UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

COMPORTAMIENTO CAÓTICO DE PARTÍCULAS CARGADAS EN UN CONDENSADOR DE PLACAS ONDULADAS

TESIS

Para obtener el grado de

LICENCIADA EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:

ADRIANA ROJAS SÁNCHEZ

ASESOR DE TESIS:

Doctor en Ciencias en Óptica

DR. HÉCTOR I. PÉREZ AGUILAR

CO-ASESOR DE TESIS:

Doctor en Ciencias en Óptica

DR. ALBERTO MENDOZA SUÁREZ

Morelia, Michoacán, Agosto de 2015

Resumen

En el presente trabajo se ha mostrado un estudio numérico sobre la dinámica de las trayectorias de las partículas cargadas en un condensador ondulado y periódico bajo la influencia de un campo de potencial electrostático inhomogéneo.

Se desarrollaron e implementaron dos técnicas numéricas para estudiar la trayectoria de las partículas cargadas dentro del condensador antes mencionado. La primera se conoce como el "Método de la Ecuación Integral" y la segunda como el "Método de Diferencias Finitas".

El método de la ecuación integral se utilizó para calcular el potencial eléctrico dentro del condensador. Este método parte del segundo teorema integral de Green permitiendo obtener un par de ecuaciones integrales acopladas que involucran como incógnitas el campo y su derivada normal evaluados en las fronteras o superficies involucradas. La discretización del sistema resulta en una ecuación matricial homogénea cuya solución determina las funciones fuente, con las que se puede calcular el potencial eléctrico en el interior del condensador.

Por otra parte, el método de diferencias finitas se utilizó para calcular la trayectoria de la partícula influenciada por el campo eléctrico en cada punto. Este método se basa en hacer una aproximación a la solución de las ecuaciones diferenciales por medio de ecuaciones parciales definidas en un conjunto finito de puntos. Por lo tanto, una vez conocido el campo eléctrico y partiendo de la segunda ley de newton se puede conocer la trayectoria de la partícula. De esta manera, para representar la dinámica de las partículas dentro del condensador se utilizaron mapas de Poincaré en un espacio fase que forman las trayectorias de las partículas.

Comparando los mapas de Poincaré para el caso de trayectorias de partículas donde no se tiene influencia de fuerzas externas sobre ellas, con el caso de partículas cargadas en un campo de potencial inhomogéneo, se puede observar que para el primer caso se hace presente el fenómeno del caos. Este fenómeno depende de la amplitud del canal considerado para que pueda presentar el caos total. Mientras que para el segundo caso las trayectorias tienden más a ciclos límite u órbitas elípticas (islas), gracias a la presencia del campo eléctrico.

Palabras Clave: Condensador eléctrico, caos, mapas de Poincaré, método integral, método de diferencias finitas.

Abstract

In the present work, a numerical study has been shown on the dynamics of the trajectories of charged particles in a rippled and periodic capacitor under the influence of an inhomogeneous electrostatic potential field.

Two numerical techniques were developed and implemented to study the trajectory of the charged particles within the capacitor before mentioned. The first is known as the "Integral Equation Method" and the second as the "Finite Differences Method".

The integral equation method was used to calculate the electric potential inside the capacitor. This method start out of the Green's second theorem allowing to obtain a pair of coupled integral equations that use as unknowns the field and its normal derivative evaluated in borders or surfaces involved. The discretization of the system results in a homogeneous matrix equation whose solution determines the source function, from which you can calculate the electric potential inside the capacitor.

On the other hand, the finite difference method was used to calculate the trajectory of the particle influenced by the electric field at each point. This method is based on making an approximation to the solution of differential equations through partial defined equations on a finite set of points. Therefore, once the electric field is known and based on Newton's second law can be know the trajectory of the particle. This way, to represent the dynamics of the particles inside the capacitor were used the Poincare's maps in a phase space that forms the trajectories of the particles.

By comparing Poincare's maps for the case of the trajectories of particles where there is no influence of external forces on them with the case of charged particles in an inhomogeneous potential field, can be seen that for the first case is made present the chaos phenomenon. This phenomenon depends on the channel amplitude considered so that it can present the total chaos. While in the second case the trajectories tends to more to limit cycles or elliptical orbits (islands), thanks to the presence of the electric field.

Keywords: Electric capacitor, chaos, Poincare's maps, integral method, finite differences method.

Dedicatoria

Principalmente dedico esta tesis a mi familia por apoyarme en todo momento, así como a las personas que siempre han estado presentes en mi vida.

En primer lugar a mis padres Maricela y Gregorio, por impulsarme siempre a ser la persona que soy.

A mis hermanas Marisol, Blanca y Luz. Marisol a pesar de ser la pequeña de la familia, me haces ver que confiar en nosotros mismos es el primer paso para lograr nutras metas. Blanca por enseñarme que "querer es poder", a siempre luchar por lo que quiero y a ser una persona fuerte. Luz por ser mi ejemplo y hacerme ver que por más difícil que se vea una situación, siempre existe una forma de abordar las cosas.

Finalmente y de manera especial a mi hermano Gregorio por apoyarme durante todo este tiempo, sin él no hubiera sido posible lograr esta meta. Además de enseñarme a tomar la vida de una forma más tranquila, a ocuparme en vez de preocuparme.

Agradecimientos

A la coordinación de Investigación Científica de la UMSNH que me apoyo con una beca del proyecto de investigación 9.33.

Agradezco de manera especial al Dr. Héctor Pérez Aguilar, asesor de esta tesis, por todo su apoyo, consejos y sobre todo paciencia para la realización de este trabajo. Gracias también por alguno que otro regaño los valoro de verdad, me han ayudado a ser mejor persona.

Al Dr. Alberto Mendoza Suárez co-asesor de esta tesis, gracias por todo su apoyo sobre todo en estos últimos meses fue muy importante para mi. Gracias por ser un gran maestro y por siempre ayudarme de forma amable. Al Dr. Mauricio Ortiz por todo su apoyo, consejos, tiempo, enseñanzas y por ser una gran persona. Aprendí mucho de usted, no me queda mas que decir gracias por todo. Al Dr. Joaquín Estevez, gracias por todo su apoyo, consejos y por orientarme en muchos momentos, mil gracias padre. Al Dr. Mariano por todo su apoyo y su amabilidad.

Gracias a Sofía, Alan, Vero y Karlita, por tantos años de amistad y por todo su apoyo incondicional. A Jenny y Cinthia, por todo su apoyo y regaños, valen mil. A Talia, Claudia, Jacel, Xitlali y Tania, gracias por la amistad que hicimos en estos años aunque tengan un carácter muy distinto al mio.

A Geras, Arturin, Luis Argüello, Rosel, Juan Antonio, Armando Ramos, Esteban, Samuel, Julio Caballero, Gabino, Rogelio, Julio Pérez, Carlos, Alejandro, Vite, Chihuaque, David, Roberto Abrego, Rafa Garcia, Alberto Luviano, Ivan, César Moctezuma, Arturo Sosa y Luis Eduardo. Gracias por su amistad y apoyo.

Contenido

Página

Resumen II

Abstract III

Dedicatoria IV

Agradecimientos V

Contenido VI

Lista de Figuras VIII

Lista de Tablas XI

I.. INTRODUCCIÓN **1**
I.1. Estructura de la tesis 5

II.. Caos y Sistemas dinámicos **7**
II.1. Caos Clásico 7
II.2. Sistemas dinámicos 9
II.2.1. Sistemas Autónomos y no Autónomos 13
II.2.2. Sistemas dinámicos lineales y no lineales 14
II.3. Cuantificación del caos 14
II.3.1. Exponentes de Lyapunov 15
II.3.2. Mapa de Poincaré 16
II.4. Transporte en sistemas balísticos 22

III.. MÉTODOS NUMÉRICOS **27**
III.1. Geometría del condensador 27
III.2. Método de la Ecuación Integral 29
III.2.1. Condensador con placas planas 29
III.2.2. Condensador con placas onduladas 31
III.2.3. Funciones Fuente 33
III.2.4. Discretización de las ecuaciones integrales 34
III.3. Potencial electrostático de un condensador infinito 36
III.4. Método de Diferencias Finitas 39

IV.. RESULTADOS **43**
IV.1. Trayectorias de Partículas 43

Contenido (continuación)

Página

IV.2. Mapas de Poincaré 54

V.. Conclusiones **62**

REFERENCIAS **65**

A.. Elementos de Matriz **67**

A.1. Cálculo de los elementos de matriz 70

A.1.1. Cálculo de los elementos de matriz L_{ij} 70

A.1.2. Cálculo de los elementos de matriz N_{ij} 72

Lista de Figuras

Figura — Página

1. Atractor extraño de Lorenz o efecto mariposa. 8
2. Clasificación de puntos fijos en sistemas dinámicos 2D, Tr es la traza y Det el determinante. 13
3. Representación gráfica del Teorema de Poincaré. A es un campo abierto que contiene a R que es una superficie cerrada, P es un punto fijo que está fuera de R y C es una trayectoria abierta. 17
4. Ciclo límite en 2D intersectado en P por una sección de Poincaré. . . . 18
5. Trayectoria de la partícula que rodea un ciclo límite en 2D intersectado en varios puntos por una sección de Poincaré. 19
6. Trayectoria de una partícula en un canal ondulado de longitud L de periodo P, con un desfasamiento r en la pared inferior en el caso clásico. 22
7. Representación de la trayectoria de una partícula en un canal sinusoidal. 23
8. Mapas de Poincaré para un canal con amplitud $a)$ $A = 0{,}0$, $b)$ $A = 0{,}001$, $c)$ $A = 0{,}05$ y $d)$ $A = 0{,}08$. 26
9. Sistema electrostático formado por dos placas conductoras onduladas de extensión infinita. 28
10. Diagrama de dos placas con perfiles ondulados infinitos con periodo P en el plano x-y, amplitud A y ancho b. 28
11. Condensador con placas planas infinitas y paralelas. 29
12. Líneas de campo eléctrico uniforme en un condensador plano. 31
13. Geometría considerada para el teorema de Green bidimensional. 33
14. Elección del punto de observación muy cerca de la superficie representado por **r.** 34
15. Celda unitaria ondulada que está limitada por los contornos Γ_1, Γ_2, Γ_3 y Γ_4. 36
16. Potencial eléctrico para un condensador de (a) placas planas $A_1 = A_2 = 0$ y $c)$ placas onduladas $A_1 = A_2 = 0{,}1$. Campo eléctrico para un condensador con amplitud (b) $A_1 = A_2 = 0$ y (d) $A_1 = A_2 = 0{,}1$. 38

Lista de Figuras (continuación)

Figura Página

17. Trayectorias de partículas con $v_y > 0$ para (a) condensador plano $A_1 = A_2 = 0$, $v_x = 1{,}2$ y $v_y = 1{,}1$ y (b) condensador ondulado $A_1 = A_2 = 0{,}2$, $v_x = 0{,}4$ y $v_y = 0{,}8$. Trayectorias de partículas con $v_y < 0$ para (c) condensador plano $A_1 = A_2 = 0$, $v_x = 1{,}0$ y $v_y = -1{,}1$ y (d) condensador ondulado $A_1 = A_2 = 0{,}2$ con $v_x = 0{,}4$ y $v_y = -0{,}8$. 42

18. Trayectorias de una partícula en un condensador con amplitudes *a*) $A_1 = A_2 = 0{,}00$, *b*) $A_1 = A_2 = 0{,}00$, *c*) $A_1 = 0{,}2$ $A_2 = 0{,}00$ y *d*) $A_1 = A_2 = 0{,}05$. 45

19. Distribución angular de dos fuentes con 20 partículas cada una en un condensador con $A_1 = A_2 = 0{,}01$, $b = \pi$ y $L = 4\pi$. 46

20. Rebotes posibles de una partícula con la placa superior con *a*), *c*), *f*), *h*) y *j*) pendiente negativa y *b*), *d*), *e*), *g*) y *i*) con pendiente positiva. . . . 49

21. Rebotes posibles de una partícula con la placa inferior con *a*), *b*), *c*) *d*) y *g*) pendiente negativa y *e*), *f*), *h*) *i*) y *j*) choques donde la pendiente es positiva. 52

22. Mapas de Poincaré para un condensador plano con potencial eléctrico *a*) $U = 0$, *b*) $U =\mid 0{,}1 \mid$, *c*) $U =\mid 0{,}3 \mid$ y *d*) $U =\mid 0{,}5 \mid$. 55

23. Mapas de Poincaré para un condensador con placas onduladas de amplitud $A = 0{,}002\pi$, con potencial eléctrico *a*) $U = 0$, *b*) $U =\mid 0{,}1 \mid$, *c*) $U =\mid 0{,}3 \mid$ y *d*) $U =\mid 0{,}5 \mid$. 56

24. Mapas de Poincaré de las trayectorias de partículas en un condensador con placas onduladas de amplitud $A = 0{,}01\pi$ y desfasamiento entre ellas de $r = \pi$ para los potenciales eléctricos de *a*) $U =\mid 0{,}1 \mid$, *b*) $U =\mid 0{,}2 \mid$, *c*) $U =\mid 0{,}5 \mid$ y *d*) $U =\mid 0{,}75 \mid$. 57

25. Mapas de Poincaré de las trayectorias de partículas en un condensador con placas onduladas de amplitud $A = 0{,}01\pi$ y desfasamiento entre ellas de $r = \pi$ para los potenciales eléctricos de *a*) $U =\mid 0{,}1 \mid$, *b*) $U =\mid 0{,}2 \mid$, *c*) $U =\mid 0{,}5 \mid$ y *d*) $U =\mid 0{,}75 \mid$. 58

26. Mapas de Poincaré de las trayectorias de partículas en un condensador con placas onduladas de amplitud $A = 0{,}01\pi$ y desfasamiento entre ellas de $r = \pi$ para los potenciales eléctricos de *a*) $U =\mid 0{,}1 \mid$, *b*) $U =\mid 0{,}2 \mid$, *c*) $U =\mid 0{,}5 \mid$ y *d*) $U =\mid 0{,}75 \mid$. 59

Lista de Figuras (continuación)

Figura Página

27. Mapas de Poincaré de trayectorias de las partículas en un condensador con placas onduladas de amplitud $A = 0{,}01\pi$ para $a)$ $U =\mid 0{,}2 \mid$ con $r = 0{,}1\pi$ y $b)$ $U = 0{,}5$ con $r = 0{,}2\pi$. 60

28. Representación de los vectores normal y tangente a la curva en el punto P. 67

Lista de Tablas

Tabla Página

I. Tabla de los diferentes tipos de choque de la partícula con la placa superior, v_{x0} y v_{y0} son las componentes de la velocidad de la partícula antes del choque, v_{xf} y v_{yf} son las componentes de la velocidad después del choque, θ es la pendiente, β el ángulo de reflexión, α_0 y α_f son el ángulo inicial y final de la partícula, respectivamente. Los subíndices denotan al eje que corresponden las componentes. 50

II. Tabla de los diferentes tipos de choque de la partícula con la placa inferior, v_{x0} y v_{y0} son las componentes de la velocidad antes del choque, θ es la pendiente, β el ángulo de reflexión, α_0 y α_f son el ángulo inicial y final de la partícula, respectivamente, v_{xf} y v_{xf} son las componente de la velocidad después del choque. 53

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

En el siglo XVIII Pierre Simón de Laplace expresó a través de una idea concreta el principal anhelo de la ciencia desde que se tiene registro de ella. Esto es tener la capacidad de predecir cualquier suceso que se presente. Textualmente decía lo siguiente:

"El estado presente del sistema de la Naturaleza es evidentemente una consecuencia de lo que fue en el momento precedente, y si concebimos una inteligencia tal que a un instante dado conociera todas las fuerzas que animan la Naturaleza y las posiciones de los seres que las forman, podría condensar en una única fórmula el movimiento de los objetos más grandes del Universo y de los átomos más ligeros: nada sería incierto para dicho ser, y tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos".

Durante el siglo XIX se creía que la Física, una de las ciencias más rigurosas e importantes de la época (posiblemente la más importante de ellas), estaba a punto de cerrar su estudio pues creían que prácticamente cualquier fenómeno podían explicarlo con el marco teórico que tenían hasta ese momento. En Física, las leyes se expresaban de manera estrictamente determinista a diferencia de cualquier otra ciencia que no podía decir lo mismo. Fue a finales del mismo siglo cuando esta idea se fue abajo pues aparecieron dos problemas para los que no tenían una explicación y mucho menos una solución dentro del marco existente, los cuales eran: "el problema del éter" y la "catástrofe ultravioleta". Dichos problemas dieron paso a la Teoría de la Relatividad

y la Mecánica Cuántica, respectivamente. Así lejos de cerrar el estudio de la Física se abrieron nuevos campos de investigación.

Al mismo tiempo que ocurrían estos problemas el rey Óscar II de Suecia estableció un premio de 2500 coronas para quien demostrará que el sistema solar es estable. El matemático Francés H. Poincaré dio respuesta a la convocatoria y señaló que un sistema donde se considera el movimiento de dos cuerpos es fácilmente predecible, pero que conforme aumenta el número de cuerpos también lo hace la dificultad de predicción. Por tanto, un cuerpo influido por nueve cuerpos era imposible de predecir, esto dio paso al planteamiento de un tercer problema llamado "problema de los tres cuerpos" el cual tampoco tenían una solución en ese marco (Alonzo, 2005).

El problema de los tres cuerpos fue la base para vislumbrar un fenómeno que hoy en día se conoce como "caos", aunque realmente Poincaré no tenían claro lo que ocurría. Fue hasta 1960 cuando Lorenz con ayuda de una computadora de alta velocidad resolvió un conjunto de ecuaciones no lineales las cuales modelaban el clima, observó que al graficar la solución del conjunto de ecuaciones se formaba una especie de mariposa. Dicho fenómeno lo llamó "atractor extraño" con lo que se estableció la existencia de fenómenos caóticos.

El caos en sí no tiene una definición concreta hasta ahora. la palabra caos es de origen griego y se usa para referirse al abismo o desorden. Muchos científicos han intentado dar una definición del caos, pero hasta el momento no se tienen al menos dos ideas que concuerden en su totalidad, aunque compartan la idea central de que pequeños cambios en condiciones iniciales conducen a resultados totalmente distintos. Existen frases muy conocidas que hacen alusión a él, algunas son:

- "El aleteo de las alas de una mariposa en Brasil puede provocar un tornado en

Texas" (Ralph y Yoshisuke, 2000).

- "Hablar de caos, no es necesariamente hablar de confusión ni desorden, sino que es el orden que subyace al aparente desorden" (Barrera Herrera, 2008).

Se podría pensar que el estudio del caos es propio solamente del área de física, pero si bien su estudio comenzó por un problema físico, existen varios problemas en otras áreas de la ciencia cuyo comportamiento no es predecible y tienen características caóticas. Algunas áreas donde se estudia son: finanzas, ecología, electrónica, medicina, etc.

Algunos temas en específico en los que se ha estudiado son: Sistemas Hamiltonianos de muchos cuerpos en el área de física, donde aparece caos cuántico al analizar sistemas de ecuaciones diferenciales (Molina Fernández, 2004), circuitos tipo puente de Chua en el ámbito de la electrónica donde se ha observado la presencia del caos en osciladores de este tipo al representarlo por un circuito no lineal (Rivera *et al.*, 2004), estudios de precios bursátiles en un lapso de tiempo en el área de finanzas (Barrera Herrera, 2008), ensamblaje de comunidades como el fito-plancton en ecología (Alonzo, 2005), comportamiento de enfermedades en medicina, modelando el proceso de desarrollo de éstas, que van desde la transmisión de una infección por interrelación o interacción entre individuos en un estado susceptibles con un individuo quien se encuentra en período de transmisión (Hincapie-Palacio y Ospina-Giraldo, 2013) y encriptamiento de datos en comunicaciones lo cual brindaría una mayor seguridad Núñez (2006), por mencionar algunos.

El estudio del caos es un tema tan actual que incluso se ha utilizado para modelar las relaciones románticas entre humanos, tomando como ejemplo la relación de Romeo y Julieta, haciendo variar el amor de Julieta dependiendo del tiempo, representado por un modelo lineal invariante en el tiempo de dos individuos sin la interacción con el

medio ambiente, que da como resultado un comportamiento caótico (Sprott, 2004).

En trabajos anteriores se han estudiado propiedades de transporte de partículas en un canal bidimensional con fronteras onduladas y desfasadas, tomando en cuenta pequeñas amplitudes de onda en un canal sinusoidal periódico. En estos trabajos se ha considerado que no existen fuerzas externas sobre las partículas, excepto por fuerzas instantáneas de choque con las paredes del perfil. Se demostró que la resistividad se aumenta considerablemente por desfase de las paredes del canal (Herrera-González *et al.*, 2011). Trabajos con geometrías similares a los mencionados pero con guías de onda cuánticas infinitas, muestran que bajo algunas condiciones presenta comportamiento caótico (electromagnético) (Pérez-Aguilar *et al.*, 2013).

Estos problemas suelen ser muy complejos por lo que son modelados y comprendidos a través de ecuaciones diferenciales y son resueltos utilizando métodos numéricos (Jackson, 1999). Alguno ejemplos de problemas que se han resuelto de esa manera son: la propagación de ondas electromagnéticas en cristales fotónicos y la ecuación de Helmholtz. Por supuesto, un caso especial de esta ecuación en la aproximación cuasi estática, es la ecuación de Laplace, por mencionar algunos.

En este trabajo se estudiarán las propiedades de un condensador con placas conductoras onduladas, de extensión infinita y en condiciones electrostáticas. La geometría considerada da lugar a la periodicidad del sistema y entonces se tiene algo así como un condensador grande de longitud $L = nl$ formado por un conjunto de n condensadores de longitud $l = 2\pi$ cada uno, conectados en paralelo.

El sistema que se presenta tiene como primer problema calcular el potencial en todo punto de la trayectoria, pues en el caso que éste sea ondulado el potencial es inhomogéneo. El siguiente problema es poder analizar las trayectorias de partículas y como se ven afectadas por la presencia del campo eléctrico. Para dar solución a

estos problemas se implementarán dos métodos. El primer método es el método de la ecuación integral (Mendoza-Suárez *et al.*, 2011) y se basa en el uso del teorema de Green bidimensional, principalmente. El segundo método es el de diferencias finitas, el cual consiste en aproximar la solución de ecuaciones diferenciales por derivadas parciales utilizando un limitado número de puntos seleccionados donde se encuentran definidas.

I.1. Estructura de la tesis

La tesis esta estructurada de la siguiente manera:

- En el capítulo 2 se mencionan los sistemas dinámicos y el caos. Se dará una explicación un poco más profunda sobre estos conceptos, así como su clasificación y cuantificación. Además se mostrarán resultados de trabajos anteriores con geometría y condiciones similares al problema que se va a abordar. Dichos resultados son para trayectorias de partículas en condensadores para el caso clásico donde se presenta el fenómeno de caos.

- En el capítulo 3 se describen dos métodos numéricos. El primero es un método integral que se basa en el uso el teorema de Green bidimensional para calcular el potencial electrostático en un condensador formado por placas onduladas y periódicas. El segundo método es el de diferencias finitas que permite calcular las trayectorias de partículas en un condensador formado por dos placas paralelas, las cuales pueden ser planas u onduladas. En caso que presenten ondulación las placas conductoras periódicas generan un campo eléctrico inhomogéneo. Esto hace que las trayectorias de las partículas sean diferentes a una trayectoria parabólica.

- En el capítulo 4 se muestran los resultados obtenidos al analizar el comporta-

miento de trayectorias de partículas dentro de un condensador, principalmente se observo la afectación que sufrían debido a la presencia del campo eléctrico. Para observar la dinámica del sistema se utilizaron mapas de Poincaré. Este mapa es el subespacio (x, p_y) del espacio fase, donde x es la posición de la partícula en el eje x y p_y es la componente del momento en el eje y.

- En el capítulo 5 se dan las conclusiones al analizar varios casos que se hacen presentes en el sistema planteado.

Capítulo II

Caos y Sistemas dinámicos

En este capítulo, se hablará del descubrimiento del caos y las características que se deben presentar para poder considerar que se está frente a un fenómeno caótico; además de sistemas dinámicos y su clasificación. También se hará una descripción de las dinámicas que existen y de algunas formas de cuantificar el caos.

II.1. Caos Clásico

Poincaré fue la primera persona en vislumbrar la posibilidad de caos, en el que un sistema determinista exhibe un comportamiento aperiódico que depende sensiblemente de las condiciones iniciales, por lo que resulta imposible hacer una predicción a largo plazo del sistema.

La invención de la computadora de alta velocidad en la década de 1950 fue un avance sumamente importante, permitió experimentar con ecuaciones de una forma que era imposible antes, y por lo tanto de desarrollar alguna intuición acerca de los sistemas no lineales. Esto fue aprovechado por Eduard Lorenz en 1960 cuando realizaba un trabajo sobre modelos simples del clima de la Tierra en el Instituto de Tecnología de Massachussets. Modeló el clima con un sistema de ecuaciones y utilizó un ordenador para resolverlas. No predecía el clima él mismo; sin embargo, este programa del ordenador

predecía numéricamente qué tiempo podría ser. Estas ecuaciones están dadas por

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \quad (2)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z \quad (3)$$

Descubrió que las soluciones a las Ecs. (1), (2) y (3) nunca establecieron un equilibrio, sino al contrario oscilaron de una manera aperiódica irregular y cambiando ligeramente en sus simulaciones las condiciones iniciales los comportamientos resultantes pronto llegaban a ser totalmente diferentes. La implicación fue que el sistema resultó impredecible y en caso de tener diminutos errores en la medición del estado actual de la atmósfera se amplificaron rápidamente, llevando eventualmente a predicciones erróneas. Tales experimentos condujeron al descubrimiento de Lorenz en 1963 del movimiento caótico en un atractor extraño. Mostró que no había estructura en el caos cuando se representa en tres dimensiones. El conjunto de soluciones a sus ecuaciones formaron una especie de mariposa como se observa en la Fig. 1. Sostuvo que este conjunto tenía que ser "un conjunto complejo infinito de superficies" (Strogatz, 1994).

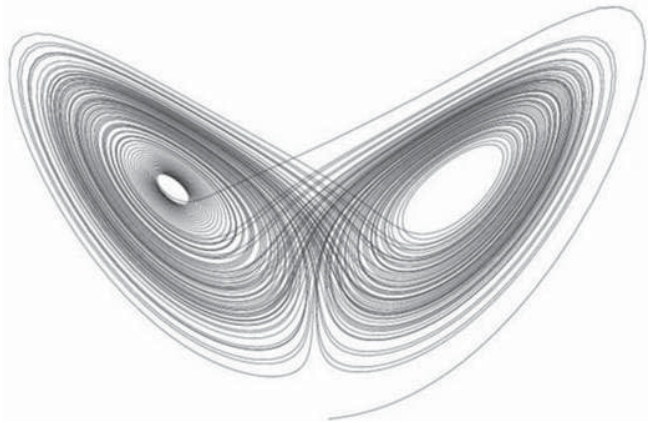


Figura 1. Atractor extraño de Lorenz o efecto mariposa.

Aunque en los últimos años se ha vuelto popular el estudio del caos, no se tiene un concepto establecido como tal. Varios investigadores han intentado dar una definición del caos, pero hasta el momento no se han unificado en una sola idea las definiciones que dan; sin embargo, si se tiene establecido las condiciones que debe cumplir un sistema para decir que existe caos. Estas son:

- **Movimiento oscilante**. Las trayectorias no tienden a un punto fijo, órbita periódica o cuasiperiódica cuando el tiempo $t \to \infty$.

- **Determinismo**. El sistema no depende del azar pues el comportamiento que tenga no cambia si lo se repite varias veces con las mismas condiciones iniciales y el azar tampoco está involucrado en tiempos posteriores. El comportamiento irregular surge de la no linealidad y además puede ser modelado por una serie de ecuaciones diferenciales o algoritmos bien definidos, que se pueden resolver matemáticamente e incluso algunas veces no resultan ser muy complicados.

- **Sensibilidad a las condiciones**. Las trayectorias que en un inicio son bastante cercanas en un lapso de tiempo mayor se separan exponencialmente. Es decir, condiciones iniciales muy similares acaban dando lugar a comportamientos totalmente diferentes después de un tiempo suficientemente largo.

II.2. Sistemas dinámicos

Los sistemas dinámicos son aquellos cuyo estado evoluciona con el tiempo; es decir son cambiantes en un lapso de tiempo. Estos están descritos por un conjunto de ecuaciones donde alguno de sus parámetros varía con el tiempo y se dividen en dos clases:

1. Sistemas dinámicos continuos. En estos sistemas el tiempo varía continuamente y pueden ser modelados mediante conjuntos de ecuaciones diferenciales, las cuales pueden ser ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones diferenciales en derivadas parciales o ecuaciones diferenciales con retardo. Estas últimas difieren de las anteriores en la dependencia del tiempo y es necesario evaluarlas en tiempos anteriores o posteriores y no sólo en un tiempo t dado. Los sistemas dinámicos continuos se pueden expresar de la siguiente forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

donde $\mathbf{x} = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), ..., x_n(t))$ es el vector de estado del sistema dinámico, el cual hace variar la dinámica del sistema en el tiempo, y $f : D \subset R^n \times R \to R^n$.

2. Sistemas dinámicos discretos. En estos sistemas el tiempo es discreto y se describen mediante ecuaciones diferenciales conocidas como mapas iterados. Matemáticamente se puede escribir un sistema de este tipo de la siguiente forma:

$$x_{k+1} = f(x_k), \qquad k = 1, 2, 3, ...$$

donde f es una función $f : X \to X$ definida en cierto conjunto X que recibe el nombre de espacio de fases o espacio de los estados, que son un conjunto cuyos elementos describen todos los posibles estados del sistema que se trata de analizar. Por lo regular se considerara f suficientemente suave; es decir, con derivadas continuas de todos los órdenes necesarios.

Los sistemas dinámicos tienen diferente comportamiento después de un lapso de tiempo. Estos se clasifican en tres tipos:

- Estables, ocurre cuando dos soluciones que tienen condiciones iniciales muy cercanas siguen siendo casi igual de cercanas a lo largo de un tiempo. Así, un sistema

estable después de un transcurso de tiempo suficientemente largo tiende a un punto, u órbita, según su dirección (atractor o sumidero[1]).

- Inestables, cuando dos soluciones con condiciones iniciales que difieren por muy poco acaban divergiendo. Así un sistema inestable no va hacia algún punto ("escapan de los atractores").

- Caóticos, se presenta cuando un sistema es tanto estable como inestables; es decir dos soluciones que inicialmente están a una distancia "finita" se mantienen así después de un lapso de tiempo y se aproximan a un atractor. Mientras que algunas otras soluciones que son vecinas inicialmente divergen de manera exponencial con el tiempo, aunque suelen ser cualitativamente similares y a pesar que no tienden a un atractor, el sistema permanece confinado en una zona de su espacio de estados.

Tanto los sistemas inestables como los caóticos tienen una gran dependencia de las condiciones iniciales a diferencia de los sistemas estables. Si en un sistema se conocen sus ecuaciones de evolución temporal características y con unas condiciones iniciales fijas, se puede conocer exactamente su evolución en el tiempo. Pero en el caso de los sistemas caóticos, una mínima diferencia en esas condiciones hace que el sistema evolucione de manera totalmente distinta.

Retomando el tema de sistemas dinámicos es importante describir a los puntos fijos. Estos hacen referencia a puntos de estabilidad donde caen las trayectorias después de un lapso de tiempo, así pues si se tiene un sistema 2D y se modela el sistema como ecuaciones diferenciales y se le asocia su polinomio característico $\lambda^2 - a\lambda + b = 0$, después se calculan sus raíces $\lambda = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{\triangle}}{2}$ donde $\triangle = a^2 - 4b$, se hace la clasificación

[1]Es un conjunto de trayectorias las cuales inicialmente son cercanas entre ellas y permanecen cercanas después de un lapso de tiempo largo, incluso si estas se perturban

de puntos fijos:

- Silla: Las trayectorias inicialmente tienden a un punto y después divergen. Este tipo de punto es inestable y ocurre cuando λ_1 y λ_2 tienen signos distintos y $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

- Nodo estable: Es un punto tal que en sus proximidades todas las órbitas entran a él. Es asintóticamente estable si las órbitas están direccionadas al punto. Esto ocurre si λ_1 y $\lambda_2 \, \epsilon \, \Re^-$, y $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y son atractores.

- Nodo inestable: Ocurre si las órbitas se alejan del nodo y λ_1 y $\lambda_2 \, \epsilon \, \Re^+$. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, son repulsores y el flujo total crece exponencialmente en todas direcciones.

- Centro: Es un punto tal que en sus proximidades todas sus órbitas son cerradas. Ninguna órbita entra o sale. Es un punto neutral y estable. Aquí λ_1 y $\lambda_2 \, \epsilon \, \Im$.

- Espiral estable: En este caso el flujo gira acercándose al punto fijo y para que esto pase λ_1 es complejo conjugado de λ_2 o λ_2 es complejo conjugado de λ_1 con parte real negativa.

- Espiral inestable: En este caso el flujo gira alejándose del punto fijo y para que esto pase λ_1 es complejo conjugado de λ_2 o λ_2 es complejo conjugado de λ_1 con parte real positiva.

A continuación se muestra la clasificación de los puntos fijos y de los sistemas dinámicos para un sistema en 2D.

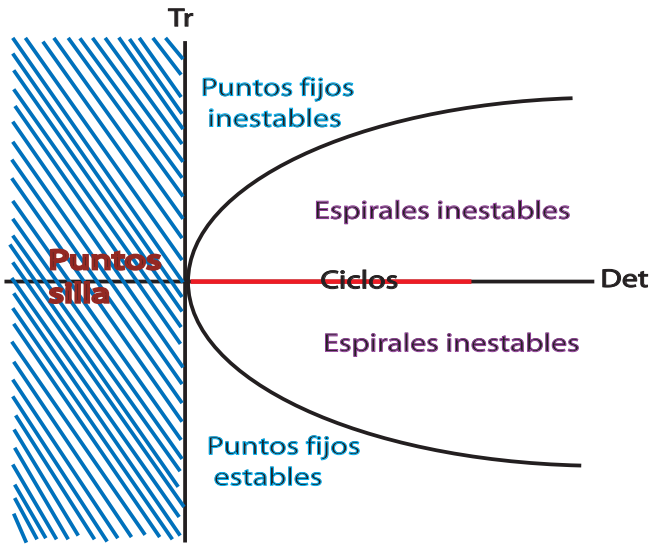


Figura 2. Clasificación de puntos fijos en sistemas dinámicos 2D, Tr es la traza y Det el determinante.

II.2.1. Sistemas Autónomos y no Autónomos

Se dice que un sistema es autónomo si éste no depende en forma explicita del tiempo y se puede modelarlo por la ecuación

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{4}$$

En caso contrario se dice que son sistemas no autónomos, pues su modelado está dado por la ecuación

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \tag{5}$$

En el sistema autónomo no se tiene influencia externa que estimule el comportamiento del sistema, lo que implica que tenga un comportamiento natural; mientras que en sistemas no autónomos se puede forzar el comportamiento de estos.

II.2.2. Sistemas dinámicos lineales y no lineales

Para que un sistema dinámico sea lineal se debe cumplir el principio de superposición; es decir, si $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, ..., $y_n(x)$ son soluciones a la Ec. (4) entonces $y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) +, ..., + y_n(x)$ es solución también, al igual que combinaciones lineales del conjunto. Así la Ec. (4) se puede reescribir como

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(ax + by) = a\mathbf{f}(x) + b\mathbf{f}(y). \tag{6}$$

En general, las soluciones provenientes de un espacio vectorial permiten el uso del álgebra lineal y simplifican significativamente el análisis. Una característica importante de los sistemas lineales es que se puede separar en partes y resolver cada una de ellas de forma independiente, por lo que la solución final del sistema será la suma de las soluciones independientes.

En la naturaleza, sistemas tan idealizados como los antes mencionados son poco comunes, por que realmente el comportamiento de los sistemas suelen ser impredecibles, complejos y no cumplen el principio de superposición; es decir, son no lineales y muchas veces caóticos. Estos sistemas regularmente no tienen una solución exacta y en estos casos se recurre a métodos numéricos con lo que se puede hacer una aproximación, sin perder soluciones físicas.

Debemos tener claro que todos los sistemas caóticos son no lineales, pero no todos los sistemas no lineales son caóticos.

II.3. Cuantificación del caos

El caos como tal no es contable, pues no se puede decir que se tiene un cierto número de caos, pero si es posible observar si en un sistema dinámico existe o no, utilizando

métodos como los Coeficientes de Liapunov o mediante mapas de Poincaré. Para esto es necesario hablar de los ciclos límite que son trayectorias cerradas aisladas a las que se acercan asintóticamente las trayectorias vecinas (estas no son cerradas). Otro término importante de mencionar es el espacio fase. Éste es la representación gráfica de un conjunto de posiciones y momentos de un sistema dinámico, cuya dimensión está dada por el número de grados de libertad del sistema.

II.3.1. Exponentes de Lyapunov

Los exponentes de Lyapunov miden la tasa promedio de divergencia o convergencia exponencial de trayectorias cercanas en el espacio fase.

Generalmente se supone que condiciones iniciales cercanas corresponden a estados iniciales casi idénticos, y se pensaría que permanecen cercanas después de un lapso de tiempo si esto ocurre es posible predecir el comportamiento del sistema; sin embargo cuando las órbitas divergen exponencialmente no es posible. Cualquier sistema que contenga al menos un exponente de Lyapunov positivo se define como caótico, la magnitud del exponente refleja la escala temporal en la cual la dinámica se hace impredecible.

Considerando el sistema dinámico bajo la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{7}$$

Sea $f^t(x)$ solución a la ecuación diferencial y considerando dos condiciones iniciales suficientemente cercanas en el espacio fase x_0 y $x_0 + \delta x_0$, donde δx_0 es una pequeña perturbación del punto x_0. Después de un tiempo t, la solución para estas condiciones iniciales particulares, estará dada por $f^t(x_0)$ y $f^t(x_0+\delta x_0)$, respectivamente. Utilizando la órbita descrita por la solución con condición inicial x_0 como referencia y la separación

entre el par de trayectorias como

$$\triangle f = f^t(x_0 + \delta x_0) - f^t(x_0). \tag{8}$$

La Ec. (8) es una función del tiempo, en caso que diverja indica que el sistema es inestable. Para el caso particular de una órbita caótica, la función $\triangle f^t$ variará erráticamente con el tiempo, por lo que se hace necesario introducir la tasa media exponencial de divergencia del par de trayectorias, como

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\triangle f^t}{\delta x_0} \right|, \tag{9}$$

donde λ se denomina exponente de Lyapunov y se asume cuando $\delta x_0 \to 0$. Linealizando f^t, se satisface

$$\triangle f = f^t(x_0 + \delta x_0) - f^t(x_0) = D_{x_0} f^t(x_0) \cdot \delta x_0, \tag{10}$$

que sustituyendo en la Ec. (9), se obtiene

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{D_{x_0} f^t(x_0) \cdot \delta x_0}{\delta x_0} \right|. \tag{11}$$

En general, un sistema dinámico en un espacio fase $n-$dimensional tiene un espectro con n exponentes de Lyapunov, uno por cada dirección del espacio fase. Es importante notar que cualquier separación inicial δx_0, contiene alguna componente en la dirección asociada con el máximo exponente de Lyapunov y debido a su crecimiento exponencial, el efecto de los otros exponentes es mínimo al lado de él y se desvanece con el tiempo (Núñez-Yépez y Salas-Brito, 2013).

II.3.2. Mapa de Poincaré

Antes de hablar sobre los mapas de Poincaré se deben ver las implicaciones del Teorema de Poincaré-Bendixson y de las secciones de Poincaré.

Teorema Poincaré-Bendixson El teorema de Poincaré-Bendixson clasifica todos los posibles comportamientos en el espacio fase en 2D. Para esto se supone que:

1. Sea R una región finita en el espacio bidimensional ($R \subseteq \Re^2$), R cerrada y acotada.
2. La expresión $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, es un campo vectorial continuamente diferenciable en un conjunto abierto A contenido en R ($A \supset R$).
3. En R no hay puntos fijos.
4. Existe una trayectoria C confinada en R, en el sentido que comienza en R y se mantiene en R en cualquier tiempo, por lo que sólo existen dos posibilidades:
   a) C es una órbita cerrada y
   b) C se mueve hacia una órbita cerrada cuando $t \to \infty$.

Lo anterior implica que de cualquier forma R contiene una órbita cerrada, como en la Fig. 3 se ilustra este teorema.

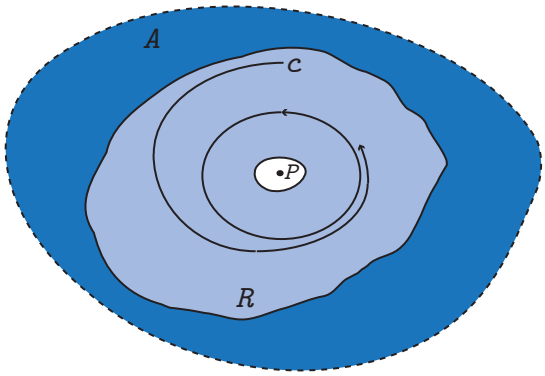


Figura 3. Representación gráfica del Teorema de Poincaré. A es un campo abierto que contiene a R que es una superficie cerrada, P es un punto fijo que está fuera de R y C es una trayectoria abierta.

En la Fig. 3, R es una región en forma de anillo, pues cualquier órbita cerrada está alrededor de un punto fijo P y los puntos fijos no están permitidos en R.

Es importante mencionar que este Teorema no aplica para el sistema en tres dimensiones donde las trayectorias se mueven sin ningún patrón. Además, no convergen a órbitas cerradas, aunque siempre están dentro de una región finita. En algunos casos estas trayectorias pueden caer a atractores sin ninguna explicación y en estos casos se dice que existe caos (Strogatz, 1994).

Secciones de Poincaré. Las secciones de Poincaré son una herramienta muy útil que puede dar información sobre la naturaleza de las soluciones de sistemas dinámicos modelados mediante ecuaciones diferenciales. Para esto se toman las órbitas de trayectorias en el espacio fase y se pone un plano transversal al flujo de éstas; por lo que, si se ve en este plano dichas secciones serían la huella que dejan las trayectorias al atravesar el plano.

Para un espacio de estado de dos dimensiones, las secciones de Poincaré se construye como sigue. En el espacio fase en 2D, se dibuja un segmento de línea que atraviesa el ciclo límite, como se muestra en la Fig. 4.

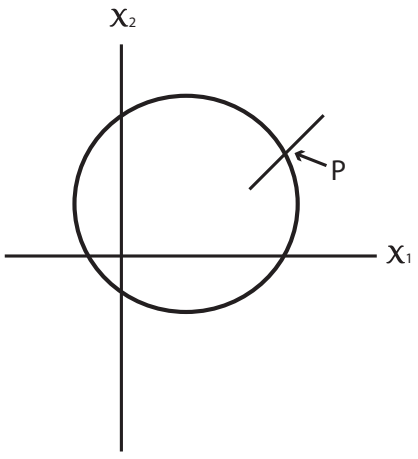


Figura 4. Ciclo límite en 2D intersectado en P por una sección de Poincaré.

En la Fig. 4 la línea transversal que se muestra puede ser cualquier segmento de línea en el eje x_1 o x_2. P es un punto en el cual el ciclo límite atraviesa el segmento de línea que va de izquierda a derecha (también puede tomarse de derecha a izquierda).

Ahora iniciando una trayectoria en el espacio fase en un punto que está cerca, pero no en el ciclo límite, entonces esa trayectoria cruzará el segmento de la línea de la sección de Poincaré en un punto distinto de P. Sea P_1 el primer punto de cruce, ya que la trayectoria evoluciona con el tiempo y ésta cruzará el segmento de línea de la sección de Poincaré de nuevo en puntos P_2, P_3, y así sucesivamente como se muestra en la Fig. 5.

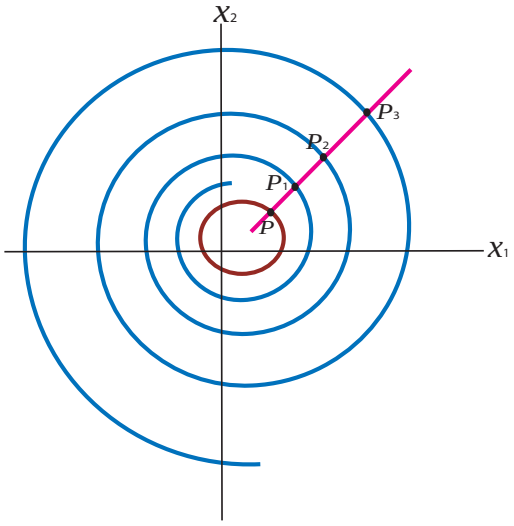


Figura 5. Trayectoria de la partícula que rodea un ciclo límite en 2D intersectado en varios puntos por una sección de Poincaré.

En la Fig. 5, si la secuencia de puntos se acerca a P conforme pasa el tiempo para cualquier punto de partida cerca del ciclo límite, se puede decir que se tiene un ciclo límite atractor o ciclo límite estable, el cual es un atractor para el sistema. En caso contrario cuando la secuencia de los puntos de intersección se aleja de P (para cualquier trayectoria comenzando cerca del ciclo límite), se dice que se tiene un ciclo límite repulsor o ciclo límite inestable. Otra posibilidad es que los puntos se sienten

atraídos por un lado y repelidos por el otro. En ese caso se dice que se tiene un ciclo silla.

Los mapas de Poincaré también llamados función de Poincaré, se utilizan precisamente para describir cuantitativamente las propiedades que se mencionan en las secciones de Poincaré. La idea esencial es que dado un punto P_1, donde una trayectoria cruza el segmento de línea Poincaré, se puede determinar, en principio, el siguiente punto de cruce P_2 mediante la integración de las ecuaciones de evolución temporal que describen el sistema. Por lo tanto, debe haber alguna función matemática, F, que relaciona P_1 con P_2: $P_2 = F(P_1)$.

En general, se puede escribir lo anterior mediante la ecuación

$$P_{n+1} = F(P_n), \tag{12}$$

siendo n el n-ésimo punto donde se cruza la órbita de la trayectoria con la sección de Poincaré. La función F no depende sólo de las ecuaciones originales que describen el sistema, sino también son dependientes de la elección del segmento de línea en la sección de Poincaré.

Para analizar la naturaleza del ciclo límite, se puede hacer mediante el análisis de la naturaleza de la función F y sus derivadas. Dos puntos importantes para notar son:

i) La sección de Poincaré reduce el problema bidimensional original a un problema unidimensional.

ii) La función de Poincaré es una relación iterativa de estados (tamaño finito con el paso del tiempo) en lugar de una relación diferencial (infinitesimal en el paso del tiempo).

El segundo punto es importante porque F deja a P_{n+1} en términos de P_n. El intervalo de tiempo entre estos puntos es aproximadamente el tiempo para dar la vuelta al ciclo

límite una vez con un gran salto relativo en el tiempo. Por otro lado, una ecuación diferencial unidimensional $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ dice que x cambia a lo largo de un intervalo de tiempo infinitesimal. La función F se llama mapa iterado.

Sin perder de vista que el punto $P = F(P)$, cualquier punto P^* que satisface $P^* = F(P^*)$ se llama un punto fijo de la función mapa. Si una trayectoria cruza el segmento de línea exactamente en P^*, se vuelve a P^* en cada ciclo. Ahora considerando un punto P_1 cerca de P^* se estudia lo que ocurre con la distancia entre ellos cuando el sistema evoluciona. Formalmente, esto queda descrito por

$$P_2 - P^* = F(P_1) - F(P^*). \tag{13}$$

Haciendo una expansión en serie de Taylor de P_2 sobre el punto P^* se tiene

$$\begin{aligned} P_2 - P^* &= F(P^*) + \left.\frac{dF}{dP}\right|_{P^*} (P_1 - P^*) + ... - F(P^*), \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left.\frac{d^n F}{dP^n}\right|_{P^*} (P_1 - P^*)^n. \end{aligned} \tag{14}$$

Renombrando los términos de la serie de Taylor se obtiene

$$(P_1 - P^*) = d_1, \tag{15}$$

$$M = \left.\frac{dF}{dP}\right|_{P^*}, \tag{16}$$

$$d_2 = M d_1, \tag{17}$$

siendo M el multiplicador característico para los mapas de Poincaré o multiplicadores Lyapunov. En general,

$$d_{n+1} = M^n d_1^n. \tag{18}$$

Por otro lado, también se puede definir un exponente característico asociado con el ciclo dado por las ecuaciones

$$M \equiv e^{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda \equiv \ln(M). \tag{19}$$

La idea es que el exponente característico desempeña el papel del exponente de Lyapunov (Hilborn, 2004).

II.4. Transporte en sistemas balísticos

En los últimos años se han estudiado las propiedades de transporte en sistemas balísticos para el caso clásico. Esto es considerar las trayectorias de partículas dentro de un canal formado por dos perfiles periódicos y ondulados. Se consideran por simplicidad, funciones armónicas que facilita el estudio de la propagación de las partículas dentro del canal, como se muestra en la Fig. 6.

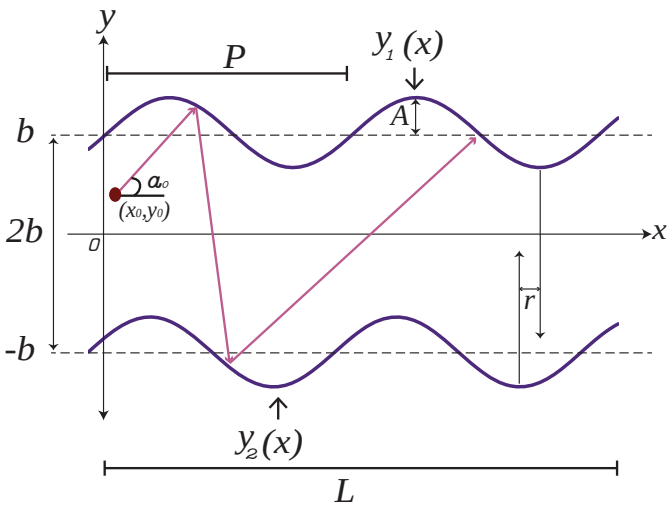


Figura 6. Trayectoria de una partícula en un canal ondulado de longitud L de periodo P, con un desfasamiento r en la pared inferior en el caso clásico.

En la Fig. 6, $y_1(x)$ y $y_2(x)$ corresponden a las paredes superior e inferior respectivamente, $2b$ es el ancho del canal, P representa el periodo del perfil $y_i(x)$ con $i = 1, 2$, A es la amplitud y L es la longitud del canal. El punto (x_0, y_0) es la posición inicial en que se lanza la partícula en el plano x-y y a_0 es el ángulo inicial con que ha sido lanzada.

En estos sistemas es importante conocer la evolución en el tiempo de las trayectorias. Para esto se consideran dos funciones para formar un canal donde se pueda observar precisamente la evolución temporal de estas trayectorias como

$$y_1(x) = b + A\sin(2\pi x), \tag{20}$$

$$y_2(x) = -b + A\sin(2\pi(x+r)). \tag{21}$$

Para realizar un análisis de estas trayectorias, basta con tomar un conjunto de puntos de choque consecutivos en ambas paredes: $(x_n, y_n(x_n))$, $(x_n^*, y_n(x_n^*))$ y $(x_{n+1}, y_n(x_{n+1}))$ como muestra en la Fig. 7.

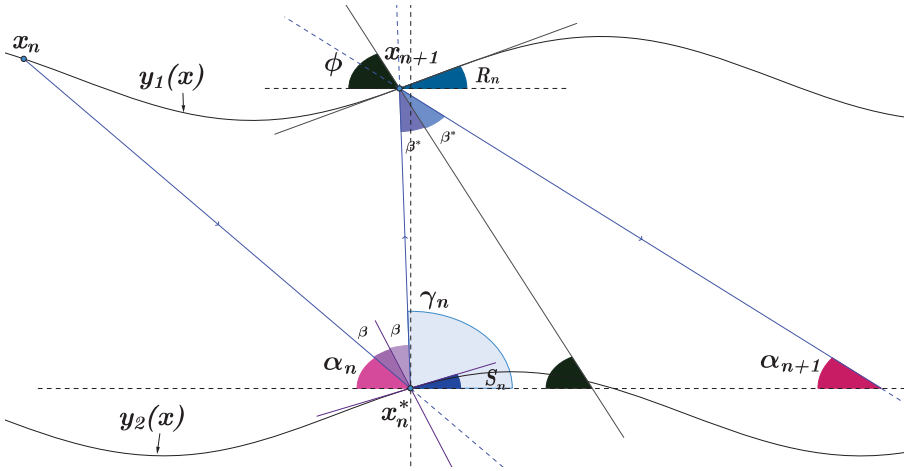


Figura 7. Representación de la trayectoria de una partícula en un canal sinusoidal.

En la Fig. 7 se observa que x_n y x_{n+1} son puntos de choque de la partícula con la pared superior y_1 y x_n^* es un punto de choque con la pared inferior. R_n y S_n son las pendientes a los perfiles y_1 y y_2 en los puntos de choque x_{n+1} y x_n^*, respectivamente. La evolución de las trayectorias se puede estudiar mediante la relación que existe entre los ángulos formados por los choques y por las pendientes del perfil en el punto de choque.

Tomando el punto x_n^* como sistema de referencia por conveniencia, ya que es el punto de choque intermedio entre los puntos que se están estudiando. Primero se toma

la trayectoria que va de $(x_n, y_n(x_n))$ a $(x_n^*, y_n(x_n^*))$ y sean α_n el ángulo con el cual choca la partícula respecto al sistema de referencia en x_n^* y S_n el ángulo correspondiente a la tangente a la curva en $y_2(x_n^*)$. Los ángulos se pueden expresar de la siguiente forma

$$\alpha_n = \arctan\left(\frac{y_1(x_n) - y_2(x_n^*)}{x_n - x_n^*}\right), \tag{22}$$

$$S_n = \arctan\left(\frac{dy_2(x)}{dx}\right)|_{x=x_n^*}. \tag{23}$$

Ahora se observa que es lo que ocurre con la trayectoria entre los puntos de choque x_n y x_n^*. Evaluando las Ecs. (20) y (21) en estos puntos respectivamente y restando la Ec. (21) de la Ec. (20) se obtiene

$$y_1(x)|_{x=x_n} - y_2(x)|_{x=x_n^*} = 2b + A\sin(2\pi x_n) - A\sin(2\pi(x_n^* + r)). \tag{24}$$

Despejando el término $y_1(x_n) - y_2(x_n^*)$ de la Ec. (22) y sustituyendo en la Ec. (24) se tiene

$$\tan(\alpha_n)(x_n - x_n^*) = 2b + A\sin(2\pi x_n) - A\sin(2\pi(x_n^* + r)). \tag{25}$$

En la Fig. 7 se observa que $\alpha_n < 0$ debido al sistema de referencia. Utilizando la ley de reflexión en el choque se puede escribir el ángulo respecto al eje x con el que sale la trayectoria después del choque γ_n. Es muy importante ya que como no existen fuerzas externas sobre el canal, γ_n será el ángulo con que llegue la partícula al siguiente choque. En este caso γ_n está dada por

$$\gamma_n = |\alpha_n| + 2S_n. \tag{26}$$

Por otro lado siguiendo la trayectoria que va de $(x_n^*, y_2(x_n^*))$ a $(x_{n+1}, y_1(x_{n+1}))$ y evaluando la Ec. (20) en x_n^* que es restada de la Ec. (21) evaluada en x_{n+1}, se obtiene,

$$y_1(x)|_{x=x_{n+1}} - y_2(x)|_{x=x_n^*} = 2b + A\sin(2\pi x_{n+1}) - A\sin(2\pi(x_n^* + r)). \tag{27}$$

Como ya se sabe que γ_n es el ángulo con el que llegará la partícula al choque en x_{n+1}, se puede reescribir de la siguiente forma

$$\gamma_n = \tan^{-1}\left(\frac{y_1(x_{n+1}) - y_2(x_n^*)}{x_{n+1} - x_n^*}\right). \tag{28}$$

Despejando el término $y_1(x_{n+1}) - y_2(x_n^*)$ de la Ec. (28) y sustituyendo en la Ec. (27), se puede reescribir de la siguiente forma

$$\tan(\gamma_n)(x_{n+1} - x_n^*) = 2b + A\sin(2\pi x_{n+1}) - A\sin(2\pi(x_n^* + r)). \tag{29}$$

La Ec. (29) muestra la dependencia de la trayectoria con los ángulos formados por choques previos. Finalmente calculando el ángulo con el cual saldrá la partícula después del choque en x_{n+1} dado por

$$\alpha_{n+1} = |\alpha_n| + 2(S_n - R_n), \tag{30}$$

donde R_n es el ángulo correspondiente a la tangente a $y_1(x_{n+1})$. Es notorio que α_{n+1} está relacionada con las pendientes a los perfiles en los puntos de choque x_n^* y x_{n+1}.

Del análisis anterior se puede notar que los ángulos van cambiando respecto a los puntos de choque y la relación que existe entre ellos, pero el conjunto de puntos que forman solamente se puede analizar numéricamente. Además es importante mencionar que el desarrollo que aquí se presenta es solamente para un caso particular ya que la relación entre los ángulos cambiará por la dependencia con las pendientes de los perfiles en los puntos de choque.

En trabajos anteriores (Herrera-González *et al.*, 2011) se han estudiado los rebotes de trayectorias de partículas dentro de un canal sin fuerzas externas representados en espacio. Para esto utilizaron la posición de choque y una componente del momento $(x_n, p_x = \cos(\alpha_n))$ para crear los mapas de Poincaré, en este caso es suficiente con este subespacio del espacio fase porque no se consideran otras fuerzas sobre las partículas, excepto las fuerzas instantáneas de choque con las placas, lo que hace que la trayectoria sea continua y que el ángulo con que sale la partícula después de un choque sea el mismo con el que llega al siguiente choque.

A continuación, se muestran algunos mapas de Poincaré Fig. 8. Las amplitudes que se utilizaron para un canal fueron $A = 0$ (Fig. 8 a)), $A = 0{,}001$ (Fig. 8 b)), $A = 0{,}05$ (Fig. 8 c)) y $A = 0{,}0{,}08$ ((Fig. 8 d)). En todos los casos el canal tiene un ancho $b = 0{,}1$, $r = 0{,}5$ para las Figs. 8 b) y c) y $r = 0{,}33$ para la Fig. 8 d).

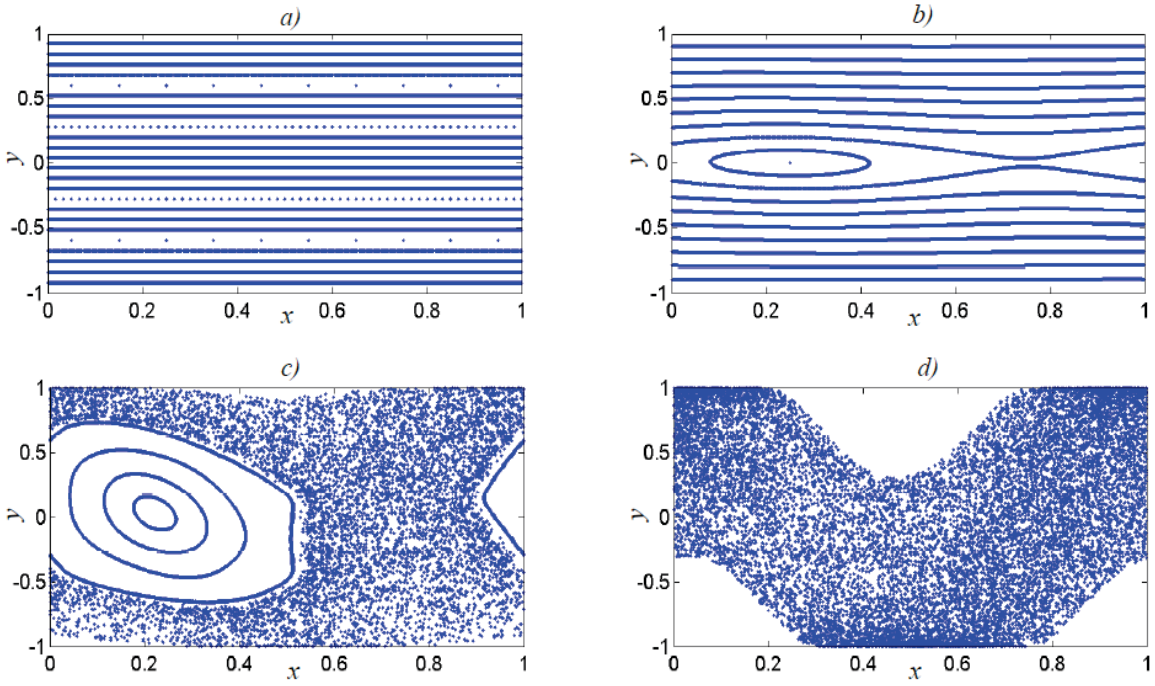


Figura 8. Mapas de Poincaré para un canal con amplitud a) $A = 0{,}0$, b) $A = 0{,}001$, c) $A = 0{,}05$ y d) $A = 0{,}08$.

En la Fig. 8 (a) se puede observar que en el caso clásico, no existe comportamiento caótico como era de esperarse. La trayectoria no sufre alteraciones debido a la reflexión local en el choque y a que no existe fuerzas externas en el sistema. La Fig. 8 (b) presenta una formación un ciclo límite (isla), no perdiendo de vista que la amplitud en este caso es mínima. La Fig. 8 (c) muestra que al hacer la amplitud de mayor los ciclos límite son aun más notorios y existe fuera de él un comportamiento caótico. En la Fig. 8 d) se observa como llega un punto en que la amplitud es tan grande que sólo se tiene caos total.

Capítulo III

MÉTODOS NUMÉRICOS

En el presente capítulo, se describirá el método integral para calcular las trayectorias de las partículas cargadas en un condensador con placas infinitas paralelas y periódicas, inmersas en un campo eléctrico inhomogéneo. Para esto se resolverá la ecuación de Laplace bidimensional, para obtener el potencial electrostático y el campo eléctrico correspondiente al sistema propuesto.

III.1. Geometría del condensador

Para el estudio del condensador eléctrico electrostático se utilizó una geometría formada por dos placas paralelas infinitas, onduladas y periódicas como se muestra en la Fig. 9.

Se consideran superficies conductoras homogéneas en la dirección z y el sistema tiene periodicidad en la dirección x. La región entre las placas es vacía. Se establece un potencial U_1 en la placa superior y otro U_2 en la inferior, de manera que la diferencia de potencial está dada por $\triangle U = U_2 - U_1$.

Gracias a la simetría de las superficies, el potencial electrostático, U, es independiente de la dirección de simetría z, por lo que se puede realizar el estudio del problema en dos dimensiones usando una sección transversal mediante los perfiles que corresponden

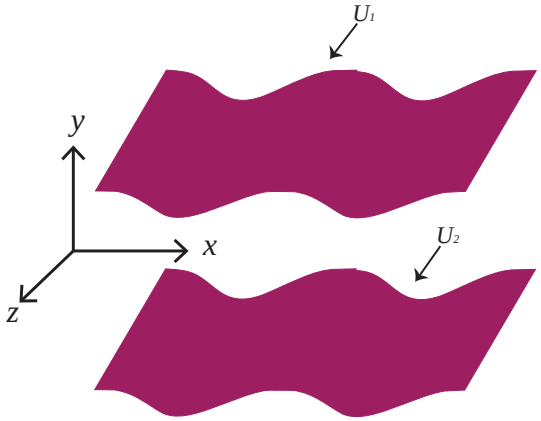


Figura 9. Sistema electrostático formado por dos placas conductoras onduladas de extensión infinita.

a las superficies tal como se ilustra en la Fig. 10. Las superficies promedio de las placas son planos infinitos paralelos y separados por una distancia b.

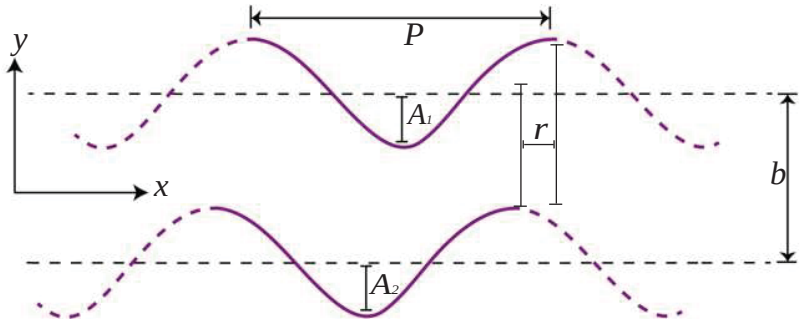


Figura 10. Diagrama de dos placas con perfiles ondulados infinitos con periodo P en el plano x-y, amplitud A y ancho b.

En la Fig. 10, la ondulación de las superficies está dada por las siguientes funciones

$$y_1(x) = b + A_1 \cos(2\pi x/P), \tag{31}$$

$$y_2(x) = A_2 \cos(2\pi x/P + r), \tag{32}$$

donde y_1 representa el perfil de la placa superior y y_2 el perfil de la placa inferior. Siendo A_1 y A_2 las amplitudes de los perfiles ondulados superior e inferior, respectivamente. P

es el periodo del perfil y r es el desfasamiento que existe entre las placas. Enfatizando que debido a la geometría, el sistema es periódico en la dirección x con periodo P.

III.2. Método de la Ecuación Integral

El principal problema del sistema presentado es encontrar el potencial en la región vacía entre las placas conductoras. Para dar solución al problema se considerara primero un condensador con placas planas. Éste servirá como base para el cálculo del potencial en un condensador con placas onduladas. Se podría decir que se "calibrara" en base a él. Una vez conocido el potencial es posible conocer otras propiedades del sistema como lo es el campo eléctrico.

III.2.1. Condensador con placas planas

La geometría del condensador se muestra en la Fig. 11.

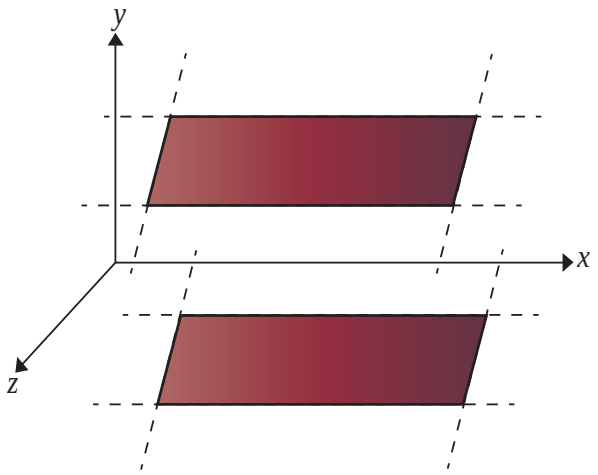


Figura 11. Condensador con placas planas infinitas y paralelas.

Para el estudio de este sistema se utilizarán las ecuaciones de Maxwell. En la región

vacía (ver Fig. 11) las ecuaciones de campo electrostáticas son:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{33}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \tag{34}$$

La Ec. (34) implica que existe un potencial escalar U, por lo que el campo eléctrico puede escribir de la siguiente manera

$$\mathbf{E} = -\nabla U(x, y). \tag{35}$$

Sustituyendo la Ec. (35) en la Ec. (33) se obtiene

$$\nabla^2 U(x, y) = 0, \tag{36}$$

tomando en cuenta que $\sigma = 0$.

La Ec. (35) es precisamente la ecuación de Laplace, así que para conocer el potencial electrostático basta con dar solución a ella. Se sabe que la solución a esta ecuación es exacta,

$$U(x, y) = -\left(\frac{U_2 - U_1}{b}\right) y + U_2 = -\frac{\triangle U}{b} y. \tag{37}$$

En la Ec. (37) se han aplicado las condiciones de frontera del sistema mostrado en la Fig. 11,

$$U(x, y) \mid_{y_1(x)=b} = U_1, \tag{38}$$

$$U(x, y) \mid_{y_2(x)=0} = U_2. \tag{39}$$

Como ya se sabe el campo eléctrico en el caso plano es uniforme con líneas de campo verticales, cuya magnitud está dada por $E = U/b$. Asumiendo que $U_1 > U_2$ el campo está dirigido desde la placa que tiene el potencial más alto hacia la placa con el potencial más bajo.

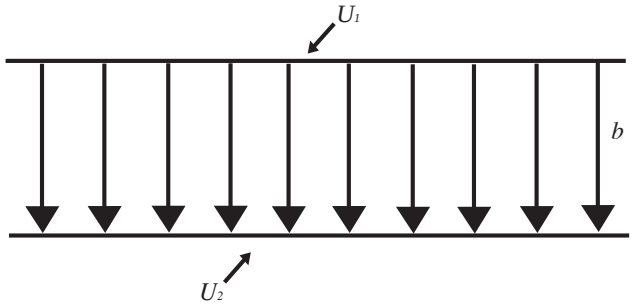


Figura 12. Líneas de campo eléctrico uniforme en un condensador plano.

Ahora si se pone una partícula dentro de un condensador plano como el ilustrado en la Fig. 12, se observará que las trayectorias no son afectadas por el campo eléctrico. Como en este caso el campo es uniforme, la trayectoria solamente dependerá de las condiciones iniciales como lo son las componentes de la velocidad (v_x, v_y) y la posición inicial (x_0, y_0). Este caso se puede resolver analíticamente y servirá para corroborar el método numérico.

III.2.2. Condensador con placas onduladas

Para casos más generales como lo es el caso de un condensador formado por placas onduladas (ver Fig. 9), el campo eléctrico es inhomogéneo y su cálculo resulta ser complejo ya que las ecuaciones que lo representan no tiene una solución exacta. En estos casos es conveniente utilizar métodos numéricos con los que se puede hacer una buena aproximación.

Para la solución de este problema, se considera una función de Green, $G(x, y; X, Y)$, que depende de las coordenadas cartesianas de un punto que puede considerarse como "punto de observación" (x, y), y otro que puede denominarse "punto fuente " (X, Y).

La función de Green se define como cualquier solución de la ecuación

$$\bigtriangledown^2 G(x,y;X,Y) = -\delta(x-X, y-Y), \tag{40}$$

donde $\delta(x-X, y-Y)$ representa a la función delta de Dirac. La función está definida como

$$\delta(x-X, y-Y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x,y) \neq (X,Y) \\ \infty & \text{si} \quad (x,y) = (X,Y). \end{cases} \tag{41}$$

Rodeando al punto de observación (x,y) se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-X, y-Y)dXdY = 1. \tag{42}$$

Una solución de la Ec. (40)

$$G(x,y;X,Y) = -\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2}. \tag{43}$$

La interpretación física de esta función se trata de un potencial electrostático producido en el punto de observación(x,y) y generado por una distribución de carga eléctrica lineal y uniforme, cuya densidad lineal de carga estaría dada por $\lambda = \varepsilon_0$. Dicha distribución estaría extendida a lo largo del eje x y pasaría por el punto fuente (X,Y).

Aplicando el teorema de Green bidimensional con las funciones U y G se puede establecer lo siguiente:

$$\int_R \left(U \bigtriangledown^2 G - G \bigtriangledown^2 U\right) da = \oint_c \left(G\frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n}U\right) ds, \tag{44}$$

donde R es una región de las funciones U y G; C es un contorno cerrado que sirve como frontera de la región R y que puede estar formado por puntos tanto en un dominio finito como en uno infinito; $\partial u/\partial n = \bigtriangledown G \cdot \widehat{\mathbf{n}}$ es la derivada normal de G y análogamente para U; $\mathbf{n}$ es el vector en el plano x-y, es normal al contorno C y apunta hacia afuera de la región; *da* es el diferencial de superficie y *ds* es el diferencial de longitud de arco, como se muestra en la Fig. 13.

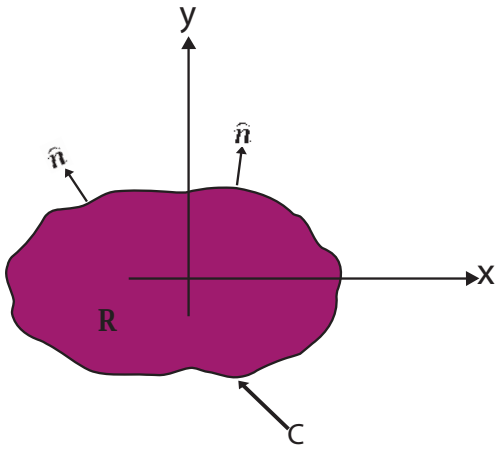


Figura 13. Geometría considerada para el teorema de Green bidimensional.

Sustituyendo las Ecs. (36) y (40) en la Ec. (44) se obtiene

$$\oint_c \left(G\frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n}U \right) ds = \begin{cases} U(x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in R \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \notin R. \end{cases} \tag{45}$$

A partir de la Ec. (45) es posible formular métodos numéricos para calcular el potencial $U(x,y)$ en la región R. En el problema planteado la región es vacía entre las superficies conductoras.

III.2.3. Funciones Fuente

Observando ambos lados de la Ec. (45) se puede ver que en el lado izquierdo se tiene dentro de la integral el potencial buscado y su derivada normal, mientras que en el lado derecho está despejado. Se utilizará está relación para encontrar lo que se llamaran "fuentes" representadas por U y $\partial U/\partial n$. Para esto se evalúa la integral de línea en puntos de observación (x,y) fuera de la región R, donde (x,y) son puntos infinitesimalmente separados del perfil C, tal como se ve en la Fig. 14.

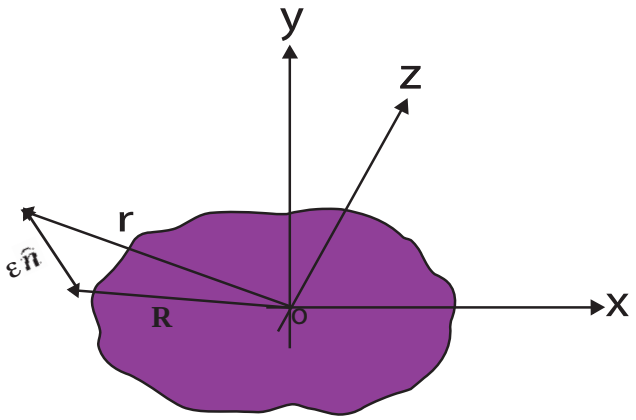


Figura 14. Elección del punto de observación muy cerca de la superficie representado por **r.**

De esta manera, se puede escribir el punto de observación como

$$(x, y) = (X + \varepsilon\eta_x, Y + \varepsilon\eta_y), \tag{46}$$

donde ε es un infitesimal positivo, (η_x, η_y) representa a la normal hacia afuera de la superficie y (X, Y) es un vector del perfil C. Esto implica que la integral es igual a cero. Con esta elección se obtiene una ecuación integral a resolver expresada por

$$\oint_c G\frac{\partial U}{\partial n}ds = \oint_c \frac{\partial G}{\partial n}Uds. \tag{47}$$

Analizando la Ec. (47), las incógnitas a encontrar son el potencial U y su derivada normal $\partial U/\partial n$, ya que la función de Green G es conocida y por consecuencia su derivada normal $\partial G/\partial n$.

Una vez encontradas las fuentes, la Ec. (45) permitirá encontrar el potencial $U(x, y)$ para puntos de observación dentro de la región R.

III.2.4. Discretización de las ecuaciones integrales

En la Ec. (47) se tienen integrales de línea y la variable de integración es el parámetro de longitud de arco s. Por esta razón es mejor representar los integrandos en términos de

dicho parámetro y para hacerlo es necesario considerar una representación paramétrica de los puntos que conforman el perfil C.

Para esto se toma un punto arbitrario (x, y) y se toman formas paramétricas en coordenadas cartesianas $(X(s), Y(s))$, así como de sus derivadas de primer $(X'(s), Y'(s))$ y segundo $(X''(s), Y''(s))$ orden, donde se supone que todas estas funciones son continuas al menos por tramos. Después se eligen n puntos equidistantes sobre cada perfil. La distancia entre dos puntos consecutivos a lo largo de la curva será representado como $\triangle s$ y se le asociaran las longitudes de arco, s_1 , s_2, ...,s_n, en la representación de n puntos en la forma: $(X(s_1), Y(s_1))$, $(X(s_2), Y(s_2))$,..., $(X(s_n), Y(s_n))$. Suponiendo que las n longitudes de arco consideradas permiten calcular el valor de las derivadas de primer y segundo orden en cada punto, de igual manera.

Asumiendo que $\triangle s_j$ es suficientemente pequeño, las integrales que aparecen en la Ec. (47) se pueden representar por sumas sobre pequeños intervalos. Tomando el lado izquierdo se hace la aproximación rectangular, por lo que

$$\oint_c G \frac{\partial U}{\partial n} ds \simeq \sum_{j=1}^{n} L_{ij} F_j, \tag{48}$$

donde $F_j = \partial U/\partial n \mid_{s_i = s_j}$ es la derivada normal del potencial electrostático evaluada en el j-ésimo punto y los L_{ij} representan los elementos de matriz, definidos por la expresión integral

$$L_{ij} = \int_{s_j - \triangle s/2}^{s_j + \triangle s/2} G(X_i + \varepsilon \eta_{x_i} - X, Y_i + \varepsilon \eta_{y_i} - Y) ds. \tag{49}$$

En la integral de la Ec. (49) hay que tomar el límite cuando $\varepsilon \to 0$. Por otro lado, la integral que está del lado derecho en la Ec. (47) puede aproximarse por

$$\oint_c \frac{\partial G}{\partial n} U ds \simeq \sum_{j=1}^{n} N_{ij} U_j, \tag{50}$$

donde U_j es el potencial electrostático evaluado en el j-ésimo punto y los N_{ij} representan

a los elementos de matriz, definidos por la expresión

$$N_{ij} = \int_{s_j-\triangle S/2}^{s_j+\triangle S/2} \frac{\partial G}{\partial n}(X_i + \varepsilon\eta_{x_i} - X, Y_i + \varepsilon\eta_{y_i} - Y)dS. \tag{51}$$

Calculando los elementos de matriz L_{ij}y N_{ij} (ver Apéndice A) se tiene que:

$$L_{ij} = -\frac{\triangle\, s}{2\pi}\left\{\ln\sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2}(1 - \delta_{ij}) + \ln\left(\frac{\triangle\, s}{2e}\right)\delta_{ij}\right\} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} N_i j = &-\frac{\triangle\, s}{2\pi}\left[\frac{[-(X_i - X_j)Y_j' + (Y_i - Y_j)X_j']}{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2}\right](1 - \delta_{ij}) \\ &+ \left[\frac{1}{2} + \frac{\triangle s}{4\pi}(X_j'Y_j'' - X_j''Y_j')\right]\delta_{ij} \end{aligned} \tag{53}$$

III.3. Potencial electrostático de un condensador infinito

Para dar solución al problema planteado de un condensador con placas paralelas infinitas se aprovechara su periodicidad tomando una "celda unitaria". Esta celda es un periodo del perfil ondulado como se muestra en la Fig. 15, la cual tiene como límites laterales a Γ_3 y Γ_4 y las placas conductoras por los límites superior e inferior dados por Γ_1 y Γ_2, respectivamente.

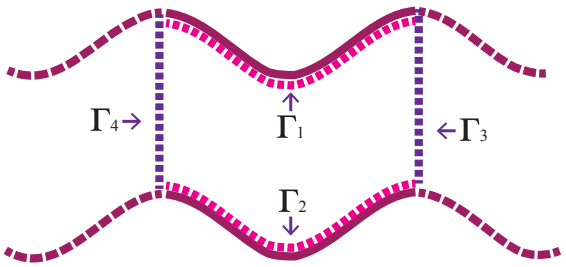


Figura 15. Celda unitaria ondulada que está limitada por los contornos Γ_1, Γ_2, Γ_3 y Γ_4.

Las condiciones de frontera para Γ_1 y Γ_2 están dadas por las Ecs. (38) y (39),

mientras que para Γ_3 y Γ_4 se pueden expresar por las condiciones de periodicidad,

$$U(x,y) = U(x+P,y), \tag{54}$$

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial n} = -\frac{\partial U(x+P,y)}{\partial n}, \tag{55}$$

tomando las normales hacia afuera de la celda unitaria (razón del signo negativo en la Ec. (55)).

Utilizando este contorno, la Ec. (47) se reescribe de la siguiente forma:

$$\oint_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4} G\frac{\partial U}{\partial n}ds = \oint_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4} \frac{\partial G}{\partial n}Uds. \tag{56}$$

Tomando pequeños intervalos y sustituyendo las Ecs. (48) y (50) en la Ec. (56), se pueden escribir las integrales como sumatorias. Ahora discretizando los perfiles Γ_1, Γ_2, Γ_3 y Γ_4 en la Ec. (56), puede reescribir como un sistema lineal e inhomogéneo de ecuaciones algebraicas

$$\sum_{j=1}^{n_1} L_{ij(1)}F_{j(1)} + \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} L_{ij(2)}F_{j(2)} + \sum_{j=n_1+n_2+1}^{n_1+n_2+n_3} (L_{ij(3)} - L_{ij(4)})F_{j(3)}$$

$$- \sum_{j=n_1+n_2+1}^{n_1+n_2+n_3} (N_{ij(3)} + N_{ij(4)})U_{j(3)} = b_i, \tag{57}$$

para $i = 1, 2, ..., n_1 + n_2 + n_3 + n_4$, donde n_1, n_2, n_3 y n_4 son enteros que corresponden al número de puntos de los perfiles Γ_1, Γ_2, Γ_3 y Γ_4, respectivamente; además $n_1 = n_2$ y $n_3 = n_4$. Los factores $L_{ij(k)}$ corresponden a los elementos de matriz de la Ec. (52) pero calculados en el j-ésimo punto correspondiente al perfil Γ_k. Análogamente los $N_{j(k)}$ corresponden a los elementos de matriz de la Ec. (53).

En la Ec. (57) el término inhomogéneo, b_i, está dado por

$$b_i = U_1 \sum_{j=1}^{n_1} N_{ij} + U_2 \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} N_{ij}. \tag{58}$$

En el sistema de ecuaciones, el número de ecuaciones $(n_1+n_2+n_3+n_4)$ coincide con el número de incógnitas, por lo que en principio es posible obtener una solución numérica única. Una vez obtenido el potencial eléctrico U se puede calcular campo eléctrico por la relación que existe entre ellos expresada en la Ec. (35). Fig. 16, se muestra el potencial y el campo eléctrico para un condensador con placas planas $A_1 = A_2 = 0$ (Fig. 16(a) y 16(b), respectivamente) y otro con placas onduladas $A_1 = A_2 = 0{,}1$ (Figs. 16(c) y 16(d)), ambos con una longitud $L = 2\pi$ y un ancho $b = \pi$.

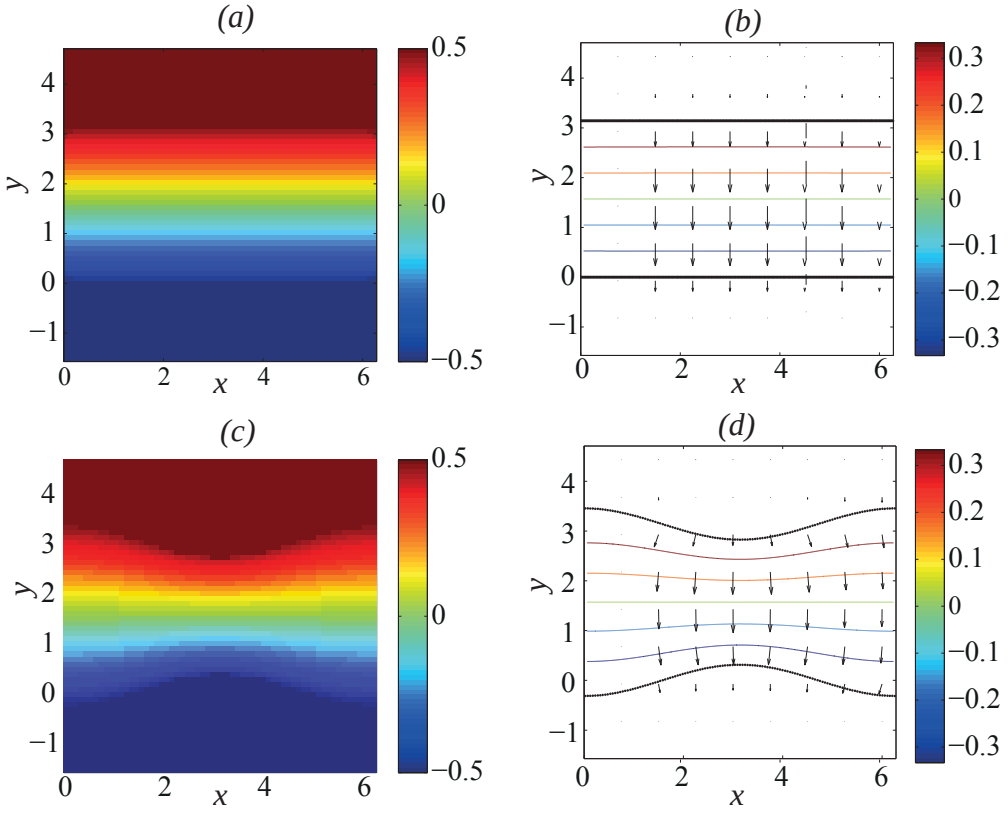


Figura 16. Potencial eléctrico para un condensador de (a) placas planas $A_1 = A_2 = 0$ y c) placas onduladas $A_1 = A_2 = 0{,}1$. Campo eléctrico para un condensador con amplitud (b) $A_1 = A_2 = 0$ y (d) $A_1 = A_2 = 0{,}1$.

En las Figs. 16(b) y (d) se sigue cumpliendo que las líneas de campo van de la placa del condensador con carga positiva a la placa con carga negativa. Es notoria la

afectación que sufre el campo y el potencial eléctrico para un condensador con placas onduladas (Fig. 16(c) y (d)) en comparación con uno que no presenta ondulación (Fig. 16(a) y (b)).

III.4. Método de Diferencias Finitas

Ya que en general el cálculo del potencial sólo puede realizarse numéricamente debido a la complejidad del campo, se tiene que las trayectorias también solamente pueden calcularse de esa manera. El método numérico que se usará es uno de "diferencias finitas" que a comparación de otros métodos es simple, pero esto no le quita lo eficaz.

Considerando el problema de haber encontrado (numéricamente) el potencial $U(x, y)$, para calcular (numéricamente) la trayectoria de una partícula cargada. Esta trayectoria está representada por la función dependiente del tiempo $\mathbf{r}(t)$, dadas las condiciones iniciales de posición y velocidad: $\mathbf{r}(t = 0) = \mathbf{r}_0$ y $\mathbf{v}(t = 0) = \mathbf{v}_0$, respectivamente.

Para encontrar la trayectoria se considera la segunda ley de Newton,

$$\mathbf{F} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \tag{59}$$

donde m es la masa de la partícula, $d^2\mathbf{r}/dt^2$ es su aceleración y F es la fuerza total que actúa sobre ésta. Considerando el caso en que la única fuerza que actúa sobre la partícula es una fuerza eléctrica dada por

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \tag{60}$$

siendo q la carga de la partícula y $\mathbf{E}$ el campo eléctrico en la región vacía entre las placas conductoras. Es necesario precisar que lo anterior es válido mientras la partícula no choque con alguna de las placas, porque cuando choca aparece una fuerza extra impulsiva que habría que considerar. Un modelo usual para considerar el impacto es

suponer que se realiza un choque elástico, por lo que la partícula tiene una energía cinética después del impacto igual a la que tenía antes del impacto, y además, **localmente** rebota cumpliendo una "ley de la reflexión" en donde el ángulo de reflexión es igual al de incidencia para el caso plano.

Recordando que el campo eléctrico $\mathbf{E}$ se puede obtener por medio de la Ec. (35). Conocida la fuerza debido al campo eléctrico, $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, y las condiciones iniciales se puede resolver numéricamente la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = md^2\mathbf{r}/dt^2$, por el método de diferencias finitas. Esto permite calcular la trayectoria de una partícula de masa m con carga eléctrica q cuyas condiciones iniciales de posición y velocidad son dadas.

Las ecuaciones básicas para dicho método son:

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{v} \quad \text{o bien,} \quad \mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t + \Delta t)\Delta t, \tag{61}$$

$$m\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \mathbf{F} \quad \text{o bien,} \quad \mathbf{v}\left(t + \frac{\Delta t}{2} + \Delta t\right) = \mathbf{v}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{\mathbf{F}(t + \Delta t)}{m}\Delta t, \tag{62}$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición en el plano x-y. En las ecuaciones anteriores $\triangle t$ es un transcurso de tiempo suficientemente pequeño como para que la trayectoria obtenida numéricamente tenga un aspecto de curva continua a la hora de ser representada. Para esto basta con elegir a $\triangle t$ como una cantidad pequeña en relación a un tiempo característico en el sistema. Las Ecs. (61) y (62) permiten encontrar la posición y velocidad en un tiempo "futuro" dando estas propiedades en un tiempo "presente". Además el cálculo de la posición y la velocidad deben estar "defasados" en un tiempo $\triangle t/2$ para darle estabilidad numérica al método.

Para realizar una prueba del método numérico propuesto se va a calcular las trayectorias de las partículas para el caso de un condensador de placas plano paralelas y otro formado por una placa ondulada periódica y una placa plana. Considerando un campo eléctrico de magnitud E supuesto constante y dirigido en dirección vertical. Así,

la trayectoria de la partícula está dada en forma exacta para un condensador de placas paralelas por

$$(x(t), y(t)) = \left(x_0 + v_{0x}t, v_{0y}t - \frac{qE}{2m}t^2 \right). \tag{63}$$

Se lanzaron bajo 4 condiciones distintas una partícula dentro de un condensador, el primer caso es dentro de un condensador de placas planas y paralelas $A_1 = A_2 = 0$ con $v_x = 1{,}2$ y $v_y = 1{,}1$, que son las componentes de la velocidad en el eje x y y, respectivamente (Fig. 17 a)). Un segundo lanzamiento con placas onduladas $A_1 = A_2 = 0{,}2$, con $v_x = 0{,}4$ y $v_y = 0{,}8$ (Fig. 17 b)). En el tercer y cuarto lanzamiento la geometría y parámetros utilizados son similares al primer y segundo lanzamiento, respectivamente. Pero en estos casos la velocidad inicial en el eje y se consideró negativa (Figs. 17 c) y d)). En todos los casos los condensadores tenían un ancho $b = \pi$, y se lanzaron a una altura $y_0 = 0{,}5b$.

Es notorio que la trayectoria se sigue en forma parabólica sin importan si $v_y < 0$ o $v_y > 0$, y que solamente cambia un poco en las condiciones iniciales respecto a la velocidad en ambos ejes. Algo relevante es lo que ocurre con las trayectorias cuando se aproximan a la ondulación en las Figs. 17(a) y (b), se puede observar como se ve influenciada la trayectoria debido a la ondulación. Estos resultados indican que mientras más cerca esté la trayectoria a la placa, mayor será la influencia sobre ésta.

En el siguiente capítulo se darán los resultados obtenidos al observar el comportamiento de partículas dentro de un condensador ondulado y periódico. Además de los posibles casos de choques y la representación de su dinámica en un espacio fase.

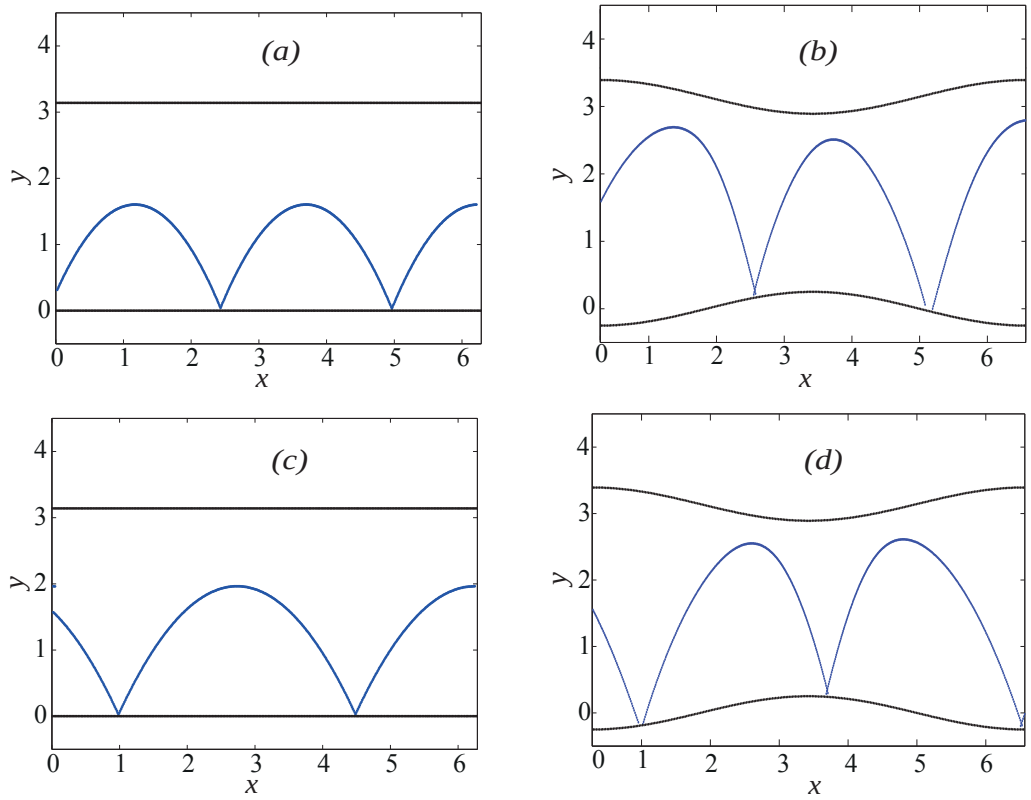


Figura 17. Trayectorias de partículas con $v_y > 0$ para (a) condensador plano $A_1 = A_2 = 0$, $v_x = 1{,}2$ y $v_y = 1{,}1$ y (b) condensador ondulado $A_1 = A_2 = 0{,}2$, $v_x = 0{,}4$ y $v_y = 0{,}8$. Trayectorias de partículas con $v_y < 0$ para (c) condensador plano $A_1 = A_2 = 0$, $v_x = 1{,}0$ y $v_y = -1{,}1$ y (d) condensador ondulado $A_1 = A_2 = 0{,}2$ con $v_x = 0{,}4$ y $v_y = -0{,}8$.

.

Capítulo IV

RESULTADOS

En este capítulo se mostrara el comportamiento de las trayectorias de partículas, dentro de un condensador formado por dos placas onduladas y periódicas que genera un campo eléctrico inhomogéneo. Se observará la influencia que ejerce el campo eléctrico en la dinámica de las trayectorias a través de mapas de Poincaré, donde existe un cambio notorio al comparar con el caso donde no se tiene presencia de campo eléctrico.

IV.1. Trayectorias de Partículas

En el capítulo III se mostró como se calcula el potencial eléctrico dentro de un condensador ondulado y periódico. Recordando que las placas del condensador están representadas por las Ecs.(31) y (32) para la placa superior e inferior, respectivamente. Esto fue básico para abordar el principal problema de esta tesis, el cual fue observar el comportamiento de las trayectorias de partículas dentro del condensador mencionado.

La representación del condensador y de la trayectoria se realizó con un conjunto de puntos finitos, donde la distancia entre ellos era infinitesimal. La separación entre los puntos que modelan los perfiles de las placas del condensador es $ds = 1/40$ y para los puntos de la trayectoria $dt = 1/45$. Debido a la presencia del campo eléctrico, es necesario tomar en cuenta cada punto que representa la trayectoria, ya que en cada uno

de ellos el campo E es distinto.

En el capítulo anterior se mostró que tanto para el campo como para la trayectoria fue necesario recurrir a métodos numéricos. Estos fueron implementados en algoritmos desarrollados en FORTRAN para calcular el potencial eléctrico y las posiciones de la partícula. Para disminuir el tiempo de cómputo se aprovechó la periodicidad del condensador, por lo que basta con tomar una celda unitaria de longitud $L = 2\pi$ y observar lo que ocurre en ella. La celda se tomó en una sección arbitraria del condensador. El algoritmo está diseñado para que una vez que la trayectoria llegue a un extremo de la celda, vuelva a entrar a la celda, ya sea al inicio si $v_x > 0$ o al final si $v_x < 0$. Así, conservan sus propiedades remarcando nuevamente que esto se puede hacer gracias a la periodicidad del sistema.

Para verificar que el algoritmo funcionará bien, se tomaron algunas precauciones. Primero se realizó una prueba para una partícula con condiciones de frontera $U\,|_{y_1(x)} = 0{,}5$ y $U\,|_{y_2(x)} = -0{,}5$. Se siguió la trayectoria durante un tiempo finito donde se presentaron varios choques. Para esto, se hicieron varios cambios en las condiciones iniciales del sistema al variar los parámetros del lanzamiento de la partícula y de la geometría considerada. En la Fig. 18 se muestran algunos lanzamientos de la partícula dentro de un condensador con placas conductoras separadas por $b = \pi$. En el resto del trabajo se usará este ancho y cuando se tome en cuenta otro será indicado. El primer condensador formado por placas plano paralelas, $A_1 = A_2 = 0$ está mostrado en la Fig. 18(a). Se utilizó el potencial eléctrico en la frontera $U_{y_1=b} = 0{,}5$ y $U_{y_2=0} = -0{,}5$, la partícula se lanzó con $v_{x0} = 1{,}2$ y $v_{y0} = 1{,}1$, que son las componentes de la velocidad de la partícula en el eje x y y, respectivamente. En la Fig. 18(b), se presenta un lanzamiento de la partícula dentro de un condensador con la misma geometría del primer caso, pero ahora la componente de la velocidad en el eje y es negativa, $v_{y0} = -1{,}1$ y

$v_{x0} = 1{,}5$. Los siguientes lanzamientos involucran ondulaciones donde el desfasamiento utilizado fue $r = \pi$. El tercer lanzamiento se realizó en un condensador con una placa ondulada con $A_1 = 0{,}2$ y otra plana con $A_2 = 0$ con $v_{x0} = 1{,}3$ y $v_{y0} = 1{,}0$ como se muestra en la Fig. 18(c). Finalmente el cuarto lanzamiento ilustrado en la Fig. 18(d) fue para un condensador formado por dos placas onduladas con amplitudes iguales, $A_1 = A_2 = 0{,}05$ y con velocidades $v_{x0} = 1{,}2$ y $v_{y0} = 1{,}1$. En las Figs. 18 (a)-(c) se utilizó una celda unitaria de longitud $L = 2\pi$ mientras que en la Fig. 18 d) $L = 6\pi$.

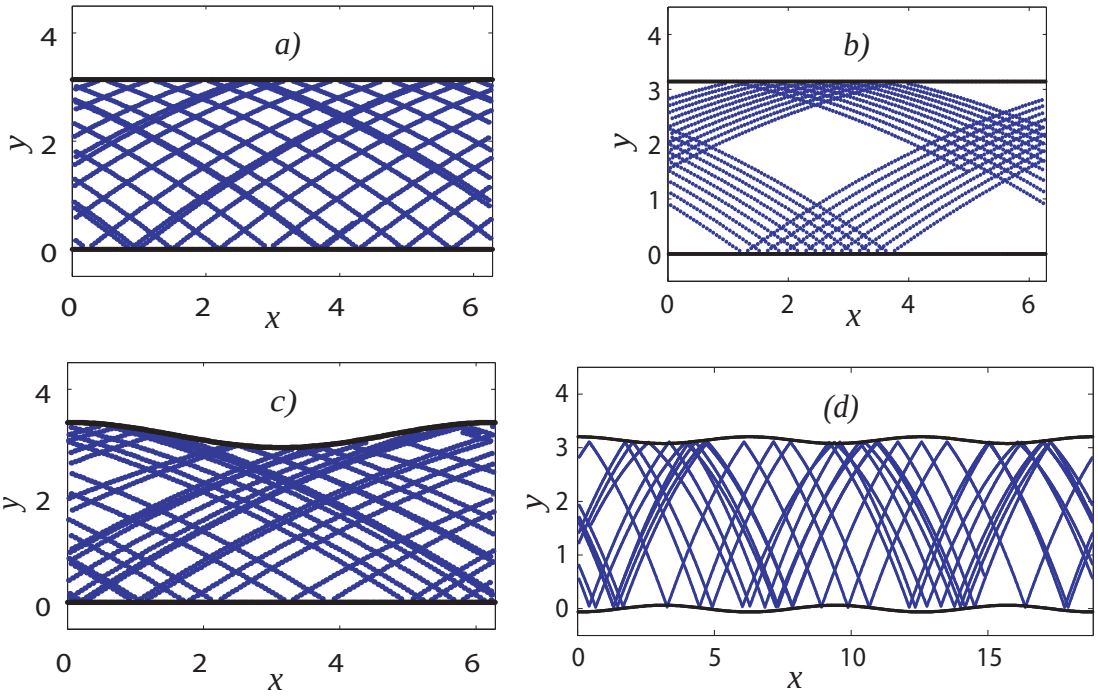


Figura 18. Trayectorias de una partícula en un condensador con amplitudes a) $A_1 = A_2 = 0{,}00$, b) $A_1 = A_2 = 0{,}00$, c) $A_1 = 0{,}2$ $A_2 = 0{,}00$ y d) $A_1 = A_2 = 0{,}05$.

En la Fig. 18 a) se muestra la evolución de una trayectoria en el tiempo y se observan 22 rebotes para los cuales se utilizaron 3000 puntos. La Fig. 18 b) tiene 16 rebotes con 2200 puntos. La Fig. 18 c) muestra 36 rebotes formados por 4000 puntos y en la Fig. 18 d) se puede observar que la trayectoria rebotó 60 veces con 10,000 puntos

requeridos. En todos los casos la trayectoria se comporta adecuadamente siguiendo patrones característicos.

Una vez que se analizó el caso de una partícula para varias condiciones iniciales, se procederá a considerar varias partículas simultáneamente dentro del condensador. Para esto es necesario hacer una distribución angular adecuada para que las partículas lanzadas se distribuyan en la mayor parte del interior del condensador. La distribución se hizo utilizando el primer y cuarto cuadrante del sistema de referencia que tiene como origen $(x_j, b/2)$, donde j es el número de fuentes en el condensador y x_j es la posición horizontal correspondiente a cada una de ellas. Por lo que la distribución está entre $270\,^\circ$ y $90\,^\circ$ grados como se ilustra en la Fig. 19, para un condensador que tiene una pequeña amplitud, $A_1 = A_2 = 0{,}01$, un ancho $b = \pi$ y una longitud $L = 4\pi$.

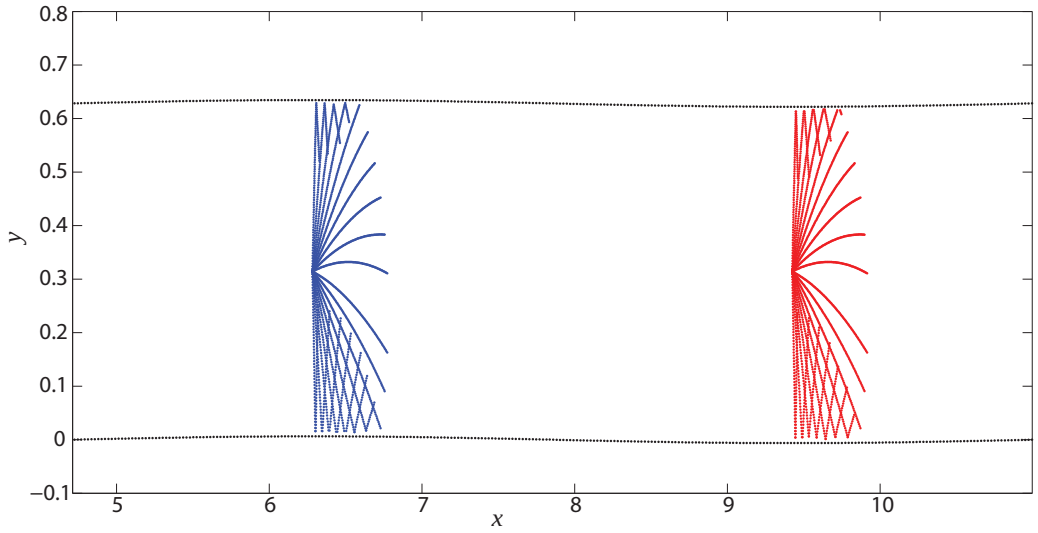


Figura 19. Distribución angular de dos fuentes con 20 partículas cada una en un condensador con $A_1 = A_2 = 0{,}01$, $b = \pi$ y $L = 4\pi$.

En la Fig. 19, se consideraron dos fuentes ($j = 2$) y cada una de ellas tiene 20 partículas, las cuales están distribuidas de forma uniforme sobre el eje y. Para el desarrollo del problema no se consideraron los casos donde se tenía incidencia normal de

la partícula con las placas del condensador, por lo que se deja un margen de 3° arriba y abajo, respectivamente. Así, para la distribución que se hace entre 90° y 270° se tendrá solamente 174°.

De las 20 partículas, 10 se lanzan de tal forma que su primer choque sea con la placa superior y las otras 10 sea con la placa inferior. Por lo tanto, el ángulo está dado por

$$\theta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right), \tag{64}$$

siendo v_x y v_y, las componentes de la velocidad sobre el eje x y y, respectivamente. Ahora, se sabe por geometría

$$\begin{aligned} v_x &= v\cos(\theta), \\ v_y &= v\sin(\theta). \end{aligned}$$

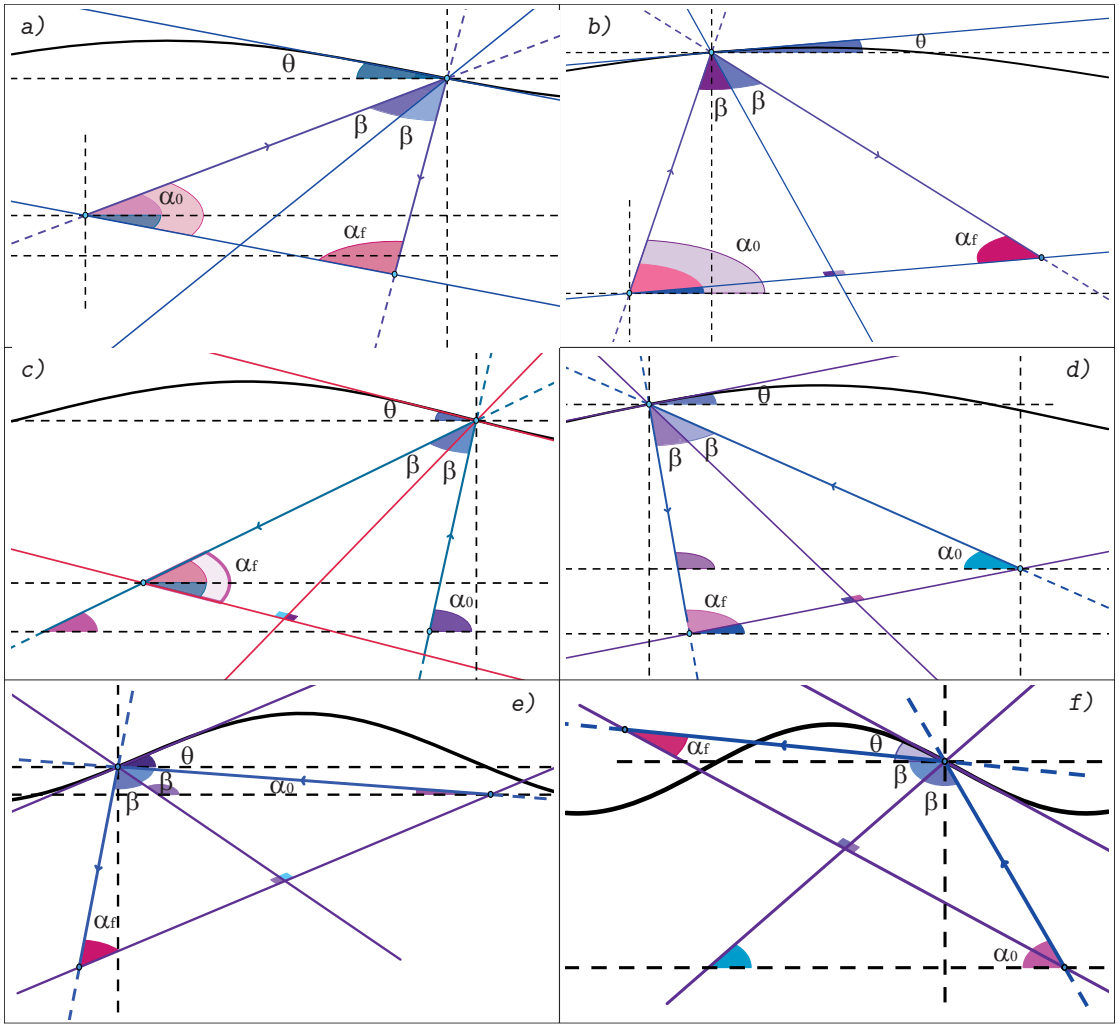
En la Fig. 19, se puede observar como se forma una especie de abanico y al dejar avanzar las partículas con el tiempo, se tendrán una gran cantidad de choques.

Debido a la distribución angular, las partículas chocarán en distintos puntos de las placas del condensador. En el caso de que las placas sean onduladas se debe tener cuidado con los distintos tipos de choque. Por esta razón, se hizo una clasificación de los distintos choques que se hacen presentes en el condensador. La primera clasificación se hizo en dos tipos, utilizando la dirección de la pendiente a partir de un punto central del condensador hacia el punto de choque con una de sus placas. Así, se tenían un caso con pendiente positiva y otro con pendiente negativa. Posteriormente, dentro de cada tipo se clasificaron a partir de la dirección de la velocidad en el eje de las x (v_x), por lo que se tienen dos subtipos uno con $v_x < 0$ y otro con $v_x > 0$. Finalmente dentro de los subtipos se volvió a clasificar pero esta vez con el ángulo (θ) formado por la pendiente en el punto de choque medido respecto al eje x y el ángulo con que llega la partícula al choque α_0. Por otro lado conociendo α_0 y θ se puede conocer el valor del ángulo de

reflexión β en términos de α_0 y θ, como a continuación se analizará.

Choques de la partícula con la placa superior

Primeramente se ilustraran los diferentes tipos de rebotes posibles con la placa superior, para los casos donde la pendiente es tanto positiva como negativa. Donde α_0 y α_f representa el ángulo inicial y final de la partícula, respectivamente. El parámetro β el ángulo de reflexión y θ el ángulo correspondiente a la pendiente.



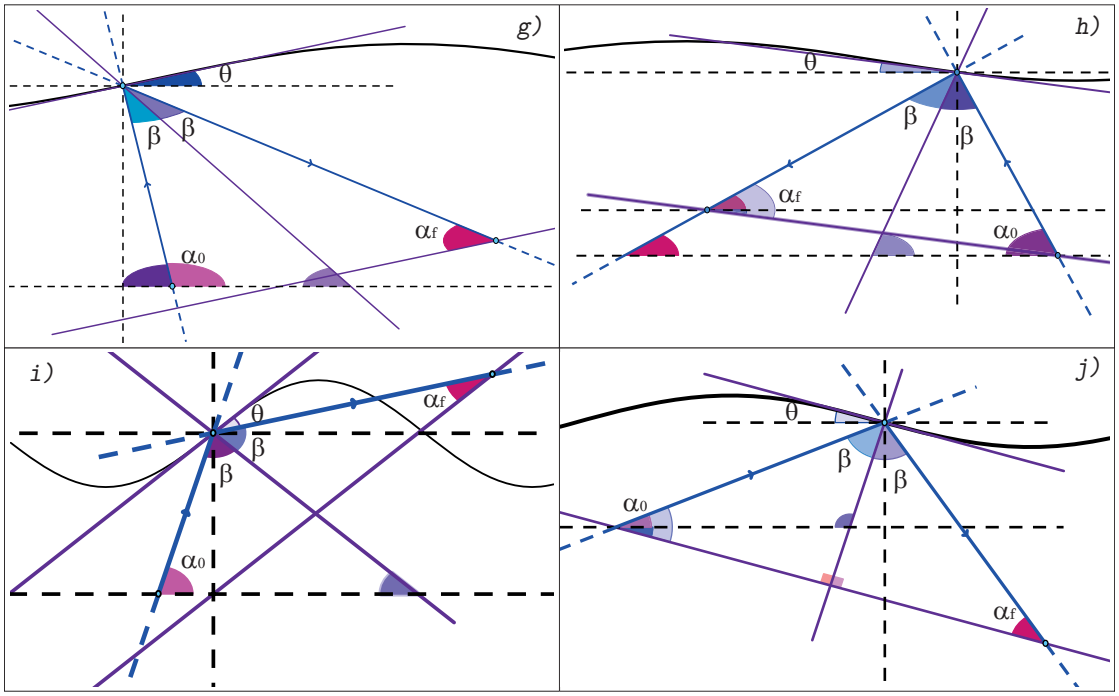


Figura 20. Rebotes posibles de una partícula con la placa superior con a), c), f), h) y j) pendiente negativa y b), d), e), g) y i) con pendiente positiva.

En la Fig. 20, se observa que existen 10 casos de choques posibles de las partículas con la placa superior. Las Figs. 20 b), d), e), g) y i) son casos de choques donde la pendiente es positiva. En las Figs. 20 b) y g), ambas con $v_x > 0$, presentan la diferencia cuando v_y cambia de dirección después del choque porque $\theta < \alpha$ y $\theta > \alpha$, respectivamente. Las Fig. 20 d), e) y i), son casos con $v_{x0} < 0$, las Figs. 20 d) y e) difieren en la dirección de v_y después del choque, esto se debe a que $\alpha_0 > ((\pi/2 - \theta)/2)$ para la Fig. 20 d) y $\alpha_0 < ((\pi/2 - \theta)/2)$ para la Fig. 20 e) .

Las Figs. 20 a), c), f), h) y j) corresponden a casos de choques donde la pendiente es negativa. Las Figs. 20 a), c) y h) tienen una velocidad $v_x > 0$, donde las Figs. 20 a) y h) sólo difieren en la dirección de v_x después del choque, lo anterior ocurre porque $\alpha_0 > ((\pi/2 - \theta)/2)$ y $\alpha_0 < ((\pi/2 - \theta)/2)$, respectivamente. Las Figs. 20 f) y j) tienen

una velocidad $v_x < 0$, aquí la diferencia se presenta en la dirección de la velocidad v_y después del choque. En este caso la dirección depende de la pendiente y los valores correspondientes a ella son: $\theta < \alpha_0/2$ y $\theta > \alpha_0/2$, respectivamente.

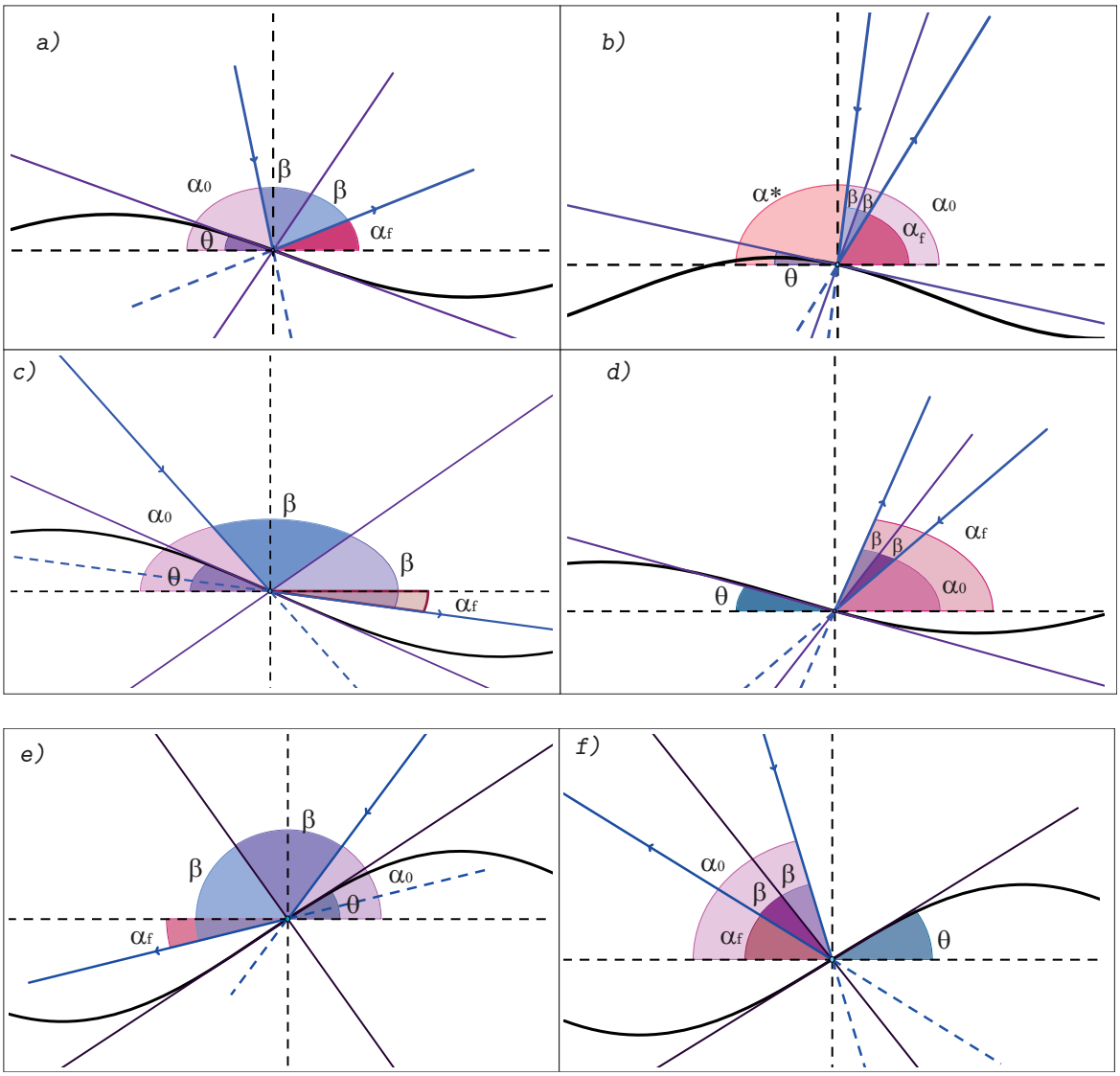
En la siguiente tabla se muestra un resumen de los diferentes tipos de rebotes previamente descritos y que se mostraron en la Fig. 20.

Cuadro I. Tabla de los diferentes tipos de choque de la partícula con la placa superior, v_{x0} y v_{y0} son las componentes de la velocidad de la partícula antes del choque, v_{xf} y v_{yf} son las componentes de la velocidad después del choque, θ es la pendiente, β el ángulo de reflexión, α_0 y α_f son el ángulo inicial y final de la partícula, respectivamente. Los subíndices denotan al eje que corresponden las componentes.

Figura	v_{x0}	v_{y0}	θ	Ángulo de reflexión	Ángulo final	v_{xf}	v_{yf}
Fig. 20 *a*)	+	+	−	$\beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha_0 + \theta)$	$\alpha_f = \alpha_0 + \theta$	−	−
Fig. 20 *b*)	+	+	+	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \theta$	$\alpha_f = \alpha_0 - \theta$	+	−
Fig. 20 *c*)	+	+	−	$\beta = \alpha_0 + \theta - \frac{\pi}{2}$	$\alpha_f = \pi - (\alpha_0 + \theta)$	−	−
Fig. 20 *d*)	−	+	+	$\beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha_0 + \theta)$	$\alpha_f = \alpha_0 + \theta$	+	−
Fig. 20 *e*)	−	+	+	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \theta$	$\alpha_f = \alpha_0 - \theta$	−	−
Fig. 20 *f*)	−	+	−	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \theta$	$\alpha_f = \alpha_0 - \theta$	+	−
Fig. 20 *g*)	−	+	+	$\beta = \alpha_0 + \theta - \frac{\pi}{2}$	$\alpha_f = \pi - (\alpha_0 + \theta)$	+	−
Fig. 20 *h*)	−	+	−	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \theta$	$\alpha_f = \alpha_0 - \theta$	−	−
Fig. 20 *i*)	+	+	+	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \theta$	$\alpha_f = \alpha_0 + \theta$	+	+
Fig. 20 *j*)	+	+	−	$\beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha_0 + \theta)$	$\alpha_f = \alpha_0 + \theta$	+	−

Choques de la partícula con la placa inferior

Ahora se tomarán en cuenta los casos de choques con la placa inferior como se ilustran en la Fig. 21, se consideran los casos donde la pendiente es tanto positiva como negativa. Los parámetros α_0, α_f, v_{x0}, v_{y0}, v_{xf}, v_{yf}, β, y θ, son los mismos que se mencionaron para los choques con la placa superior.



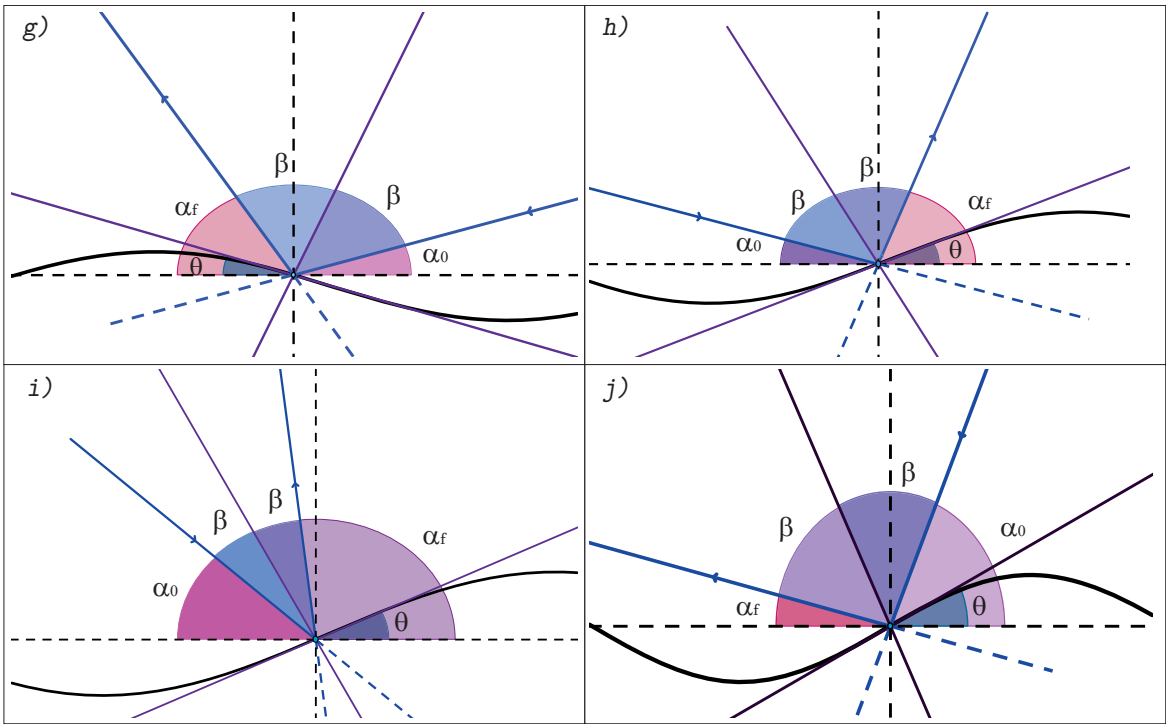


Figura 21. Rebotes posibles de una partícula con la placa inferior con *a*), *b*), *c*) *d*) y *g*) pendiente negativa y *e*), *f*), *h*) *i*) y *j*) choques donde la pendiente es positiva.

Las Figs. 21 *a*), *b*), *c*), *d*) y *g*) corresponden a choques donde la pendiente es negativa. Las Figs. 21 *a*) y *c*) tienen una velocidad $v_x > 0$, presentan una diferencia en v_x después del choque, esto se debe al valor de la pendiente el cual es $\theta < \alpha_0/2$ y $\theta > \alpha_0/2$, respectivamente. Las Figs. 21 *b*), *d*) y *g*) tienen una velocidad $v_x < 0$. Las Figs. 21 *b*) y *d*) son dos casos similares la diferencia radica en la dirección de la velocidad v_x después del choque, en estos casos el valor del ángulo inicial es $\alpha_0 > \pi/2 - \theta$ y $\alpha_0 < \pi/2 - \theta$, respectivamente.

Las Figs. 21 *e*), *f*), *h*), *i*) y *j*) son casos de choques con pendiente positiva. Las Figs. *f*), *h* y *i*) son casos donde $v_x > 0$. Las Figs. 21 *f*) y *h*) difieren en la dirección de v_x después del choque, esto es por que $\alpha_0 > \theta$ para 21 *f*), mientras que $\alpha_0 > \theta$ para 21 *h*).

Las Figs. e) y j) que tienen una velocidad $v_x < 0$, la 21 e) conserva la de dirección la velocidad v_y y en el caso de la 21 j) cambia, esto es por la dependencia que tienen del valor de la pendiente el cual es $\theta < \alpha_0/2$ y $\theta < \alpha_0/2$, respectivamente.

A continuación se muestra una tabla donde se presenta en forma resumida los diferentes tipos de rebotes mostraron en la Fig. 21 y previamente descritos.

Cuadro II. Tabla de los diferentes tipos de choque de la partícula con la placa inferior, v_{x0} y v_{y0} son las componentes de la velocidad antes del choque, θ es la pendiente, β el ángulo de reflexión, α_0 y α_f son el ángulo inicial y final de la partícula, respectivamente, v_{xf} y v_{xf} son las componente de la velocidad después del choque.

Figura	v_{x0}	v_{y0}	P	Ángulo de reflexión	Ángulo final	v_{xf}	v_{yf}
Figura i)	$+$	$-$	$-$	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \theta$	$\alpha_f = \alpha_0 - 2\theta$	$+$	$+$
Figura ii)	$-$	$-$	$-$	$\beta = \alpha_0 + \theta - \frac{\pi}{2}$	$\alpha_f = \pi - \alpha_0 - 2\theta$	$+$	$+$
Figura iii)	$+$	$-$	$-$	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \theta$	$\alpha_f = 2\theta - \alpha$	$+$	$-$
Figura iv)	$-$	$-$	$-$	$\beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha_0 + \theta)$	$\alpha_f = pi - \alpha_0 - 2\theta$	$+$	$+$
Figura v)	$-$	$-$	$+$	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \theta$	$\alpha_f = 2\theta - \alpha_0$	$-$	$-$
Figura vi)	$+$	$-$	$+$	$\beta = \alpha_0 + \theta - \frac{\pi}{2}$	$\alpha_f = \pi - \alpha_0 - 2\theta$	$-$	$+$
Figura vii)	$-$	$-$	$-$	$\beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha_0 + \theta)$	$\alpha_f = \alpha_0 + 2\theta$	$-$	$+$
Figura viii)	$+$	$-$	$+$	$\beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha_0 + \theta)$	$\alpha_f = \alpha_0 + 2\theta$	$+$	$+$
Figura ix)	$+$	$-$	$+$	$\beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha_0 + \theta)$	$\alpha_f = \alpha_0 + 2\theta$	$-$	$+$
Figura x)	$-$	$-$	$+$	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha_0 + \theta$	$\alpha_f = \alpha_0 - 2\theta$	$-$	$+$

IV.2. Mapas de Poincaré

En esta sección se representará la dinámica de partículas cargadas en un condensador por medio de los mapas de Poincaré. Para esto se utilizará un subespacio del espacio fase. Este subespacio estará descrito con las coordenadas $(x, p_y = v\cos(\epsilon))$, donde x es la posición de la partícula en el eje x y $v\cos(\epsilon)$ es la componente del momento en el eje y, v es la magnitud de la velocidad. El parámetro ϵ es el ángulo con el que avanza la partícula conforme transcurre tiempo, dado por la Ec. (64). En los puntos de choque $\epsilon = \beta$, que es el ángulo de reflexión local. A continuación se mostrarán algunos resultados de las trayectorias de partículas cargadas dentro un condensador bajo ciertas condiciones. En general se va a considerar que el condensador tiene un ancho $b = 0{,}2\pi$ y una longitud $L = 6\pi$. Para representar las gráficas de Poincaré se eligió el intervalo sobre el eje x de $[\pi, 10\pi]$. Además, para resolver la Ec. (30), se utilizó el método de bisección aplicado a 10^x intervalos pequeños a lo largo del condensador.

Condensador plano paralelo

Retomando que el condensador con placas planas es la base, se realizó primero el caso cuando el potencial electrostático $U = 0$ como se muestra en la Fig. 22 *a*). Bajo las mismas condiciones del caso anterior, se muestran tres variaciones del potencial en la Fig. 22 *b*)) para $U =\mid 0{,}1 \mid$, en la Fig. 22 *c*) para $U =\mid 0{,}3 \mid$ y en la Fig. 22 *d*) para $\mid U = 5 \mid$. Para estos casos se utilizaron 18 partículas lanzadas en las posiciones $y = 0{,}5b$ durante un tiempo de cómputo de 60 min.

Para el caso de un potencial eléctrico nulo, se ve en la Fig. 22 *a*) una dinámica suave con las líneas rectas que representan la trayectoria de las partículas sin retorno. Sin embargo, en las Figs. 22 *b*), *c*) y *d*) se puede observar que la presencia del campo

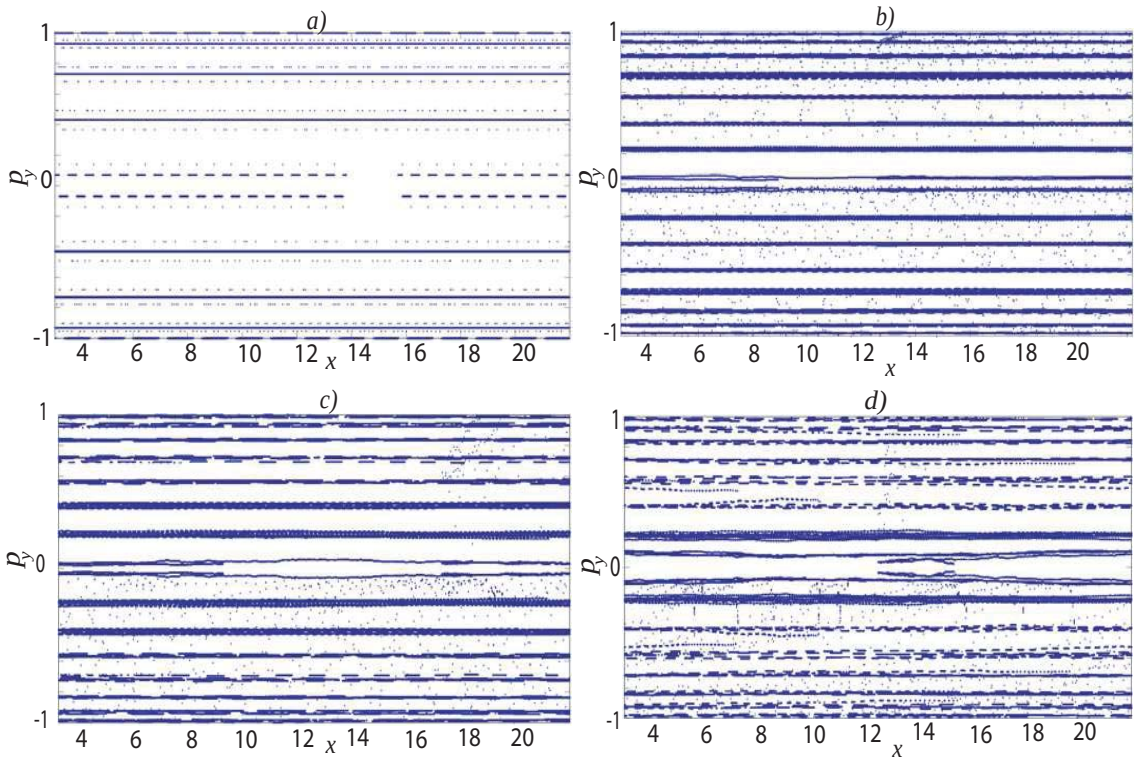


Figura 22. Mapas de Poincaré para un condensador plano con potencial eléctrico *a*) $U = 0$, *b*) $U =\mid 0{,}1 \mid$, *c*) $U =\mid 0{,}3 \mid$ y *d*) $U =\mid 0{,}5 \mid$.

eléctrico modifica la dinámica de las partículas a diferencia del caso clásico (Fig. 22 *a*)). El subespacio fase han sido modificado por pequeñas perturbaciones a medida que el potencial electrostático ha sido incrementado.

Condensador con placas onduladas ($A = 0{,}0002\pi$)

Ahora se considera el caso de una pequeña ondulación en las placas del condensador variando el potencial eléctrico. Los valores utilizados para el potencial fueron: $U = 0$ (Fig. 23 *a*)), $U =\mid 0{,}1 \mid$ (Fig. 23 *b*)), $U =\mid 0{,}3 \mid$ (Fig. 23 *c*)) y $U =\mid 0{,}5 \mid$ (Fig. 23 *d*)).

Para el caso de un potencial eléctrico nulo, se observa en la Fig. 23 *a*) una dinámica similar como en el caso de un condensador con placas plano paralelas. Sin embargo, en

las Figs. 23 *b*), *c*) y *d*) se puede observar que la presencia del campo eléctrico modifica la dinámica de las partículas a diferencia del caso sin ondulación en las placas del condensador. Ahora, en el subespacio fase aparecieron ciclos límite a medida que el potencial electrostático ha sido incrementado. Los ciclos límite indican que en su momento van a formar órbitas elípticas, lo cual va significar que habrá partículas atrapadas en el condensador, moviéndose de un lado a otro alrededor de un punto fijo estable.

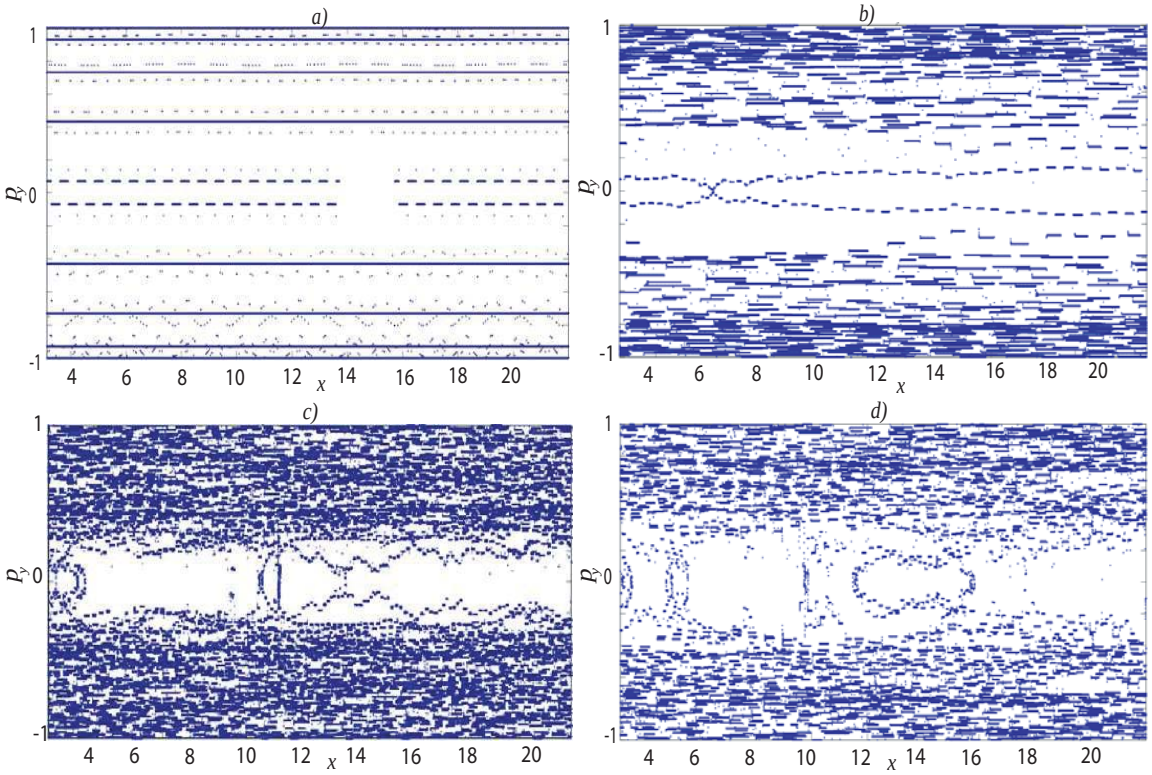


Figura 23. Mapas de Poincaré para un condensador con placas onduladas de amplitud $A = 0{,}002\pi$, con potencial eléctrico *a*) $U = 0$, *b*) $U =\mid 0{,}1 \mid$, *c*) $U =\mid 0{,}3 \mid$ y *d*) $U =\mid 0{,}5 \mid$.

Condensador con placas onduladas $(A = 0{,}01\pi)$

Ahora se presentará la dinámica de las partículas dentro de un condensador con una amplitud de la ondulación de las placas más grande. En la Fig. 24 se se muestran los

resultados obtenidos al variar el campo eléctrico en el condensador con los valores del potencial eléctrico $U =\mid 0{,}1 \mid$ (Fig. 24 *a*)), $U =\mid 0{,}2 \mid$ (Fig. 24 *b*)), $U =\mid 0{,}5 \mid$ (Fig. 24 *c*)) y $U =\mid 0{,}75 \mid$ (Fig. 24 *d*)). Para este caso se consideró un condensador con placas onduladas de amplitud $A = 0{,}01\pi$ y desfasamiento entre ellas de $r = \pi$.

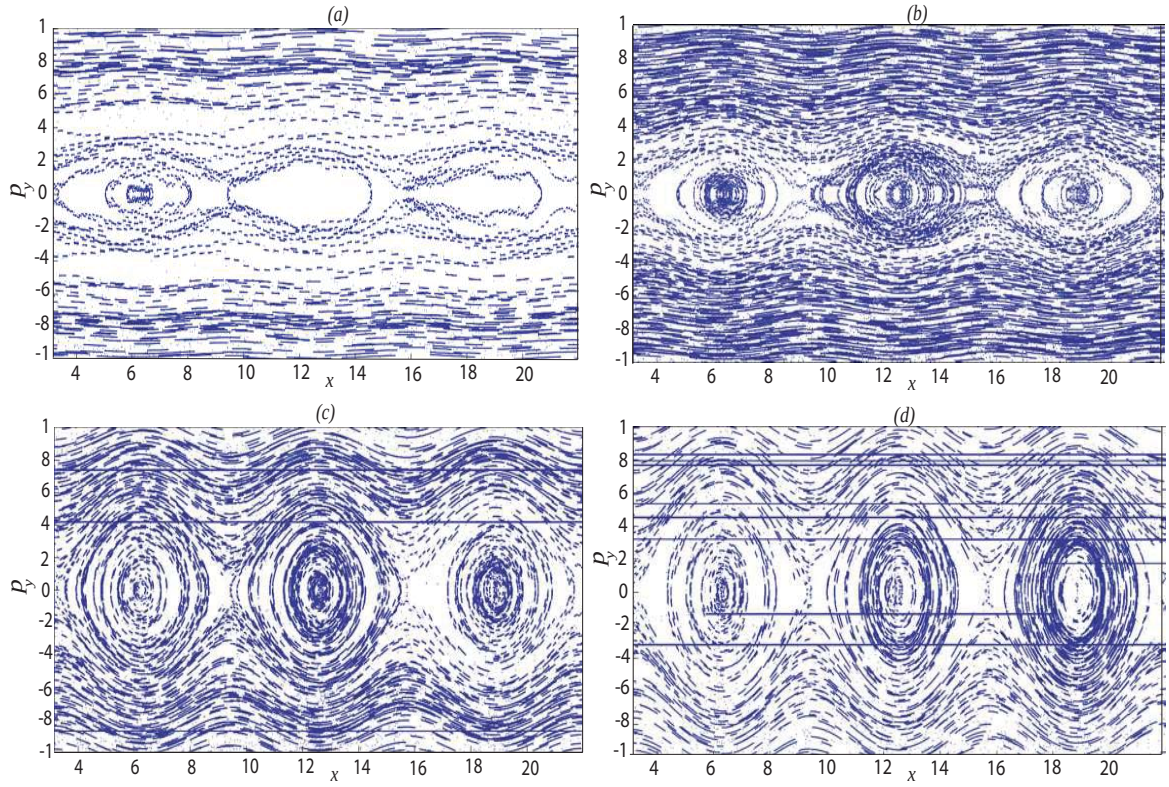


Figura 24. Mapas de Poincaré de las trayectorias de partículas en un condensador con placas onduladas de amplitud $A = 0{,}01\pi$ y desfasamiento entre ellas de $r = \pi$ para los potenciales eléctricos de *a*) $U =\mid 0{,}1 \mid$, *b*) $U =\mid 0{,}2 \mid$, *c*) $U =\mid 0{,}5 \mid$ y *d*) $U =\mid 0{,}75 \mid$.

En la Fig. 24 se puede observar que la presencia del campo eléctrico modifica aún más la dinámica de las partículas a diferencia del caso de una ondulación de las placas más pequeña. Ahora, en el subespacio fase aparecieron ciclos límite que a medida que el potencial electrostático va incrementándose llega a formarse órbitas elípticas como se

muestran en las Figs. 24 *c*) y *d*). Estas órbitas elípticas significan que habrá partículas atrapadas en el condensador, moviéndose de un lado a otro alrededor de un punto fijo estable.

Condensador con placas onduladas ($A = 0{,}04\pi$)

En la Fig. 25 se muestran los resultados obtenidos al variar el campo eléctrico en el condensador con los valores del potencial eléctrico $U =\mid 0{,}1 \mid$ (Fig. 25 *a*)), $U =\mid 0{,}2 \mid$ (Fig. 25 *b*)), $U =\mid 0{,}5 \mid$ (Fig. 25 *c*)) y $U =\mid 0{,}75 \mid$ (Fig. 25 *d*)). Condensador con placas onduladas de amplitud $A = 0{,}04\pi$ y desfasamiento entre ellas de $r = \pi$.

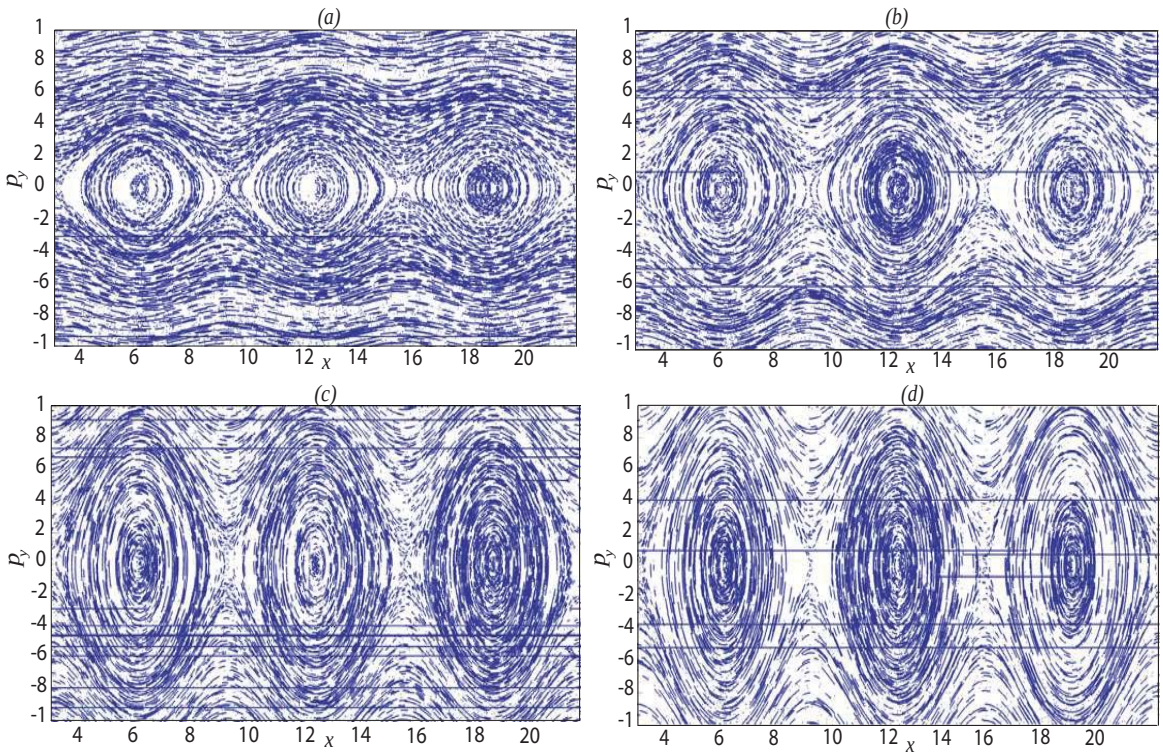


Figura 25. Mapas de Poincaré de las trayectorias de partículas en un condensador con placas onduladas de amplitud $A = 0{,}01\pi$ y desfasamiento entre ellas de $r = \pi$ para los potenciales eléctricos de *a*) $U =\mid 0{,}1 \mid$, *b*) $U =\mid 0{,}2 \mid$, *c*) $U =\mid 0{,}5 \mid$ y *d*) $U =\mid 0{,}75 \mid$.

Condensador con placas onduladas $(A = 0{,}08\pi)$

En la Fig. 26 se muestran los resultados obtenidos al variar el campo eléctrico en el condensador con los valores del potencial eléctrico $U =\mid 0{,}1 \mid$ (Fig. 26 a)), $U =\mid 0{,}2 \mid$ (Fig. 26 b)), $U =\mid 0{,}5 \mid$ (Fig. 26 c)) y $U =\mid 0{,}75 \mid$ (Fig. 26 d)). Condensador con placas onduladas de amplitud $A = 0{,}04\pi$ y desfasamiento entre ellas de $r = \pi$.

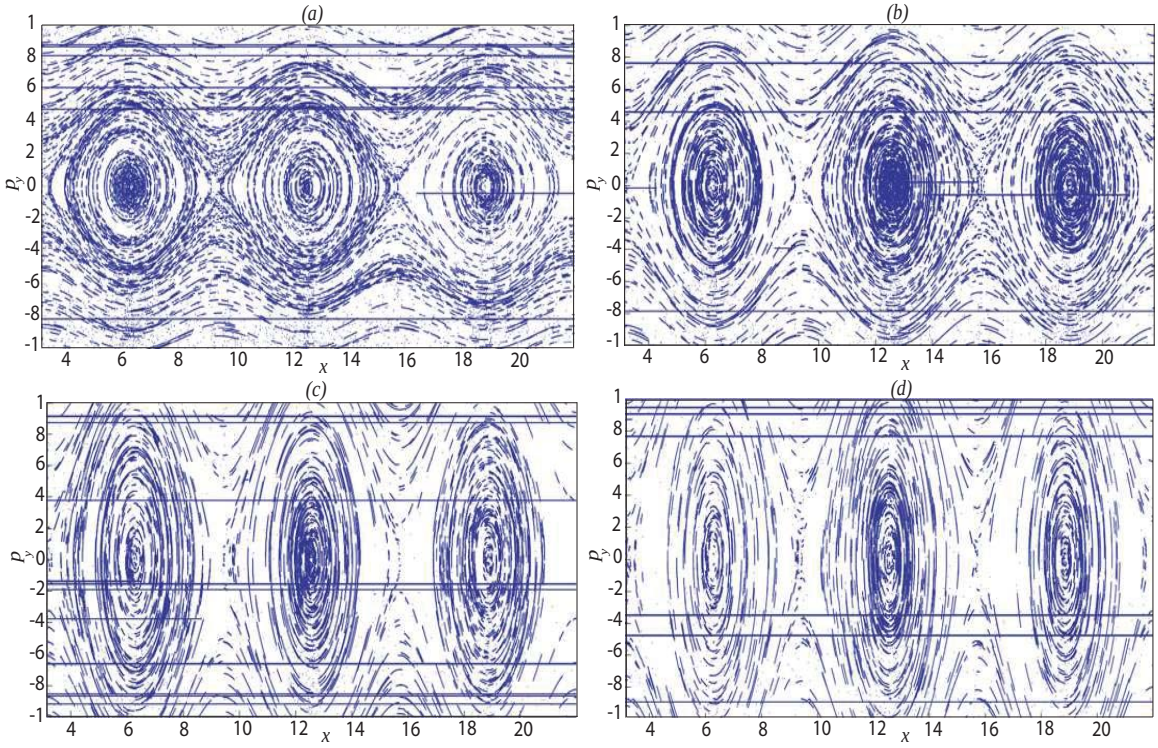


Figura 26. Mapas de Poincaré de las trayectorias de partículas en un condensador con placas onduladas de amplitud $A = 0{,}01\pi$ y desfasamiento entre ellas de $r = \pi$ para los potenciales eléctricos de a) $U =\mid 0{,}1 \mid$, b) $U =\mid 0{,}2 \mid$, c) $U =\mid 0{,}5 \mid$ y d) $U =\mid 0{,}75 \mid$.

En las Figs. 25 y 26 se puede observar que la amplitud juega un papel importante en la dinámica de las partículas, en ambos casos las amplitudes son grandes en base al sistema que se está utilizando. Es notorio como en estos casos las trayectorias caen a ciclos límite rápidamente, aun con campos eléctricos muy pequeños (Figs. 25 (c) y (d)

y Figs. 26 (c) y (d)) y en caso que el campo eléctrico es grande (Figs. 26 (c) y (d) y Figs. 26 (c) y (d)) los ciclos límite no se pierden solamente se hacen más "grandes".

En la Fig. 26 se observa como para una amplitud $A = 0{,}08\pi$ se forman ciclos límite contrario a lo que ocurre para una amplitud igual en un sistema similar que no tiene influencia de campo eléctrico donde se tiene caos total.

En el caso anterior se ha considerado la diferencia de fase entre ambas placas onduladas fija. Por lo que ahora, variando la diferencia de fase r entre las placas onduladas de amplitud $A = 0{,}01\pi$. En la Fig. 27 se presenta la dinámica de las partículas para $U =\mid 0{,}2 \mid$ con $r = 0{,}1$ (Fig. 27 a)) y $U = 0{,}5$ con $r = 0{,}2$ (Fig. 27 b)).

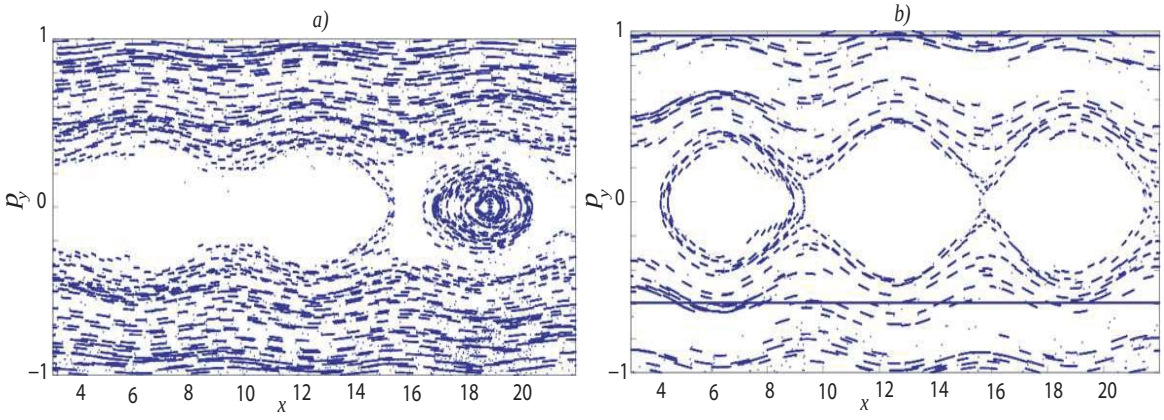


Figura 27. Mapas de Poincaré de trayectorias de las partículas en un condensador con placas onduladas de amplitud $A = 0{,}01\pi$ para a) $U =\mid 0{,}2 \mid$ con $r = 0{,}1\pi$ y b) $U = 0{,}5$ con $r = 0{,}2\pi$.

En la Fig. 27, se puede observar que al hacer un mínimo desfasamiento entre las placas onduladas, los ciclos límite cambian formando órbitas elípticas más definidas. Por consiguiente, la variación de las diferencias de fase favorece la formación de las órbitas haciendo que se logre una mayor estabilidad en el sistema.

De acuerdo a los resultados presentados, se puede ver que la formación de ciclos

límite u órbitas elípticas dependen de varios factores como son: la presencia del campo eléctrico, la amplitud de la ondulación de las placas del condensador y el desfasamiento que existe entre las placas.

Capítulo V

Conclusiones

En el presente trabajo se ha mostrado un estudio numérico sobre la dinámica de las trayectorias de las partículas en un condensador ondulado y periódico bajo la influencia de un campo de potencial inhomogéneo.

En este capítulo se enunciaran las conclusiones obtenidas de este trabajo, pero primeramente se mencionara un breve resumen con las ideas centrales de esta tesis.

Se desarrollaron e implementaron dos técnicas numéricas para estudiar la trayectoria de las partículas cargadas en un condensador ondulado y periódico. La primera se conoce como el "método de la ecuación integral" y la segunda como el "método de diferencias finitas".

El método de la ecuación integral se utilizó para calcular el potencial eléctrico dentro del condensador. Este método parte del segundo teorema integral de Green permitiendo obtener un par de ecuaciones integrales acopladas que involucran, como incógnitas el modo del campo y su derivada normal evaluados en las fronteras o superficies involucradas. La discretización del sistema resulta en una ecuación matricial homogénea cuya solución determina las funciones fuente, con las que se puede calcular el potencial eléctrico en interior del condensador.

Por otra parte, el método de diferencias finitas se utilizo para calcular la trayectoria de la partícula influenciada por el campo eléctrico en cada punto. Este método se basa

en hacer una aproximación a la solución de las ecuaciones diferenciales por medio de ecuaciones parciales definidas en un conjunto finito de puntos. Por lo tanto, una vez conocido el campo eléctrico y partiendo de la segunda ley de newton se puede conocer la trayectoria de la partícula. De esta manera, para representar la dinámica de las partículas dentro del condensador se utilizaron mapas de Poincaré en un espacio fase que forman las trayectorias de las partículas.

A continuación se enunciarán las conclusiones más importantes de los resultados preliminares que se obtuvieron en este trabajo.

- La presencia del potencial eléctrico afecta significativamente la trayectoria de las partículas. Esto es aún más evidente en el caso de un condensador ondulado debido a la inhomogeniedad del campo eléctrico.

- El uso de estos métodos numéricos son bastante útiles, ya que la aproximación a la solución de problemas bastante complicados, como los que fueron tratados este trabajo, resulta ser muy buena.

- Debido a la presencia del campo de potencial electrostático inhomogéneo, para hacer la representación de los mapas de Poincaré se deben tomar todos los momentos y posiciones de la partícula. Esto difiere del caso donde no se tiene presencia de campo eléctrico, en ese caso basta con analizar el momento de la partícula en el punto de lanzamiento inicial y los momentos en los puntos de choque ya que no existen fuerzas externas que afecten a la partícula. Así, las condiciones de la partícula al momento de ser lanzada serán las mismas justo antes del choque.

- La formación de ciclos límite y de órbitas elípticas depende en gran parte de la presencia del campo eléctrico, la amplitud de las placas onduladas del condensador

y el desfasamiento que existe entre ellas.

- Comparando los mapas de Poincaré para el caso de trayectorias de partículas donde no se tiene influencia de fuerzas externas sobre ellas (salvo las instantáneas debido a los choques en las placas) con el caso de partículas cargadas en un campo de potencial inhomogéneo, se puede observar que para el primer caso se hace presente el fenómeno del caos. Este fenómeno depende de la amplitud del canal considerado para que pueda presentar el caos total. Mientras que para el segundo caso las trayectorias tienden más a ciclos límite u órbitas elípticas (islas), gracias a la presencia del campo eléctrico.

A pesar de que los resultados son preliminares, se ha mostrado que la inhomogeneidad del campo eléctrico altera de forma interesante las propiedades caóticas en un condensador eléctrico con placas onduladas.

Bibliografía

Alonzo, R. M. (2005). La evolución biológica como sistema autorganizado, dinámicas no lineales y sistemas biológicos. *Ciencias.*, **079**: 26–34.

Barrera Herrera, J. (2008). El caos y las redes neuronales en la economía y finanzas interpretando el desorden perfecto: Modelado y predicción. *Pensamiento Crítico*, **8**: 131–142.

Herrera-González, I. F., Arroyo-Correa, G., Mendoza-Suarez, A., y Tututi, E. S. (2011). Study of the resistivity in a channel with dephased ripples. *International Journal of Modern Physics B*, **25**(05): 683–698.

Hilborn, R. C. (2004). *Chaos and Nonlinear Dynamics an Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press,, USA. Segunda edición,.

Hincapie-Palacio, D. y Ospina-Giraldo, J. F. (2013). Disease transmission dynamics according to complexity theory. *Revista de Salud Pública.*, **15**(5): 655–665.

Jackson, J. D. (1999). *Classical Electrodynamics*. John Wiley and Sons, USA. Tercera edición.

Mendoza-Suárez, A., Pérez-Aguilar, H., y Villa-Villa, F. (2011). Optical response of a perfect conductor waveguide that behaves as a photonic crystal. *Progress In Electromagnetics Research*, **121**: 433–452.

Molina Fernández, R. A. (2004). *Caos cuántico en sistemas hamiltonianos de muchos cuerpos.*. Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España. Tesis Doctorado.

Núñez, R. (2006). Comunicador experimental privado basado en encriptamiento caótico. *Revista mexicana de física,*, **52**(3): 285–294.

Núñez-Yépez, H. N. y Salas-Brito, A. L. (2013). Poincaré, la mecánica clásica y el teorema de la recurrencia. *Revista Mexicana de Física*, **59**: 91–100.

Pérez-Aguilar, H., Mendoza-Suárez, A., Tututi, E. S., y Herrera-González, I. F. (2013). Chaotic behavior of a quantum waveguide. Physica B. *Condensed Matter*, **411**: 93–98.

Ralph, A. y Yoshisuke, U. (2000). *Classical Electrodynamics*. World Scientific publishing, USA.

Rivera, J. H., Duque, E., y Avendaño, L. E. (2004). Síntesis de redes no lineales: el oscilador de chua. *Scientia et Technica*, **1**(24): 103–106.

Sprott, J. C. (2004). Dynamical models of love. *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences.*, **8**(3): 303–314.

Strogatz, S. H. (1994). *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering.*. Perseus books, Massachusetts, USA.

Apéndice A

Elementos de Matriz

En este apéndice se calcularán los elementos de matriz utilizados en el desarrollo del método de la ecuación integral, iniciando con las siguientes consideraciones preliminares.

Consideraciones preliminares

Parametrización de curvas en el plano

Primero se considera la longitud de la secante entre dos puntos P y Q, la cual se puede calcular utilizando el teorema de Pitágoras como se ilustra en la Fig. 28.

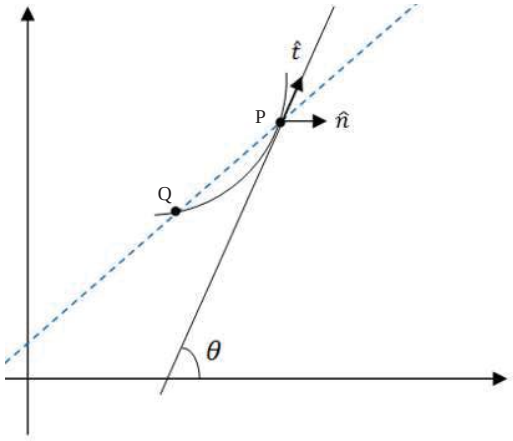


Figura 28. Representación de los vectores normal y tangente a la curva en el punto P.

La expresión correspondiente a la longitud de la secante está representada por

$$(\triangle s)^2 = (\triangle x)^2 + (\triangle y)^2. \tag{65}$$

En el límite cuando $\triangle x \longrightarrow \infty$ se obtiene el diferencial de longitud de arco

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \qquad \Rightarrow \qquad ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}. \tag{66}$$

Asumiendo que $y(x)$ es una función continua a trozos y derivable en un intervalo $[a, b]$, se tiene que

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{67}$$

e integrando en el intervalo $[a, b]$, se obtiene

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx. \tag{68}$$

Esta integral define la longitud de arco de una curva en $x \,\epsilon\, [a, b]]$.

Vectores tangente y normal a la curva en un punto

En la Fig. 28 se puede observar los vectores tangente y normal a la secante en un punto P. Para calcular estos vectores en términos del diferencial de arco, se comienza escribiendo dicho diferencial en términos de sus componentes

$$\triangle \mathbf{s} = \triangle x \widehat{i} + \triangle y \widehat{j}. \tag{69}$$

Sea el vector unitario $\widehat{t} = \frac{\triangle \mathbf{s}}{\triangle s}$. Entonces

$$\widehat{t} = \frac{\triangle x}{\triangle s}\widehat{i} + \frac{\triangle y}{\triangle s}\widehat{j}, \tag{70}$$

así que aplicando el límite, se tiene el vector tangente en el punto,

$$\lim_{\triangle s \to 0} \widehat{t} = \frac{dx}{ds}\widehat{i} + \frac{dy}{ds}\widehat{j}. \tag{71}$$

Por otro lado, se tiene que $\frac{dy}{dx} = \tan\theta$. Además,

$$t_x = \widehat{t} \cdot \widehat{i} = \frac{dx}{ds} = \cos\theta, \tag{72}$$

$$t_y = \widehat{t} \cdot \widehat{j} = \frac{dy}{ds} = \sin\theta. \tag{73}$$

Ahora reescribiendo $\widehat{t}$ en términos de sus componentes,

$$\widehat{t} = t_x\widehat{i} + t_y\widehat{j} = \cos\theta\widehat{i} + \sin\theta\widehat{j}, \tag{74}$$

y haciendo el cociente entre sus componente, se obtiene

$$\frac{t_y}{t_x} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = \frac{dy}{dx} = \tan\theta. \tag{75}$$

Para el vector tangente se hacen los siguientes cálculos:

$$\widehat{n}\cdot\widehat{t} = 0 \Longrightarrow (n_x, n_y)\cdot(t_x, t_y) = 0 \tag{76}$$

$$n_x t_x + n_y t_y = 0 \Longrightarrow n_x t_x = -n_y t_y \tag{77}$$

$$\frac{t_y}{t_x} = -\frac{n_x}{n_y} \Longrightarrow \tan\theta = -\frac{n_x}{n_y}. \tag{78}$$

Por otro lado, $\widehat{\mathbf{n}}$ es unitario

$$n_x^2 + n_y^2 = 1 \Longrightarrow n_y^2 = 1 - n_x^2, \tag{79}$$

relacionando las ecuaciones anteriores se llega a

$$n_x^2 = n_y^2\tan^2\theta = (1 - n_x^2)\tan^2\theta, \tag{80}$$

$$n_x^2 + n_x^2\tan^2\theta = \tan^2\theta, \tag{81}$$

$$n_x^2(1 + \tan^2\theta) = \tan^2\theta, \tag{82}$$

$$n_x^2 = \frac{\tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = \frac{\frac{sen^2\theta}{cos^2\theta}}{\frac{1}{cos^2\theta}} = \sin^2\theta. \tag{83}$$

Por lo tanto,

$$n_x = \pm\sin\theta \tag{84}$$

y sustituyendo en la Ec. (78)

$$-n_y\tan\theta = \pm\sin\theta \Longrightarrow \tan\theta = -\frac{\pm\sin\theta}{n_y}. \tag{85}$$

Despejando ny de la Ec. (85), se tiene

$$n_y = -\frac{\pm \sin\theta}{\tan\theta} = -\frac{\frac{\pm \sin\theta}{1}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \mp \cos\theta \tag{86}$$

Por lo tanto

$$n_y = \mp \cos\theta. \tag{87}$$

Ahora, reescribiendo $\widehat{\mathbf{n}}$

$$\widehat{n} = n_x\widehat{i} + n_y\widehat{j} = \pm \sin\theta\widehat{i} + \mp \cos\theta\widehat{j} \tag{88}$$

o bien,

$$\widehat{n} = \pm t_y\theta\widehat{i} + \mp t_x\theta\widehat{j} \Longrightarrow \widehat{n} = \pm\frac{dy}{ds}\widehat{i} \mp \frac{dx}{ds}\widehat{j}. \tag{89}$$

A.1. Cálculo de los elementos de matriz

En esta sección se realizará el cálculo de las integrales que permiten encontrar las funciones fuente estas son U y $\partial U/\partial n$.

A.1.1. Cálculo de los elementos de matriz L_{ij}

Se inicia recordando la Ec. (49)

$$L_{ij} = \int_{s_j-\triangle S/2}^{s_j+\triangle S/2} G(X_i + \varepsilon\eta_{x_i} - X, Y_i + \varepsilon\eta_{y_i} - Y)ds.$$

Utilizando el valor de G mostrado en la Ec. (43) y aplicando el límite cuando $\epsilon \to 0$, se tiene

$$L_{ij} = \int_{s_j-\triangle s/2}^{s_j+\triangle s/2} \left(-\frac{1}{2\pi}\right) \ln\sqrt{(X_i - X(s))^2 + (Y_i - Y(s))^2}ds. \tag{90}$$

Para el caso de los elementos que están fuera de la diagonal ($i \neq j$), se toma en cuenta que el intervalo de integración es suficientemente pequeño, y se representa la integral

por una simple aproximación rectangular, las funciones paramétricas son arbitrarias en el formalismo general y no se puede resolver exactamente. Por tanto, la Ec. (90) se reduce a

$$L_{ij} = -\frac{\triangle s}{2\pi} \ln \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2} ds. \tag{91}$$

En el caso de los elementos de la diagonal ($i = j$) el integrando tiene una singularidad en el punto medio del intervalo de integración por lo que hay que integrar adecuadamente dicha singularidad. Afortunadamente la singularidad es integrable como se muestra a continuación. Haciendo el cambio de variable $u = s - s_j$ a la Ec. (90),

$$L_{ij} = \int_{-\triangle s/2}^{\triangle s/2} -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(X_i - X(u + s_j))^2 + (Y_i - Y(u + s_j))^2} du. \tag{92}$$

Considerando las expansiones en serie de Taylor en términos del parámetro pequeño u y a primer orden

$$X(u + s_j) \simeq (s_j) + \left.\frac{dx}{ds}\right|_{s=s_j} u = X_j + X'_j u \tag{93}$$

$$Y(u + s_j) \simeq (s_j) + \left.\frac{dy}{ds}\right|_{s=s_j} u = Y_j + Y'_j u, \tag{94}$$

donde X_j y Y_j son las funciones paramétricas evaluadas en $s = s_j$, y X'_j y Y'_j son las primeras derivadas evaluadas en ese mismo valor de la longitud de arco. Desarrollando $((X_i - X(u + s_j))^2 + (Y_i - Y(u + s_j))^2)^{1/2} = I$ y sustituyendo en la Ec. (92), se tiene que

$$\begin{aligned} I =& ((X_j - X_j - X'u)^2 + (Y_j - Y_j - Y'u)^2)^{1/2} \\ =& [(X'u)^2 + (Y'u)^2]^{1/2} \\ =& (u^2(X'^2 + Y'^2))^{1/2}. \end{aligned} \tag{95}$$

Debido a la relación $ds^2 = dx^2 + dy^2$ y dividiendo todo entre ds^2 se obtiene que en un punto arbitrario

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 \Rightarrow X'^2 + Y'^2 = 1, \tag{96}$$

por lo que la Ec. (95) queda dada por

$$I = u \tag{97}$$

y sustituyendo en la Ec. (92), se obtiene

$$L_{ij} = \int_{-\triangle s\ 2}^{\triangle s/2} \left(-\frac{1}{2\pi}\right) \ln|u|\, du. \tag{98}$$

Ahora tomando en cuenta que el integrando es una función par, desarrollando la integral

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \left(-\frac{1}{\pi}\right) \int_0^{\triangle s/2} \ln(u) du = \left(-\frac{1}{\pi}\right) \left[u \ln(u) - u\right]_0^{\frac{\triangle s}{2}} \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\triangle\ s}{2} \ln\left(\frac{\triangle\ s}{2}\right) - \frac{\triangle\ s}{2}\right] = -\frac{\triangle s}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{\triangle s}{2}\right) - 1\right] \\ &= -\frac{\triangle s}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{\triangle s}{2}\right) - \ln e\right] = -\frac{\triangle s}{2\pi} \ln\left(\frac{\triangle s}{2e}\right). \end{aligned} \tag{99}$$

Finalmente, de las Ecs. (91) y (99) se puede representar a los elementos de matriz L_{ij} por

$$L_{ij} = -\frac{\triangle s}{2\pi} \begin{cases} \ln\sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2} & \text{si} \quad i \neq j \\ \ln\frac{\triangle s}{2e} & \text{si} \quad i = j \end{cases}. \tag{100}$$

A.1.2. Cálculo de los elementos de matriz N_{ij}

Para el cálculo de los elementos de matriz N_{ij} se debe tener más cuidado, particularmente en el caso de los elementos de matriz de la diagonal. Ahora partiendo de la Ec. (51),

$$N_{ij} = \int_{s_j - \triangle s/2}^{s_j + \triangle s/2} \frac{\partial}{\partial n} G(X_i + \varepsilon\eta_{x_i} - X, Y_i + \varepsilon\eta_{y_i} - Y) ds,$$

En este caso el límite cuando $\varepsilon \to 0$ debe tomarse hasta después de la integración. Ahora analizando $\partial G/\partial n$, se tiene que

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \nabla G \cdot \widehat{\mathbf{n}} = \frac{\partial G}{\partial x}\eta_x + \frac{\partial G}{\partial y}\eta_y, \tag{101}$$

que sustituyendo la Ec. (43) en las componentes en x y y de la Ec. (101), se obtiene

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\frac{(x-X)}{(x-X)^2+(y-Y)^2}, \tag{102}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi}\frac{y-Y}{(x-X)^2+(y-Y)^2}. \tag{103}$$

De la Ec. (89) se tiene que $\eta_x = y'$ y $n_y = -x'$, que sustituyendo con las Ecs.(102) y (103) y éstas a su vez en la Ec. (101) se llega a

$$\nabla G \cdot \widehat{n} = \frac{1}{2\pi}\frac{-(x-X)y' + (y-Y)x'}{(x-X)^2+(y-Y)^2}. \tag{104}$$

Ahora sustituyendo la Ec. (104) en la Ec. (51), se obtiene

$$N_{ij} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{s_j-\triangle s/2}^{s_j+\triangle s/2}\frac{1}{2\pi}\frac{-(X_i+\varepsilon\eta_{x_i}-X(s))y'(s)+(Y_i+\varepsilon\eta_{y_i}-Y(s))x'(s)}{(X_i+\varepsilon\eta_{x_i}-X(s))^2+(Y_i+\varepsilon\eta_{y_i}-Y(s))^2}ds, \tag{105}$$

donde se ha hecho la aproximación del punto de observación con el contorno

$$(x,y) = (X+\varepsilon\eta_x, Y+\varepsilon\eta_y).$$

Para los elementos fuera de la diagonal ($i \neq j$) se puede intercambiar el límite con la integral y tomando en cuenta que el intervalo de integraciones suficientemente pequeño se puede expresar la integral por una aproximación rectangular como

$$N_{ij} = \frac{\triangle s}{2\pi}\frac{(X_i-X_j)Y_j' + (Y_i-Y_j)X_j'}{(X_i-X_j)^2+(Y_i-Y_j)^2} \qquad \text{si} \quad i \neq j, \tag{106}$$

donde X_j' y Y_j' son las derivadas de primer orden evaluadas en $s = s_j$.

En el caso de los elementos de la diagonal ($i = j$) al igual que en los elementos L_{ij} existe una singularidad en el punto medio del intervalo de integración, así que utilizando la misma técnica, haciendo $u = s - s_j$, se tiene que

$$N_{ij} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{s_j-\triangle s/2}^{s_j+\triangle s/2}\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-(X_i+\varepsilon\eta_{x_i}-X(u+s_j))Y'(u+s_j)}{(X_i+\varepsilon\eta_{x_i}-X(u+s_j))^2+(Y_i+\varepsilon\eta_{y_i}-Y(u+s_j))^2}\right.$$
$$\left. + \frac{(Y_i+\varepsilon\eta_{y_i}-Y(u+s_j))X'(u+s_j)}{(X_i+\varepsilon\eta_{x_i}-X(u+s_j))^2+(Y_i+\varepsilon\eta_{y_i}-Y(u+s_j))^2}\right]ds. \tag{107}$$

Haciendo la expansión en serie de Taylor para el parámetro u, se tiene

$$X(u+s_j) \approx X(s_j) + \left.\frac{dX}{ds}\right|_{s=s_j} u + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2X}{ds^2}\right|_{s=s_j} u^2 = X_j + X_j' u + \frac{1}{2}X_j'' u^2, \quad (108)$$

$$Y(u+s_j) \approx Y(s_j) + \left.\frac{dY}{ds}\right|_{s=s_j} u + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2Y}{ds^2}\right|_{s=s_j} u^2 = Y_j + Y_j' u + \frac{1}{2}Y_j'' u^2. \quad (109)$$

Derivando las Ecs. (108) y (109) se llega a

$$X'(u+s_j) = X_j + X_j'' u, \quad (110)$$

$$Y'(u+s_j) = Y_j + Y_j'' u. \quad (111)$$

Ahora se sustituyen los valores de η_{x_i} y η_{y_i} dados por la Ec. (89) en las Ecs. (110) y (111) y éstas a su vez en la Ec. (107). Para facilitar la sustitución de los términos primero se hará en el denominador y después para el numerador.

$$\begin{aligned}
&(X_j + \varepsilon(Y_j') - X_j - X_j' u - \frac{1}{2}X_j'' u^2)^2 + (Y_j + \varepsilon(-X_j') - Y_j - Y_j' u - \frac{1}{2}Y_j'' u^2)^2 \\
&= (\varepsilon Y_j' - X_j' u)^2 + (-\varepsilon X_j' - Y_j' u)^2 = \varepsilon^2[(Y_j')^2 + (X_j')^2] + u^2[(X_j')^2 + (Y_j')^2] \\
&= \varepsilon^2 + u^2,
\end{aligned} \quad (112)$$

ya que $(X_j')^2 + (Y_j')^2 = 1$. Analogamente se hace una reducción de términos para el numerador

$$\begin{aligned}
&-(\varepsilon Y_j' - X_j' u - \frac{1}{2}X_j'' u^2)(Y_j' + Y_j'' u) + (-\varepsilon X_j' - Y_j' u - \frac{1}{2}Y_j'' u^2)(X_j' + X_j'' u) \\
&= -\varepsilon[(Y_j')^2 + (X_j')^2] - \varepsilon[Y_j' Y_j'' + X_j' X_j'']u + (X_j' Y_j' - Y_j' X_j')u \\
&\quad + (X_j' Y_j'' - Y_j' X_j'')u^2 - \frac{1}{2}[-X_j'' Y_j' + Y_j'' X_j']u^2 - \frac{1}{2}[-X_j'' Y_j'' + Y_j'' X_j'']u^3 \\
&= -\varepsilon + \frac{1}{2}[X_j' Y_j'' + X_j'' Y_j']u^2,
\end{aligned} \quad (113)$$

ya que $2X_j' X_j'' + 2Y_j' Y_j'' = 0 \Rightarrow X_j' X_j'' + Y_j' Y_j'' = 0$. Entonces, la Ec. (107) se reduce a

$$N_{ij} = \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\triangle s/2}^{-\triangle s/2} \frac{-\varepsilon + \frac{1}{2}(X_j' Y_j'' - X_j'' Y_j')u^2}{\varepsilon^2 + u^2} du \quad (114)$$

Separando la Ec. (114) y tomando en cuenta que es una función par, se tiene

$$N_{ij} = -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\underbrace{\int_0^{\triangle s/2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+u^2}du}_{I_1} + \frac{1}{2\pi}(X_j'Y_j'' - X_j u''Y_j')\lim_{\varepsilon\to 0}\underbrace{\int_0^{\triangle s/2}\frac{u^2}{\varepsilon^2+u^2}du}_{I_2}. \quad (115)$$

Para

$$I_1 = \arctan\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\Big|_0^{\triangle s/2} = \arctan\left(\frac{\triangle s}{2\varepsilon}\right) \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\triangle s/2}\left(\frac{\triangle s}{2\varepsilon}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Además se tiene

$$I_2 = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\triangle s/2}\left(\frac{u^2}{\varepsilon^2+u^2}\right)du = \frac{\triangle s}{2}. \quad (116)$$

Por lo tanto, la Ec. (115) queda reescrita como

$$N_{ij} = \begin{cases} \frac{\triangle s}{2\pi}\frac{-(X_i-X_j)Y_j'+(Y_i-Y_j)X_j'}{(X_i-X_j)^2+(Y_i-Y_j)^2} & \text{si} \quad i\neq j \\ \frac{1}{2}+\frac{\triangle s}{4\pi}(X_j'Y_j''-X_j''Y_j') & \text{si} \quad i=j. \end{cases} \quad (117)$$