



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

TAREAS Y FORMA DE INSTRUCCIÓN QUE PROMUEVEN LA
EVOLUCIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS EN
ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADA EN CIENCIAS
FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA: CORÉ JIMÉNEZ SUÁSTEGUI

ASESOR: DOCTOR EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN
MATEMÁTICA EDUCATIVA **ARMANDO SEPÚLVEDA LÓPEZ**

MORELIA MICHOACÁN; AGOSTO 2015



Agradecimientos.

Mi más sincero agradecimiento a mis sinodales: Dr. Héctor Tejeda, Dr. Francisco Domínguez, Dra. Karina Figueroa y M.C. Cuauhtémoc Rivera por sus valiosas observaciones realizadas a este trabajo.

A todos aquellos docentes de la facultad de ciencias físico matemáticas que guiaron con profesionalismo una gran etapa de mi desarrollo académico.

A aquellos profesores que en bachillerato encendieron la chispa que despertó mi interés por el estudio en educación matemática: al Lic. Álvaro Trujillo, con sus inspiradoras clases de metodología de la investigación, al Ing. Vicente Sánchez, quien puso en mis manos las primeras revistas que leí sobre investigación en matemática educativa, y al Dr. Armando Sepúlveda, mi asesor de tesis, quien con sus desafiantes problemas y motivadora metodología de instrucción reforzó ese interés. En especial le agradezco su infinita paciencia y estímulo para que pudiera concluir con esta tesis.

Al M.C Ángel Hernández, por las facilidades otorgadas para conseguir el grupo de estudio para en esta investigación.

A Memo, por todo su amor y apoyo sin límites en todos los aspectos.

A mis papás, por su gran su esfuerzo y sacrificio por brindarme valores y educación.

Y a todos los que, de alguna manera, contribuyeron para que esta tesis fuera posible.

Contenido

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	6
1.1. INTRODUCCIÓN.....	6
1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	8
1.3. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN.....	10
1.4. OBJETIVOS.....	11
2. REVISIÓN DE LA LITERATURA.....	12
2.1. INTRODUCCIÓN.....	12
2.2. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.....	13
2.2.1. <i>El trabajo de Polya</i>	13
2.2.2. <i>Aprender matemáticas resolviendo problemas</i>	16
2.3. APRENDIZAJE COOPERATIVO.....	20
2.3.1. <i>El desarrollo cognitivo según Piaget</i>	21
2.3.2. <i>Elementos esenciales del aprendizaje cooperativo</i>	22
2.3.3. <i>La formación de los grupos</i>	24
2.3.4. <i>Efectos positivos del aprendizaje cooperativo</i>	25
2.3.5. <i>Dificultades inherentes y cómo tratarlas</i>	26
2.4. ESQUEMAS DE ANÁLISIS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.....	28
2.4.1. <i>Recursos</i>	30
2.4.2. <i>Las estrategias heurísticas</i>	30
2.4.3. <i>Control</i>	33
2.4.4. <i>Sistemas de creencias</i>	33
2.5. TAREAS Y METODOLOGÍA DE INSTRUCCIÓN CON ENFOQUE EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y APRENDIZAJE COOPERATIVO.....	35
3. METODOLOGÍA.....	41
3.1. ENFOQUE.....	42
3.2. SUJETOS PARTICIPANTES.....	43
3.3. FASES DE LA INVESTIGACIÓN.....	44
3.3.1. <i>Revisión de las tareas</i>	44
3.3.2. <i>Planeación de las sesiones</i>	44
3.3.3. <i>Aplicación</i>	44
3.3.4. <i>Entrevistas</i>	46
3.3.5. <i>Análisis de los resultados</i>	47
4. PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	49
4.1. EXTRAÑO PERO VERDADERO.....	49
4.1.1. <i>Soluciones potenciales</i>	50
4.1.2. <i>Episodios relevantes durante el trabajo en equipo</i>	51
4.1.3. <i>Presentaciones y discusión de resultados</i>	64
4.1.4. <i>Reflexiones globales</i>	65
4.2. LA REVISTA.....	68
4.2.1. <i>Soluciones potenciales</i>	70

4.2.2.	<i>Episodios relevantes durante el trabajo en equipo</i>	71
4.2.3.	<i>Presentación y discusión de resultados.....</i>	73
4.2.4.	<i>Reflexiones globales.....</i>	74
4.3.	CARROS DE SUPERMERCADO	75
4.3.1.	<i>Soluciones potenciales</i>	76
4.3.2.	<i>Episodios relevantes durante el trabajo en equipo</i>	77
4.3.3.	<i>Presentaciones y discusión de resultados</i>	86
4.3.4.	<i>Reflexiones globales.....</i>	89
5.	CONCLUSIONES.....	91
	BIBLIOGRAFÍA	94
	ANEXO	97

Resumen

Las tareas matemáticas transmiten ideas acerca de lo que es la matemática y lo que implica hacer matemáticas. Una de las labores más importantes del docente es seleccionar y/o diseñar tareas, que entre otras cosas, ayuden a los estudiantes a adquirir habilidades de resolución de problemas, ya que ésta es considerada la esencia del quehacer matemático. Se parte de un paradigma de investigación de corte cualitativo conocido como *investigación de diseño*, cuyo objetivo es evaluar la implementación de herramientas educativas, en este caso, una metodología de instrucción. Más que validar hipótesis u obtener leyes universales e inmutables, el propósito de este tipo de estudios es detectar patrones en los que se desarrolla el proceso de enseñanza en toda su complejidad. Bajo este modelo de investigación, se aplicó un conjunto de tareas contenidas en *Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum* a un grupo de estudiantes de nivel medio superior mediante una forma particular de instrucción que combina el aprendizaje cooperativo con el grupal e individual. Se documentan evidencias de que al trabajar en las tareas, las respuestas iniciales de los estudiantes fueron incompletas, presentaban inconsistencias o eran erróneas, pero al trabajar en un ambiente en el cual los alumnos tuvieron la oportunidad de argumentar y discutir sus soluciones, se generó una evolución en sus niveles de entendimiento, pues sus respuestas fueron más completas y certeras respecto al primer intento de solución e incluso algunos alumnos fueron más allá de lo que pedía el problema.

Palabras clave: resolución de problemas, aprendizaje cooperativo, investigación de diseño, tareas matemáticas, bachillerato.

Abstract

The math tasks transmit ideas about what is and what means to do mathematics. One of the most important labors of the teachers is to select and/or design tasks that in addition to other things, helps the students to acquire the ability to solve problems since this is considered to be the essence of the activity of the mathematician. The base point is a qualitative investigation paradigm known as research of design, which objective is to evaluate the implementation of educational tools, in this case, an instructional methodology. Rather than evaluate the hypothesis or to get universal and immutable laws, the purpose of this type of study is to detect patterns on which the process of teaching is developed in all its complexity. Under this model of research, a set of problems were applied from "Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum" to a group of high school students by means of a particular form of instruction that combines the cooperative learning with the group and individual ones. Evidences were documented showing that when working on the problems, the initial answers of the students were incomplete, inconsistent or wrong, but, when the students were given the opportunity to argue and discuss the solutions, an evolution on their understanding was generated as their answers were more complete and accurate with respect to the first attempt of solution and even some students went beyond of what the problems asked.

Keywords: problem solving, cooperative learning, research of design, mathematical tasks, high school.

1. Problema de investigación

1.1. Introducción

Es común que los estudiantes de bachillerato de nuestro sistema educativo suelen mostrar un débil manejo de los conceptos matemáticos que supuestamente dominan cuando se enfrentan a problemas no rutinarios o ligeramente distintos a los propuestos por el profesor. En la mayoría de los casos, el aprendizaje de los alumnos de este nivel se ha caracterizado por la memorización de fórmulas y el uso mecánico de ciertos procedimientos, limitándose al empleo de las técnicas empleadas por el docente. Su instrucción ha considerado que es necesario el estudio de una gran cantidad de temas aun cuando éstos sean tratados de manera superficial.

Sin embargo, de acuerdo con Schoenfeld (1992), el propósito principal de una instrucción matemática no es equipar a los estudiantes de un montón de habilidades, conocimientos y estrategias sino permitirles pensar por sí mismos. Es necesario que los alumnos se involucren en procesos de resolución de problemas, ya que de este modo lograrán adquirir un entendimiento profundo de los conceptos matemáticos.

Polya (1945), quien creía firmemente que los procedimientos rutinarios acaban con el interés de los alumnos por el aprendizaje las matemáticas, consideraba que los profesores tienen una gran oportunidad para despertar la creatividad en sus alumnos y que una manera de hacerlo es proponiéndoles problemas que se consideren un reto pero que estén a su alcance. Además de la selección de problemas motivantes, el papel del profesor debería consistir en ayudar a los alumnos a resolverlos pero sin darles explícitamente la respuesta; es decir, realizando una serie de preguntas de carácter general basadas en el sentido común, las cuales representan acciones típicas del pensamiento que interviene en el proceso de resolución. Con esta estrategia se propone que los alumnos resuelvan el problema por ellos mismos, y que con el tiempo, logren adquirir la habilidad de hacerse la pregunta indicada en el momento adecuado. La meta es que en un momento dado lleguen a ser capaces de preguntarse acerca de qué caminos se siguen para la invención y el descubrimiento, y no solamente se dediquen a asimilar las soluciones propuestas por otros.

Dicha manera de concebir a la matemática no corresponde con la idea común a profesores y alumnos, quienes por lo regular la ven como “una ciencia exacta que no da cabida al error, donde se aprenden métodos y algoritmos”. (Santos, 2007).

Las ideas de Polya han cobrado tal impulso que dieron pie al desarrollo de una línea de investigación conocida como *resolución de problemas*. El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM por las siglas en inglés) reconoce tal importancia y considera que la resolución de problemas debería ser el centro de atención en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas debido a que es una forma básica de investigación.

La literatura en este campo hace referencia a la importancia que tiene la presentación y discusión de ideas entre los estudiantes y el profesor en el aprendizaje de las matemáticas, en donde la aplicación constante de este tipo de dinámicas resulta fundamental para lograr que los alumnos adquieran habilidades propias del quehacer matemático; algunas de las cuales consisten en: formular y solucionar problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, proponer y validar conjeturas. Así pues, resulta necesario que los alumnos tengan la oportunidad de reunirse en grupos pequeños de manera que puedan contrastar sus distintos puntos de vista.

La presente investigación contiene una descripción del trabajo de cuatro equipos de estudiantes de bachillerato involucrados en procesos de resolución de problemas, en un ambiente en donde se pone en marcha una forma de instrucción que combina el trabajo colectivo con el individual. Los detalles se exponen en las siguientes secciones del capítulo. En el capítulo 2 se hace una revisión de la literatura referente al surgimiento y significado de una instrucción basada en resolución de problemas, los motivos de su conveniencia, los factores que inciden en la resolución de problemas matemáticos, las bases teóricas de una metodología de enseñanza conocida como aprendizaje cooperativo y las características que deben tener tanto las actividades como la forma particular de instrucción que se llevará a la práctica. El capítulo 3 corresponde a la metodología que se utilizó para la implementación de un conjunto de tareas aplicadas y se explica el uso de los instrumentos utilizados para el análisis de la información. La parte medular del estudio corresponde al capítulo 4; en él

se presentan los resultados de la aplicación de tres de las actividades propuestas¹ y se realiza un análisis de los procesos de refinamiento de las ideas de los alumnos. Y finalmente, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones derivadas de las observaciones realizadas.

1.2. Planteamiento del problema

Actualmente, las tendencias curriculares en nuestro país hacen énfasis en el aprendizaje de habilidades relacionadas con la resolución de problemas, el uso de estrategias metacognitivas y del pensamiento crítico; razón por la cual ha crecido el número de profesores que ya sea por la presión que ejercen las instituciones o por convicción propia intentan llevar a la práctica el modelo educativo sugerido.

Al estudiar de qué manera los docentes hacen frente a esta tendencia de enseñanza se han observado una gran variedad de formas de instrucción. Stanic y Kilpatric (1988, citado en Villanova *et. al*), identifican los roles que ha desempeñado la resolución de problemas en las matemáticas escolares:

Como medio para lograr otros objetivos. Este punto de vista supone que la resolución de problemas es un simple vehículo para lograr algunos objetivos curriculares y no se le ve como la esencia de la actividad matemática. Dichos objetivos generalmente son:

- Practicar un tema ya estudiado. Se resuelven problemas luego de que han sido dados los conceptos, definiciones, fórmulas y procedimientos. El objetivo es dominar técnicas específicas.
- Motivar el estudio de ciertos temas. Los problemas se emplean solamente para introducir temas con el fin de estudiar un determinado contenido matemático.
- Justificar la enseñanza de las matemáticas. Suelen introducirse problemas que involucran situaciones de la vida cotidiana para mostrar que las matemáticas pueden ser útiles.

¹ Se documentan únicamente tres tareas de una selección de seis, esto debido al gran volumen de datos a analizar en cada actividad. Se propone que tres de ellas sean piloto. En el capítulo 3 se explica el motivo por el cual pudieron ser aplicadas solamente 5 actividades.

- Formar nuevas habilidades. Los problemas se estructuran en secuencias cuidadosas con el fin de proporcionar habilidades en un tema en particular.
- Mostrar la faceta divertida de las matemáticas. Generalmente se presentan de manera espontánea acertijos, curiosidades y problemas recreativos.

Como una habilidad en sí misma. Más que enseñar a resolver problemas se instruye *acerca* de la resolución de problemas. En este caso se presentan estrategias de resolución como un contenido más. Esta postura es fuertemente criticada debido a las evidencias de que la sola enseñanza de estrategias no produce cambios significativos en las formas de atacar los problemas, ya que intervienen otros factores tales como el conocimiento previo de los alumnos, el control o monitoreo de sus procesos de pensamiento, sus creencias acerca de las matemáticas y la motivación entre otros.

Como actividad central en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Considerando que la resolución de problemas es el corazón de las matemáticas, los profesores que asumen esta perspectiva se proponen recrear lo que Schoenfeld (1992) identifica como un “microcosmos matemático”. Esta interpretación supone que el estudiante aprenderá matemáticas *a través* de la resolución constante de problemas matemáticos; lo cual no quiere decir que deban resolverse una enorme cantidad de problemas de cualquier tipo. Los problemas que ayudarán a los estudiantes a adquirir un aprendizaje con significado y a llevar a cabo actividades propias del quehacer matemático deberán orillarlos a explorar conjeturas y múltiples soluciones a partir de lo que saben, deben conducirlos a reconocer sus fortalezas y debilidades, así como favorecer la interacción con sus compañeros con el fin de que aprendan a defender sus argumentos.

Recientemente la *investigación basada en diseño* o *investigación de diseño*, ha cobrado cierto impulso puesto que ha probado hacer progresar las teorías de enseñanza y aprendizaje en ambientes complejos. Confrey (2006, citado en Molina, 2011) señala que los estudios o experimentos de diseño emergen del uso de un conjunto de tareas que estudian cómo se aprenden un conjunto de habilidades o conceptos mediante la guía de un profesor (que generalmente es el investigador mismo). La finalidad de los estudios de diseño es documentar: “qué recursos y conocimiento previo ponen en juego los alumnos en la tarea, cómo interaccionan los alumnos y profesores, cómo son creadas las anotaciones y registros,

cómo emergen y evolucionan las concepciones, qué recursos se usan y cómo es llevada a cabo la enseñanza a lo largo de la instrucción, mediante el estudio de trabajo de los alumnos, grabaciones de videos y evaluaciones de la clase.”

Este joven paradigma de investigación, se enfoca por un lado, en el diseño de alguna forma de instrucción, y por otra parte, en un análisis continuado y retrospectivo de algún diseño ya propuesto. Uno de sus principales puntos fuertes es que permiten reconocer los alcances y limitaciones de la teoría llevada a la práctica. (Molina, 2011).

El presente trabajo se centra en la implementación, en un grupo de nivel medio superior, de una forma particular de instrucción que corresponde con la visión en la cual la resolución de problemas es la actividad central de la clase. Se aplica un conjunto de actividades contenidas en los *Paquetes de Evaluación Balanceada (Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum, 1999, 2000)*, pues al revisar sus cualidades, pudo observarse que tienen el potencial para generar un ambiente de resolución de problemas y además algunas de ellas pueden trabajarse de manera colectiva.

Específicamente lo que nos interesa es:

Documentar el cambio en las maneras de pensar de los estudiantes cuando se enfrentan a problemas de matemáticas escolares que involucran diferentes modos de solución, mediante una forma particular de instrucción que involucra trabajo en equipos, grupal e individual.

1.3. Preguntas de investigación

Las preguntas que guiarán el desarrollo de esta investigación son las siguientes:

1. ¿Qué estrategias y conocimientos previos se necesitan, y a cuáles recurren los estudiantes para resolver los problemas propuestos?
2. ¿Qué habilidades y recursos matemáticos se promovieron durante el trabajo con las tareas?
3. ¿De qué manera las tareas contribuyeron a que los alumnos revelaran, evaluaran y extendieran sus ideas iniciales?
4. ¿Qué situaciones condujeron a los estudiantes hacia una evolución en sus

conocimientos durante la implementación de las tareas?

5. ¿Cuál es el papel del profesor en el aula cuando se trabaja con esta forma particular de instrucción?

1.4. Objetivos

El objetivo general de este trabajo es:

Evaluar el potencial que tienen las tareas y la forma de instrucción para contribuir al desarrollo y evolución de los conocimientos y estrategias matemáticas de estudiantes de bachillerato.

En tanto que los objetivos particulares son los siguientes:

- Revisar las cualidades que tienen las tareas contenidas en *Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum* (1999, 2000) para generar un ambiente de resolución de problemas, así como los recursos previos para resolverlas. Seleccionar y adaptar seis de ellas.
- Aplicar las tareas a un grupo de alumnos de nivel medio superior mediante una metodología de instrucción que combina el trabajo en grupos pequeños, con la clase completa y de manera individual.
- Examinar el proceso de resolución de problemas de cuatro equipos de trabajo, haciendo énfasis en: a) los obstáculos a los que se enfrentaron los estudiantes y los equipos en general, b) las discusiones y acciones que los llevaron a superarlos y c) la manera en que se transformaron sus acercamientos iniciales.
- Documentar las características de las estrategias de solución y recursos usados por los alumnos en tres de las seis actividades seleccionadas, además de los momentos que contribuyeron a un cambio en sus formas de pensar después de haber intercambiado opiniones con sus compañeros de equipo y con el grupo en general.
- Determinar en qué medida las tareas motivaron la búsqueda de soluciones y la forma de instrucción propició el refinamiento de las ideas iniciales.

2. Revisión de la literatura

2.1. Introducción

La resolución de problemas ha sido considerada por varios autores como la esencia de la actividad matemática. Por ésta razón, se considera que en la instrucción matemática es indispensable que los alumnos adquieran una amplia experiencia en éste terreno.

El NCTM (2000) ha hecho énfasis en la importancia de que la habilidad para resolver problemas matemáticos sea alcanzada por estudiantes de todos los niveles. Así, en su propuesta curricular establece en diez Estándares los lineamientos para centrar esfuerzos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Mientras que los *Estándares de contenido* constan de una serie de descripciones acerca del contenido matemático que los estudiantes deben obtener y comprender, los *Estándares de procesos* muestran la manera de adquirir y usar esos conocimientos.

Dentro de los estándares de procesos la resolución de problemas es valorada como parte esencial en el aprendizaje de las matemáticas. Al respecto el NCTM (ibíd.) señala que, no debiera verse como una parte aislada en el programa sino que por el contrario, los estudiantes precisan tener frecuentes oportunidades para formular, enfrentar y resolver problemas.

Por otra parte, en los *Professional Standards for Teaching Mathematics* se destaca además la relevancia del tipo de tareas que el profesor debiera aplicar en el aula para lograr una enseñanza de calidad, puntualizando que éstas deberán basarse en: matemáticas significativas de acuerdo a los intereses y experiencias de los alumnos; el fomento de la resolución de problemas y la comunicación de las ideas matemáticas (NCTM, 1991).

Con la finalidad de promover una instrucción basada en la resolución de problemas un grupo de investigadores encabezado por Allan Schoenfeld, a través del proyecto conocido como *Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum*, se han dado a la tarea de sugerir un conjunto de actividades que fomenten este tipo de enseñanza.

El éxito en el estudio de las matemáticas está determinado por varios factores, entre los estimados de mayor relevancia se encuentra la habilidad para seleccionar y usar ciertas estrategias generales en la resolución de problemas. Sin embargo, el reconocer dichas estrategias no es suficiente. Schoenfeld (1985), ha identificado que el conocimiento previo que el alumno posea, la regulación del progreso de solución e incluso las creencias que se tienen acerca de la disciplina afectan este proceso.

Es fundamental además desenvolverse en un ambiente donde se tenga la oportunidad de discutir ideas, presentar conjeturas, utilizar ejemplos y contraejemplos, y plantear problemas propios. (Santos, 2007). Una alternativa de aprendizaje acorde con esta idea presenta la organización de la clase en grupos pequeños y es conocida como *aprendizaje cooperativo*.

Entre la gran variedad de definiciones acerca de lo que significa *Aprendizaje Cooperativo* nos ha interesado la propuesta por Hagelgans *et al.* (1995) quienes establecen que:

A menudo, la forma de instrucción en grupos pequeños de enseñanza es llamada Aprendizaje Cooperativo. [...] Cuando se habla de aprendizaje cooperativo, los siguientes elementos deben de estar presentes: una cantidad significativa del curso involucra a los estudiantes en la interacción regular entre los miembros de su equipo; deberá desarrollarse un espíritu de pertenencia a un grupo; los miembros del equipo comparten un sentimiento de responsabilidad mutua por los demás; los grupos son permanentes; dentro del proceso de evaluación se incluye el trabajo en grupo. (pp. 8-11)

2.2. Resolución de problemas

2.2.1. El trabajo de Polya

En sus años de estudiante, el destacado matemático húngaro George Polya, se interesó por los procesos para descubrir o inventar soluciones. Consideraba que para entender completamente una teoría debería tener una idea acerca de cómo fue descubierta. Por ésta razón, cuando llegó a ser profesor en la universidad, juzgó pertinente motivar a sus alumnos para que estos al resolver problemas trataran de comprender los caminos, motivos y procedimientos para dar con la solución. (Polya, 1945).

Polya (ibíd.) consideraba que aprender a resolver problemas era cuestión de habilidad práctica, como lo es el aprendizaje de algún deporte, la cual se adquiere mediante la imitación. Por esta razón, sugirió que al tratar de resolver problemas se observara e imitara lo que la gente hábil en este terreno hacía en casos semejantes.

Como profesor, tuvo en cuenta que una de las tareas más importantes era ayudar al alumno. Al respecto señala:

El estudiante debe adquirir en su trabajo personal la más amplia experiencia posible, pero si se le deja solo frente a su problema, sin ayuda alguna o casi ninguna, puede que no progrese... El maestro debe ayudarlo, pero no mucho ni demasiado poco, de tal suerte que le deje asumir una parte razonable del trabajo... Para tal fin el maestro debe ayudarlo discretamente, sin imponérsele. (ibíd., pp. 25)

Así, se propuso la elaboración de una guía en la cual describe el proceso que él mismo utilizaba al resolver problemas, esto con el fin de ayudar a sus alumnos a ser hábiles solucionadores de problemas matemáticos y que además constituyera un apoyo para aquellos los profesores que quisieran desarrollar esta habilidad en sus alumnos. En esta guía expone una serie de preguntas que el profesor puede hacer al alumno con el fin de orientarlo de manera discreta. Tales preguntas tienen dos características fundamentales:

La generalidad: Son aplicables a toda clase de problemas en el sentido de que no se restringen a un tema en particular. ¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Cuál es la condición? Son algunas preguntas de este tipo.

El sentido común: Las preguntas son naturales, sencillas y obvias para aquellos individuos con habilidad para resolver problemas. Son sugerencias que podrían llevarse a cabo aún sin consejo; sin embargo, las personas que se las plantean a sí mismas no necesitan este tipo de ayuda.

Para una mejor organización estas preguntas se dividen en las siguientes cuatro fases:

Comprensión del problema: Se refiere a la familiarización con el problema; esto es, saber a qué se quiere llegar o qué es lo que se quiere encontrar. Se sugiere en un principio visualizar el problema de manera global y enseguida comenzar a preparar y aclarar detalles.

Polya (ibíd.) señala que la mayoría de los fracasos en la resolución de problemas se deben a una débil comprensión producto de una mala concentración. Algunas preguntas o acciones típicas de esta fase son: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿cuál es la condición?

Trazo de un plan: Se trata de un esbozar la estrategia a seguir sin entrar en muchos detalles. Propone en esta etapa separar los elementos principales del problema y considerarlos desde distintos ángulos, de modo que se logre establecer de forma general e intuitiva los razonamientos, los cálculos o construcciones a analizar. Aquí se recalca que uno de los errores más frecuentes al resolver problemas consiste en lanzarse a hacer cálculos o construcciones sin ningún plan o esperar a que una idea llegue de repente sin hacer algo que la produzca. Cierta tipo de preguntas pueden ayudar a movilizar ideas, como: ¿Conoce algún problema relacionado?, ¿podría utilizar su resultado o su método?, ¿puede simplificar el problema?, ¿hace falta introducir algún elemento auxiliar?

Ejecución del plan: Consiste en llevar a cabo con detalle las ideas concebidas en la fase anterior. En esta etapa deberán refinarse las intuiciones, por lo que en un nivel adecuado deberá demostrarse la validez de cada argumento. ¿Puede ver claramente que cada paso es correcto?, ¿puede demostrarlo? De su experiencia, Polya observa que cuando el alumno simplemente acepta un plan por venir de alguna autoridad como el profesor es más fácil que lo olvide, pero cuando éste ha surgido del propio alumno aunque haya recibido ayuda entonces no lo olvidará tan fácilmente.

Visión retrospectiva: Finalmente conviene realizar una verificación y reflexión referente a la ejecución de las operaciones y al sentido de las afirmaciones y la solución en general. Se analiza la posibilidad de resolver el problema mediante otros métodos, de esta manera se obtiene la ventaja de hallar una mejor solución o de descubrir otros aspectos interesantes. ¿El razonamiento total usado es correcto?, ¿puede obtener el resultado de manera diferente?, ¿puede aplicarlo en otro problema?

Al plantear las preguntas sugeridas en las cuatro fases se persiguen dos fines: ayudar al alumno a resolver el problema y desarrollar la habilidad de que el alumno logre hacerlo por

sí mismo. Las preguntas sugeridas se consideran flexibles, esto quiere decir que pueden adaptarse de manera que se realicen de manera natural y no mecánica.

En cuanto al papel del profesor, Polya (ibíd.) ve en él a un guía que sabe dar a los estudiantes pistas que los motiven a la búsqueda de la solución. Recomienda evitar hacer preguntas demasiado específicas tales como ¿puede aplicar el Teorema de Pitágoras en este problema? Pues de esta manera, al alumno se le deja poco por hacer. Sin embargo, advierte que su guía no será suficiente si el aprendiz no cuenta con los conocimientos previos para resolver los problemas.

2.2.2. Aprender matemáticas resolviendo problemas

¿Qué significa aprender matemáticas? La manera de responder a esta pregunta tiene que ver con las propias ideas acerca de lo que es la matemática, su enseñanza y aprendizaje.

Al respecto Hersh (1986) señala: “La concepción sobre la matemática afecta la propia concepción sobre cómo debe ser enseñada. La manera de presentarla es un indicador sobre lo que uno cree que es lo más esencial en ella.” (Citado en Villanova, 2001).

Considerar a las matemáticas desde un punto de vista únicamente formal produjo a finales de los años 50 y principios de los 60's una reforma —conocida como *matemáticas modernas*—en los programas de matemáticas. Dicho cambio curricular recomendaba dar énfasis a la estructura y el lenguaje formal de las matemáticas desde niveles elementales. En el currículo se incluyeron el estudio de los conjuntos y la lógica matemática y se le dio más importancia a los métodos de demostración, pues se identificaba a la estructura matemática como un componente fundamental de la disciplina. Ciertos reproches fueron lanzados en contra de las matemáticas modernas ya que en opinión de algunos psicólogos y educadores, enseñar científicamente no significa enfrentar al alumno desde el principio con sistemas científicos pulidos. Tal es el caso de Piaget, quien subraya que el estudiante debería aprender a comprender y buscar demostraciones dependiendo de su experiencia y formación ya que resulta contraproducente el empujarlo a un nivel demasiado formal en una etapa prematura. (Hernández, 2000).

Como respuesta a las deficiencias que se dejaron notar en el movimiento de las matemáticas modernas, surge *El regreso a lo básico*, que priorizaba el manejo de las operaciones fundamentales y procedimientos algorítmicos. Esta propuesta curricular pronto dejó ver sus puntos débiles, ya que a pesar de que algunos alumnos poseían una gran destreza para resolver operaciones, era común la falta de comprensión de conceptos básicos al momento de resolver problemas. Incluso llegaba a ocurrir que el alumno encontraba la respuesta a problemas con datos sin sentido o insuficientes. (Santos, 2007).

Estos cambios curriculares tomaron en cuenta principalmente cambios en el contenido temático, pero la metodología de enseñanza quedó arraigada en lo que Gómez (1995) denomina la “tradición de las matemáticas escolares”, en la cual las Matemáticas son vistas como un conjunto de expresiones simbólicas. De manera que su aprendizaje tiene que ver con identificar los algoritmos que permiten transformar unas expresiones en otras según el modelo propuesto por el profesor o el libro de texto. En consecuencia, el papel del docente es el de presentar los algoritmos de manera clara, generar condiciones para que los alumnos los retengan y evaluar su capacidad para aplicarlos en situaciones similares.

Es común considerar a las matemáticas como un conjunto fijo de conocimientos pulidos y acabados; sin embargo, valorarlas como una disciplina en evolución que es producto de la inventiva humana tiene consecuencias que repercuten de manera positiva en su aprendizaje. Este punto de vista incluye considerar el salón de clases como una comunidad matemática en la cual es esencial resolver problemas, desarrollar el razonamiento matemático y hacer uso de la lógica como un medio de verificación. (Santos, 2007).

La propuesta de aprender matemáticas a través de la resolución de problemas cuestiona la aceptación de esta disciplina como un conjunto de hechos, algoritmos, procedimientos o reglas que el estudiante tiene que memorizar o reproducir. Por tal motivo, promueve la participación activa por parte del alumno en el desarrollo de los conceptos, ya que considera que el alumno aprende matemáticas al desarrollar actividades propias del quehacer matemático (Santos, *ibíd.*).

De acuerdo con Devlin (1994, citado en Santos 2007), la labor del matemático se caracteriza por encontrar y examinar patrones, los cuales pueden ser numéricos, de razonamiento, de movimiento, de simetría, regularidad y de posición.

En un sentido muy general podríamos decir que son actividades del quehacer matemático el descubrir o crear relaciones. Las relaciones habrá que separarlas y analizarlas para discutir ideas y estrategias. Además se deberán plantear conjeturas, evaluarlas y contrastar los resultados. Lo anterior requiere abstraer, inventar, representar, emplear ejemplos y contraejemplos para demostrar y encontrar el sentido de las ideas matemáticas. Pero sin duda alguna, el proceso de formular o rediseñar problemas se identifica como la esencia del trabajo del matemático.

Así, una idea fundamental en esta propuesta de aprendizaje consiste en darle un enfoque empleando problemas al estudio de la disciplina. Esto significa que las actividades en el aula deben presentarse en forma de problemas o preguntas que demanden un proceso de reflexión en los estudiantes y los conduzca hacia la búsqueda, análisis de soluciones, o incluso al rediseño y formulación de nuevos problemas. Lo que se pretende es que el alumno desarrolle habilidades y estrategias que le ayuden no sólo a entender el contenido matemático, sino a participar en el desarrollo de los conceptos. (Santos, 2007).

En este punto es importante aclarar a qué nos referimos con *problema*.

Schoenfeld usa este término para referirse a una tarea que es difícil para el individuo que está tratando de hacerla. De ahí su carácter relativo, pues tiene que ver con el esfuerzo que una persona le dedica a su solución. “La misma tarea que exige esfuerzos significativos en algunos estudiantes puede ser un ejercicio rutinario para otros, y solucionarlo, puede ser un acto de simple recordatorio para un matemático talentoso.” (Schoenfeld, 1985, pp. 74)

Para Polya un problema es “un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata” (1962, pp. 65). Distingue además entre:

Problemas por resolver: Son aquellos que tienen como propósito descubrir cierto objeto el cuál es llamado “incógnita”. Sus principales elementos son la incógnita, los datos y la condición.

Problemas por demostrar: En ellos debe mostrarse la exactitud o falsedad de una afirmación claramente enunciada. En un problema por demostrar los elementos característicos son la hipótesis y la conclusión.

Problemas prácticos: Considera dentro de esta categoría a los problemas de aplicación a la vida real tales como la construcción de una presa. Generalmente en este tipo de problemas los conocimientos necesarios y los conceptos, las incógnitas, los datos y las condiciones están definidos con poca claridad.

Problemas rutinarios: Se refiere a aquellos que pueden resolverse siguiendo algún procedimiento previamente establecido y por tanto suele carecer de originalidad. Resolver una ecuación de segundo grado, con la condición de haber explicado la solución general, ilustra muy bien este tipo de problemas, pues basta con sustituir nuevos datos en un problema ya resuelto. (1945)

Fredericksen (1984, citado en Santos, 2007) presenta una manera de identificar tres tipos de problemas:

1. *Bien estructurados:* Aparecen claramente formulados. Se pueden resolver aplicando algún algoritmo conocido y existen maneras de verificar la veracidad de la solución.
2. *Estructurados que requieren un pensamiento productivo:* No existe un algoritmo para resolverlos. Quien los resuelve tiene que diseñar el proceso de solución o al menos una parte.
3. *Mal estructurados:* Carecen de una clara formulación y un procedimiento que garantice la solución.

Una clasificación más común es la presentada por Zeitz (1999), quien distingue entre *ejercicios y problemas*. Un “ejercicio” se trata de una pregunta en la cual uno puede reconocer de manera inmediata la manera de responderla, pero un “problema” demanda pensamiento, meditación, recursos e ingenio. Considera además que estos deberían ser misteriosos e interesantes.

Polya (1945) enfatizaba que en la enseñanza de las matemáticas los problemas propuestos en el aula aun siendo modestos deberían poner a prueba la curiosidad y las capacidades inventivas de los estudiantes, criticando seriamente el uso predominante de los problemas rutinarios.

Los problemas de rutina, incluso empleados en gran número, pueden ser útiles en la enseñanza de las matemáticas, pero sería imperdonable proponer a los alumnos exclusivamente problemas de este tipo. Limitar la enseñanza de las matemáticas a la ejecución mecánica de operaciones rutinarias es rebajarlas por debajo del nivel de un libro de cocina ya que las recetas culinarias reservan una parte a la imaginación y al juicio del cocinero, mientras que las recetas matemáticas no permiten tal cosa. (pp. 163)

2.3. Aprendizaje cooperativo

La propuesta de aprendizaje a través de la resolución de problemas lleva implícita la idea de que los cursos de matemáticas deben convertirse en comunidades en donde los estudiantes tengan la oportunidad de dialogar para compartir sus conjeturas, argumentos y contraejemplos. En este sentido, resulta conveniente la organización de la clase en grupos pequeños.

A principios de los 90's, Hagelgans, *et al.* (1995) comenzaron a observar de manera independiente que, al introducir el uso calculadoras y computadoras en sus cursos de matemáticas universitarias, solía haber una mayor interacción y comunicación entre sus alumnos. Las conversaciones llevadas a cabo entre los estudiantes al parecer les ayudaban a recordar y comprender conceptos matemáticos importantes casi tanto como las actividades en las que usaban herramientas tecnológicas. Por esta razón, comenzaron a aplicar de manera informal distintos enfoques de trabajo en grupos pequeños.

Lo que comenzó como charlas esporádicas referentes a los aspectos positivos del trabajo cooperativo entre alumnos, evolucionó hacia el desarrollo de un proyecto que tuvo como objetivo esclarecer el significado de lo que debía ser el “aprendizaje cooperativo”, cuyos fundamentos se encuentran en el constructivismo de Piaget. A continuación se presenta un resumen acerca de cómo los autores conciben dicha teoría.

2.3.1. El desarrollo cognitivo según Piaget

Los individuos construyen su conocimiento por una necesidad de adaptarse a su medio ambiente. Aunque la interacción social forma parte de este ambiente es insuficiente por sí sola para mejorar el desarrollo intelectual de una persona, el cual está influenciado además por la maduración, la experiencia y el equilibrio.

La madurez determina si es posible o no la construcción de estructuras mentales específicas en un momento particular.

Piaget señala que los seres humanos suelen aprender una idea a partir de la *experiencia* y no simplemente porque alguien les habla acerca de ella. Para el autor existen dos tipos de experiencia: La *experiencia física*, la cual consiste en actuar sobre los objetos transformándolos e interactuando con ellos a través de los sentidos; y la *experiencia lógico matemática* que se origina de la coordinación general de un conjunto de acciones físicas. Un niño puede tomar una cantidad fija de objetos, contarlos y reorganizarlos de distintas maneras; en una línea, un círculo, un rectángulo, etc.; obteniendo para cada acción un resultado numérico. Luego de reflexionar sobre las distintas acciones efectuadas se dará cuenta de que, sin importar de qué manera acomode los objetos, obtendrá siempre la misma respuesta que en sus acciones previas. En cierta etapa de su desarrollo, los niños llegan a ser capaces de pensar deductivamente y ser conscientes de la *abstracción reflexiva*, ambos procesos basados en los dos tipos de experiencias. Haremos un paréntesis para explicar lo que esta significa.

Piaget (2001), denominó *abstracción reflexiva* al proceso que permite construir nuevas estructuras mediante la reorganización de elementos extraídos de estructuras ya existentes. Esto ocurre en dos fases. En la primera, llamada *fase de reflejamiento*, se lleva a cabo la extracción de acciones en un nivel inferior para ser reflejadas en un nivel superior; y en la segunda, conocida como *fase de reflexión* se lleva a cabo la reorganización y ampliación de aquello que fue reflejado. Lo anterior en la práctica educativa supone que el docente debe partir de situaciones empíricas o intuitivas al introducir un nuevo concepto.

Continuemos con las interpretaciones de Hagelgans *et al.* (1995) respecto a la teoría de Piaget. Los autores refieren que, cuando un individuo se encuentra con situaciones que

requieren nuevas construcciones mentales, este tenderá a incorporar las nuevas ideas en estructuras mentales que ya existen (*asimilar* el nuevo conocimiento), pero si esto no funciona, se produce un desequilibrio de las experiencias individuales (conocido como conflicto cognitivo), el cual genera la necesidad de *acomodar* esas nuevas experiencias; es decir, modificar la estructura cognitiva para incorporar nuevos saberes. El *equilibrio* es el mecanismo interno que regula el proceso de asimilación y acomodación.

Aunque Piaget no incursionó con profundidad en el aspecto de la *interacción social* en el aprendizaje, en sus estudios que llevó a cabo con infantes destacó que, cuando el niño se comunica con otros individuos se ve mejorada su capacidad para prestar atención a más de un elemento de un problema a la vez y de ver que otros pueden llegar a conclusiones diferentes. Los distintos puntos de vista generados pueden ocasionar un conflicto cognitivo entre los individuos de un grupo. Si las contradicciones vienen de sujetos que se encuentran en un nivel similar de desarrollo conceptual, estas suelen sobresalir por encima de cualquier otro aspecto del problema y por lo tanto, dar lugar a la coordinación que puede resolver el conflicto. Y es propiamente la resolución del conflicto la que lleva al desarrollo cognitivo. De esta manera los autores justifican la formación de grupos de trabajo.

Estas ideas han sido adoptadas también por el NCTM (2000a) al incluir la comunicación como parte de los estándares de procesos, considerándola fundamental en la comprensión de las ideas matemáticas al expresar que:

La comunicación matemática es un camino para compartir y clarificar ideas matemáticas [...] Cuando se motiva a los estudiantes a comunicar con otros estudiantes sus resultados y razonamientos, sea en forma oral o escrita, ellos aprenden a ser más claros, convincentes y precisos en el uso del lenguaje matemático. A su vez, escuchando las explicaciones de otros, los estudiantes podrán desarrollar sus propias comprensiones. (pp. 5)

2.3.2. Elementos esenciales del aprendizaje cooperativo

Algunos educadores que fueron encuestados en el proyecto encabezado por Hagelgans *et al.* (1995) acerca de la implementación de grupos de aprendizaje cooperativo reportaron que el aprendizaje se había desarrollado pobremente o que incluso no notaban diferencias respecto a la forma tradicional de enseñanza. Sin embargo, el trabajo en equipos no

garantiza que el aprendizaje se lleve a cabo, ya que, si la interacción entre los integrantes es poca o nula esto equivale a trabajar de manera tradicional.

De la gran variedad de formas de instrucción que surgieron al trabajar en grupos pequeños, Hagelgans *et al.* (ibíd.), destacan aquellos aspectos que produjeron mejores resultados a largo plazo en el aprendizaje de sus alumnos y que, además, son los que caracterizan al “Aprendizaje Cooperativo.” A saber son:

1. *Cantidad significativa de trabajo en equipo.* El curso debe estructurarse de manera que los alumnos se involucren en una interacción frecuente con los miembros de su grupo; por tanto, las actividades estarán orientadas a generar una necesidad en los estudiantes de comunicarse de manera regular, esto con el fin de que reflexionen acerca de conceptos matemáticos y discutan sobre los diferentes acercamientos para resolver los problemas. La frecuencia de la interacción deberá ocurrir de tal modo que se llegue a un punto en que los alumnos sean capaces de reconocer no solo pequeños errores de cálculo sino también errores fundamentales en el razonamiento matemático.
2. *Espíritu de equipo entre los miembros del grupo.* Deberá propiciarse un ambiente en la clase tal que favorezca el desarrollo de un espíritu de cooperación entre los miembros de cada grupo. Los individuos deberán sentirse parte del equipo e identificados con él. En este punto es importante la formación de grupos en los que los integrantes sean o puedan llegar a ser socialmente compatibles.
3. *Responsabilidad mutua entre los miembros del grupo.* Una manera de fomentar el que los estudiantes sean responsables unos de otros es asignar tareas de manera que todo el equipo se vea beneficiado cuando todos trabajan bien, pero si alguno de los integrantes se desempeña de manera ineficiente esto afecta al grupo completo.
4. *Los grupos deben ser estables.* Aprender a trabajar juntos es un proceso que lleva tiempo, por tal motivo resulta necesario que el grupo sea permanente durante todo el curso. Incluso estudiantes que ya han trabajado en grupos necesitan adaptarse a la dinámica especial del equipo al que pertenecen.

5. *Evaluación del trabajo en grupo.* En el proceso de evaluación de los alumnos al menos una parte de la calificación debe incluir el trabajo en grupo. Con esto se fomenta que los integrantes lleguen a responsabilizarse por el proceso de aprendizaje de los miembros de su equipo. Cuando los estudiantes intentan explicar conceptos a otros de su grupo, tienden a aclarar y a refinar ellos mismos sus propias ideas.

2.3.3. La formación de los grupos

El tamaño y las características particulares sociales y académicas de los estudiantes de la clase, son dos aspectos relevantes en la formación de los grupos cooperativos. Hagelgans *et al.* (ibíd.) Aconsejan formar equipos de tres o cuatro estudiantes puesto que grupos más numerosos suelen ser menos productivos.

Se recomienda organizar grupos de cuatro alumnos cuando se trabaja a menudo en actividades con computadora, ya que los grupos suelen subdividirse en parejas (lo cual resulta más cómodo en la manipulación de los artefactos tecnológicos) y posteriormente volver a reunirse para informar y comentar con todo el grupo sus avances. Si un integrante llega a ausentarse el equipo no se ve tan afectado como sucedería en un equipo de tres. Sin embargo, también es frecuente con estudiantes quienes tienen poca experiencia o no han trabajado con esta forma de instrucción que, al subdividirse en subgrupos, no informen de nuevo al equipo completo sobre lo que están haciendo. En este caso un equipo de tres supone una ventaja frente a un equipo de cuatro.

En general, en grupos de tres o cuatro hay una suficiente variedad de ideas para sostener una discusión. Con mayor cantidad de alumnos resulta mucho más difícil que estos se organicen, que se coordinen y más aún que lleguen a acuerdos. (Hagelgans, *et al.* ibíd.)

En los grupos reducidos los alumnos necesitan menos tiempo para organizarse, trabajan más rápido y se aumenta la visibilidad tanto de los esfuerzos de los alumnos como de las dificultades que pueden tener para trabajar juntos. Por otro lado, en los grupos numerosos es común la poca cohesión grupal y el escaso apoyo personal. Para que un grupo numeroso

tenga éxito se requiere que sus integrantes sean hábiles para adquirir, procesar información y atender a los diversos puntos de vista. (Johnson & Johnson, 1999).

Hagelgans *et al.* (1995) recomiendan integrar grupos heterogéneos en los cuales se distribuya el talento, la experiencia, las habilidades sociales y de comunicación de ideas matemáticas, ya que en este tipo de grupos las discusiones acerca de los problemas son más ricas y productivas pues se ponen en juego distintas experiencias y puntos de vista.

Sin embargo, puede llegar a ser recomendable que cuando los alumnos muestren una actitud positiva hacia la clase sean ellos mismos quienes elijan a sus compañeros de equipo, puesto que los grupos que son socialmente compatibles suelen funcionar bastante bien, en cambio, aquellos que no lo son trabajan más como individuos que como un grupo.

2.3.4. Efectos positivos del aprendizaje cooperativo

Los reportes de los educadores que han usado grupos de aprendizaje cooperativo revelan que sus estudiantes muestran una actitud más positiva hacia las matemáticas y a ellos mismos, y que además, parecen tener una mayor comprensión y retención de conceptos matemáticos importantes.

En particular Wimbish (1992, citado en Hagelgans *et al.* 1995) observó que, estudiantes que en un principio dudaban de sus habilidades, al final del curso pensaron que eran tan capaces como sus compañeros de equipo. Los estudiantes mostraron una gran disposición por ayudar a sus compañeros y a sí mismos, pero además, lograron ser más susceptibles de poner a prueba sus ideas y a explorar distintas formas de resolver los problemas. Sin embargo, Wimbish también notó que hay actitudes entre los alumnos que son difíciles de erradicar. Por ejemplo, la tendencia a vincular la comprensión con la memorización. Los estudiantes, por otra parte, expresaron que el explicar un concepto a un miembro del equipo, pudieron mejorar su propia comprensión de ese concepto.

En otro estudio llevado a cabo por Schwingendorf y Wimbish (1994, citado en Hagelgans *et al.* 1995) en un curso de cálculo de dos semestres, se reportó que los estudiantes se mostraban más dispuestos a resolver problemas al trabajar de manera colaborativa, lo cual los hizo menos dependientes del docente como su fuente de conocimiento. Otra actitud

destacable fue la presencia de mayor iniciativa para intentar soluciones en problemas difíciles.

Al resolver problemas en grupos pequeños se producen discusiones acerca de los diferentes caminos para resolver los problemas. Estas discusiones permiten valorar los alcances y limitaciones de cada solución, lo cual es fundamental en el desarrollo de ideas matemáticas. Cuando los estudiantes trabajan individualmente suelen llevar a cabo la primera idea que se les ocurre; en cambio en el trabajo en grupo, los alumnos intentan convencerse unos a otros de que su estrategia es la mejor. (Schoenfeld. 1985).

2.3.5. Dificultades inherentes y cómo tratarlas

Hagelgans *et al.*, (1995) advierten que el aprendizaje cooperativo puede llegar a ser una herramienta muy poderosa; sin embargo, el simple hecho de reunir a los estudiantes en equipo no garantiza una mejora en su aprendizaje. El trabajo con grupos de aprendizaje dará resultado a menos que se manejen de manera audaz ciertas dificultades, sobre todo las de tipo social, las cuales sin duda alguna no se pueden separar del aspecto educativo.

Vidacovic (1992, citado en Hagelgans *et al.* ibíd.) señala que cuando los alumnos trabajan en grupo se enfrentan con dos tipos de dificultades: resolver correctamente los problemas matemáticos y trabajar en equipo de manera productiva.

Generalmente el principal obstáculo a vencer al resolver un problema matemático es saber cómo iniciar su análisis. En este aspecto Hagelgans *et al.* (1995) Sugieren que el profesor guíe a sus alumnos en el trazo un camino para llegar a la solución usando una técnica que denominan “conversación estructurada”, la cual es una combinación del método socrático con el método de los cuatro pasos de Polya (comprensión del problema, trazo de un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva) descrito en la sección 2.2. El instructor puede además presentar un resumen de las ideas que vayan surgiendo en la discusión y luego dejar que los estudiantes continúen resolviendo el problema.

Respecto a los problemas derivados al trabajar en grupo Hagelgans *et al.* (ibíd.), reportan como los más frecuentes los siguientes:

División del equipo. Los alumnos trabajan ya sea de manera individual o en subgrupos en cada problema; o bien, se reparten el trabajo. Lo ideal sería que la totalidad del grupo resolviera cada parte de las tareas asignadas, ya que esta es la manera en que los estudiantes obtendrán la experiencia más enriquecedora de aprendizaje; sin embargo, es también la que requiere de más tiempo. Una combinación entre trabajo individual, en subgrupos y con todo el equipo parece dar buenos resultados en términos de eficiencia y aprendizaje. Mientras los grupos destinen una parte del tiempo para revisar, analizar y discutir el trabajo con el grupo completo se mantiene el nivel de trabajo en equipo. La dificultad se hace presente cuando los miembros del grupo operan solamente de manera individual o en subgrupos que no reportan ni discuten sus resultados con el equipo completo. Se frustran de este modo los efectos del trabajo cooperativo; principalmente se elimina la oportunidad que tienen los individuos para corregir sus errores. Deberá insistirse a los alumnos en que todo sea explicado y justificado y que las soluciones son aceptadas hasta que todos los integrantes las entiendan.

Alumnos muy dominantes o muy pasivos. Es muy común observar grupos en los cuales uno de los alumnos se encuentre dominando la discusión o que por el contrario haya alumnos que casi no hablen. No se trata de lograr que todos los integrantes dispongan de la misma cantidad de tiempo para hablar, sino de que todos contribuyan con ideas en algún momento. Aquí es importante considerar que en ocasiones es conveniente sacrificar la heterogeneidad del grupo, ya que, cuando el nivel académico entre el estudiante más sobresaliente y el menos sobresaliente es muy grande alguno de los dos suele perder la paciencia y/o desanimarse.

Reconocimiento de trabajo no realizado. A veces un grupo tiene un integrante (o más) que no trabaja para el equipo y a pesar de ello sus compañeros permiten él (o ellos) obtenga crédito por el trabajo que no realizó. La práctica de asentar dos calificaciones; una por trabajo en grupo y otra por trabajo individual suele aminorar esta situación. Sin embargo, vale la pena crear conciencia para reconocer que el grupo se beneficia cuando todos trabajan bien y que sufre las consecuencias cuando alguno de los integrantes no cumple con sus deberes.

En general, se recomienda prevenir las dificultades antes de que se presenten. Una manera de hacerlo es “vender” a los estudiantes la idea de que el aprendizaje cooperativo realmente funciona. Se trata de convencer a los alumnos de que se puede lograr más trabajando en grupo que de manera individual. Esto es, fomentar un espíritu de equipo. Para ello es fundamental que el instructor se muestre entusiasta y con una gran confianza en los efectos de la cooperación. Conviene además explicar las razones para usar esta forma de instrucción e indicar algunas de sus bases teóricas.

Es inevitable sin embargo que los problemas se presenten. En este caso se aconseja al instructor reunirse constantemente con cada grupo para observar y hablar sobre qué es lo que está pasando. Al hablar abiertamente sobre las dificultades particulares de cada equipo el instructor puede llegar a influir para lograr un cambio positivo en las actitudes de los estudiantes.

Johnson & Johnson (1999) advierten que no basta con reunir a un grupo de estudiantes, pedirles que trabajen en equipo y esperar a que éstos lo hagan. El papel del docente consiste en ayudarlos para que aprendan a interactuar con mayor habilidad. Para ello es necesario observar la interacción entre los integrantes de cada grupo y escuchar cuidadosamente la manera en que los alumnos explican a los demás lo que están aprendiendo, de ésta manera el docente puede ver qué entienden y qué no comprenden sus alumnos y en consecuencia podrá intervenir cuando sea necesario para mejorar la actividad o el trabajo en equipo.

2.4. Esquemas de análisis en la resolución de problemas.

El análisis de cómo los estudiantes resuelven problemas matemáticos proporciona información necesaria para entender el proceso de las diversas fases de resolución, explicar las dificultades a las que se enfrentan y proponer formas de instrucción que reduzcan el impacto que tienen esas dificultades. Para ello es esencial recurrir a modelos que permitan identificar categorías o dimensiones que expliquen su comportamiento cuando se enfrentan a esta tarea. Santos (2007).

Al igual que Polya, diversos investigadores y educadores han tenido interés en determinar las etapas en la resolución de problemas (no necesariamente matemáticos) y establecer preguntas clave que faciliten su solución. Dewey (citado en Puig, 1988), identificó las

siguientes fases: a) identificación de la solución problemática, b) definición precisa del problema, c) análisis de los medios y fines, d) ejecución del plan, e) asunción de las consecuencias y e) evaluación de la solución. Mason, Burton y Stacey (1992) plantean un modelo de instrucción en el que se identifica una fase de *abordaje* en la cual se discute: “lo que sé”, “lo que quiero” y “lo que puedo usar”; fase de *ataque* destinada a conjeturar, justificar y lidiar con las dificultades y fase de *revisión* en la que se sugiere comprobar, reflexionar y entender las ideas de todo el proceso realizado. Otra propuesta es la expuesta por Bransford y Stein (1986) conocida como IDEAL, la cual consta de las siguientes etapas: I) Identificación de los problemas, D) Definición y representación del problema, E) Exploración de posibles estrategias, A) Actuación fundada en una estrategia y L) Logros. Observación de los efectos.

Quizá lo que ha motivado a una gran cantidad de educadores a llevar a la práctica el método de Polya, es que éste incluye de manera explícita una larga lista de preguntas que supuestamente modelan el proceso de pensamiento de un experto solucionador de problemas. Dichas preguntas están asociadas al uso de métodos heurísticos.

Según Polya (1945), las heurísticas constituyen operaciones mentales útiles en la solución de un problema independientemente del tema de estudio, tales como: construir figuras, tomar casos particulares, considerar submetas, admitir que lo que se pide ya está hecho, hacer uso de la analogía, por citar algunos ejemplos. Sin embargo, existen evidencias de que el simple conocimiento de las heurísticas no mejora de manera significativa el aprendizaje de los estudiantes.

Schoenfeld (1985), llegó a la conclusión de que no basta con discutir estrategias generales, es necesario además considerar otras categorías o dimensiones. Inspirado por el trabajo de Polya, se lanza a la observación detallada de sujetos en el proceso de resolución de problemas, distinguiendo conductas que clasificó en las siguientes etapas: análisis, exploración, y verificación de la solución. Sin embargo, (Schoenfeld, citado en Puig) aclara que no existen fases perfectas. Señala además que los expertos por lo general no siguen un recorrido secuencial de las fases del método de Polya, sino que tienden a saltar rápidamente de una fase a otra.

Existe una gran variedad de factores a evaluar que inciden en la resolución de problemas; sin embargo, el marco de análisis considerado por Schoenfeld (1985) presenta para los fines de esta investigación los aspectos más relevantes, que a saber son:

- a) El dominio del conocimiento o los recursos.
- b) Las estrategias cognitivas o heurísticas.
- c) El control o metacognición.
- d) Los sistemas de creencias.

2.4.1. Recursos

Constituyen el conjunto de conocimientos matemáticos que el individuo posee, tales como: conceptos, definiciones, hechos, algoritmos, los procedimientos formales y rutinarios, conocimiento intuitivo acerca del dominio y en sí toda aquella información que se utiliza al resolver un problema pero, que no necesariamente es correcta. Es decir, los falsos recuerdos y los aprendizajes erróneos también forman parte de los recursos. El saber qué herramientas matemáticas tiene el alumno a su alcance nos ayudará a entender por qué realiza o descarta un intento particular de solución.

2.4.2. Las estrategias heurísticas

Comprenden un conjunto de estrategias generales que ayudan a desarrollar intuiciones para entender o avanzar hacia la solución de un problema. En general, se reconoce que aquellos individuos que dominan este tipo de estrategias muestran un buen desempeño al atacar problemas no rutinarios. No obstante, se ha aceptado también que el simple reconocimiento de las heurísticas no es suficiente para la competencia matemática. Al respecto Schoenfeld (1985) argumenta que:

- Si bien las estrategias heurísticas pueden servir como guía para explorar algunos caminos de solución estas no reemplazan el conocimiento en la materia.
- Es necesario contar con medios eficientes (control) para saber qué estrategia o estrategias elegir en un problema particular o para cambiar el rumbo cuando se han tomado decisiones incorrectas.
- Las estrategias heurísticas proporcionan pocas pistas acerca de cómo deben implementarse puesto que suelen proporcionar ideas muy generales. Es decir,

cuando se describe una heurística tal como “considere casos particulares”, realmente se está etiquetando a un conjunto de sub-estrategias estrechamente relacionadas cuya aplicación puede llegar a ser muy específica dependiendo de la estructura particular del problema.

Enseguida se describen dos estrategias heurísticas que son necesarias para tener éxito en las tareas que resolverán los alumnos participantes en esta investigación. Para cada una de ellas, se ejemplifican mediante problemas propuestos por Shoenfeld (ibíd.), diferentes aplicaciones o subestrategias de cada heurística general, que ayudarán a dar con la solución de cada problema.

Examinar casos particulares. Tal como lo describe Polya (1945, pp. 138) “consiste en pasar de la consideración de un conjunto de objetos dado a la consideración de un conjunto más pequeño o incluso de un solo objeto”. Esta estrategia nos puede sugerir la solución al problema y en algunas ocasiones el método aplicado a los casos particulares constituye una guía para proponer un método general o demostrar conjeturas relativas al problema. Una subestrategia bastante útil consiste en tomar casos extremos o un tanto restringidos.

Problema 2.1. Determine una fórmula para la serie:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}$$

Puede obtenerse una solución elegante observando que $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$; no obstante, un camino quizás más natural consiste en calcular las primeras sumas parciales, cuyos resultados (1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, ...) sugieren un patrón fácil de observar y de probar por inducción. Nótese el carácter secuencial de la subestrategia.

Problema 2.2. ¿Qué relación existe entre las raíces de los polinomios $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ y $Q(x) = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \dots + a_1x^{n-1} + a_0x^n$?

Al proceder como en el problema anterior; es decir, observando qué sucede para polinomios de grado 1, 2, 3..., nos enfrentamos con la dificultad (desde el caso $n=2$) de que no es fácil proponer una relación para las raíces si estas se calculan de manera general.

Conviene entonces tomar varios ejemplos concretos de polinomios cuya factorización resulte fácil, tales como:

$$P(x) = x^2 + 7x + 12 \text{ y } Q(x) = 12x^2 + 7x + 1, \quad P_1(x) = x^4 - 13x^2 + 36 \text{ y } Q_1(x) = 36x^4 - 13x^2 + 1, \text{ etc.}$$

Problema 2.3. De todos los triángulos con perímetro fijo ¿cuál es el de mayor área?

Proponer ejemplos muy específicos de triángulos cuya área sea fácil de calcular ([3,4 y 5], [4,4 y 4], [5,5 y 2] y similares) puede ser de ayuda para conjeturar que el triángulo debe ser equilátero. Esta manera de proceder no sugiere un camino para demostrar que dicha afirmación es cierta. En este caso la clave se encuentra en fijar uno de los lados del triángulo y preguntarse dónde se puede encontrar el tercer vértice.

Establecer submetas. Se trata de atacar el problema descomponiéndolo en problemas más sencillos que en conjunto contribuyen a la solución del problema original. Esta estrategia pertenece a la categoría más amplia “considere problemas auxiliares”, en la cual se sugiere realizar pequeñas modificaciones al problema para que las condiciones sean más flexibles.

Problema 2.4. ¿Cuántos ceros aparecen al final de $100!$?

Puesto que solo queremos conocer los ceros que aparecen al final y no el producto total la meta general será establecer una condición para que un número tenga ceros al final. Una vez que se logra establecer que los ceros se consiguen contando los múltiplos de 10, entonces resulta natural establecer como submetas el contar a los múltiplos de 2 y de 5. Sin embargo, como hay más múltiplos de 2 que de 5 el problema se reduce a contar los múltiplos de 5 que hay del 1 al 100.

Problema 2.5. Los enteros positivos pueden acomodarse en grupos de la siguiente forma: (1), (2,3), (4,5, 6), (7, 8, 9,10), y así sucesivamente, con k enteros en cada grupo. Encontrar la suma de los enteros en el k -ésimo grupo.

De tener una manera efectiva para calcular la suma de los primeros k números naturales el problema se reduciría a encontrar el primero y último término del k -ésimo grupo. Al resolver cada uno de estos problemas individuales podremos determinar la suma de cada grupo.

Se observa pues que cada estrategia presenta distintas sutilezas en cuanto a su implementación. Schoenfeld (1985) llegó a la conclusión de que la descomposición de estrategias en subestrategias no es trivial para los estudiantes, por este motivo consideró que su instrucción debería centrarse en la resolución de una amplia variedad de problemas de manera que se ejercite cada estrategia general pero que se evidencie el uso de las estrategias particulares. Ya que las estrategias heurísticas contienen información insuficiente sobre cómo deben ser utilizadas no basta con que se presenten simplemente de manera informativa o retórica.

2.4.3. Control

Otra causa de éxito o fracaso en la resolución de problemas tiene que ver con la manera en que el individuo selecciona la información que posee y las decisiones que toma en cuanto a qué dirección seguir cuando resuelve un problema. En la literatura psicológica a este fenómeno se le conoce como metacognición.

Para Schoenfeld (1985), el control son las acciones y decisiones que afectan de manera global la evolución de la solución de problemas. Incluye elegir metas y submetas, trazar planes acerca de qué caminos tomar o bien cuáles no conviene seguir, decidir si se abandonan ciertas direcciones o se sigue adelante luego de evaluar y monitorear el proceso de solución a medida que se avanza.

Cuando se trabaja en problemas no rutinarios existe un extenso campo de recursos (que no necesariamente están directamente relacionados con los temas del curso) y de estrategias por explorar. La elección de estrategias inapropiadas así como omitir o abandonar estrategias útiles conduce desde luego al fracaso en la resolución de un problema. Así pues, no basta con que un estudiante tenga un vasto dominio de recursos y conozca las estrategias heurísticas, es importante además que desarrolle la habilidad para monitorear y evaluar periódicamente todo el proceso de solución.

2.4.4. Sistemas de creencias

La visión que los estudiantes tienen de las matemáticas influye notablemente en el rendimiento y las actitudes que toman al resolver problemas, como pueden ser la búsqueda de métodos creados por ellos mismos o el empeño por recordar aquellos que alguien más

les ha enseñado, el tiempo que le dedican antes de darse por vencidos y el empleo de procedimientos formales para descubrir procesos.

Estudios relacionados con las creencias de los estudiantes acerca de las matemáticas han revelado que gran parte del alumnado que muestra dificultad para resolver problemas tienen conceptos erróneos de la disciplina.

Lampert (citado por Schoenfeld, 1992) señala que los estudiantes desarrollan sus creencias hacia las matemáticas de acuerdo a las experiencias vividas en el aula.

Comúnmente, la matemática es asociada con la certeza; saber matemática es ser hábil para obtener respuestas correctas rápidamente. Estos supuestos culturales, son modelados por la experiencia escolar, en la cual hacer matemática significa seguir las reglas propuestas por el profesor; saber matemática significa recordar y aplicar la regla correcta cuando el profesor lo requiera; y la verdad matemática queda determinada cuando la respuesta es ratificada por el docente. Las creencias sobre cómo hacer matemática y sobre lo que significa saber matemática en la escuela son adquiridas a través de años de ver, escuchar y practicar. (pp. 26)

Es decir, si la práctica docente consiste en la ejercitación de ciertos métodos y procedimientos hasta el dominio, entonces el alumno comenzará a concebir que “saber matemáticas consiste en conocer un conjunto de fórmulas y reglas” aunque el profesor se canse de decirles que “es una disciplina creativa para desarrollar el pensamiento”.

Schoenfeld (1985) documenta la siguiente serie de creencias de los estudiantes respecto a las matemáticas.

- Existe una única manera correcta para resolver cualquier problema matemático, usualmente es la regla más reciente que el profesor dio en la clase.
- La creación y descubrimiento de ideas matemáticas es llevada a cabo solamente por genios. A los estudiantes comunes solo les queda memorizarla y aplicarla cuando la hayan aprendido mecánicamente. Si ellos llegan a olvidar algo están en verdaderos problemas ya que solo los genios son capaces de deducirlo ellos mismos.
- La matemática es una actividad solitaria realizada por individuos en aislamiento.

- Los estudiantes que han entendido las matemáticas que han estudiado podrán resolver cualquier problema que se les asigne en menos de diez minutos.
- Las matemáticas aprendidas en la escuela tienen poco o nada que ver con el mundo real.
- Las pruebas formales son irrelevantes en el proceso de descubrimiento o invención.

Así pues, un enfoque de instrucción basado en la resolución de problemas y apoyado con una metodología de aprendizaje cooperativo tiene como una de sus metas favorecer el desarrollo de actitudes y creencias cercanas y congruentes con el quehacer de la matemática.

2.5. Tareas y metodología de instrucción con enfoque en resolución de problemas y aprendizaje cooperativo.

Las tareas matemáticas, es decir, el conjunto de proyectos, problemas, preguntas, ejercicios y en sí toda actividad escolar planeada por el profesor en la cual los alumnos se involucran con el objetivo de desarrollar su aprendizaje, transmiten ideas acerca de lo que es la matemática y lo que implica hacer matemáticas. Una de las labores más importantes del profesor es seleccionar y diseñar tareas que sean relevantes. Estas tareas deben promover el desarrollo de conceptos y procedimientos que preparen a los estudiantes para un estudio posterior de conceptos más complejos, contribuyan a establecer una conexión entre distintas áreas de las matemáticas y les ayuden a adquirir habilidades de predicción, modelización de fenómenos y resolución de problemas que vayan más allá del ámbito escolar. NCTM (1991-2000)

Como características de las buenas tareas el NCTM (1991) señala que estas deben ser:

Interesantes de tal manera que logren despertar en los alumnos su curiosidad, el deseo de resolverlas y hacer conjeturas. En ocasiones esto implica elegir contextos de aplicación familiares, tales como temas relacionados con las finanzas de la escuela. Sin embargo, las tareas no deberían limitarse solamente a situaciones cotidianas, puesto que las tareas teóricas o fantasiosas pueden ser también atractivas para los alumnos.

Flexibles, es decir, que puedan ser atacadas de distintas maneras, lo cual hace que estén al alcance de estudiantes cuyo conocimiento previo y experiencia es variada. El diseño de la tarea puede estar sujeto a modificaciones dependiendo de las necesidades y del trabajo que muestran los alumnos.

Abiertas, en el sentido de que pueden tener más de alguna respuesta válida, ya que de esta manera se demanda un proceso de reflexión acerca de las ventajas y desventajas de cada alternativa de solución.

Se hace hincapié en que en el diseño y selección de tareas deben valorarse dos aspectos fundamentales: 1) el potencial que estas tienen para hacer conexiones con el conocimiento previo de los estudiantes y con los conceptos que habrán de estudiarse en el futuro y 2) en qué medida se desarrollan habilidades específicas de determinados contenidos matemáticos.

Las tareas escolares utilizadas en la evaluación deberían ser capaces de proporcionar información útil: a los estudiantes, para orientar y mejorar su aprendizaje; y a los profesores, para tomar decisiones acerca de su instrucción. Considerando que el aprendizaje de los alumnos se lleva a cabo mediante la conexión de las nuevas ideas con los conocimientos previos es fundamental que el docente sepa hacer preguntas y plantear actividades de manera que los estudiantes exhiban sus comprensiones. Al respecto se han desarrollado una serie de trabajos con dicho propósito.

Lesh, *et al.* (2000) han establecido una serie de principios para el diseño de las llamadas “actividades reveladoras del pensamiento”. Este tipo de actividades constituyen prácticas de modelación matemática y están encaminadas precisamente a que los estudiantes exterioricen sus procesos de pensamiento mediante el trabajo en grupo. Son problemas no rutinarios planteados en un contexto realista e interesante, para los cuales existen distintas estrategias por aplicar y en donde el uso de una estrategia específica deja ver el nivel de adquisición de conceptos y procedimientos estudiados. Uno de los aspectos más relevantes del trabajo de estos autores es el reconocimiento de que cuando los estudiantes trabajan con actividades que les son significativas, existe un proceso de evolución en sus ideas, explicaciones, descripciones y predicciones, las cuales se van puliendo a medida que se

revisan y se discuten dentro de una comunidad. Estos “ciclos de entendimiento” han sido documentados por Lesh *et al.* (ibíd.) Y Sepúlveda y Santos (2006), por citar algunos.

Otro de los proyectos que responde con el mismo nivel de satisfacción a las demandas del NCTM son los Paquetes de Evaluación Balanceada (*Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum* (1999, 2000), el cual estuvo encabezado por Schoenfeld y tuvo como propósito fundamental evaluar el nivel de desempeño de estudiantes de bachillerato de los Estados Unidos de Norteamérica.

Los paquetes de evaluación contienen en total 27 tareas, las cuales constan de un solo problema o una secuencia de problemas que giran en torno a un tema central. Cada tarea va acompañada de una guía que proporciona sugerencias de aplicación, una panorámica general que permite decidir a los profesores en qué punto del currículo es posible aplicarlas y un conjunto de respuestas típicas de los estudiantes. En particular se hace énfasis en:

La descripción de la tarea. Se trata de una explicación breve y concreta de la situación que los estudiantes deben investigar o resolver.

Los antecedentes matemáticos. Es decir, el tipo de experiencias previas necesarias o deseables para que los estudiantes logren entender y abordar el problema. De esta manera el profesor puede decidir rápidamente si la tarea resulta adecuada o no para sus alumnos.

Elementos centrales de ejecución. Son las ideas y procesos esenciales en la solución de la tarea. Con este componente queda claro qué conocimientos y habilidades se están desarrollando en los estudiantes. Parte del diseño de las hojas de trabajo dedica un lugar especial para que tanto profesores como alumnos visualicen fácilmente los objetivos específicos de cada tarea.

Circunstancias para la aplicación. Se considera el tiempo estimado de aplicación; el uso de materiales de apoyo; y la forma de trabajo, individual o en grupo.

El balance de los paquetes tiene que ver con que las tareas abarcan en conjunto a todos y cada uno de los estándares de contenidos y procesos descritos por el NCTM (2000). El contenido matemático comprende: números y cantidades; patrones, funciones y álgebra, geometría, forma y espacio; manejo de datos, estadística y probabilidad; así como

combinatoria, estructuras matemáticas y bases para el cálculo. Mientras que los procesos matemáticos se refieren a: las fases de la resolución de problemas, inferir y sacar conclusiones, la comunicación, conexión entre contenidos matemáticas y la representación (a través de tablas, diagramas y gráficas principalmente). Es decir, una evaluación que se enfoca en solo algunos de ellos y que ignora o trata de manera superficial a los otros no es balanceada.

A pesar de que las buenas tareas pueden ser usadas para introducir conceptos importantes y para atraer a los estudiantes hacia las matemáticas, estas no son la única solución para lograr una enseñanza efectiva, se requiere también que los docentes generen un ambiente intelectual en el aula.

Los profesores deben decidir cuáles aspectos de una tarea deben resaltarse, cómo organizar y orquestar el trabajo de los estudiantes, cuáles preguntas hacer para desafiar a los alumnos con distintos niveles de experiencias y cómo apoyar a aquellos que no han realizado los procesos de pensamiento necesarios para resolver la tarea pero sin eliminar el reto que contiene. (NCTM, 2000).

La investigación en educación matemática ha generado distintas metodologías de instrucción que conjugan la resolución de problemas con el trabajo en grupo. Una de ellas, propuesta por Sepúlveda y Santos (2006), cuyas bases se encuentran en la resolución de problemas y el trabajo de Hagelgans *et al.*, (1995) sugiere que a través del trabajo colectivo en grupos pequeños, con la clase completa y de manera individual se brinde la oportunidad a los estudiantes de pertenecer a una pequeña comunidad de investigación en la cual se tenga la libertad de argumentar y defender el sentido de sus conjeturas, explicar las ventajas del uso de cierto método o incluso la razón de por qué funciona.

Esta metodología se compone de las siguientes etapas:

Actividad previa: El profesor da al grupo una breve introducción a la tarea, con el propósito de ubicar a los estudiantes en contextos similares a la actividad; destacando la importancia que representa su participación en el desarrollo de la sesión.

Además de despertar el interés de los estudiantes por resolver la tarea, ésta etapa es una excelente oportunidad para fomentar un espíritu de cooperación y de responsabilidad que tiene cada estudiante con su equipo.

Trabajo en equipos: Se organiza en equipos de tres, en donde cada grupo haya estudiantes con distintos niveles de desempeño, de tal forma que tengan posibilidad de interactuar entre ellos y los demás equipos. Al concluir el periodo asignado al trabajo por equipos, cada uno entrega su reporte.

La integración de grupos pequeños se realiza con la finalidad de que sea más fácil visualizar el trabajo y grado de interacción de cada uno de los alumnos en el equipo. Otra ventaja es que resulta más sencillo para los alumnos ponerse de acuerdo para redactar su reporte final. En grupos en los cuales hay estudiantes que manejan los recursos y estrategias heurísticas en diferente nivel, es más probable que surjan discusiones que conduzcan a conflictos cognitivos que den lugar a la modificación de sus conocimientos iniciales.

Presentaciones: Cada equipo presenta a toda la clase su solución a la tarea, permitiendo que los miembros de los demás equipos pregunten libremente a quienes exponen.

En esta etapa se deja ver que un problema puede tener distintas soluciones o caminos para llegar a la solución que son correctos. Se promueve que los alumnos argumenten de la manera más clara posible sus decisiones y pasos para llegar a su resultado.

Discusión colectiva: El profesor promueve la discusión colectiva entre los estudiantes, con la idea de analizar los diferentes métodos de solución que cada grupo presenta y, cuando sea necesario realiza una sistematización de las ideas e identifica posibles extensiones al problema.

El objetivo es que los alumnos descubran errores, pero además, analizar los pros y los contras de cada método de solución, esto con el fin de que los alumnos caigan en cuenta de que ciertas estrategias y métodos son más eficientes que otros. Se ha observado en investigaciones previas que, en grupos muy entusiastas, la discusión colectiva da inicio antes de que el profesor la promueva.

Trabajo individual: A partir de la discusión colectiva, los estudiantes vuelven a la tarea y aplican los nuevos entendimientos que se generaron como producto de la interacción, abordando individualmente la tarea. (pp. 1394).

Esta fase es fundamental para decidir si hubo un cambio en la manera de pensar de los estudiantes, pues la aplicación de estrategias específicas dejará ver el nivel de adquisición de conceptos.

3. Metodología

Este trabajo en el cual se implementaron actividades contenidas en *Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum*, forma parte de un estudio continuado llevado a cabo en Michoacán, cuyos primeros resultados fueron comunicados por Sepúlveda y Santos (2004).

Las tareas contenidas en estos paquetes, al ser un tanto abiertas, pueden tener distintos acercamientos de solución y de esta manera desatar polémica al intentar resolverlas. Se trata de problemas no rutinarios y en un contexto ya sea real o ficticio que resulta ser atractivo para los estudiantes.

Las tareas seleccionadas fueron:

- Miles de palabras.
- Diseñando una casa de campaña
- La revista.
- Extraño pero verdadero.
- Carros de supermercado.
- Tachando cuadros.

De las cuales las tres primeras funcionaron como actividades piloto; es decir, su finalidad fue probar cómo se desenvolvían los equipos establecidos para, de ser necesario, realizar ajustes en la composición de sus integrantes.

Por motivos académicos, cuatro de los alumnos que formaban parte del grupo estudiado no pudieron asistir a la sexta sesión, por esta razón se decidió cancelar la actividad *Tachando cuadros*, ya que tres de los equipos quedarían incompletos. En sustitución se optó por reportar los resultados de la actividad *La revista*, en la cual se obtuvieron resultados interesantes.

3.1. Enfoque.

El presente estudio es de corte cualitativo, es decir, las conclusiones del trabajo fueron obtenidas a partir de una interpretación de las formas de pensar de los alumnos. Para ello se observaron las actuaciones de los alumnos expresadas a través del lenguaje escrito, verbal y no verbal.

Se parte de un paradigma de investigación conocido como *investigación de diseño* o *investigación basada en diseño*. Este tipo de estudios lo que se proponen es evaluar la implementación de herramientas educativas, ya sea currículo, tareas, métodos de instrucción o un *software* para la enseñanza de un contenido específico. Sus características principales son las siguientes:

- Se caracterizan por un refinamiento progresivo. Esto se logra haciendo el siguiente ciclo: diseño, puesta en práctica, análisis y rediseño.
- La persona que actúa como docente siempre está involucrada en el proceso de investigación, por lo que el profesor en la mayoría de los casos es el investigador mismo.
- Los comportamientos de los alumnos en respuesta a las actividades son los que van conduciendo el desarrollo del estudio. Es decir, el investigador está dispuesto a modificar el modelo ante observaciones inesperadas.
- Al ser en su mayoría estudios con un enfoque cualitativo, son generadores de hipótesis y contribuyen a la formulación de modelos más que a la validación de estos.
- No pretenden obtener leyes universales e inmutables sino crear modelos de formas probables de andamiaje que conducen a resultados exitosos en el aprendizaje. Lo que buscan es proveer de información de utilidad a los docentes para que puedan adaptar, comprobar y modificar las secuencias de enseñanza en el aula. (Molina, 2011).

3.2. Sujetos participantes

La aplicación de las tareas se llevó a cabo en la escuela pública de la ciudad de Morelia CBTIS 149, con un grupo de 12 estudiantes de tercer año de bachillerato quienes, en los primeros semestres del plan de estudios cursaron álgebra, geometría y trigonometría, geometría analítica, cálculo diferencial e integral y en el momento de la aplicación de las tareas estudiaban probabilidad y estadística.

Estos alumnos asistían regularmente los sábados al plantel educativo a un grupo heterogéneo, numeroso y bien organizado, llamado “Club de Matemáticas”, formado por alumnos de distintos semestres y áreas de estudio. El propósito de este grupo es resolver dudas de tareas y temas vistos en clases, regularizar a aquellos alumnos que lo necesiten, prepararse para exámenes o incluso trabajar en problemas de olimpiada. Es decir, en el club están reunidos alumnos con dificultades académicas, regulares, y destacados. Asisten alumnos van de manera voluntaria y otros un tanto obligada si consideramos que lo hacen debido a cierta recompensa que verán reflejada en sus calificaciones. Los participantes del club son supervisados por profesores de la institución. De esta manera podemos decir que las condiciones se asemejan a las de los grupos tradicionales de bachillerato.

Gracias a las facilidades dadas por la institución para llevar a cabo esta investigación, y al estar integrado el club por alumnos con distintos niveles de desempeño e intereses, se decidió elegir la muestra de estudio en este grupo con la participación del profesor Ángel Hernández, coordinador académico del club y profesor titular de distintos cursos de matemáticas en el plantel, quien conocía el nivel de desempeño escolar de los alumnos (con base en calificaciones), un requisito para la formación de equipos balanceados.

Para la formación de los equipos se seleccionaron alumnos con buena, regular y regular a débil habilidad matemática. También se tomó en cuenta que la mayoría de los estudiantes se conocieran entre ellos, ya que trabajar con compañeros extraños podría afectar la comunicación, de manera que el área de estudio a la que pertenecían fue otro aspecto a considerar.

Los alumnos fueron organizados en grupos de tres estudiantes. Los grupos se identificaron con las letras A, B, C y D. Los integrantes de cada uno de los equipos fueron:

Equipo A: Daniel, Martín y Everardo. Equipo B: Uriel, Antonio y Juan.

Equipo C: Mindy, Gilberto y Sinuhé. Equipo D: Vanessa, Karina y José.

3.3. Fases de la investigación.

Se tuvo interés en interpretar el comportamiento de alumnos de bachillerato así como analizar la evolución en los procesos de pensamiento matemático cuando se involucran en la resolución de un conjunto de tareas en un ambiente de resolución de problemas y aprendizaje cooperativo. El proceso de implementación de las tareas consta de las siguientes fases:

3.3.1. Revisión de las tareas

A pesar de que los Paquetes de Evaluación Balanceada contienen ejemplos de solución, las tareas seleccionadas fueron analizadas y resueltas previamente por la titular de la tesis con la finalidad de predecir nuevas soluciones a las que los estudiantes podrían llegar, las interpretaciones que los alumnos pudieran dar a los enunciados una vez traducidos y hacer un listado de preguntas para motivar la discusión en la clase. Aquellas actividades que lo ameritaron fueron adaptadas a un contexto que resultara familiar para los estudiantes; por ejemplo, se usaron unidades de medida utilizadas en nuestro país.

3.3.2. Planeación de las sesiones

En esta fase se establecieron los aspectos necesarios para el buen funcionamiento de la aplicación de las tareas, tales como: a) el acomodo del mobiliario en el salón de clases (de manera que se garantizara el libre tránsito para la observación de lo que ocurría en cada uno de los equipos) y de los instrumentos de recopilación de la información (grabadoras de voz y videograbadora), b) una aproximación de los tiempos necesarios para cada etapa de aplicación y c) la preparación del material indispensable (hojas de trabajo, hojas blancas, marcadores para pizarrón, borrador, bolígrafos, calculadoras y reglas).

3.3.3. Aplicación

Ésta se llevó a cabo de acuerdo a la forma de instrucción propuesta por Sepúlveda y Santos (2006), a la cual nos referimos en la revisión de la literatura.

1) *Actividad previa:* El propósito de ésta etapa es ubicar a los estudiantes en contextos similares a la tarea y motivarlos para que deseen resolverla. Como ejemplo de actividad previa en la tarea “*Extraño pero verdadero*” (la cual involucra el descubrimiento de un patrón para conocer la cantidad de números que se encuentran en un rango determinado) la titular de la tesis sugirió a los alumnos que pensarán en una manera para calcular cuántos días estaría presente la expo feria en Morelia pero sin tener que contarlos de uno por uno.

En cada sesión se les explicó y recordó a los alumnos la dinámica de trabajo. En particular se hizo énfasis en las indicaciones para la elaboración del reporte: a) escribir un solo reporte por equipo, b) reportar todos los intentos de solución c) no borrar, encerrar en un círculo y tachar lo que está mal, d) de preferencia escribir con bolígrafo (para lograr una mejor calidad de imagen y que los alumnos evitaran borrar).

2) *Trabajo en equipos:* Los equipos estuvieron formados por tres estudiantes, procurando el equilibrio académico y buena interacción social entre sus integrantes; es decir, se trató de evitar que se formaran grupos compuestos únicamente por los alumnos más sobresalientes, con bajo nivel académico o en los cuales todos los integrantes tuvieran deficientes habilidades de comunicación. Se tomó en cuenta además las opiniones de los estudiantes para la formación de los grupos. A pesar del esfuerzo por integrar equipos en los que todos los alumnos se conocieran esto no pudo lograrse. El equipo C fue la excepción. Gilberto y Sinuhé sí se conocían pero Mindy a ellos no.

Se tuvo estipulado un tiempo límite para el trabajo en equipo de acuerdo a las características de cada tarea; sin embargo, cuando se observó que las discusiones estaban muy animadas o cuando hubo pocos avances se consideró extender la duración en esta forma de trabajo aun cuando ello implicara reducir el tiempo destinado para las siguientes etapas.

Los alumnos no entregaron el reporte al finalizar el trabajo en equipos, ya que expresaron su necesidad de apoyarse en él cuando presentaran su solución frente al grupo

3) *Presentaciones:* A petición de la titular de la tesis fueron pasando los equipos frente al grupo completo para mostrar la solución a la tarea o los avances que habían logrado, permitiendo y promoviendo que se hicieran preguntas y observaciones a los expositores. En

los casos en que hubo respuestas similares solamente se hizo énfasis en las diferencias cuando las hubo. Se trató en la medida de lo posible que primero hicieran sus presentaciones aquellos equipos con menor avance o cuyas soluciones fueran cuestionables, esto con la finalidad de motivar la discusión.

Fue necesario recordar a los estudiantes que el motivo de que pasaran al frente representaba una oportunidad de aprendizaje y de ninguna manera se trataba de ponerlos en evidencia ante sus compañeros.

4) *Discusión colectiva*: En esta fase destacó el papel de la profesora, la titular de la tesis, quien motivó a los estudiantes a que realizaran preguntas a sus compañeros y procedió a realizar con el grupo completo el análisis de las ventajas y desventajas de los métodos de solución. La observación atenta de las estrategias que realizaban los estudiantes mientras trabajaban en equipo fue esencial para poder plantear preguntas acerca de la validez de las afirmaciones que se presentaron ante la clase.

Fue permitido que los alumnos se quedaran con sus hojas de trabajo hasta esta fase con el fin de que contrastaran sus resultados con el de sus compañeros pero se les indicó que dejaran de trabajar en la tarea y mostraran atención a las soluciones de sus compañeros.

5) *Trabajo individual*: Enseguida se pidió a los alumnos que entregaran sus reportes para que procedieran a resolver la misma tarea de manera individual, pudiendo aplicar los nuevos conocimientos generados en la interacción del trabajo en los grupos pequeños y con la clase completa.

3.3.4. Entrevistas

Se realizaron entrevistas del tipo no estructurada a aquellos alumnos que: a) mostraron un comportamiento peculiar, ya fuera por alguna solución destacada o por la dificultad que mostraron para llegar a ella; y b) a quienes no expresaron con claridad alguna idea, o habían tenido duda de algún concepto. Por ejemplo, cuando se trabajó en la actividad *Extraño, pero verdadero* Martín comentó: “pero nos están dando números cerrados”. En el contexto del diálogo no quedaba claro qué quería decir con “números cerrados”. Luego de una breve entrevista se supo que se refería específicamente a las potencias de 10.

3.3.5. Análisis de los resultados

Las fuentes de información usadas se basan en los siguientes tipos de evidencias:

a) *Observaciones de la investigadora*: esta se realizó con base en las preguntas de investigación previamente establecidas.

b) *Grabación de audio y videograbaciones*: Sin duda resultan ser recursos valiosos ya que el propósito era registrar lo que hacían los alumnos durante la sesión. Se colocó una grabadora de voz en una butaca de cada equipo de manera que se captaran claramente las voces. Una cámara de video grabó a cada uno de los grupos de trabajo de manera rotativa pero enfocándose en aquellos cuyas discusiones parecían relevantes. También fueron captadas las presentaciones frente a la clase.

Tanto el video como la grabación de voz resultan ser fuentes de información complementarias. Así, cuando al analizar el audio parecía que los estudiantes se hallaban inactivos, la cámara de video mostraba que en los lapsos de silencio los alumnos revisaban sus procedimientos, escribían, volvían a leer el problema o susurraban. A consecuencia del ruido generado por el trabajo de todos los equipos en el video no se podían escuchar las voces con nitidez, en este caso la grabación de audio resultó esencial. El video permitió además relacionar a los alumnos con sus timbres de voz, pues en algunos casos resultaban parecidos.

Cada uno de estos medios de recopilación supone ciertas ventajas; el video permitió observar gestos y acciones aunque solo por momentos, mientras que la audio-grabación captó casi todos los diálogos de la sesión. Desafortunadamente, hubo algunos casos en que el movimiento de los alumnos provocó el desacomodo de algunas grabadoras de voz bloqueando la recepción del audio o distorsionando el sonido perdiéndose así datos valiosos. Es por ello que en algunas sesiones se cuenta con poca información de los diálogos durante el trabajo en equipo. En este caso las notas que la observadora tomaba durante las actividades describiendo de manera general sucesos importantes resultaron ser de gran ayuda.

c) *Reportes escritos tanto del trabajo en equipo como del individual:* En cada una de las sesiones se les pidió a los alumnos que, además de discutir ideas, reportaran por escrito los intentos de solución. Se hizo énfasis en que no debían borrar si decidían descartar o abandonar una propuesta de solución, en cambio debían encerrarla. No obstante esta fue una costumbre un tanto difícil de modificar, ya que a los alumnos no les gusta dejar rastro de sus errores. A pesar de que tenían bolígrafos disponibles, algunos alumnos prefirieron escribir con lápiz y en algunas ocasiones borraron.

d) *Entrevistas.* Concluida la sesión, el siguiente paso consistió en dar una revisión general a las grabaciones y los reportes escritos con el fin de identificar datos difíciles de interpretar por falta de contexto. La entrevista del tipo no estructurada fue indispensable para aclarar los procesos de solución que siguieron los alumnos sobre todo en aquellas actividades que contenían figuras o implicaban realizar una, ya que el lenguaje de los estudiantes suele ser práctico y en ocasiones un tanto impreciso. Expresiones como “lo que mide de aquí a acá” poco decían cuando no se tenía toma de video o no se había observado al equipo en el momento de las descripciones.

4. Presentación y análisis de resultados

En este capítulo se presenta y analiza el trabajo que llevaron a cabo los alumnos al interactuar en grupos de trabajo cooperativo, enfocándonos tal como se planteó en el problema de investigación en aquellos momentos que resultaron clave para la evolución en las formas de atacar los problemas.

4.1. Extraño pero verdadero

En la primera tarea se muestra a los alumnos un trozo de artículo que trata sobre una mujer que dedica una buena parte de su tiempo a escribir los números del uno a un millón. Ellos deberán extraer e interpretar la información relevante para responder las cuestiones planteadas.

Los estudiantes necesitan un mínimo de conocimientos previos tales como conocer el significado del término dígito, convertir unidades, estimar longitudes y cierta experiencia en el manejo de la calculadora.

El reto principal de la actividad involucra el descubrimiento de un patrón para conocer la cantidad dígitos se encuentran en un rango determinado de números naturales. El éxito en su solución tiene que ver con una organización conveniente de los datos.

El fragmento del artículo del problema es el siguiente:

Sofía tiene una extraña obsesión con los números. Por más de dos años se la ha pasado escribiendo todos los números del uno a un millón. Para llegar al número de un millón, completó 40 libretas de 96 páginas cada una y terminó en la siguiente. Ella escribió los números en 10 columnas en cada página, con 26 números por columna. Usó 98 bolígrafos. El total de dígitos en los números que escribió Sofía, es de 5 888 896.

Se pide a los estudiantes que respondan:

1. a) ¿Cuántos números y b) cuántos dígitos escribió Sofía en su primera libreta de ejercicios? Responder esta pregunta usando dos métodos distintos; describe claramente los dos métodos.
2. ¿Cómo se obtiene la cantidad de 5 888 896 dígitos?
3. Supongamos que Sofía toma alrededor de un segundo para escribir cada dígito y que trabajó regularmente cerca de dos años, ¿alrededor de cuánto tiempo pasó escribiendo números cada día?
4. Si los números que escribió Sofía los coloca uno seguido de otro, ¿qué tan larga será la línea de dígitos? Explica tu razonamiento e indica cualquier suposición que hagas.

4.1.1. Soluciones potenciales

1. A) La cantidad de números en la primera libreta se obtiene:
 - i) Multiplicando la cantidad de números en la primera página por el número total de páginas. $[26 \times 10] \times 96 = 24\,960$.
 - ii) Multiplicando la cantidad de columnas en cada libreta por el total de números en cada columna. $[10 \times 96] \times 26 = 24\,960$.
 - iii) Dividiendo el total de números escritos entre el número aproximado de libretas usadas. $1\,000\,000/40 = 25\,000$.
1. B) Es un problema en el cual *establecer sub metas* es la clave. Conviene clasificar los números escritos en la primera libreta en aquellos que tienen uno, dos, tres, cuatro y cinco dígitos. Elaborar una tabla como la que se muestra debajo del presente párrafo será de gran ayuda. Al momento de calcular la cantidad de números que hay en cada rango determinado por la clasificación anterior se espera que algunos alumnos supongan que simplemente deben restar el extremo menor del extremo mayor del rango. Cuando respondan la siguiente pregunta quizá se den cuenta de que su conjetura no es válida. De no ser así, el profesor puede guiarlos preguntando si dicha suposición se aplica a cualquier rango de números y enseguida proponer que observen qué sucede con ciertos casos particulares.

Número de dígitos	Rango	Cantidad de números en el rango	Cantidad de dígitos en el rango
1	1-9	$9-1+1=9$	9
2	10-99	$99-10+1=90$	180
3	100-999	$999-100+1=900$	2 700
4	1 000-9 999	$9 999-1 000+1= 9 000$	36 000
5	10 000-24 960	$24 960-10 000+1=14 961$	74 805
Total			113,694

2. Se procede como en la solución anterior. El objetivo de esta pregunta es que los alumnos verifiquen la validez de sus conjeturas.
3. i) A Sofía le tomó 5 888 896 segundos escribir los números del uno a un millón. Si trabaja durante dos años, es decir 730 días, ella destina $5\,888\,896/730$ segundos cada día a escribir números, que equivale a $(5\,888\,896/730) (1/3600) = 2.24$ horas/día.

ii) O bien, es posible que los alumnos intenten establecer la proporción:

$$\frac{\text{horas de trabajo en dos años}}{\text{horas en dos años}} = \frac{\text{horas de trabajo en un día}}{\text{horas del día}}$$

4. Suponiendo que (sin considerar espacios entre los números) caben aproximadamente cuatro dígitos por centímetro, la longitud de la línea sería de $(5\,888\,896 \text{ dígitos}) (1\text{cm}/4 \text{ dígitos}) (1\text{m}/100\text{cm}) (1\text{km}/1\,000\text{m}) = 14.722 \text{ km}$.

4.1.2. Episodios relevantes durante el trabajo en equipo

Las dos primeras preguntas resultaron ser todo un reto, con excepción del inciso A el cual fue respondido de manera inmediata en todos los equipos. Sin embargo, solamente el equipo D presentó dos métodos distintos de solución en la pregunta 1. Únicamente los equipos C y D abordaron las pregunta 3, y 4, pero abandonaron las preguntas 1 y 2.

Al momento de calcular la cantidad de dígitos que hay en la primera libreta los acercamientos de los estudiantes fueron los siguientes:

- i. Calcularon el promedio de dígitos; es decir, dividieron la cantidad total de dígitos escritos por Sofía entre el número aproximado de libretas (equipos C y D) y entre el número exacto de libretas (equipo A).
- ii. Trataron de utilizar la regla del producto aprendida recientemente en sus clases de probabilidad. (Equipos C y D)
- iii. Usaron un rango inusual de números (Equipo C).
- iv. Calcularon la cantidad de dígitos que hay en cada columna de la primera página. (Equipos A, B y D)
- v. Clasificaron los números en aquellos que tienen uno, dos, tres, cuatro y cinco dígitos (Equipos A, B y D)
- vi. Realizaron la diferencia entre los extremos de cada rango determinado por la clasificación anterior (Equipos B y D)
- vii. Cada rango de números fue dividido en rangos más pequeños (Equipo A)

Veamos con más detalle cómo fueron evolucionando las ideas en cada uno de los grupos de trabajo.

Equipo A.

En el equipo A, Daniel distingue intervalos de números según la cantidad de dígitos que contienen, mientras que Everardo sugiere encontrar el número exacto de libretas que llenó Sofía para luego obtener el promedio de los dígitos, sin tomar en cuenta que la cantidad de dígitos varía en cada página. Guiados por Martín, todos juntos obtienen la cantidad de páginas que se llenaron de la libreta número 41 pero Daniel considera que se están alejando de la meta y sugiere que lean de nuevo la pregunta. Cabe señalar que aun cuando es importante que los alumnos realicen extensiones al problema lo es aún más el hecho de tener presente el objetivo primordial. En la resolución de esta tarea Daniel actuó como un monitor recordando con frecuencia la pregunta a responder.

Daniel y Martín se concentran en averiguar la cantidad de dígitos que hay del 1 al 100, pero como cada uno de ellos obtiene un resultado distinto deciden realizar su cálculo utilizando intervalos más pequeños como se muestra en la siguiente discusión:

MARTÍN: ¿No serían 91? $91+9$

DANIEL: 89 ¿no? [...] Del 10 al 20 son 11 [números]

MARTÍN: Son 9 los primeros más, 11 del 10 al 20, más 10 al 30, más 10 al 40, más 10 al 50, más 10 al 60, más 10 al 70, más 10 al 80, más 10 al 90. [...] Por dos, 180. Más 9. Del 1 al 100 son 189.

De manera similar intentan obtener la cantidad de números que hay con tres dígitos; es decir, calculan que hay 101 números en el intervalo del 100 al 200, 100 del 201 al 300, 100 del 301 al 400, etc. y 99 del 901 al 999. Un error de cálculo los lleva a concluir que en total hay 1 000 números del 100 al 999. A partir de éste resultado Martín y Daniel infieren que al calcular la cantidad de números en un intervalo de cierta cantidad de dígitos les resultarán “números cerrados”. Con ello se refieren a las potencias de diez como se muestra en el siguiente diálogo:

MARTÍN: Pero nos están dando números cerrados.

DANIEL: ¿Y qué tiene?

MARTÍN: Ahorita que sacamos la cuenta del 101 al 999 [realmente la obtuvieron del 100 al 999] nos dio mil y lo multiplicamos por tres dígitos. Nos da mil números del 101 al 999.

DANIEL: Entonces acá van a ser 10,000 [del 1 000 al 9 999] por 4. Cuarenta mil.

Por su parte, Everardo calcula los dígitos que hay al finalizar cada columna; es decir, los que hay del 1 al 26, del 1 al 52, del 1 al 78, y así sucesivamente. Martín echa un vistazo al trabajo de su compañero y riéndose burlonamente le dice que tienen que llegar al número 24 960. Everardo no planeaba seguir con el mismo método hasta llegar a la última columna de la libreta (como creyó Martín), él lo que buscaba era hallar algún tipo de secuencia o patrón al restar la cantidad de dígitos obtenidos en cada columna. En su trabajo escrito se nota que quería proceder de la misma manera que al trabajar con sucesiones y series aritméticas en sus clases de cálculo del semestre anterior, lo cual explica su intento de solución.

Cuando dan respuesta a la segunda pregunta y no obtienen la cantidad indicada en el problema, Daniel y Martín suponen que hay un error en el texto ya que ellos consideran

que su procedimiento es correcto. Everardo insiste en verificar los cálculos. Una vez que encuentran su error corrigen los resultados como se aprecia en la siguiente figura.

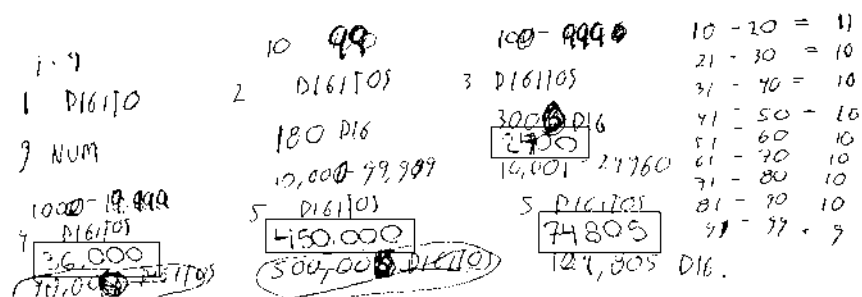


Figura 4.1 El equipo A corrige sus cálculos en la pregunta 1b.

Como producto de la revisión de la solución surge una propuesta para calcular la cantidad de dígitos sin tener que considerar rangos más pequeños.

MARTÍN: Mira, creo que ya encontré algo ahí. Una relación. El número deseado más uno, multiplicado por los dígitos totales.

DANIEL: ¿Número deseado? Más bien la cantidad de...del número de dígitos...no... La cantidad de números que hay entre dos cifras pero de la misma cantidad de dígitos.

Equipo B.

El poco tiempo que dedicaron a la lectura de la tarea en conjunto con una deficiente retención de los datos condujo a que uno de los integrantes (Uriel) considerara que cada una de las columnas tenía 26 dígitos y por lo tanto debían encontrar el número al que llegaron en la primera página tras escribir 260 dígitos. (El problema decía 26 números y Uriel dejó claro que entendía la diferencia entre número y dígito). Pero además en el equipo calcularon solamente la cantidad de dígitos y de números de la primera página y no de la primera libreta como lo pedía el problema. Polya (1945) señala que es importante familiarizarse con el problema al punto de tenerlo tan claro y grabado en la mente que se recuerde con detalle los datos y las condiciones.

En este equipo es Juan quien comienza a idear una estrategia de solución, la cual consiste en calcular la cantidad de dígitos en cada columna. Mediante una figura representa a cada

una de ellas e intenta averiguar en qué momento hay un cambio de uno a dos dígitos y de dos a tres (Véase Figura 4.2.). Uriel por otro lado tiene la idea de que cada columna está formada por 26 dígitos. Para convencer a sus compañeros realiza una lista con los números del 1 al 17 y va contando los dígitos que contiene (Figura 4.2). Pero al realizar ésta acción se da cuenta de que su suposición es incorrecta y se une a la propuesta de sus compañeros.

Un momento importante en la discusión del equipo se presenta cuando Antonio y Juan le hacen notar a Uriel que la cantidad de dígitos varía conforme avanzan los números.

ANTONIO: En la tercera 26×3 . Llega al 78. Multiplicamos 26×4 , son 104. Mira, aquí empieza a haber de tres. Ahora, la pregunta sería ¿en qué momento preciso fue cuando empezó a cambiar? A ver, contemos. A 100 quítale 78, son 22. O sea que en el número 22 cambió a tres dígitos. Entonces 26 menos 22 son 4 con tres dígitos.

URIEL: Lo que ustedes están sacando son la cantidad de dígitos. ¿Y por qué no simplemente multiplican 43 por ésta cantidad? [Por el número de columnas. Ya anteriormente habían calculado que la primera columna tenía 43 dígitos].

JUAN: No porque va aumentando.

ANTONIO: Aquí ya va a aumentar a tres cifras y es lo que estamos precisando. Haz de cuenta, aquí son 43, 52, 52. [Cantidad de dígitos que hay en la primera, segunda y tercer columna respectivamente]. Aquí llega al 78. [Último número de la tercera columna]. Pero si multiplicas 26×4 , que representa la cuarta columna te va a dar 104. [...] Según nuestros cálculos aritméticos son 671 dígitos.

URIEL: Eso multiplícalo por 96 y nos da la cantidad de dígitos.

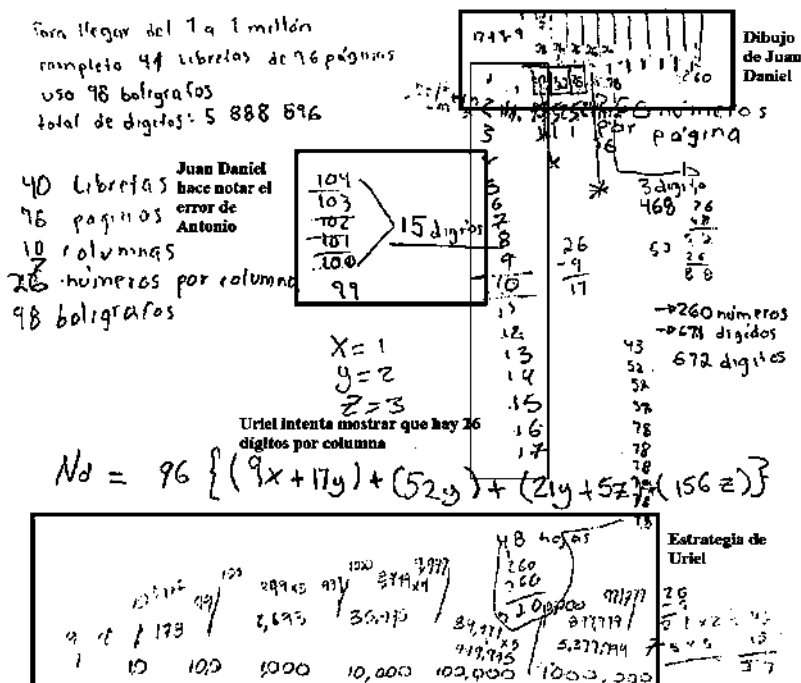
ANTONIO: ¿Por qué por 96? Es que varía.

JUAN: [Desesperado] Te digo que va aumentando. En 1 000 ya tiene 4 dígitos, en 10 000 ya tiene 5.

La conversación anterior fue reveladora para Uriel pues es él quien al responder la segunda pregunta indica de manera correcta cuáles son los rangos de números que deben considerarse.

ANTONIO: Lo que estaba pensando es que en cada página se va aumentando un dígito. En la primera empezamos con dos dígitos, se cambiaron a tres. Entonces en la segunda vamos a tener tres dígitos, se van a cambiar a cuatro.

URIEL: Haber, espera [Habla y escribe] 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 y 1 000 000. Ahí está cada cuánto cambia la cantidad de dígitos. ¿Sí o no?



El equipo B fue uno de los más comprometidos con el aprendizaje de los integrantes del equipo, lo cual tuvo como consecuencias positivas que detectaran los errores de sus compañeros. El ejemplo más interesante se presenta cuando Antonio explica a Uriel cómo obtener la cantidad de dígitos en la cuarta columna.

ANTONIO: Multiplica 26×4 . Entonces sabes que el último número de esa columna es 104.
Entonces a 100 réstale 78, son 22.

JUAN: Entonces sólo son 4 números con 3 dígitos. Dices que llega al 104. Son 104, 103, 102, 101, 100. Fíjate, son 5 números que ya contienen tres dígitos.

URIEL: No cuatro como dijiste tú.

JUAN: Pero no es esa resta que dice Antonio [...]. Del 78 al 99 ¿cuántos hay? A 99 le restas 78 porque sabes que son de dos dígitos.

El reto principal del problema consistió en hallar la relación $n-m+1$. En la discusión anterior se puede advertir que Juan la ha encontrado en su forma equivalente $n-(m-1)$ ya

que consideró que al mayor número del rango debían restar el número anterior al menor número del rango. En la siguiente conversación, se muestra cómo Uriel usa la idea de su compañero en el momento que calcula la cantidad de números de dos dígitos a partir de la tercera columna.

URIEL: A partir del 53 va a haber en la tercera columna. O sea que al 99 le vas a quitar 53

ANTONIO: ¿Por qué 53?

URIEL: Ah, no, 52

ANTONIO: ¿Por qué 52?

URIEL: Porque en la tercer columna empieza a partir del 53.

Sin embargo, Uriel no contó con la aprobación de Juan (quien no le presta atención pues intenta responder a la pregunta 3), ni con la de Antonio (ya que supuso que su compañero confundía números con dígitos). De manera que al responder a la pregunta 3, Uriel ya no toma en cuenta la propuesta de Juan.

URIEL: Oye, haber, nada más para estar seguro porque me estoy bloqueando. Del 10 al 99 ¿cuántos dígitos hay?

ANTONIO: Haber, son 99 menos 10, por 2...178

URIEL: A mí también me sale eso. No puede haber otro procedimiento. El único problema es que puede que haya un error ahí en el texto.

ANTONIO: ¿Por qué?

URIEL: Porque algo está mal. Mira, hice lo mismo que tú. 9 dígitos son del 1 al 9 así como lo planteamos. Del 10 al 99 son dos. 89×2 son 178. Del 100 al 999 son 899 por tres dígitos que hay. Y así sucesivamente. Al final ya solo sumas los dígitos de cada uno y me sale ésta cantidad. [5 888 872. Sumó $9+178+2$ 693+35 996+449 995+5 399 994+7] Pero me faltan 24 dígitos que no sé de dónde salen. (Figura 4.2).

Una discusión entre los tres miembros del equipo quizá hubiera ayudado a que descubrieran el error, ya que fue Juan quien propuso una manera efectiva para calcular los números en un rango, y aunque Uriel en algún momento pareció haberla comprendido no pudo dar argumentos convincentes para defender la propuesta o quizá la descartó pues Juan no era considerado como el más hábil del equipo y en algunas ocasiones sus opiniones tenían poco sentido.

El equipo B fue uno de los que mostró más deficiencias en cuanto a la implementación del método de Polya. Además de que se preocuparon poco por comprender bien el problema hubo momentos en que el trazo de un plan no estuvo presente pues se lanzaron a hacer cálculos sin sentido como se muestra enseguida:

- URIEL: Vamos a aplicar que hay 1, 2, 3,...,7. Siete...factorial.
 JUAN: $(7!)(1\ 000\ 000)$ Da 5 040 000 000. ¿Y cuántos dígitos dices que son?
 ANTONIO: Son 5 888 896.
 JUAN: Entonces vamos a aplicar esto. Son 40 libretas, por 96 páginas, por las 10 columnas, por 26 números por columna, por 98 bolígrafos.
 ANTONIO: ¿Por qué 98 bolígrafos?
 JUAN: Porque así dice el problema.
 URIEL: ¡Pero los bolígrafos qué! El problema no dice qué hacen.
 ANTONIO: Y ahorita sí salen los cinco millones. ¿Bolígrafos? No inventes. ¿Bolígrafos?
 JUAN: No aquí ya se pasó. Aquí no tenemos que usar alguno de éstos.
 ANTONIO: Como los bolígrafos por ejemplo.

Equipo C.

En el equipo C a petición de Gilberto obtienen el promedio de los dígitos de cada libreta. Sinuhé hace notar que no todas las libretas tendrán la misma cantidad de dígitos, pero propone un rango inusual de números como se observa en la Figura 4.3. Mindy no está de acuerdo y muestra a sus compañeros con trabajo escrito los rangos a considerar pero sin dar argumentos verbales (Figura 4.3). Sus compañeros no toman en cuenta su propuesta. Poco avance se observó en la solución de las preguntas 1 y 2 así que continuaron con la siguiente.

$ \begin{aligned} 96 \times 10 &= 960 \text{ columnas} \\ 100 \times 26 &= 24960 \text{ Números} \\ 5888896 &\div 40 \\ \begin{array}{r} 24960 & 4260 & 960 & 60 & 0 \\ 10000 & 1000 & 100 & 10 & 0 \\ 1440 & 3060 & 860 & 50 & 0 \\ \hline 9 & 9 & 3 & 2 & 1 \\ 74800 & 15810 & 2580 & 100 & 9 \end{array} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} 1-9 &= 9 \times 1 = 9 \\ 10-99 &= 89 \times 2 = 178 \\ 100-999 &= 889 \times 3 = 2667 \\ 1000-9999 &= 8889 \times 4 = 35556 \\ 10000-99999 &= 88889 \times 5 = 444445 \\ 1000000 &= \end{aligned} $
---	--

Figura 4.3 Propuestas de solución a la pregunta 2 realizadas por Sinuhé (izquierda) y Mindy (derecha).

Mientras Mindy y Gilberto contestaban la pregunta 3, Sinuhé analizaba algunos detalles de la segunda. Cuando se incorpora para revisar el trabajo de sus compañeros asocia un significado incorrecto al resultado que obtuvieron sus compañeros. (Figura 4.4) Su confusión se debe a la interpretación de la frase “trabajó regularmente cerca de dos años”, de la cual dedujo que Sofía trabajó sin descanso de manera consecutiva; es decir, 63 072 000 segundos. De ahí que al ver la respuesta “2.2408 horas” pregunte a sus compañeros “O sea, ¿se hace 2 dígitos cada hora?”. Gilberto también se confunde por un momento pues realiza cálculos como si Sofía trabajara durante todo el día, pero cuando obtiene que ella escribiría 0.09 dígitos cada segundo se da cuenta de que ha procedido mal pues dicho resultado no coincide con el enunciado del problema. Recordemos que el problema dice “Sofía toma alrededor de un segundo para escribir cada dígito” Luego de reflexionar, advierte que ya habían encontrado el tiempo de trabajo de un día y que lo que hicieron fue expresarlo en minutos y en horas.

3. Supongamos que Sofía toma alrededor de un segundo para escribir cada dígito y que trabajó regularmente cerca de dos años, ¿alrededor de cuánto tiempo pasó escribiendo números cada día?

8,066.9808 segundos
134.4496 minutos
2.2408 horas.

Figura 4.4 Respuesta a la pregunta 3 por Mindy y Gilberto.

Enseguida se presenta el diálogo que se llevó a cabo en el equipo.

SINHUÉ: Son dos años por 365 días. Son 730 días y cada día tiene 24 horas y cada hora 60 minutos, y luego por 60 segundos.

GILBERTO: Son 5 888 896 segundos en dos años. En un año te salen éstos [2 944 448. Luego divide entre 365]. Esto es lo que sale en cada día. (8 066.98)

SINHUÉ: No, aquí dice que segundos [en la hoja de trabajo, figura 4.4], pero ahí sería días.

MINDY: No, eso son 8 066 punto la la la segundos por día. O sea son segundos por día.

[Sinuhé observa la respuesta y pone su atención en el resultado 2.2408 horas].

SINHUÉ: O sea ¿se hace 2 dígitos cada hora?

GILBERTO: ¡Analízale!

SINHUÉ: Tú te refieres a que en dos años se hizo toda esa cantidad de dígitos y lo divides y entonces ya tienes la relación: en dos años puso esa cantidad de dígitos y que

eso no tiene... no tiene sentido.

MINDY: Tú te revuelves solo.

GILBERTO: Me estás revolviendo a mí también.

MINDY: No, sí está bien. Tú que le haces caso.

GILBERTO: Estos son...

MINDY: Segundos por día.

GILBERTO: Entonces si eso lo divido entre 24, me sale esto... [336.12]

MINDY: No, es que no es así. Hay que convertirlo a minutos. [Desesperada] ¡Ay, ya así déjalo!

GILBERTO: No, es que sí está mal.

MINDY: ¿Por qué está mal?

GILBERTO: [Realiza operaciones en la calculadora]. Esos son los segundos [5 888 896]. Eso hace en un año [5888 896/2]. Eso lo divido entre 365 días del año. Eso es lo que hace en un día... Y si lo divido entre 24 es lo que hace en una hora, 336 y dividido entre 60 es lo que hace en un minuto.

SINHUÉ: Cinco dígitos por minuto.

GILBERTO: Y si lo divido entre 60... [Se queda pensando pues le resulta que haría 0.09 dígitos por segundo]. Entonces esto está mal. [Regresa a la idea original] 8 066.98. Estos son los segundos que hace en un día, si lo divido entre 60 son los minutos, si lo divido entre 60, las horas que hace en un día.

SINHUÉ: ¿Las horas?

GILBERTO: O sea todos estos segundos los hace en un día, si lo divides entre 60 es nada más para saber a cuántos minutos equivale y para saber a cuántas horas equivale pues lo divides entre 60.

A Sinuhé aún no le queda clara la solución. Gilberto entiende ahora que su compañero está considerando tiempo de trabajo continuo, por lo que le explica que Sofía no trabajó dos años durante todo el día y que además lo que quieren es encontrar el tiempo que ella dedica a diario para escribir los números y éste pueden expresarlo ya sea en segundos, minutos u horas. La discusión entre Sinuhé con un compañero que se enfrentó a las mismas dificultades que él resultó ser esencial para que lograra refinar sus ideas iniciales y como resultado en este caso, logró responder de manera satisfactoria en el trabajo individual.

3. Supongamos que Sofía toma alrededor de un segundo para escribir cada dígito y que trabajó regularmente cerca de dos años, ¿alrededor de cuánto tiempo pasó escribiendo números cada día?

5 888 896 $\div$ 730 = 8066,9808 días

Primero sacado dígito tarda un segundo $\div$ 3600

entonces tarda 5 888 896, entonces dividimos entre el 2.24082 horas

número de días que hay en 2 años 730 para sacar la cantidad de dígitos que escribió en un día y si lo queremos en horas dividimos entre 3600 y así es

Figura 4.5 Respuesta individual de Sinuhé a la pregunta 3.
Equipo D.

En el equipo D, Karina y José calculan el promedio de los dígitos. El resultado decimal que obtienen no le convence a Karina y enseguida propone usar técnicas de conteo, las cuales fueron estudiadas en clases de probabilidad y estadística poco antes de realizar la actividad.

KARINA: El total de dígitos en los números que escribió es de 5, 888,896.

JOSÉ: Serían...

KARINA: Entre 40... Pero...y ya ¿no? Y sacar cuántos hay en una libreta. [Reflexiona]. Pero es que no van a ser los mismos. [La cantidad de dígitos en cada libreta].

JOSÉ: Yo digo que sí.

KARINA: Serían 147, 222.4. Pero tiene un punto. [...] Oye, ¿no sería algo así como lo que hacíamos en proba? que puede ser...del 0 al 9 son 10 y que poníamos 10 y acá otros 10 y acá otros 10. Bueno algo así [...]

JOSÉ: ¿Cómo era como le hacíamos? Hay 26 espacios.

KARINA: Serían 10 ¿no? ...En la primera columna es del 1 al 26. Entonces usaríamos tres veces el 1, tres veces el 2, tres veces el 3.

JOSÉ: Al 9 son 9 dígitos. En el 10 son 11.

KARINA: El 2, el 12, el 22 y el 21, 23, 24, 25, 26. Por ejemplo en la primera columna se utilizan 9 dos.

JOSÉ: ¿Y cuántos unos?

KARINA: 1, 11, 12. Pues yo creo que van a ser los mismos ¿no? 13, 14,...19, 21. Son 12. Pero sería sacar uno por uno.

Agotadas las ideas, Karina y José deciden continuar con la pregunta 3, cada uno por su cuenta para después comparar resultados. José calcula la cantidad de segundos que hay en dos años e intenta encontrar el tiempo que Sofía pasa sin escribir números. Así lo sugiere cuando dice “pongámosle que duerme las ocho horas regulares”. Karina nota que dicha manera de proceder resulta arbitraria. Ella convierte a horas tanto el tiempo que hay en un

año como el que tardó Sofía en escribir todos los números y encuentra la razón tiempo en un año entre tiempo de trabajo. Como no logra asociar un significado al resultado vuelve a las condiciones del problema y encuentra una respuesta que puede demostrar que es correcta.

KARINA: Sale 5. Pero ¿cinco qué? ¿Aquí dice que escribió diario?

JOSÉ: Sí, que escribía diario, o sea regularmente cerca de dos años.

KARINA: A menos que fuera esto [1635] entre 730... 2.24 horas al día. [...] Sí, ya lo comprobé.

JOSÉ: ¿Cómo lo comprobaste?

KARINA: Lo hice de regreso [...] pero no sale lo mismo, sale aproximado.

si trabaja

2h 14 m / día

entonces

$$134 \text{ min} \times 7 = 938 \text{ min}$$

$$134 \times 365 = 48910 \text{ min}$$

$$\times 2$$

$$97820 \text{ min}$$

$$1635.333$$

$\times 60 = 5,84,200$
(p/parar a veg)

Figura 4.6 Karina verifica el resultado de la pregunta 3.

En un inicio Vanessa se mantuvo alejada del grupo, luego de que la profesora le sugiere escuchar las opiniones de sus compañeros y por la necesidad de que alguien más notara cuál fue el error que cometió en su acercamiento a la pregunta 2, surge una discusión que resulta beneficiosa para todo el equipo.

VANESSA: Yo diría que se tome en cuenta que del 1 al 9 solo tienen una cifra, los números son 9. Y entonces del 10 al 99 tienen dos cifras y son 89 números y así lo fui haciendo hasta llegar a 1 000 000 que tiene 7 cifras. Y entonces para calcular el número de dígitos por intervalo solo se multiplica y ya. Luego ya me salió esto [5 888 876].

KARINA: Y aquí por qué por 2 [en el intervalo del 10 al 89].

VANESSA: Porque tienen dos cifras.

KARINA: Esto es lo que debe salir Vanessa [5 888 896] Pero aquí hay algo. [En la primera pregunta Vanessa también había calculado el promedio de los dígitos de cada libreta y Karina pone su atención en ese aspecto]. Ah, esto [$5\,888\,896/40=147\,222.4$ dígitos] y sale aproximado.

JOSÉ: [José apoya la idea de Vanessa]. Ya solo se dividiría en 40 [a 5 888 896].

KARINA: Pero es que no puede ser nada más entre 40. Porque en la última libreta van a estar números grandotes y en la primera números chiquitos. Podríamos sacar un promedio ¿no? [...] salen 147 222.4 dígitos en todas la libretas pero obviamente no todas van a tener lo mismo.

VANESSA: [...] Si dividimos estos dígitos [5 888 876] entre las 40 libretas nos va a dar un promedio. Hay que hacer lo mismo de acá [procedimiento que usó en la segunda pregunta] pero ahora va a llegar hasta 24 960. Hasta el número que llega en la primera libreta.

KARINA: ¿Este es el número que llega a la primer libreta? [24 960]

VANESSA: Multipliqué 260×96 . Y entonces el método dos sería: si tenemos 1 000 000 de números hay que dividirlo entre 40 libretas.

KARINA: ¿ $1\,000\,000/40$? 25 000.

VANESSA: O sea que también sería un aproximado. Entonces la última libreta no está completa.

KARINA: Ya me hice bolas. Ah, ya entendí, le faltan 40 números.

VANESSA: O sea, haz de cuenta que a esto [24 960] va a llegar en la primer libreta de acuerdo a lo que dice el problema. Y por ejemplo, si hubiera llenado las 40 libretas completitas hubiera escrito estos [25 000].

KARINA: 25 000 y llenó 24 960.

VANESSA: Y entonces llenó 40 libretas más la que no está completa.

A pesar de que no llegaron a descubrir la falla en la solución de Vanessa, luego de la interacción tanto Vanessa como José aceptaron que al dividir el total de dígitos entre el total de libretas obtendrían solamente una aproximación, mientras que Karina entendió un segundo método para calcular la cantidad de números de la primer libreta y además la razón por la cual Sofía llena más de 40 libretas.

4.1.3. Presentaciones y discusión de resultados

Daniel del equipo A fue el primero en presentar la propuesta ante la clase a pesar de que las mejores respuestas se tenían planeadas para el final; sin embargo, se tomó en consideración que quedaba poco tiempo para la discusión pues la tarea fue larga y los alumnos tenían otras actividades.

En el momento en que respondió a la pregunta 1b los alumnos se mostraron atentos y lograron esclarecer sus dudas acerca de por qué no pudieron obtener la cantidad que indicaba la pregunta dos.

DANIEL: [...] Nosotros supusimos que (escribe en columna) del 1 al 9 hay 9 dígitos, del 10 al 99 hay 180 dígitos.

[Se murmura entre los equipos restantes “¿180?”].

URIEL: ¿180?

DANIEL: Sí. [Continúa]. Del 100 al 999 hay 2400 dígitos, del 1 000 al 9 999 hay 36 000 dígitos, del 10 000 al 24 960 obtuvimos que hay 74 805 dígitos. Entonces ya luego lo que hicimos fue sumar todos esos dígitos que hay ahí y nos salió 77 994 dígitos en la libreta.

URIEL: Yo entiendo que no son 180 sino que son 178 porque si le sumas 10 más 89 te da 99, por lo cual serían 89 dígitos.

DANIEL: Lo que pasa es que en ese, solo en ese lo hicimos por casos. [...] [Escribe y habla] Del 10 al 20 hay 11, del 21 al 30 hay 10, del 31 al 40 hay 10, del 41 al 50 hay 10, del 51 al 60 [va anotando los resultados], del 61 al 70, del 71 al 80, del 81 al 90 y del 90 al 99 que son nada más 9. Entonces sumamos eso y nos da 90 [...] y por número de dígitos que son dos, 180.

ALUMNOS: Sí. Ahí está.

Posteriormente la profesora hace una observación en el cálculo que obtuvo Daniel de la suma total. Sus compañeros de equipo lo corrigen además diciéndole que del 100 al 999 serían 2 700 dígitos y realizan de nuevo la suma obteniendo 113 694 dígitos.

Varios alumnos fueron convencidos por los argumentos que presentó el equipo A. Uriel y Vanessa, miembros de los equipos B y D realizaron anotaciones y correcciones mientras se llevó a cabo la discusión.

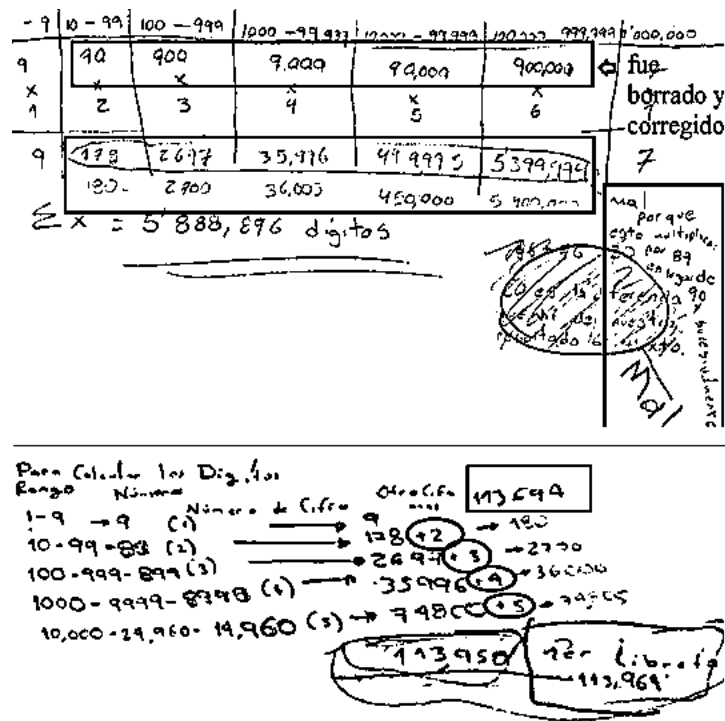


Figura 4.7 Correcciones de los equipos B y D, respectivamente.

Con el fin de que los alumnos encontraran una relación más general, la profesora invita a los integrantes del equipo C a que muestren al grupo sus avances en la pregunta 2. Sinuhé se anima a comentar la solución de su equipo pero aclara que “no está muy seguro”. Es de gran relevancia el momento en que obtiene la cantidad de números que hay en cada rango que consideró (Figura 4.3) “saqué una relación de cuál es la diferencia entre cada uno de los espacios (rango de números). Entonces aquí va a haber 14 960, 3 960, 860, 50, (números) [...], en el último (rango del 1 al 9) nunca supe qué onda con él”. Es decir, si también resta como procedió en los rangos anteriores obtendrá 8 dígitos, (resultado que borró y cambió varias veces) pero al final decide que tiene 9 dígitos. La profesora ve una oportunidad para que vea el caso como un contraejemplo, de manera que le cuestiona el hecho de que use un procedimiento distinto para el rango del 1 al 9. Aquí interviene Martín: “es que después de restar debes sumar uno”.

4.1.4. Reflexiones globales

Los alumnos percibieron que la sesión fue corta y manifestaron sorpresa al darse cuenta de cuánto tiempo le dedicaron a resolver la tarea; ya que, normalmente los problemas de sus

clases cotidianas los respondían en un máximo de 15 minutos. “¡45 minutos resolviendo un problema!”, expresaron al finalizar. Es decir, sintieron que el tiempo pasó volando pues se mantuvieron trabajando con gran entusiasmo.

En los grupos pequeños ciertos alumnos fungieron como reguladores de los procesos metacognitivos de sus compañeros, pues les ayudaron a que comprendieran cuál era la incógnita, a que no se desviaran del objetivo, a que buscaran mejores estrategias o abandonaran aquellas que consideraron inapropiadas ya que consideraban datos que no tenían relación con los otros. Como cuando Gilberto ayuda a entender a Sinuhé que lo que quieren encontrar es qué parte del día trabajó Sofía; el momento en que Daniel pide que revisen de nuevo qué es lo que se pregunta; la situación que se presenta luego de que Juan utiliza en una operación la cantidad de bolígrafos y Uriel, uno de sus compañeros le hace notar que es un dato que no está involucrado con las preguntas que tienen que responder; y cuando Karina da a entender a José que pueden calcular de manera directa el tiempo que pasó Sofía escribiendo números en lugar de encontrar el tiempo que no escribía.

Pudo notarse que los alumnos están familiarizados con el uso de estrategias heurísticas como el hacer un esquema, tomar casos particulares o establecer submetas; sin embargo, no les parece claro en qué momento les conviene usar una u otra.

Resultó inevitable que se formaran subgrupos o que en algún momento los integrantes de cada grupo trabajaran por su cuenta. A pesar de esto, cuando los alumnos se vieron atascados, sintieron la necesidad de observar lo que hacían sus compañeros y de obtener un punto de vista diferente. Recordemos que Everardo en el momento en que se dio cuenta de que su acercamiento mediante sucesiones no daba resultado decidió unirse al trabajo del resto del equipo; lo mismo sucedió con Vanessa y Uriel (equipo B) cuando no entendieron por ellos mismos de dónde salían los dígitos que faltaban.

El equipo B fue el que mostró la mayor parte del tiempo un mayor espíritu de cooperación y compromiso con el aprendizaje de sus compañeros y fue también el que tuvo la mejor evolución en las respuestas individuales de sus integrantes.

A los integrantes del equipo A les pareció que sus argumentos fueron convincentes y que bastó con la presentación frente al grupo para dar a conocer que habían entendido y resuelto

bien el problema. Por ésta razón, las respuestas individuales resultaron ser cortas y resumidas. En el caso de Everardo, expresó que “el trabajo completo estaba en las hojas del equipo”. Hubiera sido injusta una evaluación que considerara solamente el trabajo final escrito, ya que en general los miembros de este equipo mostraron buen desempeño y fluidez al responder a la tarea. Lo que sucede aquí es que algunos alumnos tienen una mejor facilidad de expresión oral que escrita. Uriel en ocasiones tuvo problemas para expresarse con claridad de manera verbal y en el caso de Vanessa casi no hablaba; sin embargo, ellos fueron quienes reportaron de manera escrita respuestas más elaboradas. Uriel del equipo B, además de calcular la cantidad de dígitos por libreta lo hace también para la primera página, como lo había calculado en su equipo, pero empleando el algoritmo del equipo A (Figura 4.8). Vanessa, del equipo D, muestra claramente dos métodos de solución (Figura 4.9) para responder a la primera pregunta, haciendo énfasis en que con algunos de ellos la respuesta es aproximada.

Si bien no todos los alumnos respondieron de manera correcta a todas las preguntas de la tarea, sí se evidenció un avance en sus ideas iniciales y pudieron notar que aunque un problema puede tener distintos acercamientos de solución algunos son más eficientes que otros.

$26 \times 10 = 260$ num. por pag.

1-9	10-99	100-999
9	90	161
x 1	x 2	x 3

$9 + 180 + 483 =$

672 dig. en la primer pag.

$260 \times 96 = 24,960$ num. en la primer libreta

1-9	10-99	100-999	1000-9999	10,000-24,960
9	90	900	9,000	14,961
x 1	x 2	x 3	x 4	x 5

$9 + 180 + 2,700 + 36,000 + 74,805$

$= 113,694$ dígitos en la primer libreta

Figura 4.8 Respuesta individual a la pregunta 2 de Uriel del equipo B.

Método ① Dígitos

Si en la primera libreta llego al 24,960

Entonces Intervalo	Cifras	Números	Dígitos
1-9	1	9	9
10-99	2	90	180
100-999	3	900	2700
1000-9999	4	9000	26,000
10,000-24,960	5	14,961	74,805
			188,490

Método ② Dígitos

Datos

5,888,896 Dígitos

40 libretas

Calculamos el promedio con una regla de tres

40 libretas = 5,888,896 Dígitos

1 libreta = X

$$X = \frac{(5,888,896)(1)}{40} = 147,222.4 \text{ Aprox}$$

* Método de datos por regla de tres

Datos

40 libretas

1 libreta = 96 pag

1 pag = 10 Columnas

1 Columna = 26 números

1 - Columna tiene 26 números

10 columnas tienen X números

$$X = \frac{10(260)}{1} = 260 \text{ números}$$

1 pag = 260 números

96 pag = X números

$$X = \frac{96(260)}{1}$$

$$X = 24,960$$

Método ③ Números

Datos

40 libretas

Números = 1,000,000

Calculamos el promedio de cuanto se escribió en cada libreta

40 libretas = 1,000,000 números

1 libreta = X

$$X = \frac{(1,000,000)(1)}{40} = 25,000 \text{ Aproximadamente}$$

Figura 4.9 Respuesta individual a la pregunta 1 de Vanessa del equipo D.

4.2. La revista

Se trata de una tarea corta con la cual se pretende que los estudiantes analicen la relación entre el precio de venta y el número de compradores potenciales de un nuevo producto para encontrar el precio que maximiza la ganancia.

Los recursos necesarios para su resolución se encuentran al alcance de los alumnos ya que tanto el cálculo de porcentajes así como la interpretación de gráficas discretas y relación entre dos variables se estudian en la enseñanza elemental.

La tarea involucra a un grupo de estudiantes que deciden escribir y vender una revista. Para predecir las ganancias que podrían obtener realizan una encuesta a una muestra de 100 alumnos al azar. El resultado del muestreo lo presentan en la siguiente gráfica.

El resultado de su muestreo es siguiente:

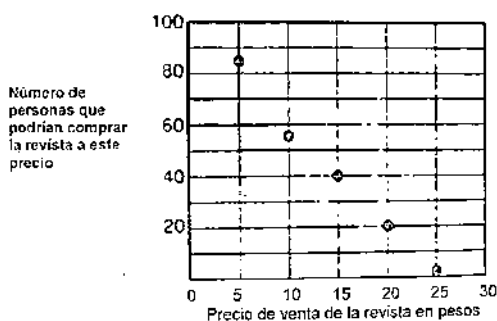


Figura 4.10 Gráfica que aparece en la actividad.

Se considera que en un inicio los ingresos por las ventas corresponderán a la ganancia total de los estudiantes pues sus profesores les apoyarán proporcionándoles los recursos necesarios para la producción de la revista.

Las cuestiones que responderán en equipo son las siguientes:

1. Describe cuidadosamente lo que muestra la gráfica.
2. A) Hay alrededor de 1 500 estudiantes en la escuela. ¿Cuántas revistas podrían venderse en la escuela si el precio fijado fuera de \$20? B) ¿Cuánto dinero podría obtenerse?
3. A) ¿En cuánto deberán vender la revista de forma que obtengan el mayor dinero posible? B) ¿Cuánto dinero obtendrán?
4. Después de un tiempo su revista es bastante exitosa, sus maestros deciden que deberán empezar a pagar \$2.5 por el costo de producción de cada revista.
Supón que el precio de venta es de \$20 como en la pregunta 2, ¿Cuánta ganancia

podrían obtener los estudiantes?

4.2.1. Soluciones potenciales

1. Se muestra una gráfica aproximadamente lineal, cuya pendiente negativa indica que a mayor precio habrá menos compradores.
2. a) De acuerdo a la gráfica, si el precio es de \$20, veinte personas la comprarían, es decir, el 20% de la población escolar. Por tanto se venderían: $(1500) (20)/100=300$ revistas.
b) Y la ganancia sería de $(300) (\$20)=\$6\,000$.
3. Organicemos los datos en una tabla.

Precio	Número de compradores encuestados	Total de compradores	Ganancia
5	84	1260	6 300
10	56	840	8 400
15	40	600	9 000
20	20	300	6 000
25	2	30	750

Si el precio de la revista fuera necesariamente múltiplo de 5, la ganancia máxima se obtendría para un precio de \$15 como se muestra en la tabla. No se espera que los alumnos interpolen datos (quizá pueda haber quienes sí lo hagan) pues generalmente suelen dar sus soluciones apegándose estrictamente a las preguntas y datos del problema; sin embargo, sería prudente realizar las siguientes interrogantes: Si consideramos otros precios enteros que no se encuentren en la tabla ¿Creen que podría haber una ganancia mayor a la que encontraron?, ¿Qué datos se necesitarían para encontrarla?, ¿Qué sugieren para encontrar el número de compradores?

Dado el caso en que se proponga encontrar la ecuación de una recta que pase por dos de los puntos de la gráfica para hallar una función que dependa del precio (es viable pues los alumnos ya han llevado un curso de geometría analítica) se preguntaría: ¿Qué criterios se deben tomar en cuenta para escoger los puntos de la gráfica con los que modelaremos la función?

Según el nivel de los alumnos, para encontrar el máximo de la función ganancia se puede recurrir nuevamente al uso de tablas o a técnicas de cálculo diferencial.

4. a) Ganancia obtenida por revista, por el número de compradores $\rightarrow (20-2.5) (300) = \$5\ 250$.
- b) Ganancia total, menos el costo de producción de las revistas $\rightarrow 6\ 000 - (300 \times 2.5) = \$5\ 250$.

4.2.2. Episodios relevantes durante el trabajo en equipo

Al momento de describir la gráfica los comentarios iniciales fueron muy generales. Por ejemplo el equipo A propuso que la gráfica muestra: *“La relación entre el número de estudiantes encuestados que podrían comprar la revista y el precio de esta”* y de manera semejante en el resto de los equipos. Sin embargo, algunos alumnos advirtieron que una explicación como la anterior realmente solo repetía lo que ya estaba dicho al margen de la gráfica y consideraron además que la tendencia de la gráfica era tanto lineal (B y C) como inversamente proporcional (todos los equipos). Así, en el caso de los equipos B y D las respuestas incluyeron argumentos como:

“En la gráfica podemos observar que a menor costo del producto en este caso la revista, hay un número mayor de adquisición, mientras que a mayor costo es menor el consumo” (equipo D).

“La gráfica muestra pues que hay una correlación lineal y a menor precio de la revista se vende más” (equipo B).

Aun cuando en los reportes escritos no se hace mención acerca de qué puntos muestran los resultados de la encuesta esto sí se comentó en la discusión en equipos. Como ejemplo se presenta la intervención de Juan. (Equipo B):

“Número de personas que podrían comprar la revista a éste precio (\$5), aproximadamente ochenta y tantas personas. El precio de venta de la revista en pesos...\$25 pesos máximo. Muy pocos compran de \$25, de los que más compran pues es de \$5 [...]”

En esta tarea el reto principal consistió en la interpretación y descripción de la gráfica. Una vez que lograron superar ese obstáculo el resto fue de fácil ejecución. En todos los equipos la segunda pregunta fue respondida de manera efectiva. Resultó fundamental la interacción

entre alumnos y la disposición que ellos mostraron para ayudar a sus compañeros a que interpretaran el significado de los datos de la gráfica. Una evidencia se presenta a continuación en la siguiente discusión llevada a cabo en el equipo B.

ANTONIO: Aquí hay un error. Dice que con \$5 compran ochenta y tantos y con 10 compran 56. Se supone que nada más iban a encuestar a 100 estudiantes.

JUAN: (Apoya a Antonio) Máximo 100 estudiantes, o sea que aquí toda la suma de éstos (ordenadas) te debe dar los 100.

URIEL: Te estás confundiendo. Mira, aquí preguntaron los mismos precios, y a las 100 personas que preguntaron 85 dijeron que a ese precio lo comprarían (señala los \$5 de la gráfica), el 60% de éstas personas dijeron que no lo harían (cuando cuesta \$15).

JUAN: Del 100% que dices.

URIEL: O sea digamos que del 100% algunas dijeron que no la podían pagar.

JUAN: Ah, está dividido.

En esta pregunta no hubo muchas complicaciones para llegar a la solución y en general en todos los equipos estuvieron de acuerdo en que podían emplear una regla de tres. Algunas pequeñas variaciones fueron presentadas por: Martín del equipo A, quien multiplicó la cantidad de grupos de 100 personas que hay en la escuela por el número de personas que comprarían la revista; y por Uriel, quien sugirió que multiplicaran la población escolar total por el porcentaje expresado en forma decimal del número potencial de compradores.

2. a) Hay alrededor de 1500 estudiantes en la escuela. ¿Cuántas revistas podrían venderse en la escuela si el precio fijado fuera de \$20?
b) ¿Cuánto dinero podría obtenerse?

100 \$1500 = 15
15 x 20 = 300 300 x 20 = 6000

Se venden 300 revistas
Se gana \$6000 pesos

1500 x .20 = 300
personas % personas
300 x 20 = 6000 pesos
personas \$

Figura 4.11 Soluciones a la pregunta 2 de Martín y Uriel, respectivamente.

En la tercera pregunta los alumnos notaron que era necesario comparar la ganancia obtenida para cada precio sugerido. En los equipos A, B y C multiplicaron el número de revistas que podrían vender en toda la escuela (el cual calcularon mediante una regla de tres) por el respectivo precio. En el equipo D, obtuvieron la ganancia con los datos del muestreo (pero omitieron el precio de \$25) y una vez que identificaron el precio con el

cual conseguían la mayor ganancia calcularon a cuánto ascendería ésta al momento de vender la revista a toda la población escolar.

$$\begin{array}{r}
 \$20 \\
 100 - 20 = \$800 \\
 1500 - 300 = \underline{\hspace{1cm}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \$5 \\
 100 - 85 = \$15 \\
 1500 - 1275 = \underline{\hspace{1cm}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \$10 \\
 100 - 56 = \$44 \\
 1500 - 840 = \underline{\hspace{1cm}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \$15 \\
 100 - 40 = \$60 \\
 1500 - 600 = \underline{\hspace{1cm}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \$25 \\
 100 - 25 = \$75 \\
 1500 - 300 = \underline{\hspace{1cm}}
 \end{array}$$

Nota: Solo tomamos en cuenta los precios de la tabla

$$\begin{array}{r}
 3 \rightarrow 51 \quad 55p = \frac{40p}{\times 10} = \frac{85}{\times 5} = \frac{125}{\times 5} \\
 100 - 40 = 60 \\
 1500 - X = \frac{1500}{\times 40} = 6000 \div 100 = 600 \\
 \quad \quad \quad \times 15 = \underline{9000}
 \end{array}$$

Figura 4.12 Solución a la pregunta 3 por los equipos C y D respectivamente

En el equipo C los alumnos sí se dieron cuenta de que quizá con otros precios que no aparecían en la gráfica podrían obtener una ganancia mayor a la obtenida para el precio de \$15, pero les pareció que era un problema aparte. Sin embargo aclaran con una nota que se apegaron estrictamente a los datos del problema. (Figura 4.12)

4.2.3. Presentación y discusión de resultados

En esta ocasión el equipo D presentó su solución frente a la clase. A pesar de mostrar un método diferente el grupo aceptó la propuesta, pero cuestionaron el hecho de que no calcularon la ganancia cuando la revista costaba \$25, a lo que los integrantes del equipo alegaron que no lo hicieron porque sospechaban que habiendo tan poca gente que compraba la revista a ese precio la ganancia sería poca. Sin embargo el grupo argumentó que aun así debían encontrarla para estar seguros.

A continuación el equipo C mostro el trabajo que realizaron. El grupo estuvo de acuerdo en general. Un punto a debatir pero que no causó un gran conflicto fue que la toma de

distintas coordenadas para los puntos cuando el precio de la revista era de \$5, \$10 y \$25. En todos los casos los valores que consideraron para el número de personas que podrían comprar la revista variaron entre una y dos unidades; es decir, consideraron que la cantidad de personas que compraban la revista cuando costaba \$5, \$10 y 25 era de 84 a 86, 54 a 56 y 2 a 3 respectivamente.

Enseguida la profesora cuestionó al grupo acerca de cómo podrían predecir la ganancia obtenida si el precio de venta de la revista tomara valores intermedios a los establecidos en la encuesta. Juan. hace mención de que la gráfica es “casi una recta”, así que podrían trazarla y luego marcar una línea desde el precio que se quisiera establecer hasta la gráfica y de ahí (punto de intersección entre gráfica y línea) otra recta hacia al eje “Y” para saber cuántas personas la comprarían. Luego procederían como en los casos anteriores. Mindy del equipo C comentó que podrían obtener la ecuación de la recta tomando dos puntos de la gráfica.

4.2.4. Reflexiones globales

En general la actividad resultó de fácil comprensión y ejecución. Los estudiantes lograron identificar una relación lineal inversa, interpretar una gráfica discreta y calcular la ganancia máxima de cierto producto en venta.

Pese a la sencillez de la actividad esta no fue un simple ejercicio pues los estudiantes encontraron cierta dificultad al momento de interpretar y describir la gráfica. Su potencial radica principalmente en las posibles extensiones al problema que se pueden realizar.

A algunos alumnos les quedó claro que considerando precios distintos a los que aparecían en la gráfica podrían asegurar que en realidad obtuvieron la mayor ganancia. Lo anterior puede apreciarse en la respuesta individual de Sinuhé.

- a) ¿En cuánto deberán vender la revista de forma que obtengan el mayor dinero posible? (las respuestas deberán de darse en un número entero de pesos).
- b) ¿Cuánto dinero obtendrán?
- a) \$15 realizamos una regla de tres en todos los casos y se observa en cual ~~algunos~~ se obtiene mayor ganancia o si se quiere ser mas preciso realizamos mediante la ecuación de la recta un ~~mos~~ ~~mas~~ ~~exacto~~
- b) 9000

Figura 4.13 Respuesta individual de Sinuhé a la pregunta 3.

En la actividad anterior pudo notarse que los alumnos trataron de aplicar los conocimientos adquiridos en la materia de probabilidad y estadística como el uso de técnicas de conteo. En la presente tarea se exhibió de nuevo esta situación pero ahora con el tema “correlación”. Juan del equipo B identifica que hay una correlación lineal y Gilberto del equipo C intenta calcular el coeficiente de correlación pero no concluye. Es decir, los alumnos aplicaron las reglas más recientes que recordaban.

Hubiera sido interesante como una extensión al problema discutir con el grupo este concepto (ya que en las soluciones individuales pudo notarse que dos de los integrantes del equipo B lo trataron como sinónimo de relación) y además de qué manera el cálculo del coeficiente de correlación podría ayudarnos a decidir qué tan confiable sería obtener una interpolación en la gráfica; sin embargo, la profesora no estuvo presente en los equipos en el momento en que realizaron la discusión del concepto y en la discusión grupal no fue mencionado.

Una vez que los alumnos identifiquen que pueden interpolar datos mediante el trazo de una recta que pase por algunos de los puntos de la gráfica podría preguntárseles por ejemplo: ¿Cuál podría ser la recta que mejor se ajusta a los datos?, ¿Qué tan relacionados están los datos proporcionados? ¿Cómo podemos modelar una función que nos permita encontrar la ganancia máxima? ¿Conocen algún otro método para calcular la ganancia máxima de una función? Esto queda como propuesta para una futura aplicación de la actividad.

4.3. Carros de supermercado

Es una tarea corta la cual implica modelar una situación con una función lineal discreta. Los estudiantes necesitan conocimientos de álgebra donde hayan tenido la oportunidad de trabajar con funciones lineales simples y sus aplicaciones. Es necesaria cierta experiencia definiendo variables.

El problema fue planteado de la siguiente manera:

El diagrama de la derecha muestra el dibujo de un carro de supermercado. Abajo se muestra un dibujo de 12 carros acomodados uno junto a otro. Los dibujos son $\frac{1}{24}$ del tamaño real.

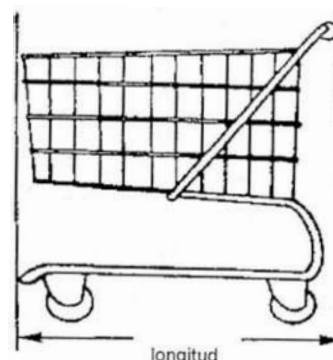


Figura 4.14 Imagen de un solo carrito que aparece en la tarea

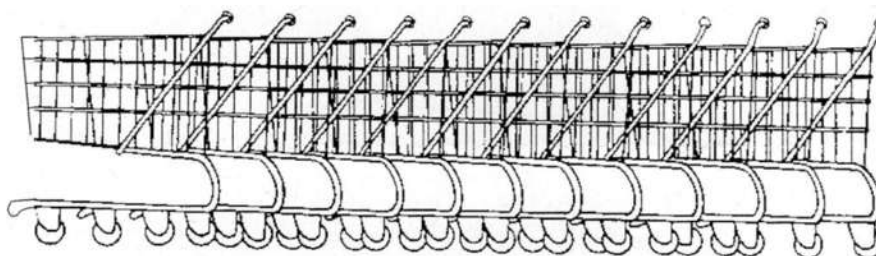


Figura 4.15 Imagen de 12 carros de supermercado apilados.

1. Establecer una regla para obtener la longitud del espacio de almacenamiento s , de los carros de supermercado acomodados, cuando se conoce el número de carros. Explica qué datos necesitas y cómo los usas para obtener la regla.
2. Ahora encuentra una regla que te permita encontrar el número de carros que pueden colocarse en un espacio de s metros de longitud.

4.3.1. Soluciones potenciales

1. a) La medida de un carrito completo en el diagrama es de 4.2 cm. Al aplicar la escala dada obtenemos que su longitud en tamaño real es de $(4.2)(24) = 100.8 \text{ cm} = 1.008 \text{ m}$. Por cada carro anidado se añade una longitud de 1.2cm equivalente a $(1.2)(24) = 28.8 \text{ cm} = 0.288 \text{ m}$ en el modelo real. Hay $n-1$ carros anidados, entonces el espacio de almacenamiento s está dado por la fórmula $s = 1.008 + 0.288(n-1)$.

Puede ser de ayuda *examinar casos particulares* encontrando s para uno, dos, tres, etc. carritos.

b) Podemos expresar la regla en términos más generales como: $s = \frac{24}{100}[l + (n-1)x]$ Donde l es la longitud de un carrito, x es la distancia entre manubrios de carritos consecutivos y n es el número de carros.

c) Consideremos la longitud total de n carros acomodados en fila como los que se muestran en la Figura 4.16. Al unir los carros el espacio de almacenamiento s se reduce $n-1$ veces la magnitud y representada en la Figura 4.17. De esta manera el espacio de

almacenamiento está dado por $s = \frac{24}{100}[nl - (n-1)y]$.

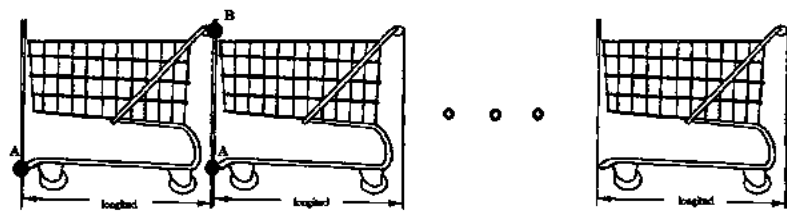


Figura 4.16

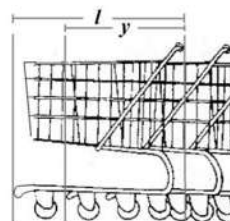


Figura 4.17

2. Despejamos n de las fórmulas anteriores.

Un aspecto a considerar al momento de interpretar las respuestas de los alumnos tiene que ver con las longitudes que muestran las figuras en las hojas de trabajo (las cuales deberían estar en la misma proporción). De manera no intencional, la longitud del carrito en la Figura 4.14 es de 4.8 cm, mientras que en la Figura 4.15 es de 4.2 cm, lo cual le añadió complejidad al problema.

4.3.2. Episodios relevantes durante el trabajo en equipo

En los equipos A, C y D intentaron realizar un acercamiento del tipo c) pero o no lo concretaron o no lo incluyeron en el reporte de equipo como solución válida. En todos los equipos se propuso un acercamiento del tipo b), pero en el caso del equipo C no fue

aceptado por todos sus integrantes. (Dos de los miembros del equipo C se dejaron llevar por la apariencia del dibujo lo cual les condujo a una solución errónea). Los equipos A, B y D advirtieron que las figuras mostradas en la tarea se encontraban en diferente proporción y lo confirmaron en la discusión grupal.

Las variaciones en los acercamientos a la solución y el refinamiento de los procesos mostrados por los estudiantes se presentan con más detalle a continuación.

Equipo A.

Everardo comienza simplificando el problema con un caso concreto diciendo:

“Suponiendo que la longitud de uno (*carrito*) es de 10 centímetros...entonces esto (*la longitud de dos carritos ensamblados*) va a ser 10 centímetros más algo”.

Daniel por otro lado se siente confundido al momento de definir las variables que necesita así que pide a sus compañeros que le recuerden cuál es la incógnita diciendo: “*A ver, ¿qué es lo que te piden?* Esta y algunas otras preguntas como “*¿para qué lo estamos sacando?*”, “*¿cómo lo podemos calcular?*”, “*¿cuál es tu razonamiento?*” realizadas por los miembros de este equipo, son una evidencia de control eficaz de sus procesos de pensamiento al resolver problemas matemáticos. Pudo notarse también que cuando uno de integrantes se estaba desviando de la meta o no consideraba ciertas condiciones del problema, no tardaban sus compañeros en hacérselo notar.

Una vez que Daniel tiene claro qué es lo que debe encontrar y las condiciones para realizarlo es cuando define los elementos necesarios para establecer una propuesta de solución como se muestra en el siguiente párrafo:

“De aquí a acá es L (*longitud de un carrito*) y luego de aquí a acá es X (*distancia entre carritos*). Y aquí está un carrito (*señala con un segmento la longitud del primer carrito del extremo izquierdo de la hilera y escribe L*), y esto es ya un carrito metido (*señala en el dibujo el espacio entre manubrios y escribe X*). Ah, entonces tenemos que conocer L”.

Mientras que Everardo sigue un proceso inductivo, Daniel considera que pueden darle otro enfoque a la solución y trata con un acercamiento tipo c). Martín está indeciso acerca de

cuál de las dos posturas de sus compañeros tomar llegando incluso a mezclarlas como se muestra en la siguiente conversación:

- DANIEL: Qué tal si sumamos uno, dos, tres, o sea, doce L menos...
- EVERARDO: Sería X . Once.
- MARTÍN: Doce L , menos once X .
- DANIEL: Doce L así total, como si estuvieran todos en fila. (*No anidados*)
- MARTÍN: Doce L menos once X te queda L .
- DANIEL: No, ¿y la X dónde quedó?

No es que Martín no supiera sumar términos semejantes, sino que consideró que $12L$ correspondía a la longitud de los 12 carros (no anidados), y al restarle los 11 espacios entre carritos (aquí ya los consideró anidados) le quedaría la longitud del primer carrito; es decir, su error fue por falta de control. Al final tanto Martín como Daniel deciden apoyar el enfoque de Everardo aunque apegándose al número de carros mostrados en la figura.

- MARTÍN: Pero estás hablando de que cada L tiene una X .
- DANIEL: O más bien cuatro X es una L . [Se guía por la apariencia de la figura pero advierte que es necesario establecer la relación exacta]. A ver, necesitamos una regla. L mide 4.8 [mide la Figura 4.14], y las X , 1.2 [mide el espacio entre manubrios en la Figura 4.15]. Sí, y entonces cuatro X es una L . ¿Son $11X$?
- MARTÍN: Serían quince X . Once más cuatro.
- DANIEL: Ah, sí, para ponerlo todo en X ¿no?

Everardo cuestiona la regla enunciada por sus compañeros alegando que funciona sólo para un caso en particular, de ahí que Martín y Daniel concluyen que deben generalizarla. En este episodio Everardo aclara un aspecto clave relacionado con la cantidad de espacios entre manubrios.

- MARTÍN: ¿ L más $11X$?
- [...]
- EVERARDO: Pero ésta fórmula solo funciona cuando son 12 carritos.
- DANIEL: Entonces hay que verlo más universal.
- MARTÍN: Pero están pidiendo... [Vuelve a leer el problema] el espacio de almacenamiento... cuando se conoce el número de carros.

[...]

EVERARDO: La longitud [de un carrito], más el número de carritos menos uno por...

MARTÍN: ¿Por qué menos uno?

EVERARDO: Porque aquí vas a tener 11 [espacios entre manubrios], entonces el número de carritos es 12. Le tienes que quitar uno.

DANIEL: Sí. A ver, hay que comprobarlo.

Cuando realizan la comprobación de la regla que enunciaron observan que algo no anda bien. De acuerdo a la fórmula hallada y a las medidas que registraron, la longitud del espacio de almacenamiento debería ser de 18cm, pero cuando Everardo mide la longitud total de los doce carritos ve es de 17cm (esta medida la obtuvo porque no consideró parte de las llantas de los carritos de los extremos). Él está seguro de que su razonamiento es correcto y entonces vuelve a tomar medidas. De esta manera advierte que las dos figuras mostradas en la tarea tienen diferente proporción por lo cual decide que únicamente tomen en cuenta a la Figura 4.15.

“ L es 4.2. [...] De aquí mide 4.8 (Figura 4.14) y en éste espacio mide 4.2 (Figura 4.15). Y lo estamos midiendo respecto a éste (Figura 4.15). Es que estamos midiendo la longitud total de éste dibujo (Figura 4.15), no de éste” (Ver Figura 4.16).

Martín trata de enunciar la fórmula en términos de un solo dato, ya sea del espacio entre manubrios o de la longitud de un carrito. Sus compañeros le recuerdan que debe tomar en cuenta solamente las medidas de la Figura 4.15 y en particular Everardo le señala que con su regla expresa el mismo razonamiento que él ya había planteado pero dado únicamente en función de la longitud de un carrito.

MARTÍN: Quince X por 1.2 son 18 [...] Con la fórmula que yo tengo me sale lo mismo que a ti.

EVERARDO: A ver, ¿cuál es tu razonamiento?

MARTÍN: Pues eso, que cada cuatro espacios es uno [un carrito].

DANIEL: No, ya no queda.

[...]

EVERARDO: Cabe 3.5 veces X en L .

DANIEL: O sea 3.5 X es igual a una L

[...]

MARTÍN: Ya me quedó. Pero estoy dejando la fórmula de L [en términos de L]. Me queda que L es el primer carrito que tenemos ¿no? Entonces éste ya no lo tomo en cuenta, ya tomo en cuenta los demás, n-1. Tenemos 12 carritos, tenemos 11 [espacios entre carritos]. Sería 11 entre 3.5. Y cada 3.5 (espacios) es una L.

EVERARDO: Viene siendo lo mismo. O sea es el mismo razonamiento.

En la segunda pregunta todos los integrantes del equipo están de acuerdo con que basta con despejar la fórmula que obtuvieron. Everardo y Daniel realizan el despeje por distintos caminos pero comprueban que obtienen el mismo resultado.

The image shows two columns of handwritten mathematical work. The left column (Everardo's) starts with the formula $s = L + (n-1)x$, which is underlined. Below it, $n-1 = \frac{s-L}{x}$ is written. Then, $n = \frac{s-L}{x} + 1$ is written and crossed out with two diagonal lines. The right column (Daniel's) starts with $s = L + (n-1)x$, followed by $s = L + xn - x$. Then, $s - L + x = xn$ is written. Below that, $\frac{s-L+x}{x} = n$ is written. Finally, $\frac{s-L}{x} + 1 = n$ is written.

Figura 4.18 Respuesta a la pregunta 2 por Everardo y Daniel respectivamente.

Equipo B.

En este equipo la escala no fue tomada en cuenta. Uriel al respecto señala: “*La escala no importa mucho porque de todos modos dice que es un aproximado del tamaño real*”, lo cual denota que en este equipo repasaban poco las condiciones del problema pues el enunciado original no dice que sea “aproximadamente” 1/24 del tamaño real. En cuanto a su primera propuesta de solución, la cual es del tipo b), fue sugerida por Uriel:

“Son doce carritos, solamente uno va a ocupar el tamaño total, todos los demás están a una distancia constante. Hay el mismo espacio entre cada uno. O sea que nada más sería, como X [señala la longitud del primer carrito], más un incremento de aquí [señala el espacio entre manubrios], un incremento de X por decirlo, por la cantidad de carritos. [...] Creo que así sería, entonces hay que tomar medidas.”

Enseguida tradujeron la expresión a lenguaje algebraico como $s = x + [\Delta x(n)]$.

En un momento posterior Antonio nota que el espacio entre carritos es una unidad menor a la cantidad de carros y a continuación reescriben la regla de la siguiente manera:

$s = x + [\Delta x(n-1)]$ pero sin especificar la descripción de los elementos que aparecen en ella. Uriel considera conveniente definirlos.

URIEL: Pero es que nosotros sabemos cómo interpretar la X, pero si alguien más lo hace ¿cómo va a saber cuál es X y cuál es el incremento de X?"

JUAN: El incremento sería el espacio entre un carro y otro. [Escribe la definición debajo de la fórmula].

Equipo C.

Al momento de leer el problema Sinuhé fija su atención en la escala. Mindy les sugiere a sus compañeros que se centren en lo que les pide el problema que es encontrar el espacio de almacenamiento, lo cual revela que ella no considera que la escala sea un dato importante. Sin embargo, logra identificar una relación entre dos variables.

"Entre cada carro junto hay un espacio ¿si ves? que es el mismo. Entonces tenemos que calcular ese espacio [entre carritos] porque ya este espacio [el del primer carrito]... [Se queda pensando] no se tiene que contar todos los carros. Tenemos que multiplicar este espacio [entre carritos] por el número de carros."

Sinuhé, por otra parte, no toma en cuenta que deben considerar dos medidas distintas. Le parece suficiente con obtener un promedio de la longitud de cada carro anidado. En el transcurso de la tarea, dudó acerca de si tenía que realizar un planteamiento preciso o si era suficiente con realizar una aproximación.

"Lo que podemos hacer es sacar nada más la medida de esto. [La longitud de los doce carros de la figura] [...] obtendríamos más o menos lo que mide cada carro si ésta medida lo dividimos entre los doce carros.

En otro de sus intentos propone un acercamiento tipo c).

"No espérame, ¿por qué dividirlo? Es que quería sacar ¿cómo se dice?, más o menos la medida que iría entre cada espacio de cada carro. [...] Doce carros, menos tanto espacio que es lo que ocupan [al anidarse]."

En la forma en que Sinuhé y Gilberto deducen su solución puede notarse un débil manejo del control de sus razonamientos. Sinuhé plantea que pueden considerar la longitud de los 12 carros “*olvidando los espacios*” (uno detrás de otro sin anidarse, como en la Figura 4.17). Enseguida multiplica la expresión $12longitud$ (donde *longitud* es la medida de un carrito completo) por $1/24$ pues cree que de esta manera está obteniendo la magnitud de los 12 carros en tamaño real.

Para considerar el espacio que se reduce s debido a la unión de los carros, Gilberto propone que tomen la mitad de la expresión $12longitud/24$ ya que él supone que la parte que un carrito introduce en otro es igual a la mitad de su longitud. Enseguida sustituye la medida del carrito de la Figura 4.14 (que fue de 4.8 cm) en la expresión anterior, sin fijarse que Sinuhé no dividió entre dos como él le sugirió. “Sale 2.4” dice Gilberto. Se queda pensando y añade “y justamente 2.4 es la mitad de la longitud de un carrito”. Aquí es donde pierde el hilo de su razonamiento pues se suponía que estaban calculando el espacio de almacenamiento s para doce carros y luego de realizar la sustitución considera que hallaron la medida del espacio entre carritos. Luego agrega “Por eso yo digo que llega a la mitad. Metes un carrito, llega a la mitad, metes el otro y llega a la mitad. Entonces yo digo que cada espacio (entre carritos anidados) es de la mitad”.

A pesar de que en algún momento Sinuhé observa que la canasta de un carro no entra a la mitad del otro sino un poco más. Finalmente decide que es suficiente con aproximar su resultado.

“Ses igual a 12 veces por 115.2, entre 2 que es igual a 691.2. Entonces s sería igual [...] a 12 por la longitud en tamaño real ¿no?, entre 2 que sería la mitad, porque entra más o menos la mitad de cada carro.”

En este punto Sinuhé ya tenía claro el significado de la escala gracias a la explicación de sus compañeros, pero en algún momento en lugar de interpretar lo que ellos expresaron, se empeñó en tratar de recordar el procedimiento que debía seguir.

SINUHÉ: Bueno. A ver, es que las escalas ya no me acuerdo cómo eran.

GILBERTO: Escala de uno a 100 es que éste, tu dibujo es 100 veces más grande.

MINDY: ¿Qué no sería 100 veces más chico?

SINUHÉ: Es de uno a 100. Esto es digamos de 1 a 24.

GILBERTO: Eso quiere decir que es 24 veces más pequeño. Cada centímetro serían 100.

SINUHÉ: O sea digamos que cada centímetro son... ¿un metro? Entonces aquí sería que un centímetro es igual a 24 metros. Nooo.

GILBERTO: 24 centímetros.

[...]

SINUHÉ: Es que neta ¿cómo se convierte? ya no me acuerdo cómo se convertía a tamaño real. [Se obstina por recordar pero luego reflexiona] Si cada centímetro son 24 centímetros, entonces... 4.8×24 .

Aun cuando el acercamiento de solución de Gilberto y Sinuhé muestra deficiencias, su trabajo revela que de alguna manera tienen claro el concepto de variable, al explicar que: “En lugar de 12 podríamos usar n , para que digamos que n es igual al número de carros.”

Gilberto y Sinuhé lograron llegar a un acuerdo, pero Mindy no. En esta actividad la mayor parte del tiempo ella trabajó por su cuenta. Tal como señala Hagelgans *et al.* “cuando la brecha entre el nivel de los estudiantes es grande, estos pueden llegar a perder la paciencia o desanimarse. No es fácil en la situación en la cual hay dos alumnos menos avanzados (o dos más avanzados) evitar que se forme un subgrupo permanente que casi no se comunica con el resto del equipo”. En este caso Mindy llegó a exasperarse por las opiniones poco razonables de sus compañeros.

Equipo D

José comienza planteando que deben multiplicar la longitud de un carro por 12, parece que ahí no acaba su conjetura pero interrumpe Vanessa haciendo la observación de que los carros al encontrarse anidados ocupan menos espacio que sin anidar. Ella propone multiplicar la longitud del espacio entre manubrios por 12 y agregar la longitud de un carrito. Enseguida José continúa diciendo que además deberán restar la mitad de la longitud de un carro.

Karina es quien va traduciendo a lenguaje algebraico algunas de las expresiones de sus compañeros. (La expresión: “Sería S es igual a 12 por X , menos X sobre 2” enunciada por José, puede verse traducida en la Figura 4.19). Ante la sugerencia de José, Karina objeta que el espacio que un carro introduce en otro deben restárselo a cada carro y no a uno solo

(expresión 2). En este momento José se percató de que no deberán restar 12 veces el espacio introducido sino 11 y lo argumenta de la siguiente manera:

“No pero, hay algo extraño. Este es un carrito ¿no? Luego llega un segundo carrito, ahí va uno [un espacio]. Luego llega un tercer carrito y van dos, cuarto carrito, tres. Y hasta que llegue al 12 van a ser 11 carritos [anidados]. [...] Va a ser 11 veces que se reduce el espacio”.

$$(12)(4) - \frac{x}{2} \quad \text{Expresión 1}$$

$$(12)(x + \frac{4}{2}) \quad \text{Expresión 2}$$

$$x + (11)(\frac{4}{2}) \quad \text{Expresión 3}$$

Figura 4.19

Esta observación motiva a Karina a proponer la expresión 3 mostrada en la figura anterior. José admite que es otra posibilidad pero considera que deben decidirse por una regla en particular. Karina impone que sea la suya.

Por otra parte, Vanessa les demuestra al tomar medidas que, la parte que un carrito introduce en otro no es igual a la mitad del carrito. Entonces Karina reescribe la regla de acuerdo a la notación sugerida por Vanessa como $x_1 + (x_2)(11)$ (donde x_1 es la longitud de un carrito y x_2 es la longitud del espacio entre manubrios) y sustituye en la nueva fórmula las medidas 4.1 cm para la longitud de un carrito y 1.2 cm para el espacio entre manubrios, obteniendo un total de 17.3 cm para el espacio de almacenamiento. Para comprobar miden la longitud de la hilera de 12 carros registrando una longitud de 17.1 cm. José añade: “Sí, *está bien, por errores de medición*”.

Ahora que están seguros de que su procedimiento es correcto proceden a la generalización de su regla.

KARINA: ¿Cómo haríamos la regla general? Sería X , o sea la longitud más la suma de todo esto. Pero...si es por regla general..

VANESSA: Podría ser igual a, n menos 1, por x_2 , más x_1 .

En este equipo sí consideran importante usar la escala. José propone aplicar una regla de tres y específicamente dice: “Veinticuatro veinticuatroavos es igual a x y lo que nos dio aquí (espacio de almacenamiento) es igual a un veinticuatroavo”. Vanessa sugiere simplemente multiplicar por 24.

4.3.3. Presentaciones y discusión de resultados

A petición de la profesora Sinuhé del equipo C pasó al frente a presentar su propuesta de solución. Él comenzó señalando cuál era la incógnita del problema y enseguida indicó que la escala debía estar implicada en la fórmula ya que era dada como dato, por lo tanto, fue necesario que midieran la longitud del carrito de la figura superior la cual tenía una longitud de 4.8cm. A continuación expresa cómo obtuvieron la medida de un carrito en tamaño real: “Si la escala es de 1 a 24... o sea que cada centímetro que tenemos en nuestro dibujo va a ser 24 veces lo que sería en realidad. Multiplicamos 24 por 4.8 y nos da que es un resultado de 115.2 centímetros”. Lo cual pone de manifiesto que las discusiones que llevó a cabo con sus compañeros resultaron ser la clave para que él pudiera comprender lo que la escala representaba. Enseguida continuó:

“...observamos en el dibujo que aproximadamente cada carro no quedaba separado sino quedaba en medio de cada coche o sea que más o menos era la mitad de lo que entraba. Entonces de éste resultado [115.2×12] lo dividimos entre 2. Y el resultado de esto nos dio 691.25 cm [sic]. Así que ahí más o menos tenemos nuestro resultado del espacio de almacenamiento. Entonces ya teniendo esto podemos hacer nuestra propia fórmula que sería s es igual a, en éste caso sería número de coches por la longitud del tamaño real, entre 2”. [Continúa de paso con la pregunta 2 y despeja la fórmula que acaba de generalizar].

$$s = \frac{2(115.2)}{2}$$

$$s = 691.25$$

$$s = \frac{N(LTR)}{2}$$

$$2s = N(LTR)$$

$$LTR = N$$

Figura 4.20

Aquí la profesora identifica que es el momento de llevar a cabo la discusión ya que el grupo permanece en silencio.

PROFESORA: ¿Cómo ven? Le pueden hacer preguntas.

DANIEL: ¿Pero no sería como algo raro decir que entra la mitad?

GRUPO: Siiii. [Los alumnos hablan entre ellos]

SINUHÉ: Es aproximado.

GRUPO: Nooooo. [Se escuchan murmullos de desaprobación]

ANTONIO: No puede ser aproximado.

DANIEL: Como son matemáticas entonces debe ser una fórmula más exacta. Entonces la fórmula sería s es igual a “aproximado”, no sería “igual”.

El grupo apoya a Daniel. Enseguida se lleva a cabo una discusión acerca de la cantidad de veces que se reduce el espacio:

JOSÉ: Cuando usas el 12 ¿por qué lo usas? Porque como yo lo veo hay un carro y detrás de él... [Hace una pausa]. Supuestamente deben ser 12 carros en total, pero entran 11 en uno ¿ves?, ¿no debe de ser 11 ahí?

SINUHÉ: Es que mira, en un espacio hay 12 carros, no hay 11.

JOSÉ: Hay un carro, pero entran 11, después de él, ya son 12 carros ¿no?

SINUHÉ: Pero de todas formas queda una mitad dentro. [El grupo se muestra inconforme]. Aproximado pues.

A continuación la profesora pide al equipo A que exponga su solución. Everardo toma la iniciativa de pasar al frente, dibuja los primeros dos carritos y explica:

EVERARDO: El problema nos pide encontrar la longitud del espacio de almacenamiento. Entonces, primero dices que de aquí a aquí va a ser L y de aquí a aquí va a ser x (Fig. 4.2.1). Entonces [...] S , el total del espacio de almacenamiento igual a la longitud, o sea, ésta longitud siempre la vas a tener [señala el carrito a la izquierda] y en los demás espacios se reduce. Entonces es L más, el número de carros menos 1. ¿Por qué menos 1? Porque éste [señala el carrito a la izquierda] ya lo no lo estás contando, este ya lo estás contando en la longitud [señala L]. Por X . (Subraya la expresión $S=L + (n-1) x$)”.

URIEL: Sí está bien. [Antonio levanta el pulgar en señal de aprobación].

PROFESORA: Si se fijan, sus compañeros no usaron escala. ¿Qué sucede con la escala?

ANTONIO: No tiene que ver porque estamos usando una ecuación.

EVERARDO: Exactamente, es una ecuación en donde tú pones los datos, la escala pues...

Algunos alumnos murmuran que la escala es aparte, es decir, no consideran pertinente incluirla en su fórmula debido a que la escala puede cambiar. Everardo añade: “En la siguiente [...] simplemente despejas”. [Una vez que termina de despejar un alumno aplaude].

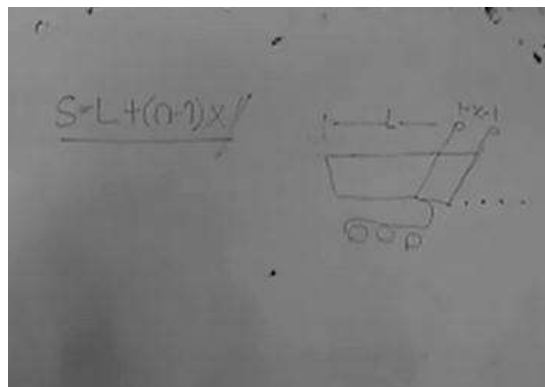


Figura 4.21

En la discusión grupal se presentó de manera espontánea la confrontación de ideas con miembros de distintos equipos. Los integrantes de los equipos A, B y D coincidieron en que sus soluciones eran iguales pues la única diferencia tenía que ver con la notación que usaron. Algunos de los comentarios adicionales generados en esta etapa fueron los siguientes:

DANIEL: [A José] Esta longitud (Figura 4.14), no es la misma que esta longitud (Figura 4.15)

JOSÉ: Hay que usar la longitud de los de abajo.

MARTÍN: [A todo el grupo] Utilizamos las mediciones de los carros acomodados y descubrimos que L no es la misma longitud de este (Figura 4.15). Aquí mide 4.8 y aquí mide 4.2.

URIEL: Las mediciones que tienen ahí es un problema. Porque la escala que tiene el carro de arriba es diferente a la que tienen acá abajo todos. Por eso no pudimos tomar bien la consideración de la escala.

De esta manera trataron de justificar la razón por cual no usaron la escala, agregando además que buscaron encontrar una fórmula general en la cual daban cabida a que las constantes L y x (en el caso del equipo A) pudieran tener otras medidas. La escala la aplicarían al final.

4.3.4. Reflexiones globales

Al resolver esta tarea los alumnos tuvieron la oportunidad de utilizar recursos relacionados con nociones de proporcionalidad y variación lineal. En general la comunicación fue muy fluida y en los equipos cada integrante fue capaz de proponer sus conjeturas que mediante las críticas de sus compañeros se fueron puliendo.

Entre las observaciones más destacables realizadas por los alumnos con el fin de corregir o mejorar los planteamientos iniciales podemos mencionar: el número de espacios entre manubrios de n carros acomodados es de $n-1$; para saber qué parte de un carro se introduce en otro al anidarse es necesario medir y no solo “tantear”; la regla debe ser enunciada de manera general y no de acuerdo a la situación particular de la figura; es necesario especificar el significado de cada uno de los elementos de la fórmula para que otras personas puedan entenderla y la longitud de un solo carrito es diferente en las dos figuras mostradas en las hojas de trabajo.

Debido a la complejidad añadida por los distintos tamaños de las figuras, fue necesario añadir tiempo extra para completar la tarea.

Al monitorear constantemente sus acercamientos de solución, los equipos A, B y D, advirtieron que solo debían tomar en cuenta las medidas de la Figura 4.16. Sin embargo, este proceso no tuvo lugar en el equipo C, lo cual los mantuvo en un planteamiento erróneo.

Es cierto que al trabajar en equipo los alumnos se exponen a cambiar de una idea correcta a una incorrecta, como en el caso de Sinuhé, quien en un inicio intuyó que al unir los carros la parte que uno introduce en otro es más de la mitad de su longitud, pero que luego de intercambiar ideas aceptó que entraba “más o menos la mitad”. Sin embargo, las opiniones vertidas durante la discusión grupal lo motivaron a que aceptara que la solución que presentó su equipo se trataba solamente de una aproximación.

Aun cuando en casi todos los equipos fue planteado un acercamiento tipo c), este no fue aceptado como respuesta oficial, quizá en parte por las dificultades iniciales que mostraron los alumnos para definir las variables necesarias, pero también porque les pareció más práctico medir la distancia entre manubrios que la longitud del espacio que se reduce al unir los carritos.

5. Conclusiones

Esta tesis surgió de la necesidad de proporcionar información de utilidad referente a la implementación de una forma particular de instrucción que fomenta el aprendizaje a través de la resolución de problemas y el trabajo cooperativo.

Para cumplir con los objetivos planteados en el primer capítulo, se desarrolló un trabajo de investigación a partir del análisis de las situaciones y acciones que de alguna manera contribuyeron a la evolución de las estrategias e ideas exhibidas por un grupo de alumnos de nivel medio superior al resolver un conjunto de tareas matemáticas. Esto sucedió en un ambiente en donde se combinó el trabajo en equipos, grupal e individual.

Algunas conclusiones obtenidas de este análisis son las siguientes:

En general, las tareas y forma de instrucción resultaron ser atractivas para los estudiantes, pues percibieron que el tiempo pasó rápido, se mostraron atentos durante el trabajo en equipos y la discusión colectiva, además estuvieron dispuestos a realizar conjeturas y proponer aportes, de manera que fue posible llevar a cabo el análisis durante el proceso de solución. Las actividades al resultarles significativas, permitieron recuperar sus procesos de pensamiento.

Durante la aplicación de las tareas, los alumnos tuvieron la oportunidad de estudiar contenidos fundamentales del currículo relacionados con la generalización de patrones algebraicos, conversión de unidades, medición, transformación de escalas y funciones lineales discretas (interpretar, modelar y hallar el máximo). Entre las heurísticas que se promovieron con las actividades podemos mencionar: establecer submetas, obtener el resultado de una manera diferente, considerar casos particulares, buscar contraejemplos y generalizar el resultado.

Se recabaron evidencias de que al trabajar en los problemas, las propuestas de solución iniciales de los alumnos fueron incompletas, presentaban inconsistencias o eran inaceptables, bien porque: no entendieron qué era lo que se pedía, intentaron aplicar de manera mecánica métodos y procedimientos que habían utilizado de manera reciente,

desconocían o no visualizaban cómo aplicar ciertas heurísticas, se empeñaban por recordar en lugar de reflexionar acerca de los conceptos, implementaban la primera idea que se les ocurría sin considerar la magnitud del trabajo y tiempo que tendrían que invertir (es decir, no planificaban), se rehusaban a verificar sus resultados, cometían errores de ejecución o incluso no seguían sus propios argumentos. Sin embargo, la discusión en equipo y grupal, presentó un escenario en el cual los estudiantes pudieron exhibir contraejemplos y nuevos planteamientos, monitorear de manera mutua del proceso de solución, valorar la eficiencia y exactitud de los distintos procedimientos, defender propuestas, cambiar puntos de vista luego de escuchar opiniones razonables, así como realizar observaciones sobre cómo comunicar de manera completa sus resultados. Es decir, la dinámica de la clase permitió que distintas habilidades se combinaran y complementaran entre sí, dando lugar al descarte o mejoramiento de las estrategias débiles.

En la mayoría de los casos, los logros obtenidos por los alumnos al rehacer las tareas de manera individual tienen que ver con la incorporación de estrategias y observaciones acertadas que no fueron contempladas o se abordaron de manera inadecuada durante el trabajo en equipo. Así, en la actividad “Extraño pero verdadero”, los integrantes de los equipos B, C y D toman como muestra la solución del equipo A en la pregunta 2. Para la pregunta 3 los alumnos tienen como modelo la respuesta del equipo C y para la cuarta la del equipo D. (En la primera, no hubo problema desde el inicio). Para la tarea “La revista”, el total los alumnos se convenció de que debían calcular todas las ganancias posibles de acuerdo a los datos de la tabla. En algunos casos (equipos A y C) hubo alumnos que consideraron, aunque de manera vaga, que podrían obtener una ganancia mayor si interpolaban datos de la gráfica. Las dificultades que surgieron, tales como la interpretación de los datos de la gráfica, quedaron resueltas durante el trabajo en equipos. Finalmente, en la actividad “Carros de supermercado”, el equipo C, que fue el que mostró mayores dificultades, cambió totalmente su manera de argumentar su solución.

Los puntos anteriores son indicios de una evolución en los niveles de entendimiento de los estudiantes en cada una de las tareas, es decir, tuvieron efectos positivos las cualidades de las tareas y la forma de instrucción en la cual el papel del profesor es el de un orientador del proceso de aprendizaje.

Por otra parte, de acuerdo con Piaget, además de la interacción social, la experiencia física y la lógico-matemática juegan un papel fundamental en el aprendizaje. Un ejemplo en el que se ilustran estos dos tipos de experiencias es el caso de Uriel cuando escribe una lista con los primeros 17 números y los cuenta de uno por uno, para finalmente darse cuenta de que no era posible que cada columna estuviera formada por 26 dígitos. En los momentos en que los alumnos se alejan del equipo para pulir sus ideas con el fin de convencer a sus compañeros, buscan tener experiencias de ambos tipos. Luego de reflexionar sobre las acciones que han llevado a cabo sobre objetos, llegan a ser capaces de entender, deducir o abstraer algún resultado. De esta manera, el distanciarse del equipo por instantes resulta positivo, pero siempre y cuando se mantenga la comunicación con el grupo acerca de lo que se ha realizado y por qué se ha descartado si es el caso.

Por último, para que se desarrolle polémica durante la discusión grupal, es necesario que de manera previa al desarrollo de la sesión, el docente trate de predecir los posibles acercamientos de los estudiantes, y durante el desarrollo de la clase deberá estar muy atento a las ideas que van surgiendo durante el trabajo en equipo, pues el objetivo es que destaque y sistematice las ideas relevantes de una forma que aliente una mejora en la manera pensar de sus estudiantes y contribuya a destrabar controversias. Así, uno de los principales retos en esta forma de trabajo, es saber cómo hacer frente y sacar provecho a soluciones inesperadas, además de cuándo y cómo intervenir sin eliminar el reto de resolver la tarea.

Bibliografía

Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum: High School Assessment Package 1 & 2 (1999, 2000). White Plains, Nueva York: Dale Seymours Publications.

Bransford, J., Stein, B. (1986). *Solución IDEAL de problemas*. Madrid: Labor.

Gómez, P. (1996). Riesgos de la innovación curricular en matemáticas. Revista EMA, 1(2), pp. 97-114. Versión digital en: <http://funes.uniandes.edu.co/314/>

Hagelgans, N. L., B. E. Reynolds, K. Schiwingendorf, D. Vidakovic, E. Dubinsky, M. Shahin y G. Wimbish Jr. (eds.). (1995). *A Practical Guide to Cooperative Learning in Collegiate Mathematics*, Mathematical Association of America. Washington, DC, MAA Notes, numb. 37.

Hernández, J. (2000). “Una mirada hacia las “matemáticas modernas”. *Las matemáticas del siglo XX: Una mirada en 101 artículos* [online]. Vol. 43, (60), pp. 299-306. Versión digital en: http://www.sinewton.org/numeros/index.php?option=com_content&view=article&id=72:volumen-43-septiembre-2000&catid=35:sumarios-webs&Itemid=66

Hersh, R. (1986). “Some proposals for revising the philosophy of mathematics”. In T. TYMOCZKO (Ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Boston: Birkhauser.

Johnson, D. & Johnson, R. (1999). *Aprender juntos y solos: Aprendizaje cooperativo, competitivo e individualista*. Buenos Aires: Aique.

Lesh, R. et al. (2000). “Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers”. In A. Kelly y Richard Lesh (eds.) *Handbook of research design in mathematics education*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, pp. 591-645.

Lester, F. & P. Kehle. (2003). “From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity”. In R. Lesh (ed.), *Beyond constructivism, models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching*. Lawrence Erlbaum Associates.

Mason, Burton y Stacey (1992). *Pensar matemáticamente*. Traducción en español de “Thinking mathematically”. Madrid: Centro de Publicaciones del MEC.

Molina, M., Castro, E., Molina, J., Castro, E. (2011). “Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza”. Enseñanza de las Ciencias, 29(1), pp. 75-88. Versión digital en: <http://funes.uniandes.edu.co/1568/>

- NCTM. (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics. Versión digital en: <http://www.fayar.net/east/teacher.web/math/standards/previous/ProfStds/>
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*, Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics. Versión digital en: <http://www.fayar.net/east/teacher.web/math/standards/document/index.htm>
- Piaget, J. (2001), *Studies in reflecting abstraction*. Philadelphia: Psychology Press.
- Polya, G. (1945). *Como plantear y resolver problemas*. Traducción en español de “How to solve it”. México: Trillas.
- Polya, G. (1962), *Mathematical Discovery*, Vol. 1. New York: Wiley & Sons.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis. [Versión conmemorativa 20º aniversario], pp. 1-35.
- Santos, L.M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: Fundamentos cognitivos*. México: Trillas.
- Santos, L.M. (2008). “La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica”. En Luengo, Ricardo; Gómez, Bernardo; Camacho, Matías; Blanco, Lorenzo (Eds.), *Investigación en educación matemática* Vol. XII (pp. 159-192). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. Versión digital en <http://funes.uniandes.edu.co/1193/>
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, Academic Press.
- Schoenfeld, A. (1992). *Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-Making in Mathematics*. Berkeley. Versión digital en: http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT7050/Schoenfeld_MathThinking.pdf
- Sepúlveda, A. y Santos L.M. (2004). “Developing Understanding in Mathematical Problem-Solving: A Study with High School Students”. In D. E. McDougall y J. A. Ross (eds.), *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Toronto, OISE/UT, pp. 499-506.
- Sepúlveda, A. y Santos L.M. (2006). “Desarrollo de episodios de comprensión matemática: Estudiantes de bachillerato en procesos de resolución de problemas”, *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, Vol. 11 (31), pp. 1389-1422.
- Vilanova, S. et al (2001). “La Educación Matemática: el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje”. En: *Revista Iberoamericana de Educación*. Versión digital en <http://www.rieoei.org/deloslectores/203Vilanova.PDF>

Zeitz, P. (1999). *The Art and Craft of Problem Solving*. (2^a Ed.) San Francisco: John Wiley & Sons, Inc.

Anexo

Transcripciones relevantes.

EXTRAÑO PERO VERDADERO.

Equipo A.

[Cada integrante de manera individual da lectura al problema]

- DANIEL: O sea por cada página eran 260 números. Porque por cada columna son 26.
- EVERARDO: ¿Cuántos? ¿260?
- DANIEL: Sí. Pero son 96 páginas. 260x96 y esa es la primera.
- EVERARDO: En la primera libreta.
- DANIEL: Sí.
- EVERARDO: Usó 98 bolígrafos. El total de dígitos en los números que escribió Sofía es de 5, 888,896.
- DANIEL: Ahorita lo que nos piden son los números y dígitos. Del 1 al 10 ya son 9 que tienen un dígito y luego del 10 al 99 son 89.
- EVERARDO: No espérate es que ya tenemos el total de dígitos. (5, 888,896)
- DANIEL: Entonces eso divídelo... pues igual entre 40.
- EVERARDO: ¿Entre 40? Es que... está medio chafa, porque dice 40 libretas de 96 páginas y terminó en la siguiente.

[La intención de Everardo era calcular el número exacto de libretas para luego obtener el promedio de los dígitos escritos en cada una]

- MARTÍN: Terminó en la libreta 41 pero no la llenó.
- EVERARDO: No acabó las 96 páginas. Pudo haber llegado a la mitad, a un cuarto de la libreta.
- MARTÍN: Dos páginas...
- DANIEL: A ver, números deben ser 1, 000,000 y dice aquí que son... ¿cómo lo podemos calcular?
- MARTÍN: Pues en corto. Nada más multiplica esto (24,960) por 40 y se lo restas a esto (1, 000,000)
- DANIEL: O sea multiplico 24,960 por 40. Sale 998,400. Faltan 1600 números ¿En la última libreta?
- MARTÍN: 1600 números entre 260. Vamos a saber cuántas páginas hizo ¿no? Si lo dividimos entre 260.
- DANIEL: ¿Pero para qué lo estamos sacando? Primero checa ésta pregunta.
- EVERARDO: A ver chécala pues. ¿Cuántos dígitos escribió Sofía en su primera libreta de ejercicios?
- DANIEL: Del 1 al 10 son 10 números. No espera, del 1 al 9 son 9 números con un dígito y luego del 10 al 99 son 89 números con dos dígitos y luego del 100 al 999 son tres dígitos.
- MARTÍN: ¿No serían 91? 91+9

DANIEL: 89 ¿no? [...] Del 10 al 20 son 11 números.

EVERARDO: Del 1 al 26 ¿Cuántos dígitos hay? Del 1 al 10 son 11 dígitos. Del 11 al 20 son 22.

DANIEL: No, son 20 y luego los 6 son 12 dígitos.

EVERARDO: Entonces son $11+20+12$. 43 del 1 al 26.

DANIEL: ¿Y eso por qué?

EVERARDO: No sé. Déjame ver si sí sale y ya les digo.
[Everardo calculaba la cantidad de dígitos de cada columna. Intentaba encontrar un patrón]

MARTÍN: Según yo son 180 dígitos

EVERARDO: ¿De la primer libreta?

MARTÍN: No, de cuando llega hasta el 100.

EVERARDO: ¿180?

MARTÍN: Ajá, más 9... 189 del 1 al 100.

EVERARDO: Quiero llegar del uno al cuarentai... no pues síguele para que nos expliques. *(Continúa trabajando en el conteo de dígitos en la primera página).*

MARTÍN: Son 9 los primeros más, 11 del 10 al 20, más 10 al 30, más 10 al 40, más 10 al 50, más 10 al 60, más 10 al 70, más 10 al 80, más 10 al 90. Antes de que lleguemos a los...

DANIEL: Más 9.

MARTÍN: *(Realiza la suma en la calculadora. Obtiene 90)* Por dos, 180. Más 9. Del 1 al 100 son 189. Y en cada libreta llegó al 24,960. Haber, del 100 al 200 son 101.

DANIEL: Y entonces ponle 101 más 100.

MARTÍN: Más 100..., y llegamos al 300, 400,..., 900, más 99. *(Al teclear perdió la cuenta y agregó 100 más. Obtuvo 1000)* Por 3. Tres mil.

DANIEL: Entonces del 1,000 al 2,000 son 1,001. Serían mil por...

MARTÍN: Pérame, pérame. Llegaríamos hasta el 9,999 ¿no?

DANIEL: Sí.

MARTÍN: Serían mil por 9. *(Se queda pensando)* Pero nos están dando números cerrados.
[Con números cerrados se refiere a números de la serie: 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000,...]

DANIEL: ¿Y qué tiene?

EVERARDO: Estos no son cerrados. *(Se refiere a los que obtiene en el cálculo de dígitos columna a columna)*

MARTÍN: Ahorita que sacamos la cuenta del 101 al 999 *(realmente la obtuvieron del 100 al 999)* nos dio mil y lo multiplicamos por tres dígitos. Nos da mil números del 101 al 999.

DANIEL: Entonces acá van a ser 10,000 por 4. Cuarenta mil.

MARTÍN: ¡Tenemos que llegar al 24,960! *(Le dice a Everardo riéndose cuando ve que calcula los dígitos columna por columna).*

[...]

MARTÍN: Es que hay que hacer una fórmula porque así está complicado.

DANIEL: Es que así da flojera.

MARTÍN: ¿Sí verdad?

EVERARDO: No hallo la secuencia.

MARTÍN: Es que sí hay una secuencia.

DANIEL: A ver, del 1,001 al 10,000 son 10,000 números. Por 4. Entonces del 10,001 al 99,999...

MARTÍN: No tenemos que llegar al 99,999, tenemos que llegar al...

DANIEL: Son 100,000 números. No, son...

MARTÍN: Sí, mira, son 10,001 más 10,000, más 10,000... *(Va agregando a la calculadora)*

DANIEL: Y no son 100,000.

MARTÍN: Vamos a sacar del 10,001 al 24,960. Llegamos al 10,001+10,000 llegas al 20,000. Más 4,960. Tenemos 24,961 números. Por 5.

DANIEL: ¿Esos son los números que hay? No. Entonces sería 14,961. *(Entre 10,000 y 24,960)*

MARTÍN: No mira, tenemos 10,001 más 10,000,

DANIEL: Ya son 20,000. No.

MARTÍN: Sí, aquí llegas al 20,000. Más 4,960. Llegas al 24, 961. Por 5. 124,805 dígitos. Ahora hay que sumarlos.

DANIEL: $124,805 + 40,000 + 3,189$.

MARTÍN: Tenemos un total en la primer libreta de 167,994. Ya tenemos la primera. *(A Everardo)* Te toca.

DANIEL: ¿Cuánto te salió?

EVERARDO: Todavía no lo acabo.

[Pregunta 2]

DANIEL: Del 100,000 al 200,000 hay 100,001 números

MARTÍN: 100,000 por 8

DANIEL: Del 200,001 al 300,000... del 900,000 al 999,999. *(Algún error comete al manejar la calculadora y le resultan 1, 800,000. [Quizá oprimió sin querer muchas veces más de las que debiera las teclas + =])*

MARTÍN: 1, 800,000. Por 6. 10, 800,000. No, entonces no terminó. Si hubiera llegado a un millón entonces hubiera escrito más de diez millones de dígitos. Está mal.

DANIEL: Han de ser 55 millones. Algo así

[Revisión de la solución]

DANIEL: Es que todo está bien.

EVERARDO: Sí pero no nos salen los dígitos. ¿Por qué aquí le pusieron 10,001 --- 24,960?

MARTÍN: Porque del 10,000 al 20,000 hay 10,001. Más 4960. Son 14,961.

DANIEL: Era lo que yo te decía.

MARTÍN: Sí es cierto. *(Corrigen)*

EVERARDO: Y aquí es del 100 al 200 hay 201.
Entre Daniel y Everardo verifican cuántos números hay del 100 al 999. Les resultan 900. Corrigen los demás resultaos.
 [...]

MARTÍN Mira, creo que ya encontré algo ahí. Una relación. El número deseado más 1 multiplicado por los dígitos totales.

DANIEL ¿Número deseado? Más bien la cantidad de...del número de dígitos...no... La cantidad de números que hay entre dos cifras pero de la misma cantidad de dígitos.

Equipo B.

[Cada integrante da un vistazo rápido al problema. A sugerencia de Antonio, Uriel: comienza a leer en voz alta].

URIEL: Este problema te da la oportunidad de...

ANTONIO: Eso no lo leas, ¡ya el problema!

URIEL: Sofía tiene extraña obsesión...escribió los números en 10 columnas en cada página, con 26 números por columna.

JUAN: Entonces serían 260 números.

ANTONIO: Por página.

URIEL: Usó 98 bolígrafos. El total de dígitos en los números que escribió Sofía fue de 5, 888,896.

JUAN: Entonces quiere decir que aquí empezó con los dígitos 1,2...así que son los dígitos que se necesitan...

URIEL: Para completar un millón.
 [...]

URIEL: ¿Cuántos números y cuántos dígitos escribió Sofía en su primera libreta?

ANTONIO: ¿Cuántas columnas son? Son 10 columnas y en cada columna son 26. Entonces son 26x10, son 260.

JUAN: Entonces son 26x10, son 260. A ver, en éstas *(señala un dibujo en el que representa las 10 columnas)* hay tres dígitos.

URIEL: Pero son 260 dígitos, por lo cual no es hasta el número 260. *(Uriel: piensa que Sofía escribió 260 dígitos en la primera página y que deben calcular hasta que número llegó escribiendo ésta cantidad de dígitos).*

JUAN: No, escribió 260 números pero no dígitos. El 260 contiene ya tres dígitos. Entonces en algunas columnas de aquí para acá ya hay de tres. Sí, ya ves que empieza en el 1,2, 3, 4, 5, 6, 7,8, 9, hasta ahí son 9 dígitos, pero empieza a cambiar en el 10, 11, y así se va.

ANTONIO: Sí pero dice números, no dígitos.

JUAN: Dice números. (Lee de nuevo el problema) No, dice encontrar los dígitos y también números. Ya sabemos que números son 260. ¿Y cuántos dígitos escribió Sofía? Ahora los dígitos son los que tenemos que encontrar. Ah, ya lo tengo, si aquí son 26. Del 1 al 9 son 9 dígitos.

ANTONIO: Resta 26-9.

JUAN: Y 26-9 son... de dos dígitos 17¿no? Entonces son 9 dígitos más 17.

ANTONIO: En la primera columna.

JUAN: Y cuántos serían...Aquí llegó a 26 (*señalando la primera columna*) acá llegaría al ¿52?

URIEL: Sería de 26 en 26. (*Señalando cada columna*).

JUAN: (*desesperado*) Nooo.

URIEL: Espera, según entiendo yo tiene 1, tiene 26 dígitos así (*señala en línea vertical*)

ANTONIO: 26 números, no dígitos. Mira, hasta la imagen lo representa.

. *Uriel: comienza a escribir números del 1 al 17. Los va contando*

URIEL: Creo que es hasta el 18... (*Se queda pensando porque no le resultan 26 dígitos.*)

ANTONIO: (*A Juan:*) Del 1 al 9 son 9 dígitos, como sabes que son 26 números a 26 réstale 9, te quedan 17 números que fueron con 2 dígitos. Entonces simplemente a 17 multiplícalo por 2, son 34, más 9 son 43 dígitos.

JUAN: Ahora hay que ver las columnas. En estas columnas (*señala el dibujo a partir de la quinta*) ya debe de haber de tres dígitos. Ahora hay que ver...26+26 son 52.

ANTONIO: En la tercera 26x3. Llega al 78. Multiplicamos 26x4, son 104. Mira, aquí empieza a haber de tres. (*Cuarta columna*) Ahora, la pregunta sería en qué momento preciso fue cuando empezó a cambiar. A ver, contemos. A 100 quítale 78, son 22. O sea que en el número 22 cambió a tres dígitos. (*Se refiere al número de la cuarta columna en la posición 22*). Entonces 26-22 son 4 con tres dígitos. (*No cuenta al dígito en la posición 22 a pesar de que dijo que a partir de él los números tienen ya tres dígitos*)

URIEL: Lo que ustedes están sacando son la cantidad de dígitos. ¿Y por qué no simplemente multiplican 43 por ésta cantidad? (*Por 10*).

JUAN: No porque va aumentando.

ANTONIO: Aquí ya va a aumentar a tres cifras y es lo que estamos precisando. Haz de cuenta aquí son 43, 52, 52. (*Cantidad de dígitos que hay en la primera, segunda y tercer columna respectivamente*) Aquí llega al 78. (*Último número de la tercera columna*) Pero si multiplicas 26x4, que representa la cuarta columna te va a dar 104. Por lo tanto tenemos que 100-78 te queda 22. 26-22 son 4, o sea que los cuatro últimos números de la cuarta columna son de tres dígitos. Multiplica 22x2, son 44. Ponle 44, más 4x3, son 12. Son 56 dígitos en la cuarta columna.

JUAN: Ahora hay que hacer la suma. La primera es de 43, la segunda de 52, la tercera de 52,...más 56, más 78 seis veces.

ANTONIO: Según nuestros cálculos aritméticos son 671 dígitos.

URIEL: Eso multiplícalo por 96 y si nos da la cantidad de dígitos...

ANTONIO: ¿Por qué por 96? Es que varía.

JUAN: *(desesperado)* Te digo que va aumentando. En 1 000 ya tiene 4 dígitos, en 10 000 ya tiene 5.

URIEL: Explícame de nuevo por qué salieron 43 dígitos.

Antonio: y Juan: le explican.

JUAN: Ya tenemos el primero. Ah, pero tenemos que escribir dos métodos. Tiene que haber un método por fórmulas como las que llevábamos.

Enseguida el equipo se dedica a ordenar el resultado de su trabajo. Uriel: es el encargado de escribir y Juan: y Antonio: le explican el procedimiento. Juan: le hace ver a Antonio: que cometió un error al calcular la cantidad de números de tres dígitos.

ANTONIO: Multiplica 26×4 . Entonces sabes que el último número de esa columna es 104. Entonces a 100 réstale 78, son 22.

JUAN: Entonces sólo son 4 números con 3 dígitos. Dices que llega al 104. Son 104, 103, 102, 101, 100. *(Los anota en lista)* Fíjate, son 5 números que ya contienen tres dígitos.

URIEL: No cuatro como dijiste tú.

JUAN: Son 15 dígitos.

ANTONIO: Nomás aumentale tres dígitos a los que tenemos y ya.

JUAN: [A Uriel] Pero no es esa resta que dice Antonio:

URIEL: Yo creo que no.

JUAN: Entonces del 78 al 99 ¿cuántos hay? A 99 le restas 78 porque sabes que son de dos dígitos.

ANTONIO: A 100.

JUAN: Hay 21 números con dos dígitos, por lo que 5 números de ésta columna *(la cuarta)* son de tres dígitos. Entonces son $21 \times 2 + 15$ son 57.

Para calcular la cantidad de números que hay del 53 al 99, Uriel: usa la técnica que mediante un ejemplo propuso Juan: Antonio: supone que Uriel: confunde números con dígitos e intenta explicar de nuevo cómo han calculado los dígitos en cada columna.

URIEL: A partir del 53 va a haber en la tercera columna. O sea que al 99 le vas a quitar 53

ANTONIO: ¿Por qué 53?

URIEL: Ah, no, 52

ANTONIO: ¿Por qué 52?

URIEL: Porque en la tercer columna empieza a partir del 53.

ANTONIO: *(se desespera)* Es que tú estás confundiendo números y dígitos.

URIEL: No estoy confundiendo números y dígitos.

ANTONIO: Mira, te lo voy a explicar. Haz de cuenta son 26 por columna. En la cuarta si multiplicas 26 por 4 sabes que el último número es 104. Por lo tanto sabes que hay un cambio de dos a tres dígitos en ésta columna. Lo que queremos saber es en qué momento cambia. Si en el último

número (*de la tercera columna*) termina en 78, tenemos 100-78 me queda 22, o sea que en el número 22 son todavía de dos dígitos. Entonces por lo tanto, mmm también contando al 22 son cinco números en esa columna que tienen tres dígitos. Entonces eso lo multiplicas por tres y los restantes que son 21 los multiplicas por 2 y te sale el número total de ésta columna. *Juan: y Uriel rectifican y encuentran que hay 672 dígitos en la primera página. Intentan hallar un método distinto para la pregunta que acaban de responder*

ANTONIO: ¿Pero cuál sería otra forma?

JUAN: Para que te dé los 672... ¿cómo le haríamos?

ANTONIO: Haz de cuenta...vamos a llamar variables. Mmm... equis... ¿pero qué sería equis?

URIEL: La primer columna. Hasta la tercera columna serían variables.

ANTONIO: O equis sería...tendríamos tres variables “x”...un dígito, “y”, dos dígitos, “z”, tres dígitos. Nueve equis más...

[Escribe la expresión $N_d = 96\{(9x+17y)+(52y)+(21y+5z)+(156z)\}$ donde $x=1, y=2$ y $z=3$].

ANTONIO: Bueno aunque es prácticamente lo mismo. Pero se ve más bonito.

[Continúan con la pregunta 2.]

ANTONIO: Lo que estaba pensando es que en cada página se va aumentando un dígito. En la primera empezamos con dos dígitos, se cambiaron tres. Entonces en la segunda vamos a tener tres dígitos, se van a cambiar a cuatro.

JUAN: Pero es que aquí cambia a la mitad. La mitad serían de dos y la otra mitad serían de tres.

URIEL: Haber, espera...1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 y 1 000 000. Ahí está cada cuanto cambia la cantidad de dígitos. ¿Sí o no? [...]

URIEL: Vamos a aplicar que hay 1, 2, 3,...,7. Siete...factorial.

JUAN: $(7!)(1\ 000\ 000)$ Da 5 040 000 000. ¿Y cuántos dígitos dices que son?

ANTONIO: Son 5 888 896.

JUAN: Entonces vamos a aplicar esto. Son 40 libretas, por 96 páginas, por las 10 columnas, por 26 números por columna, por 98 bolígrafos.

ANTONIO: ¿Por qué 98 bolígrafos?

JUAN: Porque así dice el problema.

URIEL: ¡Pero los bolígrafos qué! El problema no dice qué hacen.

ANTONIO: Y ahorita sí salen los cinco millones. ¿Bolígrafos? ¡No manches! ¿Bolígrafos?

JUAN: No aquí ya se pasó. Aquí no tenemos que usar alguno de éstos.

ANTONIO: Como los bolígrafos por ejemplo.

JUAN: Hay que tratar de resolver otro problema.

[El equipo se da cuenta de que les queda poco tiempo y se reparten el trabajo. Antonio: y Juan: trabajan en la tercera pregunta y Uriel: en la segunda]

[...]

URIEL: Oye, haber, nada más para estar seguro porque me estoy bloqueando. Del 10 al 99 ¿cuántos

dígitos hay?

ANTONIO: Haber, son 99-10 por 2...178

URIEL: A mí también me sale eso. No puede haber otro procedimiento. El único problema es que puede que haya un error ahí en el texto.

ANTONIO: ¿Por qué?

URIEL: Porque algo está mal. Mira, hice lo mismo que tú. 9 dígitos son del 1 al 9 así como lo planteamos. Del 10 al 99 son dos. 89×2 son 178. Del 100 al 999 son 899 por tres dígitos que hay. Y así sucesivamente. Al final ya solo sumas los dígitos de cada uno y me sale ésta cantidad. (5 888 872. Sumó $9+178+2\ 693+35\ 996+449\ 995+5\ 399\ 994+7$) Pero me faltan 24 dígitos que no sé de dónde salen.

[La profesora indica que es tiempo de entregar la tarea para pasar a la discusión grupal.]

Equipo C.

SINUHÉ: Serían 24, 960 en la primera libreta.

MINDY: O sea, 24, 960 se va a multiplicar por 40 ¿no?

SINUHÉ: (A Gilberto:) A ver multiplícalo.

MINDY: 998,400

SINUHÉ: Dice que son cinco millones...

GILBERTO: Ah, pero eso es el total de dígitos. Éstos son números. Entonces primero hay que sacar los dígitos. ¿Cuántos son los dígitos que hay en una página? ¿Son 260?

SINUHÉ: Tendría que ser con el número final porque si lo hacemos solo de una tenemos 260. En una página son 260, pero después del 260 va a ser 960. Luego cuando lleguemos al 1,000 ya no serían tres dígitos.

GILBERTO: Entonces ya no serían los mismos dígitos en cada página

SINUHÉ: No. Entonces yo digo que del 60 al 24,960. Dividimos 20 000, 4 000, 900, 60. En 20 000 son 5. (Cuenta los dígitos) Son cinco 20 000 veces.

MINDY: ¿Por qué por 5?

SINUHÉ: Es que son 5 dígitos los que hay.

MINDY: Ah, ya.

SINUHÉ: Primero empezamos del más pequeño (*señala 60*)

MINDY: No, pero es que... ¡no!

SINUHÉ: Es que, por ejemplo del 60, nueve son de un solo dígito. Hasta el 100...del 100 al...mmmm.

[Mindy comienza a escribir lo que se ve en la Figura 4.3]

[Gilberto: habla en voz muy baja pero parece ser que de alguna manera está aplicando la regla del producto usada en técnicas de conteo que recientemente aprendieron en

probabilidad].

MINDY: ¿No podría ser así? (*Muestra la hoja a sus compañeros pero no les explica por qué decidió usar esos rangos*)

[Gilberto observa el trabajo de su compañera pero no hace comentarios y continúa con lo que estaba haciendo. Después de que en el equipo no pudieron llegar a un acuerdo deciden continuar con la pregunta 3. Previamente Gilberto y Mindy respondieron a la pregunta 3 y Sinuhé revisa la hoja en la que sus compañeros muestran los resultados de la Figura 4.4]

SINUHÉ: Son dos años por 365 días. Son 730 días y cada día tiene 24 horas y cada hora 60 minutos, y luego por 60 segundos.

GILBERTO: Son 5 888 896 segundos en dos años. En un año te salen éstos (2 944 448). (*Luego divide entre 365*) Esto es lo que sale en cada día. (8 066.98)

SINUHÉ: No, aquí dice que segundos (*en la hoja de trabajo*), pero ahí sería días.

MINDY: (*un poco alterada*) No, eso son 8 066 punto la la la segundos por día. (*Hace énfasis*) O sea son segundos por día.

[Sinuhé: pone su atención en el resultado 2.2408 horas].

SINUHÉ: O sea ¿se hace 2 dígitos cada hora? O sea le hace eh eh.

GILBERTO: (*desesperado*) Analízale.

SINUHÉ: Tú te refieres a que en dos años se hizo toda esa cantidad de dígitos y lo divides y entonces ya tienes la relación en dos años puso esa cantidad de dígitos y que eso no tiene... no tiene sentido.

MINDY: Tú te revuelves solo.

GILBERTO: Me estás revolviendo a mí también.

MINDY: No, sí está bien. Tú que le haces caso.

GILBERTO: Estos son...

MINDY: Segundos por día.

GILBERTO: Entonces si eso lo divido entre 24, me sale esto...

MINDY: No, es que no es así. Hay que convertirlo a minutos. (*Desesperada*) ¡Ay, ya así déjalo!

GILBERTO: No, es que sí está mal.

MINDY: ¿Por qué está mal?

SINUHÉ: Porque si lo divides entre dos no sería por año.

GILBERTO: Entre dos porque son dos años. Checa, aquí, son los dígitos que hace en un año (5888 896/2), entre 365, éstos son los dígitos que hace en un día. Si queremos saber cuántos hace en una hora, nada más entre 24.

SINUHÉ: No, deja te cuestiono. En dos años hizo esa cantidad de cinco millones. En un día...

MINDY: Lo vas a dividir entre 2.

SINUHÉ: No, pero todavía esa cantidad se hizo en dos años, pero si lo divides otra vez entre dos no estás sacando por entre dos años porque ya lo tienes en dos años. Entonces en dos años se

demoró esa cantidad. Si lo divides otra vez entre dos...

GILBERTO: No lo estoy dividiendo otra vez entre dos. Esos son los segundos (5 888 896). Eso hace en un año (5888 896/2). Eso lo divido entre 365 días del año. Eso es lo que hace en un día... Y si lo divido entre 24 es lo que hace en una hora, 336 y dividido entre 60 es lo que hace en un minuto.

SINUHÉ: Cinco dígitos por minuto.

GILBERTO: Y si lo divido entre 60...

SINUHÉ: ¡Ay, no manches!

GILBERTO: Entonces esto está mal. 8 066.98... Estos son los segundos que hace en un día, si lo divido entre 60 son los minutos, si lo divido entre 60, las horas que hace en un día.

SINUHÉ: ¿Las horas?

GILBERTO: O sea todos estos segundos los hace en un día, si lo divides entre 60 es nada más para saber a cuántos minutos equivale y para saber a cuántas horas equivale pues lo divides entre 60.

SINUHÉ: Ya no le entendí.

[Enseguida vuelven a leer el enunciado del problema y discuten acerca del significado de “trabajar regularmente cerca de dos años” y la pregunta que se hace].

Equipo D.

KARINA: El total de dígitos en los números que escribió es de 5, 888,896. Pero dice dígitos.

JOSÉ: Un dígito es cada número del 1 al 9.

KARINA: Del 0 al 9. Ah, esto es el total pero te piden solo en la primera libreta ¿verdad?

JOSÉ: Serían...

KARINA: Entre 40... Pero...y ya ¿no? Y sacar cuántos hay en una libreta. *(Reflexiona)* Pero es que no van a ser los mismos.

JOSÉ: Yo digo que sí.

KARINA: Serían 147, 222.4. Pero tiene un punto.

JOSÉ: Bueno, éstos son los dígitos que escribió en la primera libreta.

KARINA: Oye, ¿no sería algo así como lo que hacíamos en proba? que puede ser del 0 al 9 son 10 y que poníamos 10 y acá otros 10 y acá otros 10. Bueno algo así. *(Se refiere a la regla del producto en técnicas de conteo)*

VANESSA: En cada libreta escribió 24,960.

KARINA: *(no le presta mucha importancia)* Ah, sí.

VANESSA: Es que aquí dice que en una página son 10 columnas y en cada columna 26 números. Solamente multiplicamos las columnas por el número de números de cada columna y así descubrimos el número que hay en cada página y luego esos que hay en cada página lo multiplicamos por las páginas que tiene una libreta.

[...]

JOSÉ: ¿Cómo era como le hacíamos? Hay 26 espacios.

KARINA: Serían 10 ¿no? ...En la primera columna es del 1 al 26. Entonces usaríamos tres veces el 1, tres veces el 2, tres veces el 3.

JOSÉ: Al 9 son 9 dígitos. En el 10 son 11.

KARINA: El 2, el 12, el 22 y el 21, 23, 24, 25, 26. Por ejemplo en la primera columna se utilizan 9 dos.

JOSÉ: ¿Y cuántos unos?

KARINA: 1, 11, 12. Pues yo creo que van a ser los mismos ¿no? 13, 14,...19, 21. Son 12. Pero sería sacar uno por uno...

[...]

JOSÉ: Es que sería...hasta el 9 son 9 dígitos, en el 10 son 11. En el 12 son 13.

KARINA: En la primera columna serían 42.

JOSÉ: Por 10.

KARINA: 420

JOSÉ: Por 96

KARINA: Pero es que no sería exacto...Los dígitos van aumentando. Por ejemplo aquí son de un solo dígito, acá son dos...

[...]

JOSÉ: Digamos que ya resolvimos el primero. ¿Pasamos al segundo?

[Abandonan la pregunta y pasan a la siguiente].

JOSÉ: El 2 pues ya también lo resolvimos. Re resuelve igual que el 1.

KARINA: ¿Y cómo se resuelve?

[José: multiplica 42x10x96x40. Al comprobar que no resulta decide que continúen con la pregunta 3].

KARINA: ¿Cuántas horas te salieron? Según yo son 1635 horas.

JOSÉ: Esto fue lo que hice: una hora tiene 3600 segundos. En 24 horas 86 400 segundos. A eso lo multipliqué por 365 y me dieron 31 536 000. Eso lo multipliqué por 2 porque son dos años y me salen 63 072 000 segundos. Ahora, pongámosle que duerme las ocho horas regulares.

KARINA: Es que de hecho lo puedes tratar de otra forma.

JOSÉ: ¿Cuál?

KARINA: 24 horas por 365. Son 8 760 horas al año, entonces...y tardó 1635 horas en escribirlo porque los 5 millones de segundos los pasé a horas. Y eso es lo que tardó en horas en escribir todos esos dígitos. Entonces como un año tiene 8 760 horas sería dividir (8 760/1635). Sale 5. Pero ¿cinco qué? ¿Aquí dice que escribió diario?

JOSÉ: Sí, que escribía diario, o sea regularmente cerca de dos años. Multiplícalo por dos (A 8 760).

KARINA: Son 17 520 horas

JOSÉ: Aquí lo podrías dividir.

KARINA: ¿Es esto (17 520) entre esto (1635)?

JOSÉ: Estas son las horas en total (17 520) y estas son las horas de trabajo (1 635)

KARINA: A menos que fuera esto (1635) entre 730... 2.24 horas al día. Y 2.24 horas son 2 horas y 15 minutos...Trabajaba 2 horas 14 minutos por día. *(Convierte a minutos y multiplica por 365x2x60)* Sí, ya lo comprobé.

JOSÉ: ¿Cómo lo comprobaste?

KARINA: Lo hice de regreso ¿Cuánto te sale?

JOSÉ: Me sale que trabajaba 10 horas por día.
[Karina explica a José: cómo obtuvo su resultado].

KARINA: Dos años tienen 730 días. Entonces haz de cuenta que aquí dividí el número de horas (1 635) entre el número de días de dos años para sacar cuánto hace...no

JOSÉ: Sí, sí, vas bien.

KARINA: Cuántas horas en cada día hace. Y ya, sale 2.24 horas por día y lo pasé a minutos y sale 2 horas 14 minutos...Ya lo comprobé, pero no sale lo mismo, sale aproximado.
[Cuarta pregunta].

KARINA: Si los números que escribió Sofía, están uno seguido de otro ¿qué tan larga será la línea de dígitos? Aquí tiene 1, aquí hay 2, aquí hay 2. *(Va contando la cantidad de dígitos que hay en el primer renglón de la primera libreta)* ¿Te pide exactamente?...Yo tengo que 24 son en la primera. *(Señala el primer renglón)*

JOSÉ: No, pero, los números que escribió Sofía los coloca uno seguido de otro. O sea 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

KARINA: Por eso, 1, 25, 53,79. Aquí en este cachito van 7. Sacándolos todos son 24. Aquí son dos...y hasta acá empieza de tres *(señala la quinta columna)* Pero mientras vaya bajando va a ir aumentando el número. Y nos debe de salir cinco millones.

KARINA: ¿Cuál es la pregunta? ¿Cuántos hay como en cada renglón?

JOSÉ: No, si los números que Sofía escribió los coloca uno seguido de otro. No nos está diciendo de los que van en la primera línea, sino que todos los números.

KARINA: ¿1, 2, 3, 4, 5, 6? Mmmm. Si los números que escribió...

JOSÉ: Si quieres tú has ésta *(segunda pregunta)* y yo hago la suposición de que tan larga sería la hilera.
[...]
[Vanessa ha tenido poca interacción con sus compañeros. Inicialmente realizó el promedio de los dígitos en cada libreta, luego intentó calcular los dígitos que hay en cada columna, pero enseguida clasificó a los números de acuerdo a la cantidad de dígitos que tienen. Muestra a sus compañeros su trabajo]

VANESSA: Yo diría que se tome en cuenta que del 1 al 9 solo tienen una cifra, los números son 9. Y entonces del 10 al 99 tienen dos cifras y son 89 números y así lo fui haciendo hasta llegar a 1 000 000 que tiene 7 cifras. Y entonces para calcular el número de dígitos por intervalo solo se multiplica y ya. Luego ya me salió esto (5 888 876)

KARINA: Y aquí por qué por 2 (en el intervalo del 10 al 89)

VANESSA: Porque tienen dos cifras.

KARINA: Esto es lo que debe salir Vanessa: (5 888 896) Pero aquí hay algo. Ah, esto (*pone su atención en el cálculo del promedio de los dígitos*) y sale aproximado.

JOSÉ: Ya solo se dividiría en 40 (a 5 888 896)

KARINA: Pero es que no puede ser nada más entre 40. Porque en la última libreta van a estar números grandotes y en la primera números chiquitos. Podríamos sacar un promedio ¿no?

VANESSA: Mira estos hay en la primer libreta (147 222.4)

KARINA: Es que salen 147 222.4 dígitos en todas la libretas pero obviamente no todas van a tener lo mismo. En la última libreta va a salir como el doble o más del doble que en la primera.
[...]

VANESSA: Son 113 960. Si dividimos estos dígitos (5 888 876) entre las 40 libretas nos va a dar un promedio. Hay que hacer lo mismo de acá (*procedimiento que usó en la segunda pregunta*) pero ahora va a llegar hasta 24 960. Hasta el número que llega en la primera libreta.

KARINA: ¿Este es el número que llega a la primer libreta? (24 960)

VANESSA: Multipliqué 260×96 . Y entonces el método dos sería...si tenemos 1 000 000 de números hay que dividirlo entre 40 libretas.

KARINA: ¿ $1\,000\,000/40$? 25 000.

VANESSA: O sea que también sería un aproximado. Entonces la última libreta no está completa.

KARINA: Ya me hice bolas. Ah, ya entendí, le faltan 40 números.

VANESSA: O sea haz de cuenta que a esto (24 960) va a llegar en la primer libreta de acuerdo a lo que dice el problema. Y por ejemplo, si hubiera llenado las 40 libretas completitas hubiera escrito estos (25 000).

KARINA: 25 000 y llenó 24 960.

VANESSA: Y entonces llenó 40 libretas más la que no está completa. Y ya tenemos el primero.
[Regresan a la cuarta pregunta].

KARINA: ¿Qué tan larga sería la línea?

JOSÉ: Más o menos por dígito son 5 milímetros. Mira, fíjate, fíjate.

KARINA: Cinco millones... Esto entre 2.

VANESSA: 2 944 448.

KARINA: Estos son los centímetros.

JOSÉ: ¿Centímetros?

KARINA: Porque si cada dígito mide 5 mm, por dos dígitos va a ser un centímetro. 2 944 ¿metros?

VANESSA: Lo dividimos entre 100
 KARINA: Yo digo que entre 1 000 para sacar kilómetros.
 JOSÉ: No, porque tiene un millón de centímetros un kilómetro.
 KARINA: ¿Qué? Estos son los centímetros 2 944 448.
 JOSÉ: Entre 100 te dan a metros, entre 1 000.
 KARINA: Ah, ya, ya.

Presentaciones de los equipos y discusión grupal.

[Daniel del equipo 1 escribe: *“Hay 10 columnas cada una con 26 números. 260 números por página”*].

DANIEL: Los dígitos son los que van a variar, entonces 260 lo multiplicamos por 96 que son (*escribe y habla*) 24 960 números por la libreta. Dice que también cuántos dígitos escribió en su primera libreta que es donde están los números como más chicos, que son las unidades, las decenas y las centenas y así. Nosotros supusimos que del 1 al 9 hay 9 dígitos, del 10 al 99 hay 180 dígitos.

URIEL: ¿180?

DANIEL: Sí. Del 100 al 999 hay 2 400 dígitos, del 1 000 al 9 999 hay 36 000 dígitos, del 10 000 al 24 960 obtuvimos que hay 74 805 dígitos. Entonces ya luego lo que hicimos fue sumar todos esos dígitos que hay ahí y nos salió 77 994 dígitos en la libreta.

URIEL: Yo entiendo que no son 180 sino que son 178 porque si le sumas 10 más 89 te da 99, por lo cual serían 89 dígitos.

DANIEL: Lo que pasa es que en ese, solo en ese lo hicimos por casos. ... Bueno, (*escribe habla*) del 10 al 20 hay 11, del 21 al 30 hay 10, del 31 al 40 hay 10, del 41 al 50 hay 10, del 51 al 60 (*escribe 10*), del 61 al 70 (*escribe 10*), del 71 al 80 (*escribe 10*), del 81 al 90 (*escribe 10*) y del 90 al 99 que son nada más 9. Entonces sumamos eso y nos da 90... Y por número de dígitos que son dos, 180.

GRUPO: Sí. Ahí está.

[*A petición de la profesora Sinuhé pasa al frente*].

SINUHÉ: Nosotros íbamos a contar desde el primer dígito. Iba a haber un máximo que es nueve y aquí iba a haber solo un dígito. Tenemos otro máximo que era de 60 y vamos a comenzar a partir del 10, entonces este era de dos dígitos. Tenemos un máximo de 960, aquí vamos a tener 100 y aquí va a haber tres dígitos. Un máximo de 4 960 en un espacio de 1000. Aquí va a haber 4 dígitos [...] Después de esto saqué una relación de cuál es la diferencia entre cada uno de los espacios. Entonces aquí va a haber 14 960, 3 960, 860, 50,..., en el último nunca supe qué onda con él.

PROFESORA: Bueno, si dices que encontre la diferencia, entonces ahí (del 1 al 9) debería ser 8. ¿Qué

sucede entonces?, ¿por qué tratar ese rango de manera diferente?
MARTÍN: Es que después de restar debes sumar uno.

LA REVISTA.

Equipo A.

DANIEL: ¿Cómo hizo la gráfica? Que conforme sube el precio baja la venta
MARTÍN: La relación del precio con las personas que puedan comprarla. La relación del precio con las personas encuestadas.
DANIEL: Pero entonces tenemos que sacar la moda, la mediana, la desviación media...
EVERARDO: ¿Para qué?
[...]
MARTÍN: Se venderían trecientas.
DANIEL: Serían 1500 entre 20.
EVERARDO: ¿Por qué entre 20? Es entre 100.
MARTÍN: 1500 entre 100 ¿cuánto es?
DANIEL: Dan 15.
MARTÍN: Multiplícalo por 20. Porque estamos hablando de un 20%. El 20% de 1500.
EVERARDO: ¿Y cuánto dinero podría obtenerse? Multiplícalo por 20.
MARTÍN: \$6 000.
EVERARDO: ¿En cuánto deberían vender la revista de forma que obtengan el mayor dinero posible?
MARTÍN: 85%. 1 275 revistas por 5. Si son a \$5 ganarían 6 375 y se venderían 1 275 [...] Se venden 825 revistas, por 10 serían \$8 250.
[..]
MARTÍN: Después de un tiempo su revista es bastante exitosa [...] Son trecientas revistas como en el 2. Cuesta \$20. Trecentas por 2.5. Setecientos cincuenta menos 6 000. Ganan \$ 5250. Ya, ya acabamos.

Equipo B.

[Juan da lectura al problema].
JUAN: [...] realizan una encuesta tomando una muestra de 100 estudiantes al azar. Ya tenemos la muestra. Es como probabilidad y estadística. [...] Y el resultado del muestreo es el siguiente. Hay una correlación lineal entonces ¿no?
ANTONIO: Ajá.
JUAN: Número de personas que podrían comprar la revista a éste precio (\$5), aproximadamente

ochenta y tantas personas. El precio de venta de la revista en pesos...\$25 pesos máximo. Muy pocos compran de \$25, de los que más compran pues es de \$5.

ANTONIO: Sí.

JUAN: Y entonces ya tenemos lo que es una correlación lineal. Tenemos una muestra, el número de datos serían 100, los 100 estudiantes. Y vamos a ver qué más hay. Describe cuidadosamente lo que muestra la gráfica. La gráfica muestra pues que hay una correlación lineal y a menor precio de la revista se vende más.
[...]

JUAN: ¿Cuántas revistas podrían venderse en la escuela si el precio fijado fuera de \$20? De \$20 son 20 estudiantes.

URIEL: Veinte de cien o sea 20% de 1500.

ANTONIO: Una regla de tres.

JUAN: Esa ya la sabemos, vamos a pasar a la que sigue. ¿En cuánto deberán vender la revista de forma que obtengan el mayor dinero posible? [...] Bueno, es que entre más barata sea más la venden pero...

ANTONIO: Ocupan ganar más.

JUAN: Ocupan ganar más ganancia. Y podría ser de 10, también es muy bueno y ya sería el doble. Aquí llega alrededor como de 83, 84, aquí de 58, 59. Entonces, ve la diferencia que hay de aquí a acá arriba. Ya de aquí empieza a bajar, ya es muy poquito (*cuando cuesta \$20*). O si no hasta podría ser ésta de 15

URIEL: El 40 por ciento.

JUAN: 18 de diferencia, bueno, eso ahorita lo checamos.
[...]

JUAN: Supón que el precio de venta es de \$20 como en la pregunta 2 [...]

ANTONIO: Necesitamos ver cuántos estudiantes la van a comprar.

URIEL: El 20%. De acuerdo al cálculo. Dice que en base a lo que contestamos acá (*pregunta 2*).

JUAN: Pues hay que empezar a esclarecer la primera. [...] El chiste es cuántos datos tenemos. Los datos serían 20...

ANTONIO: Serían 100.

JUAN: ¿Serían 100? Cien es el número de datos o es el...No, hay que meditar bien esto. Aquí X sería el costo de la revista y en Y los compradores que hay.

ANTONIO: Aquí hay un error. Si dice que con \$5 compran ochenta y tantos y con 10 compran 56. Se supone que nada más iban a encuestar a 100 estudiantes.

JUAN: Máximo 100 estudiantes, o sea que aquí toda la suma de éstos (*ordenadas*) te debe dar los 100.

URIEL: Te estás confundiendo. Mira, aquí preguntaron los mismos precios y a las 100 personas que preguntaron 85 dijeron que a ese precio lo comprarían (*a \$5*), el 60% de éstas personas

dijeron que no lo harían (*cuando cuesta \$15*).

JUAN: Del 100% que dices.

URIEL: O sea digamos que del 100% algunas dijeron que no la podían pagar.

JUAN: Ah, está dividido. [...] Describe lo que muestra la gráfica. Pues la gráfica muestra que hay una correlación lineal.

URIEL: La correlación pero...no lineal. Es la correlación que existe entre X y Y .

ANTONIO: Es una recta.

URIEL: Muestra la correlación que existe entre la cantidad de personas que podrían pagar...es que es lo que está escrito. Sería como volverlo a decir. Mmmm. Sí ¿no? Muestra la correlación [...]

JUAN: Y que por cada precio le preguntaron a las 100 personas y que de esas 100 personas pues por ejemplo aquí respondieron ochenta y tantas, aquí cincuenta y tantas y acá cuarenta. De esas 100 personas aquí 60 ya no dijeron.
[...]

URIEL: Pero ¿sí existe una correlación?

ANTONIO: Sí. ¿Por qué piensas que no existe una correlación?

JUAN: Sí es una correlación porque es la función de las dos cosas, del precio y del número de los que se vendieron.

ANTONIO: Ponle que entre menos cueste la revista más personas la comprarían. [...]

JUAN: Ahora, hay alrededor de 1500 estudiantes en la escuela [...]
No tienen problema para responder a la pregunta 2.

ANTONIO: Podemos sacar la ecuación.

JUAN: Podemos sacar la tablita de datos en X y en Y . O sacar la ecuación de la pendiente.

ANTONIO: En 5 son...

JUAN: Ochenta y dos ochenta y tres. [...]

URIEL: Ya está respondida la cuatro. Ya tenemos éstos resultados ¿Qué es lo que están haciendo para calcularlos?

JUAN: Aquí multiplicamos 1500 por punto 86 por 5, 6 450 si lo venden a \$5. Aquí nos dan 8400, en ésta de 15...

URIEL: O sea que es el porcentaje por esto (*precio de venta de la revista*).

CARROS DE SUPERMERCADO.

Equipo A.

[Cada uno de los integrantes da lectura al problema].

DANIEL: Los carros están unidos ¿no? O sea los carros no están todos completos.

MARTÍN: De hecho llegan como hasta la mitad.

EVERARDO: Suponiendo que la longitud de uno es de 10 centímetros...entonces esto (*la longitud de dos carritos ensamblados*) va a ser 10 centímetros más algo.

DANIEL: De aquí a aquí (*espacio entre carros*) es una constante. Debe ser una constante.

EVERARDO: De aquí a aquí son 10 centímetros, supongamos (*longitud de un carrito*). Y de aquí a aquí (*espacio entre carritos*) va a ser una constante [...] Pones s igual a longitud de un carrito...

DANIEL: Más, L menos X . S es L más, L menos X . Porque tienes el tamaño de L menos ésta X (*espacio entre carritos*). No, en todo caso sería...

EVERARDO: Más el número de carritos...

DANIEL: L menos X te quedaría de aquí a aquí. De aquí a aquí es L . De aquí a aquí es X . Y este total de acá a acá es L más X , pero nosotros lo que queremos es este de aquí a aquí. Tenemos que quitarle...A ver ¿Qué es lo que te piden?

MARTÍN: El espacio total que abarcan los 12 carritos.

DANIEL: O sea pero juntos.

EVERARDO: Sí, cuando se conoce el número de carros.

DANIEL: De aquí a acá es L (*longitud de un carrito*) y luego de aquí a acá es X (*distancia entre manubrios*). Y aquí está un carrito (*señala con un segmento y escribe L*), y esto es ya un carrito metido (X). Ah, y entonces tenemos que conocer L . Sí, queda bien ¿no? [...]

DANIEL: Qué tal si sumamos uno, dos, tres, o sea, doce L menos...

EVERARDO: Sería X . Once.

MARTÍN: Doce L , menos once X .

DANIEL: Doce L así total, como si estuvieran todos en fila.

MARTÍN: Doce L menos once X te queda L .

DANIEL: No, ¿y la X dónde quedó?

MARTÍN: Pero estás hablando de que cada L tiene una X .

DANIEL: O más bien cuatro X es una L . A ver, necesitamos una regla. L mide 4.8, y las X , 1.2. Sí, y entonces cuatro X es una L . [...] ¿Son 11 X ?

MARTÍN: Serían quince X . Once más cuatro.

DANIEL: Ah, sí, para ponerlo todo en X ¿no?

EVERARDO: Pero lo que tenemos que hacer es una fórmula.

DANIEL: Ajá, en función de X . ¿O cómo lo quieres hacer? O sea S , igual a L menos...no.

EVERARDO: L más...

MARTÍN: ¿ L más 11 X ?

DANIEL: No, entonces sería más otros $2L$. Porque tenemos cuatro X y cuatro X (*va señalando en el dibujo lo que corresponde a la longitud de un carrito*). Y cuatro X es igual a L .

MARTÍN: Entonces sería $3L$, $3L+3X$, porque cada cuatro carritos acomodados te dan el valor de uno [...] Mira, (*le muestra el dibujo*), es que cada cuatro carritos (*anidados*) es la distancia de

otro. Entonces quiere decir que S va a ser igual a la longitud de tres carritos más tres X .

EVERARDO: Pero ésta fórmula solo funciona cuando son 12 carritos.

DANIEL: Entonces hay que verlo más universal.

MARTÍN: Pero están pidiendo... (*Vuelve a leer el problema*) Cuando se conoce el número de carros.
[...]

EVERARDO: La longitud (*de un carrito*), más el número de carritos menos uno por...

MARTÍN: ¿Por qué menos uno?

EVERARDO: Porque aquí vas a tener 11 (*espacios entre carritos*), entonces el número de carritos es 12. Le tienes que quitar uno.

DANIEL: Sí. A ver, hay que comprobarlo.

EVERARDO: Aquí toda la longitud son 17 [...] 4.8 más, doce menos uno, por X que son 1.2. Son 13.2 más 4.8 son...

MARTIN Te da 18. [...] Quince X por 1.2 son 18

EVERARDO: L es 4.2

DANIEL: ¿ L es 4.2? Ah, tú nos dijiste que era 4.8.

EVERARDO: De aquí mide 4.8 (*dibujo de arriba*) y en éste espacio mide 4.2 (*dibujo de abajo*). Y lo estamos midiendo respecto a éste (*dibujo de abajo*). Hay que tomarlo como si fuera 4.2. Es que estamos midiendo la longitud total de éste dibujo (*abajo*) no de éste (*arriba*). [...]

DANIEL: Entonces nos queda 17.4

MARTÍN: (*También mide la longitud de los 12 carritos*) 17.2

EVERARDO: Con la fórmula que yo tenía sale 17.4. [...]

MARTÍN: Con la fórmula que yo tengo me sale lo mismo que a ti. (*Se refiere a antes de que se diera cuenta que el carrito completo del dibujo de abajo mide 4.2*)

EVERARDO: A ver, ¿cuál es tu razonamiento?

MARTÍN: Pues eso, que cada cuatro espacios es uno (*un carrito*).

DANIEL: No, ya no queda.

EVERARDO: Cabe 3.5 veces X en L .

DANIEL: O sea 3.5 X es igual a una L

EVERARDO: En el último queda mal, es 1.1. Todos miden 1.2 menos el último, mide 1.1.
[...]

EVERARDO: Mira, sabemos que L mide 4.2 y X es igual a 1.2. Simplemente sumamos 4.2 más 11 veces 1.2 que vale X y da 17.4. Es que si lo piensas no queda pero...

DANIEL: Pero es que el dibujo está como bien raro.

MARTÍN: Ya me quedó. Pero estoy dejando la fórmula de L (*en términos de L*). Me queda que L es el primer carrito que tenemos ¿no? Entonces éste ya no lo tomo en cuenta, ya tomo en cuenta los demás, $n-1$. Tenemos 12 carritos, tenemos 11 (*espacios entre carritos*). Sería 11 entre 3.5. Y cada 3.5 (X) es una L . Tenemos L más 3.1428 L . 4.1228 L . Ya nada más ocupamos

sacar cuánto vale L .

EVERARDO: Viene siendo lo mismo. O sea es el mismo razonamiento. [...] Ahora encuentra una regla que te permita... Creo que nada más es despejar de ésta misma fórmula... porque ahora quieres encontrar el número de carros en un espacio.

DANIEL: Me queda: número de carros igual a $S-L+X$ sobre X , igual a n .

EVERARDO: Bueno a mí me queda: número de carros igual a $S-L$ sobre X , más 1.

DANIEL: Sí, ya vi, está bien.

Equipo B.

URIEL: La escala no importa mucho porque de todos modos dice que es un aproximado del tamaño real. Son doce carritos, solamente uno va a ocupar el tamaño total, todos los demás están a una distancia constante. Hay el mismo espacio entre cada uno. O sea que nada más sería, como X , más un incremento de aquí (*señala el espacio entre carritos*), un incremento de X por decirlo, por la cantidad de carritos. Y creo que eso sería la longitud. [...] O sea pues, un incremento de aquí, un incremento de aquí y un incremento de aquí (*va señalando cada longitud de los carros anidados*). O sea sería X , y como todos van a estar a la misma distancia ponle que... X más el incremento por la cantidad de carritos. Creo que así sería, entonces hay que tomar medidas. (*Sus compañeros se quedan pensando*) ¿No los convencí? [...] O sea nada más pones la primera, lo que mide la longitud del carro.
[Uriel revisa la fórmula y ve que no hay descripción de los elementos que aparecen en ella].

URIEL: Pero es que nosotros sabemos cómo interpretar la X , pero si alguien más lo hace ¿cómo va a saber cuál es X y cuál es el incremento de X ?

JUAN: El incremento sería el espacio entre un carro y otro. (*Escribe la definición de las variables*).

Equipo C.

SINUHÉ: Los dibujos son de $1/24$ del tamaño real a escala. ¿ $1/24$ era menor o era mayor? Era menor ¿verdad?

MINDY: Va a ser 24 veces menor que el original.

SINUHÉ: Ya sé, usemos la regla que nos proporcionaron y mira... 4.8. Pero bien, eso es en una escala. Dice...

MINDY: Que... uno veinticuatro... tamaño real... Pero lo que tenemos que encontrar es la s que es el almacenamiento. Establecer una regla para obtener la longitud del almacenamiento.

GILBERTO: ¿Cuánto mide de aquí a acá? (*Toda la tira de carros*).

SINUHÉ: ¿Si crees que tenemos que usar la regla? Tal vez es un juego mental. [...] Bien, podríamos hacer esto, quitarle la escala y usar la medida que ya... que se hace con la regla.

MINDY: Entre cada carro junto hay un espacio ¿si ves? que es el mismo. Entonces tenemos que calcular ese espacio (*entre carritos*) porque ya este espacio (*el del primer carrito*) [...] no se tiene que contar todos los carros. Tenemos que multiplicar este espacio (*entre carritos*) por el número de carros.

SINUHÉ: Ocho, nueve, diez, once, doce. Ah, sí son doce. Es que ahorita que conté, conté once.

MINDY: Esto es en realidad lo que cuenta, el espacio que separa cada carro junto.
[*Vuelven a leer el problema para estar seguros de que entendieron cuál es la incógnita.*]

SINUHÉ: Lo que podemos hacer es sacar nada más la medida de esto. (*Medir la longitud de los doce carros de la figura*) [...] si sacamos esto, ya obtendríamos más o menos lo que mide cada carro. Y si ésta medida lo dividimos entre los doce carros, no espérame, ¿por qué dividirlo? Es que quería sacar ¿cómo se dice?, más o menos la medida que iría entre cada espacio de cada carro.

MINDY: Doce carros...menos tanto espacio que es lo que ocupan. Mira, como por ejemplo, aquí se puede ver ¿Sí ves? aquí termina un carro y aquí termina...de este espacio. Aquí está el primero, aquí está el segundo, aquí está el tercero, en éste piquito....
[*Gilberto y Sinuhé siguen por su cuenta. Gilberto realiza la siguiente operación en la calculadora $(1/24)*4.8$.*]

SINUHÉ: 0.2. No, no queda.

GILBERTO: No.

SINUHÉ: Es ilógico [...] Tenemos una medida s ... s es igual a la longitud entre 24, no, entre 12.

GILBERTO: La mitad de lo que es esto (*la longitud total de la tira de carros*), porque un carrito llega a la mitad.

SINUHÉ: La longitud de los 12 carros caben en s . Hagamos una igualdad, o sea que s es igual a la longitud de 12 carros, olvidando los espacios pues. S es igual a...la longitud de 12 carros ¿cómo expresaríamos eso? 12 veces la longitud olvidando los espacios, más o menos eso sería... Acá tenemos que esto está a una escala de 1 a 24. Entonces sería 12 veces la longitud ¿entre 24?

[...]

SINUHÉ: A ver qué pasa. Vamos a intentar por 4.8. (*Sustituye la longitud del carrito en la expresión anterior*).

GILBERTO: Sale 2.4. Y justamente 2.4 es la mitad de la longitud del carrito.

SINUHÉ: ¿Es justamente la mitad?

GILBERTO: De hecho. Por eso yo digo que llega a la mitad. Metes un carrito, llega a la mitad, metes el otro y llega a la mitad. Entonces yo digo que cada espacio es de la mitad.

SINUHÉ: Bueno. A ver, es que las escalas ya no me acuerdo cómo eran.

GILBERTO: Escala de uno a 100 es que éste, tu dibujo es 100 veces más grande.

MINDY: ¿Qué no sería 100 veces más chico?

SINUHÉ: Es de uno a 100. Esto es digamos de 1 a 24.

GILBERTO: Eso quiere decir que es 24 veces más pequeño. Cada centímetro serían 100.

SINUHÉ: O sea digamos que cada centímetro son... ¿un metro? Entonces aquí sería que un centímetro es igual a 24 metros. Nooo.

GILBERTO: 24 centímetros (aclara)...entonces, se supone que mide 115.2 (*cm cada carrito*) en medidas reales.

SINUHÉ: Es que si s es igual a 12 veces la longitud de los coches. Los coches se pueden este...juntar [...]

SINUHÉ: Mmmm. Ay ya me revolví chavos. [...](A Gilberto:) $\frac{1}{12} \times 115.2$? A ver ponle. (Gilberto: realiza la operación y divide entre 24). [...]

GILBERTO: 57.6. El carro este llega hasta la mitad.

SINUHÉ: Pero de hecho no llega hasta la mitad, llega a más de la mitad

MINDY: ¿Y sí ven que en el segundo ahora tenemos que encontrar lo contrario?
.
[Sinuhé vuelve a leer el problema].

MINDY: Yo digo que sería la longitud...

SINUHÉ: (Interrumpe) Por la mitad de la longitud porque es más o menos la mitad.

GILBERTO: Este es nuestro espacio de almacenamiento, entonces aquí puede ser cualquier incógnita porque podrían ser 12, 14, dependiendo de la cantidad de carros. Entonces sería n cantidad de carros por la mitad de la longitud de cada carro.

SINUHÉ: Longitud ¿a qué es igual? Longitud es igual a $\frac{1}{24}$ de tamaño real. Y aquí tenemos el tamaño real. O sea que de tamaño ficticio tenemos que son 4.8 cm. Si es 1 a 24... Es que neta ¿cómo se convierte? ya no me acuerdo cómo se convertía a tamaño real.
[...]

SINUHÉ: Si cada centímetro son 24 centímetros, entonces... 4.8×24 . A ver multiplica.

GILBERTO: Sí, 4.8×24 te da 115.2. [...]Ya tenemos la longitud. S tenemos que sacarlo, y sabemos que va a haber 12 carros. Pero cada carro está a la mitad. S es igual a la mitad de los carros por la longitud (*de un carrito en tamaño real*). 115 doce veces nos va a dar el entero (*el carro entero*), pero todo ese resultado hay que dividirlo entre dos... porque entra la mitad

SINUHÉ: S es igual a 12 veces por 115.2 entre 2 que es igual a 691.2. Entonces s sería igual [...] a 12 por la longitud en tamaño real ¿no? Entre 2 que sería la mitad, porque entra más o menos la mitad de cada carro.

GILBERTO: Digamos que los carros estuvieran juntos entonces lo que estaríamos sacando sería todo el tamaño. Como cada carro cabe la mitad tendíamos que dividirlo entre 2.

SINUHÉ: Eso es lo que yo creo. Esa sería nuestra reglita.

GILBERTO: En lugar de 12 podríamos usar n para que digamos que n es igual al número de carros. [...] Pero entonces en lugar de 12 ¿ponemos n ? para que sea una fórmula general.

Equipo D.

[Inician solamente José y Karina].

KARINA: Es como hacer una ecuación ¿no? [...] Primero tenemos que saber cuánto mide uno solito y ver cuánto espacio hay de aquí ¿no? (*espacio entre carros*). Por ejemplo, sería X más, esto de aquí por el número de carros. Bueno, algo así

[Llega Vanessa a incorporarse al equipo].

JOSÉ: Aquí ya sería S es igual a X más doce ¿no?

KARINA: ¿Más doce?

JOSÉ: O doce por X .

KARINA: ¿Por qué?

[...]

JOSÉ: El número de carros por la longitud del carrito. [...]

KARINA: Para éste sería (*para el caso de 12 carritos*). Pero para en general sería X por N . O sea X por el número de carritos.

VANESSA: Pero éste carro sólo ocupa este espacio chiquito (*un carro anidado*), porque uno se va metiendo. Entonces, yo opino que esto debería ser la medida de un carro, que sería X . Equis más, Y por 12 (*llama Y a la longitud de un carrito anidado*)

JOSÉ: Sería S es igual a 12 por X , menos X sobre 2.

KARINA: ¿Menos X sobre 2?

JOSÉ: Más o menos se está metiendo la mitad ¿no? Del carrito para atrás.

VANESSA: Pero también, ¿no debemos contar esto?

JOSÉ: ¿Las llantas?

[...]

KARINA: Doce por X ...

JOSÉ: Sí, es el número de carros por la longitud y le estamos restando la mitad que es lo que entra en el otro carro.

KARINA: Pero sería menos X entre dos...es que por ejemplo aquí sería 12 y X se refiere a...5 por ejemplo. [...] Pero nada más le estaríamos restando 2.5 que es un cachito...y tenemos que restárselo a cada uno

JOSÉ: Oh, sí es cierto. Sería entonces 12 por X menos 6 veces X . Vamos a restar cada parte del segmento de donde se van metiendo los carritos que es Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once.

KARINA: O sería 12 por, X menos la mitad. Menos X entre 2.

JOSÉ: No pero, hay algo extraño. Este es un carrito ¿no? Luego llega un segundo carrito, ahí va uno (*un espacio*). Luego llega un tercer carrito y van dos, cuarto carrito, tres. Y hasta que llegue al 12 van a ser 11 carritos.

KARINA: ¿Cómo? O sea 11 carritos.

JOSÉ: Va a ser 11 veces que se reduce el espacio.

KARINA: No doce, once.

VANESSA: ¿Cuánto mide un carrito?

KARINA: Un carrito mide cuatro. Y de aquí a aquí (*espacio entre carros*) mide 1.2. Pero entonces no es la mitad.

VANESSA: Y eso está uno a 24.

JOSÉ: Está el carrito original, es la longitud de aquí total (X). Luego llega un carrito y entra a la mitad. Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once. De los 12 carritos 11 entran. [...]

VANESSA: Serían 12 por X menos 11 por X sobre 2.

KARINA: Aaah. O sea que podría ser X más...podría ser así (escribe $x+11\left(\frac{x}{2}\right)$) ¿no?

JOSÉ: No porque si lo haces de uno solo no estaríamos...sería restarle a cada uno la longitud total (de cada carro)

[Karina: realiza una descripción de su fórmula en el dibujo].

JOSÉ: Ah, podría ser.
[...]

VANESSA: Sería equis uno más equis dos por 11.

KARINA: ¿Y cuál es equis uno?

JOSÉ: Equis uno es un carrito, el primero.

VANESSA: Y equis 2 es un segmento. Equis 2 son esto. (*Distancia entre manubrios*) Entonces hay que encontrar la medida de aquí a aquí, luego las escalas, con la de uno a veinticuatro.

KARINA: Ah, sí es cierto. ¿Nada más se multiplicaría?

JOSÉ: Con una regla de tres. Veinticuatro veinticuatroavos es igual a x y lo que nos dio aquí es igual a un veinticuatroavo.

VANESSA: Mide 4.1

KARINA: Pero este de acá mide 4.8. (fig.)

VANESSA: Ah, pero es que ese es el ejemplo.

JOSÉ: ¿Entonces qué regla vamos a usar?

KARINA: X más, 11 por X entre 2.

VANESSA: X dos mide 1.2. X uno 4.1 y X dos 1.2.

KARINA: X_1 más, X_2 por 11. Entonces quedaría 4.1 más, 1.2 por 11. Serían 17.3. ¿Y cuánto mide hasta acá? (*La longitud de los 12 carros*). 16.6. (*midió de extremo a extremo de las*

canastas)

[Discuten acerca de cómo deben medir la longitud de los 12 carros. En su segunda medición obtienen 17.1cm].

KARINA: Y acá salió 17.3.

JOSÉ: Sí, está bien, por errores de medición.

VANESSA: Sí, está bien. Es correcto.

KARINA: ¿Cómo haríamos la regla general? Sería X , o sea la longitud más la suma de todo esto. Pero...si es por regla general...

VANESSA: Podría ser S igual a, N menos 1 por X dos, más X uno. [...]

KARINA: Oye, ¿Y esto se multiplicaría por 24? O cómo sería. Porque está uno a veinticuatro.

VANESSA: Ah, sí, por 24.

KARINA: 415.

Discusión grupal.

SINUHÉ: El problema dice que tenemos que encontrar s , que es el límite de almacenamiento que hay entre 12 carros y que cada carro... bueno, el dibujo que tenemos en la parte superior está en una escala de 1 a 24. Como más o menos nos da la escala pensamos que el dibujo debe estar implicado con la escala. Con una regla medimos la longitud y nos daba que aproximadamente medía 4.8 cm. Entonces si la escala es de 1 a 24 o sea que cada centímetro que tenemos en nuestro dibujo va a ser 24 veces lo que sería en realidad. Multiplicamos 24 por 4.8 y nos da que es un resultado de 115.2 centímetros. Ya después, nos dice que encontremos el espacio de almacenamiento que es s . Nos dice que en ese espacio de almacenamiento va a haber 12 carros. Tenemos que utilizar la medida de la longitud de cada coche. [...] Así que ponemos la longitud del tamaño real que es 115.2 cm. Pero luego observamos en el dibujo que aproximadamente cada carro no quedaba separado sino quedaba en medio de cada coche o sea que más o menos era la mitad de lo que entraba. Entonces de éste resultado lo dividimos entre 2. Y el resultado de esto nos dio 691.25 cm. Así que ahí más o menos tenemos nuestro resultado del espacio de almacenamiento. Entonces ya teniendo esto podemos hacer nuestra propia fórmula que sería s es igual a... en éste caso sería número de coches por la longitud del tamaño real entre 2. Y ahora nos preguntan en el problema 2 que encontremos cuántos carros habrá en cierto espacio. Entonces realizamos un despeje de n .

PROFESORA: ¿Cómo ven? Les pueden hacer preguntas.

DANIEL: ¿Pero no sería como algo raro decir que entra la mitad?

GRUPO: Síiii.

SINUHÉ: Es aproximado.

GRUPO Nooooo.

ANTONIO: No puede ser aproximado.

DANIEL: Entonces la fórmula sería (*señala la fórmula de sus compañeros*) s es igual a “aproximado”, no sería “igual”.

JUAN: JOSÉ: Cuando usas el 12 ¿por qué lo usas? Porque como yo lo veo hay un carro y detrás de él...supuestamente deben ser 12 carros en total, pero entran 11 en uno ¿ves?, ¿no debe de ser 11 ahí?

SINUHÉ: Es que mira, en un espacio hay 12 carros, no hay 11.

JOSÉ: Hay un carro, pero entran 11, después de él, ya son 12 carros ¿no?

SINUHÉ: Pero de todas formas queda una mitad dentro.
[El grupo se muestra inconforme].

SINUHÉ: Aproximado pues.

PROFESORA A ver, aquí nos encontramos con opiniones diferentes. ¿Cómo planteó su solución el equipo A? *Everardo del equipo A dibuja los primeros dos carros.*

EVERARDO: El problema nos pide encontrar la longitud del espacio de almacenamiento. Entonces, primero dices que de aquí a aquí va a ser L (*traza un segmento para señalar la longitud de un carro*) y de aquí a aquí va a ser X (*Con un segmento señala el espacio entre los carros*). Entonces S , el total del espacio de almacenamiento es igual a la longitud más, el número de carros menos 1. (*Aclara*) ¿Por qué menos 1? Porque éste (*señala el primer carrito del dibujo*) ya lo estás contando en la longitud total. Por X . (*Subraya la expresión $S=L+(n-1)X$*). En la siguiente simplemente despejas.

GRUPO Sí, está bien.
[Antonio levanta el pulgar en señal de aprobación].

PROFESORA ¿Algún comentario? ¿Algo que quieran agregar?

DANIEL: (*Al equipo B*) ¿Ustedes lo tienen igual?

URIEL: Pues la fórmula y todo está igual.

DANIEL: (A José). Esta longitud (carro solo), no es la misma que esta longitud (carro en la hilera)

JOSÉ: Hay que usar la longitud de los de abajo.

MARTÍN: Utilizamos las mediciones de los carros acomodados y descubrimos que L no es la misma longitud de este (*dibujo del carro solo*). Aquí mide 4.8 y aquí mide 4.2.

URIEL: Las mediciones que tienen ahí es un problema. Porque la escala que tiene el carro de arriba es diferente a la que tienen acá abajo todos. Por eso no pudimos tomar bien la consideración de la longitud.