



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ**

**ACERCAMIENTOS Y CONSTRUCCIONES PARA LA OBTENCIÓN DE
 π**

Tesis que para obtener el grado de Licenciado en Ciencias Físico
Matemáticas

PRESENTA:

JUAN JOSÉ REYNOSO CERANO

ASESOR:

Doctor en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa

ARMANDO SEPÚLVEDA LÓPEZ



MORELIA, MICHOACÁN, JUNIO 2015

Agradecimientos

A mis padres Jesús Reynoso y Teresa Cerano, por brindarme en todo momento su apoyo; a mis hermanos Daniel, Claudia y Jesús por ser compañeros y amigos en mi vida.

A mi esposa Judith Bernabé por su apoyo incondicional.

Al profesor Armando Sepúlveda por su buena dirección y dedicación para este trabajo.

Gracias a todos ellos, a mis familiares, amigos, maestros y seres queridos por acompañarme y animarme para continuar con este proyecto.

ÍNDICE

Capítulo I	
Introducción.....	5
Capítulo II	
La historia de π	8
II.1. Los inicios.....	8
II.2. Los inicios del hombre.....	10
II.3. Matemática babilónicas.....	11
II.4. Los egipcios.....	13
II.5. Matemáticas hindúes.....	15
II.6. Matemática china.....	16
II.7. La matemática griega.....	17
II.8. Hipias de Elis.....	20
II.9. Euclides.....	21
II.10. La dominación romana.....	23
II.11. Arquímedes de Siracusa.....	25
II.12. La caída de Roma.....	32
II.13. Europa.....	34
II.14. Los nuevos métodos para el cálculo de π	38
II.15. Construcción de Hobson para aproximar π	44
II.16. Newton.....	49
II.17. Euler.....	52
II.18. El método del Conde de Monte Carlo.....	56
II.19. Prueba de la irracionalidad de π	58
II.20. La trascendencia de π	64
II.21. calculadores de dígitos de π	65
Capítulo III	
Construcciones de π utilizando Geogebra.....	69
III.1. La cuadratriz de Hipias.....	69
III.2. Cuadratura del círculo con la espiral de Arquímedes.....	73
III.3. Construcción de Kochansky.....	76
III.4. Construcción de Gelder.....	77
III.5. Construcción de Hobson.....	78
III.6. Construcción de Ramanujan.....	79
III.7. Construcción de Mascheroni.....	81
Capítulo IV	
Conclusiones.....	84
Referencias.....	86
Anexos.....	87

Resumen

En la primera parte de este trabajo se hace una breve introducción de los avances que se han dado a lo largo de la historia de la humanidad en los métodos para calcular el número π . Estudiando desde los métodos de las antiguas culturas, hasta los calculadores modernos de los dígitos de π .

En la segunda parte de esta tesis continuamos con la construcción geométrica de algunas aproximaciones π que construimos en el software de geometría dinámica Geogebra, en donde se construyeron las aproximaciones de π hechas por Hipias, Arquímedes, Gelder, Hobson, Ramanujan y Mascheroni.

Palabras clave: historia, pi, construcción, software, Geogebra.

Abstract

In the first part of this work I made a brief introduction of the advances that have been made throughout the history of mankind in the methods to calculate the number π . Studying methods from ancient cultures to modern computers of the digits of π .

In the second part of this work I realized the geometric construction of some approximations of π I built in dynamic geometry software GeoGebra, where I built the approximations of π made by Hipias, Arquímedes, Gelder, Hobson, Ramanujan and Mascheroni.

Keywords: history, pi, construction, software, Geogebra.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

Desde la antigüedad el hombre se ha preocupado por explicar los fenómenos que le rodean, las propiedades de los objetos que se encuentran en nuestra cotidianidad. Desde tiempos muy antiguos el hombre observó en su entorno objetos con forma circular, el iris de los ojos, el sol o la luna llena, por dar algunos ejemplos de estos objetos. La curiosidad y la necesidad llevaron a hombres ingeniosos a buscar la medida de la circunferencia, problema que condujo a la búsqueda de la razón entre la periferia y el diámetro de la circunferencia y con ello al estudio de π .

En el capítulo II de este trabajo presentamos una breve historia del estudio del número π , con algunos de los hechos más importantes que han sucedido en el estudio de este número.

Antes de Cristo (a.C.)

a.C. 2000	Los babilonios emplean $\pi = 3\frac{1}{8}$.
a.C. 2000	Los egipcios utilizan $\pi = (16/9)^2 = 3.1605$.
Siglo XII	Los chinos emplean $\pi = 3$.
a.C. 550	I Reyes 7:23 se emplea $\pi = 3$.
a.C. 440	Hipócrates de Quíos cuadra la lúnula.
a.C. 434	Anaxágoras intenta cuadrar el círculo.
a.C. 430	Antifonte enuncia el principio de exhaustión.
a.C. 420	Hipias descubre la cuadratriz.
a.C. 335	Dinostrato usa la cuadratriz para cuadrar el círculo.
Siglo III	Arquímedes establece que $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ y $\pi \approx 3.14163$. Arquímedes emplea la espiral de Arquímedes para rectificar el círculo.
a.C. 225	Apolonio mejora el método de Arquímedes pero no se sabe qué tanto.

Después de Cristo (d.C.)

Siglo II	Ptolomeo utiliza el valor de $\pi = 377/120 = 3.14166$.
Siglo III	ChungHing utiliza el valor $\pi = \sqrt{10} = 3.16...$ Wang Fau utiliza el valor $\pi = 142/45 = 3.1555...$
263	Lui Hui emplea el valor $\pi = 157/50 = 3.14$.
Siglo V	TsuChung-Chi establece que $3.1415926 < \pi < 3.1415927$.

Ca. 500	Arybhatta emplea el valor $\pi = 62832 / 2000 = 3.1416$.
Siglo VI	Brahmagupta utiliza el valor $\pi = \sqrt{10} = 3.16...$
1220	Leonardo de Pisa (Fibonacci) encuentra el valor $\pi \approx 3.141818$
Antes de 1436	Al-Kashi de Samarcanda calcula π con 14 decimales de precisión.
1450	Nicolás de Cusa descubre su aproximación de la longitud de un arco.
1573	Valentinus Otho encuentra el valor $\pi \approx 355/113 = 3.1415929$.
1583	SimonDuchesne encuentra el valor $\pi \approx (39/22)^2 = 3.14256...$
1593	François Viète descubre un producto infinito que converge a π .
1593	Adriaen van Roomen calcula los primeros 15 decimales de π .
1596	Ludolph van Ceulen calcula los primeros 32 decimales de π , luego llega a 35.
1621	Snellius mejora el método de Arquímedes.
1654	Huygens demuestra la validez de la mejora de Snellius.
1655	Wallis descubre un producto racional infinito que converge a π . Brouncker lo transforma en una fracción continua.
1655-1666	Newton descubre el cálculo y calcula π hasta el decimal 16, calculo que fue publicado hasta 1737.
1671	Gregory descubre la serie de arco tangente.
1674	Leibniz descubre la serie del arco tangente que converge a π .
1705	Sharp calcula π hasta el decimal 127.
1706	Machin calcula π hasta el centésimo decimal.
1706	Jones utiliza el símbolo π para la razón circunferencia / diámetro.
1719	De Lagny calcula π hasta el decimal 127.
1748	Euler publica Introductio in analysininfinitorum, que contiene el teorema de Euler y series que convergen a π y π^2 .
1755	Euler descubre una serie de convergencia rápida con el arco tangente.
1766	Lambert demuestra la irracionalidad de π .
1775	Euler sugiere que π es trascendente.
1794	Legendre demuestra que π y π^2 son irracionales.
1794	Vega calcula π hasta el decimal 140.
1840	Liouville demuestra la existencia de números trascendentes.
1844	Strassnitzky y Dase calculan π hasta el decimal 200.
1855	Richter calcula π hasta el decimal 500.
1873	Hermite demuestra la trascendencia de e .
1873-1874	Sanks calcula π hasta el decimal 707.
1882	Lindenmann demuestra la trascendencia de π .
1945	Ferguson descubre un error en las cifras obtenidas por Shanks a partir de la 527.
1946	Ferguson publica su cálculo hasta el decimal 620.
1947	Ferguson calcula π hasta el decimal 808 utilizando una calculadora electrónica.
1949	ENIAC es programada para calcular 2037 decimales.
1954-1955	NORC es programada para calcular 3089 decimales.
1957	Una computadora Pegasus calcula 7480 decimales.
1959	Una IBM 704 calcula 16167 decimales.
1961	Shanks y Wrench mejoran los programas de computadora para calcular π y utilizan una IBM 7090 para calcular 100,000 decimales.
1966	Una IBM 7030 calcula 250 mil decimales.
1967	Una CDC 6600 calcula 500 mil decimales.
2002	Una supercomputadora Hitachi SR8000 calcula 1.2411×10^{12} decimales.

En el capítulo III se realizan algunas aproximaciones geométricas del número π , utilizando el software de geometría dinámica Geogebra, se hacen las construcciones de: la Cuadratriz de Hippias, la Espiral de Arquímedes, Construcción de Kochansky, Construcción de Gelder, Construcción Hobson, Construcción de Ramanujan y la Construcción de Mascheroni. Demostrando algunas de sus propiedades para la aproximación de π . En algunos casos estas construcciones fueron propuestas para resolver el conocido problema de la cuadratura del círculo, sin embargo, no son solución a este problema pues no pueden ser trazadas utilizando solo regla y compás.

La orientación metodológica de la tesis es de carácter documental, las figuras y construcciones elaboradas en esta tesis fueron hechas con el software dinámico Geogebra que potencia y facilita el desarrollo de la visualización para el aprendizaje de ciertas curvas.

El software dinámico de geometría Geogebra, es un software de uso libre y entre sus características importantes está la doble percepción de objetos, ya que cada objeto tiene dos representaciones, una vista gráfica (Geometría) y otra vista algebraica (Álgebra). En Geogebra se establece una conexión permanente entre símbolos algebraicos y gráficas geométricas, permitiendo abordar la geometría de una forma dinámica e interactiva, que puede ayudar a visualizar contenidos matemáticos que son más difíciles de abordar desde un dibujo estático construido con lápiz y papel.

CAPÍTULO II

LA HISTORIA DE π

II.1. Los inicios

En Beckmann (1974, p.19) se puede leer que los inicios del hombre en el planeta tierra debieron ser hace alrededor de un millón de años, desde que apareció sobre este planeta el animal llamado hombre, con su capacidad de manejar herramientas. Durante ese tiempo percibió las diferencias entre forma y sentido, entendió los conceptos de magnitud y número, aprendió a medir y advirtió que existe una relación entre ciertas magnitudes.

Los detalles de este proceso no se conocen. El primer destello de luz en la obscuridad viene de la edad de piedra: el hueso de un lobo con marcas utilizado a modo de tarja, los destellos se vuelven más brillantes y numerosos a medida que pasa el tiempo, pero no es sino hasta el 2000 a.C. que los hechos comienzan a establecerse través de documentación directa en vez de evidencia circunstancial. Uno de estos hechos es el siguiente: alrededor del año 2000 a.C., los seres humanos habían comprendido la importancia de la constante que hoy en día representamos con el símbolo π y habían encontrado una tosca aproximación a su valor real.

¿Cómo llegaron hasta ese punto? Para responder a esa pregunta, debemos regresar a la edad de piedra y aún más allá, y adentrarnos en el reino de la especulación. Mucho antes de la invención de la rueda, el hombre debe haber identificado la forma peculiarmente regular del círculo. La veía en los ojos de los demás hombres y animales, la veía en los discos del sol y la luna, o veía algo muy parecido en algunas flores, y tal vez le agradaba su infinita simetría al dibujar esta forma en la arena con un palito.

Podría especularse que en este momento el hombre comenzó a entender el concepto de magnitud: había círculos grandes y círculos pequeños, árboles altos y árboles bajos, piedras pesadas, piedras más pesadas, piedras muy pesadas. El paso de estas estimaciones cualitativas a mediciones cuantitativas constituye el amanecer de las matemáticas. En lo que debió ser un camino largo y tortuoso, pero parece correcto suponer que en primer lugar esto se dio únicamente para cantidades que solo toman valores enteros: personas, animales, árboles, rocas, palitos. Pues contar es una medición cuantitativa: la medición de la cantidad de una multitud de elementos.

En primer lugar el hombre aprendió a contar hasta dos, y mucho tiempo pasó para que aprendiera a contar hasta números más grandes. La evidencia a favor de esta idea es abundante, y quizá la más fascinante es la que se conserva en los idiomas. Hasta la edad media, existían dos formas de plural en checo: una para dos elementos y otra para más de dos, y al parecer esta característica se conserva en finlandés aún el día de hoy. Claramente no hay

conexión entre las palabras germánicas two (dos) y half (mitad), tampoco en los idiomas latinos (en castellano dos y mitad, en francés deux y moitié), ni en los idiomas eslavos (ruso: dva y pol), y en el húngaro, que no es un idioma indoeuropeo, las palabras son kettő y fél. Sin embargo, en todos los idiomas europeos están relacionadas las palabras para 3 y $1/3$, 4 y $1/4$, etcétera. Esto sugiere que los hombres comprendieron el concepto de fracción y la idea de relación entre un número y su recíproco, sólo después de haber aprendido a contar hasta más de dos.

El próximo paso fue descubrir las relaciones entre distintas magnitudes. Una vez más, parece seguro que dichas relaciones se expresaron primero en forma cualitativa. Probablemente los hombres notaron que las piedras más grandes son más pesadas, o para decirlo en una forma más complicada, que existe una relación entre el peso y el volumen de una piedra. También se debe haber notado que un corredor más rápido corre una mayor distancia, que de una presa más grande se obtiene mayor comida, que campos más extensos producen mayor cultivo. Entre todo este tipo de relaciones, había una que difícilmente podría haber sido descubierta y que más aún, no tenía excepciones: mientras más ancho es un círculo, más largo es su contorno.

Una vez más a este razonamiento cualitativo deben de haber seguido consideraciones cuantitativas. Si el volumen de una piedra se duplica, el peso se duplica; si corres el doble de rápido, recorres el doble de distancia; si se triplican los campos, se triplica el cultivo; si se duplica el diámetro de un círculo, se duplica la circunferencia. Por supuesto la regla no siempre funciona: un árbol el doble de viejo no es necesariamente el doble de alto. La razón es que la regla “a más de esto, más de lo otro, no implica siempre que ambas cosas sean proporcionales”.

Al hombre neolítico le interesaban muy poco las funciones monótonas, pero sin duda el hombre descubrió, consciente o inconscientemente, por experiencia, instinto, razonamiento o todo lo anterior, el concepto de proporcionalidad, es decir aprendió a identificar pares de magnitudes tales que si una era duplicada, triplicada o cuadruplicada, dividida en dos o se mantenía constante, la otra también se duplicaría, triplicaría o cuadruplicaría, dividiría por dos o no se mostraría cambio alguno.

Y entonces llegó el gran descubrimiento. Poco se logra con reconocer ciertas propiedades y definirlas, pero cuando las observaciones se generalizan en forma tal que puede establecerse una regla general válida, estamos frente a un gran descubrimiento científico. Cuanto mayor alcance tenga, mayor es su importancia. La afirmación de que un campo de cultivo alimentaría a la mitad de la tribu, dos campos a toda la tribu, tres campos a tribu y media, solo se aplica a ciertos campos y a ciertas tribus. Que una abeja tiene 6 patas, tres abejas tienen 18 patas, etcétera, es una afirmación que, en el mejor de los casos se aplica a la clase de los insectos. Pero en medio de todos estos razonamientos, algunos individuos inteligentes y perspicaces deben de haber notado algo en común en el comportamiento de las magnitudes en estas afirmaciones y otras similares: sin importar como varíen dos cantidades proporcionales, su razón se mantiene constante. El hombre descubrió una verdad no específica sino general.

Esta razón constante no fue descubierta por división numérica, probablemente la razón fue expresada en forma geométrica, pues la geometría fue la primera disciplina matemática en la que se hicieron progresos importantes. Pero la técnica efectivamente utilizada para describir la constancia de razón entre dos cantidades proporcionales es poco relevante para el argumento. Hubo, por supuesto, muchos pasos intermedios, tales como el descubrimiento de las sumas, diferencias, productos y divisiones, y el paso de la abstracción, ejemplificado por la tradición

del decir “dos pájaros y dos pájaros son en total cuatro pájaros” a decir “dos y dos son cuatro”. Pero el paso decisivo e indispensable camino a π , fue el descubrimiento de que las cantidades proporcionales tienen una razón (proporción) constante.

De este punto hasta la constante π la distancia era un paso diminuto: si el contorno (la circunferencia) y el ancho (diámetro) de un círculo eran conocidos como cantidades proporcionales, lo que era fácil de observar, entonces se sigue que la razón

Circunferencia: diámetro= constante para todos los círculos

Esta razón constante del círculo no fue denotada con el símbolo π sino hasta el siglo XVIII d.C., aquí se utiliza la notación moderna desde un principio, definiendo a π como

$$\pi = \frac{C}{D}$$

Donde C es la circunferencia y D el diámetro del círculo.

II.2. Los inicios del hombre

En el antiguo testamento (I Reyes 7:23 y II Crónicas 4:2) encontramos el siguiente versículo:

Luego hizo un mar de metal fundido de diez codos de borde a borde; era perfectamente redondo, de cinco codos de altura, y un hilo de treinta codos media su circunferencia.

El mar de metal fundido, según afirma el autor, es circular; mide 30 codos de contorno (circunferencia) y 10 codos de borde a borde (diámetro); así el valor bíblico para π es de $30/10=3$.

El hombre no es el único animal que modifica su medio ambiente con el uso de herramientas, los chimpancés y algunos pájaros también lo hacen, las diferencias entre el hombre y el simio no fueron muy notorias mientras estos eran nómadas y no se establecían en un sitio, la principal actividad para la supervivencia era la caza. Pero el hombre descubrió la agricultura alrededor del año 10,000 a.C., entonces aprendió a sembrar cultivos y cosechar los frutos de estos, logró domesticar algunos animales y dejó de ser nómada para volverse sedentario, pues había descubierto la forma de producir sus propios alimentos a través de la agricultura, ahora podía producir una cantidad mayor de comida de la necesaria para subsistir, esto le permitió el nacimiento de actividades que no eran propiamente relacionadas con la obtención de refugio y comida para su supervivencia.

Los cambios agrícolas no ocurrieron en zonas de condiciones climáticas y geográficas difíciles como el norte donde los inviernos eran duros y muy largos, en zonas de abundante comida y buen clima como el trópico no eran necesarios los cambios pues se tenía comida, eran fáciles de conseguir los refugios y las ropas no eran necesarias por el buen clima. Los cambios de una gran revolución agrícola ocurrieron en condiciones geográficas y climáticas más bien intermedias, había necesidad de un cambio y este cambio era posible, esta franja intermedia se extendía desde el mediterráneo hasta Mesopotamia; más tarde esta franja se extendió desde Egipto en un extremo hasta China en el otro, pasando por Persia e India. Surgieron los

estados. Aparecieron los especialistas: Soldados, administradores, sacerdotes, comerciantes, educadores y Matemáticos.

Los que se dedicaban a la cacería poco encontraban de utilidad en adquirir conocimientos matemáticos, además no tenían el tiempo para dedicarse a aprender sobre las cónicas y razones. Pero esta sociedad necesitaba de hombres con conocimientos en mediciones, astronomía, encargados de registrar los víveres, recaudadores de impuestos y desde luego hombres dedicados a engañar con artilugios y magia barata a los ignorantes. En estas condiciones florecieron las matemáticas.

II.3. Matemáticas Babilónicas

Más de medio millón de tablillas cuneiformes que todavía están siendo descifradas e interpretadas, abarcando el periodo de 2100 a.C. hasta el año 300 a.C., época del rey Nabucodonosor. De esas tabillas hay unas 300 que se relacionan con matemáticas, de ellas unas 200 son tablas de multiplicar, de recíprocos, de cuadrados, de cubos, etc.

Las investigaciones recientes han dejado claro que en Babilonia se conoció un valor más exacto de π que en Egipto, contrario a lo que se decía anteriormente pues se habían descifrado mayor cantidad de documentos antiguos egipcios que babilónicos.

En las nuevas sociedades comenzaron a existir personas destinadas a participar en la guerra organizada y los pueblos que existieron en estas épocas (sumerios, babilonios, caldeos, asirios y otros) lucharon entre ellos y también con los pueblos extranjeros como los hititas, escritos, medos y persas. La ciudad de Babilonia no siempre fue el centro de esta cultura pero a las matemáticas de esta zona se les da el nombre de matemáticas “babilonias”.

En Struik (2008, p.35) puede leerse:

La matemática mesopotámica alcanzó un nivel muy superior al logrado por la matemática egipcia, en cualquier tiempo. Aquí podemos incluso detectar progreso en el curso de los siglos. Ya los textos más antiguos que datan del periodo sumerio más tardío (la tercera dinastía de Ur. alrededor de 2100 a.C.), muestran una aguda habilidad de computo.

Según Beckmann (1974, p. 22). Los babilonios conocían más de π que su mera existencia. Habían descubierto también valores aproximados alrededor del año 2000 a.C. Los babilonios llegaron al valor

$$\pi = 3\frac{1}{8}$$

En 1936 se descubrió una tablilla en una excavación a unos 320 kilómetros de Babilonia. Es de mucha importancia resaltar que los sumerios fueron los primeros en alcanzar un logro muy grande para el hombre; la escritura; es a través de la escritura como el conocimiento se puede preservar de generación en generación. Utilizaban escritura cuneiforme en forma de cuñas con una aguja sobre tablillas de arcilla suave que luego ponían al sol para endurecer.

La tablilla descubierta en 1936 fue parcialmente traducida en 1950, en ella se habla de diversas figuras geométricas y se afirma en esta tablilla, que la razón del perímetro de un hexágono regular a la circunferencia del círculo circunscrito (figura 2.1) es igual a $\frac{57}{60} + \frac{36}{60^2}$, esto escrito en notación actual, los babilonios utilizaban sistema sexagesimal, es decir base 60.

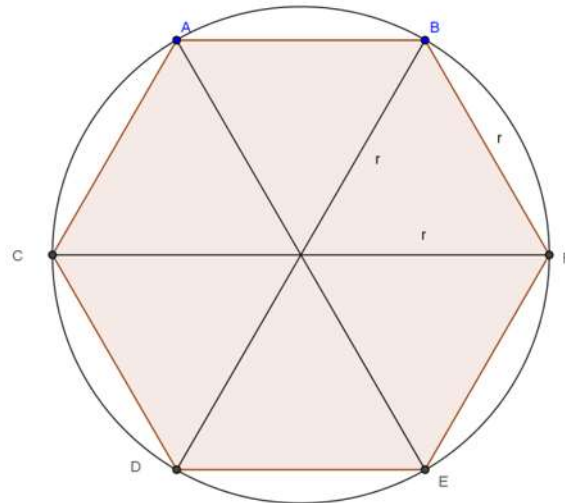


Figura 2.1. Valor Babilónico de π .

Veamos el valor de π que utilizaron para hacer esta aproximación.

Sabemos que

$$\frac{\text{perímetro del hexágono regular}}{\text{circunferencia del círculo circunscrito}} = \frac{57}{60} + \frac{36}{60^2} = \frac{3600}{3456}$$

Por otro lado

$$\frac{\text{perímetro del hexágono regular}}{\text{circunferencia del círculo circunscrito}} = \frac{6r}{2\pi r} = \frac{3}{\pi}$$

De donde

$$\pi = \frac{10800}{3456} = 3 + \frac{1}{8}$$

Beckmann trata de adivinar cómo se calculó este valor de π , dando el siguiente argumento:

Hay que tomar en cuenta que para hacer esta aproximación no se contaba con la cantidad y calidad de los instrumentos de medición que tenemos en la actualidad, las herramientas eran gruesas, toscas y elásticas, lo que provocaba errores en la medición.

Buscamos una extensión de arena húmeda aceptablemente plana a orillas del Nilo, clavamos una estaca en la arena, amarramos a la estaca clavada una cuerda y del otro extremo de la

cuerda amarramos una estaca afilada, con la estaca afilada dibujamos el círculo sobre la arena. Quitamos la estaca clavada en la arena y a este punto le llamaremos O y tomamos una cuerda más larga. Hacemos una marca en la circunferencia y (con carboncillo) hacemos una marca en este punto, a este punto le llamaremos A . Estiramos la cuerda hasta el otro extremo de manera que pase por O , y marcamos la cuerda en el punto en que se interseque con la circunferencia, le llamamos punto B . Ya tenemos una cuerda de longitud AB , medimos cuantas veces cabe la cuerda AB en la circunferencia, empezando desde el punto A . Al hacer esto notaremos que el diámetro de la circunferencia cabe tres veces, hasta aquí la aproximación que tendríamos sería

$$\pi = 3$$

Pero sobraría un pequeño resto por medir, podríamos medir el resto con nuestra cuerda y llamarle EA y ahora podemos comparar esta medida con el diámetro de la circunferencia, con ello observamos que cabe 7 veces y la octava vez sale de la circunferencia. Debido a los instrumentos de medición con los que se contaba y las condiciones del terreno llegaron a la aproximación de

$$\pi = 3 + \frac{1}{8}.$$

II.4. Los egipcios

La mayoría de lo que conocemos de la matemática de los egipcios es gracias al papiro Rhind (también llamado papiro Ahmes); según Perero (1994, p. 130) este papiro fue descubierto a mediados del siglo pasado en las ruinas de un pequeño edificio cerca del templo mortuario de Ramsés II en Tebas.

Lo compró Alexander Henry Rhind, quien lo donó al museo británico. Algunos años después se encontraron algunos fragmentos más del mismo papiro, están hoy en el museo de Brooklyn en Nueva York.

Este papiro está formado por 14 hojas pegadas y enrolladas, tiene una longitud final de 513 cm y un ancho de 40 cm. El copista dice llamarse Ahmose, e indica que escribe en el cuarto mes de la estación de las inundaciones, el año 33 del reinado del rey Apofis; el copista dice estar copiando un trabajo escrito durante el reinado del rey Nymare (segunda mitad del siglo XIX a.C.).

El papiro Rhind contiene 110 problemas que se refieren a casi todas las cuestiones de la vida diaria, pero también hay algunas cuestiones teóricas que incluyen progresiones aritméticas y geométricas.

Y al papiro de Moscú, que es posiblemente dos siglos más antiguo que el Rhind y que contiene 25 problemas, estos papiros muestran los conocimientos de matemáticas de la civilización egipcia antigua, e incluso en tiempos de los romanos cuando se descubrieron otros papiros, los planteamientos de los problemas siguen siendo los mismos.

Tenían un sistema decimal en el que la numeración estaba basada en símbolos especiales para cada una de las unidades decimales superiores.

Según Struik (2008, p.34) para los egipcios el área de un círculo con diámetro d fue dada como $\left(d - \frac{d}{9}\right)^2$ lo que condujo a un valor de π de $\frac{256}{81} = 3.1605$ ya que

$$\left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8d}{9}\right)^2 = \left(\frac{64(2r)^2}{81}\right) = \pi r^2$$

El problema en el que pondremos nuestra atención es el problema 50 del papiro Rhind. Ahmes supone que el área del terreno circular de diámetro igual a 9 unidades de longitud es igual al área de un terreno cuadrado cuyos lados miden 8 unidades, que coincide con el valor egipcio para π mencionado anteriormente.

¿Cómo llegarían los egipcios a hacer esta estimación de π ? El valor egipcio para π es menor que $\frac{256}{81} < 3\frac{1}{6}$, por lo que podemos suponer que este resultado no fue verificado experimentalmente. Ahmes da una pista de cómo se llega a esta aproximación de π en el problema 48, en este problema estudia la relación entre un círculo y el cuadrado circunscrito, forma un octágono irregular trisecando los lados del cuadrado con 9 unidades de longitud y cortando las esquinas triangulares del cuadrado como se observa en la figura 2.2.

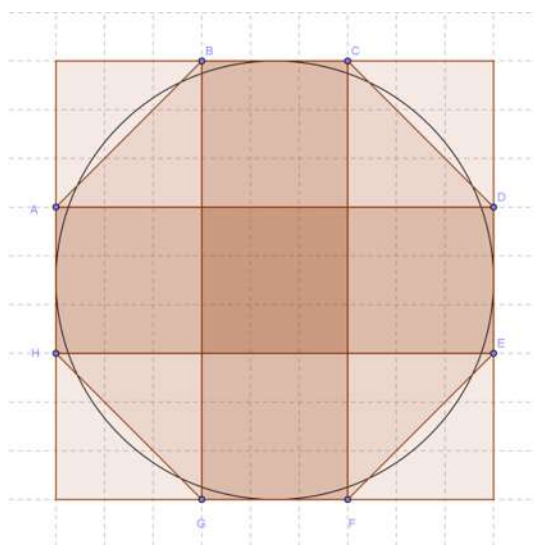


Figura 2.2. Aproximación de π egipcia.

El área del octágono ABCDEFGH no difiere mucho del área del círculo inscrito en el cuadrado, y es igual al área de los cinco cuadrados sombreados (de área igual a 9 unidades cuadradas cada uno) más el área de los 4 triángulos (de 4.5 unidades cuadradas cada uno), por lo que el área del octágono es de $45 + 18 = 63$ unidades cuadradas y este valor es muy próximo a 64 unidades cuadradas $8u^2$, así el área de un círculo de diámetro 9 unidades es igual al área de un cuadrado de lado 8 unidades.

II.5. Matemáticas hindúes

En la India la matemática se comenzó a desarrollar desde tiempos muy remotos, en los libros religiosos de los siglos VIII y VII a.C., ya se proponían construcciones geométricas para la construcción de templos, altares donde se observa que aplicaban el teorema de Pitágoras y se planteaba el problema de la cuadratura del círculo. Un aspecto interesante de la matemática hindú es la utilización de un lenguaje poético y metafórico, muchas veces en verso para escribir las matemáticas. Como un ejemplo ponemos la regla de tres.

En el libro de Aryabhatiya, un breve volumen sobre astronomía en matemáticas que está escrito en verso por Aryabhatiya en el año 499, la regla de tres se expresa así

“En la regla de tres, multiplicar el fruto por el deseo y dividir por la medida, el resultado es el fruto del deseo.”

$$\frac{\text{medida}}{\text{fruto}} = \frac{\text{deseo}}{\text{fruto del deseo}}$$

Empleaban sistemas de numeración sin una notación posicional y utilizaban símbolos diferentes para cada número, el sistema que utilizaron se llama Brâhmi. Allí existían los llamados sulvasutras, partes de estos datan de 500 a.C. y contienen ideas matemáticas que pueden ser de origen muy antiguo; en ellos encontramos fórmulas para construir cuadrados y rectángulos, así como expresiones para relacionar la diagonal de un cuadrado con uno sus lados, también fórmulas para la equivalencia de cuadrados y círculos. Existía el conocimiento del teorema de Pitágoras para casos específicos y existían algunas aproximaciones en términos de fracciones como las siguientes:

En Struik (2008, p. 43) menciona que los hindús tenían algunas aproximaciones de irracionales a partir de racionales, entre ellas se encuentran las aproximaciones a π y $\sqrt{2}$ como:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$$
$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8} \right)^2 = 18(3 - 2\sqrt{2})$$

Lo que da como resultado una aproximación de $\pi \approx 3.0883$

Los resultados que se muestran en los sulvasutras no se encuentran en obras de matemáticas hindúes posteriores, así que no podemos hablar de una continuidad de esta tradición, tal vez este hecho se dé por el amplio territorio que abarca la India.

Los siddhantas o sistemas de Astronomía son algunos otros volúmenes de la matemática hindú, fueron publicados alrededor del año 400 d.C., pero se considera que su contenido puede ser de origen más antiguo

Según Beckmann (1974, p.32), uno de los siddhantas publicado en el año 380 d.C. utiliza un valor para π de

$$\pi = 3\frac{177}{1250} = 3.1416$$

Se menciona en Beckmann (1974, p.32) que Aryabhata fue quien dio una descripción del antiguo conocimiento hindú sobre la matemática en el Aryabhatiya que fue escrito en el 499 d.C. En este problema se solucionan muchos problemas, pero no se dice nada de la forma en cómo se encuentra tal solución. Uno de los problemas es el siguiente: “sumar 4 a 100, multiplicar por 8 y sumar 62000. El resultado es aproximadamente la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es de 20,000”. De donde podemos calcular el valor de π

$$\pi = \frac{62832}{20000} = 3.1416$$

Es muy probable que los indios obtuvieran este valor de π utilizando el método poligonal de Arquímedes (que presentaremos más adelante).

Brahmagupta (nacido en el 598 d.C.) utiliza el valor

$$\pi \approx \sqrt{10} = 3.162277$$

Se cree que este resultado fue calculado con el método de los polígonos arquimedianos.

II.6. Matemática China

El estudio de la antigua matemática china, no se puede llevar a cabo por falta de traducciones, aunque en libros como los de Mikami y Needhan podemos encontrar información de las hazañas en las matemáticas chinas. También en el Chiuch'angSua~shu (nueve capítulos sobre el arte matemático), así como el Chóu~pei que se remontan al periodo de la dinastía Han (206 a.C. ~220 d.C.), se piensa que pueden contener resultados de la antigua matemática china de aproximadamente el año 1100 a.C.

La numeración china siempre ha sido decimal, en el segundo milenio encontramos números con nueve cifras expresados en notación posicional. La matemática de los Nueve capítulos es un conjunto de problemas con reglas generales para su solución, en la medida del círculo π se toma como 3.

Hou Han Shu utilizó el valor $\pi = 3.1622$, cuyo valor está muy cercano de $\pi \approx \sqrt{10}$. En un documento del año 718 d.C. se toma el valor

$$\pi = \frac{92}{29} = 3.1724$$

Liu Hui en el año 264 d.C., aplicó una variante del método arquimedianos de los polígonos, utilizando un polígono de 192 lados y encontró un valor

$$3.141024 < \pi < 3.142704$$

Aumentando el número de lados a 3,072 llegó a

$$\pi = 3.14159$$

TsuChung-Chin y su hijo TsuKeng-Chin acotaron aún más el valor

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

El grado de precisión alcanzado por los chinos demuestra que tenían herramientas de cálculo más buenas que sus contemporáneos occidentales.

II.7. La matemática griega

Se puede leer en Struik (2008).

La moderna matemática nació en esta atmósfera de racionalismo jónico, la matemática no solo se planteaba la cuestión oriental “¿cómo?” sino también la cuestión científica moderna “¿por qué?”. El padre tradicional de la matemática griega es el mercader Tales de Mileto. (p. 53)

Los griegos estudiaron con un propósito como tal: el entender qué lugar ocupa el hombre en el universo de acuerdo con un esquema racional. La matemática ayudó a encontrar orden en lo aparentemente desordenado, a plantear cadenas lógicas de razonamientos y a encontrar principios fundamentales. Hay dudas sobre si los mercaderes de Grecia conocieron la matemática oriental a lo largo de sus rutas de comercio, sin embargo, aunque hubiere sido de esta manera, ellos descubrieron rápidamente que los orientales no se preocuparon demasiado por la racionalización planteándose cuestiones como: ¿por qué el triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales?, ¿por qué el área de un triángulo es igual a la mitad de área de un rectángulo de igual base y altura?

Aunque no hay fuentes primarias que nos indiquen como se dio el desarrollo de la matemática griega en sus inicios, la erudición clásica de los griegos ha hecho posible que podamos restaurar las obras restantes que datan de alrededor del siglo IV a.C.

Los griegos hacen que surja un interés por las matemáticas mismas, es decir, por su belleza intrínseca y no solo por sus aplicaciones. Floreciendo entre los griegos antes que las matemáticas, la literatura y la historia, en el año de 776 a.C. se llevaron a cabo los primeros juegos olímpicos y ya en esa época se conocían los trabajos literarios de Homero y Hesíodo, estos ensayos literarios se transmitieron de generación en generación hasta que finalmente fueron escritos dejándolos como legado al acervo cultural de la humanidad.

En lo referente a π , cuatro hombres relacionados vivieron en la época pre ateniense: Anaxágoras, Antifonte, Hipócrates e Hippias.

Anaxágoras de Clazomene (500-498 a.C.) encontró en Atenas un lugar propicio y con un ambiente científico agradable, explicó que la nieve de las montañas se derretía en el monte provocando el crecimiento del río Nilo, explicó además que el sol es una roca incandescente más grande que el Peloponeso, que la luna no producía luz sino que únicamente recibía luz del sol. Habló también del sol negando que este fuese una deidad, y fue encarcelado en Atenas por impío.

En Lara (1991) puede leerse

El historiador Plutarco hace referencia a otro problema que Anaxágoras de Clazomene trató de resolver mientras estaba en prisión y que es el siguiente:

Usando solo regla y compás constrúyase un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado.

Aunque Anaxágoras fue un filósofo de la naturaleza más que un matemático, parece haber sido el primero en plantear el problema anterior y se le conoce como el de la cuadratura del círculo. (p.48)

Este famoso problema fascinó a la humanidad hasta 1882 cuando finalmente demostraron que no había solución con la geometría griega. Al respecto en Perero (1994, p.136), se menciona que estos problemas pueden ser resueltos por aproximaciones o utilizando otros instrumentos (no solo regla y compás), pero los intelectuales griegos se impusieron “restricciones arbitrarias para que la geometría se conservara simple, armoniosa y estéticamente atractiva”.

Antifonte (finales del siglo V a.C.), asociado con el problema de la cuadratura del círculo, enunció el “principio de exhaustión”, que tendría gran influencia entre los matemáticos para encontrar el valor de π hasta la aparición del cálculo a finales del siglo XVII.

El Principio de exhaustión dice: si un cuadrado es inscrito en un círculo, y a continuación se inscriben más polígonos regulares duplicando el número de lados cada vez hasta que el círculo es cubierto por completo, entonces finalmente llegará a un polígono cuyos lados son tan cortos que coincidirá con el círculo. Este principio hizo pensar a Antifonte que el círculo se podía cuadrar usando solo regla y compás, pues un polígono se puede cuadrar y en consecuencia se puede cuadrar el polígono final que coincide con el círculo.

Antifonte tenía una idea casi correcta del principio, pero Euclides hace una cuidadosa reformulación del principio de exhaustión: afirma que la diferencia entre el área del polígono y la del círculo puede hacerse menor que cualquier valor prefijado, sin importar cuán pequeño sea este (excepto para el valor cero).

Hipócrates Quíos de (aprox. 430 a.C.), es el matemático que más se aproximó a la solución de la cuadratura del círculo, en su intento obtuvo resultados de gran belleza, se dice que Hipócrates perdió su dinero por un fraude en Bizancio, mientras otras fuentes afirman que fue asaltado por piratas y después se dedicó al estudio de la geometría.

Hipócrates escribió un libro de geometría que desafortunadamente se perdió. Simplicio refiere en sus comentarios, que copió literalmente del libro historia de las matemáticas de Eudemo (también perdido), un poco del trabajo de Hipócrates, en el que dice el autor demostró rigurosamente el teorema: “dos círculos se encuentran en la misma razón que los cuadrados sobre sus diámetros”.

Con base en este teorema Hipócrates pudo encontrar la cuadratura de una lúnula, fue el primero en calcular de forma precisa el área de una figura limitada por curvas. Hipócrates cuadró una figura llamada lúnula (véase la figura 2.3) limitada por el arco semicircular ABC circunscrito alrededor del triángulo isósceles recto ABC , y el arco circular ADC , que es tal que el segmento circular $ADCE$ es semejante al segmento circular AB .

Hipócrates descubrió la siguiente proposición:

Proposición. El área de esta lúnula $ABCD$ es exactamente igual a la del triángulo ABC (véase la figura 2.3.).

Demostración. Por construcción tenemos que el radio de ADC es a AC como EA es a AB , dado que los segmentos AB , AC y BC son semejantes, sus áreas están en la misma proporción que el cuadrado sobre sus bases. Por el teorema de Pitágoras sabemos que $AB^2 + BC^2 = AC^2$, además por ser un triángulo isósceles $AB = BC$, por lo que $2AB^2 = AC^2$. Se dan las siguientes relaciones de áreas

$$t = u + w \quad (1)$$

Para el área de la lúnula

$$l = u + v + w \quad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2)

$$l = v + t$$

Es decir que el área de la lúnula $ABCD$, es igual al área del triángulo ABC .

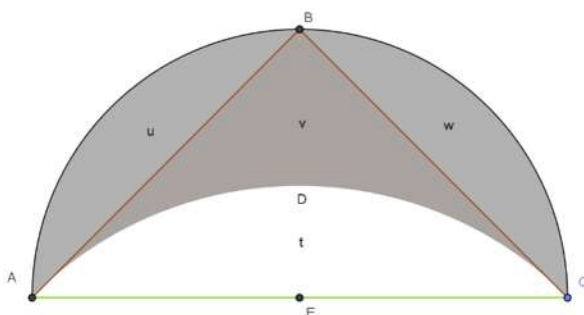


Figura 2.3. La Lúnula de Hipócrates, las áreas son representadas con letras minúsculas.

Es muy posible que esta no sea la demostración que hizo Hipócrates, cuyo trabajo original se ha perdido, la demostración que da Eudoxo y después reproducida por Euclides es una reducción al absurdo, es posible que Hipócrates sea el primero en haber utilizado este método de demostración. Las lúnulas de Hipócrates pueden generalizarse a muchas figuras curvilíneas,

se tenían unas grandes expectativas de que el círculo se podía cuadrar, sin embargo, se ha descubierto que no todas las lúnulas se pueden cuadrar.

II.8. Hipias de Elis (425 a.C.)

Se ha mencionado que Hipias era sofista y un gran calculista, le enorgullecía ser el primer sofista rico, escribió sobre matemáticas y otros temas, se le debe el haber introducido otra figura diferente a la recta y el círculo, construyó la curva que lleva por nombre trisectriz o cuadratriz de Hipias.

La cuadratriz de Hipias se define de la siguiente forma. El segmento de recta AB se mueve inicialmente desde su posición inicial hacia abajo hasta coincidir con el segmento CD . Al mismo tiempo, el segmento OA rota uniformemente en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del punto O desde la posición OA hasta coincidir con OD , en el mismo tiempo que AB tarda en llegar a CD . La curva trazada por la intersección de los dos segmentos a medida que se mueven, es la cuadratriz de Hipias.

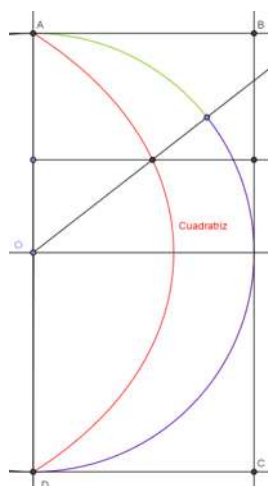


Figura 2.4. Cuadratriz de Hipias.

No se sabe si Hipias se dio cuenta de que su curva sirve para cuadrar el círculo, la demostración fue dada más adelante por Papo (finales del siglo III d.C.) quién la obtuvo de Dinostrato.

La formulación moderna de la ecuación de la Cuadratriz de Hipias, nos muestra que solo alcanzó a ver una pequeña parte de esta curva, la cual viene representada en notación moderna como

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \text{ en coordenadas polares}$$

$$y = x \cot\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \text{ en coordenadas cartesianas}$$

Presentamos la gráfica de la cuadratriz $y = x \cot\left(\frac{\pi x}{2(1)}\right)$ en $(-10,10)$, para observar que la parte conocida por Hipias es la que está en el intervalo $(-a, a)$ y para este caso particular $a=1$.

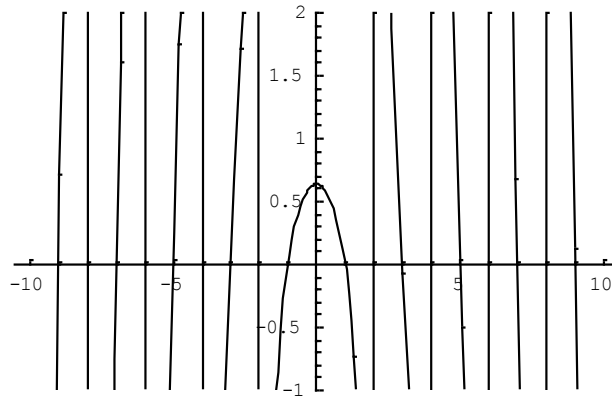


Figura 2.5. La cuadratriz de Hipias utilizando geometría analítica, Hipias solo conocía una pequeña parte de la cuadratriz.

En el siglo XVII con el descubrimiento de la geometría analítica por Descartes, aparecieron tres cuadratrices.

De Tschirnhausen

$$y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2r}\right)$$

La de Ozam

$$y = 2r \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2r}\right)$$

Y la coccleioide, que tiene como ecuación en coordenadas polares

$$\rho = \frac{(r \operatorname{sen}(\phi))}{\phi}$$

II.9. Euclides (300 a.C.)

Ptolomeo fundó el museo y la biblioteca de Alejandría consiguiendo para ella las más selectas obras que fueron recopiladas por compradores que mandó a recorrer el mediterráneo en busca de libros de valor, obligó a viajeros que ingresaban a Egipto a dejar ahí sus libros originales y un escriba copiaba la obra dejando que los viajeros se llevaran solo copias. Pidió prestados los originales de los dramaturgos griegos pertenecientes a Atenas, mando hacer

copias de todos los libros prestados y entregó las copias a los atenienses dejando los originales para la biblioteca de Alejandría.

La biblioteca de Alejandría llegó a tener alrededor de 750 mil volúmenes, estos estaban en rollos cuya longitud estaba entre los 4.5 a los 6 metros de largo, lo que podía estimarse como 35 a 45 cuartillas en texto escrito en español.

El museo era muy importante también, en él se reunieron los eruditos más importantes para que enseñaran, era considerado una universidad que se convirtió con mucha rapidez en la capital mundial científica. Muchos de los sabios de la antigüedad fueron educados en el museo.

Eratóstenes (273-192 a.C.), bibliotecario de la biblioteca de Alejandría, calculó el valor de la circunferencia de la tierra con un error de menos del cinco por ciento, utilizando un método correcto, sin embargo, tenía un error en las mediciones. Entre aquellos sabios que Ptolomeo llevó a Alejandría se encontraba Euclides que hoy se conoce como “Euclides de Alejandría”. Lo que se sabe de Euclides se debe a lo que escribió el historiador de la matemática Proclo (410-485), este historiador de la matemática griega dice que Euclides nació a fines del siglo IV a.C. aunque no se sabe el lugar de su nacimiento, que estudió en la academia que era el centro de estudios fundado por Platón en el 380 a.C., y que enseñó en Alejandría durante el reinado de Ptolomeo I.

Euclides escribió los llamados Elementos de Euclides que son doce libros que han sobrevivido hasta nuestros días, algunos de ellos conocidos por los estudiantes pues hoy día son material importante en la formación de alumnos de educación secundaria y media superior.

Euclides escribió la primera gran construcción en la arquitectura matemática, empieza con cinco postulados que según Euclides son tan sencillos que cualquier persona puede entenderlos, a partir de estos postulados o piedras basales, Euclides coloca cuidadosamente y no dejando lugar a ninguna duda, piedra sobre piedra para construir su catedral. Por esta obra en la que se presenta una construcción basada en una lógica que no deja lugar para los hoyos, se conoce a Euclides como el padre del rigor matemático.

Los elementos de Geometría de Euclides son considerados una de las obras más importantes legadas por la antigüedad. En Lara (1991) se puede leer:

En un pasaje del resumen de Proclo que dice así: No mucho más joven que estos (se refiere a Colofón y Filipo de Medma) es Euclides, quien colectó los elementos reuniendo muchos teoremas de Eudoxo, perfeccionando muchos otros de Teetetes y dando además, demostraciones irrefutables de las cosas que fueron probadas con escaso rigor por sus antecesores. Este hombre vivió en la época del primer Tolomeo. Arquímedes quien apareció inmediatamente después de Tolomeo, hace mención a Euclides; además ambos dicen que Ptolomeo le pregunto una vez si había un camino más corto en geometría que el de los elementos, a lo que respondió que no había caminos reales hacia la geometría. (p.89)

Los cinco postulados que Euclides tomó como obvios eran los siguientes:

- I. Dados dos puntos se puede trazar una recta que los une.
- II. Cualquier segmento puede ser prolongado en forma continua en una recta ilimitada en la misma dirección.

- III. Se puede trazar una circunferencia de centro en cualquier punto y radio cualquiera.
- IV. Todos los ángulos rectos son iguales.
- V. Dada una línea y un punto fuera de la línea, no puede trazarse más que una línea paralela a la línea original que pase por este punto.

Los griegos pensaban en la demostración como la reducción de los argumentos hasta sus formas más simples, de manera que la proposición fuera construida a partir de sus piedras basales hasta que fuese tan evidente como los postulados más simples. Es así como la demostración de Dinostrato no fue la solución al problema de la cuadratura del círculo, pues la construcción de esta curva solo se podía lograr con una plantilla o a partir de aparatos físicos, y si esta construcción no utilizaba regla y compás no se podía reducir a los cinco axiomas de los elementos, es decir que para los griegos no se podía demostrar.

En Beckmann (1974, p. 55) se aclara que esto no quiere decir que la construcción de Hipias sea incorrecta. Lo que Lindemann demostró en 1882 no es que la cuadratura o rectificación del círculo sea imposible, lo que realmente demostró es que no puede reducirse a los cinco axiomas euclidianos.

II.10. La dominación Romana

Siracusa cayó ante Roma en el 212, Cártago en 146, Grecia en 146, Mesopotamia en 64 y Egipto en 30 a.C. todo el oriente que había sido conquistado fue tratado como una colonia de Roma gobernada por administradores romanos, en algunos de estos sectores dominados la economía no se vio afectada, sin embargo se pagaban impuestos y tributos, se comenzaron a comerciar esclavos y esto no privilegió el trabajo científico, la clase que era dueña de esclavos no se preocupaba por conocimientos técnicos, en parte porque no querían que los esclavos tuvieran a su alcance conocimiento y así fuese más fácil dominarlos. Muchos acomodados de clase alta se entremetían en las artes y la ciencia, pero siendo su estudio muy superficial no lograron sino envolverse en la mediocridad de conocimientos que no fueron productivos.

La ciencia helenística continuó desarrollándose hacia los pueblos de Irán y la India, mezclándose y siendo influenciada por la ciencia y los conocimientos que existían en estos países. Algunos conocimientos de astronomía babilónica y matemática griega, llegaron a España Italia y Galia. Alejandría siguió siendo el centro de la matemática antigua. El álgebra y el cómputo fueron dejados para los orientales, la aritmética de cómputo y la matemática de tipo Egipcio-Babilónico fueron cultivadas junto con demostraciones geométricas abstractas. El único vínculo común entre las diversas escuelas fue que comúnmente usaban el griego.

Uno de los documentos más importantes del II periodo Alejandrino, fue la sintaxis matemática de Ptolomeo, que es mejor conocida como Almagesto (hacia el 150 d.C.). Fue una obra Astronómica de suma importancia, aunque en ella se presentan ideas que pueden ser atribuidas a Hiparco o Kidenas o a algunos otros astrónomos babilónicos. En Struik (2008, p.81) se menciona que en el Almagesto se encuentra un valor de π

$$\pi = 377 / 120 = 3.14166$$

Además en él se encuentran la fórmula para el seno y el coseno de la suma y diferencia de dos ángulos, junto con un inicio de lo que es la geometría esférica.

Mucho después de que Herón de Alejandría (siglo I d.C.) diseñara relojes de agua, turbinas, bombas de agua de dos cilindros y escribiera tratados acerca de ellos, los romanos describían el funcionamiento de los acueductos con la quinaria, que es una medida del área transversal por la que pasa un flujo, dejando de lado que el volumen que sale por una tubería también depende de la velocidad con que sale el fluido.

La Historia natural de Gayo Plinio segundo (23-73 d.C.), es una recopilación considerada como el mejor trabajo que tuvo lugar en roma. En cuanto a las contribuciones en matemáticas, tenemos a Posidonio (135-51 a.C.) quien en realidad se llamaba Poseidonios, era de origen sirio, estudió en Atenas y fue enviado a Roma como delegado en el 86 a.C., fue amigo y maestro de Cicerón y Pompeyo, hizo un cálculo de la circunferencia de la tierra con un método parecido al utilizado por Eratóstenes, debió haber utilizado un valor para π muy exacto dado que este valor fue tomado por el gran astrónomo alejandrino Ptolomeo dos siglos después y utilizado por Cristóbal Colon en su viaje al nuevo mundo.

El arquitecto e ingeniero militar romano Polio Vitruvio empleó el valor de $\pi = 3\frac{1}{8}$ en De architectura (alrededor del 15 a.C.), el mismo valor que usaron los babilonios dos mil años antes, y cuya deducción se sugiere fue hecha con instrumentos de medición físicos, que por su naturaleza tienen un error en la medición.

Durante la segunda guerra púnica, los romanos enviaron un grupo de expedición a Sicilia que comandaba Marco Claudio Marcelo en el 214 a.C. el Rey de Siracusa renovó su alianza con Cártago. Por su parte los romanos escogían enemigos débiles para vencer en batallas fáciles, pero esta vez la batalla contra Siracusa no fue tan fácil, pues en ese pueblo se conocían los secretos de la palanca, la polea compuesta, y utilizaban en su artillería defensa marítima. Plutarco reporta que “los muros disparaban flechas de todas partes”, que “incontables males les cayeron de un lugar desconocido”, Marcelo vociferó contra este enemigo “que manipula nuestras naves como copas para levantar agua del mar... y supera a los legendarios monstruos de cien manos, lanzando tantos misiles contra nosotros al mismo tiempo”.

Marcelo tuvo que conformarse con montar un sitio que duró alrededor de tres años, por fin la ciudad de Siracusa cayó en manos de los romanos quienes saquearon y destruyeron según su costumbre de conquistadores. Dentro de la ciudad había un sabio de 75 años, al respecto en Beckmann (1974) se lee:

Plutarco nos cuenta que “ocurrió que estaba solo, examinando atentamente un diagrama y habiendo fijado su atención y sus ojos en el objeto de su estudio, no percibió ni la entrada de los romanos ni la toma de la ciudad. Repentinamente un soldado lo llamó y le ordenó que lo siguiera para ver a Marcelo, pero [el sabio] no lo seguiría hasta terminar el problema y obtener la demostración” “¡No toques mis círculos!”, le dijo el pensador al matón. En ese momento el matón se enfureció, extrajo su espada y mató al sabio.

El nombre del matón se ha perdido

El nombre del sabio era Arquímedes. (p.62)

II.11. Arquímedes de Siracusa

Arquímedes fue matemático, físico e ingeniero, siendo uno de los más grandes sabios de la antigüedad. Se sabe poco acerca de la vida de este sabio. Nació aproximadamente en el 287 a.C. en Siracusa, era hijo del astrónomo Fidas, parece ser que la mayor parte de su vida estuvo en su ciudad natal, estudió en la universidad de Alejandría (el museo) bajo la tutela de los sucesores inmediatos de Euclides, puede ser que del mismo Euclides. Era pariente de Hierón II rey de Siracusa para el que diseñó las máquinas empleadas en la guerra contra los agresores romanos, la corona de Hierón estuvo relacionada con el descubrimiento de la ley de flotamiento que lleva el nombre de Arquímedes. Se narra que Hierón sospechaba que en la corona real se habían incluido metales de baja ley, por lo que le pidió a Arquímedes investigar de que materiales estaba hecha la corona real pero sin dañar la corona. Se dice que Arquímedes estaba pensando en el problema mientras se daba un baño y de pronto descubrió la respuesta al observar que cuando sumergía su cuerpo el nivel del agua subía. Según la leyenda corrió desnudo por las calles de Siracusa gritando ¡eureka! mientras corría a contarle al rey.

En su libro sobre los cuerpos flotantes, incluye la solución a problemas difíciles de flotación y estabilidad, trabajó también en determinar los centros de gravedad en líneas y planos y avanzó más allá del principio de la palanca a problemas difíciles tales como determinar el centro de gravedad de la parábola. Arquímedes fue el primero en relacionar las matemáticas y la física de forma sistemática, por ello es considerado el padre de la física como ciencia. Además fue el primer ingeniero científico, que es aquel que se dedica a buscar leyes generales y aplicarlas a problemas particulares de ingeniería. No se sabe cuántas obras en total escribió Arquímedes, tampoco se ha determinado cuántas de ellas se han perdido.

Entre sus obras se encuentra “El Método”, encontrado en el año 1906 al revisar un escrito descubierto en 1899 entre los manuscritos del patriarcado de Jerusalén. Este manuscrito contiene 180 hojas en dos escrituras diferentes, una del siglo XIII sobrepuesta en la otra del siglo X, por fortuna este manuscrito no fue raspado sino lavado y se pueden observar con una claridad regular los escritos de Arquímedes, en particular el libro llamado “El Método” del método relativo a problemas mecánicos.

Entre los escritos y tratados de Arquímedes se encuentran, entre otros trabajos:

1. De la esfera y el cilindro I y II.
2. De la medida del círculo.
3. De los conoides y esferoides.
4. El arenario.
5. Del equilibrio de los planos I y II.
6. Cuadratura de la parábola.
7. De los cuerpos flotantes.
8. De las espirales.
9. El libro de lemas

En la medida del círculo, lo que Arquímedes hizo fue encontrar dos cotas finas para el número π ; aquí reproducimos el trabajo de Arquímedes para acotar π . Según Lara (1991, p.148) Arquímedes demuestra en su obra “De la medida del círculo” que

$$3\frac{1}{7} < \pi < 3\frac{10}{71}$$

La versión completa que comenta Lara se presenta a continuación.

Proposición 1. El área de cualquier círculo es igual a la de un triángulo rectángulo en el que uno de los catetos es igual al radio y el otro es igual a la circunferencia del círculo.

Sean ABCD el círculo dado y K el triángulo descrito. Entonces, si el círculo no es igual a K, su área debe ser mayor o menor que la de K (figura 2.6).

- I. Supóngase que el área del círculo es mayor que la de K.

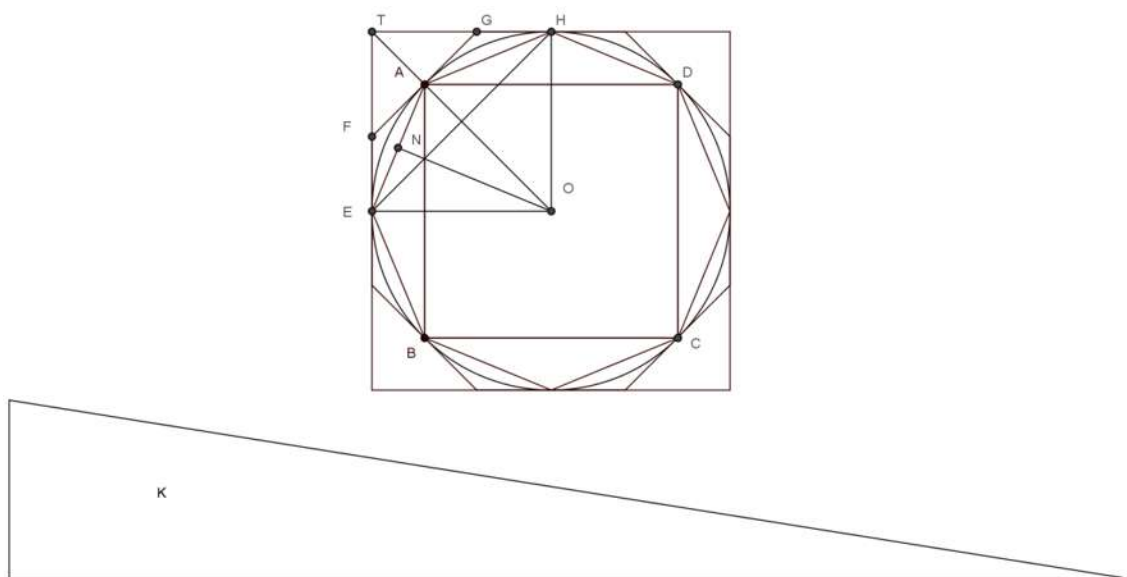


Figura 2.6. Ilustración usada por Arquímedes en “De la medida del círculo”.

Inscríbase un cuadrado ABCD, biséquese los arcos AB, BC, CD, y DA, luego biséquese sucesivamente hasta que los lados del polígono inscrito, cuyos puntos angulares son los puntos de división, subtiendan segmentos cuya suma sea menor que el exceso del área del círculo con respecto a K. Por tanto, el área del polígono es mayor que la de K. Sea AE cualquier lado del polígono y sea ON la perpendicular a AE trazada desde el centro O.

Entonces ON es menor que el radio del círculo y, por consiguiente, menor que uno de los catetos del triángulo rectángulo K. Además el perímetro del polígono es menor que la circunferencia del círculo, es decir, menor que el otro cateto de K.

Por lo tanto, el área del polígono es menor que la de K; lo cual es inconsistente con la hipótesis. Así el área del círculo no es mayor que la de K.

- II. Sea el área del círculo menor que la de K.

Circunscribábase un cuadrado y suponga que dos lados adyacentes, que tocan el círculo en E y en H, se cortan en T. Biseque los arcos comprendidos entre los puntos de contacto adyacentes y trace las tangentes en los puntos de bisección.

Sea A el punto medio del arco EH y FAG la tangente en A. Entonces el ángulo TAG es recto. Por lo tanto $TG > GA > GH$. Se infiere que el triángulo FTG es mayor que la mitad del área TEAH.

En forma análoga, si el arco AH se biseca y se traza la tangente en el punto de bisección, entonces se eliminará del área de GAH más de la mitad de la misma. Así al continuar con este proceso, se obtendrá un polígono circunscrito, tal que los espacios interceptados entre él y el círculo, son en conjunto menores que el exceso de área de K con respecto al área del círculo.

Por lo que el área del polígono será menor que la de K. Ahora, como la perpendicular trazada desde O a cualquier lado del polígono es igual al radio del círculo, mientras que el perímetro del polígono es mayor que la circunferencia del círculo, se infiere que el área del polígono es mayor que la del triángulo K; lo cual es imposible. Por lo tanto el área del círculo no es mayor que la de K.

Como el área del círculo no es mayor ni menor que la de K, entonces es igual a ella.

Proposición 2. El área de un círculo es al cuadrado sobre su diámetro como 11 es a 14. [El texto de esta proposición no es satisfactorio, dice Heath, y Arquímedes no pudo haberla colocado antes que la proposición 3, ya que el resultado depende de esa proposición]

Proposición 3. La razón de la circunferencia de cualquier círculo con respecto a su diámetro es menor que $3\frac{1}{7}$ pero es mayor que $3\frac{10}{71}$.

Nota de Heath. [En vista de las interesantes preguntas que surgen a partir del contenido aritmético de esta proposición de Arquímedes, es necesario, al reproducirla, distinguir con todo cuidado los pasos que aparecen en el texto tal y como lo tenemos de los pasos intermedios (en su mayoría suministrados por Eustocio), lo que resulta conveniente hacer con el propósito de seguir la prueba de manera más accesible. En conformidad con lo anterior, todos los pasos que en realidad no aparecen en el texto se han puesto dentro de paréntesis rectangulares, con el objeto de que se pueda apreciar que tanto omitió Arquímedes en sus cálculos reales y de los cuales solo da resultados. Se podrá observar que da dos aproximaciones fraccionales a $\sqrt{3}$ (siendo una menor y una mayor que el valor real) sin ninguna explicación de cómo llegó a ellas; y de igual manera, sin justificar, da aproximaciones a las raíces cuadradas de varios números grandes que no son cuadrados completos....]

I. Sean AB el diámetro de cualquier círculo, O su centro, AC la tangente en A; y sea el ángulo AOC igual a un tercio de un ángulo recto.

$$\text{Entonces} \quad OA:AC [= \sqrt{3}:1] > 265:153 \quad (1)$$

$$\text{y} \quad OC:CA [= 2:1] = 306:153 \quad (2)$$

Primero trace OD de manera que biseque al ángulo AOC y que corte a AC en D.

Ahora $CO:OA=CD:DA$, (Eucl.VI,3)

De manera que $[CO + OA:OA=CA:DA$; o bien]

$CO+OA:CA=OA:AD$ por tanto por (1) y (2)

$$OA:AD > 571:153$$

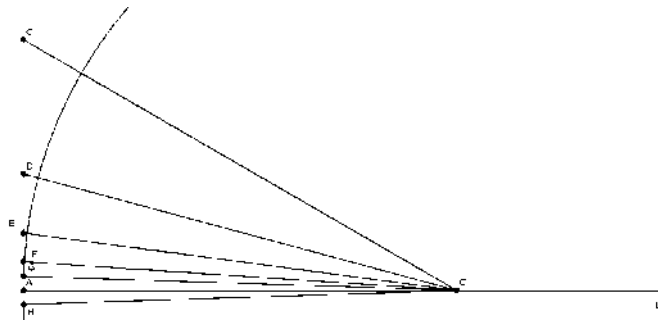


Figura 2.7.

En consecuencia,

$$OD^2 : AD^2 = (OA^2 + AD^2) : AD^2 > (571^2 + 153^2) : 153^2 > 349450 : 23409$$

$$\text{De manera que } OD : DA > 59\frac{1}{8} : 153 \quad (4)$$

Segundo. Suponga que OE biseca al ángulo AOD, y que corta a AD en E. [entonces DO:OA=DE:EA, por lo que DO+OA:DA=OA:AE.]

Por consiguiente

$$OA:AE [> (59\frac{1}{8} + 571) : 153 \text{ por (3) y (4)}]$$

$$> 1162\frac{1}{8} : 153$$

$$[\text{Se infiere que } OE^2 : EA^2 > \left\{ \left(1162\frac{1}{8} \right)^2 + 153^2 \right\} : 153^2 > \left(1373943\frac{33}{64} + 23409 \right) : 23409]$$

$$> 1373943\frac{33}{64} : 23409.]$$

$$\text{Así } OE : EA > 1172\frac{1}{8} : 153 \quad (6)$$

Tercero. Supóngase que OF biseca al ángulo AOE y que corta a AE en F. Por lo tanto, obtenemos el resultado [que corresponde a (3) y (5)] siguiente

$$OA : AF \left[> \left(1162\frac{1}{8} + 1172\frac{1}{8} \right) : 153 \right] > 2334\frac{1}{4} : 153 \quad (7)$$

$$[\text{Por consiguiente, } OF^2 : FA^2 > \left\{ \left(2334\frac{1}{4} \right)^2 + 153^2 \right\} : 153^2 > 5472132\frac{1}{6} : 23409]$$

$$\text{Así } OF : FA > 2339\frac{1}{4} : 153 \quad (8)$$

Cuarto. Biséquese con OG al ángulo AOF , que corta a AF en G . Entonces tenemos que

$$OA : AG [> \left(2334\frac{1}{4} + 2339\frac{1}{4} \right) : 153, \text{ por medio de (7) y (8)}] > 4673\frac{1}{2} : 153.$$

El ángulo AOC , que es igual a un tercio de un ángulo recto, se ha bisecado cuatro veces y se infiere que $\angle AOG = \frac{1}{48}$ (ángulo recto).

Hágase que el ángulo AOH que se encuentra al otro lado de OA sea igual al ángulo AOG y supóngase que GA corta a OH en H .

$$\text{Entonces } \angle GOH = \frac{1}{24} \text{ (ángulo recto).}$$

Por tanto, GH es un lado de un polígono regular de 96 lados, circunscrito al círculo dado. Y como $OA : AG > 4673\frac{1}{2} : 153$, mientras que $AB = 20A$, $GH = 2AG$, se infiere que

$$AB : (\text{perímetro del polígono de 96 lados}) \left[> 4673\frac{1}{2} : 153 * 96 \right] > 4673\frac{1}{2} : 14688. \text{ Pero } 14688 / 4673\frac{1}{2} = 3 + 667\frac{1}{2} / 4672\frac{1}{2} [< 3 + 667\frac{1}{2} / 4672\frac{1}{2}] < 3\frac{1}{7}.$$

Por consiguiente la circunferencia del círculo (que es menor que el perímetro del polígono) es a fortiori menor que $3\frac{1}{7}$ veces el diámetro AB .

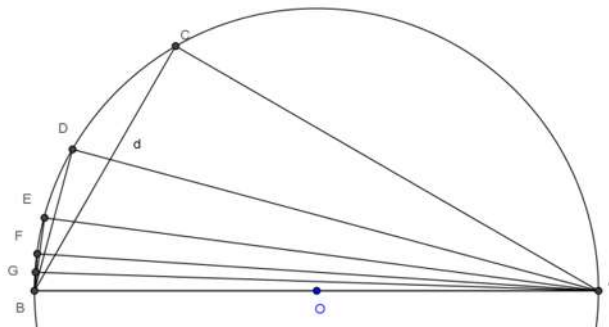


Figura 2.8.

- II. Sea AB el diámetro de un círculo y suponga que AC interseca al círculo en C , haga que el ángulo CAB sea igual a un tercio de un ángulo recto. Trace BC . Entonces

$$AC : CB [= \sqrt{3} : 1] < 1351 : 780$$

Primero. Biséquese con AD al ángulo BAC y córtese a BC en d y al círculo en D . Trace BD . Luego

$$\angle BAD = \angle dAC = \angle dBD$$

Y los ángulos en D y C son ángulos rectos.

Se infiere que los triángulos ADB , $[ACd]$ y BDd son semejantes (ver figura 2.8)

Por consiguiente,

$$AD : DB = BD : Dd$$

$$[= AC : Cd]$$

$$= AB : Bd \quad [\text{Euclides VI, 3}]$$

$$= AB + AC : Bd + Cd$$

O bien $BA + AC : BC = AD : DB$. [Pero $AC : CB < 1351 : 780$, por lo anterior, mientras que $BA : BC = 2 : 1 = 1560 : 780$.]

$$\text{Por lo tanto } AD : DB < 2911 : 780 \quad (1)$$

[En consecuencia $AB^2 : BD^2 < (2911^2 + 780^2) : 780^2 < 9082321 : 608400$.]

$$\text{Así } AB : BD < 3013\frac{3}{4} : 780$$

Segundo. Supóngase que AE biseca al ángulo BAD , y que corta al círculo en E y trácese BE .

Entonces, de la misma manera que antes, probamos que $AE : EB$

$$[= BA + AD : BD < \left(3013\frac{3}{4} + 2911\right) : 780, \text{ por (1) y (2)}]$$

$$< 5924\frac{3}{4} : 780 < 5924\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{13} : 780 \cdot \frac{4}{13} < 1823 : 240$$

$$[\text{por tanto } AB^2 : BE^2 < (1823^2 + 240^2) : 240^2 < 3380929 : 57600]$$

$$\text{Por consiguiente, } AB : BE < 1838\frac{9}{11} : 240 \quad (4)$$

Tercero. Biséquese con AF al ángulo BAE , que interseca al círculo en F .

$$\text{Así } AF : FB [= BA + AE : BE$$

$$< 3661\frac{9}{11} : 240 \text{ por (3) y (4)}$$

$$< 3661\frac{9}{11} \cdot \frac{11}{40} : 240 \cdot \frac{11}{40} < 1007 : 66 \quad (5)]$$

[Se concluye que $AB^2 + BF^2 < (1007^2 + 66^2) : 66^2 < 1018405 : 4356$. Por lo tanto

$$AB : BF < 1009\frac{1}{6} : 66$$

Cuarto. Supóngase que el ángulo BAF es bisecado por AG y que se intersecan en G . Entonces $AG : GB [= BA + AF : BF] < 2016\frac{1}{6} : 66$, por (5) y (6)

$$[y AB^2 + BG^2 < \left(\left(2016\frac{1}{6} \right)^2 + 66^2 \right) < 4069284\frac{1}{36} : 4356]$$

Por consiguiente $AB : BG < 2017\frac{1}{4} : 66$, y de aquí $BG : AB < 66 : 2017\frac{1}{4}$ (7).

[En este caso el ángulo BAG que es el resultado de la cuarta bisección del ángulo BAC , o de un tercio de un ángulo recto. Así, el ángulo subtendido por BG en el centro es igual a $\frac{1}{24}$ (de un ángulo recto).]

Por consiguiente BG es un lado de un polígono regular inscrito de 96 lados. Se infiere de (7)

$$\text{que (perímetro del polígono): } AB \left[> 96 \cdot 96 : 2017\frac{1}{4} \right] > 6336 : 2017\frac{1}{4}. y$$

$$6336 / 2017\frac{1}{4} > 3\frac{10}{71}$$

Entonces la circunferencia del círculo es mucho mayor que $3\frac{10}{71}$ veces el diámetro. Por tanto

la razón de la circunferencia al diámetro es menor que $3\frac{1}{7}$ y mayor que $3\frac{10}{71}$.

Arquímedes también demostró que la curva descubierta por Conón de Alejandría servía para cuadrar el círculo (figura 2.9, véase capítulo 3.), al igual que la cuadratriz de Hipias, no resuelve el problema de la cuadratura del círculo por las mismas razones que la cuadratriz. Esta curva la conocemos como la espiral de Arquímedes y se define como el lugar geométrico de un punto que se mueve uniformemente a lo largo de un rayo a medida que este gira alrededor de su extremo en el origen.

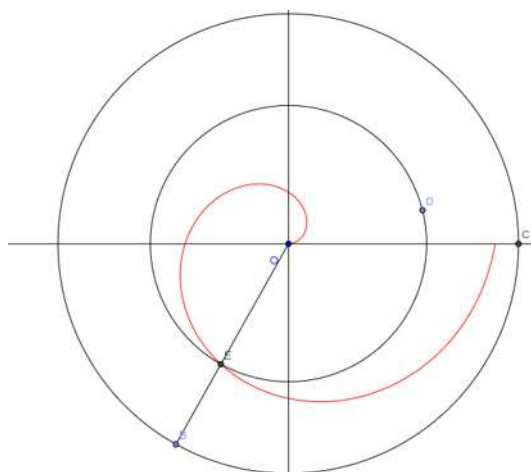


Figura 2.9. Curva descubierta por Conón de Alejandría actualmente llamada espiral de Arquímedes.

Es un poco del trabajo que el genio más grande de la antigüedad nos dejó como legado para la humanidad, en lo referente a la historia de π , aunque hubo numerosos intentos por lograr aproximaciones más precisas de π , su método poligonal no fue superado sino hasta que pasaron 19 siglos.

II.12. La caída de Roma

El imperio Romano de Oriente siempre fue más avanzado desde el punto de vista cultural y económico. En realidad el Occidente funcionó con un sistema en el que había poca astronomía, no había un sistema de irrigación, poca aritmética basada en la práctica y la geometría basada en el comercio; esta civilización continuó con muy pocos cambios durante siglos. En los imperios germánicos, excepto tal vez en Bretaña, las instituciones económicas permanecieron en esencia como habían sido en el imperio Romano decadente. La base de la economía de la zona se basaba en la agricultura, al principio con esclavos que al paso del tiempo fueron remplazados por campesinos libres y arrendatarios. La autoridad central del mundo greco-romano después de la caída del imperio occidental en 476, fue entre el emperador de Constantinopla y los papas de Roma. Es difícil dar un periodo en el cual desapareció la economía del antiguo imperio romano para dejar que el nuevo orden feudal se estableciera, H. Pirenne plantea la hipótesis de que la expansión del Islam marcó el fin del imperio Romano occidental.

Las primeras ciudades comercialmente desarrolladas surgieron en Italia, donde en los siglos XII y XIII, Génova, Pisa, Venecia, Milán y Florencia, establecieron un comercio importante con el mundo árabe y el norte. Los mercaderes Italianos visitaron el oriente y estudiaron su civilización, tratando de estudiar la ciencia, y el arte de las civilizaciones antiguas para reproducirlas y assimilarlas en su sociedad mercantil. En el siglo XII y XIII se desarrolla la banca e inicia el desarrollo de una forma del capitalismo.

El primer mercader cuyos estudios matemáticos mostraron madurez fue Leonardo de Pisa (1180-1250), uno de los matemáticos más importantes de su época, también conocido por su apodo Fibonacci. Era un mercader Italiano que trabajaba dentro de las rutas de infiltración árabe. Publicó un libro en el que utilizaba algebra y números indo arábigos. Hoy lo recordamos por su serie llamada "serie de Fibonacci", que según Struik (2008, p.116) resultó del problema

¿Cuántos pares de conejos pueden ser producidos por un solo par cada año, si (a) cada par engendra un nuevo par cada mes, el cual desde el segundo mes se vuelve productivo, (b) si no ocurren muertes?

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89

Cada número de la serie de Fibonacci a partir del segundo término, es la suma de los dos términos anteriores, esta serie aparece en los lugares más inesperados.

Fibonacci también hizo una aproximación de π a partir de un polígono de 96 lados, con la ventaja de que en su época ya se contaba con un sistema numérico decimal, pero teóricamente el trabajo de Arquímedes es mejor. Fibonacci logró mayor precisión en el cálculo de las raíces y obtuvo una mejor aproximación, correcta hasta el tercer decimal.

$$\pi = \frac{864}{725} = 3.141818$$

El Cardenal Nicolás de Cusa (1401-1464), de nacionalidad Alemana trabajó en Roma desde 1448 hasta su muerte encontró una aproximación bastante buena para la longitud de un arco circular. Según Beckmann (1974, p.81) esta aproximación se reduce en términos actuales a

$$\text{arc } \theta \approx \frac{3 \sin \theta}{2 \cos \theta}$$

Excelente para

$$\theta^2 \ll 12$$

El error es de unos dos minutos de arco para $\theta = 36^\circ$

En el tratado de Huygens (1629-1693) "De circulimagnitudine inventa", demuestra un teorema en el que se sugiere un método para calcular la longitud de arcos circulares de manera aproximada. De la figura 2.10 observamos con este método que el arco $AB \approx AB'$.

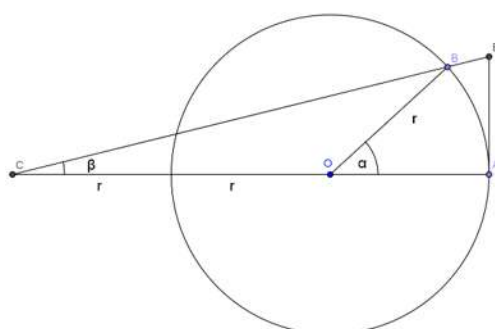


Figura 2.10. Rectificación aproximada de un arco circular derivada de un teorema de Huygens, que equivale a la aproximación de Nicolás de Cusa.

Snell realizó la siguiente construcción que es equivalente a la hecha por el cardenal Nicolás de Cusa

$$AB' = 3r \tan \beta$$

Y del triángulo OCB tenemos,

Sabemos que $\beta + \angle COB + \angle OBC = 180$, además $\alpha + \angle COB = 180$, de donde

$$\angle OBC = 180 - (\beta + \angle COB) = 180 - (\beta + 180 - \alpha) = \alpha - \beta$$

Aplicamos ley de senos al triángulo OCB

$$\frac{r}{\sen \beta} = \frac{2r}{\sen(\alpha - \beta)}$$

$$2\sen \beta = \sen(\alpha - \beta)$$

Aplicamos la fórmula del seno de la diferencia de dos ángulos

$$2\sen \beta = \sen(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sen(\beta)$$

$$\text{Multiplicamos por } \frac{1}{\cos \beta}$$

$$2 \tan \beta = \sen(\alpha) - \cos(\alpha) \tan(\beta)$$

Factorizamos $\tan \beta$

$$\tan \beta = \frac{\sen \alpha}{2 + \cos \alpha}$$

Sustituyendo en $AB' = 3r \tan \beta$

$$AB' = 3r \tan \beta = \frac{3r \cdot \sen \alpha}{2 + \cos \alpha}$$

Los resultados del cardenal Nicolás y Huygens son equivalentes, sin embargo Huygens tenía acceso a matemáticas más sofisticadas.

II.13. Europa

Según Beckmann (1974, p.84), el final de la edad media fue anunciado por tres hechos importantes que ocurrieron a finales del siglo XV. El primero fue que los turcos capturaron Constantinopla en 1453, rompiendo el cerco de la ciudad con armas de pólvora, lo que llevó a la desaparición de los feudos y marcando el inicio de una nueva tiranía encabezada por los reyes y emperadores divinos.

El segundo suceso fue el descubrimiento a principios del siglo XV del resto del mundo. Cristóbal Colón descubrió América, Vasco de Gama pasó por el cabo de buena esperanza (1499) en su viaje a la India, y la flotilla de Fernando de Magallanes circunnavegó el globo (1519- 1522).

En tercer lugar y de mucha importancia durante el siglo XV se produjo un gran avance en la difusión de la información con la invención de la imprenta de tipos móviles y reutilizables. Estos fueron empleados en China desde el siglo IX, apareció una imprenta que se atribuye a Johannes de Gutenberg de Maguncia, quien imprimió una edición de la biblia con este método hacia 1456.

Aun no se daba un paso más allá de los teoremas y enseñanzas de los antiguos griegos y los árabes, por ello fue una sorpresa cuando los italianos a inicios del siglo XVI demostraron una nueva teoría matemática que los árabes y los griegos omitieron. Esta teoría matemática llevó a la solución de la ecuación cúbica descubierta por Scipio del Ferro y sus alumnos en la Universidad de Bolonia.

En el siglo XV los profesores Italianos estaban bien versados sobre las operaciones aritméticas incluyendo los irracionales; por su parte los pintores Italianos sabían de geometría. Los maestros calculistas encontraron su intérprete en el monje franciscano Luca Pacioli, cuya Summa de Arithmetica se imprimió en 1494 y contenía todo lo que se sabía de aritmética, álgebra y trigonometría en su época. Pacioli terminó esta obra con el comentario de que la solución de las ecuaciones $x^3 + mx = n$, $x^3 + n = mx$ era imposible.

Scipio del Ferro quien murió en 1526, se dedicó a estudiar estas ecuaciones. E. Bortolotti afirma que el profesor Ferro logró resolver todos los casos de estas ecuaciones aunque jamás publicó las soluciones y solamente en algunas pláticas con amigos relató un poco de ellas. La noticia de este descubrimiento se conoció y después de que el profesor Ferro muriera, un maestro calculista Veneciano de apodo Tartaglia redescubrió sus métodos (1535) haciendo pública la solución al problema con una demostración pública, pero guardando sus métodos celosamente. Reveló sus métodos al doctor milanés Gerolamo Cardano, este tuvo que jurar que jamás los revelaría y guardaría el secreto. Cardano publicó en 1545 un majestuoso y corto libro que se titulaba “Ars Magna”, Tartaglia descubrió con disgusto que en este libro se publicaba el método aunque con el debido crédito a su descubridor.

Regresando a la historia de π nos encontramos con el abogado francés adscrito a la corte de Enrique IV, Francois Viète (1540-1603), sus principales logros fueron en el progreso de la teoría de ecuaciones, fue uno de los primeros en representar números con letras. Se ganó los favores del rey Enrique cuando descifró un código Español de unos 500 símbolos, lo que permitió a los franceses leer todos los mensajes del enemigo.

Viète trabajó sobre π comenzando con un cuadrado en lugar de un hexágono, fue el primero en obtener una función analítica que tras una sucesión infinita de operaciones algebraicas daba como resultado π .

Su procedimiento se basa en relacionar el área de un polígono de n lados, con el área de un polígono de $2n$ lados (figura 2.11).

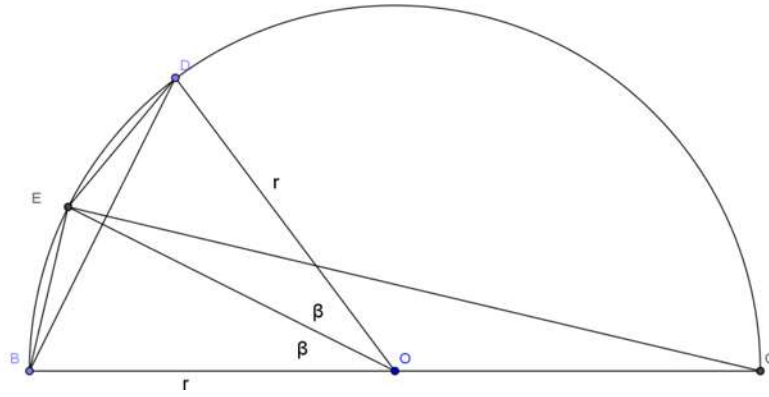


Figura 2.11. Método de Viète para calcular π .

El área del polígono de n lados es

$$\begin{aligned}
 A(n) &= n \text{ veces el área de triángulo } OBD \\
 &= \frac{1}{2} nr^2 \sin(2\beta) \\
 &= \frac{1}{2} nr^2 2 \sin(\beta) \cos(\beta) = nr^2 \sin(\beta) \cos(\beta)
 \end{aligned}$$

Asimismo el área del polígono con $2n$ lados es

$$A(2n) = 2n \text{ veces el área de } OBE$$

$$A(2n) = 2n \frac{r^2}{2} \sin(\beta) = nr^2 \sin(\beta)$$

Así

$$\frac{A(n)}{A(2n)} = \frac{nr^2 \sin(\beta) \cos(\beta)}{nr^2 \sin(\beta)} = \cos(\beta)$$

$$\frac{A(n)}{A(2^2 n)} = \frac{A(n)}{A(2n)} \cdot \frac{A(2n)}{A(2^2 n)} = \cos(\beta) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$\vdots$

$$\frac{A(n)}{A(2^k n)} = \frac{A(n)}{A(2n)} \cdot \frac{A(2n)}{A(2^2 n)} \cdots \frac{A(2^{k-1} n)}{A(2^k n)} = \cos(\beta) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdots \cos\left(\frac{\beta}{2^{k-1}}\right)$$

Pero si k tiende a infinito el área del polígono regular de 2^k lados no se podría distinguir de la del círculo, por lo que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A(2^k n) = \pi r^2$$

De donde

$$\frac{A(n)}{A(2^k n)} = \frac{\frac{1}{2} n r^2 \sin(2\beta)}{\pi r^2} = \frac{\frac{1}{2} n \cdot \sin(2\beta)}{\pi} = \cos(\beta) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2^2}\right) \cdots$$

De ahí que

$$\pi = \frac{\frac{1}{2} n \cdot \sin(2\beta)}{\cos(\beta) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2^3}\right) \cdots}$$

Viète decidió comenzar con un cuadrado con lo que se tiene $n = 4$, $\beta = 45^\circ$,

$$\cos(\beta) = \sin(\beta) = \sqrt{1/2}.$$

Es decir $\frac{1}{2} n \cdot \sin(2\beta) = 2$, además podemos expresar los términos del coseno con la fórmula para el medio ángulo

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\beta)} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos\left(\frac{\beta}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}}$$

$$\cos\left(\frac{\beta}{8}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\beta}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}}}$$

$$\cos\left(\frac{\beta}{16}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\beta}{8}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}}}}$$

⋮

Podemos aproximar a π como

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}}} \cdots}$$

() () ()

[illegible]

volúmenes de sólidos en su “Stereometriadoloriumvinarorium” (1615), evaluó los volúmenes de secciones cónicas que obtuvo rotando segmentos de secciones cónicas alrededor de un eje en el plano.

A Galileo Galilei le debemos la mecánica de los cuerpos que caen libremente, además defendió el sistema copernicano, tuvo una importante contribución en la armonía que debe guardar la teoría y el experimento, en la que es de gran importancia el uso extensivo de la matemática, armonía que es espíritu de la ciencia moderna. Galileo nunca dio una explicación sistemática de sus ideas acerca del cálculo, esta tarea fue dejada a sus discípulos Torricelli y Cavalieri. Más se sabe que sus ideas fueron muy originales por comentarios como: “ni es el número de los cuadrados menor que la totalidad de todos los números, ni la última mayor que el primero”.

Bonaventura Cavalieri, profesor de la universidad de Bolonia en su “Geometría indivisibilibus continuorum” (1635), expone sistemáticamente las ideas y resultados que se tenían hasta entonces de lo que hoy llamamos el cálculo. En este trabajo Cavalieri establece una concepción sencilla del cálculo basada en la concepción escolástica de lo indivisible, el punto genera una línea, el plano genera un volumen, pero Torricelli le demostró que con esta concepción se puede demostrar que cualquier triángulo está dividido por una altura en dos partes de igual área, Cavalieri reemplazó líneas por hilos concebidos como hilos de una cierta y pequeña anchura. Sus ideas sobre líneas que forman un área, lo llevaron al principio de Cavalieri que dice que dos sólidos de alturas iguales tienen el mismo volumen, si las secciones transversales planas de igual altura tienen la misma área. Con esto pudo llevar a cabo el equivalente a la integración de polinomios.

Volviendo a la historia de π , fue hasta después de 1900 años, cuando los hombres comenzaron a preguntarse si habría una forma más rápida de calcular π que el método poligonal de Arquímedes. Hubo grandes avances en los métodos numéricos para el cálculo de π , sin embargo el método siguió prácticamente inalterado.

El físico holandés Willebrord Snell (1580-1626), fue un profesor de matemáticas en la universidad de Leiden que es conocido por descubrir las leyes de la refracción y reflexión (si un rayo de luz incide en una superficie plana que separa dos medios, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, y el seno del ángulo de incidencia dividido por el seno del ángulo de refracción es igual al índice de refracción). En su libro “Cyclometricus” publicado en 1621, Snell afirma que los lados del polígono circunscrito e inscrito están muy separados por el arco de la circunferencia, lo que hace que las cotas de Arquímedes puedan ser mejoradas. Snell buscó cotas más finas para la aproximación de π y las encontró enunciándolas de la siguiente forma: Elijase un punto D sobre la circunferencia de un círculo dado (véase la figura 2.12) y constrúyase DE igual al radio OA , donde E está en la extensión del diámetro AB . Extiéndase ED hasta intersectar la tangente BG en G_1 . Entonces

$$BG_1 > arcBF$$

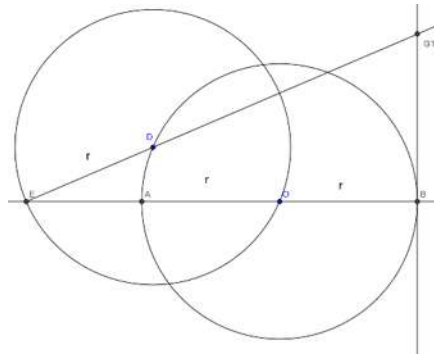


Figura 2.12. Cota superior de Snell y Huygens.

La cota inferior es de una construcción que ya hemos presentado cuando hablamos de la rectificación aproximada de un arco de circunferencia, dada por el cardenal Nicolás de Cusa. Sea EA igual al radio, donde E esta sobre la extensión de AB. Elijase cualquier punto F sobre la circunferencia tal que F sea la segunda intersección entre EF y el círculo (véase figura 2.13), y sea BG_2 la intersección de EF y la tangente BG . Entonces

$$BG_2 < \text{arc}BF$$

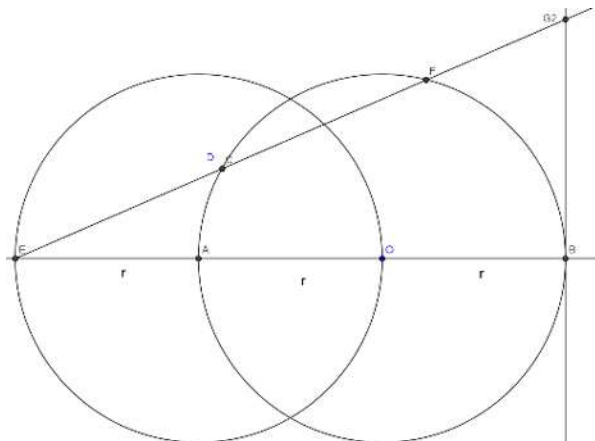


Figura 2.13. Cota inferior de Snell y Huygens.

Snell no pudo demostrar rigurosamente que sus cotas eran correctas, sin embargo creyó en sus resultados y con ellos logró acercarse más rápidamente a π que con el método poligonal de Arquímedes, esto fue muy bueno porque significaba un avance, es decir, se había descubierto un nuevo método para calcular π , con el cual se encontraban cotas más precisas con menor esfuerzo; un ejemplo de esto es que Arquímedes obtuvo las cotas $3 < \pi < 3.464$ con un hexágono, mientras que con los resultados antes mencionados Snell logró las cotas $3.14022 < \pi < 3.14160$ utilizando un hexágono. Snell utilizó un polígono de 96 lados y encontró las cotas

$$3.1415926272 < \pi < 3.1415928320$$

Snell también logró comprobar que los decimales de Ludolph van Ceulen eran correctos, desde luego que con este método logró hacerlo con mucho menos esfuerzo.

Los resultados de Snell fueron demostrados por un físico y matemático holandés, Christian Huygens (1629-1695). En su obra “De circulimagnitude inventa” en 1654, Huygens demostró estos y otros 14 teoremas utilizando geometría euclidiana.

En esta obra Huygens pudo demostrar que

$$3.1415926533 < \pi < 3.1415926538$$

La obra de Huygens es una muestra de que la matemática Europea estaba floreciendo, pues la matemática de Huygens es tan buena como las obras que se producían en la Universidad de Alejandría. Huygens nació tres años después de que muriera Snell.

René Descartes (1596-1650), Francés de Touraine, llevó la vida de un caballero y sirvió en algún tiempo al ejército de Mauricio de Orange, vivió durante mucho tiempo en Holanda y murió en Estocolmo. Descartes fue matemático, físico y filósofo. En su “Geometrie” (1637), originalmente publicado como un apéndice del “Discours de la Méthode”, el discurso sobre la razón en el cual Descartes explica el uso de la razón para estudiar la naturaleza, investigó un método general de pensamiento idóneo que facilitara las investigaciones y ayudara a encontrar la verdad en las ciencias; la única ciencia con algún grado de coherencia sistemática era la matemática, por lo que esta llegó a ser el medio más importante para el conocimiento del universo. Así esta ciencia es un brillante ejemplo de que la verdad se puede encontrar en la ciencia. Un mérito importante de Descartes fue la aplicación del álgebra al análisis geométrico de los antiguos, con lo que logró abrir un gran horizonte de su aplicabilidad.

René Descartes fue contemporáneo de Huygens y Snell, también es conocido con su nombre latinizado Renatus Cartesius, por ello a veces se llama a la geometría analítica como geometría cartesiana. Aceptaba el sistema copernicano, sin embargo mantuvo muchas de sus obras en secreto por temor, un temor infundido por la condena de Galileo en 1633. Después de su muerte se publicaron las obras que Descartes mantenía en secreto.

Entre los libros encontrados después de su muerte, se encuentra un estudio de π . Su enfoque parece semejante al de Viète pero en lugar de considerar el área de un polígono, este aumento el número de lados hasta que el polígono se aproximó a una circunferencia.

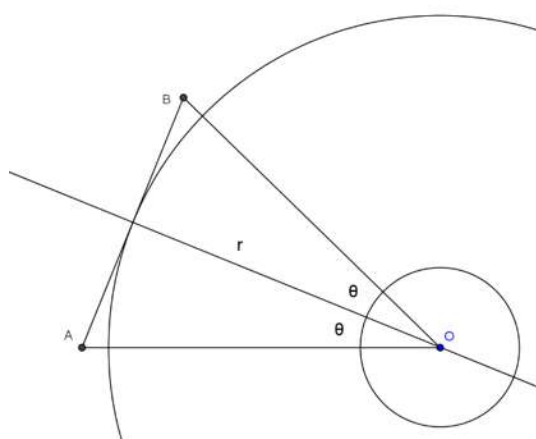


Figura 2.14. Método de Descartes para el cálculo de π .

A continuación se describe el método de Descartes para calcular π

Sea el largo del perímetro de un polígono regular, entonces, si AB es un lado del polígono tenemos que

$$L = 2nr \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Si duplicamos el número de lados del polígono

$$L = 2^2 nr(2) \tan\left(\frac{\theta}{2^2}\right)$$

Donde $r(2)$ es el radio del polígono de $2^2 n$ lados. Así duplicando el número de lados del polígono inicial k veces, llegamos a

$$L = 2^k nr(k) \tan\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$$

De ahí que

$$r(k) = \frac{L \cot\left(\frac{\theta}{2^k}\right)}{2^k n}$$

De esta expresión podemos encontrar una aproximación para π como una serie infinita, tomemos en cuenta que Descartes comenzó con un polígono de 4 lados por lo que $n = 4$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$1 = \frac{2^k (4) r(k) \tan\left(\frac{\pi}{2^k}\right)}{L}$$

Si tomamos el límite cuando k tiende a infinito y tomando en cuenta que cuando el número de lados del polígono regular tiende al infinito el perímetro del polígono se puede calcular como $L = 2\pi r(k)$.

$$1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^k (4) r(k) \tan\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}{2\pi r(k)}$$

De donde

$$\pi = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{k+1} \tan\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right) \quad (1)$$

Podemos escribir esta expresión en términos una serie infinita usando las fórmulas de la tangente del medio ángulo y el coseno del medio ángulo, como se hizo en la deducción de la serie infinita de Viète para calcular π . Lo que nos da la siguiente expresión

$$\pi \approx 2^k \frac{\sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \cdots (k-3 \text{ veces}) \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \cdots (k-3 \text{ veces}) \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}}$$

Como ejemplo calcularemos π con un valor de $k = 7$

$$\pi \approx 2^7 \frac{\sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}}$$

$$\pi \approx 3.14222$$

Este no fue el camino que hizo Descartes para la aproximación de π , pues él no llegó a la fórmula (1); usó la aproximación que daremos a continuación:

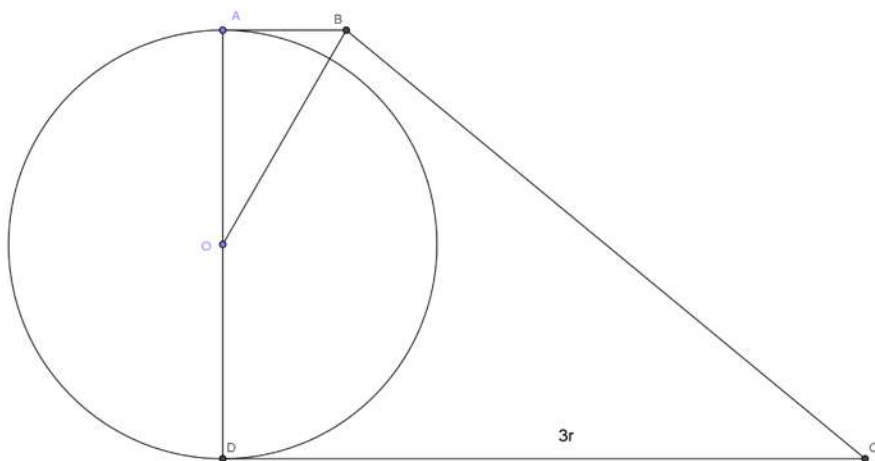
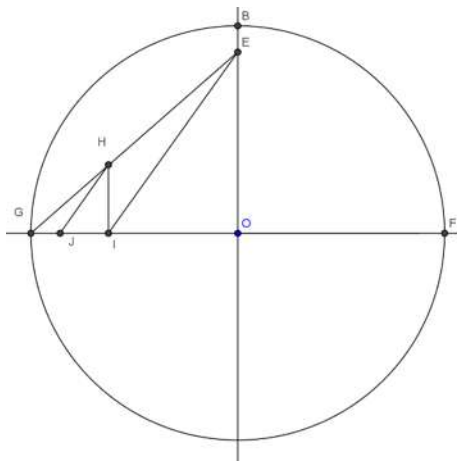


Figura 2.15. Construcción de Kochansky para la rectificación aproximada del círculo

A. Kochansky en 1685, propuso otra construcción para aproximar la rectificación del círculo (observe la figura 2.15) en la que se muestra la construcción que realizó Kochansky

Jakob de Gelder en 1849, se basó en una serie convergente de π expresada como fracción continua e hizo una construcción en la que se aproxima π con una precisión de seis decimales. A partir de que la aproximación $\pi = \frac{355}{113}$ es correcta en seis decimales esta fracción se puede construir geométricamente como veremos en el siguiente capítulo de este trabajo (véase la figura 2.16).



De esta construcción se aproxima

$$\pi = 3.14159292$$

Esta construcción es sencilla pero permite la aproximación de π con una precisión de 3 dígitos decimales correctos (figura 2.17).

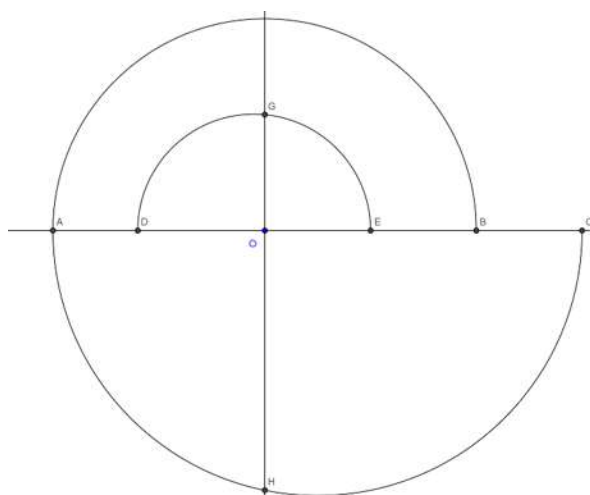


Figura 2.17. Construcción de Hobson para aproximar la cuadratura del círculo

$GH \approx \sqrt{\pi}$ a partir de la construcción de Hobson se obtiene

$$\pi \approx 3.1416$$

En esta época las matemáticas Japonesas estaban muy retrasadas de las matemáticas de Europa. El matemático japonés Takebe calculó el valor de π utilizando un polígono de 1024 lados con una precisión de 40 decimales, también encontró una aproximación de π con una serie y una fracción continua, aunque en estos tiempos los matemáticos japoneses casi nunca mostraban los métodos por los cuales llegaban a sus resultados. Según Beckmann (2008, p.112) podemos pensar que pudo llegar a ellos de la siguiente manera.

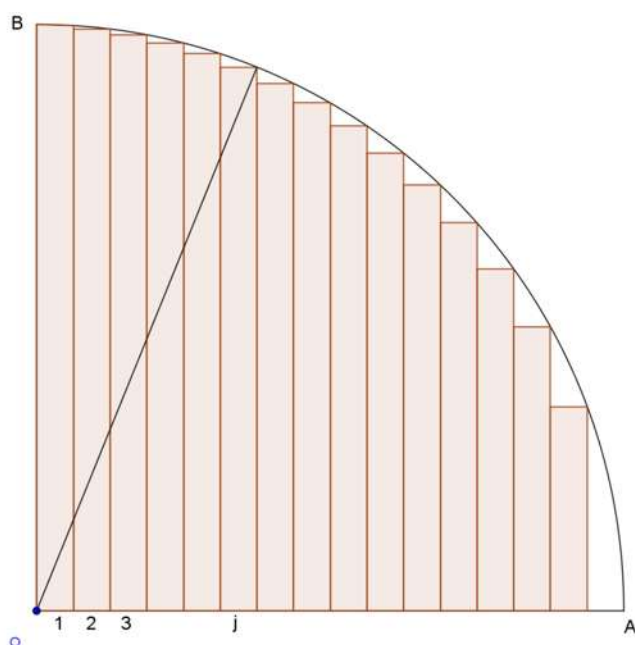


Figura 2.18. Cálculo de π de Takebe según Beckmann.

Fijamos el radio OA igual a 1, entonces el área del cuadrante OAB es $\pi/4$. Si dividimos OA en n intervalos de la misma longitud. Por el teorema de Pitágoras la altura del j -ésimo rectángulo es

$$\sqrt{1 - \left(\frac{j}{n}\right)^2}$$

El área del j -ésimo rectángulo será

$$\frac{1}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{j}{n}\right)^2}$$

Esta expresión tiende al área de la cuarta parte de la circunferencia cuando n tiende a infinito, de manera que podemos aproximar a π con

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} \sqrt{n^2 - j^2}$$

En la cual se puede encontrar el valor de π con la precisión deseada simplemente aumentando el valor de n , sin embargo esta sucesión no fue utilizada para calcular π .

Debido a su lenta convergencia y al uso de las raíces cuadradas que representaban dificultad de cálculo numérico.

En Struik (2008, p.147) se puede leer que la primera academia fue fundada en Nápoles (1560), seguida por la academia de Lincei en Roma (1603). La Royal Society de Londres data de 1662. La academia francesa de ciencias de 1666. Wallis fue miembro fundador de la Royal Society, Huygens de la academia Francesa.

John Wallis (1616-1703), profesor Silvano de geometría de Oxford de 1643 hasta su muerte, escribió un libro muy importante para su época "Arithmetica infinitorum" en este libro Wallis extendió el álgebra hacia un análisis verdadero siendo el primer matemático en hacerlo, sus métodos para tratar con procesos infinitos a menudo resultaron imperfectos, sin embargo él obtuvo nuevos resultados. Wallis introdujo series infinitas y productos infinitos, también usó exponentes fraccionarios, negativos e imaginarios.

En su trabajo sobre el número π , John Wallis empleó una idea parecida a la de Takebe, también buscaba el área debajo del cuadrante del círculo, mas no llegó a presentar la aproximación

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} \sqrt{n^2 - j^2}$$

Como una integral, hizo algo equivalente cuando buscó el área de la curva debajo del arco circular AB (figura 2.18), cuya ecuación era conocida por la geometría cartesiana, él tomó la ecuación que se escribe en símbolos modernos como

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

Pero todavía no aparecía el cálculo integral, por lo que Wallis no pudo evaluar la integral, para entonces solo se conocía el teorema del binomio, lo que tampoco le permitió hacer una expansión del integrando, logró llegar a la serie que lleva su nombre por complicadas interpolaciones y procedimientos inductivos y en su “Arithmetica infinitorum” (1655) consiguió llegar a

$$\pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots}$$

Con herramientas modernas se puede llegar a la serie de Wallis por un camino más corto como se describe a continuación

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{2n-1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \frac{2m-5}{2m-4} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Y la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x dx = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m-4}{2m-3} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m-4}{2m-3} \cdots \frac{2}{3} \cdot 1}{\frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \frac{2m-5}{2m-4} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}$$

Esta sucesión para aproximar π fue un gran logro, pues es la primera sucesión que se había descubierto hasta entonces en la que no aparecían raíces cuadradas que complicarían los cálculos numéricos.

Según Beckmann (1974, p. 114), William vizconde de Brouncker (1620-1684), que fue el primer presidente de la Royal Society, transformó el resultado de Wallis en una fracción continua.

El resultado dado por Wallis originalmente era $4/\pi$, este resultado es el transformado por Brouncker en la fracción continua

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \frac{9^2}{2 + \dots}}}}}$$

No se sabe cómo Brouncker pudo llegar a este resultado. Wallis demostró que su aproximación de π y la de Brouncker son equivalentes, sin embargo la demostración de Wallis es tan complicada que no refleja cómo Brouncker pudo obtener la fracción continua. Veremos más adelante en este trabajo como Euler demostró este resultado en el año 1775.

James Gregory (1638-1675) contribuyó al descubrimiento del cálculo diferencial e integral, era un matemático que en sus tiempos libres se dedicaba a la astronomía, estudió matemáticas en Aberdeen y luego en Italia, tenía en sus intereses temas adelantados a su época, entre ellos está por ejemplo su "Vera circuli et hyperbolae quadratura" del círculo y de la hipérbola, en el cual se estudiaba la idea de la distinción entre funciones algebraicas y trascendentes, también trato de demostrar la trascendencia de π , pero no tuvo éxito. Fue profesor de la Universidad St. Andrews en Escocia (1668), en 1674 fue distinguido con la primera cátedra de matemáticas de la Universidad de Edimburgo, murió repentinamente al siguiente año a la edad de 36 años.

En Beckmann (1974, p. 117), Gregory descubrió la serie de arco tangente que lleva su nombre, descubrió que el área bajo la curva $1/(1+x^2)$ en el intervalo $(0, x)$ era $\arctan x$ lo que en notación moderna se escribe

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$$

Empleando el algoritmo de división larga en el integrando, y utilizando la fórmula de Cavallieri, Gregory descubrió la serie

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Haciendo $x=1$ y tomando en cuenta que $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ tenemos

$$\pi = 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$$

La primera serie infinita que se descubrió para π . Gregory no menciona el caso particular de la serie que lleva su nombre con $x=1$, sin embargo puede ser que no lo haya considerado como importante ya que la convergencia de esta serie es lenta.

II.16. Newton

Según Struik (2008, p.154) Isaac Newton fue hijo de un caballero de la provincia Lincolnshire, Inglaterra. Newton estudió en Cambridge subordinado a Isaac Barrow, quién en 1669 cedió el profesorado Lucasiano a su alumno en un suceso extraordinario pues Barrow admitió que su alumno era mejor. Newton estuvo en Cambridge hasta 1696, año en que aceptó la posición de custodio y más tarde de director de la casa de moneda. Su enorme prestigio se debió principalmente a su obra “Philosophia e naturalis pricipia mathematica” (1687), un volumen en el cual se contiene la mecánica sobre una fundamentación axiomática y que contiene la ley de la gravitación.

Newton demostró con todo rigor como las leyes establecidas empíricamente por Kepler sobre el movimiento planetario, encuentran su explicación en la ley gravitacional de los cuadrados inversos, dando una explicación dinámica de muchos de los aspectos de los movimientos de los cuerpos celestes y de las mareas. La forma geométrica de las demostraciones no muestra que el autor poseía el cálculo, que él llamó “teoría de fluxiones”.

Newton descubrió su método general en los años 1665-1666 de esos años también son sus ideas fundamentales sobre la gravitación universal, cuando permaneció en su lugar de nacimiento en el campo para escapar de la plaga que invadió Cambridge. “No hay otros ejemplos de hazañas en la historia de la ciencia para compararlos con los de Newton durante estos dos años dorados”, advierte el profesor More.

Newton fue influenciado por el trabajo de las series infinitas de Wallis a través de su Arithmetica. Lo que lo llevó a extender el teorema del binomio a exponentes fraccionarios y negativos, así como el descubrimiento de las series binomiales, y esto le ayudó a que su teoría de las fluxiones fuese para todas las funciones ya fueran trascendentes o algebraicas.

Según Beckmann (1974, p. 123). Newton había podido calcular la fluxión (derivada) de una fluente (variable) y viceversa, dada la fluxión sabía encontrar la fluente (integración). También demostró que era equivalente a encontrar el área bajo la curva (cuya ecuación era dada por la fluxión). Descubrió lo que expresado en notación moderna es

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen(x)$$

Que equivale a la expresión que se obtiene al aplicar el teorema del binomio también descubierto por él

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots \right) dx$$

Si integramos término a término e igualamos las dos expresiones anteriores

$$\arcsen(x) = x + \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \dots$$

Reemplazamos $x = 1/2$ y nos da como resultado

$$\pi = 6 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 2^7} + \dots \right)$$

Esta serie converge mucho más rápido que la serie de Gregory Leibniz

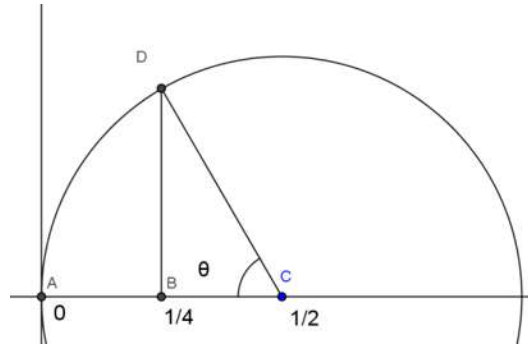


Figura 2.19 Método de Newton para calcular π

Pero Newton originalmente consideró un círculo con una hipérbola cuya ecuación es

$$y = \sqrt{x - x^2}$$

Un círculo con centro en $(1/2, 0)$ entonces el segmento circular ABD tiene área

$$\begin{aligned} a &= \int_0^{1/4} \sqrt{x - x^2} dx = \int_0^{1/4} \sqrt{x} \sqrt{1 - x} dx \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{5} x^{5/2} - \frac{1}{28} x^{7/2} - \frac{1}{72} x^{9/2} \Big|_0^{1/4} \\ &= \frac{2}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} \end{aligned}$$

Una vez más Newton utilizó el teorema del binomio. Además el área del sector ABD es igual a la del sector ACD menos la del triángulo BCD , también $CD = 1$, $BD = \sqrt{3/4}$ llegó a que

$$a = \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sustituyendo el valor de a tenemos

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 24 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} \right)$$

En realidad Newton estaba calculando otra cosa y π apareció casualmente, estos fueron algunos de los cálculos que hizo durante la peste, 1665-1666, en Woolsthorpe.

En los tiempos de Newton los calculadores de dígitos de π utilizaron la serie de Gregory

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Que fue modificada de diferentes formas para acelerar su convergencia. El astrónomo Abraham Sharp (1651-1742) hizo la sustitución $x = \sqrt{1/3}$ y obtuvo

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \dots \right)$$

Con esta serie calculó 72 decimales de precisión.

En 1706 John Machin (1680-1752), profesor de astronomía en Londres, hizo una modificación a la serie de Gregory para que convergiera más rápido, que se describe a continuación

$$\tan(2\beta) = \frac{2 \tan(\beta)}{1 - \tan^2(\beta)} = \frac{5}{12}, \text{ para } \tan(\beta) = 1/5.$$

$$\tan(4\beta) = \frac{2 \tan(2\beta)}{1 - \tan^2(2\beta)} = \frac{120}{119}$$

Esto difiere en $1/119$ de 1π y el arco tangente de 1 es $\pi/4$. En función de los ángulos esta diferencia se puede expresar como

$$\tan\left(4\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\beta - 1}{1 + \tan 4\beta} = \frac{1}{239}$$

$$\arctan\left(\frac{1}{239}\right) = 4\beta - \frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}$$

Remplazando los arco tangentes por su serie de Gregory, Machin obtuvo que

$$\frac{\pi}{4} = 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{3 \cdot 5^5} - \dots \right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{3 \cdot 239^5} - \dots \right)$$

En este truco se aprovecha que una de las series converge de manera más rápida que la otra que es más adecuada para el cálculo de los decimales, con esta ecuación Machin calculó los primeros cien dígitos de π .

En esta época comenzó a llamársele π a la razón entre la circunferencia y el diámetro. Esta fue utilizada por William Jones (1675-1749), quién algún tiempo también se dedicó a traducir algunas obra de Newton del latín, sus trabajos fueron en las matemáticas en general en 1706 “publicó su Synopsis Palmariorum Matheseos: or, a New Introduction to Matematics” en ella utilizaba el símbolo π como abreviatura de la palabra periphery. Pero Jones no era tan importante para que se adoptara su notación, cuando esta notación fue utilizada por Euler en su “Variae observationes circa series infinitas” (1737) tuvo una aceptación general.

II.17. Euler

Según Struik (2008, p.173) se lee, el matemático más productivo del siglo XVIII, sino es que de todos los tiempos, Leonard Euler (1707-1783), nació en Basilea. Euler estudió con Johan Bernoulli. Cuando Nicolaus hijo de Johan viajó a San Petesburgo, el joven Euler lo siguió y estuvo en la academia hasta 1741. Desde 1741 hasta 1766 Euler estuvo en la academia de Berlín bajo la tutela especial de Federico el Grande. Estuvo otra vez en San Petesburgo ahora bajo el amparo de la Emperatriz Catalina. Se casó dos veces y tuvo trece hijos, su vida fue dedicada casi exclusivamente a trabajar en los diferentes campos de la matemática pura y aplicada. En 1735 perdió un ojo y el otro ojo en 1766, pero nada pudo interrumpir su gran productividad. Durante su vida aparecieron 530 libros y artículos; a su muerte él dejó muchos manuscritos, que fueron publicados por la academia de San Petesburgo durante los 47 años siguientes.

Euler pudo encontrar muchas fórmulas para π y en general estas fórmulas son curiosidades de resultados mucho más importantes en los que Euler trabajó; un ejemplo de ello son las fórmulas descubiertas por Euler para el cuadrado de π .

La serie de los inversos de los cuadrados

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

Desconcertó a los matemáticos por décadas. Pero en 1736, Euler resolvió de paso el problema. La serie

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Que se conocía desde el tiempo de Newton. Euler sustituyó $x^2 = y$ y pensó en la ecuación

$$\text{sen}(x) = 0 \quad (1)$$

Como una ecuación polinomial de grado infinito. Suponiendo $y \neq 0$ obtuvo

$$1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - \frac{y^3}{7!} + \dots = 0 \quad (2)$$

Las raíces de la ecuación $\sin(x) = 0$ son $0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$ y por tanto son raíces de la ecuación (2) se excluye el cero por la ecuación (2). Euler sabía por la teoría de ecuaciones, una rama del álgebra superior en la que trabajó, que el coeficiente negativo del término lineal es la suma de los recíprocos de las raíces de la ecuación, y por lo tanto

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \frac{1}{(4\pi)^2} + \dots = \frac{1}{3!} \quad (3)$$

Lo que es equivalente a

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad (4)$$

Con lo que el problema que había causado desconcierto entre los matemáticos fue resuelto, además de descubrir una serie para π^2 . Euler no se podía quedar ahí, repitió el mismo proceso y calculó la serie para el coseno, obtuvo

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

De donde

$$\frac{\pi^2}{12} = 2 \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right)$$

Se tiene

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

Este resultado se generaliza como la suma de los recíprocos, es decir considerando la serie de términos $1/j^{2n}$ (con $j=1, 2, 3, \dots$), Euler descubrió una fórmula general que dependía de los números de Bernoulli, y mostró los casos particulares

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots = \frac{2^2}{5! \cdot 3} \pi^4$$

Hasta

$$\frac{1}{1^{26}} + \frac{1}{2^{26}} + \frac{1}{3^{26}} + \frac{1}{4^{26}} + \dots = \frac{2^{24} \cdot 769779271}{27!} \pi^{26}$$

Estos resultados se exponen en su libro “introdutio in analysininfinitorum” (1748), en este libro se establece una gran parte de la notación matemática de la actualidad.

Para calcular el logaritmo de π , Euler descubrió productos infinitos de potencias, entre ellos

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \cdot \frac{7^2}{7^2-1} \cdots$$

Estos no son todos los resultados que obtuvo Euler, son solo una muestra.

Euler descubrió las fórmulas

$$\arctan \frac{1}{p} = \arctan \frac{1}{p+q} + \arctan \frac{1}{p^2 + pq + 1}$$

Y también

$$\arctan \frac{x}{y} = \arctan \frac{ax-y}{ay+x} + \arctan \frac{b-a}{ab+1} + \arctan \frac{c-b}{cb+1} + \cdots$$

Con ellas se pueden obtener una infinidad de formas de calcular π ; si sustituimos a, b, c,... por los números impares obtenemos

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) + \arctan\left(\frac{1}{18}\right) + \dots$$

Todas estas fórmulas dependen de la serie del arco tangente, además Euler encontró una que convergía más rápido que cualquier otra

$$\arctan(x) = (y/x) \left(1 + \frac{2}{3}y + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}y^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}y^3 + \cdots \right)$$

En donde

$$y = \frac{x^2}{1+x^2}$$

Empleando esta fórmula y usando el truco de Machin de forma que

$$\pi = 20 \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 8 \arctan\left(\frac{3}{79}\right)$$

Euler calculó 20 decimales de π en tan solo una hora. Puede decirse que la historia de la evaluación numérica de π , llega a su fin con Euler, ya que nadie después de él pudo encontrar un método más eficiente para calcular π ; con esto se terminó con el problema de la evaluación numérica de π , pero se abrió un nuevo problema, ¿qué clase de número era π ,

racional o irracional? Los calculadores de dígitos de π tuvieron la esperanza de encontrar un patrón que se repitiera en los dígitos, se tenían sospechas de que se trataba de un número irracional, sin embargo no había una demostración de esto.

Euler formuló una nueva pregunta, ¿Acaso π era la raíz de una ecuación algebraica de grado finito con coeficientes racionales? Con esta pregunta se inicia un capítulo muy importante de la historia de π . Euler fue uno de los primeros en estudiar problemas relacionados, investigadores posteriores utilizaron uno de los resultados de Euler para enfrentar el problema

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Euler sentó las bases para el estudio de la irracionalidad y la trascendencia de π al encontrar las fracciones continuas

$$\frac{1}{2}(e-1) = \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{18 + \frac{1}{22 + \dots}}}}}}$$

$$\tanh x = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{5}{\frac{1}{x} + \frac{7}{\frac{1}{x} + \frac{9}{\frac{1}{x} + \dots}}}}}}$$

$$\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\frac{2}{x} + \frac{6}{\frac{10}{x} + \frac{14}{\frac{18}{x} + \dots}}}}$$

Y después estas fracciones fueron utilizadas como punto de partida en las investigaciones de Lambert y Legendre.

Estos resultados fueron publicados por Euler en su “Introductio in analysin Infinitorum” (1748). En 1755 cuando se encontraba ya ciego, escribió su tratado “De relatione inter ternas pluresvequantitatesinstituenda”, que fue publicado hasta diez años después, pues la cantidad de investigaciones que llegaba a los editores de San Petesburgo de Euler era enorme. En este tratado se señala: “Parece ser bastante claro que la periferia del círculo constituye un tipo de cantidad trascendental tan particular que de ninguna manera puede compararse con otras

cantidades, ya sean raíces u otros trascendentes”. Euler tenía razón pero pasaron 107 años hasta que Lindemann dio una demostración de la trascendencia de π .

II.18. El método del conde de Monte Carlo.

Los principios de la probabilidad se encuentran en el libro “liber de ludo aleae” o el libro de los juegos de azar, escrito en 1526 por Gerolamo Cardano (1501-1576), pero publicado en 1663. Cardano quien se hizo famoso por la solución de la ecuación cúbica fue matemático, ingeniero, médico y además de eso fue un jugador apasionado. Antes de la aparición de la teoría cinética de los gases en el siglo XIX, la teoría de la probabilidad no tenía aplicaciones que fueran más allá de los juegos de azar, algunos de los científicos que más contribuyeron al desarrollo de la teoría de la probabilidad fueron Jacques Bernoulli (1654-1705 autor del Arsconjectandi), Pascal, De Moivre, Euler, Laplace, Gauss y Poisson, seguidos de muchos matemáticos de los siglos XIX y XX.

En la teoría de la probabilidad es frecuente encontrarnos con el número π , al igual que en el álgebra superior, sin embargo hay una aparición muy interesante en un problema planteado y resuelto por Georges Louis Leclerc, conde de Buffon (1707-1778). Leclerc Fue un científico muy capaz, escandalizó al mundo al aproximar la edad de la tierra en 75 mil años, cuando en su época se conocía que la edad de la tierra no era mayor de los 6 mil años. Logró poner a prueba una de las maquinas utilizadas por Arquímedes en la defensa de Siracusa.

El problema que planteó Buffon en (1777) fue el siguiente: tenemos una aguja de largo L , lancémosla al azar sobre el plano horizontal, marcado con líneas rectas paralelas a una distancia d (mayor que L) entre una recta y la siguiente ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja corte algunas de estas líneas?

Suponemos que al lanzar la aguja al azar, el centro de esta puede tomar cualquier posición, y cualquier orientación de la aguja es igual de probable, además que estas dos variables son independientes y aleatorias.

Sea x la distancia del centro de la aguja a la línea más cercana, y sea ϕ su orientación. Dado que x se mide desde la línea más cercana, solo tenemos que considerar esta línea, pues con cualquier otra simplemente tenemos que repetir la solución de esta (véase figura 2.20).

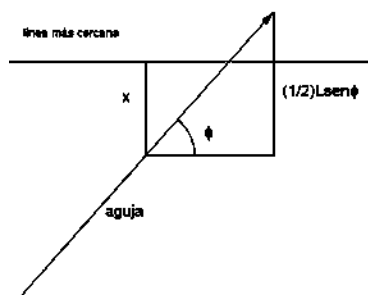


Figura 2.20. Problema planteado por el conde de Buffon.

La aguja intersecará la línea si sucede que $x < (1/2)L\text{sen}(\phi)$, y el problema es equivalente a encontrar la probabilidad de que esto ocurra. Es decir

$$P(x < (1/2)L\text{sen}(\phi))$$

Para encontrar esta probabilidad utilizamos el plano de coordenadas rectangulares (x, ϕ) y consideramos el interior del rectángulo OA cuyos puntos satisfacen (véase figura 2.21).

$$0 < x < \frac{d}{2} \text{ y } 0 < \phi < \pi$$

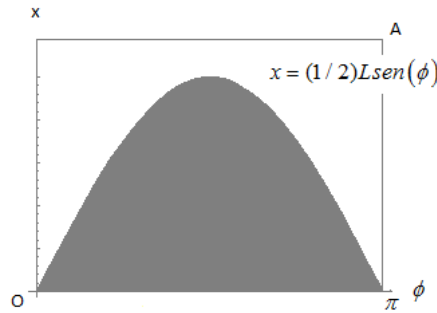


Figura 2.21. El problema de Buffon.

Estos intervalos de valores posibles para x y ϕ , por lo tanto a cualquier punto dentro del rectángulo AO le corresponde una y solo un posible combinación de la posición (x) y la orientación (ϕ) de la aguja.

Ya todas las combinaciones tienen la misma probabilidad de suceder, el área del rectángulo representa la suma total de todas las posibilidades que se pueden dar. No con todas las combinaciones tendremos que la aguja cortó a la línea, esto solo ocurre cuando la combinación de orientación y posición corresponden a algún punto debajo de la curva $x = (1/2)L\text{sen}(\phi)$ como se observa en la figura 2.21, por lo que la suma de todas las combinaciones favorables en las que el resultado es que la aguja corta la línea, está dada por el área debajo de la curva. Entonces como la probabilidad es la razón entre resultados favorables y el total de resultados posibles bajo ciertas condiciones dadas (que ya se establecieron), la probabilidad de que la aguja corte la línea está dada por la razón entre el área sombreada y el área del rectángulo OA y la podemos expresar como

$$P = \frac{\frac{1}{2}L \int_0^{\pi} \text{sen}(\phi) d\phi}{\pi d / 2} = \frac{2L}{\pi d}$$

$$\pi = \frac{2L}{Pd}$$

Este fue el resultado encontrado por Buffon, quién trató de verificar experimentalmente sus resultados lanzando una aguja y marcando, llevando un registro de los intentos, al final dividió

los resultados favorables entre el número de intentos. Este problema cayó en el olvido hasta que un gran matemático francés lo mencionó nuevamente y le dio un nuevo enfoque.

Pierre – Simon Laplace (1749-1827) es conocido principalmente por dos obras maestras, “Mécanique céleste” (5 vols., 1799-1825) y “Théorie analytique des probabilités” (1812). La primera es una obra muy importante de mecánica celeste, en ella se incluyen muchas técnicas matemáticas nuevas como la teoría del potencial. La Théorie analytique es la base de la teoría de la probabilidad moderna, en ella se incluyen muchas técnicas matemáticas nuevas, entre ellas una de gran importancia es la transformada integral de Laplace, que representa una herramienta de uso diario en la ingeniería en sistemas y el análisis de circuitos eléctricos.

En esta obra se incluye un análisis del problema de Buffon que fue estudiado por Laplace con una nueva perspectiva, en la cual Laplace generaliza el método a hojas cuadrículadas. Con este método muchas personas se ocuparon en calcular los primeros decimales de π haciendo miles de lanzamientos. El método del conde de Buffon para calcular los dígitos de π puede ser programado en una computadora, los resultados que se obtienen al ejecutar un programa del método de Buffon para calcular π arrojan los siguientes resultados según Beckmann (1974, p. 140): en el lanzamiento número 6000 el valor que arroja para π es de 3.1217482, y para el lanzamiento 12,000 el valor de π que arroja el programa es de computadora es de 3.1417725. La convergencia hacia el valor de π es muy lenta, tal vez sea por esta razón que el problema de Buffon cayó en el olvido durante mucho tiempo, pero gracias a Laplace que hizo una modificación al problema de Buffon, se tienen los principios de la programación de la computadora electrónica. La computadora de Laplace era analógica y consistía en una hoja rayada y una aguja.

II.19. Prueba de la irracionalidad de π

Euler resolvió el problema de calcular los dígitos de π , pero dejó un nuevo reto en la historia de π , ¿qué clase de número es π ?, ¿racional o irracional, algebraico o trascendente?, desde los griegos ya se hablaba de números que no se pueden expresar como la razón de dos enteros, no se había encontrado periodicidad en los dígitos calculados de π , esto hizo que se perdiera la esperanza de que fuera racional. Fue hasta 1767 cuando Johann Henrich Lambert (1728-1777) demostró la irracionalidad de π . Pero más tarde Adrien-Marie Legendre (1752-1833), dio una demostración más rigurosa del teorema acerca de fracciones continuas que Lambert utilizó para demostrar la irracionalidad de π . Lambert investigó propiedades de las fracciones continuas en su tratado “Conocimientos previos para quienes buscan la cuadratura y rectificación del círculo” (1767), demostrando el siguiente teorema:

Teorema. Si x es un número racional distinto de cero, entonces $\tan x$ no es racional. De esto se deduce inmediatamente que si $\tan x$ es racional, entonces x debe ser irracional o cero.

Ya que $\tan(\pi/4) = 1$ es racional, $\pi/4$ debe ser irracional, de esto se sigue la irracionalidad de π .

Lambert encontró una fracción continua que converge a π :

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}}}$$

Legendre demostró la irracionalidad de π de manera más rigurosa, además de dar la demostración de que π^2 es irracional que damos a continuación, destruyendo la esperanza de que π^2 fuese racional en sus “Éléments de Géométrie” (1974); de esta prueba se sigue también la irracionalidad de π .

Haremos dos observaciones antes de comenzar con la demostración.

La primera es sobre la función

Proposición. Sea $f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$; entonces se satisface

$$0 < f_n(x) < \frac{1}{n!} \text{ Para } 0 < x < 1$$

Demostración. Lo probaremos por inducción, Si $n = 1$, entonces

$$f_1(x) = \frac{x^1(1-x)^1}{1!} = x(1-x) = x - x^2 > 0, \text{ ya que } 0 < x^2 < x < 1.$$

Por otro lado

$$\frac{1}{1!} = 1 > x(1-x) \text{ por } 0 < x^2 < x < 1$$

Supongamos que vale para n , entonces $0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}$ para $0 < x < 1$ y veamos si vale para el caso $n+1$

$$f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^n(1-x)^n}{(n)!} \cdot \frac{x(1-x)}{n+1}$$

Entonces

$$1 > \frac{x^n (1-x)^n}{(n)!} = \frac{x^n (1-x)^n}{(n)!} \frac{x(1-x)}{n+1} > 0$$

de hipótesis de inducción y caso base.

Por lo que se cumple $0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}$ para $0 < x < 1$.

Consideremos la expresión que se obtiene al desarrollar $x^n (1-x)^n$

$$\begin{aligned} x^n (1-x)^n &= x^n \left(c_0 (1)^n (-x)^0 + c_1 (1)^{n-1} (-x)^1 + c_2 (1)^{n-2} (-x)^2 + \cdots + c_n (1)^0 (-x)^n \right) \\ &= c_n x^n (-x)^0 + c_{n+1} x^n (-x)^1 + c_{n+2} x^n (-x)^2 + \cdots + c_{n+n} x^n (-x)^n \\ &= c_n (-1)^0 x^n + c_{n+1} (-1)^1 x^{n+1} + c_{n+2} (-1)^2 x^{n+2} + \cdots + c_{2n} (-1)^n x^{2n} = \sum_{i=n}^{2n} (-1)^{i-n} c_i x^i \end{aligned}$$

Así podemos escribir $f_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=n}^{2n} (-1)^{i-n} c_i x^i$ donde los números C_i son enteros. De esta expresión podemos decir que

$$f_n^{(k)}(0) = 0 \text{ si } k < n \text{ o } k > 2n$$

Además

$$\begin{aligned} f_n^{(n)}(x) &= \frac{1}{n!} \left(n! c_n + \sum_{i=n+1}^{2n} (-1)^{i-n} c_i (i(i-1) \cdots (i-n+1)) x^{i-n} \right) \\ f_n^{(n+1)}(x) &= \frac{1}{n!} \left((n+1)! c_{n+1} + \sum_{i=n+2}^{2n} (-1)^{i-n} c_i (i(i-1) \cdots (i-n)) x^{i-(n+1)} \right) \\ &\vdots \\ f_n^{(2n)}(x) &= \frac{1}{n!} \left((-1)^n c_{2n} (2n)! \right) \end{aligned}$$

Esto significa que

$$f_n^{(n)}(0) = c_n$$

$$f_n^{(n+1)}(0) = (n+1) c_{n+1}$$

$$f_n^{(n+2)}(0) = (n+2)(n+1)c_{n+2}$$

$\vdots$

$$f_n^{(2n)}(0) = (2n(2n-1)\cdots(n+1))c_{2n}$$

Donde los números de la derecha son todos enteros, así tenemos que $f_n^{(k)}(0)$ es entero para todo k

Veamos que

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{(n)!} = \frac{(x+1-1)^n(1-x)^n}{(n)!} = \frac{(1-(1-x))^n(1-x)^n}{(n)!} = f_n(1-x)$$

De ahí se sigue que

$$f_n^{(k)}(x) = (-1)^k f_n^{(k)}(1-x)$$

Si hacemos $x = 0$

$$f_n^{(k)}(0) = (-1)^k f_n^{(k)}(1)$$

De donde $f_n^{(k)}(1)$ es también un entero para todo k .

Tenemos una observación más: si a es un número cualquiera, y $\varepsilon > 0$, entonces para n suficientemente grande tenemos

$$\frac{a^n}{n!} < \varepsilon$$

Obsérvese que si $n \geq 2a$ entonces

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \frac{a^n}{n!} < \frac{1}{2} \frac{a^n}{n!}, \text{ ya que } n+1 \geq 2a+1 > 2a$$

Sea n_0 un número natural cualquiera con $n_0 \geq 2a$. Entonces cualquiera que sea el valor de

$$\frac{a^{n_0}}{n_0!}$$

Los valores sucesivos satisfacen

$$\frac{a^{(n_0+1)}}{(n_0+1)!} < \frac{1}{2} \frac{a^{n_0}}{n_0!}$$

$$\frac{a^{(n_0+2)}}{(n_0+2)!} < \frac{1}{2} \frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!} < \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{a^{n_0}}{n_0!}$$

$\vdots$

$$\frac{a^{(n_0+k)}}{(n_0+k)!} < \frac{1}{2^k} \frac{a^{n_0}}{n_0!}$$

Si k es tan grande que $\frac{a^{(n_0+k)}}{(n_0+k)!} < 2^{-k}$. Entonces

$$\frac{a^{(n_0+k)}}{(n_0+k)!} < \varepsilon$$

Hecha esta segunda observación demostraremos el siguiente teorema

Teorema. El número π es irracional.

En efecto, π^2 es irracional. (Obsérvese que la irracionalidad de π^2 implica la irracionalidad de π , pues si π fuese racional, entonces ciertamente lo sería también π^2 .)

Demostración.

Supóngase que π^2 fuese racional de modo que

$$\pi^2 = \frac{a}{b}$$

Para ciertos números positivos a y b . Sea (1)

$$G(x) = b^n \left[\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n''(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x) \right]$$

Obsérvese que cada uno de estos factores

$$b^n \pi^{2n-2k} = b^n (\pi^2)^{n-k} = b^n \left(\frac{a}{b} \right)^{n-k} = a^{n-k} b^k$$

Es entero. Puesto que $f_n^{(k)}(0)$ y $f_n^{(k)}(1)$ son enteros, esto demuestra que $G(0)$ y $G(1)$ son enteros.

Derivando G dos veces se obtiene

$$(2) \quad G''(x) = b^n \left[\pi^{2n} f_n''(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(4)}(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(6)}(x) - \cdots + (-1)^n f_n^{(2n+2)}(x) \right]$$

El último término $(-1)^n f_n^{(2n+2)}(x)$ es cero. Así pues sumando (1) y (2) se obtiene

$$\begin{aligned} (3) \quad G''(x) + \pi^2 G(x) &= b^n \left[\pi^{2n} f_n''(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(4)}(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(6)}(x) - \cdots + (-1)^n f_n^{(2n+2)}(x) \right] \\ &\quad + b^n \left[\pi^{2n+2} f_n(x) - \pi^{2n} f_n''(x) + \pi^{2n-2} f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n \pi^2 f_n^{(2n)}(x) \right] \\ &= b^n \pi^{2n+2} f_n(x) = b^n \left(\frac{a}{b} \right)^{n+1} f_n(x) = b^n \left(\frac{a}{b} \right)^1 \left(\frac{a}{b} \right)^n f_n(x) = a^n \pi^2 f_n(x) \end{aligned}$$

Sea

$$H(x) = G'(x) \operatorname{sen}(\pi x) - \pi G(x) \cos(\pi x)$$

Derivando $H(x)$ tenemos

$$\begin{aligned} H'(x) &= \pi G'(x) \cos(\pi x) + G''(x) \operatorname{sen}(\pi x) - \pi G'(x) \cos(\pi x) + \pi^2 G(x) \operatorname{sen}(\pi x) \\ &= [G''(x) + \pi^2 G(x)] \operatorname{sen}(\pi x) = \pi^2 a^n f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x) \text{ por (3)} \end{aligned}$$

Según el segundo teorema fundamental del cálculo infinitesimal

$$\begin{aligned} \int_0^1 H'(x) dx &= \pi^2 \int_0^1 a^n f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x) dx = H(1) - H(0) \\ &= G'(1) \operatorname{sen}(\pi) - \pi G(1) \cos(\pi) - G'(0) \operatorname{sen}(0) - \pi G(0) \cos(0) = \pi [G(1) + G(0)] \end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\pi \int_0^1 a^n f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x) dx = G(1) + G(0) \text{ es un entero}$$

Por otro lado $0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}$ para $0 < x < 1$

$$0 < \pi a^n f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x) < \frac{\pi a^n}{n!} \text{ para } 0 < x < 1$$

En consecuencia

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x) dx < \frac{\pi a^n}{n!}$$

Esta cota es independiente de n , ahora bien si n es suficientemente grande, entonces

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f_n(x) \operatorname{sen}(\pi x) dx < \frac{\pi a^n}{n!} < 1$$

Pero esto es absurdo, puesto que la integral es un entero, y no existe ningún entero entre 0 y 1. Así pues, nuestra proposición original debe haber sido incorrecta, por lo tanto π^2 es irracional.

Legendre señaló que “Es probable que el número no esté contenido ni siquiera entre los irracionales algebraicos, es decir, que no sea raíz de ninguna ecuación algebraica con un número de finito términos, cuyos coeficientes sean racionales. Pero esto parece ser muy difícil de demostrar rigurosamente.” Lo que menciona Legendre es correcto pero pasó mucho tiempo para que se pudiera dar una demostración rigurosa de la trascendencia de π .

II.20. La trascendencia de π

Según Beckmann (1974, p.147), la existencia de los números trascendentes no fue probada hasta 1840, cuando Liouville (1809-1882) demostró que se podían definir números que él definió en su demostración, como el límite de fracciones continuas que no pueden ser raíz de un polinomio de grado finito con coeficientes enteros.

La trascendencia es una propiedad importante e interesante puesto que resuelve el antiguo problema de la cuadratura del círculo. Y un hecho interesante de este tipo de números es que existen una infinidad de ellos, hay más números trascendentes que algebraicos.

En 1873, Charles Hermite (1822-1901) demostró la trascendencia del número e con lo que la ecuación finita

$$ae^r + be^s + ce^t + \dots = 0$$

No se puede satisfacer si $r, s, t, \dots$ son números naturales y $a, b, c, \dots$ son enteros, con alguno de ellos distinto de cero.

En 1882 F. Lindemann logró extender el teorema de Hermite al caso en que $r, s, t, \dots$ y $a, b, c, \dots$ son algebraicos, pero no necesariamente reales. El teorema de Lidemann puede enunciarse como:

Si $r, s, t, \dots, z$ son números algebraicos reales o complejos, distintos entre sí, y si $a, b, c, \dots, n$ son números algebraicos reales o complejos al menos uno de ellos distinto de cero, entonces la suma finita

$$ae^r + be^s + ce^t + \dots + ne^z$$

No puede ser igual a cero.

De este hecho se deduce la trascendencia de π . Utilizando el teorema de Euler en la forma

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

En esta expresión $a=b=1$, son algebraicos, todos los coeficientes después de c son igual a cero, $s=0$ es algebraico, por lo que $r=i\pi$ debe ser la razón por la que la ecuación se anula. Entonces $i\pi$ debe ser trascendente y como i es algebraico, π es trascendente.

El artículo de Lindemann consta de 13 páginas de matemáticas difíciles, aunque más tarde Karl Wilhelm Weierstrass (1815-1897) encontró en 1885, una demostración más sencilla. Matemáticos renombrados siguieron simplificando esta demostración.

II.21. Calculadores de dígitos de π

Algunos avances en la matemática hicieron que los cálculos numéricos fuesen más fáciles de hacer cuando se inventaron los logaritmos y los números decimales a finales del siglo XVI y principios del siglo XIX. Esto hizo posible que a partir de ese momento se calculara el valor de π con cada vez mayor precisión.

En Beckmann (1974, p.95) menciona que a finales del siglo XVI se conocían 30 decimales de π , al terminar el siglo XVIII ya se conocían 140; a fines del siglo XIX se calcularon 707, aunque resultó que solo 526 eran correctos. Las computadoras en el siglo XX llegaron a calcular 500 mil en particular después de la llegada del cálculo diferencial y las series infinitas, los números de decimales en el cálculo de π podrían haber sido empleados para ver la calidad del método de cálculo. Algunos tal vez tenían la esperanza de lograr descubrir una periodicidad en las cifras de π de tal forma que este se pudiera escribir como un racional, donde se podría expresar como una suma de una serie geométrica

$$S = a_0 (q + q^1 + q^2 + q^3 + \dots)$$

De donde a_0 es el número que forman los primeros d dígitos y $q=10^{-d}$, al sumar esta serie geométrica podríamos escribir a π como

$$\pi = 3 + \frac{a_0 \cdot 10^{-d}}{1 - 10^{-d}}$$

Sin embargo Lambert demostró en 1767, que π no es un número racional, terminando con la esperanza de que pudiera ser expresado como la razón entre dos enteros, y dejando claro que no se encontraría periodicidad en sus decimales.

Tal vez las aproximaciones numéricas cada vez más precisas hayan seguido como prueba de la calidad de cálculo numérico, ya que para las aplicaciones prácticas bastaba con unos 17 decimales, conocer más decimales de π carece de sentido científico o práctico.

Según Beckman (1974, p.94), en 1889. Herman Schubert, profesor de matemáticas de Hamburgo, expresó

Imaginemos que una esfera construida con la tierra en el centro, y supongamos que su superficie llega hasta Sirio, que está a 8.8 años luz de la tierra [es decir que la luz,

viajando a 300 mil kilómetros por segundo, tardaría 8.8 años en cubrir esta distancia]. Supongamos que esta inmensa esfera está cubierta de microbios de forma tal que en cada milímetro cúbico se encuentran millones y millones de estos pequeños bichos. Ahora supongamos que estos microbios son sacados de esta esfera y distribuidos a lo largo de una línea recta de forma que dos microbios estén tan separados entre sí como Sirio de la tierra, es decir 8.8 años luz, Imaginemos que esta larga línea es el diámetro de un círculo y supongamos que queremos calcular su circunferencia multiplicando este diámetro por π , con cien decimales de precisión. Entonces aun en el caso de un círculo de tamaño magnitud, la circunferencia calculada de esta forma no diferiría de la circunferencia verdadera ni en una millonésima de milímetro. Este ejemplo basta para ver que el cálculo de π hasta 100 o 500 cifras decimales es completamente inútil.

El matemático holandés Adrián Anthoniszoon (1527- 1607), encontró el valor $355/113$ que es correcto hasta la sexta cifra decimal. Francois Viète en 1593 superó esta marca con un valor correcto en nueve cifras decimales. En ese mismo año el holandés Adriaen Van Rooman (1561- 1615), usó un polígono arquimediano de 2^{30} lados y calculo 15 cifras decimales de π .

En 1596 Ludolph van Ceulen (1539-1610), un holandés profesor de matemáticas en la Universidad de Leiden, en su artículo “Van den Circkel”, utilizó un polígono de $60 \cdot 2^{29}$ lados y obtuvo un valor de π con precisión de 20 decimales, en el libro lanza un reto para que alguien más mejore su aproximación diciendo “el que quiera, puede mejorar la aproximación”, pero nadie quiso mejorar la aproximación hasta que el propio Ludolph en “De Arithmetische en Geometrischfondamenten” publicado en 1615, se encontró un valor de π preciso hasta 32 decimales; según informa Snell en 1621 superó esta marca por tres decimales. Tropicke afirma que estos tres últimos dígitos fueron grabados en su lápida en la iglesia de San Pedro en Leiden, se grabaron los 35 dígitos en su lápida contradiciendo lo que algunos historiadores afirman, sin embargo la lápida se ha perdido.

En el siglo XVIII llega una herramienta de cálculo muy poderosa pues se descubre el cálculo diferencial además una vasta cantidad de series infinitas y fracciones continuas cuyo resultado era π .

El astrónomo Abraham Sharp (1651-1742) utilizó la serie de arco seno para obtener 72 cifras decimales y después, en 1706, John Machin (1680-1752) utilizó la diferencia entre dos arco tangentes para encontrar 100 decimales. Fue derrotado por el matemático francés De Lagny (1660-1734), que agregó 27 dígitos a su resultado en 1717. Esta marca de 127 dígitos parece haberse mantenido hasta 1794, cuando Vega mostró que el decimal 113 era un 8 y no un 7, como figuraba en la serie de dígitos de DeLagny.

En el siglo XVIII también trabajaron en el cálculo de los dígitos de π los calculadores de dígitos chinos y japoneses, aunque las marcas obtenidas por los japoneses distaban en mucho de las marcas europeas, y las marcas chinas estaban muy lejos de las japonesas. El matemático japonés Takebe utilizó un polígono de 1024 lados para hallar 41 decimales de π en 1772, y Matsanuga encontró 50 decimales en 1739, utilizando una serie. A partir de ese momento los japoneses mostraron más interés en estudiar las series que daban como resultado π y no gastaron más su tiempo en el cálculo de los dígitos de π .

El matemático vienés L. K.Schulz von Strassnitzky (1803-1852), utilizó la fórmula del arco tangente para programar al procesador de la computadora; el calculador Johann Martin Zacharias Dase (1824- 1861), calculó correctamente los primeros 200 decimales de π en 1844 tardando menos de dos meses. Antes de que Dase hiciera su cálculo, William Rutherford había

calculado 128 decimales en 1824, pero estos diferían de los de Dase a partir de la posición 153, esta discrepancia fue resuelta a favor de Dase en 1847, cuando Tomas Clausen (1801-1885) publicó 248 decimales.

En 1853 Rutherford presentó 440 decimales, y el 1855 Richter llegó a 500. Cuando William Shanks publicó 707 decimales en 1873- 1874, su logro permaneció por mucho tiempo hasta que en 1945 Ferguson descubrió un error en los cálculos de Shanks a partir del lugar 527, y en 1946 presentó su cálculo de π con una precisión de 620 decimales. En enero de 1947, ayudado por una calculadora encontró 710 decimales y llegó hasta 808 en septiembre de este año.

Hasta el momento los calculadores de los dígitos de π realizaban una cantidad impresionante de cálculos para poder llegar a sus aproximaciones, que en su mayoría eran cálculos hechos a mano en largas hojas de papel que hubiesen podido cubrir hectáreas de terreno, pero uno de ellos, Strassnitzky utilizó una calculadora humana, un calculador prodigio, Johan Martin Zacarias Dase. Nacido en 1840 en Hamburgo, Dase tuvo una educación aceptable y le dieron todas las oportunidades que necesitaba para desarrollar su talento, pero todos lo que le conocieron estaban de acuerdo que salvo por su habilidad para los números era bastante lerdo, nunca aprendió geometría ni ningún otro idioma que no fuera el Alemán. Podía multiplicar en su cabeza dos números de 8 dígitos en 54 segundos, dos números de 20 dígitos en 6 minutos, dos números de 40 dígitos en 40 minutos y dos números de 100 dígitos en 8 horas y 45 minutos; gracias a sus sorprendentes habilidades de cálculo conoció a muchos reconocidos matemáticos. Johann Dase dio una muestra de sus fascinantes poderes de cálculo en Alemania, Australia e Inglaterra, y durante una exhibición en Viena en 1840 conoció a SchulzStrassnitzky, quién lo incitó a emplear sus poderes de cálculo en tablas matemáticas. En ese momento era un joven de 16 años y aceptó con gusto. Cuando tenía 20 años Strassnitzky le enseñó la fórmula

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$$

Con un desarrollo de serie para cada arco tangente. Con este desarrollo calculó π hasta su decimal 205 de los cuales resultaron correctos 200 decimales, tardando menos de dos meses en realizar este cálculo.

El comienzo de la era de las computadoras posibilitó que los calculadores de dígitos superaran sus marcas en decenas o cientos de decimales hasta cifras verdaderamente enormes de dígitos, como veremos más adelante. Mientras que antes de que la computadora apareciera, a los calculadores de dígitos les llevaba meses o años calcular cientos de dígitos, la computadora podía calcular miles de dígitos en solo unas horas.

Parece que el primer cálculo de π en el que se empleó por vez primera una computadora, fue en septiembre de 1949 en la computadora ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer) en los laboratorios de investigación Balística. Se calcularon 2,073 decimales de π en 70 horas esto empleando la fórmula de Machin escrita como

$$\pi = 16 \arctan(1/5) - 4 \arctan(1/239)$$

En noviembre de 1954 la computadora NORC (Naval Ordnance Research Calculator) ubicada en Dahlgren Virginia, calculó π usando 3089 cifras significativas en un tiempo de solo 13

minutos. Esta marca se vio superada en marzo de 1957 por una computadora del Centro de Computo Ferrantien Londres, donde una computadora Pegasus calculó 10,021 decimales en 33 horas, pero después se reveló que durante los cálculos hubo un error en la máquina y que solo 7480 decimales eran correctos. En 1958 en el centro de procesamiento de datos con una computadora IBM 704, se obtuvieron 10 mil decimales con un programa que combina la fórmula de Machin y la serie de Gregory, en 1 hora y 40 minutos. Un año más tarde se ejecutó el mismo programa en una IBM 704 de la Comisión de Energía Atómica de París.

En 1961 en el Centro de Datos de Londres se utilizó una IBM 7090 y se calcularon 20 mil decimales en 39 minutos. En julio de 1961 Shanks y Wrench encontraron una forma de calcular los dígitos unas 20 veces más rápido, esto debido a una mejor computadora y a que utilizaron la fórmula descubierta por Störmer en 1896

$$\pi = 24\arctan(1/8) + 8\arctan(1/57) + 4\arctan(1/239)$$

Con esto se pudieron calcular 100,265 decimales en 8 horas y 43 minutos.

En 1966 la Comisión de Energía Atómica de París calculó en una IBM 7030, 250 mil decimales de π ; tan solo un año después J. Gilloud y J. Filliatre programaron una CDC 6600 con el mismo programa, obteniendo 500 mil decimales en 28 horas y 10 minutos.

En diciembre de 2002, los científicos Japoneses Kanada, Ushio y Kuroda, calcularon 1.2411×10^{12} decimales (más de un billón) en una supercomputadora Hitachi SR800.

Capítulo III

CONSTRUCCIONES DE π UTILIZANDO GEOGEBRA

III.1. La cuadratriz de Hipias

Es una curva mecánica que nos ayuda a dar una aproximación del valor de π , esta curva se puede construir por medio de aparatos físicos o de un software de geometría dinámica, en este caso hacemos la construcción de la cuadratriz y una aproximación de π usando Geogebra.

En la figura (3.1) el segmento $\overline{OA} = 1$, y el punto E es un punto sobre el segmento BC que cumple

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{\text{arco}(CD)}{\text{arco}(CDB)}$$

Esto significa que el avance del punto E sobre el segmento $\overline{BC}$ (es decir la medida del segmento $\overline{BE}$) es proporcional al avance del punto D en el arco CDB (es decir la medida del arco CDB) y es un punto clave para esta construcción, pues se debe a que esta es una curva mecánica. La recta p es perpendicular al segmento BC y pasa por E . G es la intersección entre la recta p y la semirrecta OD . El lugar geométrico generado por G cuando se mueve D sobre la semicircunferencia CAB es la cuadratriz de Dinostrato (véase la figura 3.1).

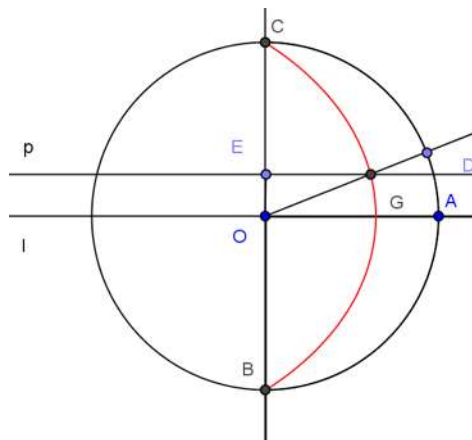


Figura 3.1 La Cuadratriz de Hipias.

Cuadratura del círculo con la cuadratriz de Hippias π , se debe aclarar que esta construcción realizada por Dinostrato, no es la solución al problema de la cuadratura del círculo, ya que no resuelve el problema originalmente planteado por los griegos que dice: “Usando solo regla y compás constrúyase un cuadrado cuya área sea igual a la del círculo dado”.

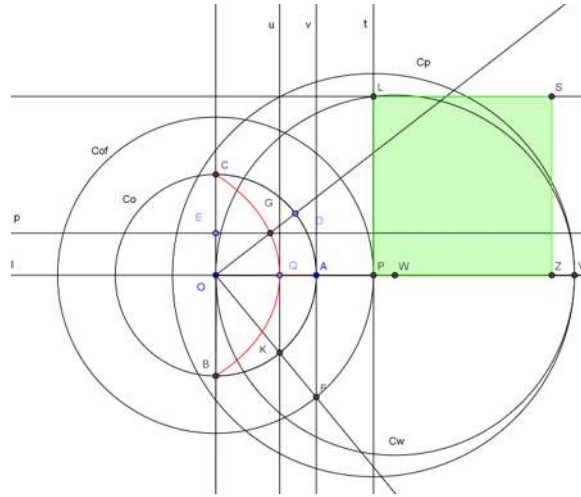


Figura 3.2. Cuadratura del círculo.

Proposición. PL es el lado del cuadrado cuya área es π .

Demostración. Queremos demostrar que el área del cuadrado es π (véase figura 3.2), comencemos observando que por construcción se cumple que

$$\frac{CE}{CB} = \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{\pi}$$

De ahí podemos observar que la medida de CB es una constante, de la igualdad anterior se tiene

$$\frac{CE}{\frac{\pi}{2} - \alpha} = \frac{CB}{\pi}$$

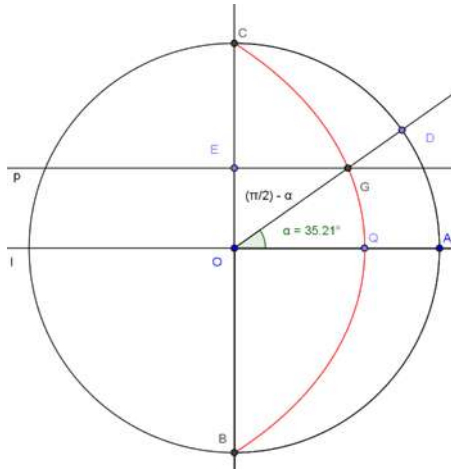


Figura 3.3. Trazo de La Cuadratriz de Hipias.

Es decir que la razón de cambio entre CE y el ángulo $\frac{\pi}{2} - \alpha$ es un constante

Observamos que

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{OE}{OG}, \text{ de ahí que } OE = (OG) \text{sen}(\alpha) (*)$$

$$CE + EO = CO \text{ donde } CE = CO - EO, \text{ entonces } CE = CO - (OG) \text{sen}(\alpha)$$

Además por construcción se cumple la relación

$$\frac{EO}{\alpha} = \frac{CO}{\frac{\pi}{2}}$$

Sustituyendo(*) y despejando tenemos

$$2CO = \frac{\pi(OG) \text{sen}(\alpha)}{\alpha} (**)$$

Cuando α tiende a cero, se tiene $OG \rightarrow OQ$ observamos además que $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\alpha)}{\alpha} = 1$
aplicando estas observaciones a (**) tenemos que

$$2CO = \pi OQ(1) \text{ de donde } OQ = \frac{2CO}{\pi}$$

Pero $CO = 1$ por construcción, entonces

$$OQ = \frac{2}{\pi}$$

Se cumple que

$$\frac{OQ}{OA} = \frac{OK}{OF}$$

Pues el $\triangle AOF \sim \triangle QOK$ por *AAA*, ya que

$$\angle OQK \cong \angle OAF \text{ por ser rectos}$$

$$\angle AOF \cong \angle QOK \text{ ángulo común}$$

$$\angle QKO \cong \angle AFO \text{ ángulos correspondientes entre paralelas}$$

Por semejanza de los triángulos $\triangle AOF$ y $\triangle QOK$

$$\frac{OQ}{OA} = \frac{OK}{OF}$$

Además sabemos que $OQ = \frac{2}{\pi}$, $OA = 1$ y $OK = 1$ puesto que son radios de la circunferencia C_o , de ahí que

$$OF = \frac{OK}{OQ} OA = \frac{1}{\frac{2}{\pi}} (1)$$

$$OF = \frac{\pi}{2}$$

$$OF = OP \text{ ya que son radios de la circunferencia } C_{of}.$$

Por otro lado tenemos

$$OP + PW = WV \text{ despejando } PW = WV - OP \quad (1)$$

$$PV = PW + WV \text{ despejando } PW = PV - WV \quad (2)$$

Igualando (1) y (2)

$$PV - WV = WV - OP$$

De donde

$$WV = \frac{PV + OP}{2}$$

Además sabemos que $OP = \frac{\pi}{2}$ y $PV = 2$, entonces

$$WV = \frac{2 + \frac{\pi}{2}}{2} = 1 + \frac{\pi}{4}$$

$$PW = PV - WV = 2 - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Obsérvese que el triángulo $\triangle LPW$ es rectángulo, aplicamos el teorema de Pitágoras

$$PL = \sqrt{(LW)^2 + (PW)^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)^2}$$

$$PL = \sqrt{\pi}$$

Con esto terminamos la demostración. Se presenta una aproximación de π , a partir de la cuadratriz con el programa Geogebra, en el que partiendo de esta construcción aproximamos π como el área del cuadrado LPZS. Dando como resultado la aproximación

$$\pi \approx 3.14$$

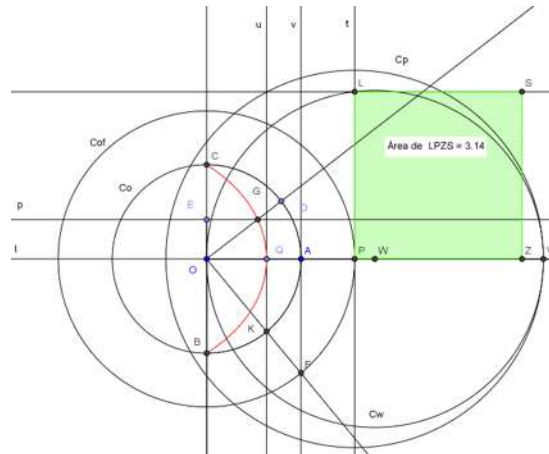


Figura 3.4. Cálculo de π a partir de la cuadratriz de Hipias con el software Geogebra.

III.2. Cuadratura del círculo con la espiral de Arquímedes.

La espiral de Arquímedes es una curva mecánica cuyo trazo depende de aparatos físicos o de un software. Se presenta la construcción de la espiral de Arquímedes con Geogebra.

El punto E en el segmento OB es tal que $\frac{OE}{BC}$ es una constante. El lugar geométrico del punto E cuando se mueve B es la espiral de Arquímedes.

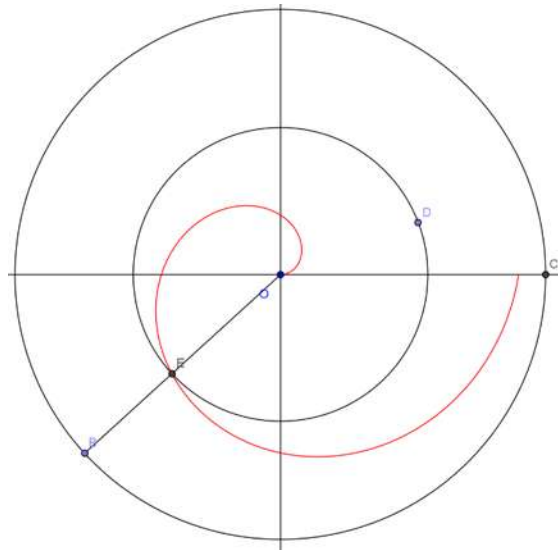


Figura 3.5. La Espiral de Arquímedes

Sea A cualquier punto en la espiral (figura 3.6), y supongamos que la tangente en A interseca a la perpendicular de la línea OA en H . Arquímedes demuestra en su libro sobre las espirales que el segmento OH tiene una longitud igual a la del arco circular AI descrito con el radio OA .

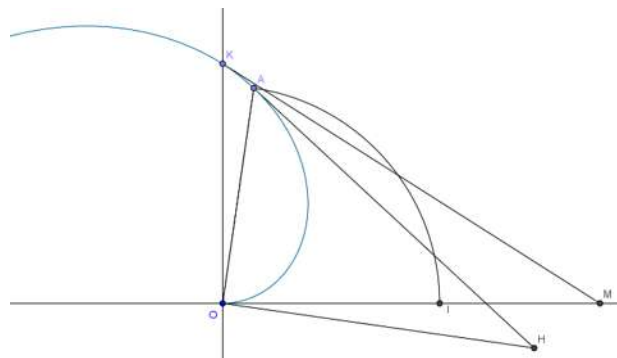


Figura 3.6. Rectificación del círculo con la espiral de Arquímedes

Arquímedes en su libro utilizó una doble reducción al absurdo para demostrar que el segmento OH tiene la misma longitud que el arco AI . Utilizaremos geometría diferencial para demostrarlo un poco más rápido.

Sea $OA = \rho$ y sea α el ángulo IOA . Luego la definición en geometría analítica de la espiral de Arquímedes es:

$$\rho = k\alpha$$

Donde k es una razón igual a la velocidad angular sobre la velocidad lineal. La longitud de la subtangente en coordenadas polares está dada por (la subtangente polar en el punto A está dada por el segmento OH en nuestro caso):

$$OH = -\frac{\rho^2(\alpha)}{\rho'(\alpha)}$$

De la ecuación anterior tenemos que

$$OH = k\alpha^2 = \rho\alpha = \text{arc}AI$$

Como queríamos mostrar.

Para el caso particular en que $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (véase figura 3.6) tendremos el punto k a 90° de la horizontal sobre la espiral. Trazamos la tangente en el punto K y llamamos M al punto de intersección entre la horizontal inicial y la tangente en el punto K . De la prueba anterior se sigue que la longitud de OM es igual a $1/4$ de la circunferencia con radio OK .

Como $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$OM = \frac{1}{2}\pi OK$$

De manera que

$$2\frac{OM}{OK} = \pi$$

Y el área del triángulo es

$$\frac{1}{2}OK \cdot OM = \frac{1}{2}OK \frac{1}{2}\pi OK = \frac{1}{4}\pi OK^2$$

Lo que quiere decir que el área del círculo con radio OK es 4 veces el área del triángulo ΔOKM .

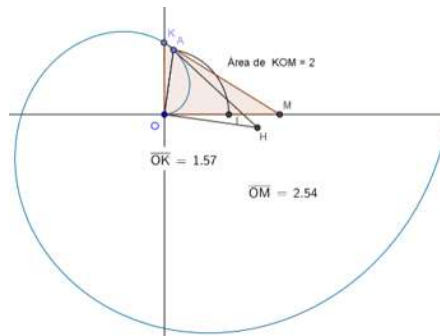


Figura 3.7. Aproximación de π a partir de La Espiral de Arquímedes con Geogebra.

$$\pi = \frac{2 \cdot OM}{OK} = \frac{2 \cdot (2.54)}{1.57} \approx 3.2356$$

III.3. Construcción de Kochansky

En esta construcción el ángulo MOA tiene una medida de 30° , la circunferencia tiene un radio de uno para una aproximación de π más directa, el segmento $DC = 3r$ (siendo r el radio de la circunferencia), AB es paralela a DC (figura 3.8).

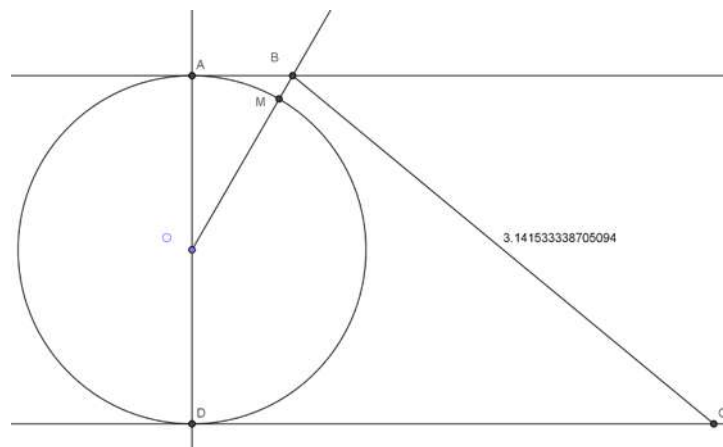


Figura 3.8. Aproximación de π utilizando la construcción de Kochansky.

De manera que

$$AB = OA \tan 30 = r \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

Por otro lado

$$BC^2 = AD^2 + (DC - AB)^2$$

$$BC^2 = (2r)^2 + \left(3r - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2$$

Además

$$2BC \approx 2\pi r$$

Sustituyendo $r = 1$ de la construcción

$$\pi \approx \sqrt{4 + \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

Nos da una aproximación

$$\pi \approx 3.14153333$$

Esta aproximación es correcta hasta la cuarta cifra decimal.

III.4. Construcción de Gelder

En esta construcción se construye una fracción geoméricamente para aproximar π con una precisión de seis decimales y dado que esta se puede construir geoméricamente. En la figura (véase figura 3.9) $OB = 1$, $OE = 7/8$, $GH = 1/2$, los segmentos HI y OB , JH y IE son paralelos respectivamente.

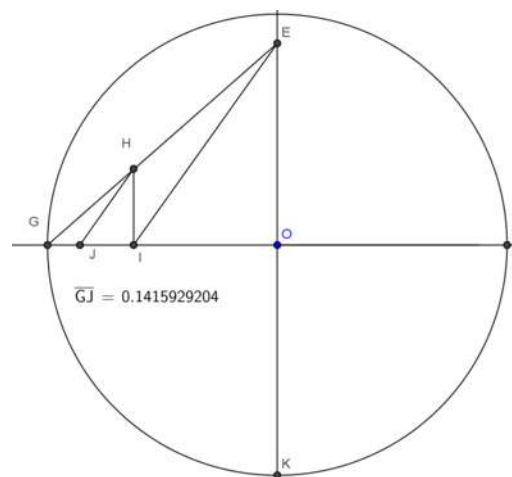


Figura 3.9. Construcción geométrica de Gelder para la aproximación de $\pi - 3$.

La construcción de Gelder consiste en construir geoméricamente un segmento que tenga como longitud $355/113$, en esta construcción el segmento con esta longitud es el segmento GJ como se muestra a continuación.

El triángulo es rectángulo por construcción, entonces

$$GE = \sqrt{\frac{7^2}{8^2} + 1}$$

El triángulo $\triangle OEG$ es semejante a $\triangle IHG$ por *AAA*, entonces

$$GI = \frac{GH}{GE} \cdot GO = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{7^2}{8^2} + 1}} = \frac{4}{\sqrt{7^2 + 8^2}}$$

Además

$$HI = \frac{GH}{GE} \cdot EO = \frac{7}{2\sqrt{7^2 + 8^2}}$$

Los triángulos $\triangle JIH$ y $\triangle IOE$ son semejantes por *AAA*, de ahí tenemos

$$IJ = \frac{IH}{OE} \cdot OI = \frac{4(\sqrt{7^2 + 8^2} - 4)}{7^2 + 8^2}$$

Por otro lado

$$GJ = GI - JI = \frac{4^2}{7^2 + 8^2} = \frac{16}{113}$$

Entonces Gelder aproxima π como

$$\pi - 3 = GJ = \frac{16}{113}$$

Encontrando un valor para π

$$\pi = 3.14159292$$

III.5. Construcción Hobson

Sea $OB = OA = 1$, $OD = 3/5$, $OC = 3/2$, trazamos los semicírculos DGE , AHC donde los puntos G y H son la intersección con la perpendicular a AC .

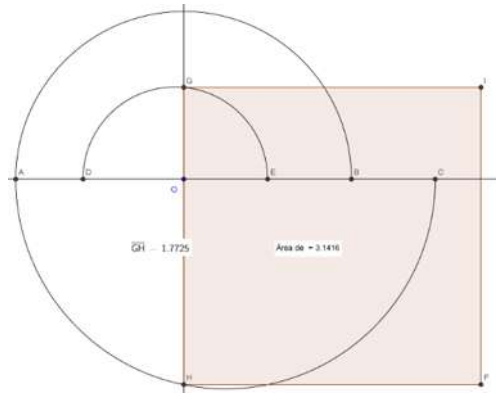


Figura 3.10. Construcción de Hobson para el cálculo de π

Se obtiene una aproximación de π como el área del cuadrado de lado GH , dando como resultado

$$\pi = 3.1416$$

Es decir GH^2 difiere en muy poco del área del círculo de radio AO .

III.6. Construcción de Ramanujan

Construimos un círculo de radio 1 con centro en un punto O . AB es el diámetro de la circunferencia con centro en O . El punto C se ubica en la mitad del arco ACB . El punto H se encuentra ubicado en el segmento AO de manera que $AH = 1/3$.

Trazamos en segmento CB y sobre él ubicamos los puntos K y L de manera que $CK = AH$ y $CL = 2AH$. Y trazamos los segmentos AK y AL , con el radio AK trazamos un arco de circunferencia hasta que intersecte al segmento AL , al punto en la intersección le llamamos M . Por el punto M trazamos una paralela a CB que cortara a AK en N .

Trazamos el segmento ON . Por el punto K trazamos una paralela a ON , esta recta corta al segmento AK en P . Con el radio AP trazamos un arco de circunferencia que corta a la recta tangente a la circunferencia que pasa por el punto A , en el punto Q .

Trazamos el segmento OQ .

Ramanujan afirmó que la media proporcional entre AO y OQ es un tercio de la longitud del arco ACB .


$$\frac{\pi}{3} = \sqrt{AO \cdot OQ}$$
$$\frac{\pi}{3} = \sqrt{AO \cdot OQ} = \sqrt{OQ} = \sqrt{\sqrt{AQ^2 + OA^2}} = \sqrt[4]{1 + AQ^2}$$
$$\frac{AP}{AN} = \frac{HA}{OA} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{AN}{AK} = \frac{AM}{AL}$$

$$AL^2 = AB^2 + BL^2 - 2BLAB \cos 45^\circ = 2^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right)^2 - 2(2)\left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{22}{9}$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo ΔAKB se obtiene

$$AK^2 = AB^2 + BK^2 - 2BK \cdot AB \cos 45^\circ = 2^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)^2 - 2(2)\left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{19}{9}$$

Entonces

$$AN^2 = \left(\frac{AK^2}{AL}\right)^2 = \frac{AK^4}{AL^2} = \frac{\frac{19^2}{9^2}}{\frac{22}{9}} = \frac{19^2}{22 \cdot 9}$$

$$AQ^2 = \left(\frac{AN}{3}\right)^2 = \frac{AN^2}{9} = \frac{19^2}{22 \cdot 9^2}$$

Así podemos aproximar π con esta construcción dada por Ramanujan como

$$\pi = 3 \cdot \sqrt[4]{1 + AQ^2} = 3 \cdot \sqrt[4]{1 + \frac{19^2}{22 \cdot 9^2}} = \sqrt[4]{9^2 + \frac{19^2}{22}}$$

Lo que nos da una aproximación de π como

$$\pi = 3.141592652$$

Que es correcto hasta el octavo dígito decimal.

III.7. Construcción de Mascheroni

En esta construcción se traza una circunferencia de radio 1 con centro en O , se inscribe un hexágono regular en la circunferencia. Se traza el diámetro BG , con un radio BE se traza un arco de circunferencia comenzando en E y prolongando hacia arriba, con el mismo radio se traza un arco que pasa por el punto C y prolongando hacia arriba, donde H es la intersección de los dos arcos. Con un radio CH trazamos un arco de circunferencia comenzando en H y prolongando hacia abajo a la intersección del arco y la circunferencia le llamamos I . Se traza el segmento BI . La medida del segmento BI es aproximadamente igual a $\pi/2$.

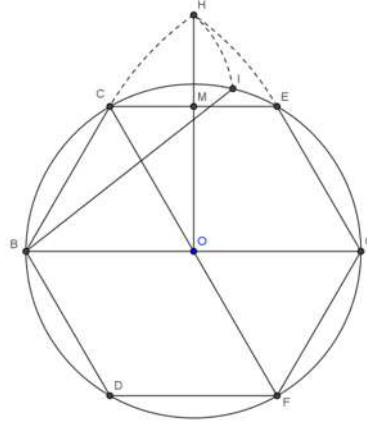


Figura 3.12. Construcción de Mascheroni para hacer una rectificación aproximada del ángulo recto.

Demostración.

$$MC = OC \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$OM = \sqrt{(OC)^2 - (MC)^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$BH = BE = \sqrt{EG^2 + BG^2 - 2EG \cdot BG \cos 60} = \sqrt{1 + 4 - 2} = \sqrt{3}$$

$$OH = \sqrt{BH^2 - BO^2} = \sqrt{3 - 1} = \sqrt{2}$$

$$CH = \sqrt{(OH - OM)^2 + (MC)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{3 - \sqrt{6}}$$

Por otro lado

$$CF \cdot BI = BC \cdot IF + CI \cdot BF$$

$$BC = 2MC = 1, CI = CH = \sqrt{3 - \sqrt{6}}, BF = BE = \sqrt{3}, CF = 2 \text{ por ser diámetro}$$

Aplicamos teorema de cosenos para en $\triangle CIF$ para encontrar IF de donde

$$\begin{aligned} 2BI &= 1 \cdot \sqrt{CF^2 - CI^2} + CI \cdot BF = \sqrt{4 - (3 - \sqrt{6})} + \sqrt{3} \sqrt{3 - \sqrt{6}} \\ &= \sqrt{1 + \sqrt{6}} + \sqrt{9 - 3\sqrt{6}} = 3.142399172 \end{aligned}$$

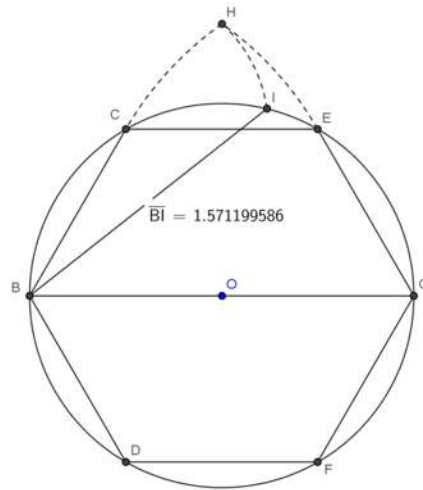


Figura 3.13. Rectificación aproximada de un ángulo de 90° de Mascheroni.

La aproximación de la construcción de Mascheroni para π es

$$\pi = 3.142399172$$

Que es correcta hasta la segunda cifra decimal.

CAPÍTULO IV

CONCLUSIONES

Como se ha visto en el desarrollo de este trabajo, el estudio del número π apareció en el trabajo de grandes científicos como Arquímedes, Newton, Euler, Leibniz, Legendre, Lindemann, entre otros. En ocasiones ocurrieron descubrimientos relevantes para la historia del número cuando originalmente se trataba de dar solución a un problema totalmente distinto.

El estudio de la historia del número π , nos deja una idea sobre la manera en cómo se concebía a un número desde la antigüedad y como esta idea evolucionó con los números irracionales y aún más con los números trascendentales.

Las lúnulas de Hipócrates constituyen un avance en el que por primera vez alguien pudo saber con exactitud el área de una figura limitada por curvas. Su aparición llenó de esperanza a muchos científicos de la época de que el problema de la cuadratura del círculo tenía solución.

Las aportaciones de los griegos a la historia de π , fueron muy originales especialmente las de Arquímedes, que no fueron superadas hasta 1900 años después, cuando los estudiosos de la época comenzaron a preguntarse si no habría otro método para calcular π .

El método de Arquímedes fue desafiado cuando se pensó si había una manera más rápida de llegar a π , que comparar el círculo con polígonos inscritos y circunscritos. Lo que constituye la antesala a un gran avance en la historia de π , ya que con ello se prepara la llegada del cálculo, herramienta que fue muy valiosa en el estudio de ese número.

En un principio el estudio el cálculo de los dígitos de π fue utilizado para comprobar la calidad de los cálculos numéricos en la computadora.

Las aplicaciones en las que aparece π , no requieren de una gran cantidad de decimales. La obsesión por obtener cada vez más decimales de π , llevó a los científicos a desarrollar métodos de cálculo numérico que fueran cada vez más eficientes.

Euler fue un gran científico que contribuyó de manera enorme en la historia de π , dejando como legado una gran cantidad de series infinitas que converge a π y aportando las preguntas ¿Qué clase de número es π ?, ¿Acaso π es la raíz de una ecuación algebraica de grado finito con coeficientes racionales?

Existe una gran variedad de series que dan como resultado el número π .

El número π , no es expresable como la razón entre dos enteros. π es irracional, y no puede ser la raíz de un polinomio de grado finito con coeficientes racionales, es decir, π es trascendente.

El problema de la cuadratura del círculo no se puede resolver usando solo regla y compás. Las construcciones que cuadran el círculo no cumplen con la condición de poder realizarse utilizando solo regla y compás, por lo que no resuelven el problema de la cuadratura del círculo. En algunas de ellas se utilizan curvas mecánicas que solo son realizables con aparatos físicos o software de geometría dinámica.

El software dinámico Geogebra nos ayuda en la visualización y trazo de curvas que difícilmente podríamos trazar con lápiz y papel. Es una excelente herramienta para el trazo de curvas mecánicas ya que sin su ayuda se tendría que construir un aparato físico para su trazo.

Las construcciones geométricas del número π , son una muestra del ingenio de grandes científicos, pueden ser de ayuda en la enseñanza como ejemplo y motivación para estudiantes que tienen curiosidad sobre este número.

El software Geogebra es una herramienta que posibilita una perspectiva más amplia de las curvas y sus construcciones, que en ocasiones es difícil imaginar usando solo lápiz y papel.

Existe una buena variedad de construcciones geométricas del número π , estas construcciones van desde la construcción geométrica de una razón que aproxima al número π , hasta la construcción de una curva en donde se puede encontrar ingeniosamente una aproximación al número π .

Es impresionante que este número aparezca casualmente en obras de científicos que trataban temas distintos y variados. La riqueza de las construcciones geométricas para aproximar π es legado y muestra de un gran ingenio.

REFERENCIAS

- Beckmann, P. (1974). Historia de π . Editorial Conaculta.
- Perero, M. (1994). HISTORIA E HISTORIAS DE LAS MATEMÁTICAS. Editorial Iberoamérica.
- Collette, J. P. (1986). Historia de las matemáticas I. Editores siglo XXI.
- Díaz Barriga, A. E. (2009). Geometría dinámica con Cabri-Geomètre. 3ª edición.
- Lara, A. M. (1991). Los matemáticos griegos. Universidad de Querétaro.
- Struik, D. J. (1986). Historia concisa de las matemáticas. Instituto Politécnico Nacional.
- Spivak, M. (1996). Cálculo Infinitesimal. Universidad de Brandeis. Editorial revert
- Hofman, E. J. (1978). Historia de la matemática. Tomo I.
- Lehmann, Ch. (2004). Geometría analítica. Editorial Limusa.
- Piskunov, N. (1980). Cálculo diferencial e integral. Tomo I. Editorial Mir Moscú.
- Mercado, V. (2013). Principio unificador de las cónicas y otras curvas. Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UMSNH.

ANEXOS

Protocolo de construcción de las Figuras realizadas en Geogebra 4.2.58.0 (java 1.6.0_43-32bit, 989MB, MPReduce .016). El programa fue corrido en una computadora HP Pavilion dv2500, con el sistema operativo Windows 8.

Lúnula de Hipócrates.

Nº	Nombre	Definición	Valor
1	Punto A	Punto de intersección de EjeX, EjeY	$A = (0, 0)$
2	Punto C	Punto sobre EjeX	$C = (14.2, 0)$
3	Punto E	Punto Medio de A, C	$E = (7.1, 0)$
4	Recta a	Recta que pasa por E perpendicular a EjeX	$a: x = 7.1$
5	Arco c	Semicircunferencia a través de A y C	$c = 22.31$
6	Punto B	Punto de intersección de c, a	$B = (7.1, 7.1)$
7	Triángulo polígono1	Polígono A, B, C	polígono1 = 50.41
7	Segmento b	Segmento [A, B] de Triángulo polígono1	$b = 10.04$
7	Segmento $a_{_{<fontsize="-1">1}}$	Segmento [B, C] de Triángulo polígono1	$a_{_{<fontsize="-1">1}} = 10.04$
7	Segmento d	Segmento [C, A] de Triángulo polígono1	$d = 14.2$
8	Número e	$\text{abs}((\text{Distancia}[E, A] \text{ Distancia}[A, B]) / \text{Distancia}[A, C])$	$e = 5.02$
9	Punto A'	A rotado por el ángulo 90°	$A' = (14.2, -14.2)$
10	Ángulo α	Ángulo entre A, C, A'	$\alpha = 90^\circ$
11	Recta f	Recta que pasa por C perpendicular a d	$f: x = 14.2$
12	Número $g_{_{<fontsize="-1">1}}$	$\text{abs}(2(\text{Distancia}[E, A] \text{ Distancia}[A, C]) / \text{Distancia}[A, B])$	$g_{_{<fontsize="-1">1}} = 20.08$
13	Punto D	Punto sobre Circunferencia[A, $\text{abs}(2(\text{Distancia}[E, A] \text{ Distancia}[A, C]) / \text{Distancia}[A, B])]$	$D = (-7.62, -18.58)$
14	Segmento g	Segmento [A, D]	$g = 20.08$
15	Circunferencia h	Circunferencia con centro A y radio Segmento[A, D]	$h: x^2 + y^2 = 403.28$
16	Segmento i	Segmento [A, A']	$i = 20.08$
17	Punto F	Punto Medio de A, A'	$F = (7.1, -7.1)$
18	Circunferencia k	Circunferencia que pasa por A con centro F	$k: (x - 7.1)^2 + (y + 7.1)^2 = 100.82$
19	Triángulo polígono2	Polígono A, C, A'	polígono2 = 100.82
19	Segmento a'	Segmento [A, C] de Triángulo polígono2	$a' = 14.2$

19	Segmento a_{-1}^2	Segmento [C, A'] de Triángulo polígono2	$a_{-1}^2 = 14.2$
19	Segmento c_{-1}^1	Segmento [A', A] de Triángulo polígono2	$c_{-1}^1 = 20.08$

Cuadratriz de Hipias.

Nº	Nombre	Definición	Valor
1	Punto A		$A = (-2, 0)$
2	Punto B		$B = (4, 0)$
3	Recta h	Recta que pasa por A, B	$h: y = 0$
4	Punto O	Punto sobre h	$O = (0, 0)$
5	Punto E	Punto sobre h	$E = (1, 0)$
6	Circunferencia c	Circunferencia que pasa por E con centro O	$c: x^2 + y^2 = 1$
7	Recta b	Recta que pasa por O perpendicular a h	$b: x = 0$
8	Punto F	Punto de intersección de c, b	$F = (0, 1)$
9	Punto J	Punto de intersección de c, b	$J = (0, -1)$
10	Segmento a	Segmento [F, J]	$a = 2$
11	Arco d	Semicircunferencia a través de F y J	$d = \pi$
12	Punto G	Punto sobre d	$G = (0.54, -0.84)$
13	Arco e	ArcoCircunferencia[O, G, F]	$e = 2.57$
14	Semirrecta f	Semirrecta que pasa por O, G	$f: 0.84x + 0.54y = 0$
15	Ángulo α	Ángulo entre h, f	$\alpha = 302.61^\circ$
16	Ángulo β	$\text{abs}(1 / (\pi / 2) \alpha)$	$\beta = 192.65^\circ$
17	Punto K_{-1}^1	Punto sobre Circunferencia[O, $\text{abs}(1 / (\pi / 2) \alpha)$]	$K_{-1}^1 = (0, 3.36)$
18	Segmento g	Segmento [O, K_{-1}^1]	$g = 3.36$
19	Recta i	Recta que pasa por K_{-1}^1 paralela a h	$i: y = 3.36$
20	Punto M_{-1}^1	Punto de intersección de i, f	M_{-1}^1 indefinido
21	Semirrecta s	Semirrecta que pasa por K_{-1}^1 , M_{-1}^1	s indefinido
22	Lugar Geométrico Cuadratriz	LugarGeométrico[M_{-1}^1 , G]	Cuadratriz = LugarGeométrico[M_{-1}^1 -

			$1^{\circ}1' </sub>, G]$
23	Número $j _{<fontsize="-1">1}$	$\text{abs}(1 / (\pi / 2) (2\pi - \alpha))$	$j _{<fontsize="-1">1} = 0.64$
24	Punto K	Punto sobre Circunferencia[O, $\text{abs}(1 / (\pi / 2) (2\pi - \alpha))]$	$K = (0, -0.64)$
25	Segmento j	Segmento [O, K]	$j = 0.64$
26	Recta k	Recta que pasa por K perpendicular a a	$k: y = -0.64$
27	Punto $M _{<fontsize="-1">2}$	Punto de intersección de k, f	$M _{<fontsize="-1">2} = (0.41, -0.64)$
28	Lugar Geométrico lugar1	LugarGeométrico[$M _{<fontsize="-1">2}, G]$	$\text{lugar1} = \text{LugarGeométrico}[M _{<fontsize="-1">2}, G]$
29	Recta v	Recta que pasa por E perpendicular a h	$v: x = 1$
30	Segmento l	Segmento [O, E]	$l = 1$
31	Punto P	Punto sobre l	$P = (0.64, 0)$
32	Recta u	Recta que pasa por P perpendicular a l	$u: x = 0.64$
33	Punto R	Punto sobre u	$R = (0.64, 0.78)$
34	Semirrecta n	Semirrecta que pasa por O, R	$n: -0.78x + 0.64y = 0$
35	Punto S	Punto de intersección de v, n	$S = (1, 1.22)$
36	Circunferencia p	Circunferencia que pasa por S con centro O	$p: x^2 + y^2 = 2.5$
37	Punto C	Punto de intersección de p, h	$C = (-1.58, 0)$
37	Punto T	Punto de intersección de p, h	$T = (1.58, 0)$
38	Circunferencia q	Circunferencia con centro T y radio 2	$q: (x - 1.58)^2 + y^2 = 4$
39	Punto D	Punto de intersección de q, h	$D = (-0.42, 0)$
39	Punto M	Punto de intersección de q, h	$M = (3.58, 0)$
40	Punto N	Punto Medio de O, M	$N = (1.79, 0)$
41	Circunferencia $r _{<fontsize="-1">1}$	Circunferencia que pasa por M con centro N	$r _{<fontsize="-1">1}: (x - 1.79)^2 + y^2 = 3.2$
42	Recta r	Recta que pasa por T perpendicular a h	$r: x = 1.58$
43	Punto H	Punto de intersección de $r _{<fontsize="-1">1}, r$	$H = (1.58, -1.78)$
43	Punto W	Punto de intersección de $r _{<fontsize="-1">1}, r$	$W = (1.58, 1.78)$
44	Segmento m	Segmento [W, T]	$m = 1.78$
45	Circunferencia t	Circunferencia con centro T y radio Segmento[T, W]	$t: (x - 1.58)^2 + y^2 = 3.16$
46	Punto l	Punto de intersección de t, h	$l = (-0.2, 0)$
46	Punto L	Punto de intersección de t, h	$L = (3.36, 0)$
47	Circunferencia $c _{<fontsize="-1">1}$	Circunferencia con centro L y radio Segmento[L, T]	$c _{<fontsize="-1">1}: (x - 3.36)^2 + y^2 =$

	1"1</sub>		3.16
48	Circunferencia d_{<fontsize="-1">1}	Circunferencia con centro W y radio Segmento[L, T]	d_{<fontsize="-1">1}: $(x - 1.58)^2 + (y - 1.78)^2 = 3.16$
49	Punto Q	Punto de intersección de d_{<fontsize="-1">1},&br/>c_{<fontsize="-1">1}	Q = (3.36, 1.78)
49	Punto U	Punto de intersección de d_{<fontsize="-1">1},&br/>c_{<fontsize="-1">1}	U = (1.58, 0)
50	Segmento a_{<fontsize="-1">1}	Segmento [W, Q]	a_{<fontsize="-1">1} = 1.78
51	Segmento b_{<fontsize="-1">1}	Segmento [Q, L]	b_{<fontsize="-1">1} = 1.78
52	Segmento e_{<fontsize="-1">1}	Segmento [L, T]	e_{<fontsize="-1">1} = 1.78

Construcción de la espiral de Arquímedes.

Nº	Nombre	Definición	Valor	Subtítulo
1	Punto O		$O = (2.24, -1.4)$	
2	Recta a	Recta que pasa por O paralela a EjeX	$a: y = -1.4$	
3	Recta b	Recta que pasa por O perpendicular a a	$b: x = 2.24$	
4	Circunferencia d	Circunferencia con centro O y radio 7	$d: (x - 2.24)^2 + (y + 1.4)^2 = 49$	
5	Punto B	Punto sobre d	$B = (-2.93, -6.12)$	
6	Segmento c	Segmento [O, B]	$c = 7$	
7	Punto C	Punto de intersección de d, a	$C = (9.24, -1.4)$	
8	Ángulo α	Ángulo entre C, O, B	$\alpha = 222.41^\circ$	
9	Ángulo β	$\text{abs}(\alpha)$	$\beta = 222.41^\circ$	
10	Punto D	Punto sobre Circunferencia[O, $\text{abs}(\alpha)$]	$D = (5.87, -0.03)$	
11	Circunferencia f	Circunferencia con centro O y radio Segmento[O, D]	$f: (x - 2.24)^2 + (y + 1.4)^2 = 15.07$	
12	Punto E	Punto de intersección de f, c	$E = (-0.63, -4.02)$	
13	Segmento g	Segmento [O, E]	$g = 3.88$	
14	Lugar Geométrico lugar1	LugarGeométrico[E, B]	$\text{lugar1} = \text{LugarGeométrico}[E, B]$	

Construcción de Kochansky

Nº	Nombre	Definición	Valor
1	Punto O	Punto sobre EjeX	$O = (4.78, 0)$
2	Recta a	Recta que pasa por O perpendicular a EjeX	$a: x = 4.78$
3	Punto A	Punto sobre a	$A = (4.78, 4.04)$
4	Circunferencia c	Circunferencia que pasa por A con centro O	$c: (x - 4.78)^2 + y^2 = 16.32$
5	Recta b	Recta que pasa por O perpendicular a EjeY	$b: y = 0$
6	Punto A'	A rotado por el ángulo 330°	$A' = (6.8, 3.5)$
7	Ángulo α	Ángulo entre A', O, A	$\alpha = 30^\circ$
8	Semirrecta d	Semirrecta que pasa por O, A'	$d: -3.5x + 2.02y = -16.72$
9	Recta e	Recta que pasa por A perpendicular a a	$e: y = 4.04$
10	Punto B	Punto de intersección de e, d	$B = (7.11, 4.04)$
11	Número $f_{_{<fontsize="1">1}}$	$\text{abs}(3\text{Distancia}[O, A])$	$f_{_{<fontsize="1">1}} = 12.12$
12	Punto $C_{_{<fontsize="1">1}}$	Punto sobre Circunferencia[O, $\text{abs}(3\text{Distancia}[O, A])$]	$C_{_{<fontsize="1">1}} = (16.9, 0)$
13	Segmento f	Segmento [O, $C_{_{<fontsize="1">1}}$]	$f = 12.12$
14	Segmento g	Segmento [B, $C_{_{<fontsize="1">1}}$]	$g = 10.59$
15	Segmento h	Segmento [O, B]	$h = 4.66$
16	Segmento i	Segmento [A, B]	$i = 2.33$
17	Punto $D_{_{<fontsize="1">1}}$	Punto de intersección de c, a	$D_{_{<fontsize="1">1}} = (4.78, 4.04)$
17	Punto D	Punto de intersección de c, a	$D = (4.78, -4.04)$
18	Segmento j	Segmento [A, D]	$j = 8.08$
19	Texto texto1		3r
20	Circunferencia k	Circunferencia con centro D y radio Segmento[O, $C_{_{<fontsize="1">1}}$]	$k: (x - 4.78)^2 + (y + 4.04)^2 = 146.89$
21	Recta l	Recta que pasa por D perpendicular a j	$l: y = -4.04$
22	Punto F	Punto de intersección de k, l	$F = (-7.34, -4.04)$
22	Punto C	Punto de intersección de k, l	$C = (16.9, -4.04)$
23	Texto texto2		3r
24	Segmento m	Segmento [D, C]	$m = 12.12$
25	Segmento n	Segmento [C, B]	$n = 12.69$

Construcción de Gelder.

Nº	Nombre	Definición	Valor	Subtítulo
1	Punto O		$O = (2.78, 0.9)$	
2	Recta a	Recta que pasa por O perpendicular a EjeX	$a: x = 2.78$	
3	Recta b	Recta que pasa por O perpendicular a a	$b: y = 0.9$	
4	Circunferencia c	Circunferencia con centro O y radio 1	$c: (x - 2.78)^2 + (y - 0.9)^2 = 1$	
5	Punto A	Punto de intersección de c, a	$A = (2.78, -0.1)$	
5	Punto B	Punto de intersección de c, a	$B = (2.78, 1.9)$	
6	Número $d_{_{<fontsize="1">1}}$		$d_{_{<fontsize="1">1}} = 0.875$	
7	Punto C	Punto sobre Circunferencia [O, 0.875]	$C = (3.655, 0.9)$	
8	Segmento d	Segmento [O, C]	$d = 0.875$	
9	Circunferencia e	Circunferencia con centro O y radio Segmento [O, C]	$e: (x - 2.78)^2 + (y - 0.9)^2 = 0.765625$	
10	Punto D	Punto de intersección de e, a	$D = (2.78, 0.025)$	
10	Punto E	Punto de intersección de e, a	$E = (2.78, 1.775)$	
11	Punto F	Punto de intersección de c, b	$F = (3.78, 0.9)$	
11	Punto G	Punto de intersección de c, b	$G = (1.78, 0.9)$	
12	Segmento f	Segmento [G, E]	$f = 1.3287682266$	
13	Circunferencia g	Circunferencia con centro G y radio 0.5	$g: (x - 1.78)^2 + (y - 0.9)^2 = 0.25$	
14	Punto H	Punto de intersección de g, f	$H = (2.1562883474, 1.2292523039)$	
15	Recta h	Recta que pasa por H perpendicular a b	$h: x = 2.1562883474$	
16	Punto I	Punto de intersección de h, b	$I = (2.1562883474, 0.9)$	
17	Segmento i	Segmento [I, E]	$i = 1.0745423331$	
18	Recta j	Recta que pasa por H paralela a i	$j: -0.875x + 0.6237116526y = -1.1200533179$	
19	Punto J	Punto de intersección de j, b	$J = (1.9215929204, 0.9)$	
20	Segmento k	Segmento [H, J]	$k = 0.4043377587$	
21	Segmento l	Segmento [H, I]	$l = 0.3292523039$	
22	Punto K	Punto de intersección de c, a	$K = (2.78, -0.1)$	
23	Número distanciaGJ	Distancia de G a J	$\text{distanciaGJ} = 0.1415929204$	
24	Texto TextoGJ	$\overline{\text{" + (Nombre[G]) + (Nombre[J]) + "}} \setminus = \setminus " + \text{distanciaGJ}$	$\overline{\text{GJ}} \setminus = \setminus 0.1415929204$	

Construcción de Hobson.

Nº	Nombre	Definición	Valor
1	Punto O		$O = (3.04, 1.04)$
2	Recta a	Recta que pasa por O perpendicular a EjeY	$a: y = 1.04$
3	Recta b	Recta que pasa por O perpendicular a EjeX	$b: x = 3.04$
4	Circunferencia c	Circunferencia con centro O y radio 1	$c: (x - 3.04)^2 + (y - 1.04)^2 = 1$
5	Punto A	Punto de intersección de c, a	$A = (2.04, 1.04)$
6	Circunferencia d	Circunferencia con centro O y radio 0.6	$d: (x - 3.04)^2 + (y - 1.04)^2 = 0.36$
7	Punto D	Punto de intersección de d, a	$D = (2.44, 1.04)$
8	Circunferencia e	Circunferencia con centro O y radio 1.5	$e: (x - 3.04)^2 + (y - 1.04)^2 = 2.25$
9	Punto C	Punto de intersección de e, a	$C = (4.54, 1.04)$
10	Circunferencia f	Circunferencia con centro O y radio 0.5	$f: (x - 3.04)^2 + (y - 1.04)^2 = 0.25$
11	Punto E	Punto de intersección de f, a	$E = (3.54, 1.04)$
12	Arco g	Semicircunferencia a través de D y E	$g = 1.727875959474386$
13	Arco h	Semicircunferencia a través de C y A	$h = 3.926990816987241$
14	Punto G	Punto de intersección de g, b	$G = (3.04, 1.587722557505167)$
15	Punto H	Punto de intersección de h, b	$H = (3.04, -0.184744871391589)$
16	Circunferencia k	Circunferencia con centro O y radio 1	$k: (x - 3.04)^2 + (y - 1.04)^2 = 1$
17	Punto B	Punto de intersección de k, a	$B = (4.04, 1.04)$
18	Arco p	Semicircunferencia a través de A y B	$p = \pi$
19	Número distanciaGH	Distancia de G a H	$\text{distanciaGH} = 1.772467428896756$
20	Texto TextoGH	" $\overline{\{ + (\text{Nombre}[G]) + (\text{Nombre}[H]) + \}}$ $\backslash = \backslash$ " + distanciaGH	$\overline{\{GH\}} \backslash = \backslash 1.772467428896756$
21	Cuadrilátero polígono1	Polígono[G, H, 4]	$\text{polígono1} = 3.141640786499876$
21	Segmento i	Segmento [G, H] de Cuadrilátero polígono1	$i = 1.772467428896756$
21	Segmento j	Segmento [H, F] de Cuadrilátero polígono1	$j = 1.772467428896755$
21	Punto F	Polígono[G, H, 4]	$F = (4.812467428896755, -0.184744871391589)$
21	Punto I	Polígono[G, H, 4]	$I = (4.812467428896756, 1.587722557505166)$
21	Segmento l	Segmento [F, I] de Cuadrilátero polígono1	$l = 1.772467428896756$
21	Segmento m	Segmento [I, G] de Cuadrilátero polígono1	$m = 1.772467428896756$
22	Texto Textopolígono1	"Área de = " + polígono1	$\text{Área de} = 3.141640786499876$

Construcción de Ramanujan.

Nº	Nombre	Valor	Definición
1	Punto O	$O = (4.94, 2.8)$	
2	Circunferencia c	$c: (x - 4.94)^2 + (y - 2.8)^2 = 1$	Circunferencia con centro O y radio 1
3	Recta a	$a: y = 2.8$	Recta que pasa por O paralela a EjeX
4	Punto A	$A = (3.94, 2.8)$	Punto de intersección de c, a
4	Punto B	$B = (5.94, 2.8)$	Punto de intersección de c, a
5	Recta b	$b: x = 4.94$	Recta que pasa por O perpendicular a a
6	Punto C _{<sub><fontsize="1">1</sub>}	$C_{_{<fontsize="1">1}} = (4.94, 1.8)$	Punto de intersección de c, b
6	Punto C	$C = (4.94, 3.8)$	Punto de intersección de c, b
7	Punto E	$E = (4.94, 1.8)$	Punto de intersección de c, b
8	Punto F	$F = (4.94, 1.8)$	Punto de intersección de c, b
9	Punto G	$G = (4.94, 1.8)$	Punto de intersección de c, b
10	Circunferencia d	$d: (x - 3.94)^2 + (y - 2.8)^2 = 0.11$	Circunferencia con centro A y radio Distancia[O, A] / 3
11	Punto D	$D = (3.61, 2.8)$	Punto de intersección de d, a
11	Punto H	$H = (4.27, 2.8)$	Punto de intersección de d, a
12	Punto I	$I = (3.61, 2.8)$	Punto de intersección de d, a
13	Punto J	$J = (3.61, 2.8)$	Punto de intersección de d, a
14	Segmento e	$e = 1.41$	Segmento [C, B]
15	Circunferencia f	$f: (x - 4.94)^2 + (y - 3.8)^2 = 0.11$	Circunferencia con centro C y radio Distancia[A, H]
16	Punto K	$K = (5.18, 3.56)$	Punto de intersección de f, e
17	Circunferencia g	$g: (x - 5.18)^2 + (y - 3.56)^2 = 0.11$	Circunferencia con centro K y radio Distancia[A, H]
18	Punto L	$L = (5.41, 3.33)$	Punto de intersección de g, e
19	Segmento h	$h = 1.45$	Segmento [A, K]
20	Segmento i	$i = 1.56$	Segmento [A, L]
21	Circunferencia k	$k: (x - 3.94)^2 + (y - 2.8)^2 = 2.11$	Circunferencia con centro A y radio Distancia[A, K]
22	Punto M	$M = (5.31, 3.29)$	Punto de intersección de k, i
23	Arco p	$p = 0.3$	ArcoCircunferencia[A, M, K]
24	Recta j	$j: 1x + y = 8.6$	Recta que pasa por M paralela a e
25	Punto N	$N = (5.09, 3.51)$	Punto de intersección de h, j
26	Segmento l	$l = 0.31$	Segmento [M, N]
27	Segmento m	$m = 0.73$	Segmento [O, N]
28	Recta n	$n: -0.71x + 0.15y = -2.62$	Recta que pasa por H paralela a m
29	Punto P	$P = (4.32, 3.04)$	Punto de intersección de h, n
30	Segmento q	$q = 0.24$	Segmento [H, P]

31	Recta r	$r: x = 3.94$	Recta que pasa por A perpendicular a a
32	Circunferencia s	$s: (x - 3.94)^2 + (y - 2.8)^2 = 0.2$	Circunferencia con centro A y radio Distancia[A, P]
33	Punto Q	$Q = (3.94, 2.35)$	Punto de intersección de s, r
34	Arco t	$t = 0.96$	ArcoCircunferencia[A, Q, P]
35	Segmento a ₁	$a_1 = 1.1$	Segmento [Q, O]
36	Segmento b ₁	$b_1 = 0.45$	Segmento [A, Q]
37	Segmento c ₁	$c_1 = 2$	Segmento [A, B]
38	Segmento d ₁	$d_1 = 1$	Segmento [O, C]

Construcción de Mascheroni.

Nº	Nombre	Definición	Valor
1	Punto O		$O = (6.027407407, 0.7311111111)$
2	Recta a	Recta que pasa por O paralela a EjeX	$a: y = 0.000000000x + 0.7311111111$
3	Circunferencia c	Circunferencia con centro O y radio 1.000000000	$c: (x - 6.027407407)^2 + (y - 0.7311111111)^2 = 1.000000000$
4	Punto B	Punto de intersección de c, a	$B = (5.027407407, 0.7311111111)$
5	Circunferencia d	Circunferencia con centro B y radio Segmento[O, B]	$d: (x - 5.027407407)^2 + (y - 0.7311111111)^2 = 1.000000000$
6	Punto C	Punto de intersección de d, c	$C = (5.527407407, 1.597136515)$
6	Punto D	Punto de intersección de d, c	$D = (5.527407407, -0.1349142927)$
7	Circunferencia e	Circunferencia con centro C y radio Segmento[O, B]	$e: (x - 5.527407407)^2 + (y - 1.597136515)^2 = 1.000000000$
8	Punto E	Punto de intersección de c, e	$E = (6.527407407, 1.597136515)$
9	Circunferencia f	Circunferencia con centro E y radio Segmento[O, E]	$f: (x - 6.527407407)^2 + (y - 1.597136515)^2 = 1.000000000$
10	Circunferencia g	Circunferencia con centro D y radio Segmento[O, D]	$g: (x - 5.527407407)^2 + (y + 0.1349142927)^2 = 1.000000000$
11	Punto F	Punto de intersección de c, g	$F = (6.527407407, -0.1349142927)$
12	Punto G	Punto de intersección de c, f	$G = (7.027407407, 0.7311111111)$
13	Circunferencia h	Circunferencia con centro G y radio Radio[c]	$h: (x - 7.027407407)^2 + (y - 0.7311111111)^2 = 1.000000000$
14	Segmento b	Segmento [C, E]	$b = 1.000000000$
15	Segmento i	Segmento [E, G]	$i = 1.000000000$
16	Segmento j	Segmento [F, G]	$j = 1.000000000$
17	Segmento k	Segmento [F, D]	$k = 1.000000000$
18	Segmento l	Segmento [D, B]	$l = 1.000000000$
19	Segmento m	Segmento [B, C]	$m = 1.000000000$
20	Circunferencia p	Circunferencia con centro B y radio Segmento[B, E]	$p: (x - 5.027407407)^2 + (y - 0.7311111111)^2 = 3.000000000$
21	Circunferencia q	Circunferencia con centro G y radio Segmento[C, G]	$q: (x - 7.027407407)^2 + (y - 0.7311111111)^2 = 3.000000000$
22	Punto H	Punto de intersección de p, q	$H = (6.027407407,$

			2.145324673)
23	Circunferencia r	Circunferencia con centro C y radio Segmento[E, H]	$r: (x - 5.527407407)^2 + (y - 1.597136515)^2 = 0.5505102572$
24	Punto I	Punto de intersección de c, r	$I = (6.261741477, 1.703267242)$
25	Número distanciaBE	Distancia de B a E	distanciaBE = 1.732050808
26	Número o	$\text{abs}(2.000000000 \text{Distancia}[B, E])$	$o = 3.464101615$
27	Segmento t	Segmento [B, I]	$t = 1.571199586$
28	Número distanciaBI	Distancia de B a I	distanciaBI = 1.571199586
29	Arco s	ArcoCircunferencia[B, E, H]	$s = 0.7477572378$
30	Arco $c_{>1}$	ArcoCircunferencia[G, H, C]	$c_{>1} = 0.7477572378$
31	Arco $d_{>1}$	ArcoCircunferencia[C, I, H]	$d_{>1} = 0.5103271398$
32	Segmento n	Segmento [B, G]	$n = 2.000000000$
33	Recta $a_{>1}$	Recta que pasa por O perpendicular a n	$a_{>1}: x = 6.027407407$
34	Segmento $b_{>1}$	Segmento [O, H]	$b_{>1} = 1.414213562$
35	Punto M	Punto de intersección de $b_{>1}$, b	$M = (6.027407407, 1.597136515)$
36	Segmento $e_{>1}$	Segmento [C, F]	$e_{>1} = 2.000000000$
37	Segmento $f_{>1}$	Segmento [I, F]	$f_{>1} = 1.857280200$
38	Segmento $g_{>1}$	Segmento [I, C]	$g_{>1} = 0.7419637843$