



UNIVERSIDAD MICHOACACA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

“EL CONTROL ADMISIBLE MEDIANTE
POLINOMIOS ORTOGONALES”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADA EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:

BLANCA DE JESÚS GÓMEZ OROZCO

ASESOR:
DR. ABDON EDDY CHOQUE RIVERO

MORELIA, MICHOACÁN, MAYO 2015



*Dedicado a mi
familia y amigos*

Agradecimientos

Estoy muy agradecida con Dios por quererme y poner en mi camino gente bonita de buen corazón, amigos y familia.

No puedo expresar lo agradecida que estoy con mi familia: primero mis padres, Ofelia y José, después mis hermanos y cuñadas, José, Antonio y Alejandra, Adrián y Andrea, Carlos y Rene, al final mis hermanas, Gloria, Carmen, Diana y Brenda, todos ustedes han colaborado de alguna u otra manera, ya sea aconsejando, ayudando, acompañando, regañando, guiando... gracias por su confianza y apoyo tanto moral como económico.

Agradezco por poner en mi vida universitaria a un grupo de personas tan especiales, mis colegas: Alejandra, Adriana, Maritza, Nanci, Geraldine, Marlén, Martha y Perla, gracias por su compañerismo, sobre todo por esa amistad que construimos. Ha sido una dicha poder estudiar al lado de ustedes.

Amigos que me encontré en el camino que también me acompañaron, apoyaron y me brindaron su amistad, Misha, Hugo, Abraham, Lety, Chechi, Cris y los hermanos de Martha.

A todos mis profesores que fueron parte de mi formación y orientación, por la paciencia y tolerancia que me han tenido, en especial al Dr. Fernando Garibay que fungió como mi tutor durante mi carrera. Al Dr. Jesús Muciño por permitir realizar mi servicio social con él y gracias por todas sus atenciones, consejos y regaños, que de una u otra forma me impulsaron a donde estoy ahora.

Agradezco a mi asesor Dr. Abdon E. Choque Rivero, por su esfuerzo, dedicación y atención que presto para la realización de esta tesis. Por su forma de trabajar, su paciencia y motivación se ha ganado mi admiración y confianza. Es muy agradable trabajar con usted profesor.

Además, quiero agradecer al IFM por el espacio que me brinda para trabajar.

Por último, también quisiera agradecer a los revisores y sinodales: Dr. Fernando Garibay Bonales, Dr. Petr Zhevandrov Bolshakova, Dr. Francisco Javier Domínguez Mota y Dr. Joaquin Estévez Delgado por el tiempo dedicado a mi tesis.

Resumen

Planteamiento del problema de control admisible (CA)

Se considera el sistema de control $\dot{x} = Ax + Bu$. Sean dados $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $T > t_{min}$. Hallar el conjunto de todos los controles $|u| \leq 1$, tales que la trayectoria $x(t)$ del sistema $\dot{x} = Ax(t) + Bu_{x_0}(t)$, partiendo del punto inicial $x(0) = x_0$ llegue al origen en tiempo $T > t_{min}$, es decir $x(T) = 0$. Donde $A := \{\delta_{j,k+1}\}_{j,k=1}^m$ y $B := (1, 0, \dots, 0)^T$.

1. Resultados de la tesis.

- a) Se analizaron cuatro artículos, de reciente publicación del 2010 al 2015:
 - 1) *The admissible control problem from the moment problem of view*. Ver [3].
 - 2) *The time optimal control as an interpolation problem*. Ver [4].
 - 3) *The resolvent matrix for the Hausdorff matrix moment problem expressed in terms of orthogonal matrix polynomials*. Ver [5].
 - 4) *From the Potapov to the Krein-Nudel'man representation of the resolvent matrix of the truncated Hausdorff matrix moment problem*. Ver [6].
- b) Se usó el método de problema de momentos reescrito mediante polinomios ortogonales en $[0, T]$ del eje real.

2. Resultados nuevos.

- a) El resultado principal de la tesis es la demostración de la existencia de dos soluciones, llamadas *soluciones extremales* (4.8) y (4.9) para el problema CA, tales que las trayectorias extremales $x(t)$ alcanzan el origen en el tiempo exacto T , $T > t_{min}$. Los controles correspondientes toman valores de ± 1 y tienen m saltos, donde m es la dimensión del sistema.
- b) En comparación con el control óptimo que garantiza no más de $(m - 1)$ saltos, los controles que obtenemos, poseen exactamente m saltos.
- c) Se dan varios ejemplos para diferentes dimensiones. Se comparan los tiempos de conmutación, del control óptimo y de los controles de las dos soluciones extremales.

Palabras clave: Control admisible, Problema de momentos, Polinomios ortogonales, Soluciones extremales.

Abstract

Statement of the admissible control (AC) problem

Consider the system $\dot{x} = Ax + Bu$. For a given initial condition $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $T > t_{min}$. Find the set of all controls $|u| \leq 1$, such that the trajectory $x(t)$ of the system $\dot{x} = Ax(t) + Bu_{x_0}(t)$, starting of $x(0) = x_0$ terminates at the origin at time $T > t_{min}$, i.e. $x(T) = 0$. Where $A := \{\delta_{j,k+1}\}_{j,k=1}^m$ y $B := (1, 0, \dots, 0)^T$.

1. Results of thesis

- a) We analyze four papers recently published between 2010 and 2015:
 - 1) *The admissible control problem from the moment problem of view*. See [3].
 - 2) *The time optimal control as an interpolation problem*. See [4].
 - 3) *The resolvent matrix for the Hausdorff matrix moment problem expressed in terms of orthogonal matrix polynomials*. See [5].
 - 4) *From the Potapov to the Krein-Nudel'man representation of the resolvent matrix of the truncated Hausdorff matrix moment problem*. See [6].
- b) We use the method of moment problems and orthogonal polynomials on $[0, T]$ on real axis.

2. News results.

- a) The main result of the thesis is the following: there are two solutions, called *extremal solutions* (4.8) y (4.9) of the AC problem, which take the values ± 1 and have exactly m switchings.
- b) We compare these two solutions with the optimal control one which has no more than $(m - 1)$ switchings, while the extremal solutions have exactly m switchings.
- c) We give a number of examples for different dimensions. We compare switchings of extremal solutions with switchings of the time optimal control.

Keywords: Admissible control, Moment problem, Orthogonal polynomials, Extremal solutions.

Índice general

Agradecimientos	v
Resumen	vii
Abstract	ix
Índice general	xi
1. Introducción	1
1.1. Nociones de la teoría de control	1
1.2. Nociones del problema de momentos	2
1.3. Nociones de polinomios ortogonales	3
2. Preliminares	5
2.1. Control óptimo	5
2.1.1. Principio de Pontryagin	6
2.2. Sistemas lineales controlables	8
2.2.1. Matriz exponente	9
2.2.2. Controlabilidad de sistemas lineales de control	9
2.3. Control admisible para el sistema canónico	11
3. Control admisible mediante el problema de momentos	13
3.1. Planteamiento del problema	14
3.2. Problemas de momento de Markov y Hausdorff	14
3.3. Ciertas clases de funciones holomorfas	14
3.4. Relación entre PMM y PMH	16
3.5. Solución al problema de control admisible	19
4. Polinomios ortogonales de Hausdorff y soluciones extremales	21
4.1. Notación y preliminares	21
4.2. Polinomios ortogonales matriciales	22
4.2.1. Versión escalar	23
4.3. Matriz resolvente de PMH mediante polinomios ortogonales	26
4.4. Soluciones extremales de PMH mediante polinomios ortogonales	27

5. Soluciones extremales del problema CA mediante polinomios ortogonales	29
5.1. Propiedades especiales de las soluciones extremales del problema CA	29
5.2. Forma explícita de los controles admisibles	32
6. Ejemplos de soluciones extremales para sistemas en varias dimensiones	39
6.1. Dimensión $m = 2$, con diferentes condiciones iniciales	39
6.1.1. Gráficas de controles con $x_0 = \{1, 1\}$, $ u \leq 1$	40
6.1.2. Gráficas de trayectorias con $x_0 = \{1, 1\}$, $ u \leq 1$	41
6.1.3. Gráficas de controles con $x_0 = \{1, 4\}$, $ u \leq 1$	43
6.1.4. Gráficas de trayectorias con $x_0 = \{1, 4\}$, $ u \leq 1$	44
6.1.5. Gráficas de controles con $x_0 = \{3, 5\}$, $ u \leq 1$	46
6.1.6. Gráficas de trayectorias con $x_0 = \{3, 5\}$, $ u \leq 1$	47
6.1.7. Gráficas de controles con $x_0 = \{0, 1\}$, $ u \leq 1$	49
6.1.8. Gráficas de trayectorias con $x_0 = \{0, 1\}$, $ u \leq 1$	50
6.1.9. Gráficas de controles con $x_0 = \{-0.6, 0.18\}$, $ u \leq 1$	52
6.1.10. Gráficas de trayectorias con $x_0 = \{-0.6, 0.18\}$, $ u \leq 1$	53
6.2. Gráficas de controles $m = 3$, $x_0 = \{1, 0, 1\}$, $ u \leq 1$	55
6.3. Gráficas de controles $m = 4$, $x_0 = \{1, 5, 2, 0\}$, $ u \leq 1$	56
6.4. Gráficas de controles $m = 5$, $x_0 = \{1, 0.5, 1, 0.1, 1\}$, $ u \leq 1$	57
6.5. Gráficas de controles $m = 6$, $x_0 = \{7, 1, 1, 3, 6, 1\}$, $ u \leq 1$	58
6.6. Gráficas de controles $m = 7$, $x_0 = \{0, 0, 0, 1, 0, 0, 0\}$, $ u \leq 1$	59
6.7. Gráficas de controles $m = 7$, $x_0 = \{1, 2, 0, 1, 0, 2, 0\}$, $ u \leq 1$	60
A. Ortogonalidad de polinomios	61
A.1. Polinomios ortogonales	61
A.1.1. Integral del producto $R_j(t) v_j v_k^* R_k^*(t)$	64
A.1.2. Polinomios $P_{1,j}(t)$	67
A.1.3. Polinomios $P_{2,j}(t)$	68
A.1.4. Polinomios $\Gamma_{1,j}(t)$	69
A.1.5. Polinomios $\Gamma_{2,j}(t)$	70
A.2. Polinomios de segunda especie	71
A.2.1. Polinomios $Q_{1,j}(t)$	71
A.2.2. Polinomios $Q_{2,j}(t)$	73
A.2.3. Polinomios $\Theta_{1,j}(t)$	75
A.2.4. Polinomios $\Theta_{2,j}(t)$	77
B. Propiedades de polinomios ortogonales	79
B.1. Propiedades de la matriz resolvente y $R_j(t)$	79
B.2. Grados de polinomios $P_{r,j}$, $Q_{r,j}$, $\Gamma_{r,j}$ y $\Theta_{r,j}$	82
B.3. Complemento de Schur	83

C. Integración	85
C.1. Funciones medibles	85
C.2. Integral de Lebesgue	85
C.3. Medidas de Stieltjes	86
C.4. Integral de Lebesgue-Stieltjes	86
C.5. Aplicación de la integral Lebesgue-Stieltjes en la teoría de probabilidades .	87
C.6. Integral de Riemann-Stieltjes	87
Bibliografía	89

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo presentamos un breve resumen de las nociones que se emplearán en el presente trabajo. En la primera sección introducimos la función $u(t)$ llamada “control”, que representa una función que permite influir en el sistema estudiado. Mencionamos algunos fundamentos de la teoría de control que requerimos en el transcurso de este trabajo. En la siguiente sección introducimos las propiedades importantes del problema de momentos en un intervalo del eje real (finito e infinito), describimos la fórmula inversa de Stieltjes. Para finalizar el capítulo en la última sección introducimos algunas nociones de los polinomios ortogonales.

1.1. Nociones de la teoría de control

Los objetos controlables se ven literalmente a cada paso, el automóvil, avión, todos los instrumentos eléctricos equipados con reguladores, (por ejemplo, un refrigerador eléctrico), etc. Lo común en todos estos objetos es que podemos “controlarlos”, podemos de una u otra forma influir en su conducta.

Nosotros consideramos sistemas descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir trataremos con ecuaciones de la forma,

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$ y f es una función suave.

Recalquemos que a diferencia de los resultados principales del estudio de ecuaciones con parámetros, los cuales se refieren a la continuidad y diferenciabilidad de las soluciones del sistema (1.1) que dependen del parámetro u , en la teoría de control el parámetro u es una función $u : [t_0, T] \rightarrow \Omega$ continua a trozos (por la izquierda), que depende del tiempo, llamada **control** del sistema (1.1).

Conociendo la conducta del parámetro de control u , es decir, conociendo la función de control $u(t)$ para $t > t_0$, del sistema de ecuaciones

$$\dot{x} = f(x, u(t)), \tag{1.2}$$

podemos unívocamente determinar el movimiento del objeto (para $t > t_0$), si conocemos la posición de fase del objeto en el momento $t = t_0$. En otras palabras, mediante la función dada $u(t)$ y la posición fase inicial x_0 de manera unívoca se determina la trayectoria de fase $x(t)$, $t > t_0$.

Con frecuencia, el parámetro de control u no puede admitir valores completamente arbitrarios, sino que están sujetos a algunas restricciones, denominadas **controles admisibles**.

En la teoría de control son importantes los siguientes problemas:

- a) Dado un modelo matemático, ¿se puede garantizar que es controlable?
- b) ¿Cómo determinar un control?
- c) ¿Cómo hallar un control óptimo en algún sentido?

La teoría de control óptimo (TCO) surgió en los años 50's, en respuesta a los esfuerzos de los estadounidenses y rusos por explorar el espacio cósmico. La TCO incluye problemas de optimización.

Se consideran iniciadores de TCO al matemático ruso Lev Pontryagin, quien con coautores sugirió el método del Principio del Máximo de Pontryagin (PMP), y al ingeniero estadounidense Richard Bellman, autor del método de la Programación Dinámica (PD).

Un ejemplo de problema de TCO, es el siguiente: deseamos construir trayectorias a lo largo de las cuales un vehículo espacial controlado por un motor a propulsión, pueda llegar a su destino en un tiempo mínimo o usando el mínimo de combustible.

1.2. Nociones del problema de momentos

El matemático ruso Chebyshev fue, aparentemente, el primero en considerar el problema de momentos.

$$c_0 = \int_a^b f(u)du, \quad c_1 = \int_a^b u f(u)du, \quad c_k = \int_a^b u^k f(u)du.$$

El concepto de problema de momentos (PM) lo introdujo Stieltjes en 1894, quien también instauro el concepto de integral de Stieltjes.

Dar una distribución de masa positiva en la recta $[0, \infty)$, significa dar una función no decreciente $\sigma(u)$ ($u \leq 0$) tal que el incremento $\sigma(\beta) - \sigma(\alpha)$ representa para cualquier $\alpha \leq 0$ y $\beta > \alpha$ la masa que corresponde al intervalo $[\alpha, \beta]$. La masa completa del conjunto $[0, \infty)$ se representa en la forma

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} [\sigma(\beta) - \sigma(0)] = \int_0^{\infty} d\sigma(u),$$

mientras que

$$\int_0^{\infty} u d\sigma(u), \quad \int_0^{\infty} u^2 d\sigma(u),$$

representan los momentos estáticos de la distribución de masa considerada y el momento de inercia respecto del punto $u = 0$. Stieltjes llama momento generalizado de orden k a la integral

$$\int_0^\infty u^k d\sigma(u).$$

Consecuentemente, en el problema de Stieltjes se tiene una sucesión de números s_k ($k = 1, 2, \dots$) y se busca una función no negativa $\sigma(u)$, para $u \leq 0$, tal que se satisface

$$\int_0^\infty u^k d\sigma(u) = s_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Nuestro enfoque para el estudio del problema de momentos de Hausdorff $I = [a, b]$ es llevar o trasladar el problema PM, a un problema que involucra funciones holomorfas de la forma

$$s(z) = \int_I (\tau - z)^{-1} d\sigma(\tau), \quad (1.3)$$

donde σ es medida positiva (o función monótona no decreciente de variación acotada) sobre $I \subseteq \mathbb{R}$.

La solución del PM se da mediante la relación

$$s(z) = \frac{\alpha(z)w(z) + \beta(z)}{\gamma(z)w(z) + \delta(z)},$$

donde w pertenece a una cierta clase de funciones holomorfas de la forma (1.3) y α, β, γ y δ son polinomios que dependen de los momentos $\{s_j\}_j^k$.

Normalizando σ por la condición

$$\sigma(t) = \frac{\sigma(t+0) - \sigma(t-0)}{2}, \quad \sigma(0) = 0,$$

esta función es determinada únicamente por la siguiente fórmula inversa de Stieltjes:

$$\sigma(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^t \Im(s(x + i\epsilon)) dx, \quad t \in [a, b].$$

1.3. Nociones de polinomios ortogonales

En el cálculo un ejercicio elemental es usar la identidad trigonométrica

$$2 \cos k\theta \cos m\theta = \cos(k+m)\theta + \cos(k-m)\theta \quad (1.4)$$

para obtener la fórmula de integración

$$\int_0^\pi \cos k\theta \cos m\theta d\theta, \quad k \neq m; \quad k, m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

De hecho la integral (1.5) desaparece, si decimos que $\cos k\theta$ y $\cos m\theta$ son *ortogonales* sobre el intervalo $(0, \pi)$ para $k \neq m$. También decimos que $\{1, \cos \theta, \cos 2\theta, \dots \cos m\theta, \dots\}$ es una secuencia ortogonal sobre $(0, \pi)$. Ver [2].

Observemos que el cambio de variable, $x = \cos \theta$, convierte (1.5) en

$$\int_{-1}^1 T_k(x)T_m(x)(1-x^2)^{-1/2}dx = 0, \quad k \neq m, \quad (1.6)$$

donde podemos escribir

$$T_m(x) = \cos m\theta = \cos(m \cos^{-1} x), \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (1.7)$$

Tenemos:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = \cos \theta = x,$$

y por identidades trigonométricas,

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad \text{etc.}$$

Usando la identidad (1.4) con $k = 1$, por inducción se muestra que $T_m(x)$ es un polinomio en x de grado m . Estos polinomios son llamados *polinomios de Chebyshev de primer tipo*. De (1.6) decimos que $T_m(x)$ son polinomios ortogonales con respecto a $(1-x^2)^{-1/2}$, $-1 < x < 1$. Más precisamente, $\{T_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ es una secuencia ortogonal polinomial con respecto a la *función de peso* $(1-x^2)^{-1/2}$ en el intervalo $(-1, 1)$.

Algo más general es considerar una función w la cual es no-negativa e integrable en un intervalo (a, b) . También asumimos que $w(x) > 0$ en un subconjunto suficientemente grande de (a, b) así que

$$\int_a^b w(x)dx > 0.$$

En el caso que (a, b) sea abierto, también imponemos el requerimiento adicional de que los “momentos”

$$\mu_n = \int_a^b x^n w(x)dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

son todos finitos.

Ahora, sí hay una secuencia de polinomios $\{P_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$, $P_m(x)$ de grado m , tal que

$$\int_a^b P_k(x)P_m(x)w(x)dx = 0, \quad \text{para } k \neq m,$$

entonces $\{P_m(x)\}$ es llamada una *secuencia ortogonal polinomial* con respecto a la *función de peso* w en (a, b) .

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo introducimos algunos conceptos y definiciones principales de la teoría de control, además se mencionan tanto el principio de Pontryagin como algunos teoremas importantes de la teoría de control óptimo.

Definición 2.0.1. Sea D un subconjunto de $\mathbb{R}^m$, sea Ω un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^r$ y $f(x, u)$ definida en $D \times \Omega$. A la función $u(t)$ definida y continua a trozos en $[0, T]$, con valores en Ω , se llama *control admisible* en el intervalo $[0, T]$, si la trayectoria $x(t)$ del sistema

$$\dot{x} = f(x, u(t)), \quad (2.1)$$

traslada el estado x_0 a otro estado x_1 en tiempo T , es decir, $x(0) = x_0$ y $x(T) = x_1$. Donde x_0, x_1 pertenecen a $\mathbb{R}^m$.

Definición 2.0.2. Se llama el *espacio fase* del sistema (2.1) al espacio $\mathbb{R}^m$. Los elementos x de $D \subset \mathbb{R}^m$ se denominan *estados* del sistema (2.1). Se llama *curva integral* del sistema (2.1) al conjunto $I_{x_0} = \{(t, \psi(t)), t \geq 0\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$, donde $\psi(t)$ es una solución del sistema (2.1) que inicia en $\psi(0) = x_0$. Se llama *trayectoria fase* del sistema (2.1) a la proyección de I_{x_0} en $\mathbb{R}^m$.

Definición 2.0.3. El sistema de control (2.1) se llama *completamente controlable* (CC) en $D \subset \mathbb{R}^m$ si para cada par de estados x_0, x_1 que pertenecen a D , existe un control admisible para estos estados.

Definición 2.0.4. Se llama problema de *controlabilidad* del sistema (2.1) en $D \subset \mathbb{R}^m$ al problema de determinar si este sistema es CC en D .

2.1. Control óptimo

En esta sección daremos la definición de control óptimo y daremos el principio de Pontryagin y uno de los teoremas importantes en la teoría de control.

Definici3n 2.1.1. Sea el sistema (2.1) CC. El problema de control 6ptimo (PCO) consiste en hallar el conjunto de pares, de controles admisibles y trayectorias $\{u(t), x(t)\}$ en $[0, T]$ para x_0 y x_1 , tales que el funcional

$$J(x, u) = \int_0^T f_0(x, u) dt$$

calculado con el control $u(t)$ y su correspondiente trayectoria $x(t)$ del sistema (2.1), alcanza su m6nimo (m6ximo). Aqu6 $f_0(x, u)$ es una funci3n continua acotada en $D \times \Omega$.

Si $f_0(x, u) \equiv 1$, entonces el PCO correspondiente, se llama *tiempo de control 6ptimo*. En otras palabras, se minimiza el tiempo T de recorrido de la trayectoria $x(t)$ desde $x(0) = x_0$ a $x(T) = x_1$.

2.1.1. Principio de Pontryagin

Este principio es una condici3n necesaria de optimalidad de un sistema de control respecto de un funcional dado. Introducimos la funci3n:

$$x_0(t) = \int_0^T f_0(x, u) ds. \quad (2.2)$$

Observemos que si evaluamos $x_0(T) = J(x, u)$ derivando (2.2) tenemos

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_0 &= f_0(x, u) \\ \dot{x}_1 &= f_1(x, u) \\ \vdots \\ \dot{x}_m &= f_m(x, u) \end{aligned} \right\} \dot{x} = f(x, u) = \begin{pmatrix} f_1(x, u) \\ \vdots \\ f_m(x, u) \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

$$\text{Sea } \dot{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix}, \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \quad \text{y} \quad \bar{f}(\bar{x}, u) = \begin{pmatrix} f_0(\bar{x}, u) \\ f_1(\bar{x}, u) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}, u) \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, u).$$

Notemos que $\bar{f}(\bar{x}, u)$ no depende de x_0 . Consideramos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, llamado *sistema adjunto* al sistema (1.1):

$$\dot{\psi}_i = - \sum_{j=0}^m \frac{\partial f_j(\bar{x}, u)}{\partial x_i} \psi_j, \quad i = \overline{0, m}. \quad (2.5)$$

Si se escoge un control admisible $u = u(t)$ definido en $[0, t_1]$ es posible hallar su trayectoria correspondiente $\bar{x}(t)$ con $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ insertamos $u(t), \bar{x}(t)$ en (2.5)

$$\dot{\psi}_i = - \sum_{j=0}^m \frac{\partial f_j(\bar{x}(t), u(t))}{\partial x_i} \psi_j, \quad i = \overline{0, m}. \quad (2.6)$$

El sistema (2.6) satisface las condiciones de existencia y unicidad. Las ecuaciones (2.2) y (2.4) se pueden unir mediante la función,

$$\mathcal{H}(\bar{\psi}, \bar{x}, u) = (\bar{\psi}, \bar{f}(\bar{x}, u)). \quad (2.7)$$

donde

$$\bar{\psi} = (\bar{\psi}_0, \dots, \bar{\psi}_m). \quad (2.8)$$

Entonces (2.2) y (2.4) se pueden escribir como

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_i}, \quad i = \overline{0, m} \quad (2.9)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}, \quad i = \overline{0, m}. \quad (2.10)$$

Notemos los vectores funciones $\bar{x}(t)$ son continuos y $\bar{\psi}(t)$ son continuos diferenciales excepto en los puntos donde el control admisible $u(t)$ tiene saltos.

Para valores fijos de $\bar{x}$ y $\bar{\psi}$, la función $\mathcal{H}$ es una función de u . Denotemos $\mu(\bar{\psi}, \bar{x}) = \max_{u \in \Omega} \mathcal{H}(\bar{\psi}, \bar{x}, u)$ si el máximo se alcanza.

Teorema 2.1.2. [17, Teorema 1]. Sea $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, un control admisible tal que la trayectoria correspondiente $\bar{x}(t) : \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ y que pasa por la recta Π para $t = t_1$. Para que $u(t)$ y $x(t)$ sean óptimos, es necesario que exista (2.8) vector-función $\bar{\psi} \neq 0$, que corresponde a las funciones $u(t)$ y $x(t)$, tales que:

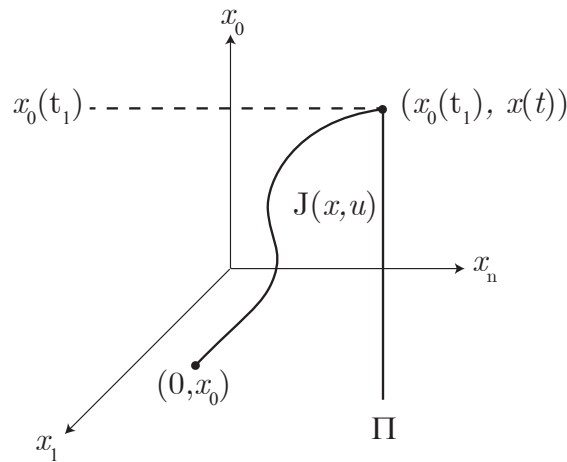
1. $\forall t \in [t_0, t_1]$ la función $\mathcal{H}(\bar{\psi}, \bar{x}, u)$ alcanza el máx de $u(t)$, es decir

$$\mathcal{H}(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t), u(t)) = \mu(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t)). \quad (2.11)$$

2. En el tiempo finito t_1 , tiene lugar la relación.

$$\bar{\psi}_0(t_1) \leq 0, \quad \mu(\bar{\psi}(t_1), \bar{x}(t_1)) = 0. \quad (2.12)$$

Se puede mostrar que los vectores funciones $\bar{\psi}(t)$, $\bar{x}(t)$ y $u(t)$ satisfacen (2.9), (2.10) y la condición (2.11) entonces las funciones $\psi_0(t)$ y $\mu(\bar{\psi}(t), \bar{x}(t))$ son constantes, así la condición (2.12) se puede verificar en cualquier t .



2.2. Sistemas lineales controlables

En adelante estudiaremos el caso cuando $f(x, u)$ de (2.1) es lineal respecto de x y de u , es decir, $f(x, u) = Ax + Bu$. Entonces tenemos el siguiente sistema de control

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r, \quad (2.13)$$

donde Ω es un compacto de $\mathbb{R}^r$ y representa la imagen del conjunto de *controles admisibles* $u = u(t)$.

Mencionamos un teorema del control óptimo para sistemas lineales el cual nos dice que el número de saltos son no más que $m - 1$, donde m es el grado del sistema.

Sean A y B matrices reales constantes de dimensiones $m \times m$ y $m \times r$, respectivamente. La notación A^* significa transpuesta de la matriz A . Consideremos el sistema de control (2.13) con funciones continuas a trozos definidas en $[0, T]$.

Definición 2.2.1. El sistema (2.13) se llama 0-controlable en $D \subset \mathbb{R}^m$ en tiempo T , si para cada cualquier $x \in D$ existe un control admisible $u : [0, T] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^r$ tal que traslada x al origen en tiempo T .

Para el sistema (2.13) son relevantes los siguientes problemas:

- a) Determinar la 0-controlabilidad local (es decir cuando D es un vecindad del origen) y global (cuando $D = \mathbb{R}^m$) del sistema (2.13).
- b) Problema de control admisible (CA): Dado un sistema determinado de la forma (2.13) con condición inicial $x_0 \in \mathbb{R}^m$ y un conjunto de restricción dado Ω , determinar todo el conjunto de controles admisibles $\{u_{x_0}(t)\}$ tales que la trayectoria $x(t)$ del sistema $\dot{x} = Ax + Bu_{x_0}(t)$ comienza en $x(0) = x_0$ y termina en el origen en tiempo T , es decir, $x(T) = 0$.
- c) Problema de control óptimo: si al problema CA se añade un funcional $J(x, u)$ el cual es necesario minimizar o maximizar.

Nótese que para $\Omega = \mathbb{R}^r$, es decir, cuando no existen restricciones en el control, el inciso a) se resuelve mediante el conocido criterio del rango de Kalman en [11]. El inciso b), en caso de que el sistema (2.13) sea controlable en $\mathbb{R}^m$ lo resuelve, por ejemplo, el control

$$u(t) = -B^* e^{-A^* t} N^{-1}(T) x_0 \quad (2.14)$$

donde $N(T) := \int_0^T e^{-At} B B^* e^{-A^* t} dt$. En [19], se demuestra que $N(T)$ es una matriz positiva definida, es decir, invertible si y sólo si el sistema (2.13) es controlable.

2.2.1. Matriz exponente

Sea dada una matriz A de dimensión $m \times m$. La matriz exponencial e^{At} se define mediante la relación

$$e^{At} := \sum_0^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j. \quad (2.15)$$

Esta matriz está bien definida en virtud a la desigualdad $\|e^{At}\| \leq e^{t\|A\|}$.

Definición 2.2.2. Sea A una matriz real de dimensión $m \times m$. El polinomio $p_m(\lambda) = c_m\lambda^m + c_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$ de grado m se llama anulador de la matriz A si

$$p_m(A) = c_m A^m + c_{m-1} A^{m-1} + \dots + c_1 A + c_0 I_m = 0_m$$

donde I_m y 0_m representa la matriz identidad y la matriz cero de dimensión $m \times m$, respectivamente.

Por el teorema de Cayley-Hamilton, el polinomio característico de una matriz es un polinomio anulador de esta matriz.

Teorema 2.2.3. *Cayley-Hamilton.*

Sea A una matriz real de dimensión $m \times m$. Sea $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ (polinomio característico de A). Entonces $p_A(A) = 0$.

Definición 2.2.4. Sea A una matriz real de dimensión $m \times m$. Se llama polinomio mínimo de la matriz A , denotado por $m_A(\lambda)$, al polinomio anulador de A de menor grado.

La matriz e^{At} se puede calcular utilizando la forma de Jordan de la matriz A . Otro método consiste en hallar la matriz e^{At} , a través de una suma finita de funciones quasipolinomiales y exponentes de A .

Teorema 2.2.5. Sea A una matriz real de dimensión $m \times m$ y $m_A(\lambda) = b_p\lambda^p + b_{p-1}\lambda^{p-1} + \dots + b_1\lambda + b_0$ el polinomio mínimo de A . Entonces la matriz exponente e^{At} tiene la siguiente forma: $e^{At} = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k(t) A^k$ donde $\alpha_k(t)$ para $k = 0, \dots, p-1$, es la solución de la ecuación diferencial

$$b_p \alpha_k^{(p)} + b_{p-1} \alpha_k^{(p-1)} + \dots + b_0 \alpha_k = 0$$

con condiciones iniciales $\alpha_k^{(j)}(0) = \delta_{kj}$.

2.2.2. Controlabilidad de sistemas lineales de control

Definición 2.2.6. Sea A de dimensión $m \times m$, B de dimensión $m \times r$. La matriz

$$Q = (B, AB, A^2B, \dots, A^{m-1}B) \quad (2.16)$$

se llama matriz de dimensión de Kalman.

Definición 2.2.7. La matriz

$$N(0, T) = \int_0^T e^{-At} B B^* e^{-A^*t} dt \quad (2.17)$$

se llama matriz de control.

Teorema 2.2.8. [8, Teorema 1.3.1]

(Criterio de controlabilidad de sistemas lineales).

Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. El sistema (2.13) es CC en $[0, T]$.
2. $\text{Rango}(Q) = m$.
3. La matriz $N(0, T) > 0$ (positiva definida).

Además la función

$$u(t) = B^* e^{-A^*t} N^{-1}(0, T) (e^{-AT} x_1 - e^{-A0} x_0) \quad (2.18)$$

es uno de los posibles controles que trasladan x_0 a x_1 en tiempo T mediante el control $u(t)$.

Teorema 2.2.9. [17, Teorema 10] Consideremos el sistema (2.13). Suponga que la región del control U es el paralelepípedo $\alpha_\rho \leq u^\rho \leq \beta_\rho$, $\rho = 1, 2, \dots, r$, y que todos los valores propios de la matriz A son reales. Entonces, para cada solución no trivial $\psi(t)$ de (2.8), la relación $(\psi(t), Bu(t)) = P(\psi(t))$, (donde $P(\psi(t))$ es el máximo de (ψ, Bu)) determina de forma única el control $u(t) = (u^1(t), u^2(t), \dots, u^r(t))$. Además, resulta que cada función $u^\rho(t)$ es constante a trozos, toma valores de α_ρ y β_ρ , y tiene no más que $(m - 1)$ saltos, donde m es el grado del sistema.

Teorema 2.2.10. El control de tiempo mínimo del sistema (2.13) está dado por

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t_j^o < t < \tau_{j+1}^o \\ 1, & \tau_{j+1}^o < t < t_{j+1}^o \end{cases} \quad (2.19)$$

donde $0 = t_1^o < \tau_2^o < t_2^o < \tau_3^o < \dots < t_{n-1}^o < \tau_n^o < t_n^o (\leq t_{\min}(x_0))$ satisfacen la función racional

$$g(z) = \frac{(z - \tau_2^o)(z - \tau_3^o) \cdots (z - \tau_n^o)}{(z - t_1^o)(z - t_2^o) \cdots (z - t_n^o)}.$$

Demostración. La demostración se puede ver en [4, Teorema 3.7].

2.3. Control admisible para el sistema canónico

El problema del tiempo de control admisible radica en determinar el tiempo mínimo y también el control correspondiente del conjunto $U_{x_0, T}$. Note que el caso sin restricciones en el control es relativamente simple. Efectivamente, el control $\hat{u}(t)$ de dirección al origen de la posición inicial x_0 debería satisfacer la ecuación $-x_0 = \int_0^T e^{-A\tau} B \hat{u}(\tau) d\tau$. Sea $\check{u}(t)$ un control que transfiere x_0 a 0 en tiempo T , por ejemplo $\check{u}(t) = -B^* e^{-A^* t} N^{-1}(T) x_0$, donde $N^{-1}(T) = \int_0^T e^{-At} B B^* e^{-A^* t} dt$. Entonces el conjunto de todos los controles no-restringidos incluye este $\hat{u}(t)$, que admite la representación $\hat{u}(t) = u_0(t) + \check{u}(t)$, donde $\int_0^T e^{-At} B \hat{u}(t) dt = 0$. En este caso de controles acotados, el problema CA llega a ser complicado considerablemente y la descripción del conjunto $U_{x_0, T}$ se convierte en una tarea difícil.

En el presente trabajo, trabajamos la solución del problema CA para el caso de sistema canónico, es decir,

$$A := \{\delta_{j,k+1}\}_{j,k=1}^m \quad B := (1, 0, \dots, 0)^T. \quad (2.20)$$

Este sistema se denomina *sistema canónico* o *sistema de Brunowsky*.

Capítulo 3

Control admisible mediante el problema de momentos

En este capítulo lo dedicamos a dar solución al problema de control admisible en términos de la solución del problema de momento (PM).

Aparentemente, N.Krasovskii en [15] fue el primero en proponer el uso del método de problema de momento para resolver problemas de control óptimo, él utiliza una aplicación del problema de momento de M.Krein en [16], la cual interpreta la función de costo como una norma. Una solución analítica del problema de control óptimo, fue dada por V.Korobov y G.Skylar en [13] y [14], basados en tratamiento de un problema equivalente al de momento potencia de Markov, llamado momento de Markov min-problema.

Ciertamente, la búsqueda para el tiempo óptimo es uno de los objetivos centrales en la teoría de control óptimo. Sin embargo, en muchas situaciones no es tan importante encontrar un control en un intervalo mínimo posible, pero el control deseado tiene que satisfacer más requerimientos adicionales, por ejemplo, que sea suave. En estos casos es natural ampliar el tiempo de transferencia y sólo considerar controles continuos a trozos. Esto lleva a un problema de describir todo el control admisible que traslada de x_0 al origen, dado un tiempo T .

Como es costumbre, sea $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{C}$ denotamos el m -dimensional espacio Euclideo y los números complejos, respectivamente. Usaremos $\mathcal{C}_{0,L}$ para denotar el conjunto de todas las funciones medibles en $[0, T]$ tal que $0 \leq f(\tau) \leq L$ para todo $\tau \in [0, T]$. El simbolo $\mathcal{M}[0, T]$ denotará medidas no-negativas en $[0, T]$. El conjugado de un número complejo z y de una función w los denotamos por $\bar{z}$ y w^* , respectivamente. Ahora introducimos nociones acerca de problemas de momento en $[0, T]$, los cuales son necesarios para el desarrollo del presente trabajo.

3.1. Planteamiento del problema

Consideremos el siguiente sistema completamente controlable

$$\dot{x} = Ax + B\tilde{u}. \quad (3.1)$$

Donde A y B tienen la siguiente forma:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dados la condición inicial x_0 y $T \geq t_{min}$, encontrar el conjunto $U_{x_0,T}$ de todos los controles $\tilde{u} = \tilde{u}_{x_0,T}(t)$ con $|\tilde{u}| \leq 1$ tal que la trayectoria del sistema cerrado $\dot{x} = Ax + B\tilde{u}_{x_0,T}(t)$ empiece en x_0 y termine en el origen en tiempo T , es decir, $x(T) = 0$. Aquí t_{min} denota el tiempo mínimo posible de esta transferencia, o el tiempo óptimo. Tal problema de control es llamado *problema de control admisible* (CA).

3.2. Problemas de momento de Markov y Hausdorff

El problema de momento de Markov (PMM) para un intervalo $[0, T]$ es como sigue: Sea dada una secuencia de números reales $(c_k)_{k=0}^j$. Encontrar el conjunto de funciones f que pertenecen a $\mathcal{C}_{0,1}$ tal que $c_k = \int_0^T \tau^k f(\tau) d\tau$, $k \in \{0, \dots, j\}$ se mantiene.

El problema de momento de Hausdorff (PMH) para un intervalo $[0, T]$ es como sigue: Sea dada una secuencia finita de números reales $\{s_k\}_{k=0}^j$. Encontrar el conjunto de medidas σ que pertenecen a $\mathcal{M}[0, T]$ tal que $s_k = \int_0^T \tau^k d\sigma(\tau)$, $k \in \{0, \dots, j\}$ se mantiene.

Usaremos $\mathcal{M}([0, T], \{s_k\}_{k=0}^j)$ para denotar el conjunto solución de PMH.

3.3. Ciertas clases de funciones holomorfas

Necesitamos la representación integral de dos clases de funciones holomorfas $\mathcal{R}[0, T]$ y $\mathcal{S}[0, T]$. El siguiente resultado se refiere a la representación integral de estas dos clases de funciones.

Definición 3.3.1. [16, Apéndice pág. 389 y 391]

Clase $\mathcal{R}$. La función $w(z)$ pertenece a la clase $\mathcal{R}$ sí:

1. $w(z)$ es holomorfa en el semiplano superior,

2. $\Im w(z) \geq 0$ para $\Im z > 0$. El simbolo $\Im$ es la parte imaginaria de la función.

Definición 3.3.2. [16, Apéndice pág. 394 y 395]

1. Clase $\mathcal{R}[0, T]$. La función $w(z)$ pertenece a la clase $\mathcal{R}[0, T]$ sí:

- a) $w(z) \in \mathcal{R}$,
- b) $w(z)$ es holomorfa y positiva en el intervalo $(-\infty, 0)$ y holomorfa y negativa en el intervalo (T, ∞) .

2. Clase $\mathcal{S}[0, T]$. La función $w(z)$ pertenece a la clase $\mathcal{S}[0, T]$ sí:

- a) $w(z) \in \mathcal{R}$,
- b) $w(z)$ es holomorfa y positiva en los intervalos $(-\infty, 0)$ y (T, ∞) .

Teorema 3.3.3. [16, Teoremas A.6 y A.7] Las siguientes afirmaciones son válidas:

1.

$$w \in \mathcal{R}[0, T] \text{ si y sólo si } w(z) = \int_0^T (\tau - z)^{-1} d\sigma(\tau), \quad (3.2)$$

2.

$$w \in \mathcal{S}[0, T] \text{ si y sólo si } w(z) = (T - z) \int_0^T (\tau - z)^{-1} d\sigma(\tau), \quad (3.3)$$

donde σ pertenece a $\mathcal{M}[0, T]$.

La función holomorfa $s(z) = \int_0^T (\tau - z)^{-1} d\sigma(\tau)$, definida en $\mathbb{C} \setminus [0, T]$, es llamada la transformada de Stieltjes σ , donde $\sigma \in \mathcal{M}[0, T]$. Por (3.2) s pertenece a $\mathcal{R}[0, T]$.

Recordemos la fórmula inversa de Stieltjes. Dado s en $\mathcal{R}[0, T]$ se obtiene una correspondiente medida σ que satisface la ecuación (3.2) por

$$\sigma(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^t \Im(s(x + i\epsilon)) dx, \quad t \in [0, T]. \quad (3.4)$$

Podemos decir que σ es normalizada, es decir,

$$\sigma(t) = \frac{\sigma(t+0) - \sigma(t-0)}{2}, \quad \sigma(0) = 0.$$

Con esta notación el PMH puede ser reformulado:
Describir el conjunto $\mathcal{R}([0, T], \{s_k\}_{k=0}^j)$ de transformadas de Stieltjes de todas las medidas no-negativas las cuales pertenecen a $\mathcal{M}([0, T], \{s_k\}_{k=0}^j)$.

3.4. Relación entre PMM y PMH

Por teorema 3.3.3 existe una relación de biyección entre el conjunto $\mathcal{C}_{0,L}$, para $L = 1$ y las medidas $\sigma \in \mathcal{M}[0, T]$ que satisface $\int_0^T d\sigma(\tau) = 1$ dado por

$$\int_0^T \frac{d\sigma(\tau)}{\tau - z} = -\frac{1}{z} \exp \left(\int_0^T \frac{f(\tau) d\tau}{z - \tau} \right). \quad (3.5)$$

Ver [16, pág. 243].

Las expansiones asintóticas formales del lado izquierdo y el lado derecho de (3.5) determinan una única y explícita relación entre $\{c_k\}_{k=0}^{j-1}$ y $\{s_k\}_{k=0}^j$, $s_0 = 1$, $s_1 = c_0$,

$$s_k = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} c_0 & -1 & \cdots & 0 \\ 2c_1 & c_0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (k-1)c_{k-2} & (k-2)c_{k-3} & \cdots & -(k-1) \\ kc_{k-1} & (k-1)c_{k-2} & \cdots & c_0 \end{vmatrix}, \quad k \geq 2. \quad (3.6)$$

Para la propiedades de solubilidad de PMM y PMH, vamos a dar los siguientes resultados:

Proposición 3.4.1. [3, Proposición 1.1] *El problema de momento de Markov con entradas $c_{k-1}(T, x_0)$, $k \in \{1, \dots, n\}$, es soluble si y sólo si el problema de momento de Hausdorff-[0, T] con entradas $s_k(T, x_0)$, $k \in \{0, \dots, n\}$, es soluble.*

Usando relación de biyección (3.6), el problema de momento Markov se puede resolver en términos del problema de momento de Hausdorff en $[0, T]$.

En lo que sigue utilizamos la forma matricial ver [3], [4] y [6], para nuestro caso $q = 1$, que corresponde al caso escalar.

En la solución, existe una diferencia notable entre los casos de un número par e impar de datos.

Denotaremos por I_m la matriz identidad de dimensión $m \times m$ y por $0_{n \times m}$ la matriz cero de dimensión $n \times m$. Con frecuencia denotaremos por 0_m a la matriz $0_{m \times m}$.

Sea $R_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{(j+1)q \times (j+1)q}$ dado por

$$R_j(z) := (I_{(j+1)q} - zT_j)^{-1}, \quad j \geq 0 \quad (3.7)$$

$$\text{con } T_0 := 0_q, \quad T_j := \begin{pmatrix} 0_{q \times jq} & 0_q \\ I_{jq} & 0_{jq \times q} \end{pmatrix}, \quad j \geq 1.$$

Sea

$$v_0 := I_q, \quad v_j := \begin{pmatrix} I_q \\ 0_{jq \times q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{j-1} \\ 0_q \end{pmatrix}, \quad \forall j \geq 0. \quad (3.8)$$

$$u_{1,0} := 0_q, \quad u_{1,j} := \begin{pmatrix} 0_q \\ -y_{[0,j-1]} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq n \quad (3.9)$$

y

$$u_{2,j-1} := Ty_{[0,j-2]} + y_{[1,j-1]} \quad 1 \leq j \leq n. \quad (3.10)$$

$$\tilde{u}_{1,0} := s_0, \quad \tilde{u}_{2,0} := -s_0, \quad (3.11)$$

y para cada $1 \leq j \leq n-1$ denotamos

$$\tilde{u}_{1,j} := y_{[0,j]} - T \begin{pmatrix} 0_q \\ -y_{[0,j-1]} \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}_{2,j} := -y_{[0,j]}. \quad (3.12)$$

Además, sea

$$y_{[j,k]} := \begin{pmatrix} s_j \\ s_{j+1} \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix} \quad 0 \leq j \leq k \leq 2n. \quad (3.13)$$

Definición 3.4.2. [7, Teorema 1.3] Sea $m = 2n$.

Sabemos que el problema PMH es soluble si y sólo si, las matrices de bloques $H_{1,n}$ y $H_{2,n}$ son positivas semidefinidas, donde

$$H_{1,n} := \tilde{H}_{0,n}, \quad n \geq 0, \quad (3.14)$$

$$H_{2,n-1} := T\tilde{H}_{1,n-1} - \tilde{H}_{2,n-1}, \quad n \geq 1 \quad (3.15)$$

y $\tilde{H}_{\cdot,j}$ son definidas con ayuda de las matrices de Hankel,

$$\tilde{H}_{0,j} := \{s_{j+k}\}_{l,k=0}^j, \quad \tilde{H}_{1,j} := \{s_{j+k+1}\}_{l,k=0}^j, \quad \text{y} \quad \tilde{H}_{2,j} := \{s_{j+k+2}\}_{l,k=0}^j.$$

Para $m = 2n + 1$, el problema PMH es soluble si y sólo si,

$$K_{1,n} := TH_{1,n} - \tilde{H}_{1,n}, \quad (3.16)$$

$$K_{2,n} := \tilde{H}_{1,n}, \quad (3.17)$$

ambas son positivas semidefinidas para $n \geq 0$.

Definición 3.4.3. La función s es una solución de un sistema de desigualdades (Desigualdad Matricial Fundamental, DMF) de V.P. Potapov, si s satisface las siguientes propiedades:

- (i) s es holomorfa en $\mathbb{C}/[0, T]$.
- (ii) Para $r \in \{1, 2\}$ se cumple la desigualdad

$$\left[\begin{array}{c|c} H & R_r(z)[v_r \tilde{s}_r(z) - u_{r,j}] \\ \hline * & (\tilde{s}_r(z) - \tilde{s}_r^*(z))/(z - \bar{z}) \end{array} \right] \geq 0. \quad (DMF)$$

Donde H es $K_{r,j}$ o $H_{r,j}$, R_r , $u_{r,j}$, $s_r(z)$ y v_r están definidas anteriormente, $*$ significa la conjugada compleja de $R_r(z)[v_r \tilde{s}_r(z) - u_{r,j}]$.

Teorema 3.4.4. [4, Teorema 2.7] La función s es una transformada de $\sigma \in \mathcal{M}([0, T], \{s_k\}_{k=0}^j)$, si y sólo si s es una solución del sistema (DMF) de Potapov.

Asumimos que las matrices $K_{r,j}$, $H_{r,j}$ son positivas definidas, es decir, existen las matrices inversas $K_{r,j}^{-1}$, $H_{r,j}^{-1}$. En el caso cuando las matrices $H_{1,j}$ ($K_{1,j}$) y $H_{2,j}$ ($K_{2,j}$) son positivas definidas, introducimos una función matricial polinomial de dimensión $2q \times 2q$, que tiene la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} U_{11}(z) & U_{12}(z) \\ U_{21}(z) & U_{22}(z) \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

la llamada *matriz resolvente* de PMH.

Sean v_r , R_j , $H_{r,j}$, $K_{r,j}$ $\tilde{u}_{r,j}$ y $u_{r,j}$ con $r = 1, 2$ definidas anteriormente.

Sea $m = 2n$, definimos:

$$\begin{aligned} U_{11}^1(z) &:= I - z \tilde{u}_{1,j}^* R_j^*(\bar{z}) K_{1,j}^{-1} v_j. \\ U_{12}^1(z) &:= \tilde{u}_{2,j}^* R_j^*(\bar{z}) K_{2,j}^{-1} \tilde{u}_{2,j}. \\ U_{21}^1(z) &:= -(T - z) z v_j^* R_j^*(\bar{z}) K_{1,j}^{-1} v_j. \\ U_{22}^1(z) &:= I + z v_j^* R_j^*(\bar{z}) K_{2,j}^{-1} \tilde{u}_{2,j}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Sea $m = 2n + 1$, definimos:

$$\begin{aligned} U_{11}^2(z) &:= I - z u_{1,j}^* R_j^*(\bar{z}) H_{1,j}^{-1} v_j. \\ U_{12}^2(z) &:= \frac{1}{T} (s_0 + (u_{2,j-1}^* + z s_0 v_{j-1}^*) R_{j-1}^*(\bar{z}) H_{2,j-1}^{-1} u_{2,j-1}). \\ U_{21}^2(z) &:= -z v_j^* R_j^*(\bar{z}) H_{1,j}^{-1} v_j. \\ U_{22}^2(z) &:= \frac{T-z}{T} (I + z v_{j-1}^* R_{j-1}^*(\bar{z}) H_{2,j-1}^{-1} u_{2,j-1}). \end{aligned} \quad (3.20)$$

El siguiente teorema describe la solución del conjunto de PMH en términos de clases de funciones holomorfas (3.2) y (3.3).

Teorema 3.4.5. [3, Teorema 1.3] Sean los polinomios U_{ij}^ℓ , $i, j = 1, 2$, $\ell = 1, 2$ definidos por (3.19) y (3.20). De la transformación lineal fraccionaria

$$s := \frac{U_{11}^\ell w + U_{12}^\ell}{U_{21}^\ell w + U_{22}^\ell} \quad (3.21)$$

se obtienen las siguientes biyecciones:

- (a) En el caso par $\ell = 1$, entre el conjunto parámetro $w \in \mathcal{R}[0, T] \cup \{\infty\}$ y el conjunto de las transformadas Stieltjes $s \in \mathcal{R}([0, T], \{s_k\}_{k=0}^{2j+1})$;
- (b) En el caso impar $\ell = 2$, entre el conjunto parámetro $w \in \mathcal{S}[0, T] \cup \{\infty\}$ y el conjunto de las transformadas Stieltjes $s \in \mathcal{S}([0, T], \{s_k\}_{k=0}^{2j})$.

3.5. Solución al problema de control admisible

En esta sección daremos la solución del problema de control admisible en el caso de controles continuos a trozos. El siguiente resultado se mantiene:

Teorema 3.5.1. [3, Teorema 2.1] Sea $T > t_{min}$. El conjunto $U_{x_0, T}$ de controles admisibles del sistema (2.13) es dado por

$$\tilde{u}(t) = - \left(\frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \arg(-(t + \epsilon i)s(t + \epsilon i)) - 1 \right), \quad t \in [0, T], \quad (3.22)$$

donde s es la función asociada a la solución de PMH, (ver 3.21) con los momentos dependiendo de x_0 y T , correspondiente a un parámetro funcional w en el caso completamente indeterminado.

Demostración. El sistema (2.13) con condición inicial $x(0) = x_0$, puede ser escrita como

$$x(t) = e^{At} \left(x_0 + \int_0^t e^{-A\tau} B \tilde{u}(\tau) d\tau \right).$$

Deseamos encontrar un control $u(t)$ que satisfaga $x(T) = 0$, en otras palabras queremos que

$$-x_0 = \int_0^T e^{-A\tau} B \tilde{u}(\tau) d\tau.$$

Usando el hecho de que A y B son canónicos, la última relación puede escribirse en la forma

$$-x_0^k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \int_0^T \tau^{k-1} \tilde{u}(\tau) d\tau, \quad k \in \{1, \dots, m\},$$

donde $-x_0^k$ es la entrada k -ésima del vector $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Haciendo $f := (\tilde{u} + 1)/2$, obtenemos

$$\frac{T^k + (-1)^k k! x_0^k}{2k} = \int_0^T \tau^{k-1} f(\tau) d\tau, \quad k \in \{1, \dots, m\}.$$

Denotamos

$$c_{k-1}(T, x_0) := \frac{T^k + (-1)^k k! x_0^k}{2k}, \quad k \in \{1, \dots, m\},$$

el problema CA se reduce al problema de Markov, es decir, al problema de encontrar el conjunto de funciones f con $0 \leq f(\tau) \leq 1$ para $\tau \in [0, T]$ y

$$c_{k-1}(T, x_0) := \int_0^T \tau^{k-1} f(\tau) d\tau, \quad k \in \{1, \dots, m\}.$$

Aplicando ahora la relación (3.6) obtenemos conjunto de momentos del problema clásico de Hausdorff para el intervalo $[0, T]$,

$$s_k(T, x_0) = \int_0^T \tau^k d\sigma(\tau), \quad k \in \{0, \dots, m\}.$$

Usando la secuencia $\{s_k(T, x_0)\}_{k=0}^m$, construimos las matrices de Hankel ya sea para un número par o impar, asumiendo que son positivas definidas. Usando (3.19), (3.20) y (3.21), obtenemos la función asociada $s(z)$, la cual tiene una representación igual a

$$\int_0^T \frac{d\sigma(\tau)}{\tau - z}$$

como una función de clase $\mathcal{R}[0, T]$. Ahora podemos escribir la relación (3.5) en la forma

$$\ln(-z s(z)) = \int_0^T \frac{d(\int_0^t f(\tau) d\tau)}{z - \tau}$$

donde $\ln$ denota el valor principal del logaritmo complejo. Aplicando en la última ecuación la fórmula inversa de Stieltjes (3.4) a $\int_0^t f(\tau) d\tau$, la cual es una función no-decreciente en $[0, T]$, con $z = x + \epsilon i$ tenemos

$$\frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^t \Im(-(x + \epsilon i) s(x + \epsilon i)) dx, \quad t \in [0, T]$$

haciendo los cálculos obtenemos (3.22).

Capítulo 4

Polinomios ortogonales de Hausdorff y soluciones extremales

En el capítulo anterior además de ver la aplicación de la teoría de momentos a problemas de control, también usamos el análisis del problema de momentos de Hausdorff para llegar a la solución del problema de control admisible. Por lo tanto para dar la solución del problema de control admisible mediante polinomios ortogonales, es necesario conocer algunas de las características interesantes e importantes de los polinomios construidos con secuencias positivas de Hausdorff en el intervalo $[0, T]$. También introducimos las soluciones extremales del problema de momento de Hausdorff que se construyen con los polinomios mencionados.

4.1. Notación y preliminares

Definición 4.1.1. La secuencia $\{s_k\}_{k=0}^{2j}$ ($\{s_k\}_{k=0}^{2j+1}$) es llamada secuencia Hausdorff positiva impar (positiva par) en $[0, T]$, si las matrices de bloques Hankel $H_{1,j}$ y $H_{2,j-1}$ ($K_{1,j}$ y $K_{2,j}$) de la definición 3.4.2 ambas son matrices positivas definidas.

Definición 4.1.2. Sea $\{s_k\}_{k=0}^{2j}$ una secuencia positiva impar de Hausdorff en $[0, T]$ y sean

$$\begin{aligned} Y_{1,j} &:= y_{[j, 2j-1]}, \quad 1 \leq j \leq n, \\ Y_{2,j} &:= \hat{y}_{[j, 2j-1]}, \quad 1 \leq j \leq n-1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde

$$\hat{y}_{[j,l]} := T y_{[j+1, l+1]} - y_{[j+2, l+2]}. \tag{4.2}$$

Definimos los siguientes polinomios de Hausdorff.

$$\begin{aligned} P_{1,0}(z) &:= I_q, & P_{2,0}(z) &:= I_q, \\ Q_{1,0}(z) &:= 0_q, & Q_{2,0}(z) &:= -(u_{2,0} + z s_0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{1,j}(z) &:= (-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) v_j, & 1 \leq j \leq n. \\ P_{2,j}(z) &:= (-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) v_j, & 1 \leq j \leq n-1. \\ Q_{1,j}(z) &:= -(-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) u_{1,j}, & 1 \leq j \leq n. \\ Q_{2,j}(z) &:= -(-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) (u_{2,j} + z v_j s_0), & 1 \leq j \leq n-1. \end{aligned}$$

Definición 4.1.3. Sea $\{s_k\}_{k=0}^{2j+1}$ una secuencia positiva par de Hausdorff en $[0, T]$ y sean

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_{[1,j]} &:= Ty_{[j,2j-1]} - y_{[j+1,2j]}, \\ \tilde{Y}_{[2,j]} &:= y_{[j+1,2j]}, \quad 1 \leq j \leq n.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Definimos los siguientes polinomios de Hausdorff

$$\begin{aligned}\Gamma_{1,0}(z) &:= I_q, & \Gamma_{2,0}(z) &:= I_q, \\ \Theta_{1,0}(z) &:= s_0, & \Theta_{2,0}(z) &:= -s_0.\end{aligned}$$

Para todo $z \in \mathbb{C}$ y $1 \leq j \leq n$ definimos

$$\begin{aligned}\Gamma_{1,j}(z) &:= (-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) v_j, \\ \Gamma_{2,j}(z) &:= (-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) v_j, \\ \Theta_{1,j}(z) &:= (-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) \tilde{u}_{1,j}, \\ \Theta_{2,j}(z) &:= (-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) \tilde{u}_{2,j}.\end{aligned}$$

4.2. Polinomios ortogonales matriciales

En esta sección recordamos los polinomios de Hausdorff en un intervalo finito $[0, T] \subset \mathbb{R}$. Demostraremos que $P_{r,j}(t)$ y $\Gamma_{r,j}(t)$ con $r = 1, 2$ son polinomios ortogonales y $Q_{r,j}(t)$, $\Theta_{r,j}(t)$ con $r = 1, 2$ son polinomios de segunda especie.

Proposición 4.2.1. [6, Proposición 25] Sean $P_{r,j}(t)$, $Q_{r,j}(t)$, $\Gamma_{r,j}(t)$ y $\Theta_{r,j}(t)$ definidos en (4.1.2) y (4.1.3). Además sean los complementos de Schur (Ver apéndice B.3) de $H_{r,j-1}$ en $H_{r,j}$ y $K_{r,j-1}$ en $K_{r,j}$, con $r = 1, 2$.

$$\begin{aligned}\hat{H}_{1,j} &:= -Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1} Y_{1,j} + s_{2j}, \\ \hat{H}_{2,j} &:= -Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1} Y_{2,j} + T s_{2j+1} - s_{2j+2}, \\ \hat{K}_{1,j} &:= -\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1} \tilde{Y}_{1,j} + T s_{2j} - s_{2j+1}, \\ \hat{K}_{2,j} &:= -\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1} \tilde{Y}_{2,j} + s_{2j+1}.\end{aligned}$$

a) Los polinomios $P_{1,j}(t)$ y $P_{2,j}(t)$ son ortogonales en $[0, T]$ con respecto a $d\sigma(t)$ y $(T - t)t d\sigma(t)$, respectivamente. Más precisamente,

$$\begin{aligned}\int_0^T P_{1,j}(t) d\sigma(t) P_{1,j}^*(t) &= \begin{cases} \hat{H}_{1,j}, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \\ \int_0^T P_{2,j}(t) (T - t) t d\sigma(t) P_{2,j}^*(t) &= \begin{cases} \hat{H}_{2,j}, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}.\end{aligned}$$

b) Los polinomios $\Gamma_{1,j}(t)$ y $\Gamma_{2,j}(t)$ son ortogonales en $[0, T]$ con respecto a $(T - t)d\sigma(t)$ y $td\sigma(t)$, respectivamente. Más precisamente,

$$\int_0^T \Gamma_{1,j}(t)(T - t)d\sigma(t)\Gamma_{1,j}^*(t) = \begin{cases} \hat{K}_{1,j}, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

$$\int_0^T \Gamma_{2,j}(t)t d\sigma(t)\Gamma_{2,j}^*(t) = \begin{cases} \hat{K}_{2,j}, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}.$$

c) Los polinomios de segunda especie son determinados de forma única de la siguiente manera, para $t \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} Q_{1,j}(t) &= \int_0^T \frac{P_{1,j}(t) - P_{1,j}(x)}{t - x} d\sigma(x). \\ Q_{2,j}(t) &= \int_0^T \frac{P_{2,j}(t) - P_{2,j}(x)}{t - x} (T - x) x d\sigma(x) - P_{2,j}(t) ((t - T)s_0 + s_1). \\ \Theta_{1,j}(t) &= - \int_0^T \frac{\Gamma_{1,j}(t) - \Gamma_{1,j}(x)}{t - x} (T - x) d\sigma(x) + \Gamma_{1,j}(t)s_0. \\ \Theta_{2,j}(t) &= - \int_0^T \frac{\Gamma_{2,j}(t) - \Gamma_{2,j}(x)}{t - x} x d\sigma(x) - \Gamma_{2,j}(t)s_0. \end{aligned}$$

Demostración. Ver apéndice B.1.

4.2.1. Versión escalar

En esta subsección, señalamos la conexión entre los POMs y los polinomios ortogonales escalares, es decir cuando $q = 1$. Ver [3], [4] y [6].

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\{s_k\}_{k=0}^{2j}$ ($\{s_k\}_{k=0}^{2j+1}$) una secuencia positiva de números de Hausdorff.

Sea

$$D_{x,j}^{(\nu)} := \begin{pmatrix} s_0^\nu & s_1^\nu & \cdots & s_j^\nu \\ s_1^\nu & s_2^\nu & \cdots & s_{j+1}^\nu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j-1}^\nu & s_j^\nu & \cdots & s_{2j-1}^\nu \\ 1 & x & \cdots & x^j \end{pmatrix}, \quad 1 \leq \nu \leq 4 \quad (4.4)$$

con $s_j^1 := s_j$, $s_j^2 := Ts_{j+1} - s_{j+2}$, $s_j^3 := Ts_j - s_{j+1}$ y $s_j^4 := s_{j+1}$. Además sea

$$E_{x,j}^{(\nu)} := \begin{pmatrix} s_0^\nu & s_1^\nu & \cdots & s_j^\nu \\ s_1^\nu & s_2^\nu & \cdots & s_{j+1}^\nu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j-1}^\nu & s_j^\nu & \cdots & s_{2j-1}^\nu \\ e_{\nu,0}(x) & e_{\nu,1}(x) & \cdots & e_{\nu,j}(x) \end{pmatrix}, \quad 1 \leq \nu \leq 4 \quad (4.5)$$

donde

$$(e_{\nu,0}(x) \ e_{\nu,1}(x) \ \cdots \ e_{\nu,j}(x)) := \begin{cases} -u_{1,j}^* R_j^*(x), & \text{para } \nu = 1 \\ -(u_{2,j}^* + xv_j^* s_0) R_j^*(x), & \text{para } \nu = 2 \\ \tilde{u}_{1,j}^* R_j^*(x), & \text{para } \nu = 3 \\ \tilde{u}_{2,j}^* R_j^*(x), & \text{para } \nu = 4. \end{cases}$$

Observación 4.2.2. [6, Observación 26] Sean $p_{r,j}(t)$, $\gamma_{r,j}(t)$, $q_{r,j}(t)$ y $\theta_{r,j}(t)$ la versión escalar de los POM $P_{r,j}(t)$, $\Gamma_{r,j}(t)$, $Q_{r,j}(t)$ y $\Theta_{r,j}(t)$, con $r = 1, 2$. Entonces los polinomios pueden ser escritos como sigue:

$$\begin{aligned} p_{1,0}(x) &:= 1, & p_{2,0}(x) &:= 1, \\ \gamma_{1,0}(x) &:= 1, & \gamma_{2,0}(x) &:= 1, \\ p_{1,j}(x) &:= \frac{|D_{x,j}^{(1)}|}{|H_{1,j-1}|}, & p_{2,j}(x) &:= \frac{|D_{x,j}^{(2)}|}{|H_{2,j-1}|}, \\ \gamma_{1,j}(x) &:= \frac{|D_{x,j}^{(3)}|}{|K_{1,j-1}|}, & \gamma_{2,j}(x) &:= \frac{|D_{x,j}^{(4)}|}{|K_{1,j-1}|}. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} q_{1,0}(x) &:= 0, & q_{2,0}(x) &:= Ts_0 - s_1 - xs_0, \\ \theta_{1,0}(x) &:= s_0, & \theta_{2,0}(x) &:= -s_0, \\ q_{1,j}(x) &:= \frac{|E_{x,j}^{(1)}|}{|H_{1,j-1}|}, & q_{2,j}(x) &:= \frac{|E_{x,j}^{(2)}|}{|H_{2,j-1}|}, \\ \theta_{1,j}(x) &:= \frac{|E_{x,j}^{(3)}|}{|K_{1,j-1}|}, & \theta_{2,j}(x) &:= \frac{|E_{x,j}^{(4)}|}{|K_{1,j-1}|}. \end{aligned}$$

Demostración. Ver apéndice B.1 para detalles del producto de $R_j(x)$ con los diferentes vectores. Sea $\nu = 1$. Teniendo en cuenta que $H_{1,j-1}$ es positiva definida, tenemos

$$\begin{aligned} p_{1,j}(x) &= (-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, 1) R_j(x) v_j = x^j + \overline{(-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}) R_{j-1}(x) v_{j-1}} \\ &= x^j - v_{j-1}^* R_{j-1}^*(x) H_{1,j-1}^{-1} Y_{1,j} = \frac{1}{|H_{1,j-1}|} \begin{vmatrix} H_{1,j-1} & Y_{1,j} \\ v_{j-1}^* R_{j-1}^*(x) & x^j \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

En la última igualdad empleamos el determinante del complemento de Schur de $H_{1,j-1}$ en $D_{x,j}^{(1)}$. De manera similar para $p_{2,j}(x)$, $\gamma_{1,j}(x)$ y $\gamma_{2,j}(x)$.

$$\begin{aligned} p_{2,j}(x) &= (-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, 1) R_j(x) v_j = x^j + \overline{(-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}) R_{j-1}(x) v_{j-1}} \\ &= x^j - v_{j-1}^* R_{j-1}^*(x) H_{2,j-1}^{-1} Y_{2,j} = \frac{1}{|H_{2,j-1}|} \begin{vmatrix} H_{2,j-1} & Y_{2,j} \\ v_{j-1}^* R_{j-1}^*(x) & x^j \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{1,j}(x) &= (-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, 1) R_j(x) v_j = x^j + \overline{(-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}) R_{j-1}(x) v_{j-1}} \\ &= x^j - v_{j-1}^* R_{j-1}^*(x) K_{1,j-1}^{-1} \tilde{Y}_{1,j} = \frac{1}{|K_{1,j-1}|} \begin{vmatrix} K_{1,j-1} & \tilde{Y}_{1,j} \\ v_{j-1}^* R_{j-1}^*(x) & x^j \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{2,j}(x) &= (-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, 1) R_j(x) v_j = x^j + \overline{(-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}) R_{j-1}(x) v_{j-1}} \\ &= x^j - v_{j-1}^* R_{j-1}^*(x) K_{2,j-1}^{-1} \tilde{Y}_{2,j} = \frac{1}{|K_{2,j-1}|} \begin{vmatrix} K_{2,j-1} & \tilde{Y}_{2,j} \\ v_{j-1}^* R_{j-1}^*(x) & x^j \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Para $q_{r,j}(t)$ y $\theta_{r,j}(t)$ con $r = 1, 2$, también se pueden verificar, usando los complementos de Schur de $H_{r,j-1}$ y $K_{r,j-1}$ con $r = 1, 2$, en $E_{x,j}^{(\nu)}$ para $\nu = 1, 2, 3, 4$, respectivamente.

$$\begin{aligned}q_{1,j}(x) &= -(-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, 1) R_j(x) u_{1,j} \\ &= -(s_0 x^{j-1} + \dots + s_{j-1}) - \overline{(-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}) R_{j-1}(x) u_{1,j-1}} \\ &= -(s_0 x^{j-1} + \dots + s_{j-1}) + u_{1,j-1}^* R_{j-1}^*(x) H_{1,j-1}^{-1} Y_{1,j} \\ &= \frac{1}{|H_{1,j-1}|} \begin{vmatrix} H_{1,j-1} & Y_{1,j} \\ -u_{1,j-1}^* R_{j-1}^*(x) & -(s_0 x^{j-1} + \dots + s_{j-1}) \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

En la última igualdad empleamos el determinante del complemento de Schur de $H_{1,j-1}$ en $E_{x,j}^{(1)}$ (Ver apéndice B.3). De manera similar para $q_{2,j}(x)$, $\theta_{1,j}(x)$ y $\theta_{2,j}(x)$.

$$\begin{aligned}q_{2,j}(x) &= -(-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, 1) R_j(x) (u_{2,j} + x v_j s_0) \\ &= e_{2,j}(x) - \overline{(-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}) R_{j-1}(x) (u_{2,j-1} + x v_{j-1} s_0)} \\ &= e_{2,j}(x) + (u_{2,j-1}^* + x v_{j-1}^* s_0) R_{j-1}^*(x) H_{2,j-1}^{-1} Y_{2,j} \\ &= \frac{1}{|H_{2,j-1}|} \begin{vmatrix} H_{2,j-1} & Y_{2,j} \\ -(u_{2,j-1}^* + x v_{j-1}^* s_0) R_{j-1}^*(x) & e_{2,j}(x) \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_{1,j}(x) &= (-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, 1) R_j(x) \tilde{u}_{1,j} \\ &= e_{3,j}(x) + \overline{(-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}) R_{j-1}(x) \tilde{u}_{1,j-1}} \\ &= e_{3,j}(x) - \tilde{u}_{1,j-1}^* R_{j-1}^*(x) K_{1,j-1}^{-1} \tilde{Y}_{1,j} \\ &= \frac{1}{|K_{1,j-1}|} \begin{vmatrix} K_{1,j-1} & \tilde{Y}_{1,j} \\ \tilde{u}_{1,j-1}^* R_{j-1}^*(x) & e_{3,j}(x) \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_{2,j}(x) &= (-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, 1) R_j(x) \tilde{u}_{2,j} \\ &= e_{4,j}(x) + \overline{(-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}) R_{j-1}(x) v_{j-1}} \\ &= e_{4,j}(x) - \tilde{u}_{2,j-1}^* R_{j-1}^*(x) K_{2,j-1}^{-1} \tilde{Y}_{2,j} \\ &= \frac{1}{|K_{2,j-1}|} \begin{vmatrix} K_{2,j-1} & \tilde{Y}_{2,j} \\ \tilde{u}_{2,j-1}^* R_{j-1}^*(x) & e_{4,j}(x) \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} e_{2,j}(x) &= x^{j+1} s_0 + (-Ts_0 + s_1)x^j + \cdots + (-Ts_{j-1} + s_j) \\ e_{3,j}(x) &= x^j s_0 + (s_1 - Ts_0)x^{j-1} + \cdots + (s_j - Ts_{j-1}) \\ e_{4,j}(x) &= -(x^j s_0 + s_1 x^{j-1} + \cdots + s_j). \end{aligned}$$

De aquí en adelante sólo consideramos polinomios ortogonales versión escalar.

Lema 4.2.3. *Sean los polinomios ortogonales versión escalar $p_{r,j}(t)$ y $\gamma_{r,j}(t)$ y sus respectivos polinomios de segunda especie $q_{r,j}(t)$ y $\theta_{r,j}(t)$ con $r = 1, 2$.*

- a) *Si $p_{1,j}(t)$ es de grado j , entonces $q_{1,j}(t)$ es de grado $(j - 1)$.*
- b) *Si $p_{2,j}(t)$ es de grado j , entonces $q_{2,j}(t)$ es de grado $(j + 1)$.*
- c) *Si $\gamma_{r,j}(t)$ es de grado j , entonces $\theta_{r,j}(t)$ es de grado j .*

Demostración. Se sigue directamente de la Observación 4.2.2.

Ver apéndice B.2 para detalles de la demostración.

4.3. Matriz resolvente de PMH mediante polinomios ortogonales

En esta sección recordamos la definición de *Matriz resolvente* de PMH en los casos de número par e impar de momentos y la representación de la función asociada a la solución de PMH, vía polinomios ortogonales en $[0, T]$ y su segunda especie de polinomios.

Teorema 4.3.1. *[6, Teorema 35] Sea la matriz resolvente $U^{(2n)}$ dada por (3.18). Sean los polinomios $\Gamma_{k,n}$ y $\Theta_{k,n}$ para $k = 1, 2$ como en la definición 4.1.3. Entonces la siguiente igualdad se mantiene para $\forall z \in \mathbb{C}$:*

$$U^{(2n)} = \begin{pmatrix} \Theta_{2,n}^*(\bar{z})\Theta_{2,n}^{*-1}(0) & \frac{1}{T}\Theta_{1,n}^*(\bar{z})\Gamma_{1,n}^{*-1}(0) \\ z\Gamma_{2,n}^*(\bar{z})\Theta_{2,n}^{*-1}(0) & \frac{T-z}{T}\Gamma_{1,n}^*(\bar{z})\Gamma_{1,n}^{*-1}(0) \end{pmatrix}$$

Observación 4.3.2. *Del teorema 3.4.5 podemos construir la transformación lineal fraccionaria (3.21), de la matriz resolvente $U^{(2n)}$.*

$$s^{(2n)} := \frac{\Theta_{2,n}^*(\bar{z})\Theta_{2,n}^{*-1}(0)w + \frac{1}{T}\Theta_{1,n}^*(\bar{z})\Gamma_{1,n}^{*-1}(0)}{z\Gamma_{2,n}^*(\bar{z})\Theta_{2,n}^{*-1}(0)w + \frac{T-z}{T}\Gamma_{1,n}^*(\bar{z})\Gamma_{1,n}^{*-1}(0)} \quad (4.6)$$

Teorema 4.3.3. *[6, Teorema 38] Sea la matriz resolvente $U^{(2n+1)}$ dada por (3.18). Sean los polinomios $P_{k,n}$ y $Q_{k,n}$ para $k = 1, 2$ como en la definición 4.1.2. Entonces la siguiente igualdad se mantiene para $\forall z \in \mathbb{C}$:*

$$U^{(2n+1)} = \begin{pmatrix} Q_{2,n}^*(\bar{z})Q_{2,n}^{*-1}(0) & -Q_{1,n+1}^*(\bar{z})P_{1,n+1}^{*-1}(0) \\ -z(T-z)P_{2,n}^*(\bar{z})Q_{2,n}^{*-1}(0) & P_{1,n+1}^*(\bar{z})P_{1,n+1}^{*-1}(0) \end{pmatrix}$$

Observación 4.3.4. *Del teorema 3.4.5 podemos construir la transformación lineal fraccionaria (3.21), de la matriz resolvente $U^{(2n+1)}$.*

$$s^{(2n+1)} := \frac{Q_{2,n}^*(\bar{z})Q_{2,n}^{*-1}(0)w - Q_{1,n+1}^*(\bar{z})P_{1,n+1}^{*-1}(0)}{-z(T-z)P_{2,n}^*(\bar{z})Q_{2,n}^{*-1}(0)w + P_{1,n+1}^*(\bar{z})P_{1,n+1}^{*-1}(0)} \quad (4.7)$$

4.4. Soluciones extremales de PMH mediante polinomios ortogonales

En esta sección recordamos la representación de la función asociada a la solución de PMH, vía polinomios ortogonales en $[0, T]$ y su segunda especie de polinomios.

Sean $P_{k,n}$, $Q_{k,n}$, $\Gamma_{k,n}$ y $\Theta_{k,n}$ como en definiciones 4.1.2 y 4.1.3, las soluciones extremales de Krein y Friedrichs para el PMH, admiten las siguientes representaciones para todo $z \in \mathbb{C}/[0, T]$:

Número par de momentos

$$s_{\mathcal{K}}^{(2n+1)}(z) = -\frac{Q_{2,n}^*(\bar{z})}{z(T-z)P_{2,n}^*(\bar{z})}, \quad s_{\mathcal{F}}^{(2n+1)}(z) = -\frac{Q_{1,n+1}^*(\bar{z})}{P_{1,n+1}^*(\bar{z})}. \quad (4.8)$$

Estas soluciones se obtienen de (4.7), haciendo $w = \infty$ y $w = 0$.

Número impar de momentos

$$s_{\mathcal{K}}^{(2n)}(z) = \frac{\Theta_{2,n}^*(\bar{z})}{z\Gamma_{2,n}^*(\bar{z})}, \quad s_{\mathcal{F}}^{(2n)}(z) = \frac{\Theta_{1,n}^*(\bar{z})}{(T-z)\Gamma_{1,n}^*(\bar{z})}. \quad (4.9)$$

Estas soluciones se obtienen de (4.6), haciendo $w = \infty$ y $w = 0$.

Usamos los índices $\mathcal{K}$ y $\mathcal{F}$ para distinguir entre las soluciones extremales del PMH.

En el siguiente capítulo estudiaremos más a detalle las soluciones extremales de PMH, las cuales darán las soluciones extremales al problema CA.

Capítulo 5

Soluciones extremales del problema CA mediante polinomios ortogonales

En este capítulo nos dedicamos a desarrollar un par de teoremas, que son los más importantes del presente trabajo, teorema 5.2.1 y teorema 5.2.3, los cuales nos dicen que existe un par de controles admisibles para el sistema (2.13) y el número de saltos de cada control en un intervalo $[0, T]$.

Para llegar a los teoremas mencionados, se trabajó con las soluciones extremales $s_{\mathcal{X}}$ y $s_{\mathcal{F}}$ del PMH, que como vimos en el capítulo anterior su representación es mediante los polinomios ortogonales.

Cabe mencionar un resultado importante de este trabajo: el número de saltos del control admisible es exactamente m saltos en $[0, T]$, y en el teorema 2.2.9 el número de saltos del control es a lo más $(m - 1)$ en $[0, T]$, donde m es el grado del sistema.

5.1. Propiedades especiales de las soluciones extremales del problema CA

Lema 5.1.1. Sean (4.8) y (4.9) el par de soluciones extremales del PMH.

a) Se pueden representar de forma general como:

$$s_{\mathcal{E}}(z) = \frac{q(z)}{p(z)}. \quad (5.1)$$

b) Los polinomios $q(z)$ y $p(z)$ son de grado $(n - 1)$ y n respectivamente.

Donde $s_{\mathcal{E}}(z)$ puede ser $s_{\mathcal{F}}(z)$ y $s_{\mathcal{X}}(z)$ de (4.8) y (4.9) según el grado del sistema.

Demostración.

a) Es trivial, ya que tenemos la tabla siguiente.

Función extremal	$q(z)$	$p(z)$
$s_{\mathcal{K}}^{(2n+1)}(z) = -\frac{q_{2,n}^*(\bar{z})}{z(T-z)p_{2,n}^*(\bar{z})}$	$-q_{2,n}^*(\bar{z})$	$z(T-z)p_{2,n}^*(\bar{z})$
$s_{\mathcal{F}}^{(2n+1)}(z) = -\frac{q_{1,n+1}^*(\bar{z})}{p_{1,n+1}^*(\bar{z})}$	$-q_{1,n+1}^*(\bar{z})$	$p_{1,n+1}^*(\bar{z})$
$s_{\mathcal{K}}^{(2n)}(z) = \frac{\theta_{2,n}^*(\bar{z})}{z\gamma_{2,n}^*(\bar{z})}$	$\theta_{2,n}^*(\bar{z})$	$z\gamma_{2,n}^*(\bar{z})$
$s_{\mathcal{F}}^{(2n)}(z) = \frac{\theta_{1,n}^*(\bar{z})}{(T-z)\gamma_{1,n}^*(\bar{z})}$	$\theta_{1,n}^*(\bar{z})$	$(T-z)\gamma_{1,n}^*(\bar{z})$

b) Se sigue directamente del Lema 4.2.3.

A manera de resumen se tiene la tabla siguiente.

Función extremal	$q(z)$	$p(z)$
$s_{\mathcal{K}}^{(2n+1)}(z) = -\frac{q_{2,n}^*(\bar{z})}{z(T-z)p_{2,n}^*(\bar{z})}$	$(n+1)$	$(n+2)$
$s_{\mathcal{F}}^{(2n+1)}(z) = -\frac{q_{1,n+1}^*(\bar{z})}{p_{1,n+1}^*(\bar{z})}$	n	$(n+1)$
$s_{\mathcal{K}}^{(2n)}(z) = \frac{\theta_{2,n}^*(\bar{z})}{z\gamma_{2,n}^*(\bar{z})}$	n	$(n+1)$
$s_{\mathcal{F}}^{(2n)}(z) = \frac{\theta_{1,n}^*(\bar{z})}{(T-z)\gamma_{1,n}^*(\bar{z})}$	n	$(n+1)$

En general el grado de $q(z)$ es un grado menos que $p(z)$.

Lema 5.1.2. Sean $\gamma_{r,j}(z)$ y $p_{r,j}(z)$ con $r = 1, 2$, como en (4.1.2) y (4.1.3). Los ceros de $\gamma_{r,j}(z)$ y $p_{r,j}(z)$ son reales, simples y se encuentran en el interior del intervalo $[0, T]$.

Demostración. $\gamma_{r,j}(z)$ y $p_{r,j}(z)$ deben tener al menos un cambio de signo en $[0, T]$. En otras palabras $\gamma_{r,j}(z)$ y $p_{r,j}(z)$ tienen al menos un cero de multiplicidad impar en $[0, T]$.

Sean $z_1, z_2, \dots, z_k$, los ceros distintos en $[0, T]$. Sea

$$\rho(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_k).$$

Entonces en particular $\rho(z)p_{1,j}(z)$ es un polinomio que no tiene ceros de multiplicidad impar en $[0, T]$, por lo tanto $\rho(z)p_{1,j}(z) \geq 0$ para $z \in [0, T]$. De ahí $\rho(z)p_{1,j}(z) > 0$. Pero esto contradice el hecho de que

$$\begin{aligned} \pi(z)p_{1,j}(z) &= 0 & \text{para } \pi(z) \text{ de grado } m < j \\ \pi(z)p_{1,j}(z) &\neq 0 & \text{para } \pi(z) \text{ de grado } m = j. \end{aligned}$$

Al menos que $k \geq j$. Esto es $k = j$ así $p_{1,j}(z)$ tiene j ceros simples en $[0, T]$.

Igual para los polinomios $p_{2,j}(z)$, $\gamma_{1,j}(z)$ y $\gamma_{2,j}(z)$, por lo tanto también tienen j ceros simples en $[0, T]$.

Lema 5.1.3. Sean el par de funciones extremales del PMH como en (5.1).

a) El polinomio $q(z)$ tiene raíces reales y simples.

b) Las raíces de $q(z)$ y $p(z)$ se intercalan.

Demostración.

a) Por lema 5.1.2 y teorema fundamental del álgebra $q(z)$ tiene $(n-1)$ raíces reales y simples.

$$q(z) = (z - \xi_2) \cdots (z - \xi_n).$$

b) Del Lema 5.1.2 vemos que $p(z)$ tiene ceros reales y simples, de ahí que expandiendo $s_\varepsilon(z)$ en fracciones parciales tenemos

$$s_\varepsilon(z) = \frac{q(z)}{p(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{\rho(z_i)}{z - z_i}$$

donde

$$\rho(z_i) = \frac{q(z_i)}{p'(z_i)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Calculamos $\lim_{z \rightarrow z_i} s_\varepsilon(z)$, desarrollando la suma y aplicando el límite.

$$\begin{aligned} s_\varepsilon(z) &= \frac{q(z_1)}{(z - z_1)p'(z_1)} + \cdots + \frac{q(z_n)}{(z - z_n)p'(z_n)} \\ \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{(z - \xi_2) \cdots (z - \xi_n)}{(z - z_1)p'(z_1)} + \cdots + \frac{(z - \xi_2) \cdots (z - \xi_n)}{(z - z_n)p'(z_n)} &= \infty \\ \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{(z - \xi_2) \cdots (z - \xi_n)}{(z - z_1)p'(z_1)} + \cdots + \frac{(z - \xi_2) \cdots (z - \xi_n)}{(z - z_n)p'(z_n)} &= -\infty \\ &\vdots \\ \lim_{z \rightarrow z_n} \frac{(z - \xi_2) \cdots (z - \xi_n)}{(z - z_1)p'(z_1)} + \cdots + \frac{(z - \xi_2) \cdots (z - \xi_n)}{(z - z_n)p'(z_n)} &= \infty. \end{aligned}$$

Ahora haciendo uso del teorema de Bolzano (teorema del valor intermedio), existen ceros en $(z_1, z_2), \dots, (z_{n-1}, z_n)$. Más precisamente

$$\xi_2 \in (z_1, z_2), \quad \xi_3 \in (z_2, z_3), \quad \dots \quad \xi_n \in (z_{n-1}, z_n).$$

Por lo tanto las raíces de $q(z)$ y $p(z)$ se intercalan.

$$z_1 < \xi_2 < z_2 < \xi_3 \cdots < \xi_n < z_n.$$

Tal que la función $s_\varepsilon(z)$ de (5.1) tiene la siguiente representación.

$$s_\varepsilon(z) = \frac{(z - \xi_2) \cdots (z - \xi_n)}{(z - z_1) \cdots (z - z_n)}. \quad (5.2)$$

Lema 5.1.4. Sea $z = x + i\epsilon \in \mathbb{C}$, tal que $z > 0$.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \arg(x + i\epsilon) = \begin{cases} 0, & x > 0 \\ \pi, & x < 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Demostración. De la definición del argumento de un número complejo tenemos para $z > 0$, es decir para $\epsilon \geq 0$.

$$\arg(x + i\epsilon) = \begin{cases} \arctan \frac{\epsilon}{x}, & x > 0 \\ \pi + \arctan \frac{\epsilon}{x}, & x < 0, \epsilon > 0 \end{cases}.$$

Aplicando el límite a la ecuación anterior demostramos el Lema.

Definición 5.1.5. Sean $p_{r,j}(t)$, $\gamma_{r,j}(t)$ polinomios ortogonales en $[0, T]$ y $q_{r,j}(t)$, $\theta_{r,j}(t)$ sus respectivos polinomios de segunda especie, asociados al conjunto X_T .

Donde X_T es el conjunto de puntos x_0 desde los cuales se puede alcanzar el origen en tiempo T .

Recordemos que en la construcción de las soluciones extremales, $s_{\mathcal{F}}(z)$ y $s_{\mathcal{K}}(z)$, existe una notable diferencia entre el grado par y grado impar del sistema (2.13).

5.2. Forma explícita de los controles admisibles

Teorema 5.2.1. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $T > t_{\min}$ y $p_{r,j}(t)$, $\gamma_{r,j}(t)$, $q_{r,j}(t)$ y $\theta_{r,j}(t)$ con $r = 1, 2$ los polinomios asociados a X_T . Entonces existen $u_{\mathcal{F}}(t)$ y $u_{\mathcal{K}}(t)$ dos controles admisibles del sistema (2.13) que dependen del grado.

a) Sea $m = 2n + 1$.

Construimos las soluciones extremales, $s_{\mathcal{F}}^{(2n+1)}(t)$ y $s_{\mathcal{K}}^{(2n+1)}(t)$, con los polinomios $p_{r,j}(t)$ y $q_{r,j}(t)$ donde $r = 1, 2$.

El par de controles admisibles esta dado de la siguiente manera.

$$u_{\mathcal{F}}^{(2n+1)}(t) = \begin{cases} 1, & t_j < t < \tau_{j+1}, \\ -1, & \tau_{j+1} < t < t_{j+1}, \end{cases} \quad t \in [0, T], \quad (5.4)$$

$$u_{\mathcal{K}}^{(2n+1)}(t) = \begin{cases} -1, & t_j < t < \tau_{j+1}, \\ 1, & \tau_{j+1} < t < t_{j+1}, \end{cases} \quad t \in [0, T]. \quad (5.5)$$

b) Sea $m = 2n$.

Construimos las soluciones extremales, $s_{\mathcal{F}}^{(2n)}(t)$ y $s_{\mathcal{K}}^{(2n)}(t)$, con los polinomios

$\gamma_{r,j}(t)$ y $\theta_{r,j}(t)$ donde $r = 1, 2$.

El par de controles admisibles esta dado de la siguiente manera.

$$u_{\mathcal{F}}^{(2n)}(t) = \begin{cases} 1, & t_j < t < \tau_{j+1}, \\ -1, & \tau_{j+1} < t < t_{j+1}, \end{cases} \quad t \in [0, T], \quad (5.6)$$

$$u_{\mathcal{K}}^{(2n)}(t) = \begin{cases} -1, & t_j < t < \tau_{j+1}, \\ 1, & \tau_{j+1} < t < t_{j+1}, \end{cases} \quad t \in [0, T]. \quad (5.7)$$

donde $0 = t_1 < \tau_2 < t_2 < \tau_3 < \dots < \tau_n < t_n (\leq T)$ satisfacen las funciones extremales (4.8) y (4.9).

Demostración. El conjunto de control admisible esta dado por (3.22). Procedemos de esta ecuación para llegar a los controles deseados (5.4), (5.5), (5.6) y (5.7). Teniendo en cuenta (5.2) y (5.3), reescribimos (3.22) de la siguiente manera

$$u(t) = - \left(\frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \arg(-(t + i\epsilon)s_{\mathcal{E}}(t + i\epsilon)) - 1 \right). \quad (5.8)$$

Aquí $s_{\mathcal{E}}(t)$ toma cualquiera de las siguientes soluciones extremales.

$$\begin{array}{cc} \text{Grado impar} & \text{Grado par} \\ s_{\mathcal{F}}^{(2n+1)}(t) & s_{\mathcal{K}}^{(2n+1)}(t) \quad s_{\mathcal{F}}^{(2n)}(t) \quad s_{\mathcal{K}}^{(2n)}(t). \end{array}$$

a) Sea $m = 2n + 1$.

a) Tomamos la solución extremal $s_{\mathcal{F}}^{(2n+1)}(t)$. Entonces de (5.8) tenemos:

$$\begin{aligned}
u_{\mathcal{F}}^{(2n+1)}(t) &= - \left(\frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \arg \left(-(t + i\epsilon) s_{\mathcal{F}}(t + i\epsilon) \right) - 1 \right) \\
&= - \left(\frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \arg \left(-s_{\mathcal{F}}^{(2n+1)}(t + i\epsilon) \right) - 1 \right) \\
&= - \left(-1 + \frac{2}{\pi} \begin{cases} 0, & \frac{(t-\tau_2)\cdots(t-\tau_{n+1})}{(t-t_1)(t-t_2)\cdots(t-t_{n+1})} > 0, \\ \pi, & \frac{(t-\tau_2)\cdots(t-\tau_{n+1})}{(t-t_1)(t-t_2)\cdots(t-t_{n+1})} < 0, \end{cases} \right) \\
&= - \left(-1 + \frac{2}{\pi} \begin{cases} 0, & t_j < t < \tau_{j+1}, \\ \pi, & \tau_{j+1} < t < t_{j+1}, \end{cases} \right) \\
&= - \left(-1 + \begin{cases} 0, & t_j < t < \tau_{j+1}, \\ 2, & \tau_{j+1} < t < t_{j+1}, \end{cases} \right) \\
&= \begin{cases} 1, & t_j < t < \tau_{j+1}, \\ -1, & \tau_{j+1} < t < t_{j+1}. \end{cases}
\end{aligned}$$

b) Tomamos la solución extremal $s_{\mathcal{K}}^{(2n+1)}(t)$. Entonces de (5.8) tenemos:

$$\begin{aligned}
u_{\mathcal{K}}^{(2n+1)}(t) &= - \left(\frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \arg \left(-(t + i\epsilon) s_{\mathcal{K}}^{(2n+1)}(t + i\epsilon) \right) - 1 \right) \\
&= - \left(\frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \arg \left(-s_{\mathcal{K}}^{(2n+1)}(t + i\epsilon) \right) - 1 \right) \\
&= - \left(-1 + \frac{2}{\pi} \begin{cases} 0, & \frac{(t-\tau_2)\cdots(t-\tau_{n+2})}{(t)(t-t_2)\cdots(t-t_{n+1})(T-t)} > 0, \\ \pi, & \frac{(t-\tau_2)\cdots(t-\tau_{n+2})}{(t)(t-t_2)\cdots(t-t_{n+1})(T-t)} < 0, \end{cases} \right) \\
&= - \left(-1 + \frac{2}{\pi} \begin{cases} \pi, & t_j < t < \tau_{j+1}, \\ 0, & \tau_{j+1} < t < t_{j+1}, \end{cases} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left(-1 + \begin{cases} 2, & t_j < t < \tau_{j+1}, \\ 0, & \tau_{j+1} < t < t_{j+1}, \end{cases} \right) \\
&= \begin{cases} -1, & t_j < t < \tau_{j+1}, \\ 1, & \tau_{j+1} < t < t_{j+1}. \end{cases}
\end{aligned}$$

b) Sea $m = 2n$.

a) Tomamos la solución extremal $s_{\mathcal{F}}^{(2n)}(t)$. Entonces de (5.8) tenemos:

$$\begin{aligned}
u_{\mathcal{F}}^{(2n)}(t) &= - \left(\frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \arg \left(-(t + i\epsilon) s_{\mathcal{F}}^{(2n)}(t + i\epsilon) \right) - 1 \right) \\
&= - \left(\frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \arg \left(-s_{\mathcal{F}}^{(2n)}(t + i\epsilon) \right) - 1 \right) \\
&= - \left(-1 + \frac{2}{\pi} \begin{cases} 0, & -\frac{(t-\tau_2)\cdots(t-\tau_{n+1})}{(t-t_1)(t-t_2)\cdots(t-t_{n+1})(T-t)} > 0, \\ \pi, & -\frac{(t-\tau_2)\cdots(t-\tau_{n+1})}{(t-t_1)(t-t_2)\cdots(t-t_{n+1})(T-t)} < 0, \end{cases} \right) \\
&= - \left(-1 + \frac{2}{\pi} \begin{cases} 0, & t_j < t < \tau_{j+1}, \\ \pi, & \tau_{j+1} < t < t_{j+1}, \end{cases} \right) \\
&= - \left(-1 + \begin{cases} 0, & t_j < t < \tau_{j+1}, \\ 2, & \tau_{j+1} < t < t_{j+1}, \end{cases} \right) \\
&= \begin{cases} 1, & t_j < t < \tau_{j+1}, \\ -1, & \tau_{j+1} < t < t_{j+1}. \end{cases}
\end{aligned}$$

b) Tomamos la solución extremal $s_{\mathcal{K}}^{(2n)}(t)$. De manera análoga de (5.8) tenemos:

$$\begin{aligned}
u_{\mathcal{K}}^{(2n)}(t) &= - \left(\frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \arg \left(-(t + i\epsilon) s_{\mathcal{K}}^{(2n)}(t + i\epsilon) \right) - 1 \right) \\
&= - \left(\frac{2}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \arg \left(-s_{\mathcal{K}}^{(2n)}(t + i\epsilon) \right) - 1 \right) \\
&= - \left(-1 + \frac{2}{\pi} \begin{cases} 0, & -\frac{(t-\tau_2)\cdots(t-\tau_{n+1})}{(t)(t-\tau_2)\cdots(t-\tau_{n+1})} > 0, \\ \pi, & -\frac{(t-\tau_2)\cdots(t-\tau_{n+1})}{(t)(t-\tau_2)\cdots(t-\tau_{n+1})} < 0, \end{cases} \right) \\
&= - \left(-1 + \frac{2}{\pi} \begin{cases} \pi, & t_j < t < \tau_{j+1}, \\ 0, & \tau_{j+1} < t < t_{j+1}, \end{cases} \right) \\
&= - \left(-1 + \begin{cases} 2, & t_j < t < \tau_{j+1}, \\ 0, & \tau_{j+1} < t < t_{j+1}, \end{cases} \right) \\
&= \begin{cases} -1, & t_j < t < \tau_{j+1}, \\ 1, & \tau_{j+1} < t < t_{j+1}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Observación 5.2.2. Sean (5.4), (5.5), (5.6) y (5.7) los controles admisibles del teorema 5.2.1 los podemos reescribir de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
&\begin{array}{cc} \text{Grado impar} & \text{Grado par} \\ u_{\mathcal{F}}^{(2n+1)}(t) = \text{sign} \left(s_{\mathcal{F}}^{(2n+1)}(t) \right), & u_{\mathcal{F}}^{(2n)}(t) = \text{sign} \left(s_{\mathcal{F}}^{(2n)}(t) \right), \\ u_{\mathcal{K}}^{(2n+1)}(t) = \text{sign} \left(s_{\mathcal{K}}^{(2n+1)}(t) \right), & u_{\mathcal{K}}^{(2n)}(t) = \text{sign} \left(s_{\mathcal{K}}^{(2n)}(t) \right). \end{array}
\end{aligned}$$

Teorema 5.2.3. Sean $u(t)$ los controles definidos en (5.4), (5.5), (5.6) y (5.7); cada control es constante a trozos y tiene exactamente m saltos, donde m es el grado del sistema.

Demostración. Se sigue directamente del teorema 5.2.1.

Observación 5.2.4. Hacemos notar que en el número de saltos del control del teorema 2.2.9 es a lo más $(m-1)$, donde nosotros llegamos a que el número de saltos de los controles admisibles son exactamente m saltos.

Observación 5.2.5. En un trabajo posterior se demostrará que los controles admisibles (5.4), (5.5), (5.6) y (5.7) son los únicos que tienen exactamente m saltos.

El conjunto de controles que empiezan en x_0 y terminan en el origen en tiempo t_{min} (control óptimo) y $T > t_{min}$ (controles admisibles), están dados por el teorema 2.2.10 y teorema 5.2.1.

El control óptimo tiene la forma:

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t_j^o < t < \tau_{j+1}^o, \\ 1, & \tau_{j+1}^o < t < t_{j+1}^o. \end{cases}$$

Los controles admisibles son:

$$u_{\mathcal{F}}(t) = \begin{cases} 1, & t_j^{\mathcal{F}} < t < \tau_{j+1}^{\mathcal{F}}, \\ -1, & \tau_{j+1}^{\mathcal{F}} < t < t_{j+1}^{\mathcal{F}}. \end{cases} \quad u_{\mathcal{K}}(t) = \begin{cases} -1, & t_j^{\mathcal{K}} < t < \tau_{j+1}^{\mathcal{K}}, \\ 1, & \tau_{j+1}^{\mathcal{K}} < t < t_{j+1}^{\mathcal{K}}. \end{cases}$$

Utilizamos los superíndices o , $\mathcal{F}$, $\mathcal{K}$, para distinguir las raíces de los controles. Además en los tres controles denotamos τ_{j+1} por t_{j+1} y t_{j+1} por t_{j+2} , como se muestra en la siguiente tabla

Control óptimo	Control admisible
$0 = t_0^o < t_1^o < \dots < t_{n-1}^o < t_n^o = t_{min}$	$0 = t_0^{\mathcal{F}} < t_1^{\mathcal{F}} < \dots < t_{n-1}^{\mathcal{F}} < t_n^{\mathcal{F}} = T$
	$0 = t_0^{\mathcal{K}} < t_1^{\mathcal{K}} < \dots < t_{n-1}^{\mathcal{K}} < t_n^{\mathcal{K}} = T.$

Notemos que las raíces también cumplen las siguientes desigualdades.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Óptimo} & \leq & \text{Krein} & \text{Óptimo} & < & \text{Friedrichs} & & \text{Friedrichs} & < & \text{Krein} \\ t_j^o & \leq & t_j^{\mathcal{K}} & t_j^o & < & t_{j+1}^{\mathcal{F}} & & t_j^{\mathcal{F}} & < & t_j^{\mathcal{K}} \end{array}$$

Capítulo 6

Ejemplos de soluciones extremales para sistemas en varias dimensiones

En este capítulo se presentan ejemplos de puntos iniciales x_0 , que se incluyen en el conjunto X_T , que representan las condiciones iniciales x_0 que pertenecen a $\mathbb{R}^m$ para las cuales las trayectorias $x(t)$ que corresponden a un control $u(t)$ seleccionado, alcanzan al origen en tiempo T .

Se toman puntos x_0 en sistemas de grado dos hasta el grado siete, donde se puede apreciar el comportamiento de los controles, tanto óptimo como admisibles.

Los teoremas 5.2.1 y 5.2.3 nos dicen que el número de saltos de cada control admisible son exactamente m en $[0, T]$, además cada control alcanza el origen en el tiempo exacto T , $T > t_{min}$ y toman valores de ± 1 , lo cual observamos en los ejemplos.

Consideremos el sistema canónico, es decir,

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad |u| \leq 1 \quad (6.1)$$

$$A := \{\delta_{j,k+1}\}_{j,k=1}^m, \quad B := (1, 0, \dots, 0)^T.$$

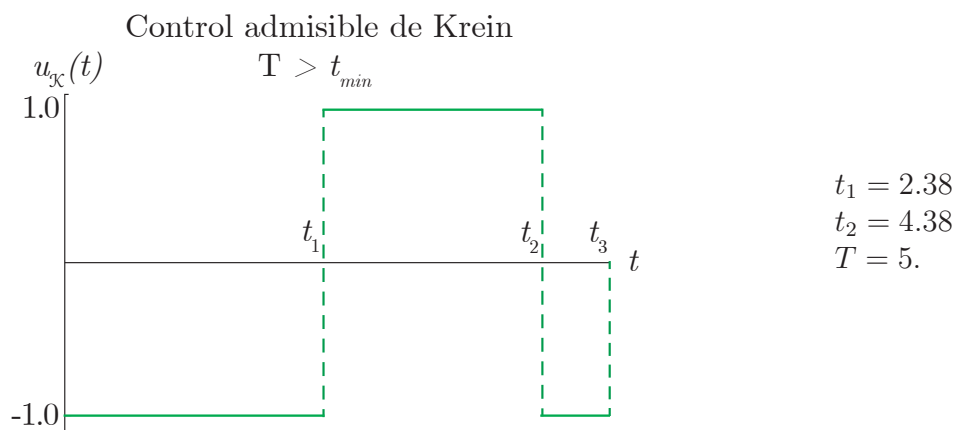
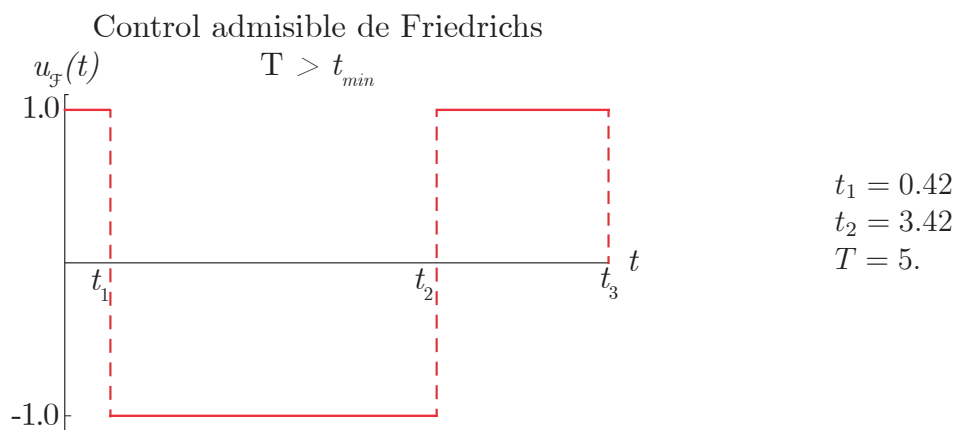
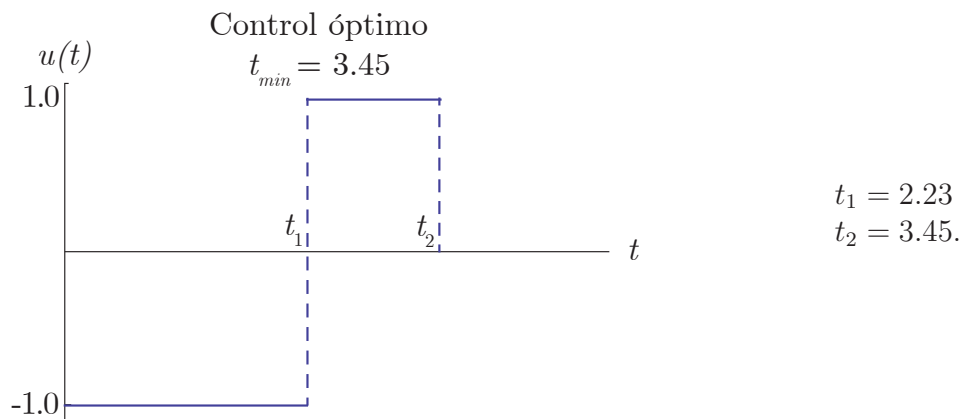
con posición inicial x_0 .

Presentamos ejemplos para puntos x_0 desde el grado dos al grado siete. En los cuales omitiremos los superíndices de las raíces de los tres controles. En los controles admisibles, $u_{\mathcal{F}}(t)$ y $u_{\mathcal{K}}(t)$ se alternan, uno empieza en 1, mientras el otro empieza en -1 .

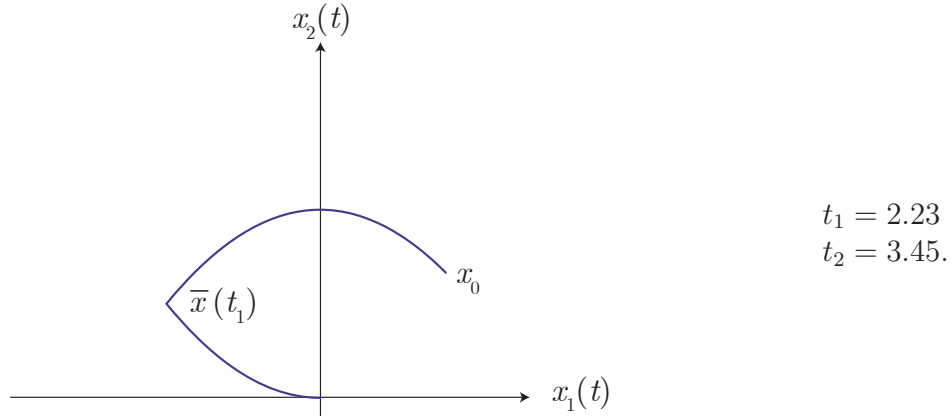
6.1. Dimensión $m = 2$, con diferentes condiciones iniciales

Presentamos ejemplos del sistema canónico (6.1) en dimensión $m = 2$ con diferentes condiciones iniciales, donde por medio de gráficas mostramos el comportamiento tanto del control óptimo $u(t)$ y de los controles admisibles $u_{\mathcal{F}}(t)$ y $u_{\mathcal{K}}(t)$, como de las trayectorias correspondientes $\bar{x}(t)$, $x_{\mathcal{F}}(t)$ y $x_{\mathcal{K}}(t)$.

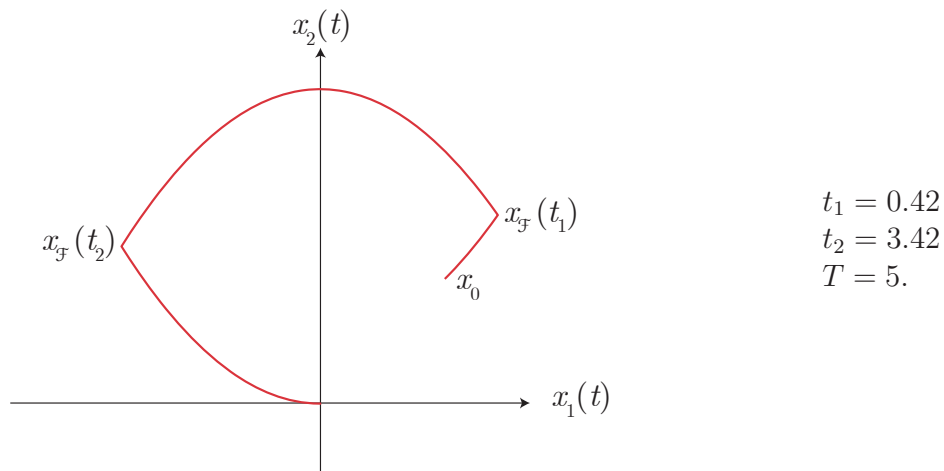
6.1.1. Gráficas de controles con $x_0 = \{1, 1\}$, $|u| \leq 1$



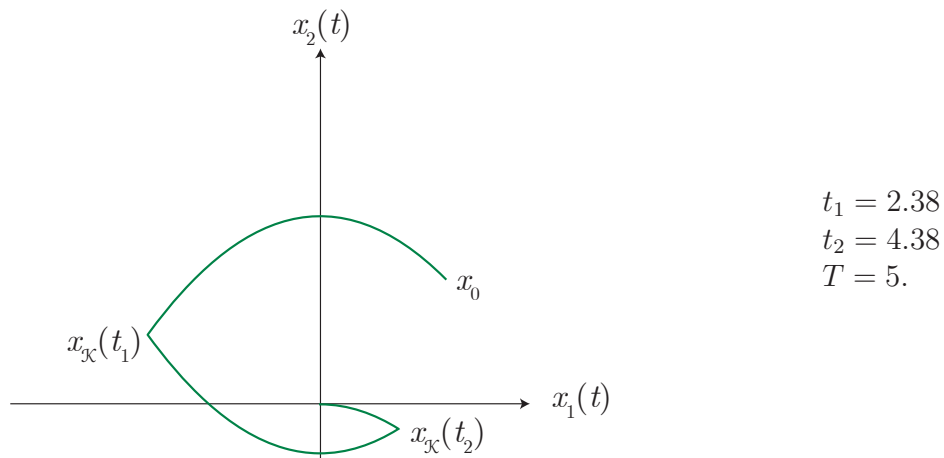
6.1.2. Gráficas de trayectorias con $x_0 = \{1, 1\}$, $|u| \leq 1$



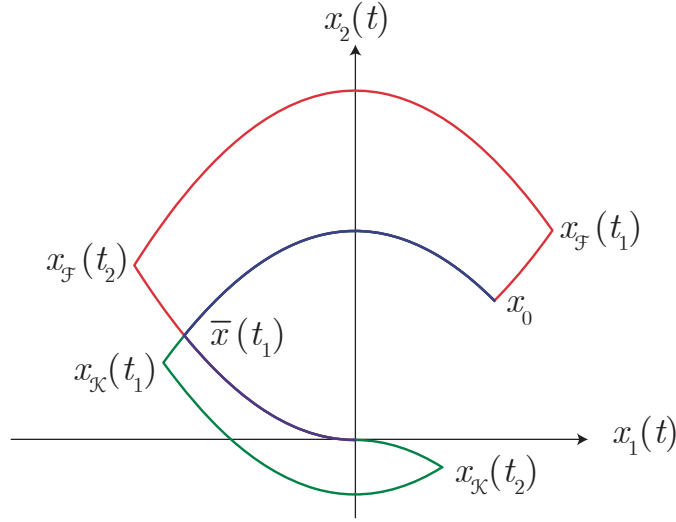
Trayectoria fase de $\bar{x}(t)$ que corresponde al control óptimo $u(t)$.



Trayectoria fase de $x_{\mathcal{F}}(t)$ que corresponde al control admisible de Friedrichs $u_{\mathcal{F}}(t)$.



Trayectoria fase de $x_{\mathcal{K}}(t)$ que corresponde al control admisible de Krein $u_{\mathcal{K}}(t)$.



Gráfica 6.1: Comparación de las trayectorias fase para $x_0 = (1, 1)$.

En la gráfica 6.1 comparamos tres trayectorias:

1. La trayectoria $\bar{x}(t)$ corresponde al control óptimo $u(t)$ en color azul.
2. La trayectoria $x_{\mathcal{F}}(t)$ corresponde al control admisible de Friedrichs $u_{\mathcal{F}}(t)$ en color rojo.
3. La trayectoria $x_{\mathcal{K}}(t)$ corresponde al control admisible de Krein $u_{\mathcal{K}}(t)$ en color verde.

Claramente vemos que las tres trayectorias empiezan en el punto inicial x_0 y llegan al origen.

Comportamiento de los controles y sus respectivas trayectorias:

El control óptimo $u(t)$ comienza con $u = -1$ tiene un salto en t_1 , da el cambio a $u = 1$, de ahí que la trayectoria $\bar{x}(t)$ que comienza en x_0 cambia en $\bar{x}(t_1)$ hasta que llega al origen en tiempo t_{min} .

El control admisible $u_{\mathcal{F}}(t)$ comienza con $u_{\mathcal{F}}(t) = 1$ tiene un salto en t_1 , da el cambio a $u_{\mathcal{F}}(t) = -1$, da otro salto en t_2 , vuelve a cambiar a $u_{\mathcal{F}}(t) = 1$; de ahí que la trayectoria $x_{\mathcal{F}}(t)$ que comienza en x_0 cambia en $x_{\mathcal{F}}(t_1)$, primer salto del control admisible $u_{\mathcal{F}}(t)$; cambia en $x_{\mathcal{F}}(t_2)$, segundo salto del control admisible $u_{\mathcal{F}}(t)$ hasta que llega al origen en tiempo T .

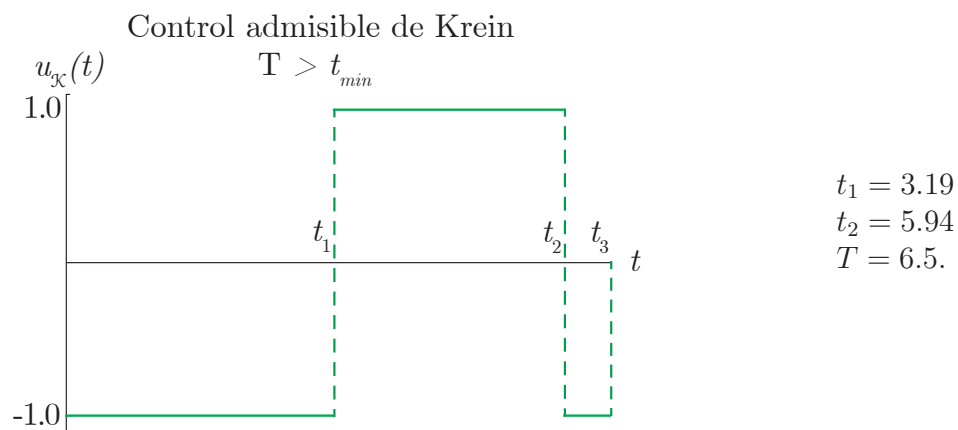
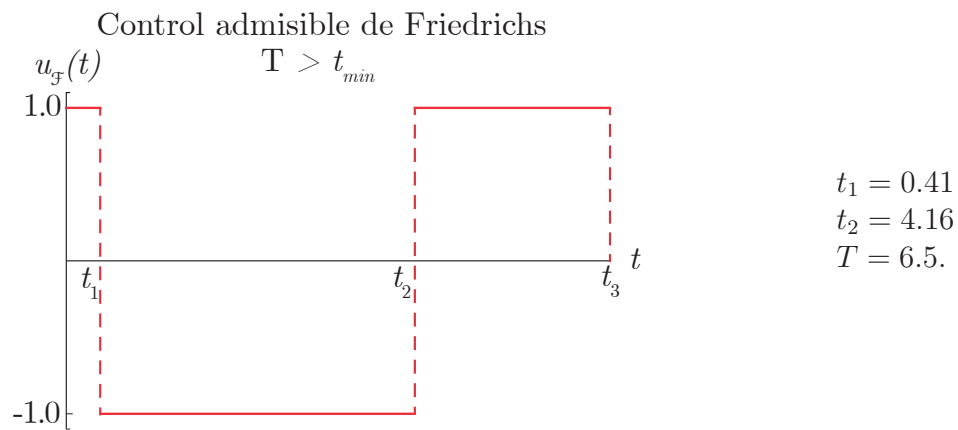
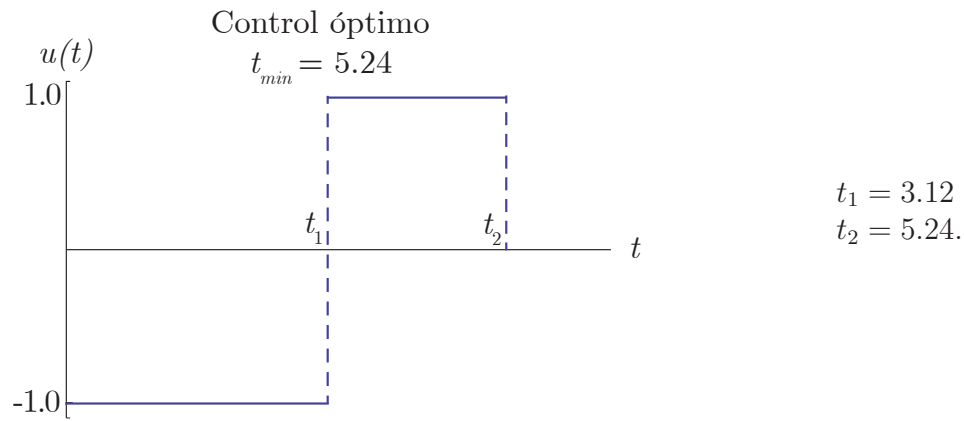
De manera análoga para el control admisible $u_{\mathcal{K}}(t)$ y la trayectoria $x_{\mathcal{K}}(t)$, tomando en cuenta que el control admisible comienza con $u_{\mathcal{K}}(t) = -1$.

De esta comparación notemos que las trayectorias de los controles admisibles comparten un trozo de trayectoria con la trayectoria entre $x(t_1)$ y $x(t_{min})$ que corresponde al control óptimo.

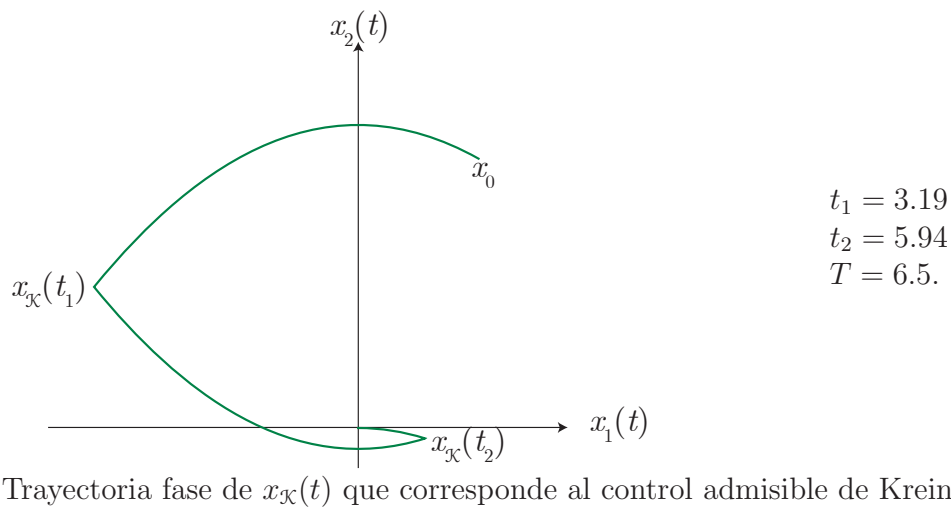
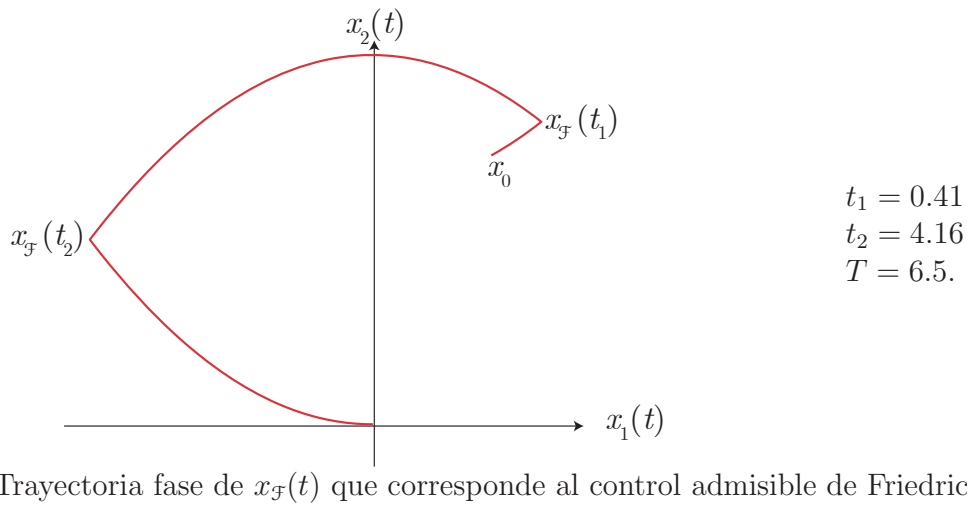
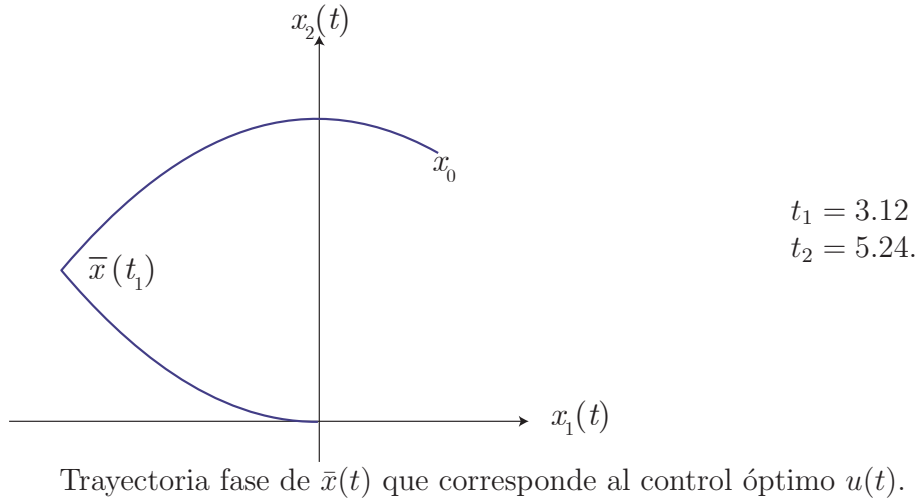
Las trayectorias $x_{\mathcal{F}}(t)$ y $\bar{x}(t)$ comparten el trozo final de toda la trayectoria, que es en $\bar{x}(t_1)$ hasta $\bar{x}(t_{min})$ y $x_{\mathcal{F}}(T - t_1)$ hasta $x_{\mathcal{F}}(T)$, donde este t_1 es del control óptimo.

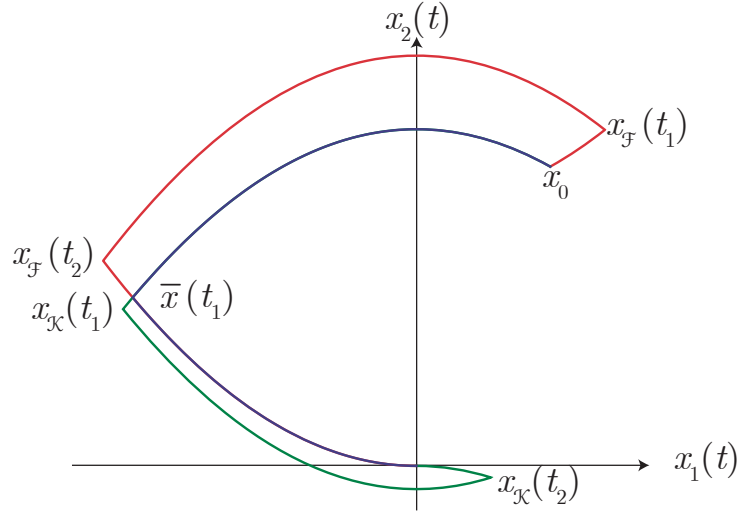
Las trayectorias $x_{\mathcal{K}}(t)$ y $\bar{x}(t)$ comparten el trozo inicial de toda la trayectoria, que es en x_0 hasta $\bar{x}(t_1)$ y x_0 hasta $x_{\mathcal{K}}(t_1)$, donde este t_1 es del control óptimo.

6.1.3. Gráficas de controles con $x_0 = \{1, 4\}$, $|u| \leq 1$



6.1.4. Gráficas de trayectorias con $x_0 = \{1, 4\}$, $|u| \leq 1$





Gráfica 6.2: Comparación de las trayectorias fase para $x_0 = (1, 4)$.

En la gráfica 6.2 comparamos tres trayectorias:

1. La trayectoria $\bar{x}(t)$ corresponde al control óptimo $u(t)$ en color azul.
2. La trayectoria $x_{\mathcal{F}}(t)$ corresponde al control admisible de Friedrichs $u_{\mathcal{F}}(t)$ en color rojo.
3. La trayectoria $x_{\mathcal{K}}(t)$ corresponde al control admisible de Krein $u_{\mathcal{K}}(t)$ en color verde.

Claramente vemos que las tres trayectorias empiezan en el punto inicial x_0 y llegan al origen.

Comportamiento de los controles y sus respectivas trayectorias:

El control óptimo $u(t)$ comienza con $u = -1$ tiene un salto en t_1 , da el cambio a $u = 1$, de ahí que la trayectoria $\bar{x}(t)$ que comienza en x_0 cambia en $\bar{x}(t_1)$ hasta que llega al origen en tiempo t_{min} .

El control admisible $u_{\mathcal{F}}(t)$ comienza con $u_{\mathcal{F}}(t) = 1$ tiene un salto en t_1 , da el cambio a $u_{\mathcal{F}}(t) = -1$, da otro salto en t_2 , vuelve a cambiar a $u_{\mathcal{F}}(t) = 1$; de ahí que la trayectoria $x_{\mathcal{F}}(t)$ que comienza en x_0 cambia en $x_{\mathcal{F}}(t_1)$, primer salto del control admisible $u_{\mathcal{F}}(t)$; cambia en $x_{\mathcal{F}}(t_2)$, segundo salto del control admisible $u_{\mathcal{F}}(t)$ hasta que llega al origen en tiempo T .

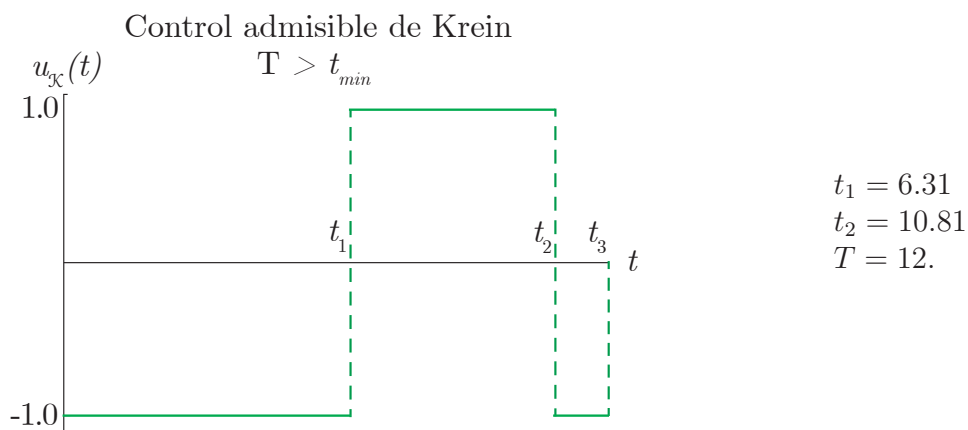
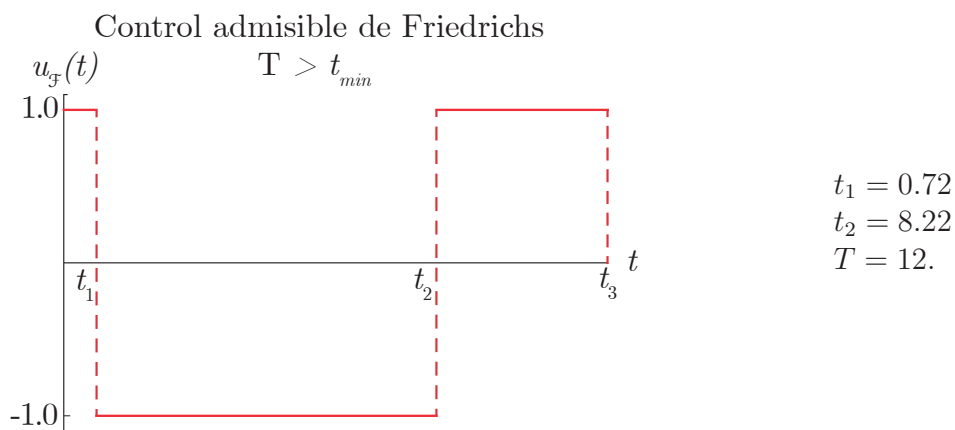
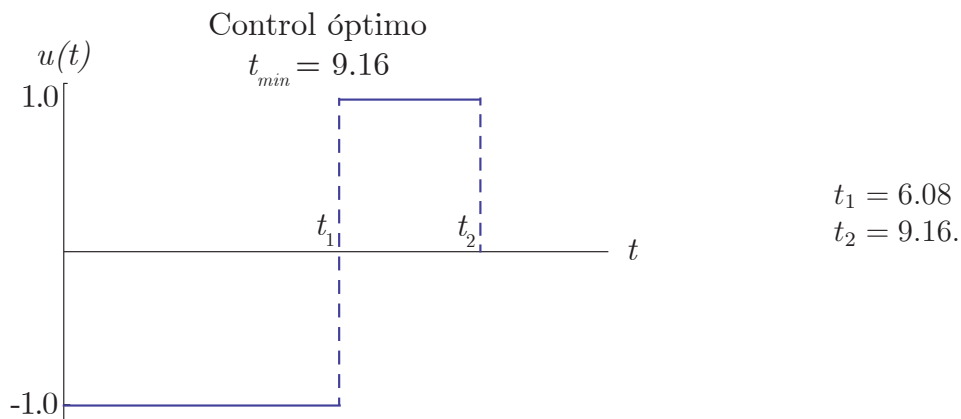
De manera análoga para el control admisible $u_{\mathcal{K}}(t)$ y la trayectoria $x_{\mathcal{K}}(t)$, tomando en cuenta que el control admisible comienza con $u_{\mathcal{K}}(t) = -1$.

De esta comparación notemos que las trayectorias de los controles admisibles comparten un trozo de trayectoria con la trayectoria entre $x(t_1)$ y $x(t_{min})$ que corresponde al control óptimo.

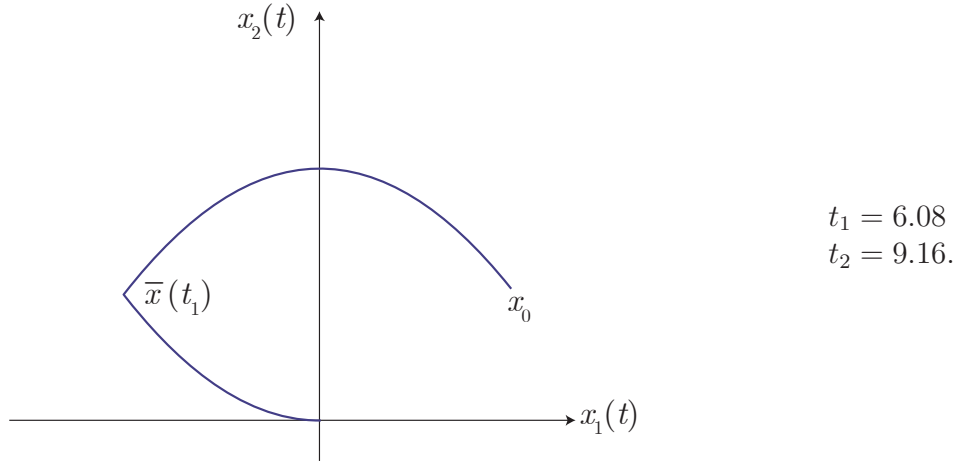
Las trayectorias $x_{\mathcal{F}}(t)$ y $\bar{x}(t)$ comparten el trozo final de toda la trayectoria, que es en $\bar{x}(t_1)$ hasta $\bar{x}(t_{min})$ y $x_{\mathcal{F}}(T - t_1)$ hasta $x_{\mathcal{F}}(T)$, donde este t_1 es del control óptimo.

Las trayectorias $x_{\mathcal{K}}(t)$ y $\bar{x}(t)$ comparten el trozo inicial de toda la trayectoria, que es en x_0 hasta $\bar{x}(t_1)$ y x_0 hasta $x_{\mathcal{K}}(t_1)$, donde este t_1 es del control óptimo.

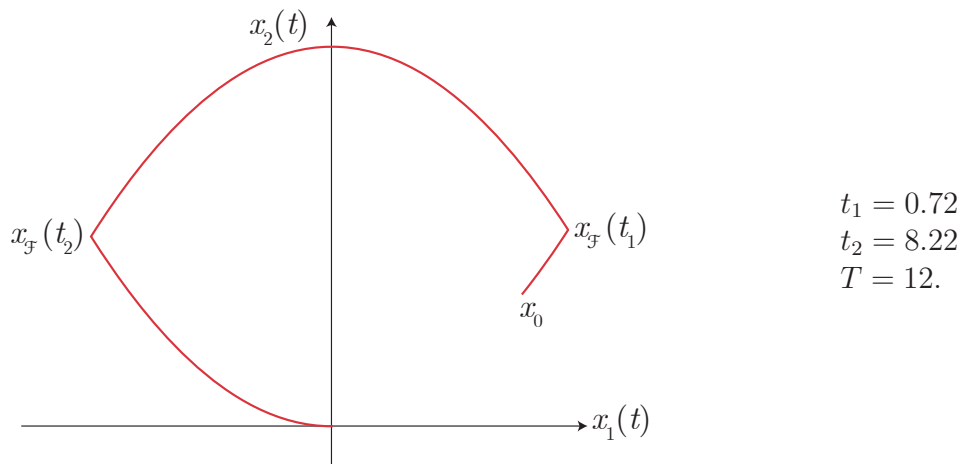
6.1.5. Gráficas de controles con $x_0 = \{3, 5\}$, $|u| \leq 1$



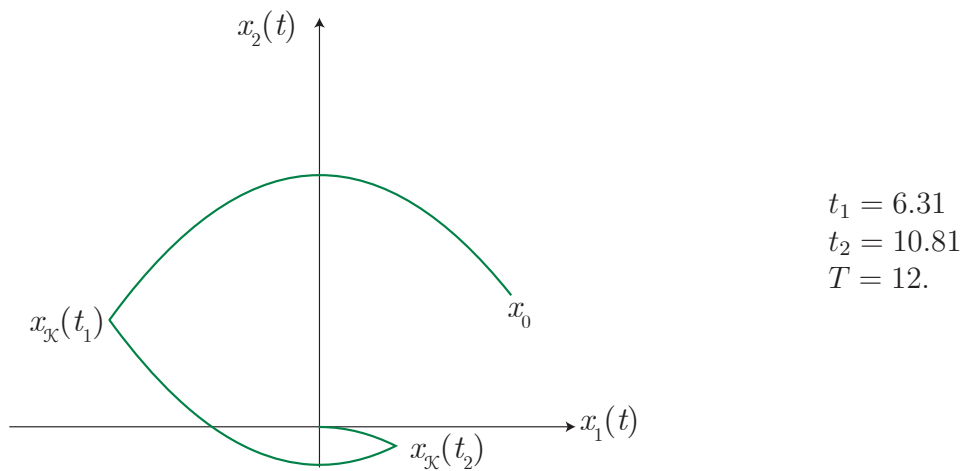
6.1.6. Gráficas de trayectorias con $x_0 = \{3, 5\}$, $|u| \leq 1$



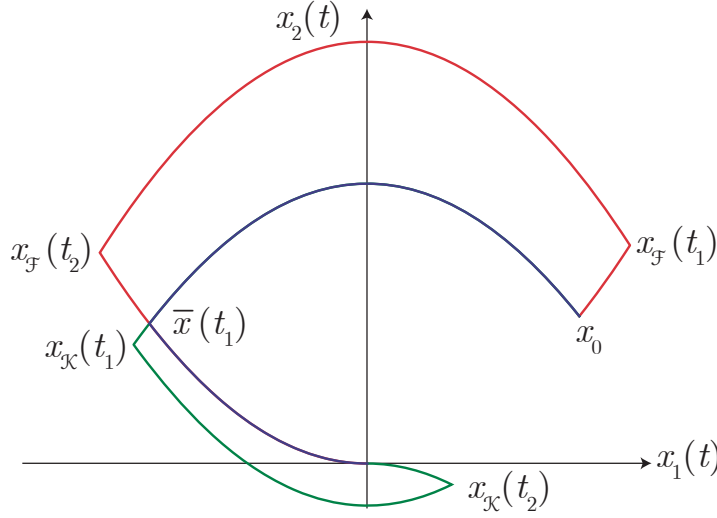
Trayectoria fase de $\bar{x}(t)$ que corresponde al control óptimo $u(t)$.



Trayectoria fase de $x_{\mathcal{F}}(t)$ que corresponde al control admisible de Friedrichs $u_{\mathcal{F}}(t)$.



Trayectoria fase de $x_{\mathcal{K}}(t)$ que corresponde al control admisible de Krein $u_{\mathcal{K}}(t)$.



Gráfica 6.3: Comparación de las trayectorias fase para $x_0 = (3, 5)$.

En la gráfica 6.3 comparamos tres trayectorias:

1. La trayectoria $\bar{x}(t)$ corresponde al control óptimo $u(t)$ en color azul.
2. La trayectoria $x_{\mathcal{F}}(t)$ corresponde al control admisible de Friedrichs $u_{\mathcal{F}}(t)$ en color rojo.
3. La trayectoria $x_{\mathcal{K}}(t)$ corresponde al control admisible de Krein $u_{\mathcal{K}}(t)$ en color verde.

Claramente vemos que las tres trayectorias empiezan en el punto inicial x_0 y llegan al origen.

Comportamiento de los controles y sus respectivas trayectorias:

El control óptimo $u(t)$ comienza con $u = -1$ tiene un salto en t_1 , da el cambio a $u = 1$, de ahí que la trayectoria $\bar{x}(t)$ que comienza en x_0 cambia en $\bar{x}(t_1)$ hasta que llega al origen en tiempo t_{min} .

El control admisible $u_{\mathcal{F}}(t)$ comienza con $u_{\mathcal{F}}(t) = 1$ tiene un salto en t_1 , da el cambio a $u_{\mathcal{F}}(t) = -1$, da otro salto en t_2 , vuelve a cambiar a $u_{\mathcal{F}}(t) = 1$; de ahí que la trayectoria $x_{\mathcal{F}}(t)$ que comienza en x_0 cambia en $x_{\mathcal{F}}(t_1)$, primer salto del control admisible $u_{\mathcal{F}}(t)$; cambia en $x_{\mathcal{F}}(t_2)$, segundo salto del control admisible $u_{\mathcal{F}}(t)$ hasta que llega al origen en tiempo T .

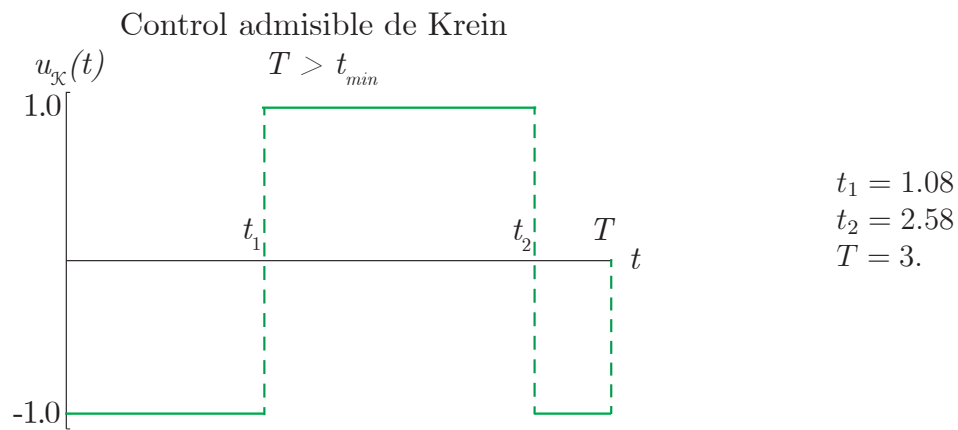
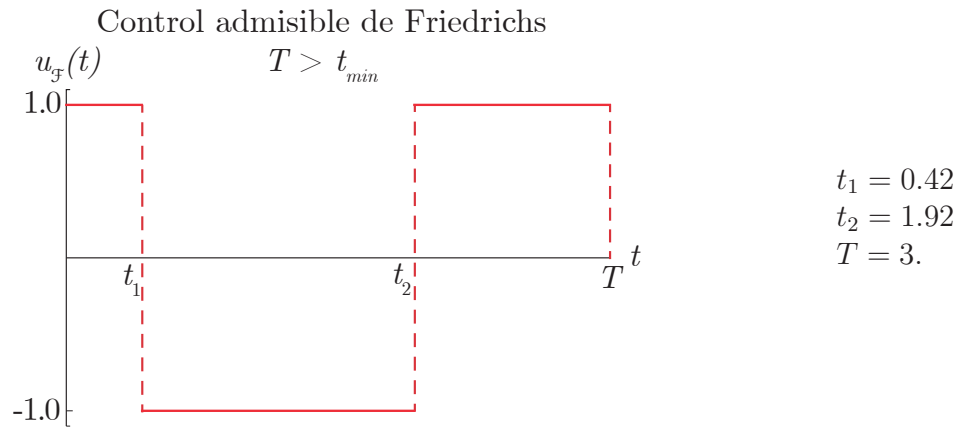
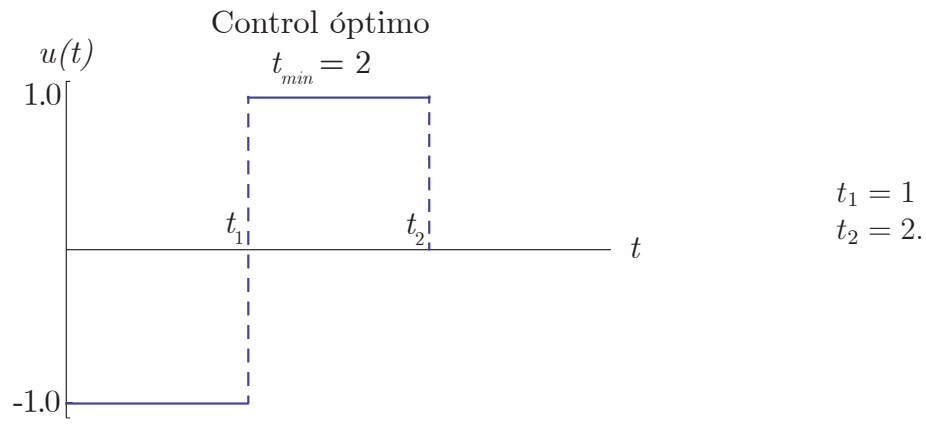
De manera análoga para el control admisible $u_{\mathcal{K}}(t)$ y la trayectoria $x_{\mathcal{K}}(t)$, tomando en cuenta que el control admisible comienza con $u_{\mathcal{K}}(t) = -1$.

De esta comparación notemos que las trayectorias de los controles admisibles comparten un trozo de trayectoria con la trayectoria entre $x(t_1)$ y $x(t_{min})$ que corresponde al control óptimo.

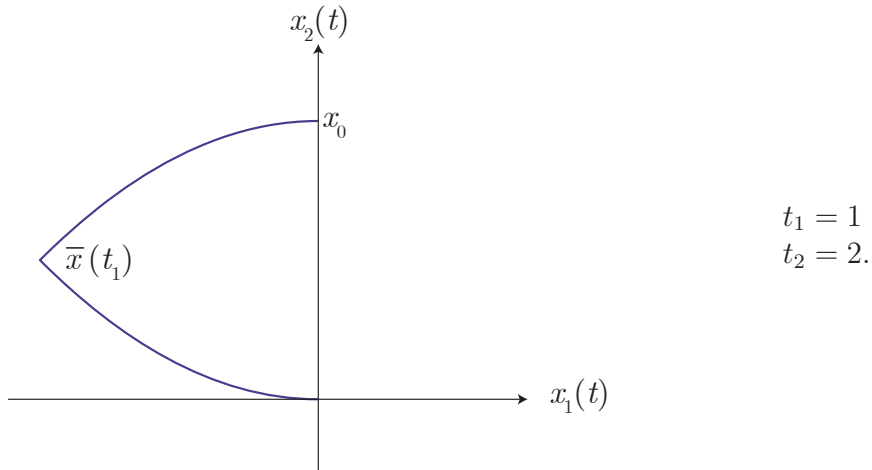
Las trayectorias $x_{\mathcal{F}}(t)$ y $\bar{x}(t)$ comparten el trozo final de toda la trayectoria, que es en $\bar{x}(t_1)$ hasta $\bar{x}(t_{min})$ y $x_{\mathcal{F}}(T - t_1)$ hasta $x_{\mathcal{F}}(T)$, donde este t_1 es del control óptimo.

Las trayectorias $x_{\mathcal{K}}(t)$ y $\bar{x}(t)$ comparten el trozo inicial de toda la trayectoria, que es en x_0 hasta $\bar{x}(t_1)$ y x_0 hasta $x_{\mathcal{K}}(t_1)$, donde este t_1 es del control óptimo.

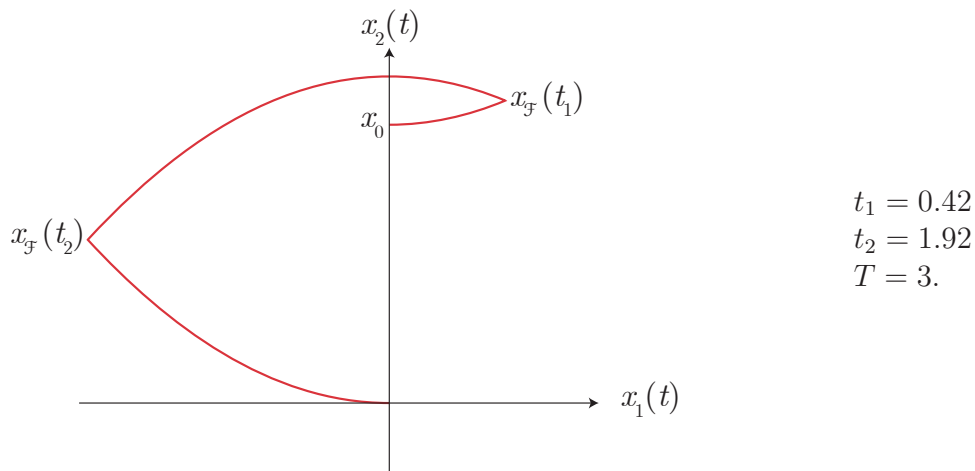
6.1.7. Gráficas de controles con $x_0 = \{0, 1\}$, $|u| \leq 1$



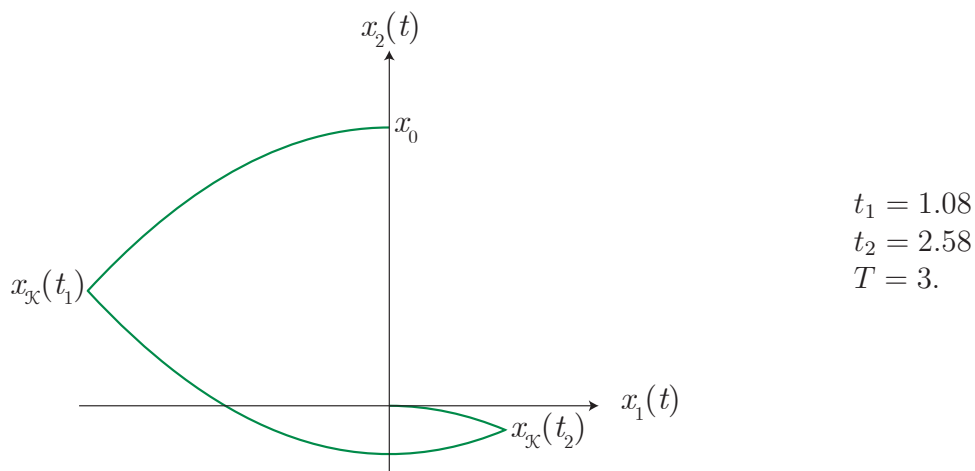
6.1.8. Gráficas de trayectorias con $x_0 = \{0, 1\}$, $|u| \leq 1$



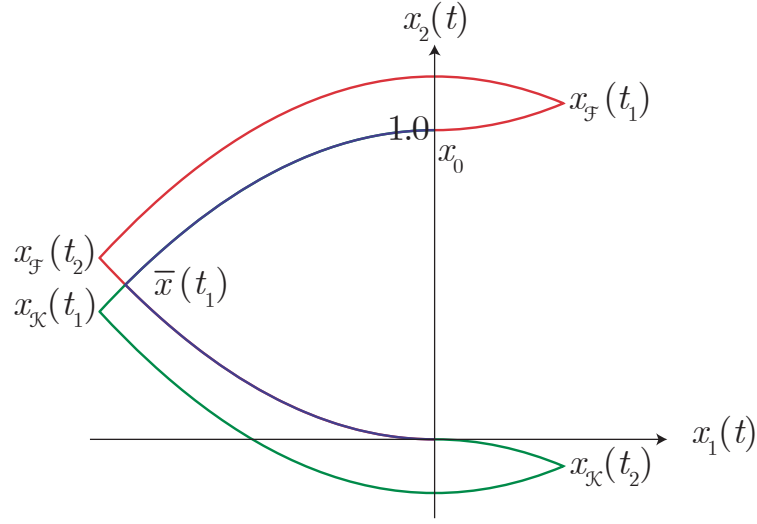
Trayectoria fase de $\bar{x}(t)$ que corresponde al control óptimo $u(t)$.



Trayectoria fase de $x_{\mathcal{F}}(t)$ que corresponde al control admisible de Friedrichs $u_{\mathcal{F}}(t)$.



Trayectoria fase de $x_{\mathcal{K}}(t)$ que corresponde al control admisible de Krein $u_{\mathcal{K}}(t)$.



Gráfica 6.4: Comparación de las trayectorias fase para $x_0 = (0, 1)$.

En la gráfica 6.4 comparamos tres trayectorias:

1. La trayectoria $\bar{x}(t)$ corresponde al control óptimo $u(t)$ en color azul.
2. La trayectoria $x_{\mathcal{F}}(t)$ corresponde al control admisible de Friedrichs $u_{\mathcal{F}}(t)$ en color rojo.
3. La trayectoria $x_{\mathcal{K}}(t)$ corresponde al control admisible de Krein $u_{\mathcal{K}}(t)$ en color verde.

Claramente vemos que las tres trayectorias empiezan en el punto inicial x_0 y llegan al origen.

Comportamiento de los controles y sus respectivas trayectorias:

El control óptimo $u(t)$ comienza con $u = -1$ tiene un salto en t_1 , da el cambio a $u = 1$, de ahí que la trayectoria $\bar{x}(t)$ que comienza en x_0 cambia en $\bar{x}(t_1)$ hasta que llega al origen en tiempo t_{min} .

El control admisible $u_{\mathcal{F}}(t)$ comienza con $u_{\mathcal{F}}(t) = 1$ tiene un salto en t_1 , da el cambio a $u_{\mathcal{F}}(t) = -1$, da otro salto en t_2 , vuelve a cambiar a $u_{\mathcal{F}}(t) = 1$; de ahí que la trayectoria $x_{\mathcal{F}}(t)$ que comienza en x_0 cambia en $x_{\mathcal{F}}(t_1)$, primer salto del control admisible $u_{\mathcal{F}}(t)$; cambia en $x_{\mathcal{F}}(t_2)$, segundo salto del control admisible $u_{\mathcal{F}}(t)$ hasta que llega al origen en tiempo T .

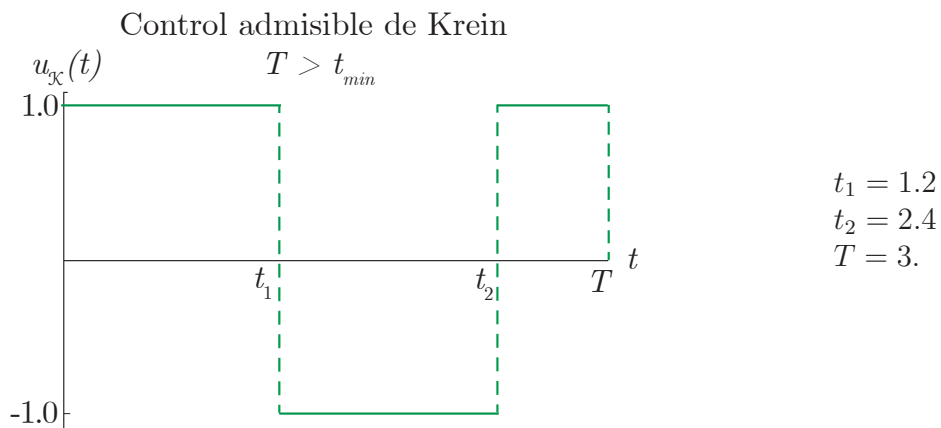
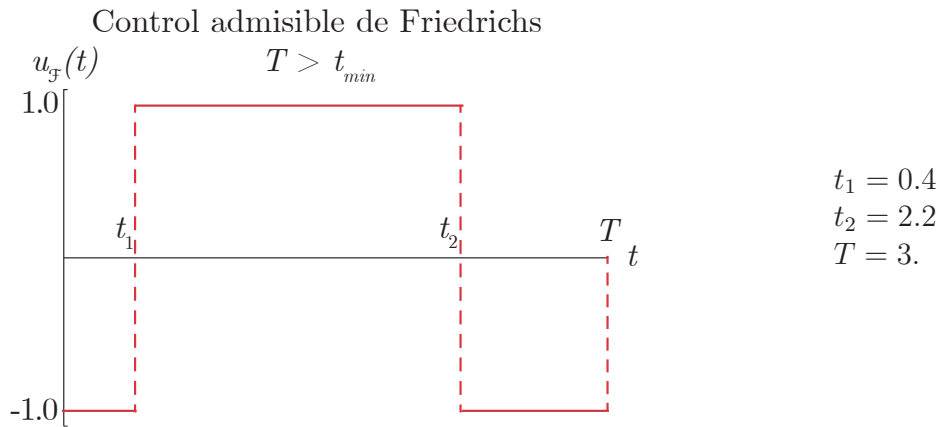
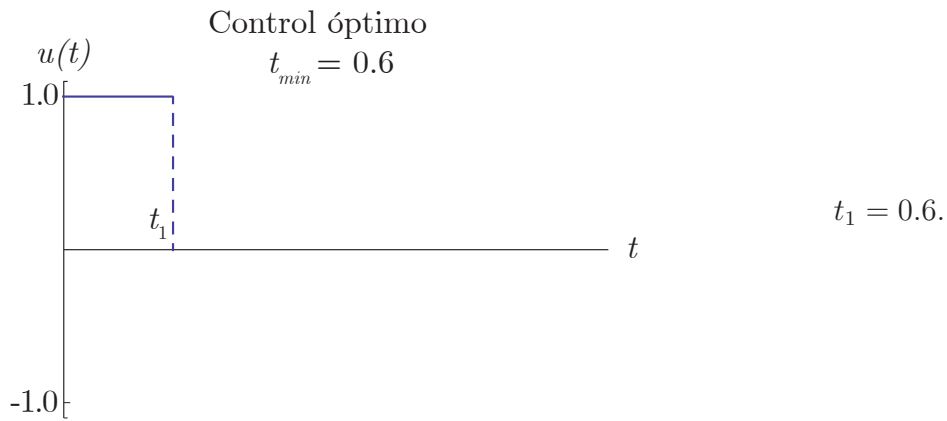
De manera análoga para el control admisible $u_{\mathcal{K}}(t)$ y la trayectoria $x_{\mathcal{K}}(t)$, tomando en cuenta que el control admisible comienza con $u_{\mathcal{K}}(t) = -1$.

De esta comparación notemos que las trayectorias de los controles admisibles comparten un trozo de trayectoria con la trayectoria entre $x(t_1)$ y $x(t_{min})$ que corresponde al control óptimo.

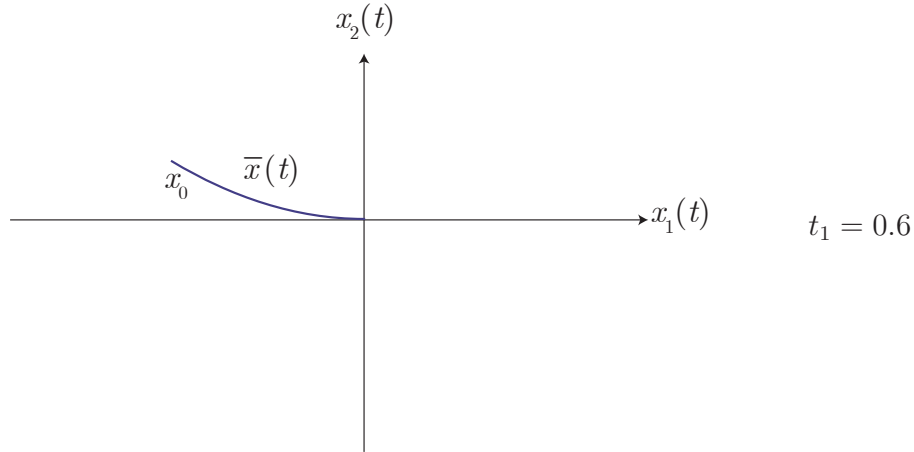
Las trayectorias $x_{\mathcal{F}}(t)$ y $\bar{x}(t)$ comparten el trozo final de toda la trayectoria, que es en $\bar{x}(t_1)$ hasta $\bar{x}(t_{min})$ y $x_{\mathcal{F}}(T - t_1)$ hasta $x_{\mathcal{F}}(T)$, donde este t_1 es del control óptimo.

Las trayectorias $x_{\mathcal{K}}(t)$ y $\bar{x}(t)$ comparten el trozo inicial de toda la trayectoria, que es en x_0 hasta $\bar{x}(t_1)$ y x_0 hasta $x_{\mathcal{K}}(t_1)$, donde este t_1 es del control óptimo.

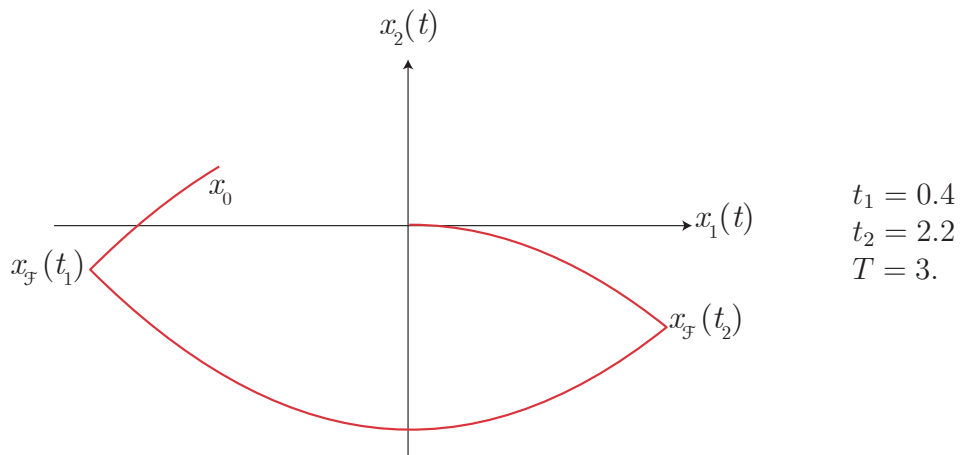
6.1.9. Gráficas de controles con $x_0 = \{-0.6, 0.18\}$, $|u| \leq 1$



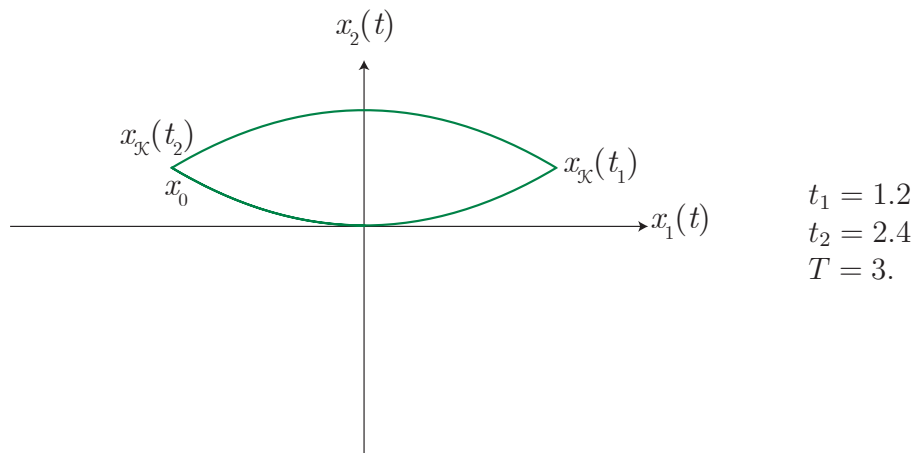
6.1.10. Gráficas de trayectorias con $x_0 = \{-0.6, 0.18\}$, $|u| \leq 1$



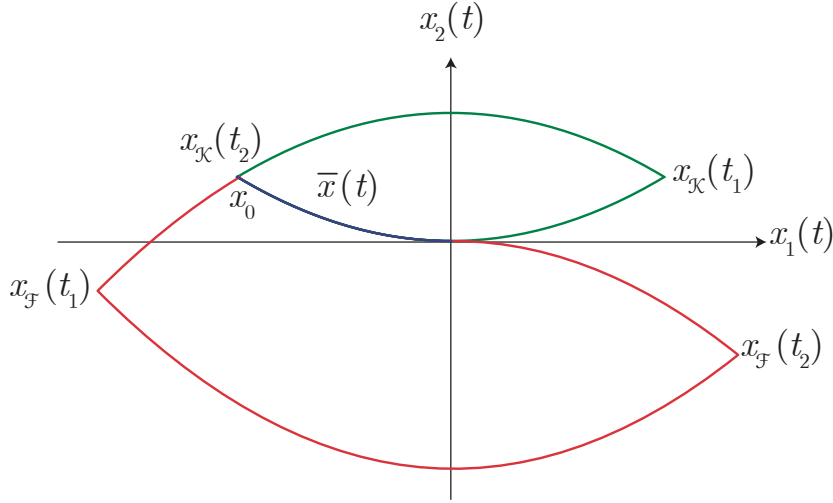
Trayectoria fase de $\bar{x}(t)$ que corresponde al control óptimo $u(t)$.



Trayectoria fase de $x_{\mathcal{F}}(t)$ que corresponde al control admisible de Friedrichs $u_{\mathcal{F}}(t)$.



Trayectoria fase de $x_{\mathcal{K}}(t)$ que corresponde al control admisible de Krein $u_{\mathcal{K}}(t)$.



Gráfica 6.5: Comparación de las trayectorias fase para $x_0 = (-0.6, 1.18)$.

En la gráfica 6.5 comparamos tres trayectorias:

1. La trayectoria $\bar{x}(t)$ corresponde al control óptimo $u(t)$ en color azul.
2. La trayectoria $x_F(t)$ corresponde al control admisible de Friedrichs $u_F(t)$ en color rojo.
3. La trayectoria $x_K(t)$ corresponde al control admisible de Krein $u_K(t)$ en color verde.

Claramente vemos que las tres trayectorias empiezan en el punto inicial x_0 y llegan al origen.

Comportamiento de los controles y sus respectivas trayectorias:

El control óptimo $u(t)$ comienza con $u = 1$ no tiene saltos, de ahí que la trayectoria $\bar{x}(t)$ que comienza en x_0 llega al origen en tiempo t_{min} .

El control admisible $u_F(t)$ comienza con $u_F(t) = -1$ tiene un salto en t_1 , da el cambio a $u_F(t) = 1$, da otro salto en t_2 , vuelve a cambiar a $u_F(t) = -1$; de ahí que la trayectoria $x_F(t)$ que comienza en x_0 cambia en $x_F(t_1)$, primer salto del control admisible $u_F(t)$; cambia en $x_F(t_2)$, segundo salto del control admisible $u_F(t)$ hasta que llega al origen en tiempo T .

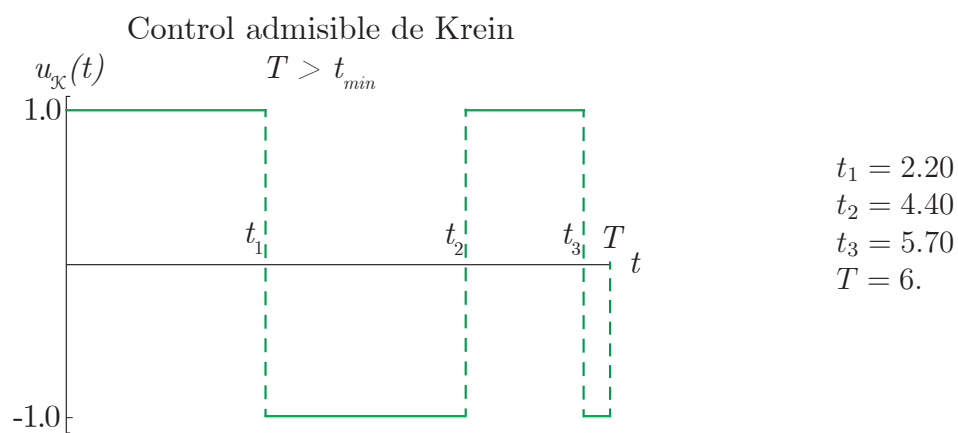
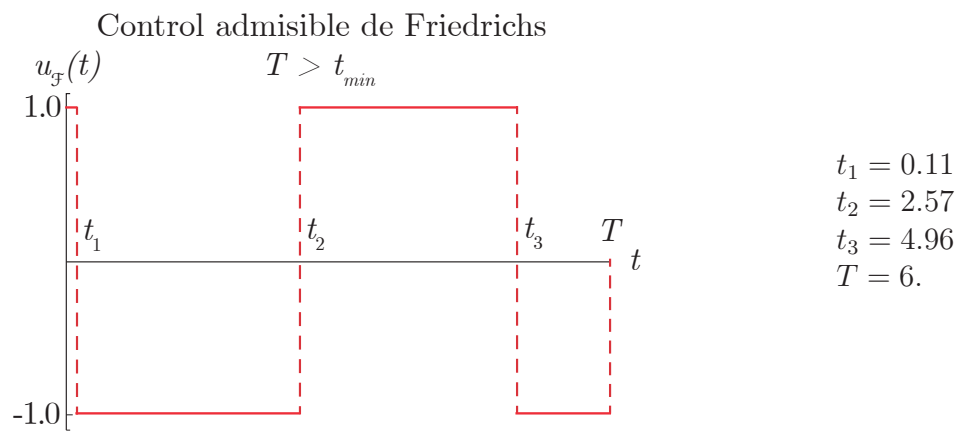
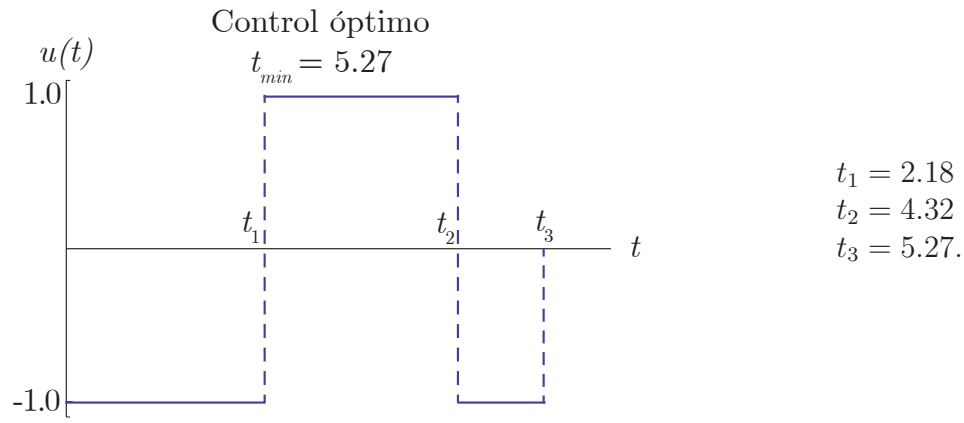
De manera análoga para el control admisible $u_K(t)$ y la trayectoria $x_K(t)$, tomando en cuenta que el control admisible comienza con $u_K(t) = 1$.

De esta comparación notemos que la trayectoria que corresponde al control óptimo $\bar{x}(t)$, en esta ocasión comparte dos veces el mismo trozo con la trayectoria que corresponde al control admisible $x_K(t)$.

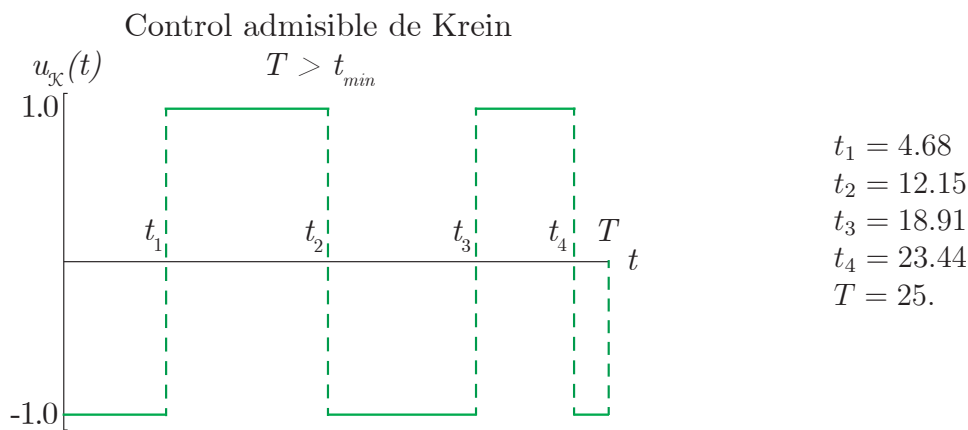
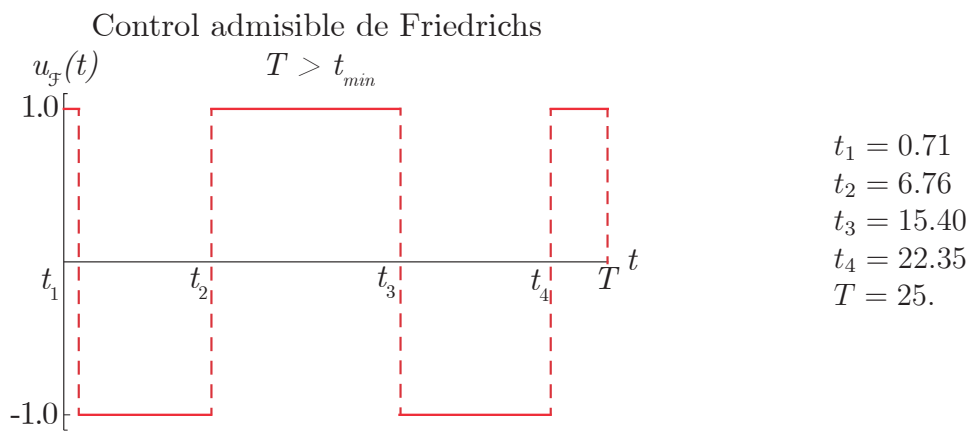
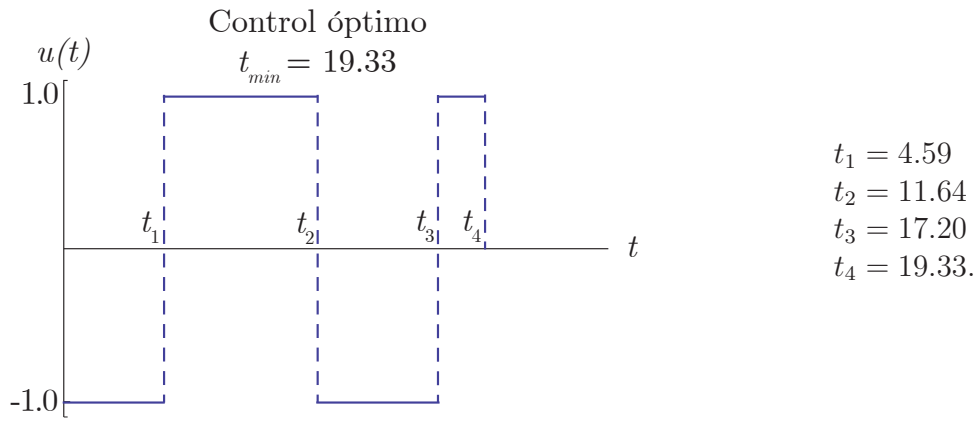
Las trayectorias $x_K(t)$ y $\bar{x}(t)$ comparten el trozo inicial y final de la trayectoria, que es en x_0 hasta el origen, y $x_F(T - t_{min})$ hasta el origen.

Observación. La condición inicial $x_0 = (-0.6, 0.18)$ es un punto tomado del trozo de trayectoria que comparten las trayectorias $\bar{x}(t)$, $x_F(t)$ y $x_K(t)$ de la condición inicial $x_0 = (0, 1)$ del ejemplo anterior. Ver gráfica 6.4.

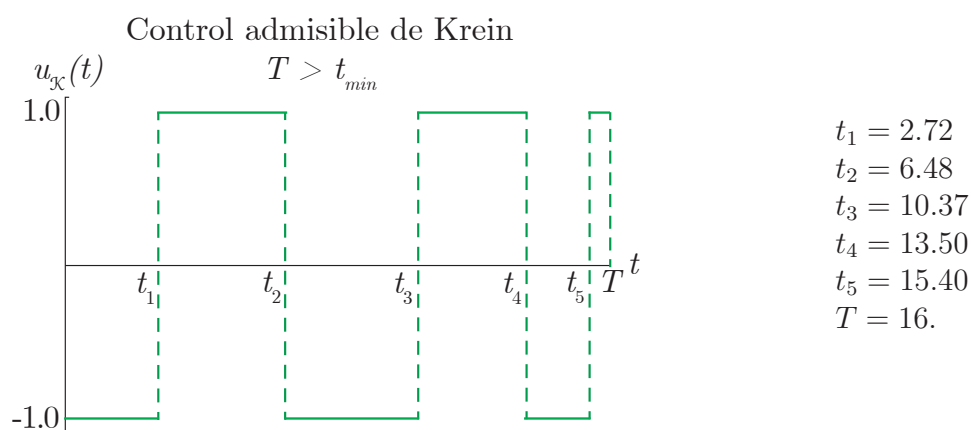
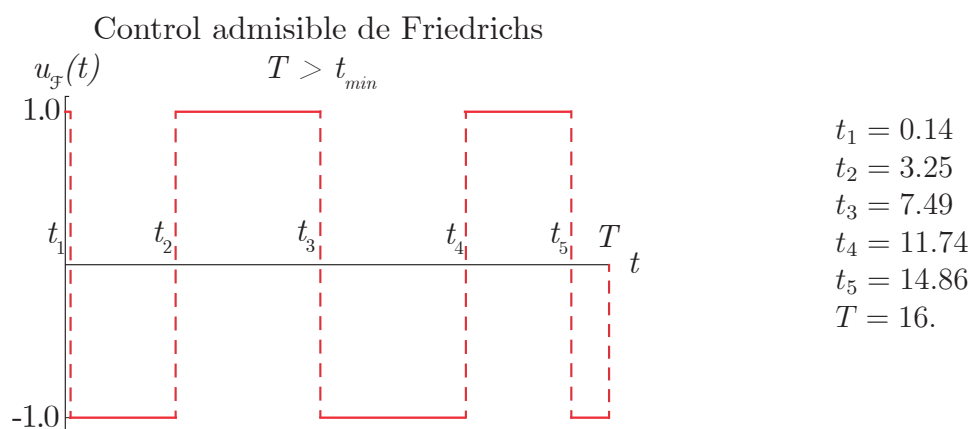
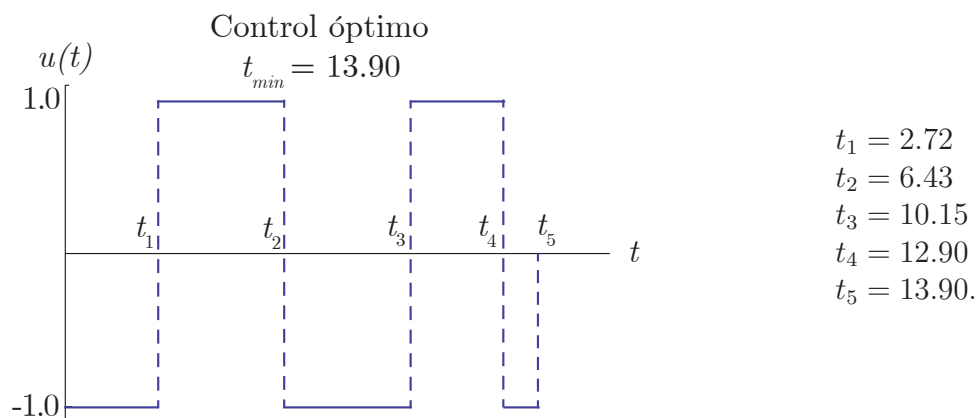
6.2. Gráficas de controles $m = 3$, $x_0 = \{1, 0, 1\}$, $|u| \leq 1$



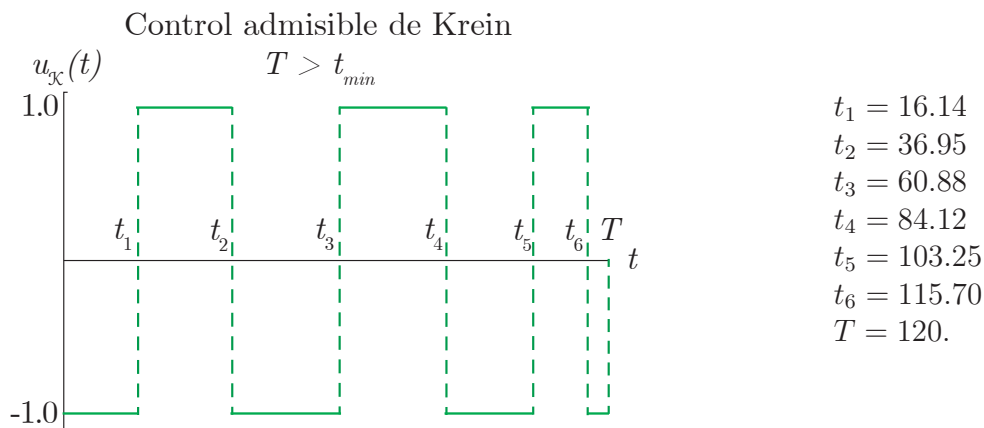
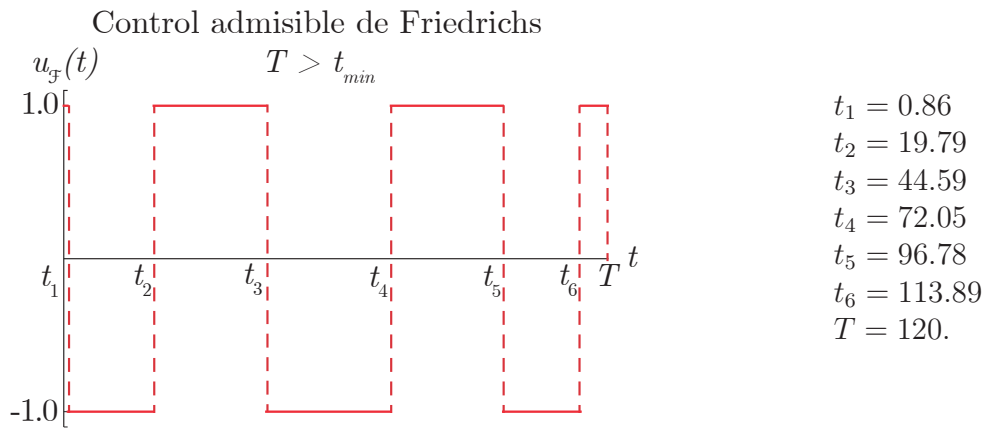
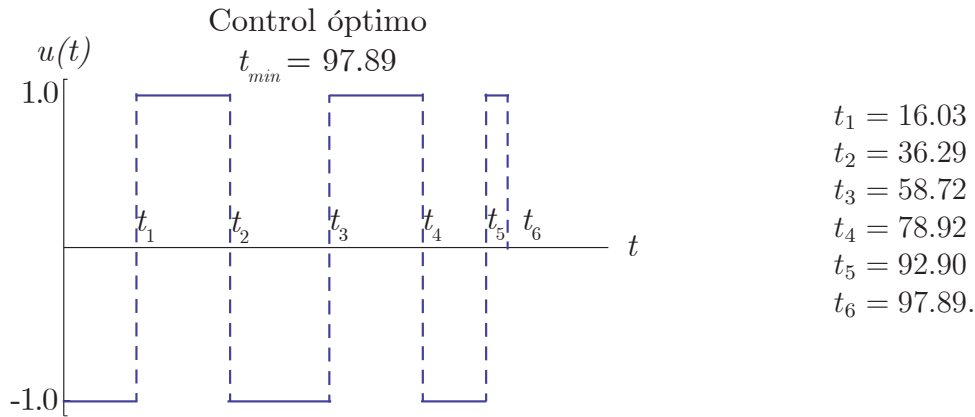
6.3. Gráficas de controles $m = 4$, $x_0 = \{1, 5, 2, 0\}$, $|u| \leq 1$



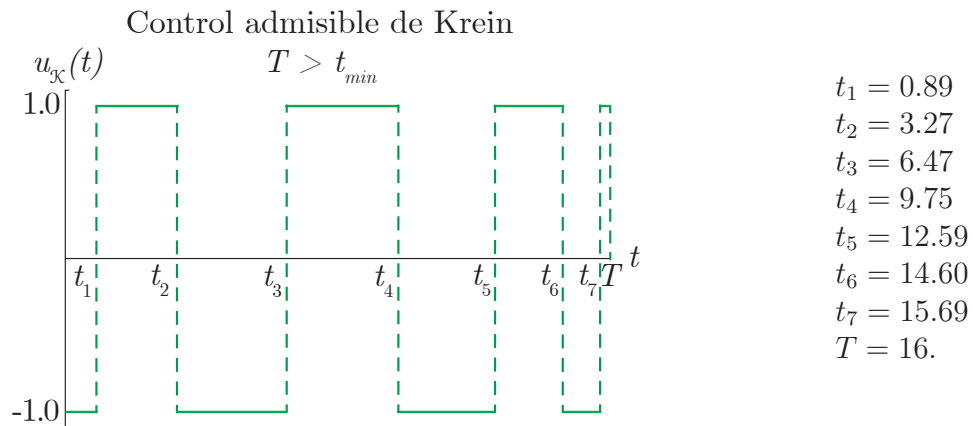
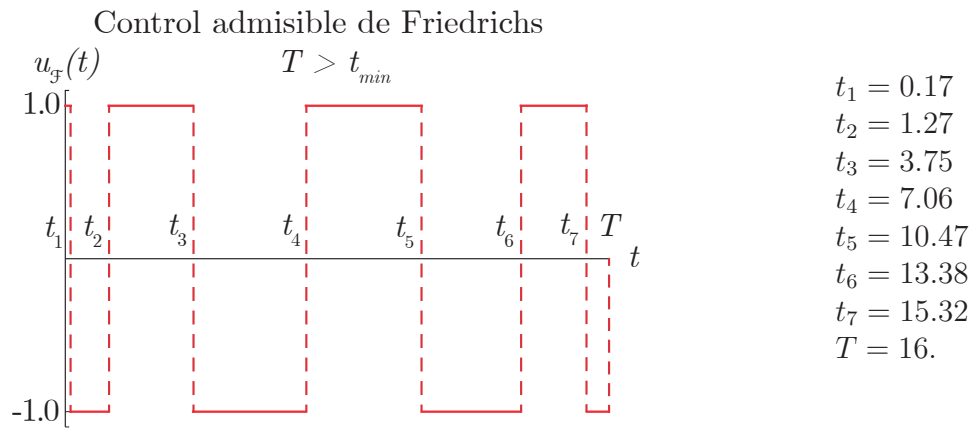
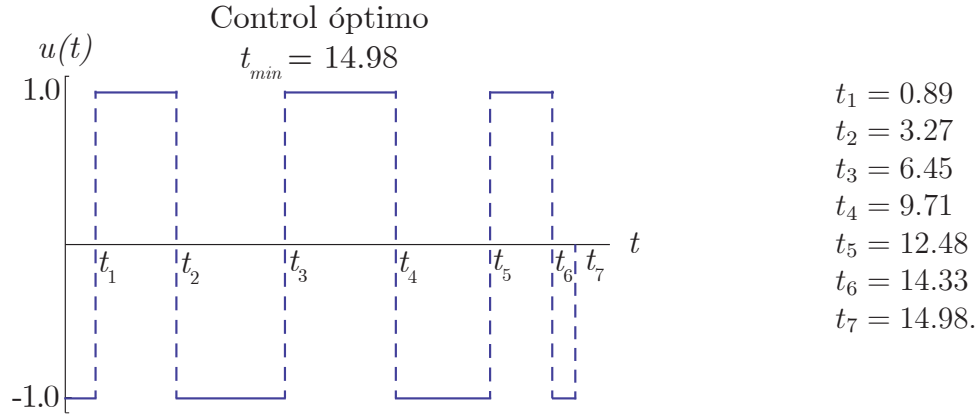
6.4. Gráficas de controles $m = 5$, $x_0 = \{1, 0.5, 1, 0.1, 1\}$, $|u| \leq 1$



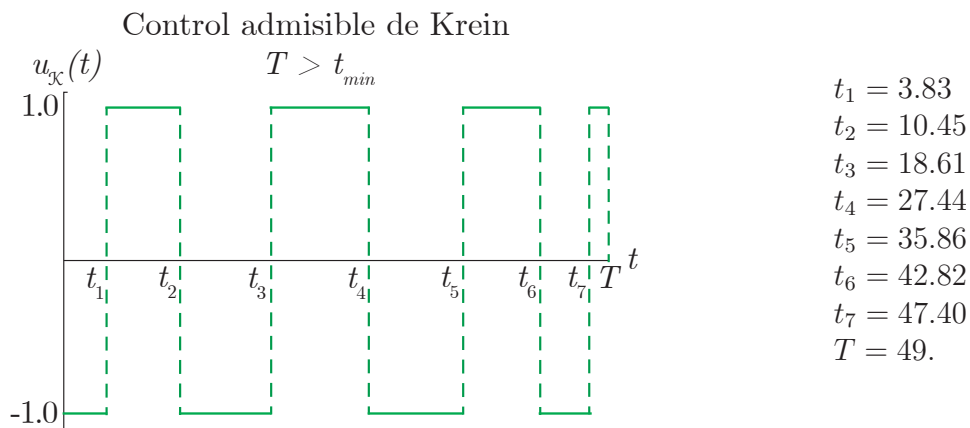
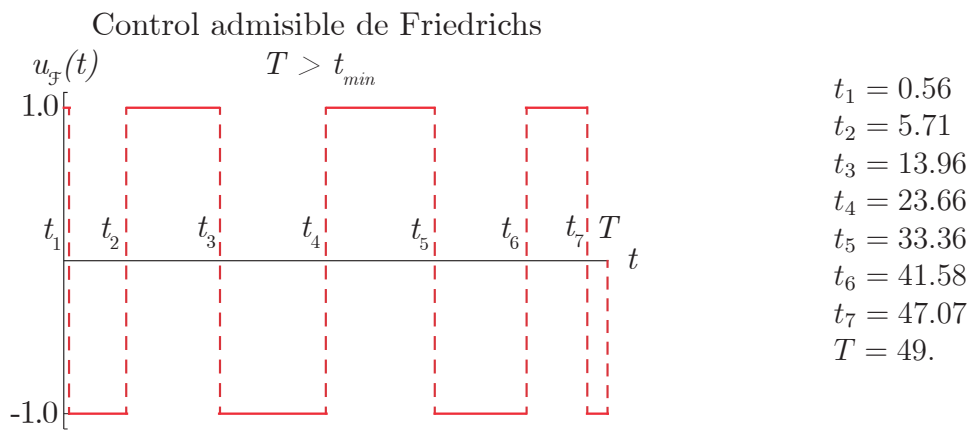
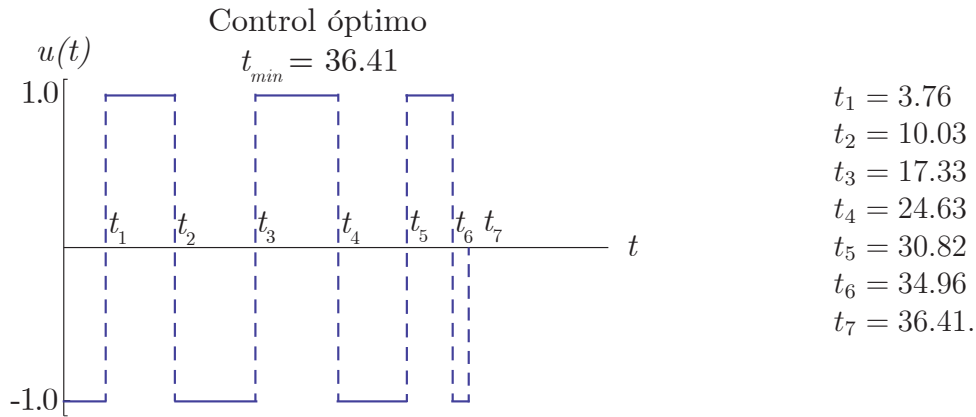
6.5. Gráficas de controles $m = 6$, $x_0 = \{7, 1, 1, 3, 6, 1\}$, $|u| \leq 1$



6.6. Gráficas de controles $m = 7$, $x_0 = \{0, 0, 0, 1, 0, 0, 0\}$, $|u| \leq 1$



6.7. Gráficas de controles $m = 7$, $x_0 = \{1, 2, 0, 1, 0, 2, 0\}$, $|u| \leq 1$



Apéndice A

Ortogonalidad de polinomios

A.1. Polinomios ortogonales

Para la demostración de la ortogonalidad de los polinomios en $[0, T]$, se utilizará el siguiente Lema.

Lema A.1.1. Sean $j, k \in \mathbb{N}$ con $k + 1 < j \leq n$ y

$$W := \begin{pmatrix} s_0^\nu & s_1^\nu & \cdots & s_k^\nu \\ s_1^\nu & s_2^\nu & \cdots & s_{k+1}^\nu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j-1}^\nu & s_j^\nu & \cdots & s_{j+k-1}^\nu \end{pmatrix}.$$

Entonces las siguientes igualdades son válidas:

$$W = M_{r,j-1}^\nu \begin{pmatrix} I_{(k+1)} \\ 0_{(j-k-1) \times (k+1)} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

$$\left(-Y_{r,j}^* (M_{r,j-1}^\nu)^{-1}, I \right) \begin{pmatrix} s_0^\nu & s_1^\nu & \cdots & s_k^\nu \\ s_1^\nu & s_2^\nu & \cdots & s_{k+1}^\nu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j-1}^\nu & s_j^\nu & \cdots & s_{j+k-1}^\nu \\ s_j^\nu & s_{j+1}^\nu & \cdots & s_{j+k}^\nu \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Demostración. Asumiendo que $k < j$, entonces dentro de la matriz $M_{r,j-1}^\nu$ hay cuatro

submatrices:

$$\begin{aligned}
 M_{r,j-1}^\nu &= \left(\begin{array}{cccc|ccc} s_0^\nu & s_1^\nu & \cdots & s_k^\nu & s_{k+1}^\nu & \cdots & s_{j-1}^\nu \\ s_1^\nu & s_2^\nu & \cdots & s_{k+1}^\nu & s_{k+2}^\nu & \cdots & s_j^\nu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_k^\nu & s_{k+1}^\nu & \cdots & s_{2k}^\nu & s_{2k+1}^\nu & \cdots & s_{k+j}^\nu \\ \hline s_{k+1}^\nu & s_{k+2}^\nu & \cdots & s_{2k+1}^\nu & s_{2k+2}^\nu & \cdots & s_{k+j+1}^\nu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j-1}^\nu & s_j^\nu & \cdots & s_{j+k-1}^\nu & s_{k+j}^\nu & \cdots & s_{2j-1}^\nu \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{c|c} U_1 & V_1 \\ \hline U_2 & V_2 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

donde la dimensión de las submatrices son

$$\begin{aligned}
 U_1 &\text{ es } (k+1) \times (k+1), \\
 V_1 &\text{ es } (k+1) \times (j-k-1), \\
 U_2 &\text{ es } (j-k-1) \times (k+1) \text{ y} \\
 V_2 &\text{ es } (j-k-1) \times (j-k-1).
 \end{aligned}$$

Ahora, definiendo una partición dentro de la matriz W de la siguiente forma:

$$W = \left(\begin{array}{cccc|cccc} s_0^\nu & s_1^\nu & \cdots & s_k^\nu & & & & \\ s_1^\nu & s_2^\nu & \cdots & s_{k+1}^\nu & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ s_k^\nu & s_{k+1}^\nu & \cdots & s_{2k}^\nu & & & & \\ \hline s_{k+1}^\nu & s_{k+2}^\nu & \cdots & s_{2k+1}^\nu & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ s_{j-1}^\nu & s_j^\nu & \cdots & s_{j+k-1}^\nu & & & & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} U_1 \\ \hline U_2 \end{array} \right). \quad (\text{A.3})$$

Calculando la matriz como en (A.1), tenemos:

$$\begin{aligned}
 &\left(\begin{array}{c|c} U_1 & V_1 \\ \hline U_2 & V_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} I_{(k+1)} \\ 0_{(j-k-1) \times (k+1)} \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{c} U_1 I_{(k+1)} + V_1 0_{(j-k-1) \times (k+1)} \\ \hline U_2 I_{(k+1)} + V_2 0_{(j-k-1) \times (k+1)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} U_1 \\ \hline U_2 \end{array} \right) = W.
 \end{aligned}$$

Ahora para probar (A.2), tenemos:

$$\begin{aligned}
 & \left(-Y_{r,j}^* (M_{r,j-1}^\nu)^{-1} , I \right) \begin{pmatrix} s_0^\nu & s_1^\nu & \cdots & s_k^\nu \\ s_1^\nu & s_2^\nu & \cdots & s_{k+1}^\nu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{j-1}^\nu & s_j^\nu & \cdots & s_{j+k-1}^\nu \\ s_j^\nu & s_{j+1}^\nu & \cdots & s_{j+k}^\nu \end{pmatrix} \\
 &= \left(-Y_{r,j}^* (M_{r,j-1}^\nu)^{-1} , I \right) \left(\frac{W}{s_j^\nu s_{j+1}^\nu \cdots s_{j+k}^\nu} \right) \\
 &= -Y_{r,j}^* (M_{r,j-1}^\nu)^{-1} W + (s_j^\nu s_{j+1}^\nu \cdots s_{j+k}^\nu) \\
 &= -Y_{r,j}^* (M_{r,j-1}^\nu)^{-1} M_{r,j-1}^\nu \begin{pmatrix} I_{(k+1)} \\ 0_{(j-k-1) \times (k+1)} \end{pmatrix} + (s_j^\nu s_{j+1}^\nu \cdots s_{j+k}^\nu) \\
 &= -Y_{r,j}^* \begin{pmatrix} I_{(k+1)} \\ 0_{(j-k-1) \times (k+1)} \end{pmatrix} + (s_j^\nu s_{j+1}^\nu \cdots s_{j+k}^\nu) \\
 &= -(s_j^\nu s_{j+1}^\nu \cdots s_{j+k}^\nu) + (s_j^\nu s_{j+1}^\nu \cdots s_{j+k}^\nu) = 0.
 \end{aligned}$$

Cuando $k > j$, es de manera similar.

Donde ν depende de la medida según sean los polinomios.

Polinomios	Medida	Momentos
$P_{1,j}(t)$	$\sigma(t)$	$\{s_j\}_{j=0}^{2n}$
$P_{2,j}(t)$	$\int_0^t (T - \tau) \tau \, d\sigma(\tau)$	$\{T s_{j+1} - s_{j+2}\}_{j=0}^{2n}$
$\Gamma_{1,j}(t)$	$\int_0^t (T - \tau) \, d\sigma(\tau)$	$\{T s_j - s_{j+1}\}_{j=0}^{2n}$
$\Gamma_{2,j}(t)$	$\int_0^t \tau \, d\sigma(\tau)$	$\{s_{j+1}\}_{j=0}^{2n}$

A.1.1. Integral del producto $R_j(t) v_j v_k^* R_k^*(t)$

Realizamos algunos cálculos para las integrales del producto de $R_j(t) v_j v_k^* R_k^*(t)$, casos cuando j es igual y diferente a k .

Caso cuando $j = k$.

El producto

$$R_j(t) v_j = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ tI & I & 0 & \cdots & 0 \\ t^2I & tI & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^jI & t^{j-1}I & t^{j-2}I & \cdots & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ tI \\ t^2I \\ \vdots \\ t^jI \end{pmatrix}.$$

De ahí que

$$v_j^* R_j^*(t) = (R_j(t) v_j)^* = (I, tI, t^2I, \dots, t^jI).$$

Por lo tanto, el producto de $R_j(t) v_j$ con $R_j^*(t) v_j^*$ es:

$$\begin{aligned} R_j(t) v_j v_j^* R_j^*(t) &= \begin{pmatrix} I \\ tI \\ t^2I \\ \vdots \\ t^jI \end{pmatrix} (I, tI, t^2I, \dots, t^jI) \\ &= \begin{pmatrix} I & tI & t^2I & \cdots & t^jI \\ tI & t^2I & t^3I & \cdots & t^{j+1}I \\ t^2I & t^3I & t^4I & \cdots & t^{j+2}I \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^jI & t^{j+1}I & t^{j+2}I & \cdots & t^{2j}I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donde la integral equivale a

$$\int_0^T R_j(t) v_j d\sigma(t) v_j^* R_j^*(t) = \int_0^T \begin{pmatrix} I & tI & t^2I & \cdots & t^jI \\ tI & t^2I & t^3I & \cdots & t^{j+1}I \\ t^2I & t^3I & t^4I & \cdots & t^{j+2}I \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^jI & t^{j+1}I & t^{j+2}I & \cdots & t^{2j}I \end{pmatrix} d\sigma(t)$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} \int_0^T d\sigma(t) & \int_0^T t d\sigma(t) & \int_0^T t^2 d\sigma(t) & \cdots & \int_0^T t^j d\sigma(t) \\ \int_0^T t d\sigma(t) & \int_0^T t^2 d\sigma(t) & \int_0^T t^3 d\sigma(t) & \cdots & \int_0^T t^{j+1} d\sigma(t) \\ \int_0^T t^2 d\sigma(t) & \int_0^T t^3 d\sigma(t) & \int_0^T t^4 d\sigma(t) & \cdots & \int_0^T t^{j+2} d\sigma(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^T t^j d\sigma(t) & \int_0^T t^{j+1} d\sigma(t) & \int_0^T t^{j+2} d\sigma(t) & \cdots & \int_0^T t^{2j} d\sigma(t) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} s_0^\nu & s_1^\nu & s_2^\nu & \cdots & s_j^\nu \\ s_1^\nu & s_2^\nu & s_3^\nu & \cdots & s_{j+1}^\nu \\ s_2^\nu & s_3^\nu & s_4^\nu & \cdots & s_{j+2}^\nu \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_j^\nu & s_{j+1}^\nu & s_{j+2}^\nu & \cdots & s_{2j}^\nu \end{pmatrix} = M_{r,j}^\nu
 \end{aligned}$$

que podemos reescribir en submatrices

$$\begin{pmatrix} s_0^\nu & s_1^\nu & s_2^\nu & \cdots & s_j^\nu \\ s_1^\nu & s_2^\nu & s_3^\nu & \cdots & s_{j+1}^\nu \\ s_2^\nu & s_3^\nu & s_4^\nu & \cdots & s_{j+2}^\nu \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_j^\nu & s_{j+1}^\nu & s_{j+2}^\nu & \cdots & s_{2j}^\nu \end{pmatrix} = \left(\frac{M_{r,j-1}^\nu}{Y_{r,j}^*} \middle| \frac{Y_{r,j}}{s_{2j}^\nu} \right).$$

Caso cuando $j \neq k$.

Al igual que el caso anterior calculamos la integral del producto de $R_j(t)$ v_j con v_k^* $R_k^*(t)$.

$$R_j(t) v_j v_k^* R_k^*(t) = \begin{pmatrix} I & tI & t^2I & \cdots & t^kI & \cdots & t^jI \\ tI & t^2I & t^3I & \cdots & t^{k+1}I & \cdots & t^{j+1}I \\ t^2I & t^3I & t^4I & \cdots & t^{k+2}I & \cdots & t^{j+2}I \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^kI & t^{k+1}I & t^{k+2}I & \cdots & t^{2k}I & \cdots & t^{j+k}I \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \int_0^T R_j(t) v_j d\sigma(t) v_k^* R_k^*(t) &= \begin{pmatrix} s_0^\nu & s_1^\nu & \cdots & s_k^\nu & \cdots & s_j^\nu \\ s_1^\nu & s_2^\nu & \cdots & s_{k+1}^\nu & \cdots & s_{j+1}^\nu \\ s_2^\nu & s_3^\nu & \cdots & s_{k+2}^\nu & \cdots & s_{j+2}^\nu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_k^\nu & s_{k+1}^\nu & \cdots & s_{2k}^\nu & \cdots & s_{j+k}^\nu \end{pmatrix} \\
 &= \left(W^* \middle| \begin{matrix} s_j^\nu \\ s_{j+1}^\nu \\ s_{j+2}^\nu \\ \vdots \\ s_{j+k}^\nu \end{matrix} \right).
 \end{aligned}$$

Donde ν y $M_{r,j}^\nu$ depende de la medida según sean los polinomios.

$$\int_0^T R_j(t) v_j d\sigma(t) v_k^* R_k^*(t)$$

Polinomios	$j = k$	$j \neq k$
$P_{1,j}(t)$	$\begin{pmatrix} H_{1,j-1} & Y_{1,j} \\ Y_{1,j}^* & s_{2j} \end{pmatrix}$	$\left(W* \left \begin{array}{c} s_j \\ s_{j+1} \\ s_{j+2} \\ \vdots \\ s_{j+k} \end{array} \right. \right)$
$P_{2,j}(t)$	$\begin{pmatrix} H_{2,j-1} & Y_{2,j} \\ Y_{2,j}^* & Ts_{2j+1} - s_{2j+2} \end{pmatrix}$	$\left(W* \left \begin{array}{c} Ts_{j+1} - s_{j+2} \\ Ts_{j+2} - s_{j+3} \\ Ts_{j+3} - s_{j+4} \\ \vdots \\ Ts_{j+k+1} - s_{j+k+2} \end{array} \right. \right)$
$\Gamma_{1,j}(t)$	$\begin{pmatrix} K_{1,j-1} & \tilde{Y}_{1,j} \\ \tilde{Y}_{1,j}^* & Ts_{2j} - s_{2j+1} \end{pmatrix}$	$\left(W* \left \begin{array}{c} Ts_j - s_{j+1} \\ Ts_{j+1} - s_{j+2} \\ Ts_{j+2} - s_{j+3} \\ \vdots \\ Ts_{j+k} - s_{j+k+1} \end{array} \right. \right)$
$\Gamma_{2,j}(t)$	$\begin{pmatrix} K_{2,j-1} & \tilde{Y}_{2,j} \\ \tilde{Y}_{2,j}^* & s_{2j+1} \end{pmatrix}$	$\left(W* \left \begin{array}{c} s_{j+1} \\ s_{j+2} \\ s_{j+3} \\ \vdots \\ s_{j+k+1} \end{array} \right. \right).$

A.1.2. Polinomios $P_{1,j}(t)$

Daremos la demostración del inciso a) de la Proposición 4.2.1., para el caso particular de los polinomios $P_{1,j}(t)$.

Caso cuando $j = k$.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T P_{1,j}(t) \, d\sigma(t) \, P_{1,j}^*(t) \\
 &= \int_0^T (-Y_{1,j}^* \, H_{1,j-1}^{-1}, I) \, R_j(t) \, v_j \, d\sigma(t) \, v_j^* \, R_j^*(t) \begin{pmatrix} -H_{1,j-1}^{-1} & Y_{1,j} \\ I & \end{pmatrix} \\
 &= (-Y_{1,j}^* \, H_{1,j-1}^{-1}, I) \left(\frac{H_{1,j-1}}{Y_{1,j}^*} \middle| \frac{Y_{1,j}}{s_{2j}} \right) \begin{pmatrix} -H_{1,j-1}^{-1} & Y_{1,j} \\ I & \end{pmatrix} \\
 &= (-Y_{1,j}^* \, H_{1,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} 0 \\ -Y_{1,j}^* \, H_{1,j-1}^{-1} \, Y_{1,j} + s_{2j} \end{pmatrix} \\
 &= -Y_{1,j}^* \, H_{1,j-1}^{-1} \, Y_{1,j} + s_{2j} = \hat{H}_{1,j}.
 \end{aligned}$$

Caso cuando $j > k$.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T P_{1,j}(t) \, d\sigma(t) \, P_{1,k}^*(t) \\
 &= \int_0^T (-Y_{1,j}^* \, H_{1,j-1}^{-1}, I) \, R_j(t) \, v_j \, d\sigma(t) \, v_k^* \, R_k^*(t) \begin{pmatrix} -H_{1,k-1}^{-1} & Y_{1,k} \\ I & \end{pmatrix} \\
 &= (-Y_{1,j}^* \, H_{1,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} s_j \\ s_{j+1} \\ s_{j+2} \\ \vdots \\ s_{j+k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -H_{1,k-1}^{-1} & Y_{1,k} \\ I & \end{pmatrix} \\
 &= (-Y_{1,j}^* \, H_{1,j-1}^{-1}, I) \left((-Y_{1,k}^* \, H_{1,k-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} W \\ s_j \, s_{j+1} \cdots s_{j+k} \end{pmatrix} \right)^* \\
 &= (-Y_{1,j}^* \, H_{1,j-1}^{-1}, I) \, 0^* = 0.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{P_{1,j}(t)\}_{j=1}^n$ son polinomios ortogonales en $[0, T]$ respecto de $\sigma(t)$.

A.1.3. Polinomios $P_{2,j}(t)$

Retomemos la demostración del inciso a) de la Proposición 4.2.1..

Caso cuando $j = k$.

$$\begin{aligned}
& \int_0^T P_{2,j}(t)(T-t)td\sigma(t) P_{2,j}^*(t) \\
&= \int_0^T (-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I) R_j(t) v_j (T-t)td\sigma(t) v_j^* R_j^*(t) \begin{pmatrix} -H_{2,j-1}^{-1} Y_{2,j} \\ I \end{pmatrix} \\
&= (-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I) \left(\frac{H_{2,j-1}}{Y_{2,j}^*} \middle| \frac{Y_{2,j}}{Ts_{2j+1} - s_{2j+2}} \right) \begin{pmatrix} -H_{2,j-1}^{-1} Y_{2,j} \\ I \end{pmatrix} \\
&= (-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} 0 \\ -Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1} Y_{2,j} + Ts_{2j+1} - s_{2j+2} \end{pmatrix} \\
&= -Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1} Y_{2,j} + Ts_{2j+1} - s_{2j+2} = \hat{H}_{2,j}.
\end{aligned}$$

Caso cuando $j > k$.

$$\begin{aligned}
& \int_0^T P_{2,j}(t) (T-t)td\sigma(t) P_{2,k}^*(t) \\
&= \int_0^T (-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I) R_j(t) v_j (T-t)td\sigma(t) v_k^* R_k^*(t) \begin{pmatrix} -H_{2,k-1}^{-1} Y_{2,k} \\ I \end{pmatrix} \\
&= (-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} W * \begin{vmatrix} Ts_{j+1} - s_{j+2} \\ Ts_{j+2} - s_{j+3} \\ Ts_{j+3} - s_{j+4} \\ \vdots \\ Ts_{j+k+1} - s_{j+k+2} \end{vmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -H_{2,k-1}^{-1} Y_{2,k} \\ I \end{pmatrix} \\
&= (-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I) \\
&\quad \left((-Y_{2,k}^* H_{2,k-1}^{-1}, I) \left(\frac{W}{Ts_{j+1} - s_{j+2} \cdots Ts_{j+k+1} - s_{j+k+2}} \right) \right)^* \\
&= (-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I) 0^* = 0.
\end{aligned}$$

Así, $\{P_{2,j}(t)\}_{j=1}^n$ son polinomios ortogonales en $[0, T]$ respecto de $\int_0^t (T-\tau)\tau d\sigma(\tau)$.

A.1.4. Polinomios $\Gamma_{1,j}(t)$

Daremos la demostración del inciso b) de la Proposición 4.2.1., para el caso particular de los polinomios $\Gamma_{1,j}(t)$.

Caso cuando $j = k$.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \Gamma_{1,j}(t) (T-t) d\sigma(t) \Gamma_{1,j}^*(t) \\
 &= \int_0^T (-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I) R_j(t) v_j (T-t) d\sigma(t) v_j^* R_j^*(t) \begin{pmatrix} -K_{1,j-1}^{-1} \tilde{Y}_{1,j} \\ I \end{pmatrix} \\
 &= (-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} K_{1,j-1} & \tilde{Y}_{1,j} \\ \tilde{Y}_{1,j}^* & T s_{2j} - s_{2j+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -K_{1,j-1}^{-1} \tilde{Y}_{1,j} \\ I \end{pmatrix} \\
 &= (-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1} \tilde{Y}_{1,j} + T s_{2j} - s_{2j+1} \end{pmatrix} \\
 &= -\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1} \tilde{Y}_{1,j} + T s_{2j} - s_{2j+1} = \hat{K}_{1,j}.
 \end{aligned}$$

Caso cuando $j > k$.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \Gamma_{1,j}(t) (T-t) d\sigma(t) \Gamma_{1,k}^*(t) \\
 &= \int_0^T (-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I) R_j(t) v_j (T-t) d\sigma(t) v_k^* R_k^*(t) \begin{pmatrix} -K_{1,k-1}^{-1} \tilde{Y}_{1,k} \\ I \end{pmatrix} \\
 &= (-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} W^* \begin{vmatrix} T s_j - s_{j+1} \\ T s_{j+1} - s_{j+2} \\ T s_{j+2} - s_{j+3} \\ \vdots \\ T s_{j+k} - s_{j+k+1} \end{vmatrix} \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -K_{1,k-1}^{-1} \tilde{Y}_{1,k} \\ I \end{pmatrix} \\
 &= (-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} \left((-\tilde{Y}_{1,k}^* K_{1,k-1}^{-1}, I) \left(\frac{W}{T s_j - s_{j+1} \cdots T s_{j+k} - s_{j+k+1}} \right) \right)^* \\ 0^* \end{pmatrix} \\
 &= (-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I) 0^* = 0.
 \end{aligned}$$

Así, $\{\Gamma_{1,j}(t)\}_{j=1}^n$ son polinomios ortogonales en $[0, T]$ respecto de $\int_0^t (T-\tau) d\sigma(\tau)$.

A.1.5. Polinomios $\Gamma_{2,j}(t)$

Terminamos la demostración del inciso b) de la Proposición 4.2.1..

Caso cuando $j = k$.

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \Gamma_{2,j}(t) t d\sigma(t) \Gamma_{2,j}^*(t) \\
&= \int_0^T (-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I) R_j(t) v_j t d\sigma(t) v_j^* R_j^*(t) \begin{pmatrix} -K_{2,j-1}^{-1} & \tilde{Y}_{2,j} \\ I & \end{pmatrix} \\
&= (-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} K_{2,j-1} & \tilde{Y}_{2,j} \\ \tilde{Y}_{2,j}^* & s_{2j+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -K_{2,j-1}^{-1} & \tilde{Y}_{2,j} \\ I & \end{pmatrix} \\
&= (-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1} \tilde{Y}_{2,j} + s_{2j+1} \end{pmatrix} \\
&= -\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1} \tilde{Y}_{2,j} + s_{2j+1} = \hat{K}_{2,j}.
\end{aligned}$$

Caso cuando $j > k$.

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \Gamma_{2,j}(t) t d\sigma(t) \Gamma_{2,k}^*(t) \\
&= \int_0^T (-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I) R_j(t) v_j t d\sigma(t) v_k^* R_k^*(t) \begin{pmatrix} -K_{2,k-1}^{-1} & \tilde{Y}_{2,k} \\ I & \end{pmatrix} \\
&= (-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} W^* \left| \begin{array}{c} s_{j+1} \\ s_{j+2} \\ s_{j+3} \\ \vdots \\ s_{j+k+1} \end{array} \right. \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -K_{2,k-1}^{-1} & \tilde{Y}_{2,k} \\ I & \end{pmatrix} \\
&= (-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I) \left(\begin{pmatrix} -\tilde{Y}_{2,k}^* K_{2,k-1}^{-1}, I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ s_{j+1} s_{j+2} \cdots s_{j+k+1} \end{pmatrix} \right)^* \\
&= (-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I) 0^* = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{\Gamma_{2,j}(t)\}_{j=1}^n$ son polinomios ortogonales en $[0, T]$ respecto de $\int_0^t \tau d\sigma(\tau)$.

A.2. Polinomios de segunda especie

Consideremos los polinomios de la Definición 4.1.2 y Definición 4.1.3.

$$Q_{1,j}(t), Q_{2,j}(t), \Theta_{1,j}(t), \Theta_{2,j}(t). \quad (\text{A.4})$$

Estos polinomios tienen una propiedad muy interesante: son polinomios que se obtienen de polinomios ortogonales en $[0, T]$

$$P_{1,j}(t), P_{2,j}(t), \Gamma_{1,j}(t), \Gamma_{2,j}(t). \quad (\text{A.5})$$

respecto de las funciones de distribución o medidas positivas:

$$\sigma(t), \int_0^t (T - \tau) \tau \, d\sigma(\tau), \int_0^t (T - \tau) \, d\sigma(\tau), \int_0^t \tau \, d\sigma(\tau), \quad (\text{A.6})$$

respectivamente. Sin embargo, los polinomios (A.4) no son polinomios ortogonales.

A.2.1. Polinomios $Q_{1,j}(t)$

Daremos la demostración del inciso c) de la Proposición 4.2.1., para el caso particular de los polinomios $Q_{1,j}(t)$.

$$\begin{aligned} & \int_0^T \frac{P_{1,j}(z) - P_{1,j}(t)}{z - t} d\sigma(t) \\ &= (-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I) \int_0^T \frac{R_j(z)v_j - R_j(t)v_j}{z - t} d\sigma(t) \\ &= (-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I) \int_0^T \frac{1}{z - t} \left(\begin{pmatrix} I \\ zI \\ z^2I \\ \vdots \\ z^jI \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I \\ tI \\ t^2I \\ \vdots \\ t^jI \end{pmatrix} \right) d\sigma(t) \\ &= (-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I) \int_0^T \begin{pmatrix} 0 \\ I \\ (z - t)I \\ \vdots \\ z^{j-1} + z^{j-2}t + \dots + zt^{j-2} + t^{j-1} \end{pmatrix} d\sigma(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} 0 \\ s_0 \\ zs_0 + s_1 \\ \vdots \\ z^{j-1}s_0 + z^{j-2}s_1 + \cdots + zs_{j-2} + s_{j-1} \end{pmatrix} \\
&= (-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ zI & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^j I & z^{j-1} I & \cdots & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s_0 \\ \vdots \\ s_{j-1} \end{pmatrix} \\
&= (-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I) R_{1,j}(z)(-u_{1,j}) \\
&= -(-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I) R_{1,j}(z)u_{1,j} \\
&= Q_{1,j}(z).
\end{aligned}$$

A.2.2. Polinomios $Q_{2,j}(t)$

Continuamos la demostración del inciso c) de la Proposición 4.2.1..

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \frac{P_{2,j}(z) - P_{2,j}(t)}{z - t} (T - t) t d\sigma(t) - P_{2,j}(z) ((z - T) s_0 + s_1) \\
 &= (-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I) \int_0^T \frac{R_j(z) v_j - R_j(t) v_j}{z - t} (T - t) (t) d\sigma(t) \\
 & \quad - (-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I) R_j(z) v_j ((z - T) s_0 + s_1) \\
 &= (-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I) \int_0^T \frac{1}{z - t} \left(\begin{pmatrix} I \\ zI \\ z^2I \\ \vdots \\ z^jI \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I \\ tI \\ t^2I \\ \vdots \\ t^jI \end{pmatrix} \right) (T - t) (t) d\sigma(t) \\
 & \quad - (-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} I \\ zI \\ z^2I \\ \vdots \\ z^jI \end{pmatrix} ((z - T) s_0 + s_1) \\
 &= (-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I) \int_0^T \begin{pmatrix} 0 \\ (Tt - t^2) \\ z(Tt - t^2) - (Tt^2 - t^3) \\ \vdots \\ z^{j-1}(Tt - t^2) + \dots + (Tt^j - t^{j+1}) \end{pmatrix} d\sigma(t) \\
 & \quad - (-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} (z - T) s_0 + s_1 \\ z((z - T) s_0 + s_1) \\ z^2((z - T) s_0 + s_1) \\ \vdots \\ z^j((z - T) s_0 + s_1) \end{pmatrix} \\
 &= (-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} 0 \\ Ts_1 - s_2 \\ z(Ts_1 - s_2) - (Ts_2 - s_3) \\ \vdots \\ z^{j-1}(Ts_1 - s_2) + \dots + (Ts_j - s_{j+1}) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} z s_0 - T s_0 + s_1 \\ z^2 s_0 - z T s_0 + z s_1 \\ z^3 s_0 - z^2 T s_0 + z^2 s_1 \\ \vdots \\ z^{j+1} s_0 - z^j T s_0 + z^j s_1 \end{pmatrix} \\
&= (-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I) \left[\begin{pmatrix} T s_0 - s_1 - z s_0 \\ T s_1 - s_2 - (z^2 s_0 - z T s_0 + z s_1) \\ z(T s_1 - s_2) - (T s_2 - s_3) - (z^3 s_0 - z^2 T s_0 + z^2 s_1) \\ \vdots \\ z^{j-1}(T s_1 - s_2) + \cdots + (T s_j - s_{j+1}) - (z^{j+1} s_0 - z^j T s_0 + z^j s_1) \end{pmatrix} \right] \\
&= (-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ zI & I & 0 & \cdots & 0 \\ z^2 I & zI & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^j I & z^{j-1} I & z^{j-2} I & \cdots & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T s_0 - s_1 - z s_0 \\ T s_1 - s_2 \\ T s_2 - s_2 \\ \vdots \\ T s_j - s_{j+1} \end{pmatrix} \\
&= (-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I) R_j(z) \left(\begin{pmatrix} T s_0 - s_1 \\ T s_1 - s_2 \\ T s_2 - s_2 \\ \vdots \\ T s_j - s_{j+1} \end{pmatrix} - z s_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= (-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I) R_j(z) (-u_{2,j} - z s_0 v_j) \\
&= -(-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I) R_j(z) (u_{2,j} + z v_j s_0) \\
&= Q_{2,j}(t).
\end{aligned}$$

A.2.3. Polinomios $\Theta_{1,j}(t)$

Continuamos la demostración del inciso c) de la Proposición 4.2.1..

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T \frac{\Gamma_{1,j}(z) - \Gamma_{1,j}(t)}{z - t} (T - t) d\sigma(t) + \Gamma_{1,j}(z) s_0 \\
 & = -(-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I) \int_0^T \frac{R_j(z)v_j - R_j(t)v_j}{z - t} (T - t) d\sigma(t) \\
 & \quad + (-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I) R_j(z)v_j s_0 \\
 & = -(-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I) \int_0^T \frac{1}{z - t} \left(\begin{pmatrix} I \\ zI \\ z^2I \\ \vdots \\ z^jI \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I \\ tI \\ t^2I \\ \vdots \\ t^jI \end{pmatrix} \right) (T - t) d\sigma(t) \\
 & \quad + (-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} I \\ zI \\ z^2I \\ \vdots \\ z^jI \end{pmatrix} s_0 \\
 & = -(-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I) \int_0^T \begin{pmatrix} 0 \\ (T - t) \\ z(T - t) - (Tt - t^2) \\ \vdots \\ z^{j-1}(T - t) + \dots + (Tt^{j-1} - t^j) \end{pmatrix} d\sigma(t) \\
 & \quad + (-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} s_0 \\ z s_0 \\ z^2 s_0 \\ \vdots \\ z^j s_0 \end{pmatrix} \\
 & = -(-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} 0 \\ Ts_0 - s_1 \\ z(Ts_0 - s_1) - (Ts_1 - s_2) \\ \vdots \\ z^{j-1}(Ts_0 - s_1) + \dots + (Ts_{j-1} - s_j) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} s_0 \\ z s_0 \\ z^2 s_0 \\ \vdots \\ z^j s_0 \end{pmatrix} \\
& = -(-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I) \\
& \quad \left[\begin{pmatrix} 0 - s_0 \\ T s_0 - s_1 - z s_0 \\ z(T s_0 - s_1) - (T s_1 - s_2) - z^2 s_0 \\ \vdots \\ z^{j-1}(T s_0 - s_1) + \cdots + (T s_{j-1} - s_j) - z^j s_0 \end{pmatrix} \right] \\
& = -(-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ zI & I & 0 & \cdots & 0 \\ z^2 I & zI & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^j I & z^{j-1} I & z^{j-2} I & \cdots & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s_0 \\ T s_0 - s_1 \\ T s_1 - s_2 \\ \vdots \\ T s_{j-1} - s_j \end{pmatrix} \\
& = -(-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I) R_j(z)(-\tilde{u}_{1,j}) \\
& = (-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I) R_j(z) \tilde{u}_{1,j} \\
& = \Theta_{1,j}(t).
\end{aligned}$$

A.2.4. Polinomios $\Theta_{2,j}(t)$

Terminamos la demostración del inciso c) de la Proposición 4.2.1.

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T \frac{\Gamma_{2,j}(z) - \Gamma_{2,j}(t)}{z - t} t d\sigma(t) - \Gamma_{2,j}(z) s_0 \\
 & = -(-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I) \int_0^T \frac{R_j(z)v_j - R_j(t)v_j}{z - t} t d\sigma(t) \\
 & \quad - (-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I) R_j(z)v_j s_0 \\
 & = -(-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I) \int_0^T \frac{1}{z - t} \left(\begin{pmatrix} I \\ zI \\ z^2I \\ \vdots \\ z^jI \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I \\ tI \\ t^2I \\ \vdots \\ t^jI \end{pmatrix} \right) t d\sigma(t) \\
 & \quad - (-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} I \\ zI \\ z^2I \\ \vdots \\ z^jI \end{pmatrix} s_0 \\
 & = -(-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I) \int_0^T \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ (z - t)t \\ \vdots \\ z^{j-1}t + t^2z^{j-2} + \dots + zt^{j-1} + t^j \end{pmatrix} d\sigma(t) \\
 & \quad - (-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} s_0 \\ z s_0 \\ z^2 s_0 \\ \vdots \\ z^j s_0 \end{pmatrix} \\
 & = -(-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} 0 \\ s_1 \\ zs_1 - s_2 \\ \vdots \\ z^{j-1}t + s_2z^{j-2} + \dots + zs_{j-1} + s_j \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} s_0 \\ z s_0 \\ z^2 s_0 \\ \vdots \\ z^j s_0 \end{pmatrix} \\
&= -(-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I) \left[\begin{pmatrix} 0 + s_0 \\ s_1 + z s_0 \\ z s_1 + s_2 + z^2 s_0 \\ \vdots \\ z^{j-1} s_1 + s_2 z^{j-2} + \cdots + z s_{j-1} + s_j + z^j s_0 \end{pmatrix} \right] \\
&= -(-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I) \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ zI & I & 0 & \cdots & 0 \\ z^2 I & zI & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^j I & z^{j-1} I & z^{j-2} I & \cdots & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_j \end{pmatrix} \\
&= -(-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I) R_j(z) (-\tilde{u}_{2,j}) \\
&= (-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I) R_j(z) \tilde{u}_{2,j} \\
&= \Theta_{2,j}(t).
\end{aligned}$$

Apéndice B

Propiedades de polinomios ortogonales

B.1. Propiedades de la matriz resolvente y $R_j(t)$.

Calcularemos la dimensión y grado del producto $R_j(t)$ con los diferentes vectores v_j , $u_{1,j}$, $u_{2,j}$, $\tilde{u}_{1,j}$ y $\tilde{u}_{2,j}$, que utilizaremos para el grado de los polinomios ortogonales $P_{r,j}$ y $\Gamma_{r,j}$ y sus respectivos polinomios de segunda especie $Q_{r,j}$ y $\Theta_{r,j}$ con $r = 1, 2$.

Expresamos las ecuaciones (3.7) a (3.12) en forma matricial.

$$R_j(t) = \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ tI & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^j I & t^{j-1} I & \cdots & I \end{pmatrix}, \quad v_j = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u_{1,j} = \begin{pmatrix} 0 \\ -s_0 \\ \vdots \\ -s_{j-1} \end{pmatrix}, \quad u_{2,j} = -T \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{j+1} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{u}_{1,j} = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_j \end{pmatrix} - T \begin{pmatrix} 0 \\ s_0 \\ \vdots \\ s_{j-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}_{2,j} = \begin{pmatrix} -s_0 \\ -s_1 \\ \vdots \\ -s_j \end{pmatrix}.$$

Notemos las siguientes dimensiones.

Matriz/Vector	Dimensión	Matriz/Vector	Dimensión
$(-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I_q)$	$1 \times (j+1)$	$R_j(t)$	$(j+1) \times (j+1)$
		v_j	$(j+1) \times 1$
$(-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I_q)$	$1 \times (j+1)$	$u_{1,j}$	$(j+1) \times 1$
		$u_{2,j}$	$(j+1) \times 1$
$(-\tilde{Y}_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I_q)$	$1 \times (j+1)$	$\tilde{u}_{1,j}$	$(j+1) \times 1$
$(-\tilde{Y}_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I_q)$	$1 \times (j+1)$	$\tilde{u}_{2,j}$	$(j+1) \times 1$

Por lo tanto, podemos hacer el cálculo de los siguientes productos.

$$\begin{aligned}
R_j(t) v_j &= \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ tI & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^j I & t^{j-1} I & \cdots & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} I & tI & \cdots & t^j I \end{pmatrix}^*. \\
R_j(t) t v_j s_0 &= \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ tI & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^j I & t^{j-1} I & \cdots & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t s_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t s_0 I & t^2 s_0 I & \cdots & t^{j+1} s_0 I \end{pmatrix}^*. \\
R_j(t) u_{1,j} &= \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ tI & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^j I & t^{j-1} I & \cdots & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -s_0 \\ \vdots \\ -s_{j-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -s_0 I & \cdots & -s_0 t^{j-1} I + \cdots - s_{j-1} I \end{pmatrix}^*. \\
R_j(t) u_{2,j} &= \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ tI & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^j I & t^{j-1} I & \cdots & I \end{pmatrix} \left(-T \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{j+1} \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} m_1 I & m_1 t + m_2 I & \cdots & m_1 t^j I + \cdots m_{j+1} I \end{pmatrix}^*.
\end{aligned}$$

$$m_1 = (-Ts_0 + s_1) \quad m_2 = (-Ts_1 + s_2) \quad m_{j+1} = (-Ts_{j-1} + s_j).$$

$$\begin{aligned} R_j(t) \tilde{u}_{1,j} &= \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ tI & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^j I & t^{j-1} I & \cdots & I \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_j \end{pmatrix} - T \begin{pmatrix} 0 \\ s_0 \\ \vdots \\ s_{j-1} \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} s_0 I & s_0 t I + \tilde{m}_1 I & \cdots & s_0 t^j I + \tilde{m}_1 t^{j-1} I + \cdots + \tilde{m}_j I \end{pmatrix}^* \\ &\quad \tilde{m}_1 = (s_1 - Ts_0) \quad \tilde{m}_j = (s_j - Ts_{j-1}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_j(t) \tilde{u}_{2,j} &= \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ tI & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^j I & t^{j-1} I & \cdots & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s_0 \\ -s_1 \\ \vdots \\ -s_j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -s_0 I & -(s_0 t I + s_1 I) \\ \cdots & -(s_0 t^j I + s_1 t^{j-1} I + \cdots + s_j I) \end{pmatrix}^*. \end{aligned}$$

Como resumen tenemos la siguiente tabla.

Matriz/Vector	Dimensión	Grado
$R_j(t) v_j$	$(j+1) \times 1$	j
$R_j(t) t v_j s_0$	$(j+1) \times 1$	$(j+1)$
$R_j(t) u_{1,j}$	$(j+1) \times 1$	$(j-1)$
$R_j(t) u_{2,j}$	$(j+1) \times 1$	j
$R_j(t) \tilde{u}_{1,j}$	$(j+1) \times 1$	j
$R_j(t) \tilde{u}_{2,j}$	$(j+1) \times 1$	j .

B.2. Grados de polinomios $P_{r,j}$, $Q_{r,j}$, $\Gamma_{r,j}$ y $\Theta_{r,j}$

En esta sección determinamos los grados de los polinomios ortogonales $P_{r,j}$ y $\Gamma_{r,j}$ y sus respectivos polinomios de segunda especie $Q_{r,j}$ y $\Theta_{r,j}$ con $r = 1, 2$.

Al mismo tiempo daremos otra forma la demostrar el Lema (4.2.3).

a) Sean $P_{1,j}(z)$ y $Q_{1,j}(z)$ de la Definición 4.1.2.

$$P_{1,j}(z) = (-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) v_j,$$

$$Q_{1,j}(z) = -(-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) u_{1,j}.$$

El factor $(-Y_{1,j}^* H_{1,j-1}^{-1}, I_q)$ de los polinomios $P_{1,j}(z)$ y $Q_{1,j}(z)$, no depende de z , de ahí que los factores que determinan el grado son $R_j(z) v_j$ y $R_j(z) u_{1,j}$, siendo j y $(j-1)$ los grados respectivamente.

Por lo tanto, el polinomio $P_{1,j}(z)$ es de grado j y el polinomio $Q_{1,j}(z)$ es de grado $(j-1)$.

b) Sean $P_{2,j}(z)$ y $Q_{2,j}(z)$ de la Definición 4.1.2.

$$P_{2,j}(z) = (-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) v_j,$$

$$Q_{2,j}(z) = -(-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) (u_{2,j} + z v_j s_0).$$

El factor $(-Y_{2,j}^* H_{2,j-1}^{-1}, I_q)$ de los polinomios $P_{2,j}(z)$ y $Q_{2,j}(z)$, no depende de z , de ahí que los factores que determinan el grado son $R_j(z) v_j$ y $R_j(z) (u_{2,j} + z v_j s_0)$.

El grado de $R_j(z) (u_{2,j} + z v_j s_0)$ es $(j+1)$, que es el grado mayor de $R_j(z) u_{2,j}$ y $R_j(z) z v_j s_0$.

Por lo tanto, el polinomio $P_{2,j}(z)$ es de grado j y el polinomio $Q_{2,j}(z)$ es de grado $(j+1)$.

c) Sean $\Gamma_{r,j}(z)$ y $\Theta_{r,j}(z)$ de la Definición 4.1.3, con $r = 1, 2$.

$$\Gamma_{1,j}(z) = (-Y_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) v_j,$$

$$\Theta_{1,j}(z) = -(-Y_{1,j}^* K_{1,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) \tilde{u}_{1,j},$$

$$\Gamma_{2,j}(z) = (-Y_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) v_j,$$

$$\Theta_{2,j}(z) = -(-Y_{2,j}^* K_{2,j-1}^{-1}, I_q) R_j(z) \tilde{u}_{2,j}.$$

Los factores $(-Y_{r,j}^* K_{r,j-1}^{-1}, I_q)$ de los polinomios $\Gamma_{r,j}(z)$ y $\Theta_{r,j}(z)$, no depende de z , de ahí que los factores que determinan el grado son $R_j(z) v_j$ y $R_j(z) \tilde{u}_{r,j}$, siendo j en ambos casos.

Por lo tanto, los polinomios $\Gamma_{r,j}(z)$ y $\Theta_{r,j}(z)$ son de grado j .

B.3. Complemento de Schur

Supongamos que M una matriz cuadrada de dimensión $(j+k) \times (j+k)$, está dividida en cuatro submatrices como sigue

$$M_{(j+k) \times (j+k)} := \begin{pmatrix} A_{j \times j} & B_{j \times k} \\ C_{k \times j} & D_{k \times k} \end{pmatrix}$$

Las dimensiones de A , B , C y D son como se muestra arriba. A y D son matrices cuadradas, pero B y C no son cuadradas al menos que $j = k$.

Lema B.3.1. 1. Si A es invertible, el determinante de la matriz M es

$$\det(M) = \det(A) \det(D - CA^{-1}B).$$

2. Si D es invertible, el determinante de la matriz M es

$$\det(M) = \det(D) \det(A - BD^{-1}C).$$

Lema B.3.2. Si A es invertible, el complemento de Schur de la matriz A en M es definida como $M/A = D - CA^{-1}B$. Además el determinante del complemento es

$$\det(M/A) = \frac{\det(M)}{\det(A)}.$$

Lema B.3.3. Si D es invertible, el complemento de Schur de la matriz D en M es definida como $M/D = A - BD^{-1}C$. Además el determinante del complemento es

$$\det(M/D) = \frac{\det(M)}{\det(D)}.$$

Ver [9].

Apéndice C

Integración

C.1. Funciones medibles

Definición C.1.1. Suponga que f es una función de variable real en un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ y sea M cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$. Sea

$$f^{-1}(M) = \{x : f(x) \in M\},$$

El conjunto de todos los puntos de X los cuales son mapeados en M por f . El conjunto $f^{-1}(M)$ es llamado la *imagen inversa* del conjunto M .

Supongamos ahora que también son dados subconjuntos σ -anillos Σ de X , así (X, Σ) es un espacio medible. Para cada función de variable real f en X , escribiremos

$$N(f) = \{x : f(x) \neq 0\}$$

sí la función de variable real f es tal que, para cada subconjunto de Borel M de $\mathbb{R}$ el conjunto $N(f) \cap f^{-1}(M)$ es medible, entonces f es llamada una *función medible*.

Ver libro [10].

C.2. Integral de Lebesgue

El concepto de la integral de Riemann, conocido del curso elemental del Análisis, es aplicable sólo a aquellas funciones que o bien son continuas o no tienen “demasiados” puntos de discontinuidad. Para funciones medibles que pueden ser discontinuas en todo punto donde estén definidas, la construcción de la integral de Riemann no es válida. Al mismo tiempo, para estas funciones existe un concepto perfecto y flexible de la integral introducido por Lebesgue.

La idea principal de la integral de Lebesgue consiste en que, a diferencia de la integral de Riemann, los puntos x se agrupan no de acuerdo a su proximidad en el eje x sino de acuerdo a la proximidad de los valores de la función en estos puntos. Esto ofrece inmediatamente la posibilidad de extender el concepto de integral a una clase muy amplia de funciones.

Además, la integral de Lebesgue se define de un mismo modo para funciones determinadas en cualquiera espacios de medida abstractos, mientras que la integral de Riemann se introduce primero para funciones de una variable y solamente después se extiende, con las modificaciones correspondientes, al caso de varias variables. Para funciones de espacios de medida abstractos la integral de Riemann simplemente no tiene sentido.

Integral de Lebesgue de f función μ -medible sobre el conjunto A .

$$\int_A f(x) d\mu.$$

C.3. Medidas de Stieltjes

Sea F una función no decreciente definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, y supongamos que F es continua por la izquierda, en cada punto de $(a, b]$. Definiendo las medidas de todos los segmentos, los intervalos y los semisegmentos, pertenecientes al segmento básico $[a, b]$, mediante las igualdades

$$\begin{aligned} m(\alpha, \beta) &= F(\beta) - F(\alpha + 0) \\ m[\alpha, \beta] &= F(\beta + 0) - F(\alpha) \\ m(\alpha, \beta] &= F(\beta + 0) - F(\alpha + 0) \\ m[\alpha, \beta) &= F(\beta) - F(\alpha). \end{aligned}$$

podemos extender después esta medida, empleando el procedimiento de Lebesgue de prolongación de medida, a un σ -anillo que contiene todos los subconjuntos abiertos y cerrados (y consecuentemente, todos los subconjuntos borelianos) del segmento $[a, b]$. La medida μ_F que se obtiene a partir de esta construcción se llama *medida de Lebesgue-Stieltjes* correspondiente a la función F , mientras que la propia función F se llama la *función generatriz* de esta medida.

C.4. Integral de Lebesgue-Stieltjes

Sea μ_F una medida Stieltjes en el segmento $[a, b]$, generada por una función monótona F . Para esta medida se define de manera habitual la clase de funciones sumables y se introduce el concepto de la integral de Lebesgue

$$\int_{[a,b)} f(x) d\mu_F.$$

Una integral de este tipo tomada respecto a una medida μ_F , correspondiente a una función generatriz F , se llama *integral Lebesgue-Stieltjes* y se designa mediante

$$\int_a^b f(x) dF(x).$$

C.5. Aplicación de la integral Lebesgue-Stieltjes en la teoría de probabilidades

La integral de Lebesgue-Stieltjes encuentra aplicación tanto en el Análisis, como en otras muchas aplicaciones. El particular, este concepto se emplea ampliamente en la teoría de probabilidades. Recordemos que se llama función de distribución de una variable aleatoria ξ a una función F (no decreciente, obviamente) definida para cada x por la igualdad

$$F(x) = P(\xi < x),$$

es decir, $F(x)$ es la probabilidad de que la variable aleatoria ξ tome un valor menor que x . Es evidente que cada función de distribución es monótona no decreciente, continua por la derecha y verifica las condiciones

$$F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1.$$

Por el contrario, toda función de este tipo puede ser considerada como función de distribución de una variable aleatoria. Son características sustanciales de una variable aleatoria ξ son su valor medio (o esperanza matemática)

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x),$$

y la varianza

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 dF(x).$$

C.6. Integral de Riemann-Stieltjes

Además de la integral de Lebesgue-Stieltjes, considerada en el punto anterior, que representa de hecho, la diferencia de las integrales lebesguianas de una función dada f respecto a dos medidas, definidas en la recta, se puede definir también la así llamada integral de Riemann-Stieltjes. Ella se introduce como límite de sumas integrales, análogas a las sumas integrales habituales de Riemann.

Sean f y g funciones de valor real definidas en un intervalo cerrado $I = [a, b]$ de la recta real. *Suponemos que tanto f como g son acotadas en I .* Una *partición* de I es una colección finita de intervalos no traslapados cuya unión es I . Una partición se describe haciendo específico un conjunto finito de números reales $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ tal que

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$$

y tal que los subintervalos que ocurren en la partición son los intervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Si P y Q son particiones de I , se dice que Q es un *refinamiento de P* o que Q es *más fino que P* siempre que todo subintervalo en Q esté contenido en algún subintervalo de P .

Definición C.6.1. Si P es una partición de I , entonces una suma de Riemann-Stieltjes de f con respecto a g y correspondiente a $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ es un número real $S(P; f, g)$ de la forma

$$S(P; f, g) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]. \quad (\text{C.1})$$

Se han elegido aquí números ξ_k que satisfacen

$$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n.$$

Observemos que si la función g está dada por $g(x) = x$, entonces la expresión en la ecuación (C.1) se reduce a (C.2)

$$S(P; f, g) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \quad (\text{C.2})$$

Definición C.6.2. Se dice que f es integrable con respecto a g en I si existe un número real J tal que para todo número $\epsilon > 0$ exista una partición P_ϵ de I , tal que si P es cualquier refinamiento de P_ϵ y $S(P; f, g)$ es cualquier suma de Riemann-Stieltjes correspondientes a P , entonces

$$|S(P; f, g) - J| < \epsilon. \quad (\text{C.3})$$

En este caso el número J está determinado de manera única y se define por medio de

$$J = \int_a^b f dg = \int_a^b f(t) dg(t).$$

Se llama la integral de Riemann-Stieltjes de f con respecto a g sobre $I = [a, b]$. A la función f se le llama el integrando y a función g se le llama el integrante.

Ejemplos

1. Si $g(x) = x$, entonces la integral se reduce a la integral común de Riemann del cálculo elemental.
2. Si g es constante en el intervalo $[a, b]$, entonces cualquier función f es integrable con respecto a g y el valor de la integral es 0.

Ver libro [12].

Bibliografía

- [1] S.F. AMBRIZ PENN; *Algunas propiedades de la matriz resolvente del problema de momentos de Hamburger*. Tesis de Licenciatura. Asesor: A.E. Choque Rivero. 2013.
- [2] T.S. CHIHARA; *An introduction to orthogonal polynomials*. Gordon and Breach, 1978.
- [3] A.E. CHOQUE RIVERO, V.I. KOROBV, G.M. SKYLAR; *The admissible control problem from the moment problem point of view*. *Applied Mathematics Letters*, Vol.23, No.1(2010), 58-63.
- [4] A.E. CHOQUE RIVERO, YU. KARLOVICH; *The time optimal control as an interpolation problem*, *Commun. Math. Anal*, ISSN:0973-3841, Conf. 03(2011)
- [5] A.E. CHOQUE RIVERO; *The resolvent matrix for the Hausdorff matrix moment problem expressed in terms of orthogonal matrix polynomials*. *Complex Analysis and Operator Theory*, Vol.7, No. 4 (2013), 927–944.
- [6] A.E. CHOQUE RIVERO; *From the Potapov to the Krein–Nudel’man representation of the resolvent matrix of the truncated Hausdorff matrix moment problem*. *Bol. Soc. Mat. Mexicana* (2015).
- [7] A.E. CHOQUE RIVERO, YU.M. DYUKAREV, B. FRITZCHE AND B. KIRSTEIN; *A truncated matricial moment problem on a finite interval. The case of an odd number of prescribed moments*. *System theory, Schur algorithm and multidimensional analysis*. *Oper. Theory: Adv. Appl.* 176, 99-174 (2007).
- [8] A.E. CHOQUE RIVERO; *Sistemas de control desde el punto de vista del problema de momentos*. Emalca 2013. <http://www.matmor.unam.mx/emalca2013/programa.html>
- [9] R.W. COTTLE; *Manifestations of the Schur complement*. *Linear algebra and its applications* 8, 189-211(1974).
- [10] P.R. HALMOS; *Measure theory*. Graduate text in mathematics, 1974.
- [11] R.E. KALMAN; Y.C. HO; K.S. NARENDRA; *Controllability of dynamical systems*. *Contributions to differential equations* 1:189-213, 1963.

- [12] A.N. KOLMOGOROV; S.V. FOMIN; *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. Editorial Mir Moscu 1975.
- [13] V.I. KOROBV; G.M. SKYLAR; *Time optimality and the power moment problem*. Mat. Sb. 134(176)(1987)186-207.
- [14] V.I. KOROBV; G.M. SKYLAR; V.V. FLORINSKI; *The minimal polynomial for determining of all points of switching in the time optimal control*. Math. Phys. Anal. Geom. T.7(3)(2000)308-320.
- [15] N.N. KRASOVSKII; *Control of dynamical systems*. Nauka, Moscow, 1985.
- [16] M.G. KREIN, A.A. NUDEL'MAN; *The Markov moment problem and extremal problems*. Translations of Mathematical Monographs. Vol. 50. 2000.
- [17] L.S. PONTRYAGIN; V.G. BOLTYANSKI; R.V. GAMKRELITSE AND E.F. MISCHENKO; *The mathematical theory of optimal processes*. Gordon and Breach 1986.
- [18] J.A. SHOHAT; J.D. TAMARKIN; *The problem of moments*. American mathematical society 1943.
- [19] J. ZABCZYK; *Mathematical control theory: An Introduction*. Birkhäuser Boston 1992.