimismo, en dicha implementación se contempla la combinación del trabajo de los estudiantes en pequeños grupos, cuyo fundamento se encuentra en los grupos de aprendizaje cooperativo, donde muestren su entendimiento inicial del problema y presenten sus acercamientos espontáneos a todo el grupo, expongan y defiendan sus ideas ante los demás mediante la discusión colectiva y, finalmente, elaboren un reporte individual de la actividad realizada.

Se tendrá cuidado que las actividades propuestas, además de incorporar los conceptos de interés, tengan estrecha relación con los conocimientos previos del alumno; que sean variadas en cuanto a la resolución de problemas; que animen a los alumnos a experimentar y que involucren otras áreas del conocimiento. Todo ello con el fin promover la creatividad, el descubrimiento, la comunicación de sus resultados, así como la formación y argumentación de conjeturas.

1.4. Objetivos

Nuestra investigación está enmarcada desde una perspectiva de la construcción de conceptos. En particular, consideramos de suma importancia proponer actividades, para que nos ayude a entender las dificultades de aprendizaje de algunos estudiantes de segundo y último semestre de bachillerato, también que ayuden al estudiante en los procesos de construcción del concepto de límite.

Otro aspecto esencial es la posibilidad de detectar en ellos procedimientos que reflejan al tratar de obtener cierto tipo de conocimiento. Creemos que diseñar actividades y presentarlas al estudiante resultan útiles y alentadoras, les ayuda a tomar la clase de una forma diferente a lo acostumbrado, ya que en la actualidad los profesores pueden volverlas rutinarias.

Por lo tanto nuestros objetivos de una manera más clara son los siguientes:

1. Diseñar actividades que nos ayuden a analizar las dificultades que presentan los alumnos al enfrentarse a situaciones problemáticas que involucran el concepto de límite.

2. Analizar de qué manera estas actividades influyen en alumnos que no han llevado un curso de cálculo y alumnos que ya han estado expuestos a dicho conocimiento.

1.5. Preguntas de investigación

En esta investigación se pretende dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Qué características deben tener las actividades propuestas, para que los estudiantes expresen lo que saben y estén dispuestos a investigar lo que desconocen?

2. ¿Qué procesos matemáticos desarrollan los estudiantes cuando se enfrentan a problemas que involucran el concepto de límite?

3. ¿A qué obstáculos se enfrentan los estudiantes al momento de aprender el concepto de límite?

4. ¿Las actividades propuestas contribuyeron para que los alumnos logren la comprensión de una forma intuitiva del concepto de límite?

5. ¿Qué papel juega el profesor en el desarrollo de dichas actividades?

CAPITULO II. Revisión de bibliografía

2.1. Introducción

En este capítulo exponemos algunos aspectos teóricos y resultados de investigaciones con respecto a la problemática del aprendizaje del concepto de límite. Presentaremos una breve reseña del desarrollo histórico y su influencia en la formalización del concepto. Se mencionan también algunas ideas y propuestas de varios investigadores para superar las dificultades de aprendizaje de dicho concepto.

Durante la vida educativa del ser humano, específicamente en el aprendizaje de las matemáticas en el nivel básico, se pueden identificar muchas problemáticas en el desarrollo del proceso enseñanza aprendizaje, se puede mencionar por ejemplo la falta de una planeación didáctica por parte del maestro, así como las dificultades de aprendizaje del mismo alumno en la materia.

En las últimas décadas se han señalado algunas notables deficiencias en la enseñanza de las matemáticas. Muchas de ellas tienen que ver con el papel que "se le asigna" o asume el estudiante en el proceso educativo, ya que en el modelo tradicional regularmente juega un papel pasivo, sólo como un "receptor" de la información que, supuestamente, habría de transmitirle el profesor.

Tal situación impide que se tenga, en la mayor parte de los alumnos, un aprendizaje significativo y prácticamente una nula capacidad para resolver problemas. Al respecto de la manera en la que tradicionalmente se resuelven problemas en las aulas, Schoenfeld señala:

> Raramente la presentación de la solución de un problema por parte del maestro dura más de cinco o diez minutos. A los estudiantes nunca les queda la impresión de que uno puede dedicar horas (mucho menos días, semanas o meses) trabajando en un problema… Se les priva de la oportunidad de mostrar algún progreso en la resolución de problemas

complicados y como consecuencia se les reprime de la esperanza destacarlos, a aquellos que son capaces de trabajar estos problemas.

(Citado por Santos, 1997)

2.2. Reseña histórica

Algunas de las ideas fundamentales del cálculo se remontan a los antiguos matemáticos griegos del tiempo de Arquímedes (287-212 a C.), así como a los trabajos de los primeros años del siglo XVII realizados por René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), por mencionar algunos. Sin embargo, la invención del cálculo se atribuye a Isaac Newton (1642-1725) y a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) debido a que ellos iniciaron la generalización y unificación de estos conceptos matemáticos.

No podemos dejar de mencionar a personajes del siglo XVII Y XVIII tales como: Johann Bernoulli (1654-1705), Leonhard Euler (1707-1783) y Joseph L. Lagrange (1736-1748), que también intervinieron en el desarrollo del Cálculo. No obstante, no fue sino hasta el siglo XIX en que se establecieron los fundamentos de las nociones y los procesos del cálculo por matemáticos como Bernhard Bolzano (1781-1848), Augustin L. Cauchy (1789-1857), Karl Weierstras (1815-1897) y Richard Dedekin (1831-1916).

El infinito va de la mano con el cálculo; vulgarmente se utiliza la palabra infinito para denotar algo muy grande, ilimitado o imposible de contar. Pero el infinito va más allá de lo «muy grande» y de la posibilidad humana (temporal) de contar. La noción de infinito como idea de algo ilimitado o inalcanzable, ha sido una fuente de confusión a través de la historia. Perturbó a los antiguos griegos, quienes trataron inútilmente de comprenderlo sometiendo el infinito a la intuición del sentido común, la cual, lamentablemente, estaba inspirada en un mundo finito y, generalmente, los condujo a conclusiones contradictorias y paradójicas, como la famosa carrera donde Aquiles nunca alcanza a la tortuga.

Por su parte, Aristóteles trató de enfrentar el problema del infinito a través de dos representaciones, dos concepciones complementarias y cuya interacción dialéctica ha influido el propio desarrollo de la matemática. En el tercer libro de su obra Física, Aristóteles distingue dos tipos de infinito; el infinito como un proceso de crecimiento sin final o de subdivisión sin final y el infinito como una totalidad completa. El primero es el infinito potencial y el segundo el infinito actual.

La noción de infinito potencial se centra en la operación reiterativa e ilimitada, es decir, en la recursividad interminable, por muy grande que sea un número natural siempre podemos concebir uno mayor, y uno mayor que este último y así sucesivamente, donde esta última expresión y "así sucesivamente" encierra la misma idea de reiteración ilimitada, al infinito. Este tipo de infinito potencial es el que sirve de base a la noción de límite del cálculo infinitesimal. Por su parte, la noción de infinito como totalidad fue ampliamente desarrollada en la geometría al dividir un segmento de recta en un número infinito de puntos y el infinito actual de los infinitesimales sirvió de soporte heurístico para la posterior formalización del cálculo infinitesimal.

Fue así que esta discusión influyó en las diferentes definiciones de límite que se presentaron a lo largo de la historia, y que aún hoy, causa confusión y controversias en quienes se introducen en este concepto.

2.3. Definición de límite

Una definición informal, como la que se estudia en el bachillerato podría ser: Sea $f(x)$ definida en un intervalo abierto alrededor de x_0, excepto, posiblemente, en el mismo punto x_0. Si $f(x)$ se acerca tanto como queramos a L para toda x lo suficientemente cerca de x_0, decimos que f se aproxima al límite L cuando x se acerca a x_0 y escribimos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

El cual se lee como "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es L". Esta definición es "informal" ya que frases como "tanto como queramos" y "suficientemente cerca", son imprecisas; su significado depende del contexto. Para un mecánico que fabrica un pistón, cerca significa milésimas de pulgadas. Para un astrónomo que estudia las galaxias distantes, cerca significa algunos miles de años luz. A pesar de ello, la definición es lo bastante clara para permitirnos reconocer y evaluar límites de funciones específicas.

Sabemos que el concepto es fundamental para el cálculo, de manera que para poder profundizar en el conocimiento de la materia es imprescindible, tanto el manejo práctico de las reglas para el cálculo de límites, como la comprensión teórica del concepto de límite, por tanto la definición con $\varepsilon \; y \; \delta$ se puede escribir de la siguiente manera:

El hecho de que $f(x)$ está tan cerca de L como queramos, quiere decir que para todo $\varepsilon > 0, \; existe \; \delta > 0 \; tal \; que,$

$$si \;\; 0 < |x - x_0| < \delta, \; entoces \; |f(x) - L| < \varepsilon.$$

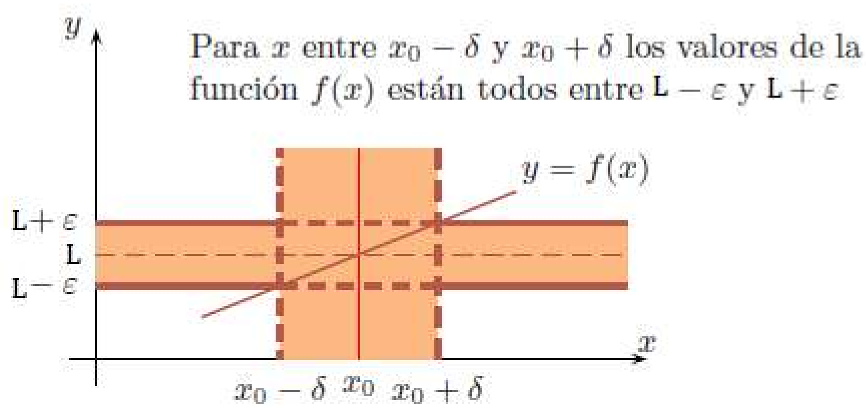


Ilustración 1: La definición de límite se refleja en el gráfico.

A pesar de la importancia de la definición $\varepsilon - \delta$, a nivel teórico, especialmente en la demostración de teoremas, a nivel práctico, en el Cálculo de límites, la definición $\varepsilon - \delta$ no es útil. La definición $\varepsilon - \delta$ solamente nos permite comprobar si un límite dado es correcto o no, pero no nos permite calcular límites. Además, su aplicación para comprobar límites suele ser artificial y difícil.

2.4. Dificultades de aprendizaje

La enseñanza de la matemática tiene la finalidad de desarrollar la capacidad de razonamiento y la facultad de la abstracción. Su rigor lógico y sus métodos aplicados a los distintos fenómenos y aspectos de la realidad deben ir unidos a la observación y la experimentación para potenciar el aprendizaje.

El desarrollo de la observación, la intuición, la creatividad y el razonamiento lógico, junto con la acción del alumno, son principios básicos sobre los que se construye el hacer matemático. La enseñanza de la matemática tiene que apostar por acciones meta cognitivas para el aprendizaje, para ello es importante:

- Basar la educación en la experiencia, el descubrimiento y la construcción de los conceptos, procedimientos y estrategias; más que en la instrucción.
- Basar la educación en estrategias de falsación o contraejemplos, evitando el “bien” o “mal” como autoridad que sustituye a la evidencia. Extender y transferir los conocimientos generando articuladas redes de aplicación.
- Atender a la manipulación de materiales con actividades que optimicen el entendimiento, que provoquen, desafíen y motiven al alumno. Simplicidad, claridad y precisión en el lenguaje utilizado en la presentación de las actividades o enunciación de los conceptos. Respetar al alumno cuando vive el acto de pensar. Potenciar la autoestima, la confianza, la seguridad,…
- Habituar al alumno a explicar, fundamentar mediante argumentos lógicos sus conclusiones, evitando eso de “porque sí”. Familiarizarles con las reglas de la lógica para permitir el desarrollo y la mejora del pensamiento. Esta familiarización no debe ser penosa y ardua para el alumno, sino todo lo contrario: una forma de jugar a crear relaciones, contrastando las respuestas antes de optar por una de ellas.

Sin embargo, se debe tomar en cuenta que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas puede ser considerada como una actividad compleja del ser humano. Por un lado, se debe considerar la importancia que tiene el proceso de enseñanza-aprendizaje para el desarrollo de la sociedad y por el otro, las dificultades que plantea llevarlo a cabo.

Con relación a la importancia de este proceso en la sociedad, el NCTM (2000), identifica algunos aspectos fundamentales acerca del por qué es relevante el estudio de las matemáticas:

- Es un factor sobresaliente en el desarrollo de la cultura universal;
- Representa un soporte para el desarrollo científico y tecnológico de la sociedad;
- Es un elemento fundamental en el desarrollo científico de otras disciplinas correspondientes a las ciencias exactas, ciencias sociales, ciencias médicas, ciencias biológicas, etcétera.

La compleja evolución de la historia de esta ciencia, muestra que el conocimiento matemático fue construido como respuesta a preguntas que fueron transformadas en muchos problemas provenientes de diferentes orígenes y contextos; tales como problemas de orden práctico, problemas vinculados a otras ciencias y también problemas de investigación internos a la propia matemática. De este modo, se puede decir que la actividad de resolución de problemas ha sido el centro de la elaboración del conocimiento matemático generando la convicción de que “hacer matemática es resolver problemas”.

En el campo de la educación matemática figuran varias líneas de desarrollo que se ubican en diferentes áreas particulares del mismo campo o de otras, las cuales pertenecen a diversas disciplinas. La resolución de problemas es, sin duda alguna, la línea sobre la que se han centrado el mayor número de esfuerzos, tanto por lo escrito como por el desarrollo de proyectos de investigación en los últimos 20 años.

Al parecer, la resolución de problemas es función de varias categorías de factores interdependientes, como la adquisición y utilización de conocimientos, control, creencias, y contextos sociales y culturales, que implican ir más allá de la aplicación de procedimientos y conocimientos bien aprendidos (Lester y Kehle, 2003).

Al resolver problemas se aprende a matematizar, lo que es uno de los objetivos básicos para la formación de los estudiantes. Con ello aumentan su confianza, tornándose más perseverantes y mejorando su espíritu investigador, proporcionándoles un contexto en el que los conceptos pueden ser aprendidos y las capacidades desarrolladas. Por todo esto, la resolución de problemas está siendo muy estudiada e investigada por los educadores. Sin embargo, su finalidad no debe ser la búsqueda de soluciones concretas para algunos problemas particulares sino facilitar el desarrollo de las capacidades básicas, de los conceptos fundamentales y de las relaciones que pueda haber entre ellos.

Entre las finalidades de la resolución de problemas tenemos:

- Hacer que el estudiante piense productivamente.
- Desarrollar su razonamiento.
- Enseñarle a enfrentar situaciones nuevas.
- Darle la oportunidad de involucrarse con las aplicaciones de la matemática.
- Hacer que las sesiones de aprendizaje de matemática sean más interesantes y desafiantes.
- Equiparlo con estrategias para resolver problemas.
- Darle una buena base matemática.

Por ejemplo, en lo que se refiere al campo conceptual, para Vergnaud (1991) un concepto adquiere sentido para el sujeto a través de situaciones y problemas. El campo conceptual está constituido por problemas que permiten el desarrollo de un concepto, operaciones que son necesarias de utilizar para la resolución de esos problemas, dentro de un sistema matemático.

De hecho, recientemente Balacheff y Gaudin (2009) han añadido una cuarta componente, que es sobre una estructura de control y que en su conjunto ellas forman las concepciones. Este añadido es fundamental en la didáctica de las matemáticas ya que la construcción de conceptos pasa por la construcción de concepciones. Un aspecto de corte práctico es de saber cuál es el campo conceptual para cada concepto que se quiere enseñar.

De hecho, ¡allí radica el principal problema! Para cada concepto matemático, ¿qué tipo de problemas o actividades son importantes de seleccionar para que el aprendizaje sea efectivo? Los investigadores proporcionan buenos ejemplos de lo que puede incluirse en ese campo conceptual; pero, para la mayoría de los conceptos que el profesor debe tratar en el aula, el profesor no cuenta con suficientes actividades que le permitan desarrollar una enseñanza adecuada de las matemáticas.

En nuestra investigación en general, se ha considerado el modelo de comprensión de Sierpinska (1990), que propone la comprensión como un acto que está inmerso en un proceso de interpretación, y que se desarrolla en forma de dialéctica, lo que produce un nuevo conocimiento, ligado a cuatro actos de comprensión (identificación, discriminación, generalización y sintetización). Aquí se considera la comprensión en el sentido que el proceso de interpretación está relacionado con sus representaciones y, por tanto, con el dominio del concepto como indican Castro y Castro (1997). Para estos autores, los conceptos matemáticos se pueden expresar por varios sistemas, dando lugar a lo que Janvier *et al.* (1993) llama representaciones sinónimas (las representaciones diferentes de un mismo objeto matemático). Particularmente, en el concepto de límite, nosotros consideramos estos cuatro sistemas de representación: verbal, numérico, gráfico y simbólico.

Como ya se ha indicado, la idea de comprensión está ligada a los sistemas de representación y, según Romero (2000), la comprensión se caracteriza a partir de una serie de actividades asociadas a los sistemas de representación, como las que se enuncian en este trabajo, actividades que se ilustran con referencias a la didáctica del concepto de límite, que es el objeto de nuestra investigación.

Son numerosos los obstáculos que antes y después de la enseñanza manifiestan los alumnos con respecto al concepto de límite. En lo que se refiere a este concepto, Cornu (1983) identifica los siguientes obstáculos epistemológicos:

- Sentido común de la palabra límite, lo que induce a concepciones persistentes de límite como barrera infranqueable o como último término de un proceso.

- Sobregeneralización de las propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos.
- Aspecto metafísico de la noción, ligado con el infinito, ya que introduce una nueva forma de razonamiento.
- Los conceptos infinitamente grandes y cantidades infinitamente pequeñas.

Para el tratamiento del obstáculo geométrico del concepto de límite, es necesario retomar aspectos que tiene que ver con la disposición del aula, donde se brinde un ambiente caracterizado por promover una interacción del estudiante con las actividades que se proponen. Cornu, (1991, citado en Blázquez, 1999, p. 42) observa que “No basta con presentar una exposición clara del concepto a los alumnos para que éstos lo adquieran” defiende, sin embargo, “la elaboración de actividades que les hagan darse cuenta de sus ideas espontáneas, imágenes, intuición, experiencias anteriores, etc.” de igual manera, defiende “la participación del estudiante en su proceso de abstracción y el uso del ordenador como herramienta para que el estudiante construya el concepto”.

Particularmente, Cornu (1981) investigó las dificultades relacionadas con la noción de límite y la expresión “tiende a”, con alumnos universitarios de primero de matemáticas. Descubrió que sus intuiciones y “modelos espontáneos” respecto a esas nociones estaban coloreados por ideas cotidianas como la de que no se puede traspasar el límite, aunque se esté en condiciones de superar el límite de velocidad permitida.

Varios ejemplos confirman que los significados múltiples constituyen un problema característico de muchos términos matemáticos. Determinadas palabras de uso cotidiano se escogen con frecuencia a causa de las imágenes o fenómenos ligados a nuestra existencia, pero que no siempre sus significados matemáticos se ajustan a ellas con precisión.

Es así como Blázquez y Ortega (2002) consideran conveniente presentar al alumno distintos sistemas de representación de la idea de límite, antes de trabajar con la definición formal. Como son:

- Verbal: es una aproximación óptima de los valores que toma una función en un entorno del punto en cuestión.
- Numérico: es un proceso de tendencia basado en una tabla de valores de la variable independiente y sus correspondientes imágenes, donde se mejora cualquier aproximación al límite con valores muy cercanos al punto de interés.
- Gráfico: el límite se representa como un punto en el eje de las ordenadas tal que a todo entorno que lo contiene le corresponde otro entorno del punto de interés sobre el eje x, en el que se proyecta.
- Algebraico: corresponde a la definición topológica, donde aparecen ε - δ que no son otra cosa que los controles de las aproximaciones.

Entendemos que la inclusión de estas representaciones favorecería la construcción de una imagen conceptual más amplia, operativa y con mayores posibilidades de que la definición conceptual del sujeto sea próxima a lo matemáticamente correcto.

También proponemos un cambio en la visión y en las perspectivas de lo que tradicionalmente significa la evaluación, para el profesor de matemáticas; ésta debe tomar en cuenta todo el trabajo que realiza el estudiante para resolver una tarea y no sólo el resultado o respuesta final; además, debe servir como una fuente de retroalimentación para la actividad que realiza el profesor, convirtiéndose en una fuente de información para la toma de decisiones instruccionales. Sin duda, el papel del profesor es de suma importancia a la hora de una instrucción adecuada, ya que sin su participación, una actividad bien diseñada, difícilmente logrará su objetivo.

De la misma manera, se debe considerar que un factor determinante en la complejidad del sistema educativo nacional es la diversidad en la formación matemática de los profesores del nivel medio superior; y si a esto agregamos la existencia de distintos planes y programas de estudio, se originan diferentes perfiles de egreso de los estudiantes en cuanto a sus niveles de competencia y a la adquisición de habilidades. Es decir, alumnos del mismo bachillerato que estudiaron cursos distintos de matemáticas, impartidos en una escuela con el mismo nombre, egresan con desiguales niveles de exigencia y con diferentes resultados en el aprendizaje.

En la introducción de los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares (NCTM, 2000), se comenta que los estudiantes se ocupan de la solución de problemas planteados por el profesor, quien debe tener un conocimiento profundo de las matemáticas involucradas, y los ayuda a plantear conjeturas interviniendo en momentos clave, sin que proporcione ideas que eliminen el reto de la misma.

2.5. La importancia de actividades

El cambio en la práctica de las matemáticas, obliga a reexaminar la educación matemática. Además de contenidos, las actividades propuestas y realizadas en el aula transmiten también mensajes implícitos sobre qué son las matemáticas. He ahí la importancia del diseño de actividades sumamente atractivas para los estudiantes y fáciles de entender, sin importar qué tan abstracto sea el concepto que se quiere abordar.

Las actividades propuestas deben, por un lado, constituir un reto para su curiosidad, que los estimule a expresar lo que ya saben y los incite a investigar lo que desconocen, por medio de la discusión, la experimentación y el intercambio de experiencias (NCTM, 2000). La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas implican un comportamiento complejo que requiere de reflexión y de un esfuerzo continuo para lograr una disposición por la enseñanza efectiva y un aprendizaje con entendimiento. En el NCTM (2000) se plantea:

> En la enseñanza efectiva, se emplean tareas que poseen cualidades para ideas matemáticas importantes y para comprometer y retar intelectualmente a los estudiantes. Las tareas seleccionadas pueden despertar la curiosidad de los estudiantes y atraerlos hacia las matemáticas, ya que pueden ser conectadas con experiencias de los estudiantes del mundo real, y ello puede originarse en contextos que son puramente matemáticos... La solución de

> tales tareas puede ser desde distintos caminos... Pero estas tareas por sí solas no son suficientes para una enseñanza efectiva. Los profesores también deben decidir qué aspectos de una tarea deben resaltarse, cómo organizar y orquestar el trabajo de los estudiantes, qué preguntas hacer al considerar una variedad de experiencias, y cómo apoyar a los estudiantes que no han realizado los procesos de pensamiento, sin eliminar el reto que contiene la tarea. (pp. 18, 19)

Por otro lado, las actividades deben permitir inferir las maneras de cómo los estudiantes están pensado matemáticamente, las demandas esenciales contenidas en la tarea y observar la evolución de ciclos de entendimiento durante su interacción con los problemas; por ejemplo, en el nivel que emplean recursos y utilizan estrategias en el proceso de solución de la actividad (Lesh *et al.*, 2000).

Las actividades diseñadas para la enseñanza son secuencias integradas de procedimientos y recursos utilizados por el formador con el propósito de desarrollar en los estudiantes capacidades para la adquisición, interpretación y procesamiento de la información; y la utilización de éstas en la generación de nuevos conocimientos, su aplicación en las diversas áreas en las que se desempeñan la vida diaria para, de este modo, promover aprendizajes significativos. Las actividades deben ser diseñadas de modo que estimulen a los estudiantes a observar, analizar, opinar, formular hipótesis, buscar soluciones y descubrir el conocimiento por sí mismos.

Para que una institución pueda ser generadora y socializadora de conocimientos, es conveniente que sus estrategias de enseñanza sean continuamente actualizadas, atendiendo a las exigencias y necesidades de la sociedad.

Desde una perspectiva histórica la resolución de problemas ha sido siempre el motor que ha impulsado el desarrollo de la matemática. Pero, este papel clave de los problemas no se traduce, en general, como la actividad principal en las sesiones de aprendizaje de matemática de nuestros institutos como eje del desarrollo del currículo.

En los primeros años de la década de los años 80 del siglo XX, el NTCM de los Estados Unidos de Norte América hizo algunas recomendaciones sobre la enseñanza de la matemática, las que tuvieron una gran repercusión en todo el mundo. La primera de esas recomendaciones decía: “El Consejo Nacional de Profesores de Matemática recomienda que en los años 80 la Resolución de Problemas sea el principal objetivo de la enseñanza de matemática en las escuelas”.

A partir de la publicación de esas recomendaciones, hasta hoy, la mayoría de los congresos, cursos y seminarios, tanto nacionales como internacionales, vienen dando una importancia muy grande a este tema en todos los niveles de la enseñanza.

Existen varias estrategias metodológicas para la enseñanza de la matemática, además de la resolución de problemas, existen actividades lúdicas y modelaje. Las cuales están desarrolladas con la preocupación de proponer el uso de recursos variados que permitan atender a las necesidades y habilidades de los diferentes estudiantes, además de incidir en aspectos tales como:

- Potenciar una actitud activa.
- Despertar la curiosidad del estudiante por el tema.
- Debatir con los colegas.
- Compartir el conocimiento con el grupo.
- Fomentar la iniciativa y la toma de decisión.
- Trabajo en equipo.

El NCTM también propone la resolución de problemas como una actividad fundamental que los estudiantes deben realizar en forma individual y colectiva, pues propicia un ambiente para el aprendizaje significativo de los estudiantes y la intervención de otros procesos. Por ejemplo, la búsqueda de conexiones y el empleo de distintas representaciones, o la necesidad de justificar los pasos dados en la solución de un problema y comunicar los resultados obtenidos.

Con este tipo de actividades, se espera que los estudiantes desarrollen ciertas habilidades para el estudio y entendimiento de las matemáticas, las cuales están vinculadas con los aspectos característicos del quehacer de la disciplina.

Santos (1997b) sugiere algunos criterios para guiar el diseño de problemas que ofrezcan un potencial matemático para el salón de clases:

i. Los problemas, sin ser fáciles, deben ser accesibles a una gran variedad de estudiantes con diferentes antecedentes o recursos matemáticos;

ii. Los problemas deben demandar de los estudiantes un plan de reflexión. Es decir, que no puedan resolverse instantáneamente;

iii. Los problemas deben involucrar varias formas de solución. Algunas formas o caminos para obtener la solución pueden revelar o ilustrar la riqueza de las ideas matemáticas, así como mostrar conexiones existentes entre las diferentes áreas de esta disciplina;

iv. Las soluciones de los problemas pueden permitir y facilitar el uso de las ideas matemáticas, sin necesidad de recurrir a trucos o consideraciones muy sofisticadas;

v. Los problemas deben de servir de plataformas para realizar diversas exploraciones matemáticas. Así los estudiantes tendrán la oportunidad de identificar algunas metas parciales, cambiar las condiciones iniciales del problema, identificar problemas relacionados, etc.;

vi. Cuando un alumno resuelva un problema, deberá ser posible identificar los procesos y operaciones empleadas, así como recuperar y analizar tanto el plan de solución como las estrategias utilizadas, y

vii. Los problemas deben situarse en contextos donde los estudiantes puedan utilizar o acceder a las experiencias y recursos matemáticos previamente estudiados, con cierta naturalidad [...] Aquí lo importante es el tipo de discusión que se fomente en el salón de clases. (pp. 283, 284)

Entonces, si reconocemos que uno de los propósitos de la matemática, como el de otras ciencias, es el de resolver problemas, es claro que las actividades relacionadas con la resolución de problemas, deberán tener un alto valor didáctico.

Como consecuencia, existe la propuesta de los Paquetes de Evaluación Balanceada del grupo de investigadores encabezado por Schoenfeld (*Balanced Assement Package for the Mathematics Curriculum 1 y 2, 1999, 2000*), quienes diseñaron tareas o actividades, las cuales reúnen estas cualidades: que sean atractivas y fáciles de entender para los estudiantes; que contengan contenidos fundamentales del currículum; y que por su diseño, permitan recuperar los procesos de pensamiento que utilizaron los estudiantes en sus intentos de solución. Estos paquetes contienen 27 tareas que cubren diversos contenidos de nuestro sistema escolar, de tercer grado de secundaria a tercero de bachillerato. Se destaca la importancia del uso de tareas que contienen problemas con dichas cualidades, ya que permiten compartir la satisfacción que se tiene al "reconstruir" las matemáticas y que, a su vez, puede ayudar a responder la pregunta planteada, frecuentemente, por los estudiantes con relación a la utilidad del conocimiento matemático.

Con este tipo de actividades, se espera que los estudiantes desarrollen ciertas habilidades para el estudio y entendimiento de las matemáticas; es decir, con acciones cotidianas que realiza una persona que se encuentra inmerso en resolver problemas. Estas acciones han sido identificadas por Schoenfeld (1992), Mason, Burton y Stacey (1987), como las características del pensamiento matemático y son: tomar casos particulares, plantear conjeturas, descubrir patrones y relaciones, hacer generalizaciones, justificar resultados.

Con el fin de contribuir al diseño de actividades que sirvan para promover el aprendizaje, un grupo de investigadores se ha dedicado a establecer las bases y principios para la creación de "actividades de pensamiento revelador" o "de generación de modelos" (Lesh *et al.*, 2000), sentando las bases para una nueva teoría sobre el aprendizaje en educación matemática. Estas actividades tienen la cualidad de permitir a los estudiantes revelar sus ideas iniciales, después se presenta un proceso de evolución que es producto de su interacción con la tarea, con el medio ambiente o con otros compañeros de su salón de clases y el profesor.

De esta manera, se extienden sus ideas y las expresan a través de modelos que son la base de un entendimiento matemático profundo, las cuales son incorporadas, de alguna manera, en una diversidad de formas de representación. Es decir, se generan ciclos de entendimiento que evolucionan a través de sus interpretaciones iniciales, intermedias y finales, con lo cual se puede percibir el nivel de matematización que los estudiantes están logrando. La identificación de estos ciclos en términos de los recursos matemáticos, estrategias y representaciones, generan información útil para analizar los acercamientos de los estudiantes en la resolución de problemas.

En particular, Lesh y Kelly (2000) así como Doerr y English (2003) han documentado que cuando los estudiantes tratan con tareas o problemas que les son significativos, desencadenan ideas matemáticas fundamentales. Además, frecuentemente, sus soluciones van más allá de la situación escolar y, eventualmente, construyen modelos para resolver las tareas. De la observación y análisis de su trabajo surge un mejor entendimiento de las fortalezas y debilidades de los estudiantes, los cuales capacitan a los profesores para la toma de decisiones en la instrucción, que contribuyan a lograr una enseñanza más efectiva.

Doerr y English (2003) destacan la importancia de que las actividades estén planteadas a los estudiantes en ricos contextos familiares, y tengan el potencial de provocar constructos significativos matemáticamente; es decir, que sean generativas y contribuyan a fomentar habilidades de los estudiantes para expresarse y hacer generalizaciones, a partir de sus entendimientos y conjeturas iniciales. Y estamos seguros, que las tareas que hemos seleccionado para este estudio reúnen estas cualidades. Estos investigadores también señalan que el método de implementación de las actividades en el aula, debe promover el aprendizaje a través de la revisión y procesos de refinamiento de sus maneras de pensar sobre los datos y relaciones que involucran las actividades, originando múltiples ciclos de interpretación; lo que permite identificar momentos cruciales en los cuales los estudiantes realizan pasos importantes en la solución de los problemas involucrados.

Castro y Castro (1997, p. 103), menciona que dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones y el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema y en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajosos para trabajar con determinadas propiedades.

Particularmente, muchos libros mencionan que se necesitan de ideas básicas para iniciar el estudio del Cálculo. Entre los temas necesarios, se menciona el estudio de los números reales, las coordenadas en el plano cartesiano, las funciones y la trigonometría, por mencionar algunos. Pero el concepto que marca la diferencia entre el cálculo, el álgebra y la trigonometría, es el límite. El límite es fundamental para determinar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto. Es por eso que nos hemos centrado en el estudio de este concepto.

Por esta razón en los Principios y estándares, el NCTM (2000) plantea los contenidos matemáticos que deben estudiarse durante el bachillerato: números y operaciones, álgebra, geometría, medición, análisis de datos y probabilidad. Mientras se estudian estos contenidos, se recomienda impulsar y desarrollar los procesos referidos en el NCTM (2000). El estudio de los estándares de proceso destacan las formas para adquirir y aplicar esos conocimientos, por ejemplo para las representaciones menciona que las ideas matemáticas pueden ser representadas en formas variadas: imágenes, materiales concretos, tablas, gráficos, números, y letras, hojas de cálculo y muchas otras cosas más.

La forma en la cuales se representan las ideas matemáticas son fundamentales para determinar cómo las personas comprenden y utilizan estas ideas. Muchas de las representaciones que damos ahora por ciertas, han sido el resultado de la elaboración cultural que se desarrolló a través de muchos años. Cuando los estudiantes tienen acceso a las representaciones matemáticas y a las ideas que éstas expresan, y cuando además los estudiantes pueden crear representaciones para capturar conceptos matemáticos o relaciones, ellos adquieren un conjunto de herramientas que expanden significativamente su capacidad para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

Sin embargo, los programas de estudios oficiales de la Secretaría de Educación Pública (SEP) establecen que la enseñanza de las matemáticas, en secundaria y bachillerato, tiene como propósito general el desarrollo de las habilidades operatoria, comunicativas y de descubrimiento de los alumnos, quienes deben desarrollar capacidades para:

- Adquirir seguridad y destreza en el empleo de técnicas y procedimientos.
- Reconocer y analizar los distintos aspectos que componen un problema.
- Elaborar conjeturas, comunicarlas y validarlas.
- Comunicar estrategias, procedimientos y resultados de manera clara y concisa.
- Predecir y generar resultados.

En la práctica, el nivel de preparación de los estudiantes dista mucho de este propósito educativo; la situación actual del aprendizaje, causada por el insuficiente nivel de conocimientos de los estudiantes, ha sido el objeto de investigación. La idea es que estas tareas puedan ser utilizadas por los profesores en el aula; sin embargo, su implementación en los sistemas educativos tradicionales plantea retos y dificultades, ya que subsiste una organización escolar rígida donde regularmente se ejerce presión por cubrir los contenidos curriculares y aprobar a los estudiantes; además, las diferencias en la preparación de los profesores son evidentes y la improvisación de reformas curriculares por parte de las autoridades educativas parece ser la norma.

CAPÍTULO III. Metodología

3.1. Introducción

El presente trabajo es de carácter cualitativo, se proponen dos actividades aplicadas a dos grupos de estudiantes de bachillerato; uno de los grupos eran alumnos de segundo semestre que cursaban el bachillerato de contabilidad, a los cual se les aplicó la primera actividad que lleva por nombre “La cuerda de Luisa”. Una segunda actividad propuesta llamada: “Comportamiento de funciones” y la anterior mencionada se aplicó a un segundo grupo de sexto semestre del bachillerato en Físico matemáticas especialidad en Mecánica Industrial. Estos grupos fueron elegidos al azar, no tuvieron alguna preparación previa.

Estas actividades fueron diseñadas de tal manera que ayuden al estudiante a tener una noción intuitiva sobre el concepto de límite, para que en un futuro sean de apoyo para entender dicho concepto de una forma diferente a lo acostumbrado, ya que el enseñar matemáticas se vuelve rutinario para muchos profesores. Si bien es verdad que hay propuestas y técnicas, son pocos los que deciden proponer estrategias y dedicar tiempo a este tipo de temas, con el tiempo suelen sólo preocuparse por dar y terminar a tiempo el contenido matemático. Se requiere que los estudiantes construyan su conocimiento vean de una manera diferente el concepto de límite y no sólo verlo de una manera algebraica que es como suele enseñárseles en la mayoría de las escuelas.

El análisis se llevó a cabo en alumnos de la escuela del Centro de Estudios Tecnológicos Industriales y de Servicio 34 (Cetis). El grupo de segundo semestre contaba con 21 alumnos. No se pidió algún requisito previo en ellos, fue un grupo escogido al azar, solo se requería que estuvieran llevando cursos previos al cálculo. Este grupo cursaban materia de Geometría y trigonometría; el de sexto semestre, era un grupo de 25 alumnos de los cuales solo participaron 20, de igual forma fue al azar, el único requisito era que ya tuvieran nociones sobre dicho concepto.

Para el desarrollo de la investigación los estudiantes trabajaron en pequeños grupos y, como menciona Hagelgans et al (1995), el aprendizaje cooperativo implica que los estudiantes trabajen en pequeños grupos (3 o 4), de tal forma que cada uno de ellos sea participe del aprendizaje de sus compañeros de equipo y que el espíritu cooperativo esté presente en cada faceta del curso.

La metodología aplicada se enfoca en el análisis de actividades, de manera que muestre problemas precisos que surgen de situaciones de interés para el alumno. El trabajo en pequeños grupos contribuye para que los estudiantes discutan una situación problemática que se les ha sido planteada, generen ideas claras para manejar la temática a tratar y ayuden a evidenciar las diferentes formas de reconocer un problema por parte de los integrantes del grupo de trabajo. Las diversas formas de análisis pueden utilizarse para buscar soluciones y llegar a una aprobación del tema a tratar. Es en esta etapa, en donde el intercambio de experiencias por parte de los alumnos y la utilización de diferentes materiales de apoyo que favorezcan la investigación sobre el tema, actúan como factores constructores de conocimientos funcionales que sirven para la vida y son la base para generar nuevos aprendizajes.

Las actividades fueron aplicadas en sesiones de dos horas. Cabe señalar que en estas clases los profesores de los grupos no estaban presentes y se les dio una clase previa, esto con la intención de generar un ambiente familiar, acelerar el ritmo de formar equipos y prevenir alguna dificultad ante el grupo. Para la formación de equipos, los estudiantes trabajaron con quienes se sintieran cómodos y más acoplados, así fueran alumnos con bajo desempeño escolar. Se trabajó con la mayoría del grupo pero si no querían trabajar se les pidió que se retiraran, esto para no distraer a los demás y sacar un mejor análisis.

3.2. Fase del diseño

Las actividades mencionadas antes de ser aplicadas, fueron resueltas por dos estudiantes ajenos a los grupos de investigación, para detectar irregularidades, incoherencias y ambigüedades en las preguntas realizadas en ellas. El diseño se tomó de una investigación hecha anteriormente por Elizabeth Virrueta en su tesis de maestría (2012), se siguió el patrón y el nivel propuesto en su investigación, también consta de ciertos elementos como:

- **Descripción de la tarea**. Consiste en dar una breve explicación de los elementos que la conforman; con el propósito de aclarar al estudiante lo que debe resolver o investigar. El análisis de este componente contribuyó a responder la pregunta relacionada con los recursos involucrados de la disciplina.

- **Condiciones para su empleo**. Tiempo estimado para trabajar el problema; materiales de apoyo que se requieren; forma de trabajo en el aula al implementar la actividad (individual y en equipo).

Cada actividad consta de entre 20 a 30 minutos para resolverse, se analizaron con la idea de distinguir las diferentes formas de resolverse, para identificar los recursos matemáticos utilizados y los diferentes procesos que intervienen en su solución.

3.3. Las actividades

Se diseñaron tres actividades de las cuales solo se reportan dos de ellas, ya que la primera actividad se aplicó como clase prueba, para generar un ambiente familiar y para calcular los tiempos. Se aplicó una cada semana, esto para que a los estudiantes no se les hiciera aburrido ni tedioso. Fueron adaptadas para el propósito de la investigación.

A continuación se presentan y muestran cada una de ellas, con su respectivos nombres y analizando los puntos anteriores mencionados.

1. La primera actividad que se les aplicó, lleva por nombre “Los saltos de Yaya”, esta actividad se aplicó como una prueba piloto y como se mencionó anteriormente esta actividad no se reporta.

2. La cuerda de Luisa; en ella se sigue la recomendaciones que Ian Stewart (1998, p.201) hace para abordar los fenómenos exponenciales, cortando varias veces una cuerda que se les proporciona a los alumnos, con la intención de averiguar ¿cuántas veces será posible realizar esta acción? Para así provocar una discusión sobre procesos infinitos y finitos, destacar la importancia de estos procesos. Se requiere que los alumnos construyan una serie numérica que corresponde a la suma de los cortes hechos por Luisa. También se les pide construir una expresión de la porción de cuerda que corresponde al corte “*n*”, lo anterior haciendo uso de unas tablas para que fuese más fácil de interpretar para los alumnos y que determinen el límite de la serie cuando el número de cortes es infinito.

3. La tercera actividad lleva por nombre “Comportamiento de funciones”, está basado en un libro de cálculo para ingeniería, del autor Salvador Vera. Es una actividad corta que duró aproximadamente 20 minutos para resolverse, en ella se analiza una función que a simple vista no está definida en un punto. Nuestra intención es estudiar el comportamiento de dicha función, para ayudar al alumno a notar que a pesar de que no estaba definida en un punto es posible saber su límite, esto echando mano de diferentes recursos como son, una tabla y la gráfica de la función. Lo que se espera es que sean capaz de darse cuenta que se podía acercar tanto como uno quiera, tanto por la derecha como por la izquierda al valor del límite y en consecuencia poder tener una noción intuitiva del concepto de límite, y así decir que el límite de la función cuando x tiende a $x_0 = 1$ es $\ell = 2$.

3.3.1. Actividad 1: La cuerda de Luisa

Descripción de la tarea

En esta tarea los estudiantes deben de hacer cortes sobre una cuerda, siguiendo una regla matemática. Se les solicitará que expresen dicha regla de manera algebraica y que interpreten el límite de ella cuando el número de cortes crece más y más.

Conocimientos previos

Se espera que el estudiante tenga conocimientos sobre el manejo y entendimiento de expresiones algebraicas y la manipulación de fracciones.

Condiciones para su empleo

- Organización: los estudiantes trabajarán en equipos de 3 o 4 personas, presentaran sus resultados por equipo, discutirán colectivamente y después de un momento de reflexión resolverán las actividades de manera individual.

- Materiales: tijeras, calculadora y un trozo de estambre, para poder manipular los cortes.

- Tiempo estimado: 2 horas aproximadamente.

Indicadores de desempeño

- Realizar los cortes en el estambre correctamente, de acuerdo con la indicación de la actividad.

- Expresar la porción de cuerda de manera algebraica, como por ejemplo poder llegar a una expresión tal como: $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

- Estimar el límite de la suma cuando *n* tiende a infinito.

- Poder analizar lo que significa la palabra tender.

Actividad: La cuerda de Luisa

Nombre(s): ____

____

____

INDICACIONES: Analiza la situación que se te plantea y responde a las preguntas; es muy importante que escribas todas las operaciones que se requieran aunque las realices mentalmente o con calculadora. Si utilizas hojas adicionales, no olvides anexarlas al final; si te equivocas, no borres.

Luisa tiene una cuerda de un metro de largo. Como está aburrida, empieza a cortar la cuerda exactamente por la mitad. De los dos trozos que obtuvo, uno lo coloca en una mesa que está junto a ella y el otro trozo lo vuelve a partir por la mitad; de nuevo un trozo lo coloca en la mesa y vuelve a cortar. Ayúdala para ver cuántos cortes puede hacer.

1. ¿Cuándo Luisa hace el primer corte, con que porción de la cuerda se queda en su mano y que porción de cuerda pone en la mesa?

2. En el segundo corte, ¿qué porción de la cuerda pone en la mesa y qué porción se queda en su mano?

3. Siguiendo este proceso llena la siguiente tabla.

No. de Cortes	$1^{º}$	$2^{º}$	$3^{º}$	$4^{º}$	$5^{º}$	$6^{º}$				$n^{º}$
Porción De Cuerda en la mesa										
Expresión algebraica										

Notemos que cada vez que Luisa corta el trozo de cuerda que le queda en la mano, obtiene otros dos nuevos trozos que tienen el mismo tamaño, porque siempre corta por la mitad. Entonces.

4. Si ella realiza n cortes, ¿qué porción de cuerda queda en su mano?

5. ¿Cuál será la porción de la cuerda en el $20^{º}$corte?

6. ¿Qué sucederá si seguimos cortando la cuerda de esa manera?

Ahora, por cada corte que hace Luisa a la cuerda, obtiene la mitad del pedazo anterior, y éste lo suma a la longitud que ya tenía en la mesa. Con ayuda de la tabla y la expresión algebraica a la que llegaste, contesta lo que a continuación se pide.

1. De acuerdo con la tabla, si sumamos la porción de cuerda que puso Luisa en la mesa en el primer y segundo corte, ¿cuánto es esto?

2. Si a la suma anterior agregamos la porción de cuerda que se obtiene en el tercer corte, ¿Qué porción de cuerda tendrá luisa en total en la mesa?

3. ¿En algún momento estará la cuerda completa en la mesa?

4. ¿cuál será el último trozo de cuerda que se le sume a la cantidad de cuerda que hay en la mesa?

5. Siguiendo este proceso de suma, llena la siguiente tabla sabiendo que:

   x = Corte hecho por luisa.

   $f(x)$ = Porción de cuerda puesta en la mesa.

$S(x)$ = Suma de la cuerda puesta en la mesa.

X	Expresión para $f(x)$	$f(x)$	$S(x)$	Expresión para $S(x)$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$	
3				
4				
5				
n				

6. ¿Qué sucede con el tamaño de la cuerda conforme se le hacen los cortes?

7. Cuándo *x* crece más y más, ¿a qué tiende la suma?

3.3.2. Actividad 2: Comportamiento de funciones

Descripción de la tarea

Esta actividad consiste esencialmente en cómo se comporta una función, se hace uso de una tabla y de una gráfica, la idea es analizar estos recursos para que se den cuenta cual es el límite de dicha función aunque no está definida en un punto.

Conocimientos previos

Se necesita que el alumno tenga conocimientos sobre el plano cartesiano, un poco sobre el manejo del cálculo.

Condiciones para su empleo

- Organización: los estudiantes trabajarán en equipos de 3 o 4 personas, presentaran sus resultados por equipo, discutirán colectivamente y después de un momento de reflexión resolverán las actividades de manera individual.

- Materiales: calculadora

- Tiempo estimado: 2 horas aproximadamente.

Indicadores de desempeño

- Llenar una tabla con ayuda de la calculadora para notar que si te acercas por la derecha e izquierda te acercas a un mismo valor y ese valor es el límite.

- Representar los puntos de la tabla en para dibujar la gráfica que surge de dichos puntos

- Analizando la gráfica y la tabla concluir que se llega a un mismo número.

- Poder explicar que es infinito y límite.

Actividad: Comportamiento de funciones

Nombre(s): ____

____

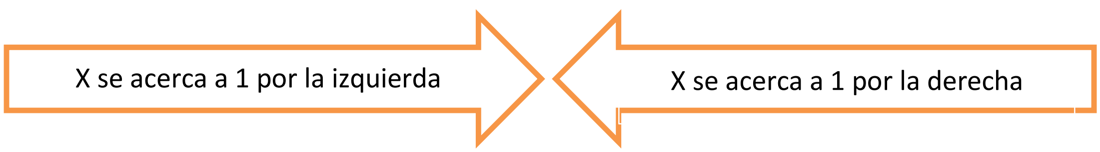
____

INDICACIONES: Analiza la situación que se te plantea y responde a las preguntas; es muy importante que escribas todas las operaciones que se requieran aunque las realices mentalmente o con calculadora. Si utilizas hojas adicionales, no olvides anexarlas al final. Si te equivocas procura no borrar.

Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad , \quad x \ diferente \ de \ 1$$

1. Con ayuda de tu calculadora, sustituye el valor de x en la función, llena la tabla siguiente y estudia el comportamiento de la función alrededor del punto x=1.



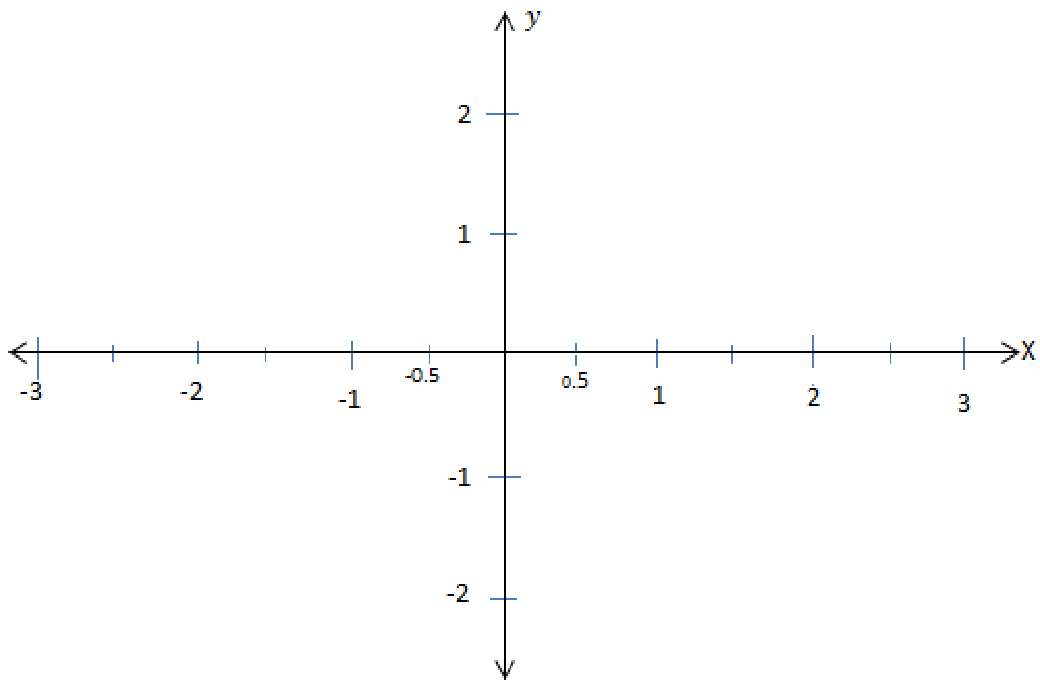
X	0.2	0.5	0.75	0.999	0.9999	1	1.0001	1.01	1.2	1.5	2
$f(x)$						?					

2. Mientras más te acercas a 1 por la izquierda, ¿qué sucederá con $f(x)$?

3. Si damos valores próximos a 1 por la derecha, ¿a qué valor se acerca $f(x)$?

4. Cuándo x tiende a 1 por la izquierda y derecha, ¿la función $f(x)$ se aproxima al mismo valor?

5. Con ayuda de la tabla anterior representa los puntos dados en dicha tabla y esboza la gráfica de la función $f(x)$.



6. Al representar los puntos de la tabla podemos notar que la gráfica que resulta es una recta, ¿Qué sucede en el punto (1,2)?

7. Analizando tu gráfica, ¿Podrá acercarse X a 1 tanto como tú quieras?

8. Cuando más te acercas a 1, ¿A qué se va acercando $f(x)$?

9. ¿Cuál es el límite de $f(x)$ Cuando x tiende a 1?

3.4. Fase de aplicación

En esta fase, fue necesario la intervención del encargado del grupo, ya que era necesario generar condiciones necesarias, para producir un ambiente participativo en el grupo, promover la intervención de los alumnos con preguntas o soluciones alternativas, pero siempre con la prevención de no dar una solución, sino ser solo un monitor en la conducción y orientación del proceso.

- Se seleccionaron a grupos al azar (no tomando en cuenta su desempeño académico), de segundo y sexto semestre del Cetis Nº 34, se aplicaron las actividades a todo el grupo, a excepción de los que no querían trabajar. Se utilizaron los recursos necesarios para poder generar el aprendizaje requerido.

- Se llevaron a cabo 4 sesiones de clases, de dos horas aproximadamente cada una, en la cual se aplicaron tres actividades, pero solo se documentan dos de ellas.

- El instrumento que permitió recopilar las respuestas de los estudiantes fueron las hojas impresas con la tarea; además de los registros de las videograbaciones que se realizaron.

3.5. Sujetos

Los sujetos que participaron en estas actividades son estudiantes de bachillerato del Cetis 34 del plantel de Lázaro Cárdenas, turno vespertino, de diferentes grados.

En el grupo de 2º semestre, que contaba con 21 alumnos, nos fue posible formar 7 equipos. Como mencionamos en nuestra metodología, cada uno con tres integrantes. Se enumeraron los equipos del 1 al 7 para referirnos a ellos más adelante, estos equipos son:

1. Israel, Maximino y Silvia.
2. Luis David, Juan Manuel y Josué Gilberto.
3. Elizabeth, Agustín y Marco Antonio.
4. Carlos Daniel, Tania e Itzia.
5. Karla, Efraín y Luis Daniel.
6. Nallely, María y Emelin.
7. Osiris, Sheila y Lenda.

En el grupo de 6º semestre se aplicaron las dos actividades diseñadas, en cada una de ellas los estudiantes se organizaron en diferentes equipos.

Para la actividad la cuerda de Luisa asistieron 19 alumnos, entre los cuales se formaron 5 equipos de 3 y uno de 4 estudiantes como se muestran a continuación:

1. Miguel Ángel, Aniria y Salvador.
2. Sigifredo, Manuel Peñaloza y Aldo.
3. Pedro, Luis y René.
4. Alexis, Milton y Jorge.
5. Yosban, José Alejandro, Manuel y Ricardo.
6. Cesar, Bruno y José Fernando.

En la segunda actividad que lleva por nombre “Comportamiento de funciones”, los estudiantes se organizaron como ellos querían, procurando que en cada equipo hubiese estudiantes con diferentes niveles de desempeño. A esta actividad asistieron 20 alumnos, los cuales conformaron 6 equipos de la siguiente manera:

1. José Fernando, Luis Gerardo y Jorge.
2. Pedro, Alexis Y salvador.
3. Manuel, Gustavo y Andrés.
4. Miguel Ángel, Aniria y Milton.
5. Sigifredo, Nemesio y José de Jesús.
6. Yosban, Ricardo, Aldo, José Alejandro y José Luis.

3.6. Metodología

Para la implementación de las actividades en grupos de aprendizaje cooperativo se tomó una etapa esencial en la investigación, propuesta por Santos y Sepúlveda (2006), los cuales toman puntos esenciales como:

1°. *Actividad previa.* El profesor da al grupo una breve introducción a la tarea, con el propósito de ubicar a los estudiantes en contextos similares al de la tarea; destacando la importancia que representa su participación en el desarrollo de la sesión. En esta parte de las etapas se tomó unos 5 minutos aproximadamente, consistía esencialmente en asegurar de que las actividades quedaran claras para los alumnos, dando ejemplos de tal manera que no quedara al descubierto las respuestas.

2°. *Trabajo en equipos.* Se organizan los estudiantes en equipos de tres, procurando que en cada uno haya estudiantes con distintos niveles de desempeño, que tengan la posibilidad de interactuar entre ellos y los demás equipos, así como de expresar y comunicar sus ideas. Al concluir el periodo de tiempo asignado al trabajo por equipos, cada uno de ellos entrega su reporte de solución. Esta parte de la etapa, se les dio un tiempo de aproximadamente 40 minutos, aunque se requería que los alumnos estuvieran organizados con distintos niveles de desempeño, se les dio la decisión de formar los equipos con quienes se sintieran más cómodos.

3°. *Presentaciones.* Cada equipo presenta a toda la clase su solución a la tarea, permitiendo que los miembros de los demás equipos pregunten libremente a quienes exponen.

4°. *Discusión colectiva.* El profesor promueve la discusión colectiva entre los estudiantes, con la idea de analizar ventajas y desventajas de los diferentes métodos de solución presentados y, cuando sea necesario, realiza una sistematización de las ideas e identifica posibles extensiones del problema. Esto requirió unos 10 minutos.

5°. Trabajo individual. Enseguida, a partir de la discusión colectiva, los estudiantes tienen la posibilidad de volver a la actividad y aplicar los nuevos entendimientos que se generaron como producto de la interacción, y abordan individualmente la tarea.

3.7. Fase de análisis

Las fuentes de información en esta fase fueron: los reportes escritos del trabajo en pequeños grupos e individual; las filmaciones durante el desarrollo de la aplicación de la tarea que incluye distintos momentos: el trabajo en pequeños grupos, las presentaciones de las soluciones por parte de los equipos, las discusiones en la clase completa.

- **Análisis de reportes escritos**. Las respuestas escritas fueron analizadas para detectar los distintos acercamientos y estrategias empleados en la solución de los problemas, aquí se trata de visualizar cuáles fueron los procesos y técnicas utilizados, así como las habilidades básicas asociadas con el pensamiento matemático que entraron en juego. Posteriormente, se clasificaron los distintos tipos de respuestas que dieron los estudiantes, tomando en cuenta los elementos centrales de ejecución previamente establecidos.
- **Análisis de filmaciones hechas durante la aplicación de la tarea**. El escenario implicó el análisis de episodios registrados por el video de momentos cruciales en los que los estudiantes realizaron pasos importantes en la solución de los problemas involucrados. Nos interesó determinar si durante la aplicación hay una evolución o cambio en los niveles de entendimiento de los estudiantes.

CAPÍTULO IV. Análisis y resultados

4.1. Introducción

En el presente capítulo exponemos el estudio de la información obtenida a través de las hojas de trabajo y videograbaciones hechas en las sesiones de clase, tanto grupal como individual, esto para cada actividad y grupo, recordando las etapas propuestas en nuestra metodología, dando cierto tiempo a cada actividad. Cabe señalar que todos los estudiantes se desenvolvieron en un ambiente participativo y cooperativo.

Las dos actividades tienen en mismo propósito: relacionarlos con el tema de límite y que logren entenderlo, en cada uno de los grupos los problemas son diferentes, pero se busca lo mismo en los dos grupos, en el de 2º semestre se busca interesar al estudiante respecto al concepto de infinito y límite, se intenta observar cómo reaccionan y se desenvuelven al tratar de explicar o entender un nuevo concepto, qué dificultades son las que intervienen al entender o tratar de generar una idea intuitiva del concepto de límite y sobre todo, cómo es que estas actividades los ayudan a generar un nuevo conocimiento.

FIGURA 1: Grupo de segundo semestre distribuidos en equipos.

Desgraciadamente fueron muchas las dificultades a los que los alumnos se enfrentaron, no sólo era el tratar de concebir un tema nuevo o palabras con las que no estaban relacionados como la de “tiende a”. Se enfrentaban a problemas algebraicos, así como mucha dificultad para expresar lo que pensaban, a pesar que en muchas ocasiones era correctas sus respuestas, se les dificultaban explicarlas. Un factor que influyó mucho fue el área en el que trabajaban, se mostraban impacientes por concluir la clase, ya que en el salón hacia demasiado calor, así que fue necesario buscar salones que mejoraran las condiciones para nuestra investigación, con la intención de que esto no siguiera siendo un problema para el desarrollo de la actividad.

En alumnos con un nivel avanzado, se pudo notar un desenvolvimiento en el tema más alto que en alumnos de 2º semestre, pero no el suficiente del que deberían tener. Ellos ya tenían nociones acerca del tema, contestaban rápido, pero no llegaron a un resultado un tanto correcto. Con la intención de indagar acerca de las ideas espontáneas con respecto al concepto de infinito, se plantearon preguntas que nos ayudarán a analizar cómo entienden este concepto.

4.2. Actividad “la cuerda de Luisa” (grupo de 2º semestre)

Para esta actividad los equipos, 1, 2, 3 y 4 se organizaron conforme a nuestra metodología, pero a los equipos 5, 6 y 7 se les dio libertad de organizarse omitiendo el 5º paso de nuestra metodología, ya que ellos insistían en organizarse así.

Desgraciadamente fue muy notorio el hecho de no organizar a los miembros de los equipo 5, 6 y 7 con diferentes niveles de desempeño, pues la mayoría se mostraban pocos participativos, perdidos y hasta desesperados por concluir la actividad, a diferencia del equipo 3 donde uno de sus integrantes (Marco Antonio) animaba y ayudaba a sus compañeros de equipo a participar, mientras que en los equipos restantes se puede decir que se trabajó satisfactoriamente.

Entre la variedad de preguntas, se pedía llenar una tabla con la intención de que los alumnos notaran un patrón en ella para facilitar la actividad. Y además, con ayuda de un pedazo de cuerda fuera posible manipularla para llegar a la sucesión generada por cada corte hecho Desgraciadamente fueron pocos los que llegaron a la expresión $(1/2)^{n}$.

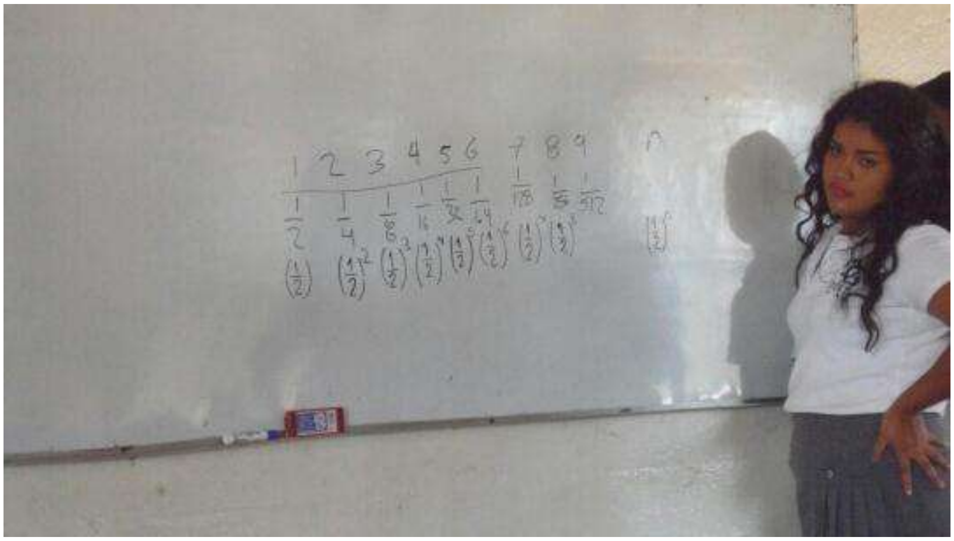
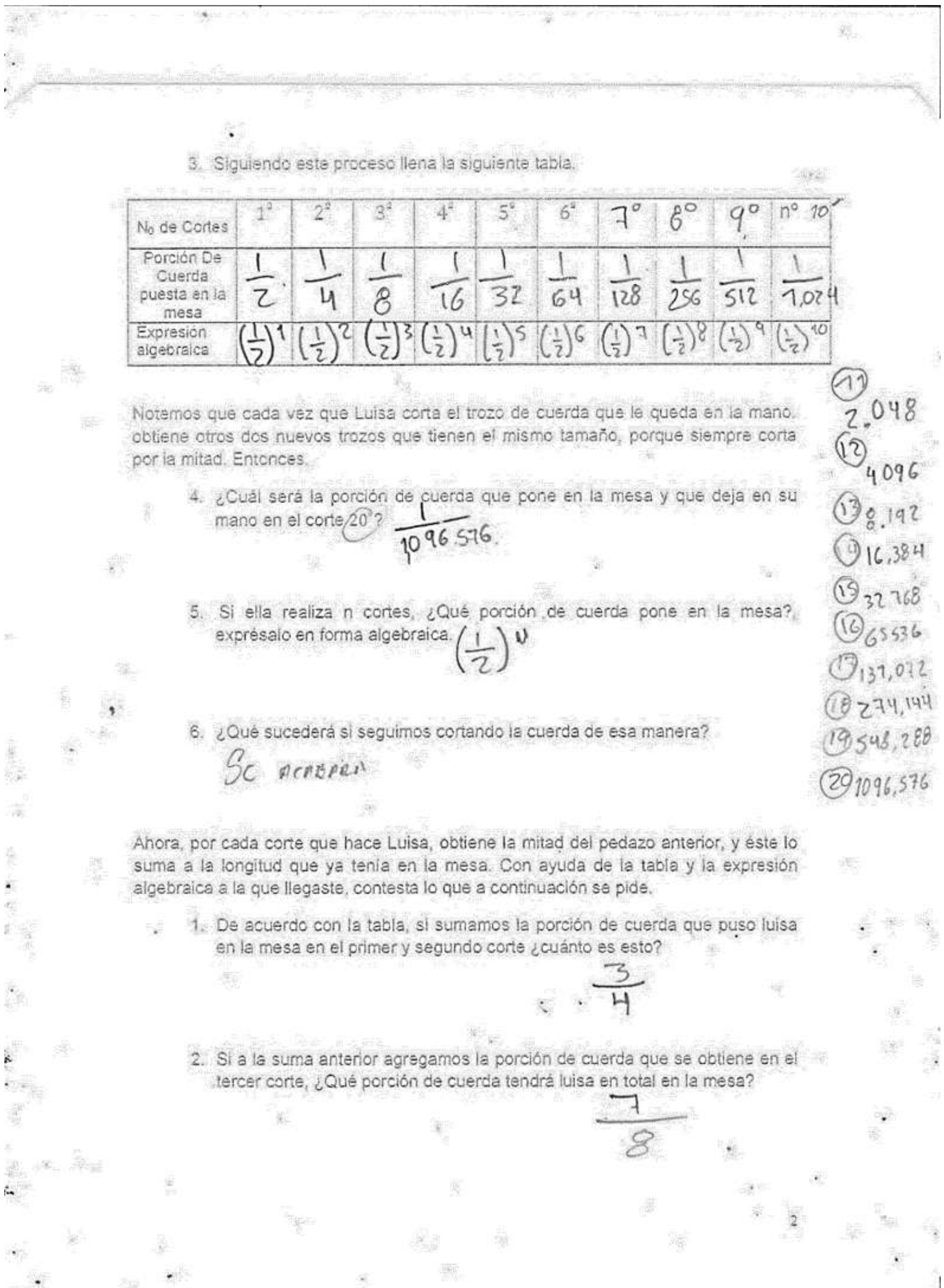


FIGURA 2: Confusión de estudiantes para poner una expresión algebraica en la posición n.

La mayoría no entendían lo que la *"n"* expresaba. Muchos trataban de explicarla como algo infinito, otros la trataban de expresar como "*x*". En la imagen 3 se muestra la confusión de uno de los equipos, quienes en la posición *"n"* creían que era el 10º corte.

Los equipos se sentían confundidos, lo podemos ver en la imagen 3, cuando se les pidió que expresaran lo que sucedía en el corte *nº*, entre opiniones y gritos, ellos mismos llegan a la conclusión que este seria 1/n .Pero los alumnos modelan sus ideas a lo que ellos creen, esto muestra una manera de indagar en algo desconocido sin temor a equivocarse.

Algunos estudiantes expresaban que la *n* podría tomar cualquier corte, ¿por qué no el 10º?, pensaban, si es el que sigue según la tabla. Esto sucede porque es mucho más fácil ver qué sucede en la posición 10º que en el *nº*. Entre los pocos que se aproximaron a la expresión algebraica $\frac{1}{2^n}$, fue el equipo 3, este equipo fue uno de los que mejor desarrollaron la actividad, se atrevían a participar, opinar y se puede notar un gran avance en ellos.



3. Siguiendo este proceso llena la siguiente tabla.

N₀ de Cortes	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	n° 10
Porción De Cuerda puesta en la mesa	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1{,}024}$
Expresión algebraica	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$\left(\frac{1}{2}\right)^6$	$\left(\frac{1}{2}\right)^7$	$\left(\frac{1}{2}\right)^8$	$\left(\frac{1}{2}\right)^9$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

Notemos que cada vez que Luisa corta el trozo de cuerda que le queda en la mano, obtiene otros dos nuevos trozos que tienen el mismo tamaño, porque siempre corta por la mitad. Entonces,

4. ¿Cuál será la porción de cuerda que pone en la mesa y que deja en su mano en el corte 20°? $\frac{1}{1096\,576}$

5. Si ella realiza n cortes, ¿Qué porción de cuerda pone en la mesa? exprésalo en forma algebraica. $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

6. ¿Qué sucederá si seguimos cortando la cuerda de esa manera?
Se acabaría

11 2.048
12 4096
13 8.192
14 16,384
15 32 768
16 65536
17 131,072
18 274,144
19 548,288
20 1096,576

Ahora, por cada corte que hace Luisa, obtiene la mitad del pedazo anterior, y éste lo suma a la longitud que ya tenía en la mesa. Con ayuda de la tabla y la expresión algebraica a la que llegaste, contesta lo que a continuación se pide.

1. De acuerdo con la tabla, si sumamos la porción de cuerda que puso luisa en la mesa en el primer y segundo corte ¿cuánto es esto?
$\frac{3}{4}$

2. Si a la suma anterior agregamos la porción de cuerda que se obtiene en el tercer corte, ¿Qué porción de cuerda tendrá luisa en total en la mesa?
$\frac{7}{8}$

2

FIGURA 2: Respuesta del equipo de 1

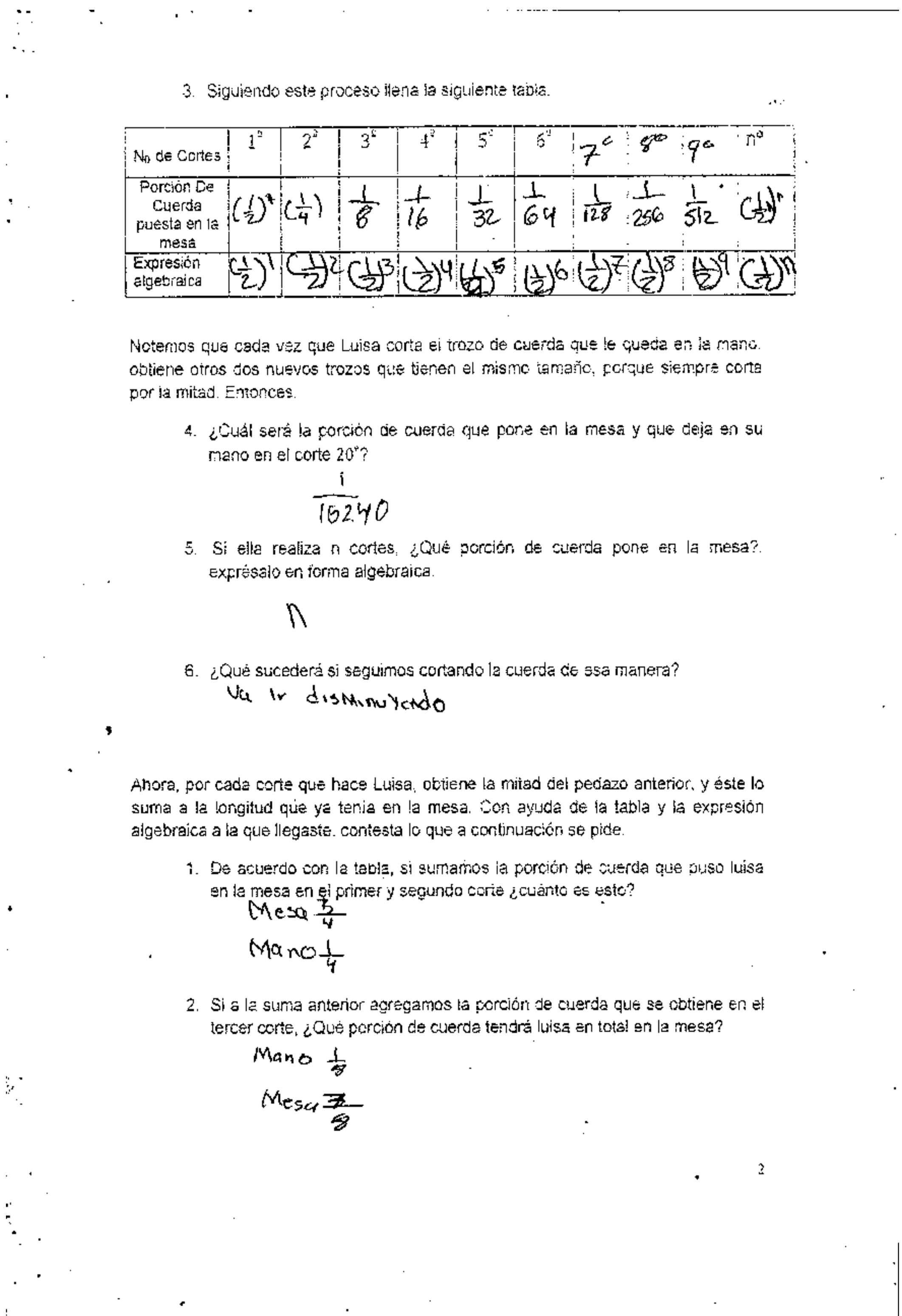
Trabajar en grupos de aprendizaje cooperativos ayuda de gran manera a los estudiantes, por ejemplo, en actividades anteriores Elizabeth no deseaba participar, se mostraba cohibida y confusa. Cuando le tocó pertenecer al equipo de Marco se notó un gran cambio.

Cuando se analizaron las hojas de trabajo individúales, nos llamó la atención la respuesta de Elizabeth, la cual podemos observar en la imagen 4, en dicha respuesta, si se observa la tabla, Elizabeth expresa algo que se puede aproximar al resultado correcto, mientras que los demás equipos llegan a la conclusión que en el n^o corte la expresión buscada era $\frac{1}{n}$.

Puede significar poco, pero este avance se dio gracias a la ayuda y presión que Marco Antonio ejerció en ella y a la disposición de la misma Elizabeth. Además, a cada integrante del equipo, Marco les designó preguntas y roles diferentes, y prácticamente los obligó a participar y trabajar en todo. Como manifestó al respecto Johnson et al (1999), “asignar roles a los alumnos es una de las maneras más eficaces de asegurarse de que los miembros del grupo trabajen juntos sin tropiezos y en forma productiva (p. 53)”.

Es aquí donde se contempla el resultado de haber trabajar en equipos de aprendizaje cooperativo. Para los estudiantes, el ser ayudado por sus propios compañeros les da confianza y ánimo para realizar las actividades. Además, cuando en los equipos hay estudiantes con distintos niveles de desempeño, hay comunicación entre ellos y los demás equipos, ya que incitan a sus demás compañeros también a trabajar. En otros equipos (5, 6, y 7), donde todos eran alumnos que no trabajaban, que éstos terminaron optando por no hacer nada.

En sus respuestas individuales Marco y Elizabeth expresan cosas diferentes, echan mano de lo expuesto en la clase, usan su propio criterio y cuestionan sus propias ideas. Se nota el interés de ambos alumnos para llegar a una respuesta acertada, aun cuando se sigue mostrando la carencia de conocimientos sólidos. Recordemos que para estos alumnos, este tema es desconocido, desde aquí se empieza a notar la dificultad que conlleva aprender el concepto límite.



3. Siguiendo este proceso llena la siguiente tabla.

No de Cortes	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	n°
Porción De Cuerda puesta en la mesa	$(\frac{1}{2})^1$	$(\frac{1}{4})$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$(\frac{1}{2})^n$
Expresión algebraica	$(\frac{1}{2})^1$	$(\frac{1}{2})^2$	$(\frac{1}{2})^3$	$(\frac{1}{2})^4$	$(\frac{1}{2})^5$	$(\frac{1}{2})^6$	$(\frac{1}{2})^7$	$(\frac{1}{2})^8$	$(\frac{1}{2})^9$	$(\frac{1}{2})^n$

Notemos que cada vez que Luisa corta el trozo de cuerda que le queda en la mano, obtiene otros dos nuevos trozos que tienen el mismo tamaño, porque siempre corta por la mitad. Entonces.

4. ¿Cuál será la porción de cuerda que pone en la mesa y que deja en su mano en el corte 20°?

$\frac{1}{16240}$

5. Si ella realiza n cortes, ¿Qué porción de cuerda pone en la mesa?, exprésalo en forma algebraica.

n

6. ¿Qué sucederá si seguimos cortando la cuerda de esa manera?

Va ir disminuyendo

Ahora, por cada corte que hace Luisa, obtiene la mitad del pedazo anterior, y éste lo suma a la longitud que ya tenía en la mesa. Con ayuda de la tabla y la expresión algebraica a la que llegaste, contesta lo que a continuación se pide.

1. De acuerdo con la tabla, si sumamos la porción de cuerda que puso luisa en la mesa en el primer y segundo corte ¿cuánto es esto?

Mesa $\frac{3}{4}$

Mano $\frac{1}{4}$

2. Si a la suma anterior agregamos la porción de cuerda que se obtiene en el tercer corte, ¿Qué porción de cuerda tendrá luisa en total en la mesa?

Mano $\frac{1}{8}$

Mesa $\frac{7}{8}$

2

FIGURA 3: Hoja de respuesta de Elizabeth

El hecho de poder manipular la cuerda, fue de mucha ayuda, ya que echaban mano de ella para poder explicar respuestas simples. Por ejemplo, en la pregunta: **De acuerdo con la tabla, si sumamos la porción de cuerda que puso Luisa en la mesa en el primer y segundo corte, ¿Cuánto es esto?**

Maximino, mientras todos sus demás compañeros daban la respuesta sin explicar, él con ayuda de la cuerda y tijeras, hizo lo que la actividad le pedía; corto por la mitad la cuerda que se le proporciono, una mitad la puso en la mesa y la otra se la dejo en la mano, tomo el tramo que se le quedo en la mano y volvió a cortar por la mitad e hizo la misma acción, dejó un trozo en la mesa y volvió a quedarse con la otra mitad. Prosiguió diciendo: son ¾, cuando se le cuestiono el por qué, contesto "en la mesa hay ½ y ¼, yo me quede con ¼ (mostrando el trozo que traía en la mano) y tomando el primer trozo que puso en la mesa y partiéndolo por la mitad dijo: en la mesa hay tres pedazos de los cuatro en los que se dividió la cuerda, por tanto concluyó que la suma es ¾ con sólo manipular y observar la cuerda.

FIGURA 4: Uno de los equipos manipulando la curda para llegar a una solución

Con esto podemos observar que el simple hecho de poder manipular objetos físicos, sin la necesidad de recurrir a pasos algebraicos como lo era el sumar ½ + ¼, ayuda al estudiante a desarrollar una forma diferente de explicar las cosas.

Las actividades se realizaron con el propósito de generar la discusión entre los estudiantes acerca de los corte hechos en una cuerda, ellos mencionaban que “eran infinitos”. Uno de los momentos en que se generó más discusión fue cuando se les cuestionó: ***¿en algún momento estaría la cuerda completa en la mesa?*** Se mostraron confusos, y se les preguntó con el propósito de hacerles notar que, conforme se hacían los cortes, estos se irían sumando hasta llegar a la unidad, y que el último pedazo que se le agregaría era $\frac{1}{2^n}$, esto para que les fuera más obvio encontrar la expresión de suma ***S(X)***, es aquí donde entra el conflicto de lo infinito, el cual fue uno de sus obstáculos más notorio.

En la siguiente conversación se puede ver, cómo es que ellos conciben algo infinito, ya que como expresa Efraín, “siempre podrá cortar el hilo”.

Efraín: ¿Cuál es el último trozo de cuerda que se le suma a la cantidad de cuerda que hay en la mesa?, Es que puedo hacer trocitos *asinita* por la mitad (mostrando un trozo de hilo).

Martha: ¿Cómo?

Efraín: Digo que puedo hacer muchos cortes hasta que se acabe el hilo y que ya no se vea nada, y este también lo puedo cortar (mostrando la otra mitad que estaba en su butaca, el más pequeño de todo los trozos) y, ¿ahí que?, pues nunca voy a saber.

Martha: ¿Entonces?

Daniel: Al último, nada más se va a garrar y se va a pasar el último corte y ya.

Martha: ¿Entonces tiene o no ultimo trozo?

Efraín: Si verdad, pues, así me la voy a llevar.

Martha: Tu qué crees, ¿qué piensas?

Efraín: Esta pelada eso.

FIGURA 5: Efraín preguntando qué pasa con la cuerda.

En las respuestas de Efraín, menciona que él puede hacer muchos cortes, creyendo que nunca va a terminar; él, a pesar de que no lo expresa adecuadamente se da cuenta de que la sucesión de los cortes es infinita, mientras que Daniel, simplemente dice: “al último, nada más se va agarrar y se va a pasar el último corte y ya”, expresando que sí habrá un momento en que en la mano no le quedara nada. Lo que Efraín no observa es que a pesar de que la sucesión que se forma con los cortes sea infinita, es posible tener un último término, como lo expresa Daniel, y por tanto un límite. Por su parte el equipo de Marco tiene una idea similar.

Agustín: Llena la siguiente tabla sabiendo que…

Martha: Escuchen a su compañero, regresemos a la pregunta 4, ¿qué decías?

Agustín: Ya le gusto

Martha: Escuchen a su compañero por favor.

Agustín: Otra vez en la 4, ¿Cuál será el último trozo de cuerda que se le sume a la cantidad de cuerda que hay en la mesa?, nosotros le pusimos es incierto saberlo, por qué siempre se podrá cortar la cuerda, así sea muy chiquito el pedazo, pero también puede ser n, porque n es cualquier número, no se sabe cuál podría ser, bueno eso sacamos nosotros en conclusión.

David: ¡Pero ya no se puede cortar con las tijeras!

Marco: No importa, imagínatelo, es como el de la ranita, la ranita tampoco nunca pudo llegar al pinche estanque.

Agustín expresa lo que la mayoría también pensaba, que siempre podrá cortar la cuerda, al *expresar "es incierto, pero también puede ser n"*, se podría decir que él imagina un proceso que no termina, como ya se mencionó, varios equipos coinciden en que el proceso de cortar la cuerda no llegará a su fin, por lo tanto sería imposible saber cuál es el último trozo. Algunos justifican diciendo que es un proceso infinito.

FIGURA 6: Agustín en el momento de dar su respuesta.

3. ¿En algún momento estará la cuerda completa en la mesa?

No

4. ¿cuál será el último trozo de cuerda que se le sume a la cantidad de cuerda que hay en la mesa?

se llamara A porque nose se sabe que cantidad lleva

5. Siguiendo este proceso de suma, llena la siguiente tabla sabiendo que:

x = Corte hecho por luisa.

$f(x)$ = Porción de cuerda puesta en la mesa.

$S(x)$ = Suma de la cuerda puesta en la mesa.

x	Expresión para $f(x)$	$f(x)$	$S(x)$	Expresión para $S(x)$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
3	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$
4	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=15$	$\frac{15}{16}$
5	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{31}{32}$	$\frac{31}{32}$
6	$\left(\frac{1}{2}\right)^6$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$	$\frac{63}{64}$
7	$\left(\frac{1}{2}\right)^7$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}$ [illegible]	$\frac{127}{128}$
n	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\frac{n}{n}$	$n+n=2n$	$2n$

6. ¿Qué sucede con el tamaño de la cuerda conforme se le hacen los cortes?

Va dismuyendo

FIGURA 7: Hoja de Efraín.

Los equipos que no contestaron casi nada en las hojas de trabajo, también dieron cierto aporte a nuestra investigación, a pesar de no saber qué contestar, se atrevían a participar en las discusiones. Se cree que no se desempeñaron bien en la actividad porque, no querían trabajar. Estos equipos fueron indisciplinados y distractores, por lo tanto ninguno de ellos se preocupó por tomar un rol. Por otra parte el hecho de que en estos equipos todos tuviera el mismo nivel académico, fue lo que más influyó para tener un mal desempeño.

A pesar de esto al momento de la discusión colectiva el equipo 7, conformado por mujeres, una de ellas expresaba que les sería imposible tener en la mesa la cuerda completa, ya que siempre se estaban haciendo cortes y estos eran infinitos, repetía constantemente que eran infinitos y que la cuerda nunca se terminaría de cortar.

Por su parte, compañeros ajenos a su equipo le pedían se callara porque no sabía, que cómo era posible lo que decía y que ya que se tenía un pedazo, así fuera milimétrico en la mano sólo se pusiera y ya ese era el último. Esto provocó una discusión y nunca llegaron a un acuerdo, a pesar de que cada uno de ellos defendía sus respuestas, sólo se le dijo que si supieran cual es el último pedazo podrían quitárselo a la cuerda y saber cuánto había en la mesa, pero ellos seguían preguntado: *“¿y cuál es el último pedazo?”*

FIGURA 8: Equipo de Osiris discutiendo con sus compañeros.

En la fase de trabajo en equipos, se filmó al equipo de Marco mientras discutían sobre la última pregunta, se puede observar el interés de Elizabeth al compartir la dificultad de la pregunta con todo su equipo, juntos tratan de llegar a una sola respuesta, se nota la disposición para la discusión de la actividad.

Elizabeth es un claro ejemplo de lo que las actividades hicieron en ella, ya que en un principio mostraba apatía para trabajar en la metodología, no mostraba entusiasmo ni interés, conforme avanzábamos más se interesaba y preguntaba, al término de la actividad se acercó y me expresó lo mucho que le había gustado, que le fue de mucho agrado pasar al pizarrón y que en un principio no le gustaba participar porque tenía temor a equivocarse pero, que se dio cuenta que eso no era lo que importaba. Respecto a este comentario se puede mencionar que la actividad pudo lograr lo que se planteó en un principio: lograr llamar el interés de los estudiantes respecto de algo desconocido.

En la siguiente discusión que se entabla en el equipo de Marco a la última pregunta, tratan de comprender lo que la palabra "tender *a"* significaba, a pesar de que era una palabra que desconocían, tratan de buscar una respuesta. Sin embargo en este grupo, casi todas sus respuestas las tratan de contestar lógicamente, olvidándose de la parte algebraica y numérica,

Marco: ¡hay, es igual a la ranita en el estanque!

Elizabeth: ¿cuándo x crece más y más?

Agustín: Haber, ¿Cuándo x crece más y más a que tiende la suma? mmm… (Piensa un rato)

Marco: ¿Cuál x?

Elizabeth: Así dice, ¿Cuándo x crece más y más a que tiende la suma?

Marco: Haber (le pasan la hoja y piensa un rato), pues con x, mmm… yo creo que se está refiriendo a la cuerda o a… ¿importantes cortes?

Agustín: Pues x puede ser cualquier cosa.

Marco: Se confía en tu instinto (ríe), ¿A que tiende a ser la suma? ¿Que tiende a ser la suma?

Martha: ¿Quién es x?

Marco: La cuerda, ¿no?

Martha: Los cortes, mientras más cortes haces, ¿Qué pasa con los pedazos que pones en la mesa?

Agustín: Se van haciendo más.

Marco: Se hacen más chiquitos di (risas).

Agustín: Pues sí…..ya me hice bolas.

Marco señala con sus lapiceros en su libreta y dice:

Marco: Si vas poniendo los pedazos ¿Va creciendo de nuevo la cuerda?

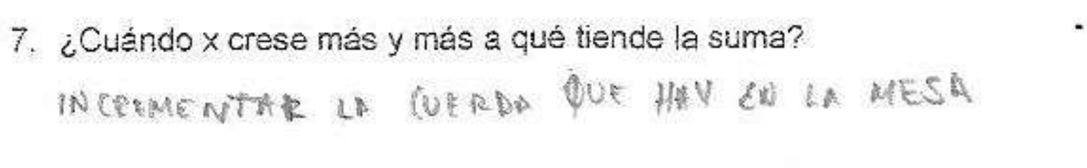
Elizabeth: ¿Se va juntando?

En la figura 10 se observa a Marco tratando de responder a la última pregunta. Marco expresa sus ideas con su compañero Agustín, haciendo uso de las tapas de lapiceros y los lapiceros mismos para recrear lo que suceden con los cortes, mientra se pregunta ¿qué sucede con los pedazos que se van poniendo en la mesa?

Sin explicaciones y sin tener ninguna noción del tema y conceptos, este equipo obtienen conocimientos nuevos referente al concepto de límite.

FIGURA 9: Marco Antonio explicándole a su compañero de equipo Agustín

El hecho de no saber qué significa esa palabra, los obliga a pensar en una respuesta en equipo, no llegan a un resultado numérico, tratan de entender algo que desconocen. En general, existe una cercanía entre la forma cómo los alumnos expresan sus ideas de manera escrita y verbal. Es decir, la mayoría escribe casi exactamente como hablan; no tienen un lenguaje matemático, lo podemos notar en la siguiente respuesta.



7. ¿Cuándo x crese más y más a qué tiende la suma?

INCREMENTAR LA CUERDA QUE HAY EN LA MESA

FIGURA 10: Respuesta de Marco.

En general, esta actividad ayudo a los estudiantes en su gran mayoría a generar un conocimiento desconocido, que posiblemente sea difícil de olvidar. Es un buen comienzo para empezar a conocer el concepto de límite. Pero se tiene que tener cuidado en no dar rigor en estos grados para no confundir a los estudiantes.

Ante la última pregunta sólo dos equipos la contestaron, el de Marco y el equipo 1; este equipo menciona que la suma tendía a “n”.

Es así como llegamos a la conclusión que no se debió generar esta última pregunta. Se esperaban que solos llegaran a entender de una manera clara lo que la pregunta se refería. Por esta razón se decidió ponerla en palabras y no con símbolos.

Es gratificante haber observado que estas actividades fueron novedosas e interesante para el estudiante, ya que alumnos ajenos al grupo deseaban trabajar el ellas. Pero no se logró el objetivo propuesto, ya que no lograron encontrar una expresión para la suma ni, estimaron el límite de la suma cuando n tiende a infinito.

4.3. Actividad “la cuerda de Luisa” (grupo de 6º semestre)

En esta actividad nos fue posible formar 6 equipos entre 3 y 4 integrantes. Los alumnos son más algebraicos a diferencia de los de 2º semestre, para estos estudiantes esta actividad no fue de mucha dificultad el tiempo que les tomo contestarla fue de 10 a 15 minutos, se llevaron más tiempo en expresar lo que pensaban. Entre sus respuestas, se notan ciertas limitaciones en el uso del lenguaje, por el hecho de que ellos ya estaban familiarizados en el tema, se esperaban respuestas más concretas y claras.

FIGURA 11: alumnos de 6º semestre trabajando individualmente.

Como se mencionó, este grupo es más algebraico y de alguna manera indagaban y hacían lo posible para dar una respuesta. En la imagen casi se aproximan al resultado, a pesar de que confunden la expresión de la suma con la de los cortes. Las actividades ayudaron a reflexionar sobre algo que ya conocían, pero al parecer no había entendido, los alumnos se muestran interesados y animados con la actividad.

Analizando la pregunta 5, trata de dar una expresión para el corte nº, a diferencia de los de 2º semestre que relacionaron los resultados de la tabla con esa pregunta, notemos que este resultado se acerca mucho pero para la expresión de la suma, que corregida sería $1 - \frac{1}{2^n}$, a pesar de que se equivocaron, en su expresión hay un uno, esto refleja que entre sus ideas tratan de quitar algo a una unidad, que en este caso es la cuerda. Se aplaude al intento de indagar e intentar en sus propias fuerzas llegar a un resultado correcto sin ayuda del profesor o un moderador.

3. Siguiendo este proceso llena la siguiente tabla.

Nº de Cortes	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	n°
Porción De Cuerda puesta en la mesa	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{32}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{64}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{128}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{256}$	$\frac{1}{2}$ [illegible]12	$\frac{1}{2}\frac{1}{1024}$
Expresión algebraica	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$\left(\frac{1}{2}\right)^6$	$\left(\frac{1}{2}\right)^7$	$\left(\frac{1}{2}\right)^8$	$\left(\frac{1}{2}\right)^9$	$\left(\frac{1}{2}\right)$[illegible]

Notemos que cada vez que Luisa corta el trozo de cuerda que le queda en la mano, obtiene otros dos nuevos trozos que tienen el mismo tamaño, porque siempre corta por la mitad. Entonces.

4. ¿Cuál será la porción de cuerda que pone en la mesa y que deja en su mano en el corte 20°? Nada solo que sea muy larga la cuerda

5. Si ella realiza n cortes, ¿Qué porción de cuerda pone en la mesa?, exprésalo en forma algebraica.

$$n = 1 - \frac{1}{2}x$$

6. ¿Qué sucederá si seguimos cortando la cuerda de esa manera? No tendría mas muchas divisiones se terminaría rápido y no se podría dividir

Ahora, por cada corte que hace Luisa, obtiene la mitad del pedazo anterior, y ésta lo suma a la longitud que ya tenía en la mesa. Con ayuda de la tabla y la expresión algebraica a la que llegaste, contesta lo que a continuación se pide.

1. De acuerdo con la tabla, si sumamos la porción de cuerda que puso luisa en la mesa en el primer y segundo corte ¿cuánto es esto?

$\frac{3}{4}$ del total

2. Si a la suma anterior agregamos la porción de cuerda que se obtiene en el tercer corte, ¿Qué porción de cuerda tendrá luisa en total en la mesa?

$$\frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \cancel{\frac{4+2}{8}} = \frac{7}{8} \qquad \frac{7}{8}$$

2

FIGURA 12: Hoja de trabajo del equipo 4.

A pesar de que sus respuestas las daban con más rapidez y mucho más concretas comparadas con las que daban los de 2º, también ellos expresaban deficiencia en su razonamiento. Al preguntárseles **¿Qué sucederá si seguimos cortando la cuerda de esa manera?**, al momento de interactuar con la cuerda para hacer en ella diferentes cortes y llegar a un punto donde ya no se podía cortar, mencionaban que si la cuerda fuera más grande, sería posible hacer más cortes.

Nº de Cortes	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7ª	8º	9ª	nº
Porción De Cuerda puesta en la mesa	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	N
Expresión algebraica	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$\left(\frac{1}{2}\right)^6$	$\left(\frac{1}{2}\right)^7$	$\left(\frac{1}{2}\right)^8$	$\left(\frac{1}{2}\right)^9$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Notemos que cada vez que Luisa corta el trozo de cuerda que le queda en la mano, obtiene otros dos nuevos trozos que tienen el mismo tamaño, porque siempre corta por la mitad. Entonces.

4. ¿Cuál será la porción de cuerda que pone en la mesa y que deja en su mano en el corte 20°?

mesa $\frac{1}{2}$

mano $\frac{1}{2}$

5. Si ella realiza n cortes, ¿Qué porción de cuerda pone en la mesa?, exprésalo en forma algebraica.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

6. ¿Qué sucederá si seguimos cortando la cuerda de esa manera?

Pues siempre cortara la mitad asta n corto ya sea micra

Ahora, por cada corte que hace Luisa, obtiene la mitad del pedazo anterior, y éste lo suma a la longitud que ya tenía en la mesa. Con ayuda de la tabla y la expresión algebraica a la que llegaste, contesta lo que a continuación se pide.

1. De acuerdo con la tabla, si sumamos la porción de cuerda que puso luisa en la mesa en el primer y segundo corte ¿cuánto es esto?

$\frac{3}{4}$

2. Si a la suma anterior agregamos la porción de cuerda que se obtiene en el tercer corte, ¿Qué porción de cuerda tendrá luisa en total en la mesa?

$\frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

FIGURA 13: Respuesta de Milton

Notemos que cada vez que Luisa corta el trozo de cuerda que le queda en la mano, obtiene otros dos nuevos trozos que tienen el mismo tamaño, porque siempre corta por la mitad. Entonces,

4. ¿Cuál será la porción de cuerda que pone en la mesa y que deja en su mano en el corte 20°? Pues yo no se alcanza a cortar hasta el num 20° apenas y alcanza cortar al Octavo.

5. Si ella realiza n cortes, ¿Qué porción de cuerda pone en la mesa?, exprésalo en forma algebraica.

n cortes

6. ¿Qué sucederá si seguimos cortando la cuerda de esa manera?

llega un limite en el cual ya no se puede cortar.

Ahora, por cada corte que hace Luisa, obtiene la mitad del pedazo anterior, y éste lo suma a la longitud que ya tenía en la mesa. Con ayuda de la tabla y la expresión algebraica a la que llegaste, contesta lo que a continuación se pide.

1. De acuerdo con la tabla, si sumamos la porción de cuerda que puso luisa en la mesa en el primer y segundo corte ¿cuánto es esto?

$$\frac{3}{4}$$

2. Si a la suma anterior agregamos la porción de cuerda que se obtiene en el tercer corte, ¿Qué porción de cuerda tendrá luisa en total en la mesa?

$$\cancel{\frac{1}{8}} \quad \cancel{\frac{1}{3}} \quad \cancel{\frac{8}{3}}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{4} = \frac{11}{24}$$

2

FIGURA 14: hoja de trabajo del equipo 1.

El equipo 1 expresa la confusión que tenía ante esta pregunta; este equipo es entusiasta y analizan sus respuestas, algunas ideas son buenas, a pesar de eso tienen algunas dificultades en comprender lo que sucede en un proceso infinito. En la siguiente conversación podemos ver esta dificultad.

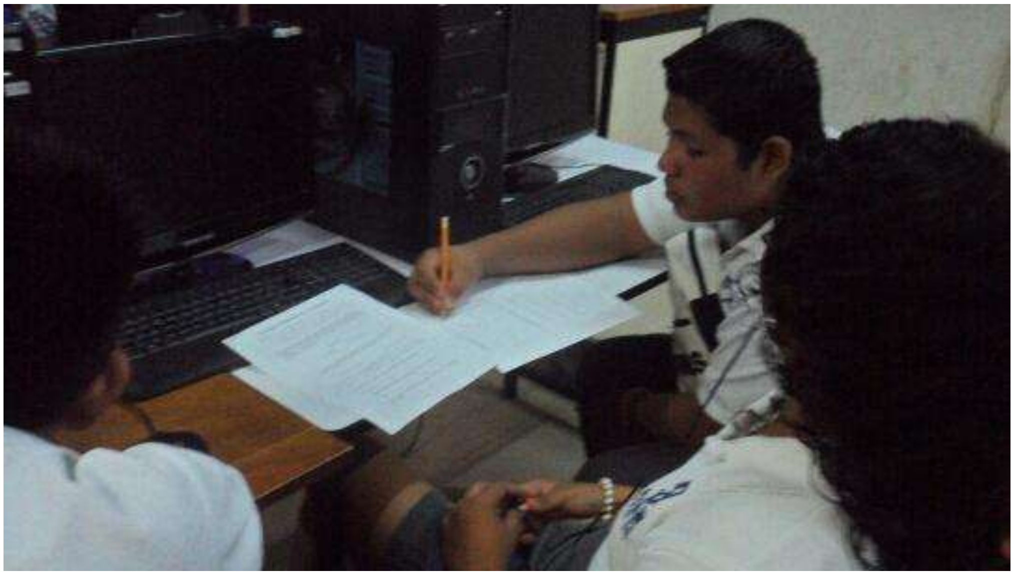


FIGURA 15: Equipo 1, discutiendo sobre la actividad.

Salvador hace una pregunta que la mayoría de los equipos tenía con esta actividad

Salvador: ¿Qué sucede si seguimos cortando la cuerda de esa manera?, ¿Se terminara de cortar la cuerda?

Martha: ¿Ustedes que creen?

Miguel: Ya no se puede, porque ya la cuerda llega a un límite en el que ya no es suficientemente grande para cortar.

Aniria: Pues yo opino igual, pues ya hicimos los cortes y salen ocho.

Miguel: Es que la más pequeña será este (mostrado un trozo de cuerda), si seguimos cortando, ya no tendremos cuerda.

Martha: ¿Qué significa que ya no tendrás cuerda?

Salvador: Que su total se va haciendo más pequeño.

Martha: Y, ¿Cuál es su total?

Miguel: Pues la cuerda o ¿uno?

Martha: Si su total se va haciendo pequeño mientras haces los cortes, ¿en qué momento voy a dejar de cortar?

Miguel: Pues, ¡cuando ya no tenga cuerda!

Miguel Ángel, menciona algo interesante: "porque ya la cuerda llega a un límite en el que ya no es suficientemente grande para cortar", él hace uso de la palabra límite, para referirse a un cierto punto en el que la cuerda llegará después de los cortes. Aniria por su parte menciona que se harán ocho cortes y que será ahí cuando se dejara de cortar.

A pesar de que no logran explicar sofisticadamente que la sucesión de los cortes se van aproximando a cero, hacen mención de que en algún momento se terminara de cortar. Estas respuestas son imprecisas, pero podemos detectar que los estudiantes tienen la idea de que este proceso termina y tiene límite, a diferencia de los alumnos de 2º que toman esta acción como procesos iterativos que nunca terminan.
Siguiendo esta idea, el equipo 6, expresa una idea similar pero más amplia.

José F: En cuanto a que si se terminara de cortar la cuerda, concluimos que no.

Martha: Y ¿porque no?

José F: Pues… aunque ahí en el hilo pareciera que se llega a un fin, pero eso simplemente por el tamaño o por lo corto, porque pues… si lo viéramos al trocito de hilo con una lupa se vería más grande y ahí podría seguir haciendo divisiones y así sucesivamente, siempre se está cortando. Pero no porque no se vea más no quiere decir que ya no se puede, en realidad sí se puede, este… la idea que manejamos más bien, es que se puede acercar a tener toda la cuerda, pero nunca se va a completar.

Martha: ¿Alguien tiene una idea diferente?

Voces: no, no

Si bien es cierto que las actividades promueven un acercamiento de construcciones que se pueden realizar una y otra vez, las discusiones generales tenían la intención de provocar un análisis más fino. En el contexto de la actividad, surgen ideas contradictorias; por un lado, el "límite nunca se alcanza" y, por el otro, el límite se alcanza, como en la siguiente conversación con el equipo de Milton, cuando se les pregunto si **¿en algún momento estará la cuerda completa en la mesa?,** mientras el equipo de Milton defendía su respuesta el equipo de José Fernando también defendía la suya.

Martha: ¿En algún momento ya no tendré cuerda en mi mano, y estará completa en la mesa?

Milton: Si

Martha: ¿Por qué?

Milton: Finalmente estamos sumando los pedacitos y se van a convertir en la cuerda.

Algunos alumnos dicen que si

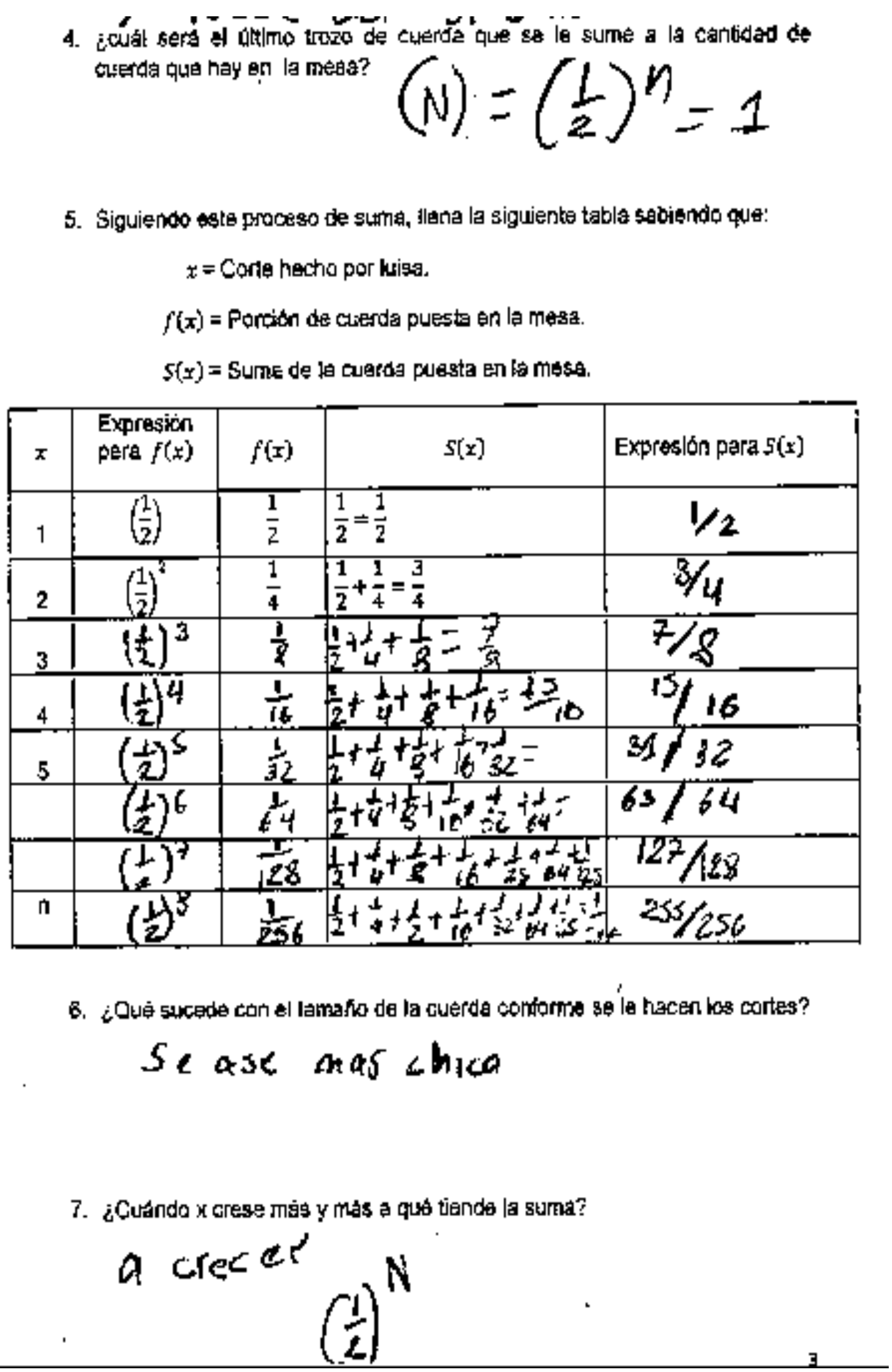
Martha: ¿Alguien opina algo diferente?

José F: Yo creo que no, porque siempre va a ver un pedazo más, cuando se hacen muchos cortes y más cortes y más corte.

Martha: ¿Entonces? ¿A qué se refiere la pregunta?

Alumnos: Que si la cuerda se termina de cortar.

José F: Es que... siempre es posible cortar un pedazo, siempre, siempre, siempre, sí es posible cortar otro pedazo, a la hora de sumarlo todos a lo mejor nunca encontremos que la suma da la cuerda.



4. ¿cuál será el último trozo de cuerda que se le sume a la cantidad de cuerda que hay en la mesa? $(N) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 1$

5. Siguiendo este proceso de suma, llena la siguiente tabla sabiendo que:

x = Corte hecho por luisa.

$f(x)$ = Porción de cuerda puesta en la mesa.

$S(x)$ = Suma de la cuerda puesta en la mesa.

x	Expresión para $f(x)$	$f(x)$	$S(x)$	Expresión para $S(x)$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	$1/2$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$	$3/4$
3	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$	$7/8$
4	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$	$15/16$
5	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=$	$31/32$
	$\left(\frac{1}{2}\right)^6$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=$	$63/64$
	$\left(\frac{1}{2}\right)^7$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}$	$127/128$
n	$\left(\frac{1}{2}\right)^8$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}$	$255/256$

6. ¿Qué sucede con el tamaño de la cuerda conforme se le hacen los cortes?

Se ase mas chica

7. ¿Cuándo x crese más y más a qué tiende la suma?

a crecer $\left(\frac{1}{2}\right)^{N}$

3

FIGURA 16: Hoja de Milton

En esta discusión entre Milton y José Fernando, se puede notar la idea de aproximación que ellos tenían, por un lado, como menciona José Fernando: "a la hora de sumarlo todos, a lo mejor nunca encontremos que la suma da la cuerda". Él menciona que es posible aproximarse tanto como se quiera, pero es posible que la cuerda no esté completa.

3. ¿En algún momento estará la cuerda completa en la mesa?

NO.

4. ¿cuál será el último trozo de cuerda que se le sume a la cantidad de cuerda que hay en la mesa?

No hay un último corte

5. Siguiendo este proceso de suma, llena la siguiente tabla sabiendo que:

x = Corte hecho por luisa.

$f(x)$ = Porción de cuerda puesta en la mesa.

$S(x)$ = Suma de la cuerda puesta en la mesa.

x	Expresión para $f(x)$	$f(x)$	$S(x)$	Expresión para $S(x)$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	S(1)
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$	S(2)
3	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$	S(4)
4	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$	S(8)
5	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$	S(16)
6	$\left(\frac{1}{2}\right)^6$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$	S(32)
7	$\left(\frac{1}{2}\right)^7$	$\frac{1}{128}$	[illegible]	S(64)
n	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2}+n+n\ldots+n$	S(n)

6. ¿Qué sucede con el tamaño de la cuerda conforme se le hacen los cortes?

Se va reduciendo la cuerda a la $\frac{1}{2}$ de lo que tiene en la longitud del tramo de la cuerda

7. ¿Cuándo x crese más y más a qué tiende la suma?

a aumentar

FIGURA 17: Hoja de Pedro.

Las preguntas: **¿Qué sucede si seguimos cortando la cuerda de esa manera?** Y **¿en algún momento estará la cuerda completa en la mesa?** Fueron las que más controversias dieron entre los alumnos. En estas conversaciones podemos notar dos posturas, y a pesar de que varios estudiantes se notaban confusos y la mayoría sólo se dejaban llevar por lo que los demás compañeros de equipos decían, eran pocos los que podían dar el porqué de sus respuestas.

En la figura 17 y 18 se muestra la dificultad que muchos estudiantes tuvieron para llegar a una expresión de suma. Si bien es verdad que muchos no llegaron al resultado, se puede ver claramente el esfuerzo que hacen por indagar y descubrir un conocimiento, se observan las complicaciones como el no saber expresar cantidades muy grandes o el hecho de tener que manejar un número desconocido y esto viene envuelto en el concepto de infinito, ya que su mayor dificultad al igual que los de 2º fue como tratar el término nº. A pesar de que en fueron pocos los estudiantes que dieron una respuesta correcta a la última pregunta, varios también se dieron cuenta de lo que sucedía en los cortes y con la suma de esos cortes. A continuación presentamos varias respuestas a la última pregunta: ¿Cuándo x crece más y más a que tiende la suma?

NÚMERO DE ALUMNOS	RESPUESTA
2	Los cortes disminuyen y las sumas aumentan
3	La fracción se hace más pequeña
3	No contestaron
4	A Incrementar
1	A crecer $(1/2)^N$
7	1

FIGURA 18: Tabla de acuerdo a las respuestas dada a la pregunta 7.

Como se puede ver en la tabla varios alumnos dijeron que la suma se aproximaba a 1. Dos alumnos se dieron cuenta de que la sucesión de la cuerda disminuía mientras, la suma aumentaba, estos alumnos fueron Salvador y José Fernando.

En la fase de discusión grupal, en un ambiente de debate científico, identificamos puntos medulares, los equipos reflejaban intercambios de opiniones que presentaban en los pequeños grupos. El primero fue la confrontación de dos ideas: "El infinito como un proceso iterativo que no termina contra un proceso terminado".

4.4. Actividad "Comportamiento de funciones"

Esta actividad sólo se aplicó a los alumnos de sexto semestre, ya que se tenía que tener conocimientos más avanzados. Como es bien sabido en el lenguaje ordinario la palabra límite tiene un carácter estático y significa término o confín, como la idea que tuvieron muchos estudiantes con la actividad pasada. Sin embargo, en cálculo, el concepto de límite es un concepto dinámico y tiene que ver con la idea de acercarse lo más posible a un punto o un valor $(x \to x_0)$. En otras ocasiones tiene que ver con la idea de alejarse lo más posible del origen, o hacer lo más grande posible un número $(x \to \infty)$. Y, en otras ocasiones, el concepto de límite tiene que ver con traspasar una frontera, aparentemente infranqueable, como es el caso de infinitos números.

Con esta actividad pretendemos proporcionarles a los estudiantes estos tipos de nociones a partir de estudiar el comportamiento de una función con un hueco y ver qué sucede con ella alrededor de cierto punto. Al estudiar el comportamiento de dicha función, ayudaría a los estudiantes a darse cuenta que al aproximarse tanto como se quiera, tanto por la derecha como por la izquierda a 1, como resultado f(x) se aproxima cuanto se quiera al valor de 2.

Se formaron los equipos de diferente manera a como lo hicieron en la actividad la cuerda de Luisa, de igual forma, también se enumeraron los equipos para podernos referir a ellos más adelante, y es así como nos dispusimos a continuar con esta segunda actividad en este grupo.

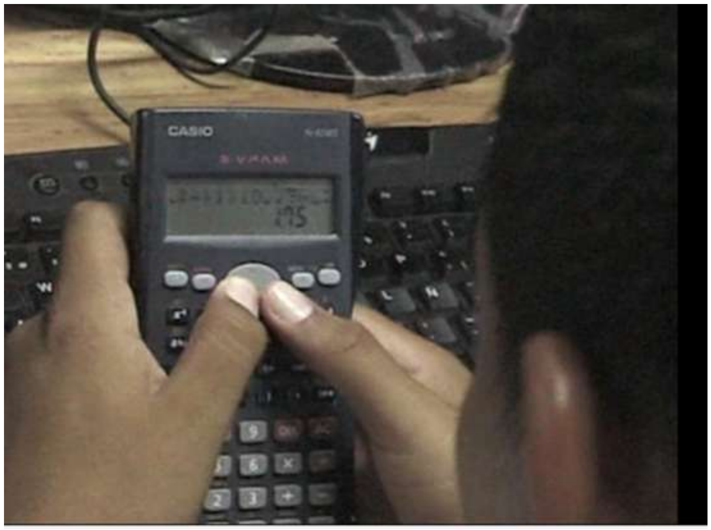


FIGURA 19: Alumnos haciendo uso de la tabla para sustituir los valores.

En esta actividad se hace uso de diferentes recursos como la calculadora, que ayudó a los estudiantes a verificar resultados, no olvidemos lo mucho que les ayudó la tabla y una gráfica, las cuales fueron fáciles para ellos; de hecho toda la actividad no les fue de mucha dificultad.

Lo que muestran los estudiantes, es la forma en la que ellos generan un conocimiento, las preguntas y las intervenciones son vitales para este tipo de situaciones, ya que para muchos alumnos, si no se les pregunta, ellos simplemente no contestan, en sus hojas de trabajo, sólo se limitan a contestar lo que se les pregunta, pero la mayoría trata de defender sus ideas al momento de sus presentaciones ante el grupo, eso les ayudaba a construir el conocimiento.

FIGURA 20: Alumnos trabajando en equipo.

A continuación se hará un análisis general para esta actividad, la cual generó mucha confusión en un principio pero conforme avanzaba se logró dar el siguiente resultado.

Actividad: Comportamiento de funciones

5

Nombre(s): Arzate Verduzco Sigifredo

Muñuzuri Milan Nemesio

Gerónimo Domínguez José de Jesús

INDICACIONES: Analiza la situación que se te plantea y responde a las preguntas; es muy importante que escribas todas las operaciones que se requieran aunque las realices mentalmente o con calculadora. Si utilizas hojas adicionales, no olvides anexarlas al final. Si te equivocas procura no borrar.

Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad , \quad x \; diferente \; de \; 1$$

1. Con ayuda de tu calculadora, sustituye el valor de x en la función, llena la tabla siguiente y estudia el comportamiento de la función alrededor del punto x=1.

X se acerca a 1 por la izquierda

X se acerca a 1 por la derecha

X	0.2	0.5	0.75	0.999	0.9999	1	1.0001	1.01	1.2	1.5	2
$f(x)$	1.2	1.5	1.75	1.999	1.9999	?	2.0001	2.01	2.2	2.5	3

2. Mientras más te acercas a 1 por la izquierda, ¿Qué sucederá con $f(x)$?

Aumenta el Valor

3. Si damos valores próximos a 1 por la derecha, ¿a qué valor se acerca $f(x)$?

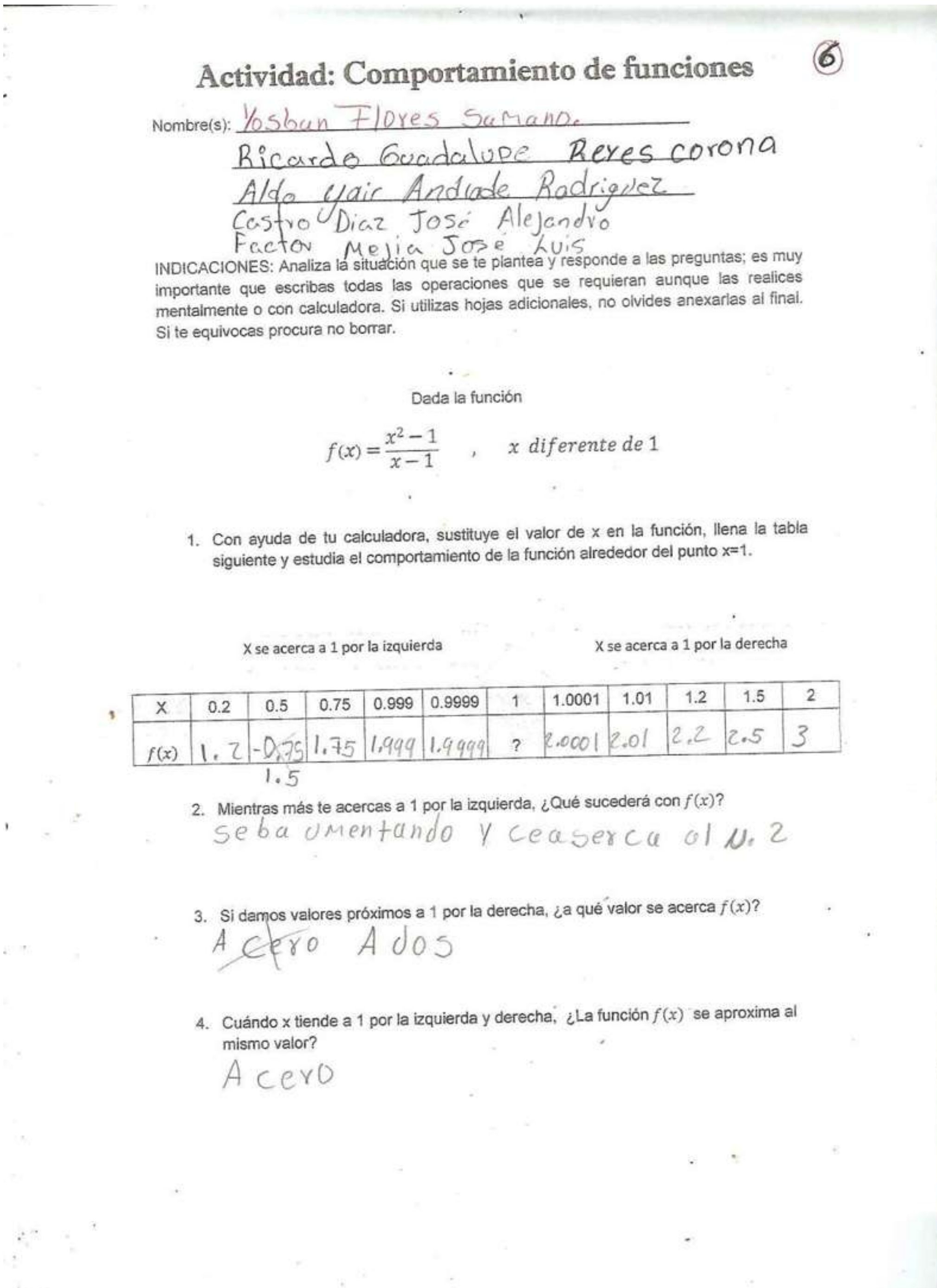
Al valor 2

4. Cuándo x tiende a 1 por la izquierda y derecha, ¿La función $f(x)$ se aproxima al mismo valor?

Si, se aproxima al mismo Valor

FIGURA 21: Hoja de trabajo del equipo 5.

En las preguntas 2, 3 y 4 cinco de los equipos dan el mismo resultado, mientras sólo el equipo 6 expresa algo diferente. En la imagen 22 se puede ver al equipo 5 con un resultado diferente al equipo 6.



Actividad: Comportamiento de funciones

6

Nombre(s): Yosbun Flores Samano
Ricardo Guadalupe Reyes corona
Aldo yair Andrade Rodriguez
Castro Diaz José Alejandro
Facton Mejia Jose Luis

INDICACIONES: Analiza la situación que se te plantea y responde a las preguntas; es muy importante que escribas todas las operaciones que se requieran aunque las realices mentalmente o con calculadora. Si utilizas hojas adicionales, no olvides anexarlas al final. Si te equivocas procura no borrar.

Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad , \quad x\ diferente\ de\ 1$$

1. Con ayuda de tu calculadora, sustituye el valor de x en la función, llena la tabla siguiente y estudia el comportamiento de la función alrededor del punto x=1.

X se acerca a 1 por la izquierda — X se acerca a 1 por la derecha

X	0.2	0.5	0.75	0.999	0.9999	1	1.0001	1.01	1.2	1.5	2
$f(x)$	1.2	~~-0.75~~ 1.5	1.75	1.999	1.9999	?	2.0001	2.01	2.2	2.5	3

2. Mientras más te acercas a 1 por la izquierda, ¿Qué sucederá con $f(x)$?

seba umentando y ceaserca al N. 2

3. Si damos valores próximos a 1 por la derecha, ¿a qué valor se acerca $f(x)$?

~~A cero~~ A dos

4. Cuándo x tiende a 1 por la izquierda y derecha, ¿La función $f(x)$ se aproxima al mismo valor?

A cero

FIGURA 22: Hoja de trabajo del equipo 6.

Al momento de presentar sus respuestas, el equipo 4 entabla una discusión cuando se cuestiona: ¿a qué valor se acerca $f(x)$?

Milton: Si damos valores próximos a 1 por la derecha, ¿a qué valor se acerca $f(x)$? ¿Sería empezando de aquí no? (apuntando del uno hacia la derecha).

Martha: ¡si damos valores próximos por la derecha! ¿De dónde?

Milton: Si, ¿no? Sería de aquí hacia acá, ¿no? (apuntando de derecha a izquierda)

Martha: De aquí (apuntando el dos), si vez que nos dice próximos como 2, 1.5, 1.2 y así, ¿a qué se va acercando?

Milton: Pues a dos

Martha: Claro a dos, ¿alguien opina lo contrario?

Pedro: Si se va acercando al dos

Todos: Sí, a dos

Sigifredo: Al cero

Martha: Haber ¿quién dice que al cero?

Sigifredo: Pues ¿Qué pasa con el uno?

Martha: ¿tú que crees?

Sigifredo: Pues da cero

Martha: Vimos lo que sucede cuando nos acercamos a la por la derecha y por la izquierda, según tu intuición, ¿Qué sucede cuando nos acercamos a uno?, (apuntando la tabla y haciendo movimientos de izquierda a derecha).

Sigifredo: Sí, es lógico que se acerque a dos, se ve en la tabla pero…mmm, pues ¿qué pasa con la función? , no entiendo.

Es claro ver la dificultad que estos términos traen hacia los estudiantes, Sigifredo expresa algo que es probable fuera la confusión de muchos, pero es el único que se atreve a mencionarlo, como se ve en la figura 24 a pesar de que el equipo opinaba que la respuesta era dos, Sigifredo seguía con esa duda**,** él quedo convencido y termina afirmando que sí se acerca a dos.

Para responder la pregunta 4, se le pidió al equipo de Sigifredo diera respuesta a esa pregunta, en la siguiente conversación vemos cómo es que Sigifredo se convence.

Sigifredo: (piensa un rato) mmm…, si se aproxima al mismo valor.

Martha: Lee la pregunta

Sigifredo: Cuando x tiende a 1 por la izquierda y derecha, ¿la función $f(x)$ se aproxima al mismo valor?, si se aproxima

Martha: ¿si se aproxima? ¿Porque?

Sigifredo: Es que si se aproxima, vimos la tabla y si se aproxima, si lo hace.

Martha: ¿escucharon a su compañero?, él dice, que si nos aproximamos por aquí (apuntando de derecha a izquierda) y por acá (apuntando de izquierda a derecha), nos aproximamos al mismo valor.

Milton: ¿Entonces su límite es infinito?

Martha: ¿Por qué infinito?

Milton: Damos y damos valores, como por ejemplo podemos dar 0.99999999 y así muchos, mucho hasta no terminar, entonces su límite es infinito.

Martha: No podemos saber cuánto es el valor de la función cuando sustituimos el 1, ya que es indeterminado, si pero podemos acercarnos tanto como queramos. Como dices tú 0.999999, hasta el infinito, claro que sí. Claro que las x pueden ser infinitos números, si pusiéramos aquí 1.0000001, ¿Cuánto seria $f(x)$?

Todos: 2.0000001

Martha: Pero no es lo mismo x y $f(x)$¿a qué se aproxima $f(x)$? (mirando a todos) ¿a qué se aproxima?

Milton: A dos

Todos: A dos

Martha: ¿Ven la diferencia?...

FIGURA 23: Sigifredo convencido de que la función se acerca a dos.

En la segunda parte de la actividad, la pregunta que más problema dio a los estudiantes fue la 9, todos los equipos dan respuestas diferentes en la hoja por equipos, ante esta pregunta, a continuación se muestra una tabla las respuestas.

Nº DE EQUIPO	RESPUESTA A LA PREGUNTA 9
EQUIPO 1 Y 2	Infinito
EQUIPO 3 Y 4	Cero
EQUIPO 5	No hay límite
EQUIPO 6	1.9999

Si notamos en la tabla, ningún equipo mencionó que el límite es dos, pero conforme se avanza en la actividad, la mayoría, al momento de responder en la parte individual a esta pregunta cambia su respuesta, así como menciona Blázquez y Ortega (200), la utilización de distintos registros algebraico, numérico, gráfico y verbal mejora la comprensión del concepto de límite.

A continuación se presenta el análisis de la segunda parte de la actividad, en donde se exponen también, unas respuestas de lo que es para ellos es el concepto de límite.

Cuando se planteó la pregunta 5, los alumnos se mostraban más confusos, por un lado, ya habían entendido que en la tabla se aproximaban a dos, ahora, en la gráfica ¿sucedía lo mismo?

Es aquí donde interviene por qué diseñar las actividades de esta manera, se les muestra la idea de aproximación de dos formas diferentes, cuando se aproximas con la tabla se les es fácil ver esta situación, pero al complementar la idea de la aproximación con la gráfica reforzando así su conocimiento previo.

Para responder a esto el equipo de Pedro hace el siguiente análisis.

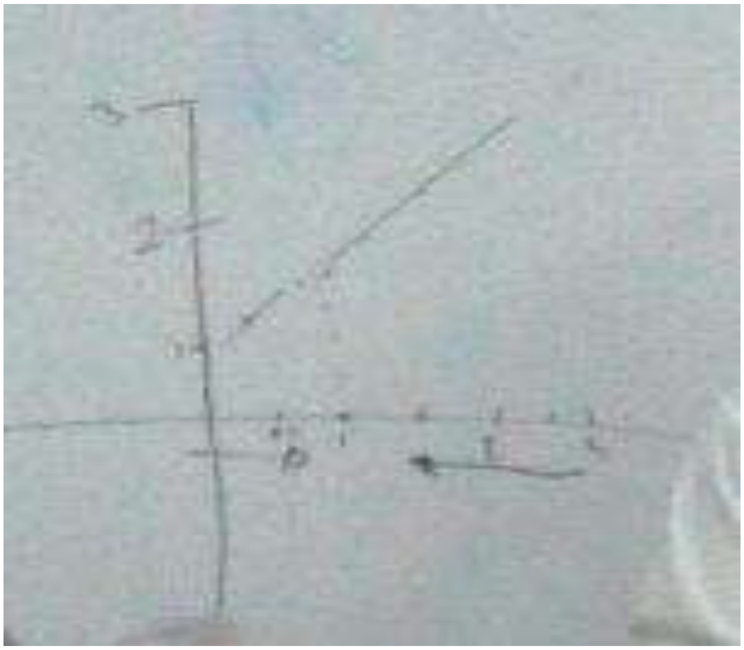


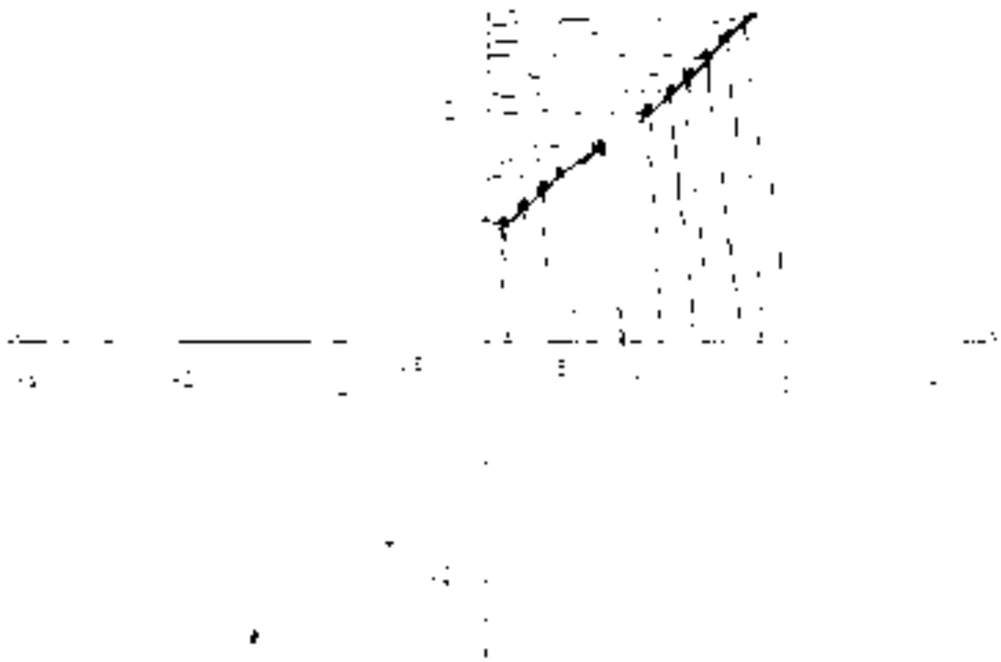
FIGURA 24: Grafica que dibujo Pedo en el pizarrón.

Pedro: Como ya vimos en la tabla, cuando sustituimos 1 en la función nos dice que da cero, entonces creemos que el punto no se encuentra en la recta, se encuentra acá abajo , porque da cero, esto nos dice que en la gráfica se debe de salir ese punto. No sabemos cuánto vale…

Martha: escucharon a su compañero, él dice q aquí en la recta el punto se sale, y que debe de haber un hueco, en realidad no se puede decir cuánto vale en x=1, pero si podemos ver a lo que se aproxima, ¿A qué se aproxima?

Salvador: otra vez a dos

5. Con ayuda de la tabla anterior representa los puntos dados en dicha tabla y esboza la gráfica de la función $f(x)$



6. Al representar los puntos de la tabla podemos notar que la gráfica que resulta es una recta, ¿Qué sucede en el punto (1,2)?

Hay una interrupción que [illegible]
Dividendo es 0

7. Analizando tu gráfica. ¿Podrá acerarse X a 1 tanto como tú quieras?

Si [illegible] para [illegible]

8. Cuando más te acercas a 1, ¿A qué se va acercando $f(x)$?

al 2

9. ¿Cuál es el límite de $f(x)$ Cuando x tiende a 1?

2

FIGURA 25: Hoja de trabajo de Milton

FIGURA 26: Equipo 2 en la discusión colectiva.

El equipo 1 menciona: “cuando x=1 no sabemos cuánto vale”, porque para ellos imaginar este tipo de cosas es complicado, al igual como sucedió en la cuerda de Luisa. Ellos intentan explicar en sus palabras lo que creen, como por ejemplo no se explican cómo puede ser el límite 2. Los matemáticos usamos la palabra límite para referirnos exactamente a esta situación, para estos estudiantes notar que sí se puede decir que cuando te acercas a 1, el límite es 2 es confuso y difícil.

Si bien es verdad que no siempre es posible ver de esta manera el resultado, se pretende que los estudiantes quedaran convencidos de este resultado mediante estas situaciones, aquí se muestra la forma en la que ellos generan un conocimiento, para esto las preguntas, las intervenciones y las diferentes opiniones de sus compañeros son vitales para ayudarles en el proceso.

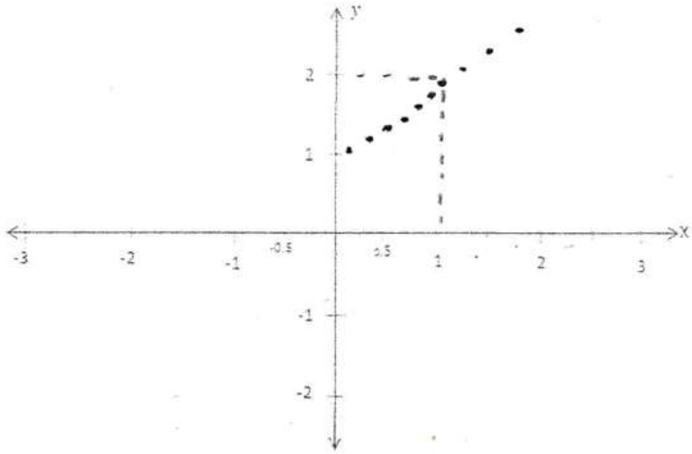
FIGURA 27: José Fernando dando su respuesta.

Podemos concluir que esta actividad llenó las perspectivas que se esperaban, la mayoría de los alumnos lograron notar gracias a la gráfica y a la tabla que aunque x no puede ser igual a uno, podemos acercarnos a uno tanto como queramos, y como resultado f(x) se aproxima cuanto queramos al valor de dos. Gratificantemente expresan que el límite de f(x) cuando x tiende a 1 es 2.

A diferencia de la discusión en el pequeño grupo, la discusión general en el ambiente de debate científico tuvo aspectos positivos desde la primera sesión. Por ejemplo, ellos empezaron a auto cuestionarse sobre sus concepciones, las cuales les permitió ofrecer respuestas claras a las preguntas planteadas en las actividades. Igualmente, cuestionaron las opiniones de sus compañeros y reflexionaron sobre lo que comentaban con los de su equipo, todo esto los llevo a cambiar sus respuestas en la parte individual, hasta el equipo 6 que en un principio expreso algo diferente a la gran mayoría.

Jose Luis Factor M.

5. Con ayuda de la tabla anterior representa los puntos dados en dicha tabla y esboza la gráfica de la función $f(x)$.



6. Al representar los puntos de la tabla podemos notar que la gráfica que resulta es una recta, ¿Qué sucede en el punto (1,2)?

Esta abajo con (1.0)

No hay punto (1.2)

7. Analizando tu gráfica, ¿Podrá acerarse X a 1 tanto como tú quieras?

Se acerca mas

8. Cuando más te acercas a 1, ¿A qué se va acercando $f(x)$?

se acerca al dos.

9. ¿Cuál es el límite de $f(x)$ Cuando x tiende a 1?
dos

10. Responde a las preguntas siguientes:
   - ¿Qué entiendes por infinito?

     Algo que no tiene fin.

   - ¿En tus propias palabras explica que es un límite?

     Es cuando llegas al fin y no puedes pasar de eso.

FIGURA 28: Hoja de José Luis con diferentes respuesta a la contestado en equipo.

6. Al representar los puntos de la tabla podemos notar que la gráfica que resulta es una recta, ¿Qué sucede en el punto (1,2)?

nos representa 0 la función por lo tanto se sale de la recta

7. Analizando tu gráfica, ¿Podrá acerarse X a 1 tanto como tú quieras?

Si mientras no llegue a 1

8. Cuando más te acercas a 1, ¿A qué se va acercando $f(x)$?

a 2

9. ¿Cuál es el límite de $f(x)$ Cuando x tiende a 1?

2

FIGURA 29: Respuesta de algo del equipo 6, dando una respuesta correcta

También se hicieron unas preguntas en su forma individual, para analizar cómo estas actividades influyeron en el concepto de límite. Podemos notar la dificultad de este concepto en sus respuestas, a su manera, ellos intentan dar una explicación de lo que esta palabra significa, a pesar de que sus respuestas exhiben ciertas limitaciones en el uso del lenguaje para expresar este concepto, es claro que contestan conforme a su experiencia.

A continuación se observan las respuestas de algunos alumnos, en ellas podemos notar lo anterior mencionado y afirmar que el límite es un concepto de mucha dificultad.

- ¿Qué entiendes por infinito?

Un numero ó valor que nunca se acaba o no tiene final.

- ¿En tus propias palabras explica que es un límite?

Es el final de algo

- ¿Qué entiendes por infinito?

un numero que aumenta o crecienta
pero no tiene un fin,

- ¿En tus propias palabras explica que es un limite?

es aquel num que no puede
ser rebasado no
puede ser mas que tal
numero

FIGURA 31: Respuesta de Milton.

- ¿Qué entiendes por infinito?

Un numero que es grande
e indefinido

- ¿En tus propias palabras explica que es un límite?

Un limite es asta donde
se debe llegar y no nos debemos
pasar de el

FIGURA 32: Respuesta de Alexis

- ¿Qué entiendes por infinito?

No tiene fin

- ¿En tus propias palabras explica que es un límite?

el punto asta donde puede llegar un numero
sin alcanzar al que llegara

Analizando las respuestas de estos estudiantes, podemos concluir, de acuerdo a lo expresado por ellos, la idea de límite como una aproximación, y a pesar que es un acercamiento informal a la definición y muchos podrían categorizarlo con un nivel bajo, es de mucha importancia, ya que es la idea intuitiva de aproximación, no errónea pero si imprecisa.

Una concepción que presentan los estudiantes, e identificada en las respuestas de las actividades y nuevamente la observamos en las discusiones, es que el límite es el valor al cual nos aproximamos. Es decir, el límite es el valor al que se acercan los términos de la sucesión, o como lo expresa Milton: "un límite es hasta donde se puede llegar, y no nos debemos pasar de él". Esta idea asocia al límite como un algo finito, haciendo presente la idea de finito arbitrariamente grande. Alexis por su parte menciona que es "el punto hasta dónde puede llegar un número sin alcanzar al que llegará", refiriéndose al hecho de aproximarse tanto como se quiera pero sin alcanzarlo.

Sí es bien sabido que cuando hablamos de estudiantes, la idea intuitiva en muchas ocasiones puede ser tan fuerte que la instrucción no logra estar por encima de ella, y sus ideas intuitivas los llevan, a veces, a una respuesta correcta, y en otras a una respuesta errónea, sin lograr construir el objeto matemático en cuestión. Lo que observamos es que al ser el concepto de límite un tema de mucha dificultad, presentarles a los estudiantes primero estas actividades para obtener una idea intuitiva y así más adelante reforzarlas con argumentos, criterios y teoremas, conlleva a que el estudiante obtenga una buena idea sobre este concepto.

CAPÍTULO V. Conclusiones

El objetivo de nuestra investigación fue proponer actividades que ayuden al estudiante a introducir o reforzar el concepto de límite mediante ciertos principios, sugeridos por el NCTM (2000) y por el *Balanced Assement Package for the Mathematics Curriculum* (1 y 2, 1999, 2000). Estas actividades son fáciles y al mismo tiempo, permiten que el alumno manipule objetos, active su capacidad mental, ejercite su creatividad, reflexione sobre su propio aprendizaje, se divierta, se prepare para otros problemas y muy importante, pueda adquirir confianza en sí mismo.

Las actividades que se presentaron a los estudiantes de segundo semestre mostraron lo que se pretendía en un principio, ayudar al estudiante a expresar lo que saben y construir un conocimiento que desconocen. Estas actividades ayudaron a los estudiantes a indagar en algo que desconocían, esto lo podemos ver en el equipo de Marco Antonio y Elizabeth, al dar respuesta a la última pregunta en la actividad La cuerda de Luisa. Otro claro ejemplo de lo que las actividades proyectan en los estudiantes es el caso de Maximino integrante del equipo uno, que hizo uso de las diferentes herramientas que se les proporcionó para responder una pregunta simple.

El hecho de que alumnos ajenos al grupo quisieran participar en la investigación nos hace suponer que desean experimentar cosas nuevas para deshacerse de lo rutinario. Como se pudo ver, las actividades también ayudan a alumnos de grado más avanzado, al final de las actividades, ellos se acercaban a preguntar con ansias, cuál era el límite, y se entusiasmaron al darse cuenta que estaban en lo correcto. La actividad “Comportamiento de funciones”, los ayudó a repasar un tema en el que se suponía ya tenían conocimiento, pero nos dimos cuenta de la dificultad que ellos presentaban respecto a este concepto. Es obvio que no siempre que se presenta un tema nuevo en el salón de clases a un estudiante significa, que lo haya entendido, se necesitan de herramientas didácticas para afianzar este conocimiento y no sólo de una simple exposición por parte del profesor.

Las actividades presentadas están diseñadas de tal manera que ayuden al estudiante a desarrollar la observación, la intuición, la creatividad y el razonamiento lógico, para así tener un amplio interés por el hacer matemático.

Por lo tanto concluimos que las características que deben de tener las actividades para ayudar al estudiante a descubrir lo que desconocen son:

- Deben despertar la curiosidad e interés del estudiante por el tema.
- Deben ser presentarlas de una manera sencilla y clara, de tal manera que ayude al estudiante en su reflexión, es decir, guiarlo de tal manera que se orienten a construir un conocimiento correcto.
- La idea matemática expresada en las actividades debe ser representada en formas diferentes y hacer uso de distintas herramientas como son: imágenes, materiales concretos, tablas, gráficos, números, letras y que al mismo tiempo involucren sus conocimientos previos.

Son muchos los procesos que intervienen cuando los alumnos se enfrentan al momento de resolver problemas matemáticos. Formulan cosas, ejercitan procedimientos, comparan y sobre todo construyen una definición. Esto se puede ver en alumnos de segundo semestre, donde hacen lo posible para llegar a construir y entender el concepto de límite, como lo vimos en el equipo de Marco. Se observó que al momento de tratar con situaciones donde interviene el infinito ellos piensan y toman estas situaciones de una manera lógica, esto lo podemos ver en los alumnos de sexto semestre donde se entabló una discusión sobre si los cortes hechos por Luisa se terminaban de hacer o llegaban a algo. También hacen uso de conocimientos previos.

Los estudiantes echan mano de las diferentes herramientas que se les proporcionan, al usar en los dos grupos las tablas, para entender los términos de la sucesión, o en el grupo de sexto semestre que usan las representaciones gráficas para entender mejor que sucedía en la actividad Comportamiento de funciones y construir un conocimiento correcto respecto al concepto de límite.

No podemos dejar de mencionar los obstáculos que se presentaron y que impedían al estudiante obtener un aprendizaje. En alumnos que no han recibido una instrucción específica sobre el tema muestran una carencia de conocimiento al momento de expresar sus ideas, a pesar de esto, las actividades los fomenta a indagar en algo que desconocen.

Una de los problemas a los que se enfrentaron los estudiantes, podríamos decir que fue visualizar o manejar asuntos algebraicos, y el hecho de que se les dificultaran algunas cosas, se debe a la falta de conocimiento del estudiante con referencia a un concepto matemático, ya sea porque no conoce una definición, o porque proporciona una respuesta incorrecta y eso los conduce a procesos erróneos. También podríamos mencionar que los estudiantes no están acostumbrados a este tipo de reflexiones. Es común que los profesores les presenten los temas de manera rápida y ligera, sin saber la problemática que esto conlleva.

El mayor obstáculo al que se enfrentaron los estudiantes al momento de tratar de obtener una idea del concepto de límite, fue comprender las dificultades que trae el aprendizaje sobre el concepto de infinito, ya que por lo normal no se les cuestiona o no están acostumbrado a este tipo de conceptos, así al no entender lo que es infinito, esto puede provocar en ellos un obstáculo cognitivo para construir el concepto de límite. Esto se puede ver claramente en las discusiones surgidas en los dos grupos, el hecho de pensar que algo nunca puede terminar o en su defecto, terminar y no saber a lo que se aproxima fue algo que les causó problemas. Sin embargo fue gratificante cómo los estudiantes notan la diferencia entre lo que es el límite y a lo que tiende la función, ya que fue común en las dos actividades que se confundieran en eso. En la conversación que entabla Sigifredo y Milton, sobre si el límite era infinito, con el transcurso de la actividad la mayoría concluye que el límite en realidad era dos, esto se puede ver en la figura 28, donde incluso todo el equipo que en un principio opinaba lo contrario cambió su respuesta.

Para que se logre conseguir el interés de los estudiantes a estas actividades, se necesitó, aparte del diseño de las actividades, fue la intervención de un moderador o profesor. Moderar las intervenciones es una de muchas maneras en la que un profesor interviene y no puede sólo hacerse a un lado. En la actividad la cuerda de Luisa, casi no hubo intervención, y esto no fue de mucha ayuda, ya que no se sacó a los estudiantes de sus ideas erróneas en un inicio, generando que las siguientes respuestas fueran erróneas y obstaculizando así el conocimiento correcto del alumno. Un ejemplo es cuando se les pidió a los estudiantes encontrar el último corte hecho por Luisa, ellos respondieron que era $\frac{1}{n}$, cuando en realidad el resultado correcto fue $\frac{1}{2^n}$. Para la segunda actividad hubo más intervención por nuestra parte, eso les ayudo en todos los aspectos necesarios al estudiante, teniendo cuidado de no dar las respuestas, así es como la segunda actividad fue más exitosa. Es obvio que la intervención y moderación del profesor es de mucha importancia para las actividades propuestas.

Mostrar al estudiante estas actividades de manera que muestren a las matemáticas, en un entorno que ellos sientan que les es familiar, presentándoles problemas en donde deben hacer uso de conocimientos previos, para no ocasionar confusión, esperando se interesen más por el hacer matemático y se den cuenta en general que muchos conceptos matemáticos se desarrollaron por la necesidad de resolver problemas cotidianos. Por ejemplo, el límite que conlleva entender lo que es derivada e integral y que estos se desarrollaron por la necesidad de conocer el movimiento de los planetas, e infinidades de cosas. Y sobre todo, que puedan despertar el interés en los estudiantes por el tema.

Ellos deben darse cuenta que las matemáticas pueden aplicarlas en sus vidas y facilitar la solución de muchos problemas cotidianos. Estas actividades no necesariamente son difíciles, pero tampoco debe ser tan sencillas como para que estudiantes piensen que no representa conocimiento nuevo. Ellos deben reconocer su importancia, y en caso de que se requiera, el profesor debe puntualizarla.

Las actividades lograron las metas que se esperaban, ayudaron a reforzar y aclarar el conocimiento que tenían sobre el concepto de límite de una manera diferente a las que se les fue presentada previamente.

Estamos convencidos de que los estudiantes se pueden entusiasmar por las matemáticas tanto como se entusiasman por los deportes o por la música. El truco está en que el profesor tenga la pasión por lo que hace, que crea que el estudiante también debe apasionarse de las matemáticas y de preparar sus clases para que eso ocurra, y sobre todo dejar de utilizar métodos anticuados e ineficientes, y que la mayoría de los estudiantes aborrece.

Anexo A: La cuerda de Luisa grupo 2º semestre

Equipo 3

Marco: ¡hay, es igual a la ranita en el estanque!

Elizabeth: ¿cuándo *x* crece más y más?

Agustín: Haber, ¿Cuándo *x* crece más y más a que tiende la suma? mmm… (Piensa un rato)

Marco: ¿Cuál *x*?

Elizabeth: Así dice, ¿Cuándo *x* crece más y más a que tiende la suma?

Marco: Haber (le pasan la hoja y piensa un rato), pues con *x*, mmm… yo creo que se está refiriendo a la cuerda o a… ¿importantes cortes?

Agustín: Pues *x* puede ser cualquier cosa.

Marco: Se confía en tu instinto (ríe), ¿A que tiende a ser la suma? ¿Que tiende a ser la suma?

Martha: ¿Quién es *x*?

Marco: La cuerda, ¿no?

Martha: Los cortes, mientras más cortes haces, ¿Qué pasa con los pedazos que pones en la mesa?

Agustín: Se van haciendo más.

Marco: Se hacen más chiquitos di (risas).

Agustín: Pues sí…..ya me hice bolas.

Marco señala con sus lapiceros en su libreta y dice:

Marco: Si vas poniendo los pedazos ¿Va creciendo de nuevo la cuerda?

Elizabeth: Se va juntando

Martha: ¿Que entienden por tender? , piensen.

Equipo 2

Luis: ¿Qué vamos hacer?

Josué: ¡contestar!

Luis: ¿Cuándo luisa hace el primer corte, con que porción de la cuerda se queda en su mano y que porción de curda pone en la mesa?

Juan: hazlo wey (dirigiéndose a Josué)

Luis: mmm… ¡esta fácil!

Josué: **¡**hay que hacerlo!

Juan: ¿Cuánto es pues…?

Luis usa la línea que está en la actividad y explica a sus compañeros, haciendo cortes con la uña en la línea.

Josué: contesta, la segunda también (risas)

Equipo 6

Emelin: Maestra, ¡no entiendo!

Martha: ¿Donde?

Emelin: En la expresión algebraica

Martha: ¿Qué no entiendes?

Emelin: ¿Cómo una expresión?

Martha: ¿Se acuerdan de la actividad anterior, los saltos de Yaya?

María: ¡Ha!, ¿el de la ranita?

Martha: ¿Se acuerdan que expresión era?

Emelin: ¡Ha! ya, pero… y acá, ¿cuál es?

Martha: Deben de buscarla ustedes, así como la de Yaya, ustedes van a encontrar otra, ya sabes que pueda expresar la suma. Ahora, por ejemplo sería algo así: yo quiero saber ¿cuantos panes me como cada hora?, si me como 2 panes por hora, en la primera hora me como 2 en la segunda, ¿Cuántos me cómo?

Emelin: ¿Cuatro?

Martha: Así es, si yo quisiera saber cuál es la expresión algebraica para eso sería 2x, así sabría a las 24 horas cuantos panes me como, ¿o no? Sabiendo esto, deben usar una analogía similar para la suma. Les voy a dar una pista, en la actividad dice que cada vez que corto, un pedazo me queda en la mano y otro en la mesa, pero estos, son los mismos ¿verdad?

Emelin: Si (asentando las demás con la cabeza)

Martha: Si a la cuerda le quito el primer pedazo, ¿Cuánto es lo que queda en la mesa?

Emelin: Pues la mitad.

Martha: ¡Claro la mitad!, y si a la cuerda le quitamos lo del segundo corte, otra vez lo mismo, si a la cuerda le quitamos el tercero y así. Cada vez que hacemos esto, lo que nos queda es la suma que tenemos en la mesa o ¿no?, haber inténtenlo y piénsenlo así.

Equipo 2

Luis junta los pedazos de cuerda en su butaca

Luis: ¿Cuántos son?

Josué: ¿Son ocho?

Josué voltea a ver a Marco y le dice

Josué: Wey, ¿cuál es el último? (risas)

Se intimidan por la cámara y dejan de hacer la actividad

Josué: No estamos haciendo nada muchacha (ríen)

El equipo 2 y 5 discuten sobre cuánto es en el corte 20

Efraín: ¿Cuánto es wey?

Luis: ¿te presto la calculadora?

Efraín: Mejor dime

Josué: pues sí, la calculadora no se maneja sola (ríen y le pasa la calculadora).

Equipo 5

Efraín: Oyes ¿puedes venir?, aquí dice: ¿Cuál es el último trozo de cuerda que…? ¿Cómo dice?¿cuál es el último trozo de cuerda que se le suma a la cantidad de cuerda que hay en la mesa?, Es que puedo hacer trocitos *asinita* por la mitad (mostrando un trozo de hilo).

Martha: ¿Cómo?

Efraín: Digo que puedo hacer muchos cortes hasta que se acabe el hilo y que ya no se vea nada, y este también lo puedo cortar (mostrando la otra mitad que estaba en su butaca, el más pequeño de todo los trozos) y, ¿ahí que?, pues nunca voy a saber.

Martha: ¿Entonces?

Daniel: Al último, nada más se va a garrar y se va a pasar el último corte y ya.

Martha: ¿Entonces tiene o no ultimo trozo?

Efraín: Si verdad, pues, así me la voy a llevar.

Martha: Tu qué crees, ¿qué piensas?

Efraín: Esta pelada eso.

Equipo 3 frente al grupo

Agustín: Llena la siguiente tabla sabiendo que…

Martha: Escuchen a su compañero, regresemos a la pregunta 4, ¿qué decías?

Agustín: Ya le gusto

Martha: Escuchen a su compañero por favor.

Agustín: Otra vez en la 4, ¿Cuál será el último trozo de cuerda que se le sume a la cantidad de cuerda que hay en la mesa?, nosotros le pusimos es incierto saberlo, por qué siempre se podrá cortar la cuerda, así sea muy chiquito el pedazo, pero también puede ser n, porque n es cualquier número, no se sabe cuál podría ser, bueno eso sacamos nosotros en conclusión.

David: Pero ya no se puede cortar con las tijeras

Marco: No importa, imagínatelo, es como el de la ranita, la ranita tampoco nunca pudo llegar al pinche estanque.

Anexo B: La cuerda de Luisa grupo 6º semestre

Equipo 4

Martha: ¿Si entendieron o no?

Milton: Yo ya hice mi parte

Martha: Pero si es en equipo

Alexis: ¿Y el lápiz?

Milton: ¿No tiene un lápiz que nos preste?

Equipo 1

Salvador: ¿Qué sucede si seguimos cortando la cuerda de esa manera?, ¿Se terminara de cortar la cuerda?

Salvador, cuando ve la cámara se tapa la cara

Martha: ¿Ustedes que creen?, pueden usar calculadora si ocupan he.

Miguel: Ya no se puede, porque ya la cuerda llega a un límite en el que ya no es suficientemente grande para cortar.

Aniria: Pues yo opino igual, pues ya hicimos los cortes y salen ocho.

Miguel: Es que la más pequeña será este (mostrado un trozo de cuerda), si seguimos cortando, ya no tendremos cuerda.

Martha: ¿Qué significa que ya no tendrás cuerda?

Salvador: Que su total se va haciendo más pequeño.

Martha: y, ¿Cuál es su total?

Miguel: Pues la cuerda o ¿uno?

Martha: Si su total se va haciendo pequeño mientras haces los cortes, ¿en qué momento voy a dejar de cortar?

Miguel: pues, ¡cuando ya no tenga cuerda!

Martha: Escriban lo que creen y si quieren ahorita contestan esa ustedes, para ver qué opinan los demás, ¡sale!

Equipo 6

Cesar: …queda en su mano y que porción de curda pone en la mesa? ½ queda en su mano y otro igual en la mesa.

Bruno: Y por lógica… 1/2 en la mesa

Cesar: ¿Qué porción de la cuerda pone en la mesa y que porción se queda en su mano en el segundo corte? ¿Cómo, se va a cortar todo junto? (refiriéndose a José).

Bruno: Pásame la cuerda

Cesar: ¿1/4?

Bruno: si ¼

José F: ¼ en la mano y ¼ en la mesa

Equipo 3

Luis: ¿Tenemos que contestar toda la tabla?

Martha: Si quieren, ya nada más contesten hasta la *n*

Pedro: ¿cuál?

Luis: ¡Este¡ (señalando el n de la tabla)

Martha: Vean la relación que hay

Luis: …mmm pues ese debe de ser $(1/2)^n$

Equipo 6

Bruno observa la tabla sin saber qué hacer, José le quita la hoja y empieza escribir

José F: …este

Martha: Sí y pueden sacar calculadora

Bruno: ¿Traes calculadora?

José F: Termina wey…

Bruno: ¡no! (y José continua escribiendo)

Equipo 4

Jorge: … en la mesa y con lo que quedaba es lo que dejábamos en la mesa

Martha: Ok haber la primera pregunta

Jorge: ¿la primera pregunta? ¿Cuándo luisa hace el primer corte, con que porción de la cuerda se queda en su mano y que porción de curda pone en la mesa?, Se queda con ½ y pone ½ en la mesa.

Martha: ¿Están de acuerdo con eso? ¿No?

Aniria: Sí

Martha: ¿Alguien tiene una respuesta distinta?, haber tus compañeros que opinan

Milton: Sí, en ambas partes queda la mitad

Martha: Ok, haber, la segunda

Jorge: En el segundo corte, ¿Qué porción de la cuerda pone en la mesa y que porción se queda en su mano … Se queda con ¼ y pone ½ y ¼ en la mesa.

Martha: Y en total, ¿Qué porción hay en la mesa? (Jorge ve a Milton)

Milton: seria 3/4

Martha: ¿3/4? ¿Por qué?

Milton: porque al principio partió la mitad, es la mitad, tenía la mitad que le quedo la partió y la dejo entonces son ¾, y la porción que quedo, ¡ha no! Sería la mitad de la mitad

Equipo 6

Martha: ¿Qué porción de cuerda hay en el corte número 6? Escríbanlo, ¿y sacaron alguna expresión? (ellos escriben 1/64)

Bruno discute con José sobre la expresión, le quita los paréntesis y deja 1/64, mientas José le indica escribir abajo.

José: $(1/2)^{32}$

Martha: ¿Por qué a la 32? (José se rasca la cabeza y piensa, le indica a cesar contestar)

Cesar: Es para sacar las veces que se está dividiendo la cuerda

Martha: Ose que en el sexto corte, si yo hago la operación de $(½)^{32}$ = 1/64 (José dice que no con la cabeza)

Bruno: ¿Cómo dijo?

Martha: (José quiere intervenir y me da la palabra), ¿Si yo hago con la calculadora $(½)^{32}$ me va a salir 1/64?

Bruno: ¡no porque! ¡noooo!

Martha: ¿Por qué?

Bruno: Es dependiendo también, como por ejemplo aquí es 1 a la 6 y va subiendo

José F: **¡**por eso es lo que está diciendo! Y ríe

Martha: ¿entonces que debería de ser, para que me salga 1/64?

Bruno: (ríe) Si pues a lo que dice usted…

Martha: En el sexto corte si es 1/64

Bruno: **¡**Ahí está!

Martha: ¿Pero por qué?, piensen esto, o miremos en la tabla, el equipo que acaba de pasar dijo que esto era lo mismo (escribiendo $(½)^{n}$ = 1/n, ¿ustedes también creen lo mismo?

Bruno: Pues sí

Martha: ¿Alguien saco algo diferente?

Milton: $(1/2)^6$

Martha: ¡exacto!, ahí está la clave, si hacemos $(½)^6 = 1/64$, y algo así tiene que salir para la *n*, asea que me dé lo mismo.

Equipo 6

José F: En cuanto a que si se terminara de cortar la cuerda, concluimos que no.

Martha: Y ¿porque no?

José F: Pues… aunque ahí en el hilo pareciera que se llega a un fin, pero eso simplemente por el tamaño o por lo corto, porque pues… si lo viéramos al trocito de hilo con una lupa se vería más grande y ahí podría seguir haciendo divisiones y así sucesivamente, siempre se está cortando. Pero no porque no se vea más no quiere decir que ya no se puede, en realidad sí se puede, este… la idea que manejamos más bien, es que se puede acercar a tener toda la cuerda, pero nunca se va a completar.

Martha: ¿Alguien tiene una idea diferente?

Voces: no, no

Martha: ¿Todos piensan igual?, su compañero dice que la cuerda nunca va a estar completa en la mesa, porque siempre nos quedara algo en la mano, aun sea muy, muy pequeño ¿verdad? mmm, haber ustedes que opinan (refiriéndome al equipo 4)

Martha: ¿En algún momento ya no tendré cuerda en mi mano, y estará completa en la mesa?

Milton: Sí

Martha: ¿Por qué?

Milton: Finalmente estamos sumando los pedacitos y se van a convertir en la cuerda.

Algunos alumnos dicen que sí

Martha: ¿Alguien opina algo diferente?

José F: Yo creo que no, porque siempre va a ver un pedazo más, cuando se hacen muchos cortes y más cortes y más corte.

Martha: ¿Entonces? ¿A qué se refiere la pregunta?

Alumnos: Que si la cuerda se termina de cortar.

José F: Es que... siempre es posible cortar un pedazo, siempre, siempre, siempre, sí es posible cortar otro pedazo, a la hora de sumarlo todos a lo mejor nunca encontremos que la suma da la cuerda.

Martha: Ok, aquí hay dos respuestas, el equipo 4 dice que nunca va a estar completa en la mesa, mientras que el equipo 6 dice que tiene que llegar el momento en que se tiene que terminar de cortar. ¿Y los demás?

Voces: Si les creemos

Martha: Pero, ¿a quién le creen? Continuemos…

Anexo C: Comportamiento de funciones

Equipo 5, resolviendo la actividad en equipo

Sigifredo: ¿Qué sigue?

Nemesio: Uno

Sigifredo: ¿Qué da?

Nemesio: Da cero

Sigifredo: Esta mal

Nemesio: Por eso, vez algo está mal, da lo mismo

Sigifredo: Haber díctamelo

Nemesio: *x*, gorrito – 1 entre **x** – 1

Sigifredo: Que pendejo, no da… no ya no jala, la golpeaste wey

Risas, esto porque la calculadora marcaba error, cuando metía la función

Nemesio: ¿Cuánto es la última?

Sigifredo: ¿en dos?, es tres

Equipo 2

Martha: Recuerden que no pueden borrar, si se equivocan, pueden hacerlo atrás de la hoja que les di, agregarle otra hoja, si se equivocan solo enciérrenlo y táchenlo, pero no lo rallen, por favor; marquen con una cruz, escriban atrás a un lado y si pueden usar lapicero, usen lapicero.

Alexis: A uno por la izquierda, aquí esta uno. Aumenta.

Pedro: A dos, no wey.

Alexis: Simon wey (pero escribiendo aumenta e esa pregunta).Si damos valores próximos a 1 por la derecha ¿Qué sucede con…?

Pedro: ¿por la derecha?

Voz: Esta confuso

Alexis: ¡ha¡ aquí es dos. Si damos valores próximos a 1 por la derecha ¿Qué sucede con f x? a -1(ríe).

Pedro interviene y explica

Alexis: ¿pero, que valores son?

Pedro: ¡estos pues! (apuntando con el dedo)

Alexis: Aquí esta uno y este es f(x) y aquí esta *x*… reprobado. ¿Cuándo x tiende a 1 por la izquierda? No se madres

Pedro: A dos

Equipo 2

Martha: Fíjate, ¿aquí a que te vas acercando? (apuntando la tabla)

Alexis: ¿A uno?

Pedro: ¿A dos?

Martha: ¿A uno o a dos?

Pedro: A dos

Alexis: A dos pero…

Martha: Ahora mira aquí, (apuntando la tabla) ¿a qué te vas acercando?

Alexis: A uno (pedro se ríe, y pega en la cabeza)

Martha: ¿Puede ser uno?, miremos la tabla y vemos que…

Pedro: Entonces aquí sería un dos

Martha: ¿por la izquierda a que se acerca y por la derecha?

Pedro: ¡Ha ya! (preparándose para borrar)

Martha: ¡No lo borres!

Alexis: Ni borrador traemos na, na…

Equipo 5

Nemesio: Mientras más te acercas a 1 por la izquierda ¿qué sucede con f(x)?. Esta es la izquierda verdad (apuntando el lado izquierdo de la tabla), pues depende. ¿A partir del uno?

Sigifredo: Depende como veas

Nemesio: Aumenta su valor

Equipo 3

Manuel: ¿Qué sucede?, pues va bajando, o que pasa con ese punto

Andrés: Pues yo lo dibuje

El equipo 6

Yosban: Ya wey, dibújalas como sea

Aldo: No, yo la quiero dibujar bonita

Aldo escribe en el pizarrón y Ricardo le dicta los números

Yosban: Ya wey como sea

Ricardo: Si wey

Aniria: Si, les falta uno

Ricardo: Bórralo

Martha: Así está bien, así déjalo

Aldo: ¿verdad que está bien?, si se entiende. Pero ya lo voy a escribir bien (borra una parte de la tabla, y sus compañeros se ríen)

Martha: Lee la pregunta

Ricardo: Mientras más te acercas a 1 por la izquierda, ¿Que sucede con f x?

Martha: Se dice f de x. f(x) es la función que está arriba.

Ricardo: Pues… se va aumentando

Martha: Se va aumentando, ¿a qué se va aumentando?

Ricardo pregunta a sus compañeros

Martha: Escucharon a sus compañeros, ¿a qué se va acercando?

Ricardo: Al número dos

Nemesio: A dos

Martha: Según sus compañeros f(x) se va acercando a dos, ¿si le salió eso a ustedes? (refiriéndome a José del equipo 5), ¿estuvo fácil verdad?, Bien hecho se pueden sentar. Haber pasen ustedes (refiriéndome al equipo 4)

Equipo 4 ante el grupo

Martha: No borren la gráfica, perdón la tabla

Se ponen de acuerdo en quien respondería la pregunta y comparan su tabla con la que está en el pizarrón.

Milton: Si damos valores próximos a 1 por la derecha, ¿a qué valor se acerca $f(x)$? ¿Sería empezando de aquí no? (apuntando del uno hacia la derecha).

Martha: ¡si damos valores próximos por la derecha! ¿De dónde?

Milton: Sí, ¿no? Sería de aquí hacia acá, ¿no? (apuntando de derecha a izquierda)

Martha: De aquí (apuntando el dos), si vez que nos dice próximos como 2, 1.5, 1.2 y así, ¿a qué se va acercando?

Milton: Pues a dos

Martha: Claro a dos, ¿alguien opina lo contrario?

Pedro: Si se va acercando al dos

Todos: Sí, a dos

Sigifredo: Al cero

Martha: Haber ¿quién dice que al cero?

Sigifredo: Pues ¿Qué pasa con el uno?

Martha: ¿tú que crees?

Sigifredo: Pues da cero

Martha: Vimos lo que sucede cuando nos acercamos a la por la derecha y por la izquierda, según tu intuición, ¿Qué sucede cuando nos acercamos a uno?, (apuntando la tabla y haciendo movimientos de izquierda a derecha).

Sigifredo: Sí, es lógico que se acerque a dos, se ve en la tabla pero…mmm, pues ¿qué pasa con la función? , no entiendo.

Martha: Ok, siéntense. Es lo que vamos a ver, que pasa, haber, pasen (refiriéndome al equipo 5)

Equipo 5

Todos: Rápido, ya pasen.

Sigifredo: ¿Ya?

Martha: La cuatro por favor

Sigifredo: (piensa un rato) mmm, si se aproxima al mismo valor.

Martha: Lee la pregunta

Sigifredo: Cuando x tiende a 1 por la izquierda y derecha, ¿la función $f(x)$ se aproxima al mismo valor?, si se aproxima

Martha: ¿si se aproxima? ¿Porque?

Sigifredo: Asienta con la cabeza y dice: es que si se aproxima, vimos la tabla y si se aproxima, si lo hace.

Martha: ¿escucharon a su compañero?, él dice, que si nos aproximamos por aquí (apuntando de derecha a izquierda) y por acá (apuntando de izquierda a derecha), nos aproximamos al mismo valor.

Milton: ¿Entonces su límite es infinito?

Martha: ¿Por qué infinito?

Milton: Damos y damos valores, como por ejemplo podemos dar 0.99999999 y así muchos, mucho hasta no terminar, entonces su límite es infinito.

José: ¿tú no te quedas callado verdad?

Martha: No podemos saber cuánto es el valor de la función cuando sustituimos el 1, ya que es indeterminado, sí pero podemos acercarnos tanto como queramos. Como dices tú 0.999999, hasta el infinito, claro que sí. Claro que las x pueden ser infinitos números, si pusiéramos aquí 1.0000001, ¿Cuánto seria $f(x)$?

Todos: 2.0000001

Martha: Pero no es lo mismo x y $f(x)$¿a qué se aproxima $f(x)$? (mirando a todos) ¿a qué se aproxima?

Milton: A dos

Todos: A dos

Martha: ¿Ven la diferencia?... es raro verdad, porque si lo vemos aquí en la tabla, es fácil ver que se va acercando a dos, pero si lo hacemos con la calculadora, da cero. Pero sigamos y veremos qué pasa. Haber ustedes

Equipo 2

Pedro dibuja la gráfica

Martha: Sólo anota los puntos, no es necesario que le pongas los números

Pedro: Como ya vimos en la tabla, cuando sustituimos 1 en la función nos dice que da cero, entonces creemos que el punto no se encuentra en la recta, se encuentra acá abajo , porque da cero, esto nos dice que en la gráfica se debe de salir ese punto. No sabemos cuánto vale…

Martha: Escucharon a su compañero, él dice q aquí en la recta el punto se sale, y que debe de haber un hueco, en realidad no se puede decir cuánto vale en x=1, pero si podemos ver a lo que se aproxima, ¿A qué se aproxima?

Salvador: Otra vez a dos

Martha: Pueden sentarse, el equipo siguiente por favor…

Equipo 3

Martha: Con la siguiente pregunta por favor

Manuel: ¿Qué pregunta va? ¿La 7?, la 7 dice: analizando tu gráfica, ¿podrá acercarse x a 1 tanto como tú quieras?, Nosotros respondimos que sí

Martha: Que sí, ¿alguien dice que no?

Voz: No

Martha: ¿por qué no y por qué si?, ¿ustedes dicen que si? (refiriéndome al equipo), ¿Por qué sí? (ríen), es fácil, vimos la tabla, la gráfica, sabemos cómo dijo su compañero que no está definida en el punto (1,2), ¿pero me puedo acercar tanto como yo quiera?

Pedro: Pues sí, mientras no de uno

Martha: ¡exacto!, pues en la tabla lo vimos, cuando hacíamos 1.00000000001 y podemos dar más.

Equipo 1

Martha: La 8 y la 9

José F: Cuando más te acercas a 1, ¿A qué valor se acerca f x?

Martha: f(x)

José F: A f(x)… cada vez se acerca más

Martha: ¿A qué?

José F: a 1, a f(x) o a un puuunto…

Martha: ¿Pero qué punto es ese?

Gerardo: (Le quita la hoja) haber

Martha: Haber otra vez…, en la gráfica y en la tabla, cada vez que damos un valor a x, ¿f(x) se va acercando aaa.. ? (Apuntando la tabla y la gráfica)

José F: mmm…a dos

Martha: entonces, ¿qué pasa con f(x)?

José F: se va acercando a dos (José asienta con la cabeza)

Martha: ¿Si ven? Ahora la ultima

José F: Seria cero, porque da… no se sabe su valor

Martha: dice: ¿Cuál es el límite de f(x) cuando x tiende a 1?, tender es como acercarse, entonces ¿cuándo x se acerca a uno cual es el límite, hasta dónde puede llegar?

Gerardo: Tiende a dos, es dos ¿no?

Martha: Su compañero dice que dos

Sigifredo: Infinito y ríe

Martha: ¿qué dijiste?

Sigifredo: no, nada

Martha: Dime, no hay problema si te equivocas, aquí se vale equivocar

Sigifredo dice algo y todos se ríen

Martha: ok, bien hecho se pueden sentar

Voz: ¿Cuál era el límite?

Nemesio: Infinito

Martha: ¿infinito?

Nemesio: Él dice

Martha: Podemos acercarnos infinitamente al límite, pero el a que nos acercamos…

Nemesio: Haaaa ya, ¡qué fácil!

Milton: ¿Si ven?

Referencias

Arcos, Q. J. I. (2008). *Cálculo infinitesimal para estudiantes de ingeniería*, Toluca, Estado de México: Editorial Kali.

Arcos, Q. J. I., Sepúlveda, L. A. (2014). *Desarrollo Conceptual del Cálculo*, Toluca, Estado de México: Editorial Kali.

Azcárate, G. C., Deulofeu, P. J. (1996). *Funciones y gráficas*, Madrid, España: Editorial Síntesis.

Balacheff, N., Gaudin, N. (2009, en prensa). "Modeling student's conceptions (the case of functions)". In Hitt F., Holton D. y Thompson P. (Eds), Research in Collegiate in Mathematics Education, Volume VII. USA.

Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum. *High School Assessment Package 1.* (1999). White Plains, N. Y.: Dale Seymours Publications.

Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum. *High School Assessment Package 2.* (2000). White Plains, N. Y.: Dale Seymours Publications.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). *Los sistemas de representación en la enseñanza del límite*, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, número 3, pp. 219-236.

Castro, E. & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Barcelona: Horsori-ICE Universitat de Barcelona, 95-124.

Cornu, B. (1994). Limits. En: Tall, D. (Eds.) *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publichers.

Doerr, H. M., English, L. D. (2003) "A Modeling Perspective on Students' Mathematical Reasoning About Data. En E. A. Silver (Ed.) *Journal for Research in Mathematics Education* 2, pp 110-136. Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Hagelgans, N. L., Reyolds, B. E., Schwingendorf, K., Vidakovic, D., Dubinsky, E., Shahin, M., Wimbish Jr. G. J. (Eds.). (1995). *A Practical Guide to Cooperative Learning in Collegiate Mathematics*. Mathematical Association of America. NW, Washington, DC. MAA Notes Number 37.

Janvier, C., Girardon, C. & Morand, J. (1993): Mathematical Symbols and Representations. En P. Wilson (edt.), *Research ideas for the classroom.* Reston VA: N.C.T.M.

Lesh, R., Kelly, A. (2000). Multitiered Teaching Experiments. En A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Desing in Mathematics and Science Education* (pp. 197-230). Mahwa, NJ: Laurence Erlbaum Associates, Inc. Publishers.

Lester, F. K., Kehle, P. (2003). From problem solving to modelling: An evolution in thinking. En R. Lesh y H. Doerr (Eds.) *Beyond Constructivism. Models and Modeling Prespectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 501-517). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Mason, J., Burton, L., Stacey, K. (1987). *Thinking Mathematically*. New York.: Adison Wesley.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards in School Mathematics*. Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Santos, M. (1997a). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Santos, M. (1997b). La formulación de problemas para una instrucción y evaluación matemática balanceada. En G. Waldegg y D. Block (Eds.), *Estudios en Didáctica*. Consejo Mexicano de Investigación Educativa. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouwns (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan Publishing Co.

Sepúlveda, A., Santos T.M. (2006). "Desarrollo de episodios de comprensión matemática que exhiben estudiantes de bachillerato en procesos de resolución de problemas". En *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, número 31, pp. 1389-1422, Octubre-Diciembre de 2006.

Sierpinska, A. (1990): «Some remarks on understanding in mathematics». For the Learning of Mathematics, vol. 10.3, 24-36.

Stewart, I. (1998). Cambio. En: Steen, L. (Eds.) *La enseñanza agradable de las matemáticas*, (pp. 193- 227). México: Limusa.

Tall, D. (2010). *A sensible approach to the Calculus*. University of Warwick. United Kingdom, de la www.warick.ac.uk/staff/David.Tall

Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad. *Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México. Trillas.