Universidad Nacional Autónoma de México
y
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Instituto de Física y Matemática

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

El Anillo de Burnside de un Sistema de Fusión Saturado

TESIS

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Elias Javier Garcia Claro

Director: Doctor en Matemáticas Alberto Gerardo Raggi Cárdenas

Morelia, Michoacán - mayo de 2014.

Resumen

Dado un sistema de fusión saturado $\mathcal{F}$ sobre un p-grupo finito S, definimos el anillo $A(\mathcal{F})$ que modela al anillo de Burnside $A(G)$ de un grupo finito. Se muestra que estos anillos tienen muchas propiedades comunes. Cuando $\mathcal{F}$ es el sistema de fusión de un grupo finito G describimos la relación entre estos anillos.

Palabras clave: Sistema de fusión; grupo finito p-local; categoría de órbitas; anillo de Burnside

Abstract

Given a saturated fusion system $\mathcal{F}$ on a finite p-group S we define a ring $A(\mathcal{F})$ modeled on the Burnside ring $A(G)$ of a finite group. We show that these rings have several properties in common. When $\mathcal{F}$ is the fusion system of a finite group G we describe the relationship between these rings.

Keywords: Fusion system; p-local finite group; Orbit category; Burnside ring.

Índice general

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi Dios por tener la bendición de estudiar en este excelente posgrado. Estoy muy agradecido con mi maestro y amigo, el profesor Gerardo Raggi, por todas las enseñanzas que me dejó en estos años, y por su apoyo en la realización de esta tesis.

Agradezco a mi mamá que no ha dejado de alentarme en todo momento desde que llegué a México, y a todos los maestros que estuvieron parcial o totalmente relacionados con mi aprendizaje.

Espero contribuir pronto a esta bella ciencia que es la Matemática y ser facilitador para que otros se acerquen a ella.

INTRODUCCIÓN

Dada la importancia de los Sistemas de Fusión por sus múltiples aplicaciones a Teoría de Representaciones Modulares, Topología Algebraica,y Teoría de Grupos finitos, su estudio se ha venido haciendo cada vez más popular en los últimos años.

Es difícil saber con exactitud el origen de esta teoría, sin embargo, se podría argumentar que se remonta a trabajos de Burnside y Frobenius, con argumentos acerca de la fusión de p-elementos de grupos finitos. Otro punto de vista es que comenzaron con el Teorema de Fusión de Alperin para grupos finitos.

Un trabajo no publicado por L. Puig durante los 90's (del cual una parte se encuentra en [10]) junto con el trabajo de Alperin-Broué (ver [2]) son la base para construir un Sistema de Fusión de un p-bloque asociado a un grupo finito. Con el trabajo de Puig se iniciaron los fundamentos axiomáticos y algunas nociones fundamentales de esta teoría.

Puig creó la Teoría de Categorías de Frobenius (así llamaba Puig a los Sistemas de Fusión) como una herramienta en teoría de representaciones modulares, motivado en parte por el trabajo de Alperin y Broué. Luego, investigadores en Teoría de Homotopía usaron esta teoría para dar formalidad y probar un resultado en la Teoría de los Espacios Clasificantes p-completados de grupos finitos. Como parte de ese proceso, objetos llamados grupos finitos p-locales asociados a Sistemas de Fusión abstractos fueron introducidos por Broto, Levi y Oliver en [4]. Estos también son de interés en los Espacios Clasificantes p-completados. Finalmente, teóricos de Teoría local de Grupos finitos se interesaron en Sistemas de Fusión, en parte porque los métodos de teoría local de grupos resultaron ser de mucha utilidad en el estudio de los Sistemas de Fusión, pero también porque ciertos resultados en teoría de grupos finitos parecen ser más fáciles de probar en la categoría de los sistemas de Fusión.

Por todo lo antes mencionado, consideramos positivo abordar el desarrollo de la teoría de Sistemas de Fusión, y es así que en este trabajo calculamos el anillo de Burnside asociado a un Sistema de Fusión.

Dado un grupo finito G. La categoría de los G-conjuntos finitos es cerrada baja la formación de uniones disjuntas $X \sqcup Y$ y productos $X \times Y$. El conjunto de las clases de isomorfismo forma un monoide conmutativo bajo la operación $\sqcup$. Su grupo de Grothendieck asociado, denotado por $B(G)$, resulta ser un anillo ya que el producto de G-conjuntos es asociativo y se distribuye con respecto a la unión disjunta. A $B(G)$ se le llama el anillo de Burnside de G (ver [5]).

Hay una forma de contruir el anillo de Burnside asociado a una categoría finia, y viene dada como sigue: Sea $\mathcal{C}$ una categoría finita (finitos morfismos y finitos objetos). La categoria $Fun^{o}(\mathcal{C}, set)$ de los funtores contravariantes de $\mathcal{C}$ en la categoría de conjuntos finitos es cerrada bajo la formación de uniones disjuntas $X \sqcup Y$ y productos $X \times Y$. El conjunto de las clases de isomorfismo forma un monoide conmutativo bajo la operación $\sqcup$. Su grupo de Grothendieck asociado, denotado por $B(\mathcal{C})$, resulta ser un anillo ya que el producto de estos funtores es asociativo y se distribuye con respecto a la unión disjunta. A $B(\mathcal{C})$ se le llama el anillo de Burnside de $\mathcal{C}$.

Si consideramos el grupo finito G, y $\cdot_G$ es G visto como una categoría, entonces $B(G)$ y $B(\cdot_G)$ son anillos isomorfos (ver Apéndice A).

Un Sistema de Fusión $\mathcal{F}$ sobre un p-grupo (p un número primo) finito S es una categoría finita cuyos objetos son los subgrupos de S (ver def. Sistema de Fusión). Ya que tenemos una categoría finita podríamos intentar estudiar su anillo de Burnside asociado, pero como no conocemos los generadores, esto es un asunto tal vez imposible, pues para cuestiones de cálculos se necesitarían cuentas explícitas en las que intervengan los generadores como grupo abeliano de nuestro anillo. Sin embargo en $B(\mathcal{F})$ conocemos a los funtores representables de la forma $(\ \ , A)$ con $A \in \mathcal{F}$, y en un principio podríamos tratar de determinar si el generado de este conjunto como grupo abeliano también es cerrado bajo la multiplicación de $B(\mathcal{F})$, o al menos bajo que condiciones tenemos que sea cerrado. Es aquí donde interviene el teorema 3.4, relacionado con el sistema de órbitas (ver definición de Sistema de Órbitas). Se prueba que para cierto sistema de fusión asociado a nuestro sistema de fusión inicial $\mathcal{F}$, el generado como grupo abeliano de los funtores representables contravariantes forma un subanillo (sin uno), denotado por $A(\mathcal{F})$, del anillo de Burnside de dicho Sistema de Fusión.

$A(\mathcal{F})$ está inmerso en su anillo fantasma (el generado como grupo abeliano libre por los mismos generadores de $A(\mathcal{F})$). Y al tenzorizar tanto a $A(\mathcal{F})$ como a su anillo fantasma por $\mathbb{Q}$ estos dos son iguales. Por lo que se calcula una fórmula que describe los idempotentes del anillo fantasma de $A(\mathcal{F})$ en términos de los generadores.

Otro resultado importante resulta de localizar $A(\mathcal{F})$ en p, ya que este localizado es un anillo con uno (el mismo uno que el del localizado de su anillo fantasma). Una vez se ha hecho esto, se calcula el espectro primo de $A(\mathcal{F})$.

Finalmente se estudia la relación que tiene el anillo $A(\mathcal{F})$ con el anillo de Burnside clásico de un grupo finito, para el caso en el que nuestro Sistema de fusión $\mathcal{F}$ es el Sistema de Fusión $\mathcal{F}_S(G)$ (ver definición de $\mathcal{F}_S(G)$).

Capítulo 1

Sistemas de Fusión Saturados

Definición 1 (Sistema de Fusión). Un sistema de fusión sobre un p-grupo S es una categoría $\mathcal{F}$, donde $Ob(\mathcal{F})$ es la colección de todos los subgrupos de S, y los morfismos satisfacen los siguientes axiomas para todos $P, Q \leq S$:

1. $Hom_S(P, Q) \subseteq Hom_{\mathcal{F}}(P, Q) \subseteq Inj(P, Q)$
2. Todo $\varphi \in Hom_{\mathcal{F}}(P, Q)$ es la composición de un $\mathcal{F}$-isomorfismo seguido de una inclusión.

En 1., $inj(P, Q)$ denota el conjunto de los morfismos de grupos que son injectivos, y $Hom_S(P, Q)$ denota los morfismos de grupos que provienen de conjugaciones por elementos de S.

Un ejemplo clásico de sistema de fusión es el siguiente

Ejemplo 1. Sea G un grupo finito, y $S \in Syl_p(G)$ con p un número primo. Denotamos por $\mathcal{F}_S(G)$ al sistema de fusión cuyos objetos son los subgrupos de S y que consta de los morfismos provenientes de conjugaciones por elementos de G, es decir, para todos $P, Q \leq S$

$$Hom_{\mathcal{F}_S(G)}(P, Q) := \{f \in Hom(P, Q) / f = c_g \, con \, g \in G\}$$

Para facilitar notación, en adelante denotaremos $Hom_G(P, Q)$ en vez de $Hom_{\mathcal{F}_S(G)}(P, Q)$.

$\mathcal{F}_S(G)$ es un sistema de fusión pues para todos $P, Q \leq S$

1. $Hom_S(P, Q) \subseteq Hom_G(P, Q) \subseteq Inj(P, Q)$
2. Si $c_g \in Hom_G(P, Q)$, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "c_g"] \arrow[dr, "c_g"'] & & Q \\ & c_g(P) \arrow[ur, hook, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Además le existencia de $c_{g^{-1}}$ nos garantiza que c_g es un isomorfismo en categoría $\mathcal{F}_S(G)$.

En adelante cuando se hable de un sistema de fusión $\mathcal{F}$ sobre S, se supondrá que S es un p-grupo finito.

De la definición de sistema de fusión se sigue que

$$Aut_S(P) := Hom_S(P,P) \subseteq Aut_{\mathcal{F}}(P) := Hom_{\mathcal{F}}(P,P) \subseteq Inj(P,P) = Aut(P)$$

Definición 2 (Sistema de fusión saturado). Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p-grupo S

• Dos subgrupos $P, Q \leq S$ son $\mathcal{F}$-conjugados si son isomorfos como objetos de la categoría $\mathcal{F}$. Sea $P^{\mathcal{F}}$ el conjunto de todos los subgrupos de S que son $\mathcal{F}$-conjugados a P.

• Un subgrupo $P \leq S$ se dice totalmente automatizado si $Aut_S(P) \in Syl_p(Aut_{\mathcal{F}}(P))$

• $Q \leq S$ es receptivo si para todo $\varphi : P \longrightarrow Q$ que es $\mathcal{F}$ - isomorfismo, existe $\overline{\varphi} \in \mathcal{F}$ tal que $\overline{\varphi} : N_{\varphi} \longrightarrow S$ y $\overline{\varphi}\mid_P = \varphi$, donde $N_{\varphi} = \{x \in N_S(P)/\varphi c_x \varphi^{-1} \in Aut_S(Q)\}$. Asi tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi"] & N_{\varphi} \arrow[ddl, "\overline{\varphi}"] \\ Q \arrow[d, hook] & \\ S & \end{tikzcd}$$

• $Q \leq S$ es totalmente centralizado si $\forall P \in Q^{\mathcal{F}}$, $|C_S(Q)| \geq |C_S(P)|$

• $Q \leq S$ es totalmente normalizado si $\forall P \in Q^{\mathcal{F}}$, $|N_S(Q)| \geq |N_S(P)|$

• Si $\mathcal{F}$ es sistema de fusión sobre S, se dice que $\mathcal{F}$ es saturado si todo objeto es conjugado a otro totalmente automatizado y receptivo.

Ejemplo 2. El sistema de fusión $\mathcal{F}_S(G)$ es saturado. Para ver esto serán necesarios los siguientes resultados.

Lema 1. *Sea G grupo finito*

1. *Sean $c_g, c_h \in Int(G)$ y $Q \leq G$. Si $c_g = c_h$ en Q, entonces existe un $u \in C_G(Q)$ tal que $g = hu$*
2. *Sean $H, K \leq G$. Si $c_x \in Int(H)$ y $\varphi : H \longrightarrow K$ es isomorfismo de grupos, entonces $\varphi c_x \varphi^{-1} = c_{\varphi(x)}$ en K*
3. *Sea $Q \leq G$. $Aut_G \cong N_G(Q)/C_G(Q)$*

DEMOSTRACIÓN.

1. Sea $q \in Q$, luego $c_g(q) = gqg^{-1} = hqh^{-1}$ por lo que $h^{-1}gqg^{-1}h = q$, es decir, $u = h^{-1}g \in C_G(Q)$, y $g = hu$.
2. Seq $k \in K$, luego

$$\begin{aligned} \varphi c_x \varphi^{-1}(k) &= \varphi(x\varphi^{-1}(k)x^{-1}) \\ &= \varphi(x)k\varphi(x)^{-1} \\ &= c_{\varphi(x)}(k) \end{aligned}$$

3. Consideremos el morfismo sobreyectivo $N_G(Q) \xrightarrow{f} Aut_G(Q)$ dado por $g \mapsto c_g$. Se tiene que $Ker f = C_G(G)$, por lo tanto $Aut_G \cong N_G(Q)/C_G(Q)$.

❑

TEOREMA 1.1. *Sea G grupo finito, $S \in Syl_p(G)$*

1. *Si $P \leq S$, existe $Q \leq S$ tal que $Q =_G P$ y $N_S(Q) \in Syl_p(N_G(Q))$.*
2. *Si $Q \leq S$ es tal que $N_S(Q) \in Syl_p(N_G(Q))$, entonces $C_S(Q) \in Syl_p(C_G(Q))$ y $Aut_S(Q) \in Sly_p(Aut_S(Q))$.*
3. *Si $P, Q \leq S$ tales que ${}^gP = Q$ y $N_S(Q) \in Syl_p(N_G(Q))$. Se tiene que $N := \{x \in N_S(P)/{}^gx \in N_S(Q)C_G(Q)\} = \{x \in N_S(P)/c_{{}^gx} \in Aut_S(Q)\}$, además para dicho N existe $h \in C_G(Q)$ tal que ${}^{hg}N \leq S$.*

DEMOSTRACIÓN.

1. *Sea $T \leq G$ tal que $P \leq T \leq N_G(P)$, y $T \in Syl_p(N_G(P))$, como T es p-grupo de G, existe un $g \in G$ tal que ${}^gT \leq S$ además $P \trianglelefteq T$, pues $T \leq N_G(P)$; así ${}^gT \leq^g N_G(P) = N_G({}^gP) = N_G(Q)$, por lo que ${}^gT \leq N_G(Q) \cap S = N_S(Q) \leq N_G(Q)$, y como*
$$p \nmid \left|\frac{N_G(P)}{T}\right| = \left|\frac{{}^gN_G(P)}{{}^gT}\right| = \left|\frac{N_G(Q)}{{}^gT}\right|$$
${}^gT \in Syl_p(N_G(Q))$ por lo que ${}^gT = N_S(Q)$ y $N_S(Q) \in Syl_p(N_G(Q))$
2.

$$\begin{aligned} \left|\frac{Aut_G(Q)}{Aut_S(Q)}\right| &= \left|\frac{\frac{N_G(Q)}{C_G(Q)}}{\frac{N_S(Q)}{C_S(Q)}}\right| \\ &= \left|\frac{\frac{N_G(Q)}{N_S(Q)}}{\frac{C_G(Q)}{C_S(Q)}}\right| \end{aligned}$$

Además por hipótesis $p \nmid \left|\frac{N_G(Q)}{N_S(Q)}\right| = \left|\frac{Aut_G(Q)}{Aut_S(Q)}\right|\left|\frac{C_G(Q)}{C_S(Q)}\right|$, *por lo que p no divide ningún factor, y así* $C_S(Q) \in Syl_p(C_G(Q))$ *y* $Aut_S(Q) \in Syl_p(Aut_S(Q))$.

3. *Si* $x \in N$, ${}^g x \in N_S(Q)C_G(Q)$ *asi* ${}^g x = uv$ *con* $u \in N_S(Q)$ *y* $v \in C_G(Q)$, *por lo que* $c_{{}^g x} : Q \longrightarrow Q$. *Pues si* $q \in Q$,

$$\begin{aligned}({}^g x)q({}^g x)^{-1} &= uvqv^{-1}u^{-1} \\ &= uqu^{-1} \in Q\end{aligned}$$

es decir, ${}^g x \in N_G(Q)$ *por lo que* $c_{{}^g x} \in Aut_S(Q)$.

Sea $x \in \{x \in N_S(P)/c_{{}^g x} \in Aut_S(Q)\}$, *entonces existe* $y \in N_S(Q)$ *tal que* $c_{{}^g x} = c_y$ *en* Q, *así por lema 1 se tiene que existe* $u \in C_G(Q)$ *tal que* ${}^g x = yu$, *por lo tanto* ${}^g x = yu \in N_S(Q)C_G(Q)$.

Por otro lado como $N_S(Q)$ *normaliza* $C_G(Q)$,*luego* $N_S(Q)C_G(Q)$ *es un subgrupo de* G. *Y por definición de* N *tenemos* ${}^g N \leq N_S(Q)C_G(Q)$. *Además* $N_S(Q) \in Syl_p(N_G(Q))$ *y* $N_S(Q) \leq N_S(Q)C_G(Q) \leq N_G(Q)$ *por lo que también* $N_S(Q) \in Syl_p(N_S(Q)C_G(Q))$. *Asi, existe* $h \in C_G(Q)$ *tal que* ${}^h({}^g N) =^{hg} (N) \leq N_S(Q)$.

❏

$\mathcal{F}_s(G)$ *es un sistema de fusión saturado.*

Sea $P \leq S$, *por el teorema anterior (partes* 1. *y* 2.*) existe* $Q =_G P$ *tal que* $Aut_S(Q) \in Syl_p(Aut_G(Q))$, *i.e.,* Q *es t.a. y solo resta ver que dicho* Q *es receptivo.*

Sea $C_g : P_0 \longrightarrow Q$ *un isomorfismo en* $\mathcal{F}_S(G)$, *luego* ${}^g P_0 = Q$ *y por el teorema anterior (parte* 3.*) si* $N = \{x \in N_S(P_0)/{}^g x \in N_S(Q)C_G(Q)\} = \{x \in N_S(P)/C_{{}^g x} \in Aut_S(Q)\}$, *entonces existe* $h \in C_G(Q)$ *tal que* ${}^{hg}(N) \leq S$, *i.e.,* $C_{hg} : N \longrightarrow S$. *Además* $P_0 \leq N$, *ya que si* $p \in P_0$, $C_{{}^g p} \in Aut_Q(Q) \leq Aut_S(Q)$, *más aún*

$$\begin{aligned}C_{hg}(p) &= h(gpg^{-1})h^{-1} \\ &= hh^{-1}(gpg^{-1}), \quad \text{pues } (gpg^{-1}) \in Q \\ &= C_g(p)\end{aligned}$$

Por lo tanto C_{hg} *extiende a* C_g, *luego tenemos el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} P_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, "c_g"] & N \arrow[ddl, "c_{hg}"] \\ Q \arrow[d, hook] & \\ S & \end{tikzcd}$$

Asi que solo resta ver que $N = N_{c_g} = \{x \in N_S(P_0)/c_g c_x(c_g^{-1}) \in Aut_S(Q)\}$*, pero esta igualdad es inmediata de la parte* 2. *del lema* 1,5.

Lema 2. *Sea* $\mathcal{F}$ *sistema de fusión sobre S*

1. *Si P es receptivo, entonces p es totalmente centralizado*
2. *P es totalmente automatizado y receptivo, entonces P es totalmente normalizado*
3. *Si P es totalmente automatizado y receptivo, entonces para todo* $Q \cong_{\mathcal{F}} P$ *existe* $\varphi : N_S(Q) \longrightarrow N_S(P)$ *morfismo en* $\mathcal{F}$ *tal que* $\varphi(Q) = P$*. Además Q es totalmente centralizado si y solo si es receptivo, y es totalmente normalizado si y solo si es totalmente automatizado y receptivo.*

Demostración.

1. Si $\varphi : Q \longrightarrow P$ isomorfismo en $\mathcal{F}$, entonces φ se extiende a un $\overline{\varphi}$ dado como en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi"] & N_S(P) \arrow[ddl, "\overline{\varphi}"] \\ P \arrow[d, hook] & \\ S & \end{tikzcd} \qquad N_S(P) \leq N_\varphi$$

Veamos que $C_S(Q) \subseteq N_\varphi$ y luego que $\overline{\varphi}(C_S(Q)) \subseteq C_S(P)$, así como $\overline{\varphi}$ es inyectiva (pues todo morfismo es inyectivo en $\mathcal{F}$) se tendrá $|C_S(Q)| = |\overline{\varphi}(C_S(Q))| \leq |C_S(P)|$.

Sea $x \in C_S(Q) \subseteq N_S(Q)$, asi $x \in N_S(Q)$, sea $p \in P$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi C_x \varphi^{-1}(p) &= \varphi(x\varphi^{-1}(p)x^{-1}) \\ &= \varphi(\varphi^{-1}(p)), pues\, \varphi^{-1}(p) \in Q \\ &= p \end{aligned}$$

así $\varphi C_x \varphi^{-1} = id_P \in Aut_S(P)$ por lo que $x \in N_\varphi$.

Sea $\overline{\varphi}(x) \in \overline{\varphi}(C_S(Q))$ y $p \in P$, entonces

$$\begin{aligned} p\overline{\varphi}(x)p^{-1} &= \overline{\varphi}(q)\overline{\varphi}(x)\overline{\varphi}(q^{-1}),\ con\ p = \overline{\varphi}(q) \\ &= \overline{\varphi}(qxq^{-1}) \\ &= \overline{\varphi}(x),\ pues\ x \in C_S(Q) \end{aligned}$$

2. Sea P es receptivo y $\varphi : Q \longrightarrow P$ por la parte 1. tenemos que P es totalmente centralizado, i.e., $|C_S(P)| \geq |C_S(Q)|$.

   Por otro lado tenemos que $Aut_S(P) \in Syl_p(Aut_{\mathcal{F}}(P))$ y como φ induce un isomorfismo entre $Aut_{\mathcal{F}}(P)$ y $Aut_{\mathcal{F}}(Q)$ (conjugar por φ); además $Aut_{\mathcal{F}}(Q) \geq Aut_S(Q)$, entonces por teorema de Sylow se sigue $|Aut_S(Q)| \leq |Aut_S(P)|$ así que

$$\begin{aligned} |N_S(Q)| &= |Aut_S(Q)||C_S(Q)| \\ &\leq |Aut_S(P)||C_S(P)| \\ &= |N_S(P)| \end{aligned}$$

   así P es totalmente normalizado.
3. Sea $\psi \in Iso_{\mathcal{F}}(Q, P)$ un $\mathcal{F}$ -isomorfismo. Luego ${}^{\psi}Aut_S(Q) \leq Aut_{\mathcal{F}}(P)$, entonces existe $\alpha \in Aut_{\mathcal{F}}(P)$ tal que ${}^{\alpha\psi}Aut_S(Q) \leq Aut_S(P)$, pues $Aut_S(P) \in Syl_p(Aut_{\mathcal{F}}(P))$ ya que P es t. a. . Sea $\varphi = \alpha\psi$; como P es receptivo, existe $\overline{\varphi}$ que extiende a φ. Veamos que $N_S(Q) \subseteq N_\varphi$ y que $\overline{\varphi}(N_S(Q)) \subseteq N_S(P)$.

   Sea $x \in N_S(Q)$, entonces $c_x \in Aut_S(Q)$ luego $\alpha\psi c_x \psi^{-1}\alpha^{-1} \in \alpha\psi Aut_S(Q)\psi^{-1}\alpha^{-1} \leq Aut_S(P)$, i.e., $N_S(Q) \subseteq N_\varphi$, luego $N_S(Q) = N_\varphi$. Así φ se extiende a un morfismo $\overline{\varphi} \in Hom_{\mathcal{F}}(N_S(Q), S)$, por lo que $\overline{\varphi}(Q) = \varphi(Q) = P$. Sea $p \in P$ y $\overline{\varphi}(x) \in \overline{\varphi}(N_S(Q))$, entonces

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(x)p\overline{\varphi}(x)^{-1} &= \overline{\varphi}(x)\varphi(q)\overline{\varphi}(x)^{-1},\ con\ \varphi(q) = p \\ &= \overline{\varphi}(x)\overline{\varphi}(q_0)\overline{\varphi}(x)^{-1} \\ &= \overline{\varphi}(xq_0x^{-1}) \in P,\ pues\ x \in N_S(Q) \end{aligned}$$

   Así tenemos que $\overline{\varphi} : N_S(Q) \longrightarrow N_S(P)$.

   En el caso que Q sea totalmente centralizado, entonces $\overline{\varphi}(C_S(Q)) = C_S(P)$. Sea $R \leq S$ y $\beta \in Iso_{\mathcal{F}}(R, Q)$ fijo. Para $g \in N_\beta$, se tiene ${}^{\beta}c_g \in Aut_S(Q)$ lo que implica ${}^{\varphi\beta}c_g \in Aut_S(P)$, pues

φ se extiende a un morfismo definido en $N_S(Q)$, por lo que $g \in N_{\varphi\beta}$. Como P es receptivo $\varphi\beta$ se extiende a un morfismo $\chi \in Hom_{\mathcal{F}}(N_\beta, N_S(P))$. Para todo $g \in N_\beta$, ${}^{\beta}c_g = c_h$ para algún $h \in N_S(Q)$ por definición de N_β, así $c_{\psi(h)} =^{\psi} c_h = c_{\chi(g)}$, y así $\chi(g) \in Im(\psi) \cdot C_S P = Im(\psi), yC_S(P) = Im(\psi)$. Luego $Im(\chi) \leq Im(\psi)$ así que χ se factoriza a través de algún $\overline{\beta} \in Hom_F(N_\beta, N_S(Q))$ con $\overline{\beta}|_R = \beta$, por lo que Q es receptivo.

Si Q es totalmente normalizado, entonces ψ es un isomorfismo. Por lo tanto ψ envía $C_S(Q)$ en $C_S(P)$, así Q es totalmente centralizado y por lo tanto receptivo. También $Aut_S(Q) \cong \frac{N_S(Q)}{C_S(Q)}$ es isomorfo a $Aut_S(P) \cong \frac{N_S(P)}{C_S(P)}$; además $Aut_{\mathcal{F}}(Q) = Aut_{\mathcal{F}}(P)$ ya que Q, P son conjugados. Luego $Aut_S(Q) \in Syl_p(Aut_{\mathcal{F}}(Q))$ ya que $Aut_S(P) \in Syl_p(Aut_{\mathcal{F}}(P))$, y así Q es totalmente automatizado.

❑

Teorema 1.2. *Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión saturado sobre S. Se cumplen las siguientes afirmaciones*

1. *Si $Q \leq S$ totalmente normalizado $\Longrightarrow$ Q es totalmente centralizado y totalmente automatizado.*
2. *Si $Q \leq S$ totalmente centralizado $\Longrightarrow$ Q es receptivo.*

Demostración.

Sea $Q \leq S$. Como $\mathcal{F}$ es saturado, existe $P \cong_{\mathcal{F}} Q$ que es totalmente automatizado y receptivo.

a) Si Q es totalmente normalizado, por teorema anterior, esto es equivalente a Q ser totalmente automatizado y receptivo, pero ser receptivo es equivalente a ser totalmente centralizado.

b) Si Q es totalmente centralizado, por teorema anterior Q es receptivo.

❑

1. $\mathcal{F}$-céntricos

Sea $\mathcal{F}$ sistema de fusión saturado sobre un p-grupo finito S. En la siguiente sección se estudiarán algunos objetos de $\mathcal{F}$ llamados $\mathcal{F}$ *-céntricos*, que serán de vital importancia en la construcción que se hará del *anillo de Burnside* de un Sistema de Fusión Saturado.

Definición 3. Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre S

• Para cada $P \leq S$, Sea $Out_{\mathcal{F}}(P) = \frac{Aut_{\mathcal{F}}(P)}{Inn(P)}$ y $Out_S(P) = \frac{Aut_S(P)}{Inn(P)}$. Así $Out_S(P) \leq Out_{\mathcal{F}}(P) \leq Out(P)$.

• Un subgrupo P de S es $\mathcal{F}$ -céntrico si $C_S(Q) = Z(Q)$ para todo $Q \in P^{\mathcal{F}}$ o de manera equivalente, $P \leq S$ es $\mathcal{F}$ -céntrico, si P es totalmente centralizado en $\mathcal{F}$ y $C_S(P) = Z(P)$.

• Sea $\mathcal{F}^c \subseteq \mathcal{F}$ la subcategoría de $\mathcal{F}$ cuyos elementos son los subgrupos de S que son $\mathcal{F}$-céntricos.

Lema 3. *Sea $\mathcal{F}$ un Sistema de Fusión sobre S, y $P \leq S$.*

P es $\mathcal{F}$ -céntrico $\Leftrightarrow$ P es totalmente centralizado en $\mathcal{F}$ y $C_S(P) = Z(P)$

Demostración.

$\Rightarrow$]

Sea $Q \in P^{\mathcal{F}}$, y $\varphi \in Iso_{\mathcal{F}}(Q, P)$

$$\begin{aligned} |C_S(Q)| &= |Z(Q)| \; pues\, P\, es\, \mathcal{F} - céntrico \\ &= |\varphi(Z(Q))| \\ &= |Z(P)| \\ &\leq |C_S(P)| \end{aligned}$$

Asi que P es totalmente centralizado. Además $Z(P) = \varphi(Z(Q)) = \varphi(C_S(Q)) = C_S(P)$,

$\Leftarrow$]

Sea $Q \in P^{\mathcal{F}}$ y $\varphi \in Iso_{\mathcal{F}}(Q, P)$. Como $C_S(P) = Z(P)$ tenemos

$$\begin{aligned} |C_S(Q)| &= |\varphi(C_S(Q))| \\ &= |C_S(P)| \\ &= |Z(P)| \\ &= |\varphi(Z(Q))| \\ &= |Z(Q)| \end{aligned}$$

Así que $C_S(Q) = Z(Q)$. ❑

Corolario 1.3. *Sea $\mathcal{F}$ es sistema de fusión sobre S. Si $P \leq R \leq S$.*

P es $\mathcal{F}$-céntrico $\Rightarrow$ R es $\mathcal{F}$-céntrico

Demostración. Si $R \supseteq P$ con P $\mathcal{F}$-céntrico, entonces $C_S(R) \subseteq C_S(P) = Z(P) \subseteq P \subseteq R$, por lo tanto $C_S(R) = Z(R)$ y por el lema anterior, R es $\mathcal{F}$-céntrico. ❑

Definición 4. Un p-grupo $P \leq G$ se llama p- céntrico si $Z(P) \in Syl_p(C_G(P))$. Equivalentemente (por el Teorema de Zassenhaus ver [**13**]), $C_G(P) = Z(P) \times C'_G(P)$, donde $C'_G(P)$ es el subgrupo de $C_G(P)$ generado por los elementos de $C_G(P)$ de orden primo a p . En particular $C'_G(P)$ es característico en $C_G(P)$.

Lema 4. *[$\mathcal{F}_S(G)$-céntricos]*

Sea G un grupo finito, y $S \in Syl_p(G)$. Consideremos el sistema de fusión $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(G)$; sea $P \leq S$

P es $\mathcal{F}$-céntrico $\Leftrightarrow$ P es p-céntrico

Demostración.

$\Rightarrow$]

Como $Z(P)$ es p-subgrupo de $C_G(P)$, existe $R \in Syl_p(C_G(P))$ tal que $Z(P) \leq R \leq C_G(P) \leq G$, además por teoría de Sylow, existe $g \in G$ tal que ${}^gR \leq S$, por lo que

$$\begin{aligned} {}^gR &\leq S \cap C_G({}^gP) \\ &= C_S({}^gP) \\ &= Z({}^gP) \end{aligned}$$

pues P es $\mathcal{F}$ -céntrico. Así, al calcular ordenes en tenemos $|R| = |Z(P)|$, por lo que $Z(P) \in Syl_p(C_G(P))$.

$\Leftarrow$]

Sea $Q \leq S$ y $c_g \in Iso_G(P, Q)$, como $G \xrightarrow{c_g} G$, se puede evaluar en cualquier subgrupo de G, y como $Z(P) \in Syl_p(c_g(P))$, se tiene lo siguiente $Z(Q) = c_g(Z(P)) \in Syl_p(c_g(C_G(P))) = Syl_p(C_G(Q))$ por lo que $C_S(Q) = Z(Q)$ ya que $Z(Q) \leq C_S(Q) \leq C_G(Q)$.

❑

Capítulo 2

El sistema de órbitas

En este capítulo se definirá el "*sistema de órbitas*"$O(\mathcal{F})$, de un sistema de fusión $\mathcal{F}$ sobre un p-grupo S y se estudiarán algunas propiedades del caso particular en que se trabaje con $O(\mathcal{F}^c)$. El resultado más importante de este capítulo es que cuando $\mathcal{F}$ es saturado, todo morfísmo en $O(\mathcal{F}^c)$ es epimorfismo y se debe a L. Puig (en [**9**]).

Definición 5 (Sistema de Órbitas de un Sistema de Fusión). Sea $\mathcal{F}$ sistema de fusión sobre un p-grupo S. Se define el sistema de órbitas de $\mathcal{F}$, denotado por $O(\mathcal{F})$, como la categoría cuyos objetos son los subgrupos de S y si $P, Q \leq S$, se tiene que $Hom_{O(\mathcal{F})}(P, Q) := \frac{Hom_{\mathcal{F}}(P,Q)}{Inn(Q)}$ y la composición viene dada por $[f][g] = [fg]$

Se sigue de la definición que si $[f], [g] \in Hom_{O(\mathcal{F})}(P, Q)$

$$[f] = [g] \Leftrightarrow \exists x \in Q / \ f = c_x g$$

también se sigue que

$$Aut_{O(\mathcal{F})}(P) = \frac{Aut_{\mathcal{F}}(P)}{Inn(P)} = Out_{\mathcal{F}}(P)$$

Además tenemos que $O(\mathcal{F}^c) \leq O(\mathcal{F})$, i.e., la categoría de órbitas asociada a la categoría de los céntricos de $\mathcal{F}$ es una subcategoría de la categoría de órbitas de $\mathcal{F}$.

Teorema 2.1 (L. Puig). *Si $\mathcal{F}$ es un sistema de fusión saturado, entonces en la categoría $O(\mathcal{F}^c)$todo morfismo es epimorfismo*

Demostración.

Sean $P, Q, R \leq S$ céntricos, $[f] \in Hom_{O(\mathcal{F})}(P, Q)$ y $[g], [h] \in Hom_{O(\mathcal{F})}(Q, R)$ tales que $[gf] = [g][f] = [h][f] = [hf]$, luego $gf = c_x hf$, y si consideramos que $g|_{f(P)} f = c_x h|_{f(P)} f$, y que $f : P \to f(P)$ es cancelable por derecha, entonces $g|_{f(P)} = c_x h|_{f(P)}$. Consideremos que $P \cong f(P) \leq Q$ y que

$f(P)$ también es céntrico. Así, s.p.g. $P \leq Q$ y $[g|_P] = [h|_P]$, i.e., $g = c_x h$ en P

consideremos $h(Q) \xrightarrow{gh^{-1}} R$, $gh^{-1}|_{h(P)} = c_x$ pues si $h(p) \in h(P)$

$$\begin{aligned} gh^{-1}(h(p)) &= g(p) \\ &= c_x h(p)\ g = c_x h \\ &= c_x(h(p)) \end{aligned}$$

Asi que $[gh^{-1}] = [1]$ en $h(P)$ y si se demostramos que esto implica $[gh^{-1}] = [1]$ en $h(Q)$ ya habríamos acabado la prueba, pues en ese caso $gh^{-1} = c_t$, asi que $g = c_t h$ por lo que $[g] = [h]$. Sin perdida de generalidad se puede considerar que lo que hay que probar es: ”$[g] = [1]$ en P implica $[g] = [1]$ en Q”, pero suponer $[g] = [1]$ en P es lo mismo que $g|_P = c_x$, i.e., $g|_P c_x^{-1} = 1_P$, asi que sin pérdida de generalidad se supondrá $g|_P = 1_P$, ahora resta ver que $g = c_t$ en Q.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $[P : Q] = p$, ya que este es el caso más importante, pues sino tendríamos una cadena

$$P = p_0 \leq P_1 \leq ... \leq P_n = Q$$

donde $[P_{i+1} : P_i] = p$ para $i = 0, ..., n-1$. Podemos pensar a g con dominio P_1 el cual también es céntrico (pues contiene a un céntrico) y si probamos que $g|_P = 1|_P$ implica $g = c_{t_1}$ en P_1, entonces $g|_{P_1} c_t^{-1} = 1_{P_1}$ y sin perdida de generalidad $g|_{P_1} = 1_{P_1}$, así, aplicando nuevamente lo que ya habríamos probado se tendría $g = c_{t_2}$ en P_2, por lo que realizando este razonamiento n veces tendríamos $g = c_t$ en Q. Luego, sin pérdida de generalidad podemos suponer $P = P_0$ y $P_n = Q$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que Q es totalmente normalizado. Esto se puede suponer pues la siguiente proposición implica lo que deseamos probar, i.e., si

$$P \leq Q \xrightarrow{g} R,\ [Q : P] = p,\ g|_P = 1_P \textit{ implica } g = c_t \textit{ en } Q$$

entonces

$$P \leq Q \xrightarrow{g} R,\ g|_P = 1_P \textit{ implica } g = c_t \textit{ en } Q$$

Veamos que en efecto esto es cierto.
Como $\mathcal{F}$ es un sistema de fusión saturado, existe $\varphi : Q \longrightarrow Q'$ $\mathcal{F}$ - isomorfismo, con Q' totalmente automatizado y receptivo, por lo tanto totalmente normalizado. Sea $\varphi(t) \in \varphi(P)$, luego

$$\begin{array}{rcl} g\varphi^{-1}|_{\varphi(P)}(\varphi(t)) & = & g(t) \\ & = & t, \ pues \ g|_P = 1_P \\ & = & \varphi^{-1}(\varphi(t)) \end{array}$$

es decir, $g\varphi^{-1} = \varphi^{-1}$ en $\varphi(P)$, así $\varphi g\varphi^{-1} = 1_{\varphi(P)}$ y como $[Q : P] = [Q' : \varphi(P)] = p$, entonces $\varphi g\varphi^{-1} = c_t$ en Q. Además $1_{\varphi(P)} = \varphi g\varphi^{-1}|_{\varphi(P)} = c_t$, así $t \in C_S(\varphi(P)) \subseteq \varphi(P)$ ya que $\varphi(P)$ es totalmente centralizado, por lo que $t = \varphi(u)$ para algún $u \in P$, luego $g = \varphi^{-1}c_{\varphi(u)}\varphi = c_u$ en Q. Ahora solo resta mostrar que

$$P \leq Q \xrightarrow{g} R, \ [Q : P] = p, \ g|_P = 1_P \ implica \ g = c_t \ en \ Q$$

Prueba:
Sean P, Q como en las hipótesis. Sea $s \in Q - P$, entonces $Q = \langle P, s\rangle$, pues $[P : Q] = p$. Veamos que $g(s) \in Q$. Sea $t \in P$, luego

$$\begin{array}{rcl} g(s)tg(s)^{-1} & = & g(s)g(t)g(s^{-1}) \\ & = & g(sts^{-1}) \\ & = & sts^{-1}, \ pues \ P \lhd Q \end{array}$$

así $s^{-1}g(s)t = ts^{-1}g(s)$, luego $u := s^{-1}g(s) \in C_S(P) \subseteq P \subseteq Q$ pues P es totalmente centralizado (ya que es $\mathcal{F}$ -céntrico), por lo tanto $g(s) = su \in Q$ y como $g|_P = 1_P$, entonces $g(Q) = g(\langle P, s\rangle) \subseteq Q$, i.e. , $g \in Aut(Q)$, pero g es un morfismo en $\mathcal{F}$, asi que $g \in Aut_{\mathcal{F}}(Q)$.

Veamos ahora que g es de orden una potencia de p. Observemos que $g(s) = su$, así que $g^2(s) = su^2$, $g^3(s) = su^3$,..., $g^{p^n}(s) = s$ donde $p^n = o(u)$.

Por otro lado $Aut_S \in Syl_P(Aut_{\mathcal{F}}(Q))$ (pues Q es totalmente normalizado y por lo tanto totalmente automatizado), y por teorema de Sylow, existe $l \in Aut_{\mathcal{F}}(Q)$ tal que $c_s = l^{-1}gl \in Aut_S(Q)$ por lo que $c_s|_{l^{-1}(P)} = l^{-1}gl|_{l^{-1}(P)} = 1_{l^{-1}}$ donde la última igualdad se tiene pues si $l^{-1}(p_0) \in l^{-1}(P)$, entonces $l^{-1}gl(l^{-1}(p_0)) = l^{-1}g(p_0) = l^{-1}(p_0)$ (pues $g|_P = 1|_P$). Pero $c_s|_{l^{-1}(P)} = 1_{l^{-1}}$ si y solo si $s \in C_S(l^{-1}(P)) \subseteq l^{-1}(P)$ (pues $l^{-1}(P)$ es totalmente centralizado), por lo que $s = l^{-1}(v)$ para algún $v \in P$, por otro lado $g = lc_sl^{-1} = lc_{l^{-1}(v)}l^{-1} = c_{l(l^{-1}(v))} = c_v$.

❏

Lema 5. *Sea $\mathcal{F}$ sistema de fusión saturado sobre un p-grupo S. Sean $P, Q \leq S$ $\mathcal{F}$ -céntricos, $f \in Hom_{\mathcal{F}}(Q, P)$. Si existe $s \in N_S(Q)$ tal que $fC_s = C_xf$ para algún $x \in P$, entonces f se puede extender a un morfismo f' en $\mathcal{F}$, donde $f' : \langle Q, s\rangle \longrightarrow P$*

Demostración. Sea $s \in N_S(Q)$ y $x \in P$ tal que $fc_s = c_xf$. Como $f(Q)$ es isomorfo a Q que es $\mathcal{F}$ -céntrico, entonces $f(Q)$ también es $\mathcal{F}$ - céntrico, luego totalmente centralizado, por lo tanto receptivo, y así f se extiende a un f' definido en N_f. Veamos que $s \in N_f$. Como $s \in N_S(Q)$ se tiene que $c_s \in Aut_S(Q)$, luego $fc_sf^{-1} \in Aut(f(Q))$, por lo tanto si $t = f(q) \in f(Q)$, entonces $fc_sf^{-1}(t) = c_x(t) = xtx^{-1} \in f(Q)$, y así $x \in N_S(f(Q))$, es decir, $c_x \in Aut_S(f(Q))$.
Además $c_x = fc_sf^{-1} = f'c_sf'^{-1} = c_{f'(s)}$ y por lema 1 existe $u \in c_s(f(Q))$ tal que $x = f'(s)u$ y como $c_s(f(Q)) = Z(f(Q)) \subseteq f(Q) \subseteq P$ ya que Q es $\mathcal{F}$ - céntrico, entonces $f'(s) = xu^{-1} \in P$.

❏

Si consideramos $P, Q \in O(\mathcal{F}^c)$, $Hom_{O(\mathcal{F}^c)}(P, Q)$ naturalmente se puede convertir en un $Out_{\mathcal{F}^c}(P)$-conjunto derecho como sigue, si K, Q son $\mathcal{F}$-céntricos, $[\beta] \in Hom_{O(\mathcal{F}^c)}(P, Q)$ y $[\alpha] \in Out_{\mathcal{F}^c}(P)$ entonces $[\beta][\alpha] = [\beta\alpha]$. $Hom_{O(\mathcal{F}^c)}(P, Q)^{[\alpha]}$ denotará el conjunto de puntos fijos de $[\alpha]$.

Lema 6. *Sea $\mathcal{F}$ sistema de fusión saturado sobre S, $K, P \leq S$ $\mathcal{F}$ - céntricos. Si $H = K\langle s\rangle$, con $s \in N_S(K)$, entonces*

$$Hom_{O(\mathcal{F}^c)}(H, P) \approx Hom_{O(\mathcal{F}^c)}(K, P)^{[C_s]}$$

donde $\approx$ significa que estos conjuntos son equipotentes, y la biyección viene dada por β con $\beta([f]) = [f|_K]$

Demostración.

esta asignación β está bien definida ya que si $[f], [g] \in Hom_{O(\mathcal{F}^c)}(H, P)$

$$\begin{aligned} [f|_K][C_s] &= [f|_K C_s] \\ &= [C_{f(s)} f|_K], \textit{ pues } f \textit{ se puede evaluar en } s \\ &= [f|_K] \end{aligned}$$

Es decir, si β llega a donde debería. β además es función pues si $[f] = [g]$, entonces $f = C_x g$ para algún $x \in P$, asi $f|_K = C_x g|_K$, luego $[f|_K] = [g|_K]$ i.e., $\beta([f]) = \beta([g])$.

β es inyectivo pues si $[f|_K] = [g|_K]$, entonces $[f][i] = [g][i]$, donde i es la inclusión de K en H, y por teorema 2.1 , $[f] = [g]$.

β es sobreyectivo pues si $[h] \in Hom_{O(\mathcal{F}^c)}(K, P)^{[C_S]}$, $[hC_S] = [h][C_S] = [h]$, es decir, hay un $x \in P$ tal que $hC_S = C_x h$, luego, existe $h' : K\langle s\rangle \to P$ tal que $h'|_K = h$.

❏

Corolario 2.2. *Sea $\mathcal{F}$ sistema de fusión saturado sobre S, $P \leq P' \leq S$ $\mathcal{F}$ - céntricos.*

$$\left|Hom_{O(\mathcal{F}^c)}(P, P')\right| \equiv |Out_{\mathcal{F}}(P')| \, mod \ p$$

Demostración.

Se pueden tener los siguientes casos

1. Si $[P' : P] = 1$, i.e., $P = P'$, y asi

$$\begin{aligned} Hom_{O(\mathcal{F}^c)}(P, P) &= \frac{Hom_{\mathcal{F}^c}(P, P)}{Int(P)} \\ &= \frac{Hom_{\mathcal{F}}(P, P)}{Int(P)} \\ &= Out_{\mathcal{F}}(P) \end{aligned}$$

2. Si $[P' : P] = p$, entonces $P \trianglelefteq P'$. Sea $s \in P' - P$, luego $s \in N_{P'}(P) \subseteq N_S(P)$ y $P' = \langle P, s\rangle$, asi, por lema anterior tenemos

$$\begin{aligned} Hom_{O(\mathcal{F}^c)}(P, P') &\approx Hom_{O(\mathcal{F}^c)}(P', P') \\ &= Out_{\mathcal{F}}(P') \end{aligned}$$

Además $[C_S] \in Out_{\mathcal{F}}(P)$ es de orden una potencia de p, pues si $|\langle s\rangle| = p^a$, $[C_S]^{p^a} = [C_S^{p^a}] = [C_{S^{p^a}}] = [C_1] = 1$, por lo que

$$\begin{aligned} |Out_{\mathcal{F}}(P')| &= \left|Hom_{O(\mathcal{F}^c)}(P,P')^{[C_S]}\right| \\ &\equiv \left|Hom_{O(\mathcal{F}^c)}(P,P')\right| mod\ p \end{aligned}$$

3. Si $[P' : P] = p^n$ con $n > 1$, entonces el cociente es soluble y por teorema de la correspondencia se tiene que existe una cadena

$$P = Q_0 \trianglelefteq Q_1 \trianglelefteq ... \trianglelefteq Q_{n-1} \trianglelefteq Q_n = P'$$

donde $[Q_i : Q_{i-1}] = p$ y asi $|Out_{\mathcal{F}}(P')| = |Hom_{O(\mathcal{F})}(P', P')| \equiv |Hom_{O(\mathcal{F})}(Q_{n-1}, P')| \equiv ... \equiv |Hom_{O(\mathcal{F})}(P, P')|$.

❑

Capítulo 3

El anillo de Burnside de un Sistema de Fusión

1. La inmersión de Yoneda

Sea C una categoría finita (con finitos objetos y finitos morfismos), y consideremos la categoría $Fun^{o}(C\ , Set)$ de funtores contravariantes de C a la categoría de conjuntos. Sean $A, B \in C$, el funtor $Hom_C(\quad , A)$ es un funtor contravariante de C en la categoría de conjuntos, y para facilitar escritura, lo escribiremos como $(\quad, A)$,y los morfismos de A a B se denotará por (A, B) cuando no haya lugar confusión sobre la categoría, en otro caso denotaremos $C\ (A, B)$.

Lema 7 (De Yoneda). *Sean* $(\quad, A)$, $M \in Fun^{o}(C\ , Set)$ *y* $A \in Obj(C\ )$. *La función*

$f\ :\ ((\quad , A)\ , M) \longrightarrow M(A)$*, dada por* $\alpha \longmapsto \alpha_A(1_A)$ *donde* $\alpha_A\ :\ (A, A) \longrightarrow M(A)$ *es una biyección y es natural tanto en* M *como en* A

Demostración.

Definamos $g\ :\ M(A) \longrightarrow ((\quad , A)\ , M)$, como sigue $m \longmapsto \alpha^m$ donde α^m viene dado por $\alpha^m_B := M(f)(m)$ para todo $f \in (B, A)$

Veamos que g si llega a donde se está diciendo que llega, i.e., α^m es una transformación natural. Sea $B, C \in ob(C\ )$, $l \in (B, C)$, y sea $t \in (C, A)$, como M es funtor contravariante se tiene $M(t \circ l)(m) = M(l)(M(t)(m))$, así, el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
(B, A) \arrow[r, "\alpha^m_B"] & M(B) \\
(C, A) \arrow[u, "{(l,A)}"] \arrow[r, "\alpha^m_C"'] & M(C) \arrow[u, "M(l)"']
\end{tikzcd}
$$

Por lo que α^m es una transformación natural: Es claro que g es función.Veamos que g y f son inversas. Sea $m \in M(A)$

$$
\begin{aligned}
f(g(m)) &= f(\alpha^m) \\
&= \alpha_A^m(1_A) \\
&= M(1_A)(m) \\
&= m
\end{aligned}
$$

Sea $h \in (B, A)$

$$
\begin{aligned}
\alpha_B^{\alpha_A(1_A)}(h) &= M(f)(\alpha_A(1_A)) \\
&= (M(f) \circ \alpha_A)(1_A) \\
&= (\alpha_B \circ (f, A))(1_A), \ \textit{pues } \alpha \in ((\quad, A)\ , M) \\
&= \alpha_B(1_A \circ f) \\
&= \alpha_B(f)
\end{aligned}
$$

Sean $N \in Fun^{\circ}(C\ \ , Set)$, $\beta \in (M, N)$, $\alpha \in ((\quad\ , A)\ \ , M)$. f es natural en M si el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
((\quad, A)\ , M) \arrow[r] \arrow[d, "((\quad, A)\ , B)"'] & M(A) \arrow[d, "\beta_A"] \\
((\quad, A)\ , N) \arrow[r] & N(A)
\end{tikzcd}
$$

pero esto es claro, pues si en este diagrama nos vamos por debajo, tenemos que $\alpha \mapsto \beta\alpha \mapsto (\alpha\beta)_A(1_A)$, mientras que si nos vamos por arriba tenemos $\alpha \mapsto \alpha_A(1_A) \mapsto \beta_A(\alpha_A(1_A))$, pero $(\alpha\beta)_A(1_A) = \beta_A(\alpha_A(1_A))$ por como se componen las transformaciones naturales, y así, el diagrama anterior conmuta.

Sean $B \in ob(C\ \ )$, $\alpha \in ((\quad\ , B)\ \ , M)$, $h \in (A, B)$. f es natural en A si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
((\ \ ,A)\ ,M) \arrow[r] & M(A) \\
((\ \ ,B)\ ,M) \arrow[r] \arrow[u, "((h,A),M)"'] & M(B) \arrow[u, "M(h)"']
\end{tikzcd}$$

y esto esto se tiene, pues si en este diagrama nos vamos por arriba tenemos que $\alpha \mapsto ((h,A),M)(\alpha) \mapsto (((h,A),M)(\alpha))_A(1_A)$, además $(((h,A),M)(\alpha))_A(1_A) = (\alpha \circ (h,A))_A(1_A) = \alpha_A \circ (h,A)_A(1_A) = \alpha_A(1_A \circ h) = \alpha_A(h)$ mientras que si nos vamos por debajo $\alpha \mapsto \alpha_B(1_B) \mapsto M(h)(\alpha_B(1_B))$, pero $M(h)(\alpha_B(1_B)) = (M(h) \circ (\alpha_B))(1_B) = (\alpha_A \circ (h,A))(1_B) = \alpha_A(1_B \circ h) = \alpha_A(h)$.

Como f es natural en M en A, f y g son inversas, entonces g también es natural en M y A.

❑

Corolario 3.1. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría finita, el funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{F} Fun^o(\mathcal{C}, set)$, dado por $(\ \ ,A)$ es un funtor que preserva isomorfismos.*

Definición 6. Si $\mathcal{C}$ es una categoría finita, en el cociente de las clases de isomorfismo $Fun^o(\mathcal{C}, set)/\cong$, para cada pareja $[X],[Y]$ se definen $[X]+[Y] = [X \sqcup Y]$ y $[X]\cdot[Y] = [X \times Y]$ de tal manera que $Fun^o(\mathcal{C}, set)/\cong$ es monoide abeliano para $\cdot$ $+$, además es distributivo de $\cdot$ con respecto a $+$, y calculando el grupo de Grotendick del monoide $(Fun^o(\mathcal{C}, set)/\cong, +)$ tenemos un anillo conmutativo, con unidad $[E]$, donde E es un funtor que a todo objeto de $\mathcal{C}$ lo envía a un conjunto unipuntual. A este anillo se le llama anillo de Burnside de $\mathcal{C}$ y se denota por $B(\mathcal{C})$.

2. El sistema de órbitas y la inmersión de Yoneda

sea $\mathcal{F}$ sistema de fusión saturado sobre S, $\mathcal{C} = O(\mathcal{F}^c)$ y $B(\mathcal{C})$ el anillo de Burnside de $\mathcal{C}$. En lo que resta de este trabajo se probarán propiedades análogas a las que se tienen para el anillo de burnside de un grupo finito. En aquel los generadores (como grupo abeliano) son las clases de isomorfía de los cocientes del grupo finito dado con sus subgrupos y la multiplicación entre generadores es la dada por la formula de Mackey. Luego, la primera pregunta que nos hacemos aquí es, que subcolección, no trivial, de $B(\mathcal{C})$ genera (como grupo abeliano) a $B(\mathcal{C})$. La verdad es que la respuesta a esa pregunta no se conoce, pero al menos en $B(\mathcal{C})$ conocemos a los funtores representables, aquellos de la forma $(\quad, A)$ para algún objeto A de $\mathcal{C}$ y podemos trabajar con ellos.

Teorema 3.2. *Para todos P, Q $\mathcal{F}$-céntricos se tiene*

$$(\quad, P) \times (\quad, Q) \cong \bigsqcup_{algunos\ A_i \in ob(\mathcal{C})} (\quad, A_i)$$

Demostración.

Sean P, Q $\mathcal{F}$-céntricos, definimos

$$K_{P,Q} := \{([\alpha], A)/A \xrightarrow{\alpha} Q,\ A \leq P\ ,\ A \in \mathcal{F}^c\ y\ [\alpha] \in Hom_{\mathcal{C}}(A, Q)\}$$

En $K_{P,Q}$ se define el siguiente orden parcial

$$([\alpha], A) \leq ([\beta], B) \Leftrightarrow A \leq B\ y\ [\beta|_A] = [\alpha]$$

$\leq$ claramente es reflexiva. Supongamos ahora que $([\alpha], A) \leq ([\beta], B)$ y que $([\alpha], A) \leq ([\beta], B)$, entonces $A \leq B$, $B \leq A$ y $[\beta|_A] = [\alpha]$, por lo que $A = B$ y $[\beta] = [\alpha]$. Supongamos ahora que $([\alpha], A) \leq ([\beta], B)$ y $([\beta], B) \leq ([\pi], C)$, entonces se tiene $A \leq B \leq C$, $[\pi|_A] = [\beta|_A] = [\alpha]$, así que $([\alpha], A) \leq ([\pi], C)$.

P actúa en $K_{P,Q}$ por la derecha como sigue, si $x \in P$

$$([\alpha], A) \cdot x := ([\alpha c_x], A^x)$$

$\cdot$ está bien definida, pues si $y \in Q$, $[c_y\alpha] \cdot x = [c_y\alpha c_x] = [\alpha c_x]$. Además, si consideramos $p, p' \in P$

$$\begin{aligned}([\alpha], A)pp' &= ([\alpha c_{pp'}], A^{pp'}) \\ &= ([(\alpha c_p)c_{p'}], (A^p)^{p'}) \\ &= ([\alpha c_p], A^p)\cdot'\end{aligned}$$

también $([\alpha], A)\cdot 1 = ([\alpha c_1], A^1) = ([\alpha], A)$.

$(K_{P,Q}, \leq)$ es un P-poset, pues si $x \in P$ y $([\alpha], A) \leq ([\beta], B)$, entonces $[\beta|_A] = [\alpha]$ y $A \leq B$ por lo que $A^x \leq B^x$, además si $a^x \in A^x$

$$\begin{aligned}\beta c_x(a^x) &= \beta(a) \\ &= c_y\alpha(a) \\ &= c_y\alpha(c_x(a^x))\end{aligned}$$

es decir, $\beta cx|_{A^x} = c_y\alpha c_x$, y asi $[\beta c_x|_{A^x}] = [\alpha c_x]$, por lo tanto $([\alpha c_x], A^x) \leq ([\beta c_x], B^x)$, luego $K_{P,Q}/P$ es un poset con el orden inducido por $\leq$.

Sea

$$\begin{aligned}max(K_{P,Q}/P) &:= \{\overline{([\alpha], A)}/\ ([\alpha], A)\ es\ maximal\ en\ K_{P,Q}\} \\ &= \{\overline{([\alpha_1], A_1)}, ..., \overline{([\alpha_n], A_n)}\}\end{aligned}$$

y sea

$$\{([\alpha_1], A_1), ..., ([\alpha_n], A_n)\} \subseteq K_{P,Q}$$

Una colección de representantes distintos por cada clase de $max(K_{P,Q}/P)$.

Afirmación: $(\quad, P) \times (\quad, Q) \cong \sqcup_{i=1}^{n}(\quad, A_i)$

Demostración.

previo a esta prueba haremos la siguiente convención: escribiremos $[u]_j \in \sqcup_{i=1}^n(R, A_i)$ para significar que $[u] \in \sqcup_{i=1}^n(R, A_i)$ y $[u] \in (R, A_j)$.

Sea $R \in \mathcal{C}$ y $(\ \ , P) \times (\ \ , Q) \xrightarrow{\varphi} \sqcup_{i=1}^n(\ \ , A_i)$ que satisface que

$$\sqcup_{i=1}^n(R, A_i) \xrightarrow{\varphi_R} (R, P) \times (R, Q)$$

viene dada por $[u]_j \longmapsto ([u], [\alpha_j u])$. φ_R está bien definido pues si $x \in A_j$, $[u]_j = [c_x u]$ y $\varphi_R([c_x u]) = ([c_x u], [\alpha_j c_x u]) = ([c_x u], [c_{\alpha_j(x)}\alpha_j u]) = ([u], [\alpha_j u])$.

Sea $T \in \mathcal{C}$ y $\beta \in (R, T)$. Que φ es transformación natural se sigue de que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\sqcup_{i=1}^n(R, A_i) \arrow[r, "\varphi_R"] & (R, P) \times (R, Q) \\
\sqcup_{i=1}^n(T, A_i) \arrow[r, "\varphi_T"] \arrow[u, "(\beta, A_j)"] & (T, P) \times (T, Q) \arrow[u, "(\beta, P)\times(\beta, Q)"]
\end{tikzcd}$$

pues al irse por debajo se tiene $[v] \mapsto ([v], [\alpha_j v]) \mapsto ([v\beta], [\alpha_i v\beta])$, mientras que al irse por arriba se tiene $[v] \mapsto [v\beta]_j \mapsto ([v\beta], [\alpha_j v\beta])$.

Como φ es natural, resta ver que es un isomorfismo en cada evaluación, i.e. , φ_R es biyectivo.

φ_R es sobreyectivo. Sea $([v], [w]) \in (R, P) \times (R, Q)$, luego $([wv^{-1}], V(R)) \in K_{P,Q}$ pues $V(R) \in \mathcal{F}^c$, así $([wv^{-1}], V(R)) \leq ([\alpha_j], A_j) \cdot x = ([\alpha_j c_x], A^x)$ para algún $x \in P$, por lo tanto $V(R) \leq A_j$ y $[\alpha_j c_x|_{V(R)}] = [wv^{-1}]$. Como $\varphi_R([c_x v]_j) = ([c_x v], [\alpha_j c_x v])$, y $[\alpha_j c_x v] = [wv^{-1}v]$ ya que $[\alpha_j c_x|_{V(R)}] = [wv^{-1}]$, entonces $\varphi_R([c_x v]_j) = ([v], [w])$, y así φ_R es sobreyectivo.

φ_R es inyectiva. Sean $[u]_j, [w]_k \in \sqcup_{i=1}^n(R, A_i)$ tales que $([u], [\alpha_j u]) = ([w], [\alpha_k w])$, luego $u = c_x w$ para algún $x \in P$ y $\alpha_j u = c_y \alpha_k w$ para algún $y \in Q$, por lo que $\alpha_k u = \alpha_k c_x w$, y así $[\alpha_k c_x w] = [\alpha_k w]$, es decir, $[\alpha_j c_x][w] = [\alpha_k][w]$, entonces $[\alpha_j c_x] = [\alpha_k]$ en A_k pues todo morfísmo es epimorfísmo, pero el dominio de α_j es A_j, asi que $x_k^A = A_j$, i.e. , $A_k = A_j^x$. Asi se tiene que $([\alpha_j], A_j) \cdot x = ([\alpha_j c_x], A_j^x) =$

$([\alpha_k], A_k)$ (ya que $([\alpha_j c_x], A_k)$ es el maximal cuya segunda coordenada es A_k, por lo tanto la primera cooredenada debe coincidir con $[\alpha_k]$, por lo tanto $j = k$ pues los maximales se tomaron uno por cada clase de conjugación en $max(K_{P,Q}/P)$, y así $[u]_j = [u]_k = [w]_k$.

❏

❏

Si consideramos el grupo abeliano libre

$$A(\mathcal{F}) := \langle [(\quad, A)\ ]/A \in ob(\mathcal{C}\ ) \rangle$$

por el teorema enterior tenemos que $A(\mathcal{F})$ es subanillo de $B(\mathcal{C}\ )$

2.1. Marcas en $A(\mathcal{F})$.

Definición 7. Sea $\mathcal{C}\ = O(\mathcal{F}^c)$, $Q, P \in \mathcal{C}$. Se define la marca Q -ésima como el morfismo de anillos $B(\mathcal{C}\ ) \xrightarrow{\varphi_Q} \mathbb{Z}$ dada por $[F] \longmapsto |F(Q)|$, este es morfismo de anillos pues si $[X], [Y] \in B(\mathcal{C}\ )$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi_Q([X] + [Y]) &= \varphi_Q([X \sqcup Y]) \\ &= |X \sqcup Y(Q)| \\ &= |X(Q) \sqcup Y(Q)| \\ &= |X(Q)| + |Y(Q)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_Q([X] \cdot [Y]) &= \varphi_Q([X \times Y]) \\ &= |X \times Y(Q)| \\ &= |X(Q) \times Y(Q)| \\ &= |X(Q)| \cdot |Y(Q)| \end{aligned}$$

Además $\varphi_Q([E]) = |E(Q)| = 1$. Es claro que si $Q \cong Q'$ entonces $\varphi_Q = \varphi_{Q'}$.

Lema 8. *Si $P, Q \in \mathcal{F}^c$, entonces*

$$|C\ (Q,P)| = \frac{|Z(P)||Aut_{\mathcal{F}}(Q)|}{|P|}|\{T \leq P/T \cong_{\mathcal{F}} Q\}|$$

Demostración. Sean $P, Q \in \mathcal{F}^c$, luego

$$\begin{aligned} |C\ (Q,P)| &= \left|\frac{hom_{\mathcal{F}}(Q,P)}{Int(P)}\right| \\ &= \frac{|hom_{\mathcal{F}}(Q,P)|}{|Int(P)|} \\ &= \frac{|Z(P)|}{|P|}|hom_{\mathcal{F}}(Q,P)| \end{aligned}$$

resta ver que $|hom_{\mathcal{F}}(Q,P)| = |Aut_{\mathcal{F}}(Q)||\{T \leq P/T \cong_{\mathcal{F}} Q\}|$.

$hom_{\mathcal{F}}(Q,P)$ es un $Aut_{\mathcal{F}}(Q)$-conjunto derecho, con la acción dada por: si $\sigma \in Aut_{\mathcal{F}}(Q)$ y $\alpha \in hom_{\mathcal{F}}(Q,P)$, $\alpha \cdot \sigma = \alpha \circ \sigma$, Veamos ahora que el conjunto de órbitas $hom_{\mathcal{F}}(Q,P)/Aut_{\mathcal{F}}(Q)$ y $\{T \leq P/T \cong_{\mathcal{F}} Q\}$ son equipotentes.

Sea f la función dada por $\forall[\alpha] \in hom_{\mathcal{F}}(Q,P)/Aut_{\mathcal{F}}(Q)$, $f([\alpha]) = \alpha(Q)$. f está bien definida pues si $[\alpha] \in hom_{\mathcal{F}}(Q,P)/Aut_{\mathcal{F}}(Q)$ y $[\alpha] = [\alpha\sigma]$ con $\sigma \in Aut_{\mathcal{F}}(Q)$, y $f([\alpha]) = \alpha(Q) = \alpha(\sigma(Q)) = \alpha\sigma(Q) = f([\alpha\sigma])$.

Sea g la función dada por $\forall T \in \{T \leq P/P \cong_{\mathcal{F}} Q\}$. $g(T) = [\sigma]$ donde $\sigma \in Iso_{\mathcal{F}}(Q,T)$. g está bien definida pues si $\beta \in Iso_{\mathcal{F}}(Q,T)$, entonces $\beta^{-1}\sigma \in Aut_{\mathcal{F}}(Q)$ y así $[\sigma] = [\beta(\beta^{-1}\sigma)]$.

Vemos que f y g son inversas. Sean $T \in \{T \leq P/P \cong_{\mathcal{F}} Q\}$ y $[\alpha] \in hom_{\mathcal{F}}(Q,P)/Aut_{\mathcal{F}}(Q)$, luego $f(g(T)) = f([\sigma]) = \sigma(Q) = T$ y $g(f([\alpha])) = g(\alpha(Q)) = [\alpha]$.

Además esa acción es libre, asi que todas las órbitas tienen la misma cardinalidad $|Aut_{\mathcal{F}}(Q)|$, por lo tanto $|hom_{\mathcal{F}}(Q,P)| = |Aut_{\mathcal{F}}(Q)||\{T \leq P/T \cong_{\mathcal{F}} Q\}|$.

❑

Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión saturado sobre un p-grupo finito S y $\mathcal{C} = O(\mathcal{F}^c)$. El lema anterior nos dá una manera de calcular las marcas en el subanillo $A(\mathcal{F})$ del anillo de burnside $B(\mathcal{C})$ lo que será muy útil para estudiar a este subanillo.

2.2. ¿quién es A($\mathcal{F}$)? Sea $\mathcal{F}$ sistema de fusión saturado sobre el p-grupo finito S, y sea $[\mathcal{C}] = \{[P_1], ..., [P_r]\}$ la colección de las clases de conjugación de los subgrupos $\mathcal{F}$-céntricos de S, ordenada de la siguiente manera $[P_i] \leq [P_j]$ si y solo si $|P_i| \leq |P_j|$. Cabe recordar que los elementos de $[\mathcal{C}]$ están en biyección con los generadores de $A(\mathcal{F})$ pues la inmersión de Yoneda preserva clases de isomorfía, por lo que asumiremos que $[\mathcal{C}]$ es un conjunto generador de $A(\mathcal{F})$ como grupo abeliano, asi que en adelante a los generadores $[(\ , P)]$ de $A(\mathcal{F})$ los denotaremos por $[P]$.

Consideremos ahora el anillo $\prod_{[\mathcal{C}]} \mathbb{Z}$ como el grupo abeliano libre con el conjunto $[\mathcal{C}]$ como base, así todo elemento en $\prod_{[\mathcal{C}]} \mathbb{Z}$ es de la froma $\sum_{i=1}^{r} n_i[P_i]$ y la multiplicación viene dada coordenada a coordeneda.

Como se había mencionado $A(\mathcal{F}) \cong +_{[\mathcal{C}]}\mathbb{Z}$ como grupo abeliano. Sea $\varphi : A(\mathcal{F}) \longrightarrow \prod_{[\mathcal{C}]} \mathbb{Z}$ el morfismo de grupos dado en generadores por $\varphi([P_j]) := \sum_{i=1}^{r} \varphi_{P_i}(P_j)[P_i]$, éste de hecho es morfismo de anillos porque en cada una de sus coordenadas viene dado por un morfismo de anillos y el producto en $\prod_{[\mathcal{C}]} \mathbb{Z}$ es coordenada a coordenada.

Si $(m_{ij})_{r\times r} :=_{[\mathcal{C}]} [\varphi]_\beta$ es la matriz del morfismo φ, donde β es la base canónica de $\prod_{[\mathcal{C}]} \mathbb{Z}$, entonces $(m_{ij}) = (|\mathcal{C}(P_i, P_j)|)$ con $[P_i], [P_j] \in [\mathcal{C}]$, es análoga a la tabla de marcas del anillo de Burnside de un grupo finito, pues en aquel caso la matriz resultante era triangular superior y de igual manera ocurre con (m_{ij}) ya que si $j > i$, $|\{T \leq P_i / T \cong_{\mathcal{F}} P_j\}| = 0$ y asi $|\mathcal{C}(P_i, P_j)| = 0$, además las entradas en la diagonal de (m_{ij}) son de la forma $|Out_{\mathcal{F}}(Q_i)| \neq 0$ con $[Q_i] \in [C]$, por lo que φ es un morfismo inyectivo y como $\prod_{[\mathcal{C}]} \mathbb{Z}$ tiene rango r como $\mathbb{Z}$-módulo y así $A(\mathcal{F}) \cong \oplus_{[\mathcal{C}]}\mathbb{Z}$.

Sea $i < j$. Observemos que $Out_{\mathcal{F}}(P_i)$ actúa libremente en $\mathcal{C}(P_i, P_j)$ con la acción dada por $[g] \cdot [f] = [gf]$ para todo $[f] \in Out_{\mathcal{F}}(P_i)$ y $[g] \in \mathcal{C}(P_i, P_j)$.

Dados $[g] \in Out_{\mathcal{F}}(P_i)$ y $[f] \in \mathcal{C}(P_i, P_j)$, $[f][g] := [fg]$ define una acción en $\mathcal{C}(P_i, P_j)$, en efecto, si $c_k \in Int(P_i)$ y $c_h \in Int(P_j)$ entonces

$$\begin{aligned}[c_h f][g] &= [(c_h f)g]\\ &= [c_h(fg)]\\ &= [fg]\\ &= [f][g]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[f][c_k g] &= [f c_k g]\\ &= [f c_k][g]\\ &= [f c_k][C_{k^{-1}} g]\\ &= [fg]\\ &= [f][g]\end{aligned}$$

y esta acción es libre. Por lo tanto $|\mathcal{C}\ (P_i, P_j)| = |\sqcup_i Orb([g_i])| = |Out_{\mathcal{F}}(P_i)| \cdot l_{i,j}$, donde $l_{i,j}$ es el número de órbitas. Por lo tanto $(m_{i,j}) = TD$ donde $T := (t_{i,j})_{r\times r}$ es la matriz dada por: si $i < j$, $t_{i,j} = l_{i,j}$, $t_{i,i} = 1$; si, $i > j$ $t_{i,j} = 0$ (asi que T es invertible sobre $\mathbb{Z}$), y $D = (d_{i,j})_{r\times r}$ es la matriz diagonal dada por $d_{i,i} = |Out_{\mathcal{F}}(P_i)|$, por lo que $Coker(\varphi) = Coker(D)$.

entonces se tiene la siguiente sucesión exacta

$$\begin{tikzcd} A(\mathcal{F}) \cong \oplus_{[\mathcal{C}\ ]}\mathbb{Z} \arrow[rr, hook, "\varphi"] \arrow[dr, "D"'] & & \prod_{[\mathcal{C}\ ]}\mathbb{Z} \arrow[r] & \prod_{P_i\in[\mathcal{C}\ ]}(\mathbb{Z}/|Out_{\mathcal{F}}(P_i)|\mathbb{Z}) \arrow[r] & 0 \quad (I) \\ & \oplus_{[\mathcal{C}\ ]}\mathbb{Z} \arrow[ur, "T"'] & & & \end{tikzcd}$$

3. El anillo de Burnside racional

Si la sucesión exacta (I) la tensorizamos por $\mathbb{Q}$, se tiene $\mathbb{Q}\otimes A(\mathcal{F}) \cong \prod_{[\mathcal{C}\ ]}\mathbb{Q}$, pues $\mathbb{Q}$ es plano y $\mathbb{Q}\otimes\prod_{P_i\in[\mathcal{C}\ ]}(\mathbb{Z}/|Out_{\mathcal{F}}(P_i)|\mathbb{Z}) = 0$ ya que $\mathbb{Q}$ es divisible y $\prod_{P_i\in[\mathcal{C}\ ]}(\mathbb{Z}/|Out_{\mathcal{F}}(P_i)|\mathbb{Z})$ es de torsión

Teorema 3.3. *$\mathbb{Q} \otimes A(\mathcal{F})$ es un algebra semisimple con un idempotente primitivo e_Q (el vector que tiene 1 en la entrada Q-ésima y 0 en todas sus demás entradas) para todo $[Q] \in [C\ ]$. De hecho, usando $[C\ ]$ como base para $\mathbb{Q} \otimes A(\mathcal{F})$, se tiene que para todo $Q \in [C\ ]$, e_Q se escribe como*

$$e_Q = \frac{1}{|Q||Out_{\mathcal{F}}(Q)|} \cdot \sum_{P \in \mathcal{F}^c} (|P| \cdot \mu(P, Q)) \, [P]$$

donde μ es la función de Môbius

Demostración. Para simplificar notación $\mathbb{Q}A(\mathcal{F}) := \mathbb{Q} \otimes A(\mathcal{F})$. Por teorema de Wedderburn (ver [1]) $\mathbb{Q}A(\mathcal{F})$ es un algebra semisimple.

Sea $[Q]$ un básico en $A(\mathcal{F}) \subseteq \mathbb{Q} \otimes A(\mathcal{F})$, ya que todo $x \in A(\mathcal{F})$ se puede escribir como $x = \sum_{P \in [C\ ]} \varphi_P(x) e_P$, se tiene que

$$\begin{aligned}
[Q] &= \sum_{P \in [C\ ]} \varphi_P([Q]) e_P \\
&= \sum_{P \in [C\ ]} \frac{|Z(P)|}{|Q|} \cdot |Aut_{\mathcal{F}}(P)| \cdot |\{T \leq Q / T \cong_{\mathcal{F}} P\}| e_P \\
&= \frac{1}{|Q|} \sum_{P \in \mathcal{F}^c} |Z(P)||Aut_{\mathcal{F}}(P)| \cdot \zeta(P, Q) \cdot e_P
\end{aligned}$$

Donde $\zeta(P, Q) = 1$ si $P \leq Q$ y $\zeta(P, Q) = 0$ en otro caso. Ahora, si $f(Q) := |Q|[Q]$ y $g(P) := |Z(P)||Aut_{\mathcal{F}}(P)| \cdot e_P$, entonces tenemos $f(Q) = \sum_{P \in \mathcal{F}^c} g(P)\zeta(P, Q)$ y por teorema de inmersión de Môbius (ver[8]) se tiene que $g(Q) = \sum_{P \in \mathcal{F}^c} f(P)\mu(P, Q)$, es decir, $|Z(Q)||Aut_{\mathcal{F}}(Q)| \cdot e_Q = \sum_{P \in \mathcal{F}^c} |P|[P]\mu(P, Q)$ y asi

$$\begin{aligned}
e_Q &= \frac{1}{|Z(Q)||Aut_{\mathcal{F}}(Q)|} \cdot \sum_{P \in \mathcal{F}^c} |P|[P]\mu(P, Q) \\
&= \frac{1}{|Q||Out_{\mathcal{F}}(Q)|} \cdot \sum_{P \in \mathcal{F}^c} (|P| \cdot \mu(P, Q)) \cdot [P]
\end{aligned}$$

$\square$

4. El anillo de burnside p-local

Sean $[\mathcal{C}]$ y φ como en la sección 2.2.

Sea (II) la sucesión exacta que resulta de tensorizar por $\mathbb{Z}_{(p)}$ la sucesión exacta (I) de la sección 2.2 y sea (III) la sucesión exacta que resulta de localizar en p a esta misma sucesión exacta (I). Tenemos los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_{(p)} \otimes A(\mathcal{F}) \arrow[r, hook, "\mathbb{Z}_{(p)}\otimes\varphi"] \arrow[d, "f_1"] & \mathbb{Z}_{(p)} \otimes \prod_{[\mathcal{C}]} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & \mathbb{Z}_{(p)} \otimes \prod_{P_i \in [\mathcal{C}]} (\mathbb{Z}/|Out_{\mathcal{F}}(P_i)|\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \quad (II) \\
A(\mathcal{F})_{(p)} \arrow[r, hook, "\varphi_{(p)}"] & \prod_{[\mathcal{C}]} \mathbb{Z}_{(p)} \arrow[r] & \prod_{P_i \in [\mathcal{C}]} \mathbb{Z}_{(p)}/|Out_{\mathcal{F}}(P_i)|\mathbb{Z}_{(p)} \arrow[r] & 0 \quad (III)
\end{tikzcd}$$

Donde f_1 (f_2, f_3) es el único isomorfismo que existe entre su dominio y codominio. Y $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes \varphi$ es inyectiva ya que $\varphi_{(p)}$ es inyectiva pues φ es inyectiva, asi que la sucesión (II) es exacta pues el producto tensorial es exacto derecho. Además $\varphi_{(p)} \circ f_1 = f_2 \circ (\mathbb{Z}_{(p)} \otimes \varphi)$ pues si consideramos un generador $\frac{a}{t} \otimes x$ de $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes A(\mathcal{F})$, entonces $\frac{a}{t} \otimes x \overset{f_1}{\mapsto} \frac{ax}{t} \overset{\varphi_{(p)}}{\mapsto} \frac{\varphi(ax)}{t}$ y por otro lado $\frac{a}{t} \otimes x \overset{\mathbb{Z}_{(p)}\otimes\varphi}{\mapsto} \frac{a}{t} \otimes \varphi(x) \overset{f_2}{\mapsto} \frac{a\varphi(x)}{t} = \frac{\varphi(ax)}{t}$.

En adelante consideraremos $A(\mathcal{F})_{(p)} = \mathbb{Z}_{(p)} \otimes A(\mathcal{F})$, $\varphi_{(p)} = \mathbb{Z}_{(p)} \otimes \varphi$.

A continuación se dará respuesta al siguiente interrogante ¿Cuando un elemento de $\prod_{[\mathcal{C}]} \mathbb{Z}_{(p)}$ está en $A(\mathcal{F})_{(p)}$?

Teorema 3.4. *Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión saturado sobre un p-grupo finito S. Sean $H, K \leq S$ con H, K $\mathcal{F}$-cétricos y K totalmente normalizado, se define*

$$n(K, H) := \{[C_s] \in Out_S(K) / \langle s, K \rangle \cong_{\mathcal{F}} H\}$$

Un elemento $(y_H) \in \prod_{[\mathcal{C}]} \mathbb{Z}_{(p)}$ está en la imagen de $\varphi_{(p)}$ si y solo si las siguientes congruencias se cumplen para todo $K \leq S$ totalmente normalizado y $\mathcal{F}$-céntrico

$$\sum_{[H] \in [\mathcal{C}]} n(K, H) \cdot y_H \equiv 0 \; mod \; (|Out_S(K)|) \; en \; \mathbb{Z}_{(p)} \quad (1)$$

Demostración. Veamos que $n(K, H)$ está bien definido en todos los sentidos, es decir, en K, en H, y que si $[C_s] \in Out_S(K)$, entonces define un único grupo de la forma $\langle s, K\rangle$.
Sean $[C_s] = [C_{s'}] \in Out_S(K)$, asi $C_s = C_{ks'}$ para algún $k \in K$, y asi $s = ks'u$ con $u \in C_S(K) \leq K$, pues K es $\mathcal{F}$-céntrico y asi $\langle s, H\rangle = \langle s', H\rangle$. Además es claro que si $H \cong_{\mathcal{F}} H'$, entonces $n(K, H) = n(K, H')$.

Si $[C] = \{P_1, ..., P_r\}$, entonces con respecto a la base ordenada $[\mathcal{C}\ ]$ de $A(\mathcal{F})_{(p)}$ y la base canónica de $\prod_{[\mathcal{C}\ ]} \mathbb{Z}_{(p)}$ el morfismo φ está representado por una matriz triangular superior m dada por

$$m = (m_{i,j}) = |\mathcal{C}\ (P_i, P_j)|$$

definimos $t := (t_{i,j})_{r\times r} = \left|\mathcal{C}\ (P_i, P_j)/Out_S(P_i)\right|$ con $[P_i], [P_j] \in \mathcal{C}$ y d como la matriz diagonal con entradas $d_{i,i} = |Out_S(P_i)|$, $[P_i] \in [\mathcal{C}\ ]$. Más adelante se verá que estas matrices están bien definidas.

Veamos que $n(K, H)$ está bien definido en K, sea $K \cong_{\mathcal{F}} K'$ con K' totalmente automatizado y receptivo, por lema 2 existe $\alpha \in Iso_{\mathcal{F}'}(K, K')$ tal que se extiende a un $\alpha' \in Hom_{\mathcal{F}}(N_S(K), N_S(K'))$ y $\alpha'(K) = K'$, este morfismo α' es de hecho un isomorfismo pues K' es totalmente automatizado y receptivo, por lo tanto totalmente normalizado, y como K también lo és, $|N_S(K)| = |N_S(K')|$. Por otro lado que se tiene $\alpha'(N_S(K)) \subseteq N_S(\alpha'(K))$ por lo tanto

$$\begin{aligned} |N_S(K)| &= |\alpha'(N_S(K))| \\ &\leq |N_S(\alpha'(K))| \\ &= |N_S(K')| \\ &= |N_S(K)| \end{aligned}$$

y asi $\alpha'(N_S(K)) = N_S(\alpha'(K))$

Consideremos el morfismo de grupos $Aut_S(K) \xrightarrow{F_\alpha} Aut_S(K')$ dado por $F_\alpha(C_s) = \alpha C_s \alpha^{-1} = C_{\alpha'(s)}$.
F_α es un isomorfismo pues claramente es inyectivo, además si $C_t \in Aut_S(K')$, entonces $t \in N_S(K') =$

$N_S(\alpha'(K)) = \alpha'(N_S(K))$ luego $t = \alpha'(q)$ con $q \in N_S(K)$ por lo que $C_t = C_{\alpha'(q)} = F_\alpha(C_q)$.

Por otro lado si $C_s \in int(K)$, $F_\alpha(C_s) = \alpha C_s \alpha^{-1} = C_{\alpha'(s)}$, asi que $F_\alpha(Int(K)) = Int(K')$, luego $Aut_S(K)/Int(K) = Out_S(K) \cong Aut_S(K')/Int(K') = Out_S(K')$ por lo que d y t están bien definidos.

Veamos que la función $\{[C_s] \in Out_S(K)/ \langle s, K\rangle \cong_{\mathcal{F}} H\} \xrightarrow{\psi} \{[C_t] \in Out_S(K')/ \langle t, K'\rangle \cong_{\mathcal{F}} H\}$ dada por $\psi([C_s]) = [{}^\alpha C_s] = [C_{\alpha'(s)}]$ es una biyección. ψ está bien definida pues si $[C_s] = [C_{s'}]$, entonces $s = ks'u$ con $k \in K$ y $u \in C_s(K) \leq K$ (pues K es $\mathcal{F}$-céntico) por lo que $\alpha'(s) = \alpha'(ks'u) = \alpha'(k)\alpha'(s')\alpha'(u)$ y $\alpha'(u) = \alpha(u) \in \alpha(C_S(K)) \subseteq C_S(\alpha(K)) = C_S(K')$, es decir, $[C_{\alpha'(s)}] = [C_{\alpha'(s')}]$. Además $\{[C_t] \in Out_S(K')/ \langle t, K'\rangle \cong_{\mathcal{F}} H\} \xrightarrow{\eta} \{[C_s] \in Out_S(K)/ \langle s, K\rangle \cong_{\mathcal{F}} H\}$ dado por $\eta([C_t]) = [C_{\alpha'^{-1}(t)}]$, es claramente inversa de ψ. Por lo tanto $n(K, H) = n(K', H)$.

Lema 9. *Las matrices n y t son invertibles sobre $\mathbb{Z}_{(p)}$*

Demostración. Por el orden total dado en $[\mathcal{C}\ ]$ se tiene que $n(K, H) = 0$ si $[H] \lneqq [K]$ pues en este caso $|H| < |K|$ o $|K| = |H|$, pero $K \ncong_{\mathcal{F}} H$. Además $n(K, K) = 1$ porque $\langle K, s\rangle = K$ si y solo si $s \in K$, por lo tanto el único elemento en $\{[C_s] \in Out_S(K)/ \langle s, K\rangle \cong_{\mathcal{F}} H\}$ es $[C_1]$. Luego n es invertible.

Similarmente $t([K], [P]) = 0$ si $[P] < [K]$, asi t es triangular superior y sus entradas diagonales son $|Out_{\mathcal{F}}(K) : Out_S(K)| \neq 0 \mod p$ ya que $|Aut_{\mathcal{F}}(K) : Aut_S(K)| = |Out_{\mathcal{F}}(K) : Out_S(K)|$ y el representante $K \in [K] \in [\mathcal{C}\ ]$ es totalmente normalizado, por lo tanto totalmente automatizado en $\mathcal{F}$. ❏

Lema 10. $n \cdot m = d \cdot t$

Demostración. Dados $[C_s] \in Out_{\mathcal{F}}(K)$ y $[f] \in \mathcal{C}\ (K, H)$, $[f][C_s] := [fC_s]$ define una acción libre en $\mathcal{C}\ (K, H)$ (esta es la restricción de la acción de $Out_{\mathcal{F}}(K)$ en $\mathcal{C}\ (K, H)$ que se vió al principio de la sección 2.2). Por lo tanto $|\mathcal{C}\ (K, H)| = |\sqcup_i Orb([g_i])| = |Out_S(K)| \cdot c$, donde c es el número de órbitas.

Sean $[K][P] \in [\mathcal{C}\ ]$. Como todo subgrupo de S que contiene a K es $\mathcal{F}$-céntrico, la $([K], [P])$ entrada de $n \cdot m$ es

$$
\begin{aligned}
\sum_{[H]\in[\mathcal{C}]} n([K],[H])\cdot m([H],[P]) &= \sum_{[H]\in[\mathcal{C}]} |\{[C_s]\in Out_S(K)/\left\langle s,K\right\rangle \cong_{\mathcal{F}} H\}|\cdot|\mathcal{C}\,(H.P)| \\
&= \sum_{[H]\in[\mathcal{C}]}\left(\sum_{[C_s]\in Out_S(K),\langle s,K\rangle\cong_{\mathcal{F}} H} |\mathcal{C}\,(H,P)|\right) \\
&= \sum_{C_s\in Out_S(K)} |\mathcal{C}\,(\left\langle s,K\right\rangle,P)| \\
&= \sum_{C_s\in Out_S(K)} |\mathcal{C}\,(K,P)^{[C_s]}| \\
&= |Out_S(K)|\cdot|\mathcal{C}\,(K,P)/Out_S(K)| \\
&= |Out_S(K)|\cdot t([K],[P])
\end{aligned}
$$

la cual es la entrada de $([K],[P])$ de $d\cdot t$

$\square$

$\Rightarrow]$ ahora se probará que todo elemento en le imagen de $\varphi_{(p)}$ satisface la congruencia (1). Sea $x\in\varphi_{(p)}$, entonces $x=\varphi(\sum\lambda_P[P])=\sum\lambda_P\varphi([P])$, asi que por linearidad es suficiente probar la congruencia para los elementos de la forma

$$\varphi([P])=\sum_{[H]\in[\mathcal{C}]}|\mathcal{C}\,(H,P)|\cdot[H]=\sum_{[H]\in[\mathcal{C}]} m([H],[P])\cdot[H]$$

estos son los $(y_H)\in\prod_{[\mathcal{C}]}\mathbb{Z}_{(p)}$ con $y_H=|\mathcal{C}\,(H,P)|$. Sin perdida de generalidad en las definiciones de m,n,t y d se puede asumir que para toda clase $[K]$ con $K\leq S$, K es totalmente normalizado en $\mathcal{F}$,luego por el lema 10 se tiene

$$
\begin{aligned}
\sum_{[H]\in[\mathcal{C}]} n(K,H)\cdot y_H &= \sum_{[H]\in[\mathcal{C}]} n([K],[H])\cdot m([H],[P]) \\
&= |Out_S(K)|\cdot t([K],[P]) = 0\ mod\ (|Out_S(K)|)
\end{aligned}
$$

esto es, $(y_H)=\varphi_{(p)}([P])$ satisface la congruencia (1)

$[\Leftarrow$

Reciprocamente, supongamos que $(y_H)\prod_{[C]}\mathbb{Z}$ satisface todas las congruencias (1). Si consideramos (y_H) como vectores columna, satisfacer las congruencias es equivalente a que existe un vector $(z_H)\prod_{[C]}\mathbb{Z}$ tal que

$$n \cdot (y_H) = d \cdot (z_H)$$

Y como n y t son invertibles por el lema 9 entonces por el lema 10 se tiene

$$(y_H) = n^{-1} \cdot d \cdot (z_H) = m \cdot t^{-1} \cdot (z_H) \in Im(m) = Im(\varphi_{(p)})$$

porque la matriz m representa a $\varphi_{(p)}$

❏

Corolario 3.5. *Sea $\mathcal{F}$ sistema de fusión saturado sobre S. Entonces $A(\mathcal{F})_{(p)}$ es un anillo conmutativo con unidad. $coker(\varphi_{(p)})$ es un p-grupo abeliano finito, y la unidad de $\prod_{[C]}\mathbb{Z}_{(p)}$ está contenido en $A(\mathcal{F})_{(p)}$.*

Demostración.

Que $coker(\varphi_{(p)})$ sea p-grupo abeliano finito se sigue del hecho que $coker(\varphi_{(p)}) \cong \prod_{P_i\in[C]}\mathbb{Z}_{(p)}/|Out_{\mathcal{F}}(P_i)|\mathbb{Z}_{(p)}$ (con el isomorfismo f_3 dado al inicio de esta sección) y que $|Out_{\mathcal{F}}(P_i)|\mathbb{Z}_{(p)} = p^t\mathbb{Z}_{(p)}$ donde p^t es la máxima potencia de p que divide a $|Out_{\mathcal{F}}(P_i)|$, de hecho $p^t := \left|\frac{Aut_S(P_i)}{Int(P_i)}\right|$ ya que $s.p.g.$ P_i es totalmente automatizado.

Ahora se aplicará el teorema 3.4 para mostrar que la unidad (1_H) de $\prod_{[C]}\mathbb{Z}_{(p)}$ está en la imagen de $\varphi_{(p)}$.
Para todo $Q \in \mathcal{F}^c$ que es totalmente normalizado tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{[P]\in[C]} n(Q,P)\cdot 1 &= \sum_{P\in[C]}\left(\sum_{[C_s]\in Out_S(Q):\ \langle s,Q\rangle\cong_{\mathcal{F}}P} 1\right)\\
&= \sum_{[C_s]\in Out_S(Q)} 1\\
&= |Out_S(Q)|\\
&\equiv 0 \ \ mod\ (|Out_S(Q)|)
\end{aligned}$$

ya que todo subgrupo de S que contiene a Q debe ser $\mathcal{F}$-céntrico. ❏

Es de notar que el elemento $(1_H) \in \prod_{[\mathcal{C}]} \mathbb{Z}$ en general no está en $\varphi(A(\mathcal{F}))$ pues la tabla de marcas $m([H],[K])$ con $[H],[K] \in [\mathcal{C}]$ es triangular superior y su última fila solo tiene un elemento no cero que es $|Out_{\mathcal{F}}(S)|$. Si $|Out_{\mathcal{F}}(S)| \neq 1$ y $(1_H) \in \varphi(A(\mathcal{F}))$, entonces existiera $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k|Out_{\mathcal{F}}(S)| = 1$ lo cual no es posible.

4.1. El espectro primo de $A(\mathcal{F})_{(p)}$. Sea $H \in Ob(\mathcal{C})$ y l la composición de los siguientes morfismos

$$A(\mathcal{F})_{(p)} \xhookrightarrow{\varphi_{(p)}} \prod_{[\mathcal{C}]} \mathbb{Z}_{(p)} \xrightarrow{\pi_H} \mathbb{Z}_{(p)}$$

Asi tenemos que $l(A(\mathcal{F})_{(p)})$ es $\mathbb{Z}_{(p)}$ submodulo de $\mathbb{Z}_{(p)}$ que contiene al 1, por lo que $l(A(\mathcal{F})_{(p)}) = \mathbb{Z}_{(p)}$. Si $P_{H,0} := l^{-1}(0) = ker(l)$, entonces $A(\mathcal{F})_{(p)}/P_{H,0} \cong \mathbb{Z}_{(p)}$ y $P_{H,0}$ es un ideal primo de $A(\mathcal{F})_{(p)}$.

Ahora consideremos $\pi\varphi_{(p)}$ donde π es la proyeción al cociente del siguiente diagrama

$$A(\mathcal{F})_{(p)} \xhookrightarrow{\varphi_{(p)}} \prod_{[\mathcal{C}]} \mathbb{Z}_{(p)} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)} \cong \mathbb{F}_p$$

Si $P_{H,p} := ker(\pi\varphi_{(p)})$, entonces $A(\mathcal{F})_{(p)}/P_{H,p} \cong \mathbb{F}_p$ y $P_{H,p}$ es un ideal maximal de $A(\mathcal{F})_{(p)}$.

Asi conocemos a algunos ideales del $Spec(A(\mathcal{F})_{(p)})$, pero ¿estos son todos o hay más?

Lema 11. *Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión saturado sobre el p-grupo finito S, $A(\mathcal{F})$ su anillo de Burnside. Si R es dominio entero y $A(\mathcal{F})_{(p)} \xrightarrow{f} R$ es morfismo de anillos con uno, entonces $car(R) = 0$ ó p y existe $H \in \mathcal{F}^c$ tal que $f(x) = \varphi_H(x) \cdot 1_R$*

Demostración. Sea R dominio entero y $A(\mathcal{F})_{(p)} \xrightarrow{f} R$ morfismo de anillos con uno. Sea $H, Q \in \mathcal{F}^c$ con H de orden mínimo tal que $f([H]) \neq 0$.

Consideremos el conjunto

$$K_{Q,H} = \{([\alpha], A)/A \xrightarrow{\alpha} H,\ A \leq Q\ ,\ A \in \mathcal{F}^c \text{ y } [\alpha] \in \mathcal{C}(A,H)\}$$

entonces $K_{Q,H}$ es un Q-poset, y esta acción respeta el orden, asi que en $K_{Q,H}/Q$ hay un orden inducido. Sea

$$\{([\alpha_1], A_1), ..., ([\alpha_r], A_r)\}$$

Una colección de representantes de elementos maximales en el cociente.

Hay una biyección $L := \{(\alpha, A)/A \leq Q\, y\, \alpha \in Iso_{\mathcal{F}^c}(A, H)\} \xrightarrow{f} \mathcal{F}(H, Q)$ dada por $(\alpha, A) \overset{f}{\mapsto} \alpha^{-1}$ (con inversa $\beta \overset{f^{-1}}{\mapsto} (\beta(H), \beta^{-1}|_{\beta(H)})$). Por otro lado L y $\mathcal{F}(H, Q)$ son H, Q-conjunto y Q, H-conjunto respectivamente, con las acciones dadas por $h \cdot (A, \alpha) := (A, C_h \cdot \alpha)$ y $(A, \alpha) \cdot q := (A^q, \alpha C_q)$ en L, y $\beta \cdot h := \beta C_{h^{-1}}\ \forall h \in H$ y $q \cdot \beta := C_q \beta\ \forall h \in H$ en $\mathcal{F}(H, Q)$. Además f respeta las acciones, pues si $h \in H$ y $q \in Q$ se tiene que

$$\begin{aligned}
f(h \cdot (A, \alpha)) &= f((A, C_h \alpha)) \\
&= \alpha^{-1} C_h^{-1} \\
&= \alpha^{-1} \cdot h \\
&= f((A, \alpha)) \cdot h
\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}
f((A, \alpha) \cdot q) &= f((A^q, \alpha C_q)) \\
&= C_q^{-1} \alpha^{-1} \\
&= q^{-1} \cdot \alpha^{-1} \\
&= q \cdot f(A, \alpha)
\end{aligned}$$

por lo tanto f induce una biyección f' en los espacios de órbitas $H \setminus L/$ y $Q \setminus \mathcal{F}(H, Q)/H$, es decir

$$
\begin{aligned}
n &:= |H \diagdown L \diagup Q| \\
&= |Q \diagdown \mathcal{F}(H, Q) \diagup H| \\
&= |C\,(H, Q) \diagup H| \\
&= |C\,(H, Q)| \\
&= \varphi_H([Q])
\end{aligned}
$$

Y como f es morfismo de anillos, entonces

$$
\begin{aligned}
f([Q])f([H]) &= f([Q] \cdot [H]) \\
&= \sum_{i=1}^{r} f([A_i]) \\
&= \sum_{\overline{([\alpha_i], A_i)} \in K_{Q,H}/Q:\ \overline{([\alpha_i], A_i)}\ maximal \wedge \alpha_i \in Iso(A_i, H)} f([H]) \\
&= \sum_{\overline{([\alpha_i], A_i)} \in K_{Q,H}/Q:\ \alpha_i \in Iso(A_i, H)} f([H]) \\
&= \sum_{\{([\alpha_i], A_i) \in K_{Q,H}:\ \alpha_i \in Iso_{\mathcal{F}}(A_i)\}/Q} f([H]) \\
&= \sum_{H \diagdown L \diagup Q} f([H]) \\
&= nf(H)\,; \quad con\ \ n := |H \diagdown L \diagup Q| \\
&= \varphi_H([Q])f([H])
\end{aligned}
$$

Asi se tiene que $f([Q]) = \varphi_H([Q]) \cdot 1_R$.

Supongamos $car(R) \neq 0$, es decir, $car(R) = q$ con q primo. En este caso $ker(f) = P_{H,q}$ que es ideal maximal de $A(\mathcal{F})_{(p)}$, asi $F := A(\mathcal{F})_{(p)}/ker(f)$ es campo, con $F \leq R$.

Supongamos que $q \neq p$, es decir, q es invertible en $\mathbb{Z}_{(p)}$, por lo tanto $(q^{-1} \cdot 1_{A(\mathcal{F})_{(p)}})(q \cdot 1_{A(\mathcal{F})_{(p)}}) = 1_{A(\mathcal{F})_{(p)}}$, asi que $[q \cdot 1_{A(\mathcal{F})_{(p)}}] = q[1_{A(\mathcal{F})_{(p)}}]$ es invertible en F, contradicción porque $car(F) = q$ pues

$F \leq R$.

❏

TEOREMA 3.6. *Si $\mathcal{F}$ es un sistema de fusión saturado sobre el p-grupo finito S y $A(\mathcal{F})$ su anillo de Burnside, entonces*

1. $Spec(A(\mathcal{F})_{(p)}) = \{P_{H,0}, P_{H,p} / H \in Ob(\mathcal{F}^c)\}$
2. $P_{H,0} = P_{K,0} \Leftrightarrow H \cong_{\mathcal{F}} K$ *para todos* $H, K \in Ob(\mathcal{F}^c)$
3. $P_{[H],0} \lneqq P_{[H],p}$ *para todo* $[H] \in [\mathcal{C}]$
4. $P_{[H],p} = P_{[S],p}$ *para todo* $[H] \in [\mathcal{C}]$
5. $A(\mathcal{F})_{(p)}$ *es local con ideal maximal* $P_{S,p}$

DEMOSTRACIÓN.

Sea $\mathcal{F}$ es un sistema de fusión saturado sobre el p-grupo finito S y $A(\mathcal{F})$ su anillo de Burnside

1. Sea $I \in Spec(A(\mathcal{F})_{(p)})$, entonces $R := A(\mathcal{F})_{(p)}/I$ es dominio entero asi que si f es la proyección al cociente $A(\mathcal{F})_{(p)} \xrightarrow{f} R$, entonces por teorema anterior $f = \varphi_H \cdot 1_R$ y además $char(R) = 0$ *ó* p.

   Si $char(R) = 0$, entonces para todo $x \in A(\mathcal{F})_{(p)}$ se tiene que

   $$0 = f(x) = \varphi_H(x) \cdot 1_R \Leftrightarrow \varphi_H = 0$$

   es decir, $P_{H,0} = ker(f) = I$.

   Si $char(R) = p$, entonces para todo $x \in A(\mathcal{F})_{(p)}$ se tiene que

   $$\begin{aligned} 0 = f(x) = \varphi_H(x) \cdot 1_R &\Leftrightarrow p | \varphi_H(x) \\ &\Leftrightarrow \pi(\varphi_H(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in ker(\pi\varphi_H) = P_{H,p} \end{aligned}$$

es decir, $P_{H,p} = ker(f) = I$.

2. $\Rightarrow$] Observemos que $[H] \notin P_{H,0}$ pues $|\mathcal{C}(H,H)| \neq 0$ y como $P_{H,0} = P_{K,0}$, $H \notin P_{K,0}$ por lo que $|\mathcal{C}(K,H)| \neq 0$. Razonando analogo para K se tiene $|\mathcal{C}(H,K)| \neq 0$, asi que $H \cong_{\mathcal{F}} K$.

   $\Leftarrow$] es inmediata del hecho que si $H \cong_{\mathcal{F}} K$, entonces $\varphi_H = \varphi_K$.

3. La contención $P_{[H],0} \leq P_{[H],p}$ se debe a la definición de estos conjuntos, y el hecho que sea estricta se debe a que el cociente de $A(\mathcal{F})_{(p)}$ con $P_{[H],0}$ es un dominio entero y con $P_{[H],p}$ es un campo.

4. Supongamos que algún $[Q] \in [\mathcal{C}]$ es tal que $[Q] \notin P_{H,p}$,es decir, $p \nmid \varphi_H([Q]) = |\mathcal{C}(H,Q)|$ y como $|\mathcal{C}(H,Q)| \equiv |Out_{\mathcal{F}}(Q)|\, mod\, p$ (por lema 2.2), entonces $p \nmid |Out_{\mathcal{F}}(Q)|$. Por otro lado $|Out_S(Q)| \mid |Out_{\mathcal{F}}(Q)|$ asi que $p \nmid |Out_S(Q)|$, por lo tanto $Int(Q) = Aut_S(Q)$ asi que si $s \in N_S(Q)$, entonces $C_s = C_t$ para algún $t \in Q$, luego $s = tr$ con $r \in C_S(Q) \subseteq Q$, es decir, $Q = N_S(Q)$, luego $Q = S$ (ya que $Q \lneqq S$, entonces $Q \lneqq N_S(Q)$). Asi se tiene que $[Q] \in P_{H,p}$ para todo $Q \lneqq S$ que sea $\mathcal{F}$-céntrico, asi que si $W := \oplus_{[Q]\in[\mathcal{C}]-\{[S]\}}\mathbb{Z}_{(p)}[Q]$, entonces $W \subseteq P_{H,p}$. Por otro lado $W \subseteq P_{S,0} \subseteq P_{S,p}$, asi que $P_{H,p} = P_{S,p}$ (ya que W era ideal maximal de $A(\mathcal{F})_{(p)}$).

5. Que $A(\mathcal{F})_{(p)}$ sea anillo local con maximal $P_{S,p}$ se sigue de 4)

❑

5. Relación entre $A(\mathcal{F})$ y el anillo de Burnside clásico

Sea G un grupo finito. La colección de todos sus subgrupos es denotada por $S(G)$. Las clase de conjugación de $H \leq G$ es denotada por $[H]$. El anillo de Burnside $A(G)$ de G es isomorfo a el grupo abeliano $\bigoplus_{[H]\in[S(G)]} \mathbb{Z}[G/H]$ donde el producto de elementos básicos $[G/H]$ y $[G/K]$ es dado por la siguiente fórmula de Mackey $[G/H] \cdot [G/K] = \sum_{g\in K\backslash G/H}[G/K^g \cap H]$.

Una collection en G es un subconjunto $\mathcal{H}$ de $S(G)$ la cual es cerrada bajo conjugación por elementos de G. El conjunto de las clases de conjugación de elementos de $\mathcal{H}$ es denotado por $[\mathcal{H}]$. Sea $A(G;\mathcal{H})$ el subgrupo de $A(G)$ generado por los elementos básicos $[G/H]$ tales que $[H] \in [\mathcal{H}]$. Asi

$$A(G;\mathcal{H}) = \oplus_{\mathcal{H}}\mathbb{Z} \leq A(G)$$

La fórmula de Mackey implica que $A(G;\mathcal{H})$ es un ideal de $A(G)$ si $\mathcal{H}$ es cerrado bajo subgrupos (i.e. subgrupos de elementos de $\mathcal{H}$ también están en $\mathcal{H}$). Por ejemplo, la colección $S_p(G)$ de todos los p-grupos de G tiene esta propiedad y define un ideal

$$A(G;p) = A(G;S_p(G)) \lhd A(G)$$

La colección $S_p(G)$ contiene la colecciones $S_p^{cent}(G)$ y $S_p^{\neg cent}(G)$ de los subgrupos p-céntricos y no p-céntricos de G respectivamente (ver definición 4). Del lema 4 y el corolario 1.3 se tiene que $S_p^{\neg cent}(G)$ es cerrado bajo la formación de subgrupos, asi que define un ideal

$$A(G;p-\neg cent) \lhd A(G)$$

el cual claremente está contenido en $A(G;p)$. El resultante anillo cociente

$$A^{p-cent}(G) = \frac{A(G;p)}{A(G;p-\neg cent)}$$

como grupo abeliano es libre con base los $[G/P]$ tales que $[P] \in [S_p^{cent}(G)]$. El producto de los elementos básicos $[G/P]$ y $[G/Q]$ es $\sum_g [G/Q^g \cap P]$ donde la suma de los rangos corre a través de las clases dobles QgP tal que $Q^g \cap P$ es p-céntrico.

Sean $A(G)_{(p)}$, $A(G;p)_{(p)}$, $A(G;p-\neg cent)_{(p)}$, $A^{p-cent}(G)_{(p)}$ el resultado de tensorizar por $\mathbb{Z}_{(p)}$ a $A(G), A(G;p), A(G;p-\neg cent), A^{p-cent}(G)$ respectivamente. Más adelante se mostrará que $A^{p-cent}(G)_{(p)}$ es $\mathbb{Z}_{(p)}$ módulo libre con base los $[G/P]$ tales que $[P] \in [S_p^{cent}(G)]$ con la misma fórmula del producto de elementos básicos, más aun

$$A^{p-cent}(G)_{(p)} = A(G;p)_{(p)}/A(G;p-\neg cent)_{(p)}$$

Teorema 3.7. *Sea $\mathcal{F}_S(G)$ es sistema de fusión asociado a un grupo finito G y un p-subgrupo de Sylow S de G. Entonces los anillos $A(\mathcal{F})_{(p)}$ y $A^{p-cent}(G)_{(p)}$ son isomorfos.*

Demostración. Dado un G-conjunto X denotamos por X^H los elementos de X fijados bajo la acción de H. Un subgrupo $K \leq G$ determina un G-conjunto transitivo G/K dado por la acción izquierda determinada por la operación de G. Los G-conjuntos G/K y G/K' son isomorfos si y solo si K y

K' son conjugados.

Consideremos el morfismo de anillos $A(G)_{(p)} \xrightarrow{\chi} \prod_{[H]\in[S(G)]} \mathbb{Z}_{(p)}$ dado por $[K] \longmapsto \sum_{[H]\in[S(G)]} |(G/K)^H|\cdot [H]$. Como $[S_p^{p-cent}(G)] \subseteq [S_p(G)]$, entonces tenemos el siguiente morfismo de anillos inducido por χ

$$\overline{\psi} : A(G;p)_{(p)} \xrightarrow{incl} A(G)_{(p)} \xrightarrow{\chi} \prod_{[S(G)]} \mathbb{Z}_{(p)} \xrightarrow{proj} \prod_{[S_p^{p-cent}(G)]} \mathbb{Z}_{(p)}$$

Como $S_p^{\neg p-cent}(G)$ es cerrado bajo subgrupos, si $K \in S_p^{\neg p-cent}(G)$ y $H \in S_p^{p-cent}(G)$, entonces $|(G/K)^H| = 0$. Asi que $A^{\neg p-cent}(G)_{(p)} \subseteq ker(\overline{\psi})$ por lo que tenemos el siguiente morfismo de anillos inducido por $\overline{\psi}$

$$\psi : A^{p-cent}(G)_{(p)} \longrightarrow \prod_{[Q]\in[S_p^{p-cent}(G)]} \mathbb{Z}_{(p)}$$

dado por $[P] \longmapsto \sum_{[Q]\in[S(G)]} |(G/P)^Q| \cdot [Q]$.

Para $H, K \leq G$ se define

$$N_G(H,K) := \{g \in G/gHg^{-1} \leq K\}.$$

Claramente $N_G(H,K)$ es $K-N_G(H)$-biconjunto con las acciones dadas por la operación de G restringida . Además, la acción de H en $K\diagdown N_G(H,K)$ es trivial, pues $[g]\cdot h = [gh] = [(ghg^{-1})g] = [g]$ para todo $h \in H$.

Observese que todo elemento $g \in N_G(P,Q)$ determina un elemento $C_g \in Hom_G(P,Q)$. Esta asignación es sobreyectiva; además (por el lema 1), determina una biyección w entre $N_G(P,Q)\diagup C_G(P)$ y $Hom_G(P,Q)$. Más aún w respeta la acciones izquierdas de Q dadas por $q\cdot[g] := [qg]$ y $q * C_g := C_q \circ C_g$ para todo $[g] \in N_G(P,Q)\diagup C_G(P)$ y $C_g \in Hom_G(P,Q)$, pues

$$\begin{aligned} w(q \cdot [g]) &= w([qg]) \\ &= C_{qg} \\ &= C_q \circ C_g \\ &= q * C_g \end{aligned}$$

por lo que $\mathcal{C}(P,Q) \approx Q\diagdown N_G(P,Q) \diagup C_G(P)$.

Lema 12. *Si $P, Q \leq S$ son $\mathcal{F}$-céntricos, entonces*

$$|(G/Q)^P| = |C'_G(P)| \cdot |\mathcal{C}(P,Q)|$$

Demostración.

Observese que $(G/Q)^P = N_G(P,Q)^{-1}/Q$, donde la acción de Q en $N_G(P,Q)^{-1}$ viene dada por $x \cdot q := xq^{-1}$ para todos $x \in N_G(P,Q)^{-1}$ y $q \in Q$; pues si

$$\begin{aligned} xQ \in (G/Q)^P &\Leftrightarrow p \cdot (xQ) = pxQ = xQ \ \ \forall p \in P \\ &\Leftrightarrow (px)^{-1}x = x^{-1}p^{-1}x \in Q \ \ \forall p \in P \\ &\Leftrightarrow x^{-1}Px \subseteq Q \\ &\Leftrightarrow x \in N_G(P,Q)^{-1} \\ &\Leftrightarrow xQ \in N_G(P,Q)^{-1} \diagup Q \end{aligned}$$

Consideremos la biyección $N_G(P,Q) \xrightarrow{l} N_G(P,Q)^{-1}$ dada por $x \longmapsto x^{-1}$. $l(q \cdot x) = x^{-1}q^{-1} = l(x)q^{-1} = l(x) \cdot q$ para todos $q \in Q$, y $x \in N_G(P,Q)$, por lo tanto l induce una biyección entre los espacios de órbitas. Asi $(G/Q)^P = N_G(P,Q)^{-1} \diagup Q \approx Q\diagdown N_G(P,Q)$.

Como P es p-céntrico en G, pues es $\mathcal{F}$-céntrico, se tiene que $C_G(P) = C'_G(P) \times Z(P)$. Además $Z(P) \leq P$, por lo que $Z(P)$ actúa trivialmente en $Q\diagdown N_G(P,Q)$, asi

$$\mathcal{C}(P,Q) \approx Q\diagdown N_G(P,Q) \diagup C'_G(P)$$

más aún, la acción de $C'_G(P)$ en $Q\diagdown N_G(P,Q)$ es libre; pues si $x \in C'_G$ en $Qg \in Q\diagdown N_G(P,Q)$ son tales que $Qgx = Qg$, entonces $gxg^{-1} \in Q$ lo que implica $x = 1$, ya que $(o(x) = o(gxg^{-1}), p) = 1$. Por lo tanto $|(G/Q)^P| = |N_G(P,Q)^{-1}\diagup Q| = |Q\diagdown N_G(P,Q)| = |C'_G(P)| \cdot |C\ (P,Q)|$.

❏

Por construcción $P, Q \leq S$ son $\mathcal{F}$-conjugados si y solo si son conjugados en G. También $P \leq S$ es $\mathcal{F}$-céntrico si y solo si es p-céntrico. Se sigue entonces que la colección $[S_p^{cent}(G)]$ de las clases de conjugación de p-céntricos y la colección $[C\ ]$ de las clases de $\mathcal{F}$-conjugación de $\mathcal{F}$-céntricos son iguales ($[S_p^{cent}(G)] = [C\ ]$). Asi se tiene un isomorfismo de $\mathbb{Z}_{(p)}$-módulos libres

$$\lambda : A(\mathcal{F})_{(p)} \longrightarrow A^{p-cent}(G)_{(p)}$$

en cual es la identidad en los elementos básicos. Es claro que λ es un isomorfismo de $\mathbb{Z}_{(p)}$-módulos (pero no es morfismo de anillos).

sea $\eta \in \prod_{[Q]\in[S_p^{cent}]} \mathbb{Z}$

$$\eta = \sum_{[Q]\in[S_p^{p-cent}(G)]} |C'_G(Q)| \cdot [Q]$$

Se sigue de la definición de ψ, del lema anterior y de la definición de φ que es siguiente diagrama de $\mathbb{Z}_{(p)}$-módulos es conmutativo. (Nota: no es un diagrama conmutativo de anillos, pues solamente ψ y $\varphi_{(p)}$ son de anillos)

$$\begin{tikzcd}
A(\mathcal{F})_{(p)} \arrow[r, "\overset{\lambda}{\cong}"] \arrow[d, "\varphi_{(p)}"] & A(G)^{p-cent}_{(p)} \arrow[d, "\psi"] \\
\prod_{[Q]\in[S_p^{cent}]} \mathbb{Z}_{(p)} \arrow[r, "\overset{\cdot\eta}{\cong}"] & \prod_{[Q]\in[S_p^{cent}]} \mathbb{Z}_{(p)}
\end{tikzcd}$$

$\cdot\eta$ es el morfismo inducido por la multiplicación por η el cual es un isomorfismo de $\mathbb{Z}_{(p)}$-módulos porque los $|C'_G(Q)|$'s son invertibles en $\mathbb{Z}_{(p)}$, ya que p no los divide. Además el diagrama conmuta pues si $[C\ ] = \{[P_1, ..., [P_r]]\}$ y $[Q] \in A(\mathcal{F})_{(p)}$ es básico, entonces

$$
\begin{aligned}
\cdot\eta\varphi_{(p)}([Q]) &= \cdot\eta(\sum_{[P]\in[\mathcal{C}]} |\mathcal{C}(P,Q)|\cdot[P]) \\
&= \sum_{[P]\in[\mathcal{C}]} |C'_G(P)||\mathcal{C}(P,Q)|\cdot[P] \\
&= \sum_{[P]\in[\mathcal{C}]} |(G/Q)^P|\cdot[P] \\
&= \psi\lambda([Q])
\end{aligned}
$$

Lema 13. $\eta \in Im(\varphi_{(p)})$

Demostración.

Por el teorema 3.4, solo se tendrá que mostrar que para todo $K \leq S$ que sea $\mathcal{F}$-céntrico (p-céntrico) y totalmente normalizado en $\mathcal{F}$, se cumpla la siguiente congruencia

$$\sum_{[H]\in[\mathcal{C}]} n(K,H)\cdot|C'_G(H)| = 0 \;\; mod\,(|Out_S(K)|)$$

Asi que esta suma solo aparecen los términos, que salvo $\mathcal{F}$-conjugación, $K \leq H \leq N_S(K)$ y H/K es cíclico, pues para todos los demás $n(K,H) = 0$.

Lema 14. *Sean $H, K \in \mathcal{F}_S(G)$ $\mathcal{F}_S(G)$-céntricos-céntricos y K totalmente normalizado.*

$$n(K,H) \neq 0 \Leftrightarrow K \leq H \leq N_S(K) \text{ y } H/K = \langle[s]\rangle$$

Demostración.

$\Rightarrow$] Si $n(K,H) \neq 0$, existe $[C_s] \in Out_S(K)$ tal que $\langle s,K\rangle \cong_{\mathcal{F}} H$, asi que H/K es cíclico. Además $C_s \in Aut_S(K) = N_S(K)/C_S(K)$ por lo que $s \in N_S(K)$ y asi $K \leq H \leq N_S(K)$.

[$\Leftarrow$ si H/K es cíclico y $K \leq H \leq N_S(K)$, entonces $H/K = \langle[s]\rangle$ con $s \in H - K$, asi que $\langle s,K\rangle = \langle s\rangle K \cong_{\mathcal{F}} H$. Por otro lado, $s \in N_S(K)$ por lo que $[C_s] \in Out_S(K)$.

❏

Ahora fijemos $s \in N_S(K)$. Claramente $N_S(K)$ normaliza $C_G(K)$ y asi también normaliza al subgrupo característico $C'_G(K)$. Por lo que $N_S(K)/K$ actúa vía conjugación en $C'_G(K)$ y para todo $s \in N_S(K)$ el grupo $\langle s, K\rangle$ es p-céntrico ya que contiene a K. Más aún

$$C'_G(\langle s, K\rangle) = C_G(\langle s, K\rangle) \cap C'_G(K) = C'_G(K)^s$$

donde $C'_G(K)^s$ son los puntos fijos de s bajo su acción en $C'_G(K)^s$.Usando la fórmula de Frobenius se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{[H]\in[C\,]} n(K,H)\cdot|C'_G(H)| &= \sum_{[H]\in[C\,]}\left(\sum_{[s]\in N_S(K)/K,\langle s,K\rangle\cong_{\mathcal{F}}H}|C'_G(H)|\right)\\
&= \sum_{[H]\in[C\,]}\left(\sum_{[s]\in N_S(K)/K,\langle s,K\rangle\cong_{\mathcal{F}}H}|C'_G(\langle s,K\rangle)|\right)\\
&= \sum_{[s]\in N_S(K)/K}|C'_G(\langle s,K\rangle)|\\
&= \sum_{[s]\in N_S(K)/K}|C'_G(K)^{[s]}|\\
&= |N_S(K)/K|\cdot|\{orbitas\,de\,N_S(K)/K\,en\,C'_G(K)\}| \equiv 0 \;\; mod\,(|Out_S(K)|)
\end{aligned}$$

❑

Sea $A := Im(\varphi_{(p)})$ y $B := Im(\psi)$. Ambos son $\mathbb{Z}_{(p)}$-submodulos de $M := \prod_{[Q]\in[S_p^{cent}]}\mathbb{Z}_{(p)}$. Como $\cdot\eta\varphi_{(p)} = \psi\lambda$, entonces $B = \eta\cdot A$. Además A es subanillo de M y $\eta \in A$ (por el lema anterior), asi que $\eta\cdot A \subseteq A$. Por lo tanto η induce un morfismo entre las siguientes sucesiones exactas cortas de $\mathbb{Z}_{(p)}$-módulos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\cdot\eta"] & M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\cdot\eta"] & M/A \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\cdot\eta}"] & 0\\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & M \arrow[r, "\pi"] & M/A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde π es la proyección canónica y $\overline{\cdot\eta}$ es el inducido por $\cdot\eta$ en M/A. Luego como $\overline{\cdot\eta}(\pi) = \pi(\cdot\eta)$ que es epimorfismo, entonces $\overline{\cdot\eta}$ es epimorfismo. Pero M/A es finito (corolario 3.5), asi que $\overline{\cdot\eta}$ es isomorfismo, y por el lema del 5 $\eta\cdot A = A$. Ya que $\varphi_{(p)}$ es monomorfismo de anillos al igual que

ψ (pues este es restricción de la inmersión del anillo de burnside de un grupo finito en su anillo fantasma), se tiene que $A(\mathcal{F})_{(p)} \cong A = \eta \cdot A = B \cong A^{p-cent}(G)_{(p)}$. ❏

Apéndice A

Teorema A.1. *Si G es un grupo finito,y $\cdot_G$ es G visto como categoría. Entonces los anillos de Burnside $B(\cdot_G)$ y $B(G)$ son isomorfos.*

Demostración.

Consideremos el isomorfismo de anillos $B(\cdot) \xrightarrow{L} B(G)$ definido como $[M] \mapsto [M(\cdot)]$.

L cae donde debería, es decir, $M(\cdot)$ en realidad es un G-conjunto ya que $g \cdot m := M(g^{-1})(m)$ define una acción en $M(\cdot)$. En efecto $e \cdot m = M(e)(m) = m$ y para todo $h, g \in G$

$$\begin{aligned}(gh) \cdot m &= M(h^{-1}g^{-1})(m) \\ &= M(g^{-1})M(h^{-1})(m) \\ &= M(g^{-1})(h \cdot m) \\ &= g \cdot (h \cdot m)\end{aligned}$$

L está bien definido pues si $M \cong N$ como funtores, entonces existe una biyección $\eta_\cdot : M(\cdot) \to N(\cdot)$ tal que $\eta_\cdot(M(g)) = N(g)\eta_\cdot$ y asi la esta asignación que viene dada por $m \mapsto \eta_\cdot(m)$ define un isomorfismo de G-conjuntos.

$B(G) \xrightarrow{K} B(\cdot_G)$ definido como $[X] \mapsto [I]$ donde $I(\cdot) := X$ y $I(g) : X \to X$ es el morfismo dado por $I(g)(x) := g \cdot x$, para todo $g \in Hom(\cdot, \cdot) = G$, y L son inversos. Veamos que $I(g)$ si es morfismo de G-conjuntos

$$
\begin{aligned}
h \cdot I(g)(x) &= h \cdot (g \cdot x) \\
&= (hg) \cdot x \\
&= I(hg)(x) \\
&= I(g)I(h)(x) \\
&= I(g)(h \cdot x)
\end{aligned}
$$

Y claramente L es de anillos.

❑

Bibliografía

[1] J. L. Alperin, Rowen B. Bell. *Groups and representations*. Springer, pp. 120-128 , 1991.

[2] J. L. Alperin, *Sylow intersections and fusions*. Journal of Algebra, pp. 222-241 , 1976.

[3] Michael Aschbacher, Radha Kessar, Bob Oliver. *Fusion Systems In Algebra And Topology* . The London Mathematical Society (Lecture Note Series 391), 2011.

[4] C. Broto, R Levi, B. Oliver. *Homotopy equivalences of p-complemented classifying spaces of finite groups* invent. math.151, pp 611-664, 2003.

[5] S. Bouc. *Burside rings* in: Handbook of Algebra, vol. 2, North-Holland, Amsterdam, pp. 739-804, 2000.

[6] David A. Craven. *The Theory of Fusion Systems: An Algebraic Approach* . Cambridge University Press (Cambridge studies in advance mathematics 131), 2011.

[7] Antonio Diaz; Assaf Libman. *The Burnside ring of fusion systems*. Advances In Mathematics, vol. 222 pag 1943-pag 1963, 2009.

[8] Hazewinkel, Michiel. *Encyclopedia of mathematics: Supplement Volumen 3*. Springer, pp. 261-263 , 2002.

[9] Lluís Puig. *Frobenius Categories versus Brauer Blocks* . Progress in Mathematics 274 , 2009.

[10] Lluís Puig. *Frobenius Categories* . Journal of Algebra 303 , pp 309-357, 2006.

[11] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra* . Springer (Second edition), 2009.

[12] Joseph J. Rotman. *Advanced Modern Algebra* . Prentice Hall, 2002.

[13] Michio Suzuki. *Group Theory* . Springer Vol. 1, 1982.