Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico- Matemáticas
Mat. “Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

“USO DEL CAS PARA LA ENSEÑANZA DE EXPRESIONES EQUIVALENTES, EXPRESIONES IGUALES Y SOLUCIÓN DE ECUACIONES EN LA SECUNDARIA”

TESIS

Para obtener el grado de:

Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas

PRESENTA:

José Guadalupe Osorio Aguirre

ASESOR DE TESIS:

Dr. José Carlos Cortés Zavala

Morelia Michoacán, Agosto 2015.

Agradecimientos

Son muchas las personas que aportaron un poco o mucho para que pudiera culminar este trabajo, pero de muchas personas cabe mencionar algunas.

En primer lugar están mis padres, quienes me dieron mucha motivación y apoyo. Te agradezco mama por todas las lecciones que me has brindado y por darme aliento en cada momento difícil que pasaba. A ti papa por otorgarme apoyo para toda actividad académica y siempre darme esos consejos cuando mas los necesitaba.

A mi hermano David y a mi novia Reyna Iveth gracias por el apoyo y hacerme reír en los momentos en los que me sentí triste e inseguro.

Muchas gracias también a la formación que recibí de mis profesores, en especial al Dr. José Carlos Cortez que me apoyo y me dio la confianza para realizar el presente trabajo. A mis sinodales, Dra. Erendira excelentes observaciones que me hizo, M.C. Jose Vega muchas gracias por el apoyo y el optimismo que me transmitió durante la revisión del trabajo, M.C. Christian gracias por tus consejos y tu apoyo, y finalmente Dr. Joaquin por darme tantos consejos y enseñanzas muchas gracias.

Finalmente una parte de este trabajo se la debo a mis compañeros y amigos tanto los que pertenecen a la facultad como los que he conocido en otros entornos.

Índice

Capítulo 4

Análisis y discusión de datos y resultados de las hojas de trabajo

Capítulo 5

Conclusiones

Anexos

RESUMEN

En el presente documento es reportada la investigación experimental cuyo objetivo fue estudiar un ambiente de CAS y un enfonque Tècnico- Teòrico del àlgebra en el desarrollo del conocimiento algebraico de los estudiantes de secundaria. Los antecedentes de los que partió la investigación fue, el potencial que ofrecen las nuevas tecnologías digitales, en particular las manipulaciones simbolicas.

La experimentación consistió en tres paquetes de hojas de trabajo, las cuales por el marco teórico consistieron de trabajo con papel y lápiz, asi como con CAS, también se conformaron de trabajo por parejas y discusiones grupales. Las actividades fueron diseñadas por un equipo de trabajo conformado por los doctores Fernando Hitt y Carolyn Kieran.

Los resultados que arrojo la experimentación en si fueron excelentes y favorables, ya que se logro identificar en que temas ocurren mas errores, además en la ultima actividad se logro un avance considerando que los estudiantes no concian el tema.

Palabras Clave: TAD, Ambiente CAS, Aproximacion Instrumental, Algebra, Genesis Instrumental.

SUMMARY

Herein it is reported the experimental study aimed at studying a CAS environment and technical-theoretical algebra concerted approach in the development of algebraic knowledge of high school students. The background of the research that was started, the potential offered by new digital technologies, particularly the symbolic manipulations.

The experiment consisted of three sets of worksheets, which consisted framework for working with paper and pencil, as well as with CAS, also formed work in pairs and group discussions. The activities were designed by a team formed by doctors Fernando Hitt and Carolyn Kieran.

The results throw experimentation itself were excellent and friendly, as was identified in which topics occur more errors, and in the last activity was a breakthrough achievement considering that students do not concian the subject.

Keywords: TAD, CAS Environment, Approximation Instrumental, Algebra, Genesis Toolkit.

Capítulo 1. El problema de investigación

Introducción

El desarrollo de la humanidad ha llevado consigo el avance tecnológico, con un fuerte cambio en diferentes áreas como la vida, la ciencia y la educación. Sobre este último surgen las llamadas Nuevas Tecnologías Informáticas, como lo que son: las bases de datos, las hojas de cálculo, las calculadoras gráficadoras algebraicas, etc. Estas herramientas nos permiten diversas facilidades, y de hecho, en las matemáticas nos posibilitan obtener distintos sistemas de representación de objetos matemáticos, por lo que generan un cambio en el modo de hacer matemática (si se usan en las clases de matemáticas) y se postulan como herramientas convenientes para ambientes educativos.

Se debe ser consiente que las expectativas que se tengan en la implementación de estas herramientas en la enseñanza de las matemáticas, requiere analizar sus contribuciones, limitaciones y sobre todo, su uso efectivo. Por lo que para lograr cambios positivos al implementar estas herramientas en la educación matemática, no solo son necesarios acondicionamientos de infraestrutura, también se requiere hacer cambios en las actividades de enseñanza y aprendizaje.

Si únicamente se integra el uso de la tecnología a los cursos de matemáticas, es muy probable que incluso pueda ser perjudicial (por ejemplo: realizar operaciones aritméticas fáciles con la calculadora). Debido a eso, es necesario replantear las actividades para obtener el mayor beneficio.

En la presente investigación se pusieron a prueba actividades de álgebra para estudiantes de secundaria con el uso de calculadoras con CAS (Sistema algebraico computacional).

Justificación

Actualmente los avances en cómputo están ligados al desarrollo del software matemático, entre ellos los sistemas de álgebra por computadora (CAS) desempeñan un papel muy importante de crecimiento. También se sabe que estas nuevas herramientas han cambiado progresivamente sus prácticas matemáticas y, para algunos de ellos, incluso la “problemática” de su actividad matemática.

Por otro lado, durante los cursos de álgebra (secundaria en este caso) son bastantes los estudiantes que tienen diferentes obstáculos durante el curso (incluso los más capaces). Una forma diferente de atacar estos obstáculos es mediante el uso las nuevas tecnologías, precisamente este es un campo en el que existen muchas preguntas.

Los obstáculos de los estudiantes en torno al aprendizaje del algebra (manipulación algebraica) han sido objeto de investigación desde hace más de treinta años, sin embargo, estos en su gran mayoría han sido realizados en ambientes de papel y lápiz, por lo cual es necesario analizar el papel de la tecnología CAS sobre esta problemática.

Desde el surgimiento de manipulaciones simbólicos (CAS), el uso de este tipo de tecnología para el aprendizaje del álgebra ha sido una línea de investigación que ha interesado a la comunidad. De acuerdo con Kieran y Yerushalmy (2004) los diferentes tipos de tecnología digital (e.g., la hoja de cálculo, manipuladores simbólicos, software de control dinámico, entre otros) han permitido distintos enfoques en torno a la investigación acerca del aprendizaje del álgebra en estos ambientes.

En una síntesis sobre las investigaciones sobre el uso de tecnología para el aprendizaje y enseñanza del álgebra, Kieran y Yerushalmy (2004) mencionan que los distintos tipos de estudios llevados a cabo, entre otros, sobre ambientes de representación múltiple, de control dinámico (éste involucra la manipulación directa de objetos matemáticos) y de cálculo simbólico; todos estos acercamientos muestran los diversos enfoques de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra.

Investigaciones en la década pasada (e.g., Drijvers, 2001; Drijvers, 2003; Kieran & Damboise, 2007; Kieran & Drijvers, 2006; Lagrange, 2003; entre otras) en torno al uso de CAS, han puesto en evidencia el potencial de este tipo de tecnología para el aprendizaje de conceptos algebraicos del estudiante. Estas investigaciones han mostrado, que el uso de CAS promueve la comprensión conceptual algebraica de los estudiantes cuando se toma en cuenta la técnica (i.e., la manera como se resuelve un problema).

Los factores que los estudios antes mencionados consideran cruciales para promover el razonamiento algebraico de los estudiantes en ambiente CAS son: la técnica, el diseño de la actividad (i.e., la tarea a resolver) y, la interacción entre los ambientes de papel-y-lápiz y el tecnológico. El primer factor fue ignorado durante las primeras investigaciones en torno al uso de CAS, ya que eran más bien estudios orientados a la actividad generativa. Sin embargo, a partir de finales de la década de los 90, las investigaciones (e.g., Artigue, 2002; lagrange, 2003, 2005, entre otros) muestran la importancia de la Técnica para promover la teoría en los estudiantes.

Objetivo de investigación general

Experimentar las hojas de trabajo en las que se utilizara el CAS inmerso en una aproximación técnica-teórica, con la finalidad de investigar aspectos relacionados con el aprendizaje del álgebra con estudiantes de secundaria.

Objetivos de investigación particulares

Investigar si el uso del CAS de la calculadora, ayuda a los estudiantes a promover el desarrollo del conocimiento algebraico respecto a la equivalencia de dos expresiones.

Investigar si el uso del CAS de la calculadora, ayuda a los estudiantes a promover el desarrollo del conocimiento algebraico respecto a la solución de una ecuación.

Realizar una exposición de las hojas de trabajo.

Problema de investigación

Estudiar un ambiente CAS bajo una aproximación teoría-técnica-tarea Artigue (2002), para analizar si de esta manera se puede promover el razonamiento algebraico de los estudiantes en los temas siguientes: factorización, solución de ecuaciones y expresiones equivalentes.

Preguntas de investigación

1. ¿Es factible que los estudiantes utilicen el CAS en sus clases de álgebra?

2. ¿El alumno es capaz de diferenciar si dos expresiones son equivalentes o no son equivalente utilizando sus conocimientos y la tecnología CAS?

3. ¿El debate ayuda a los estudiantes a sugerir puntos de vista respecto a una situación dada?

Capítulo 2. Marco Teórico

Problemas de aprendizaje de los temas

Una problemática identificada sobre el álgebra hace algunas décadas atrás, trata sobre los errores que los estudiantes cometen cuando intentan realizar tareas algebraicas que involucran manipulación simbólica (por ejemplo resolver ecuaciones, simplificar, etc). De hecho, la problemática en torno a errores matemáticos ha sido objeto de estudio desde inicios del siglo pasado.Existen varias investigaciones en torno al aprendizaje del álgebra, principalmente en las décadas de los 70 y 80 del siglo pasado, las cuales evidenciaron las dificultades de los alumnos en la resolución de ecuaciones (Kieran, 2004). En particular, han sido reportados varias explicaciones en la literatura sobre los alumnus que cometen errores algebraicos cuando manipulan expresiones racionales al tratar de simplificarlas (Davis y Jockusch 1978; Carry 1980; entre otros).

Para la investigación de este trabajo se realizó la puesta en práctica de unas hojas de trabajo, estas consistieron en tres actividades relacionadas con: la factorización, la verificación de equivalencia y solución de una ecuación.

Por lo tanto, alguno de los errores más comunes y constantes tuvieron que ver precisamente con lo descrito anteriormente, además de la manipulación algebraica, algunas de las dificultades en la experimentación fueron las siguientes:

- Evaluar una función fraccionaria con el operador "tal que" utilizando la calculadora CAS.
- Explicar con pasos algebraicos (papel y lápiz), cómo llegar de una expresión fraccionaria a otra expresión equivalente a ella.
- Dar el máximo conjunto común de valores posibles de x de una expresión.
- Explicar con pasos algebraicos (papel y lápiz) la equivalencia de dos expresiones.
- Resolver una ecuación con pasos algebraicos (papel y lápiz), cuando dos expresiones eran equivalentes y cuando no lo eran.

Problemas de aprendizaje relativos al álgebra

El pensamiento algebraico debe ser desarrollo por los estudiantes y esto no siempre es sencillo, entre las nociones que producen dificultad se señalan: la clausura para las expresiones algebraicas que los estudiantes sienten necesidad de hacer, el lenguaje algebraico al que no le "ven" sentido y que les lleva a asignar valores numéricos a las letras o a la sobre-generalización de ciertas propiedades, la preservación de la jerarquía de las operaciones para las que no encuentran justificación, el uso de parentesis, la percepción del signo igual como expresión de una equivalencia, entre otras.

Tipos de dificultades

- El uso de paréntesis.
- Jerarquía de operaciones.
- Resolver sucesiones y dar su fórmula general.
- El lenguaje algebraico al hace traducciones, por ejemplo: el cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a dicho número.
- El uso de las letras, por ejemplo: no entender que una letra representa un número generalizado.
- El uso de símbolos, por ejemplo: la equivalencia del signo igual.

Crisis en la enseñanza del álgebra

- Cognitivo: Atribuible al sujeto, la generalización y la utilización de símbolos suponen dificultad.
- Psicológico: El oír la palabra álgebra, asusta a los estudiantes.
- Social: La sociedad tiene catalogada el álgebra entre las ramas más complejas de las matemáticas.
- Pedagógico: Desmotivación de los estudiantes, lo cual hace su formación más compleja.
- Didáctico: Los métodos de enseñanza del álgebra han quedado anticuados.

Uso de Tecnología en la educación

Con el surgimiento de las nuevas tecnologías (por ejemplo, CAS), una de las áreas de interés de la comunidad ha sido estudiar el papel que la tecnología digital tiene en el aprendizaje de las matemáticas. Las nuevas tecnologías juegan un papel importante en la educación matemática de los alumnos, al ofrecerles nuevas formas de acercarse a los objetos y procesos matemáticos. A la vez, la comunidad también se ha ocupado por construir perspectivas teóricas que ofrezcan explicaciones plausibles que permitan estudiar el papel de las nuevas tecnologías digitales en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

Sobre el uso de la tecnología en el aula de matemáticas, se pueden encontrar dos tendencias en los profesores. Por una parte están los docentes que están a favor del uso de la tecnología y otros que están en contra, ya que básicamente piensan que con la tecnología se puede inhibir el desarrollo de algunas habilidades matemáticas, por ejemplo al momento de hacer operaciones con fracciones en un curso de secundaria, el cual es uno de los mayores problemas que surge en los alumnos.

En esta última postura aparecen dos tipos de profesores, unos que usan la tecnología sin cambiar el tipo de enseñanza, por ejemplo no utiliza la calculadora para resolver los ejercicios clásicos que se dan en libros (por ejemplo x+3=7). Por otra parte, los docentes que usan la tecnología pero con algunos cambios en el tipo de enseñanza, por ejemplo, realizar ejercicios de operaciones aritméticas (suma y resta) de fracciones con la calculadora pero sin introducir directamente las fracciones (por ejemplo resolver (((x+4)/8) = (3/4) +9)).

Moreno-Armella (2008), mencionan que las nuevas tecnologías permiten a los alumnos un mayor acceso a las ideas matemáticas. De acuerdo con estos autores, hay una diferencia entre el trabajo matemático cuando el mediador es estático (papel y lápiz) y cuando el mediador es la tecnología digital; las cuales permiten nuevas formas de actividad matemática.

El punto de vista antes mencionado conduce a nuevas perspectivas en cuanto al aprendizaje de las matemáticas. En este sentido Moreno-Armella (2008, p. 100), sugieren que una estructura simbólica (por ejemplo, la estructura algebraica) es un medio en el que nos auxiliamos para pensar acerca de esa estructura y a la vez tal estructura impacta la mente humana rediseñándola. En un medio estático (papel y lápiz) existe una simbolización, la cual es una plataforma para expresar y razonar con generalidad, lo que puede conducir a otras simbolizaciones; se debe considerar que el símbolo no es un ente aislado, sino que es creado por el usuario así como su significado (Moreno-Armella, p. 101).

Ventajas del CAS

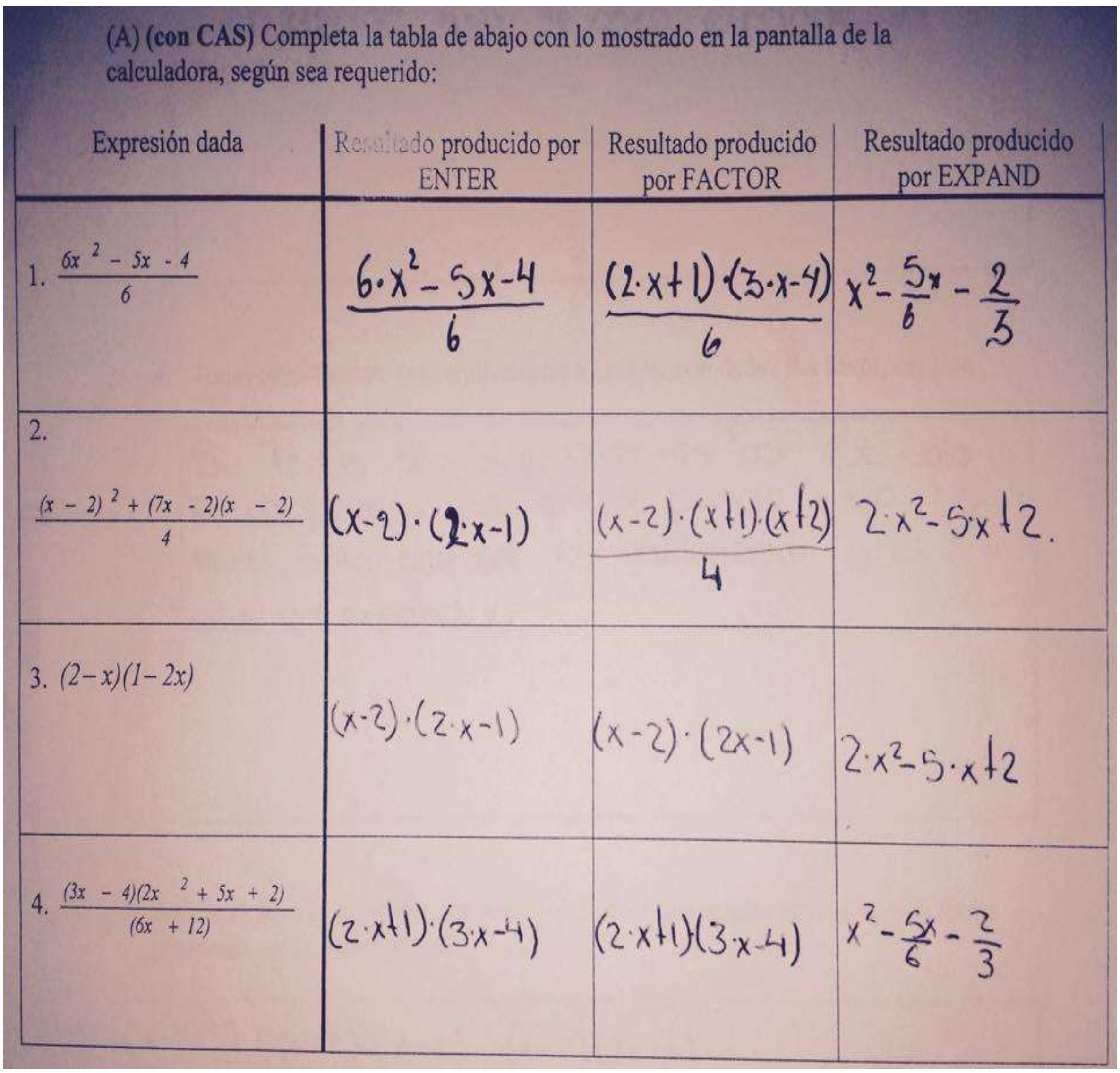
El CAS es un sistema algebraico computacional (computer algebra system), es un software que facilita el cálculo simbólico. Desde el surgimiento de manipuladores simbólicos (CAS), el uso de este tipo de tecnología para el aprendizaje del álgebra ha sido una línea de investigación que ha interesado a la comunidad. Los diferentes tipos de tecnología digital (por ejemplo, la hoja de cálculo, manipuladores simbólicos, entre otros), han permitido distintos enfoques en torno a la investigación acerca del aprendizaje del álgebra en estos ambientes.

En 1987 Hewlett-Packard presentó la primera calculadora CAS de bolsillo, en la cual por primera vez se hizo posible resolver ecuaciones lineales, hacer operaciones algebraicas, etc. En la actualidad existen diferentes calculadoras CAS, así como también programas computacionales que tienen integrado el CAS.

Se ha encontrado que el uso de la tecnología CAS alienta el uso del razonamiento general matemático y mejora la postura del estudiante, Investigaciones en la década pasada (Drijvers, 2001; Drijvers, 2003; Kieran y Damboise, 2007; Kieran y Drijvers, 2006; Lagrange, 2003; entre otras) en torno al uso de CAS han puesto en evidencia el potencial de este tipo de tecnología para que el estudiante aprenda conceptos algebraicos del estudiante. Estas investigaciones han mostrado que el uso de CAS, promueve la comprensión conceptual algebraica de los estudiantes cuando se toma en cuenta la Técnica (por ejemplo, la manera como se resuelve un problema).

Drijvers (2001), ha reportado que el uso de CAS contribuye a una mejor comprensión del concepto de parámetro y ayuda al alumno a clarificar estrategias de resolución de problemas; es decir, la manera de resolver una Tarea. En otro estudio, Drijvers (2003) muestra que el uso de CAS mejora las nociones sobre conceptos algebraicos así como las habilidades de manipulación simbólica en papel-y-lápiz. En este sentido, Kieran y Drijvers (2006) han señalado que existe una relación dialéctica entre los aspectos técnico y teórico del algebra, cuando se le permite al estudiante interactuar entre el ambiente de papel-y-lápiz y el ambiente CAS.

En particular, en la experimentación uno de los logros más significativos fue que los estudiantes pudieron mostrar con pasos algebraicos, cómo pasar de una expresión a otra expresión a partir de un resultado mostrado por el CAS:



(A) (con CAS) Completa la tabla de abajo con lo mostrado en la pantalla de la calculadora, según sea requerido:

Expresión dada	Resultado producido por ENTER	Resultado producido por FACTOR	Resultado producido por EXPAND
1. $\frac{6x^2-5x-4}{6}$	$\frac{6\cdot x^2-5x-4}{6}$	$\frac{(2\cdot x+1)\cdot(3\cdot x-4)}{6}$	$x^2-\frac{5x}{6}-\frac{2}{3}$
2. $\frac{(x-2)^2+(7x-2)(x-2)}{4}$	$(x-2)\cdot(2\cdot x-1)$	$\frac{(x-2)\cdot(x+1)\cdot(x+2)}{4}$	$2\cdot x^2-5x+2.$
3. $(2-x)(1-2x)$	$(x-2)\cdot(2\cdot x-1)$	$(x-2)\cdot(2x-1)$	$2\cdot x^2-5\cdot x+2$
4. $\frac{(3x-4)(2x^2+5x+2)}{(6x+12)}$	$(2\cdot x+1)\cdot(3\cdot x-4)$	$(2\cdot x+1)(3\cdot x-4)$	$x^2-\frac{5x}{6}-\frac{2}{3}$

2. Dada la expresión 2, muestra los pasos algebraicos que usarías para obtener la forma producida por la tecla ENTER.

$$\frac{(x-2)^2+(7x-2)(x-2)}{4} = (x-2)(2x-1)$$

$$= \frac{x^2-4x+4+7x^2-14x-2x+4}{4}$$

$$= \frac{8x^2-20x+8}{4} = 2x^2-5x+2 = (x-2)(2x-1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &2x^2-x-4x+2 \\ &= 2x^2-5x+2 \end{aligned}}$$

3. Considera la expresión 3 dada. Muestra, usando <u>álgebra en papel y lápiz</u> cómo obtienes la forma producida por el comando FACTOR.

$$(2-x)\cdot(1-2x) = (x-2)\cdot(2x-1)$$

$$= 2-4x-x+2x^2$$

$$= 2x^2-5x+2 = (x-2)\cdot(2x-1)$$

$$= (x-2)\cdot(2x-1)$$

Capítulo 3. Metodología

Descripción y selección de la muestra

La experimentación se realizó con los alumnos de tercer año de la Escuela Secundaria Federal "Lázaro Cárdenas" de las Guacamayas, Michoacán. Se llevó a cabo desde el día 7 de octubre del 2013 hasta el día 12 de noviembre del 2013. El grupo experimental se integro por 20 alumnos, que fueron sorteados al azar del tercer grado grupo D. Para que los alumnos mostraran interés, se les explicó que los que asistieran y les fuera bien se les darían puntos extras para su evaluación. Si las actividades no se terminaban en la hora de matemáticas se solicitaría la siguiente clase, las tres actividades se realizaron en seis semanas, ya que había días en los cuales no había clases por suspensión oficial.

En la primera sesión se contó con la presencia de su profesor de matemáticas Víctor Martin Gómez Ibarra y el director de la escuela José López Pérez. En esta session, los estudiantes se juntaron por parejas, con la cual trabajarían siempre. La calculadora que usaron fue la Ti-Nspire CX CAS, como la secundaria no cuenta con la tecnología necesaria para la experimentación, se pidió prestado el equipo a la Universidad Michoacana San Nicolás de Hidalgo.

Se comenzó con el encendido de la calculadora y la creación de un nuevo documento, se les explicaron las operaciones aritméticas con enteros, después operaciones con fracciones, así como, utilizar correctamente los signos de agrupación mediante paréntesis. Para este apartado se mencionaron algunas operaciones (combinando enteros con fracciones, por ejemplo: 1/3 + 8 – 7/11) y se les preguntaba a las parejas de estudiantes sus resultados para ver si la mayoría obtenían el mismo resultado.

Por último se les mostró cómo hacer operaciones algebraicas (utilizando letras), en este apartado también se les enseñó cómo copiar y pegar. Después se les mostró el comando expand y cómo utilizar dicho comando. Para este apartado se efectuó la multiplicación de dos productos en el pizarrón ((a+b)(a+b) y (a-b)(a+b)), los cuales íban resolviendo juntos paso por paso y por último se utilizó el comando para rectificar dichos resultados.

Para terminar, se les dio una lista de cinco productos para que los resolvieran utilizando el comando expand. Para ver que todos lo hubieran hecho bien, se les preguntó al azar el resultado que habían obtenido y se preguntaba si estaban de acuerdo todos, en caso de que no estuviera bien o existiera alguna duda, lo resolvían en el pizarrón. En los dos últimos ejercicios todas las parejas los tuvieron bien.

Para tener evidencias se emplearon dos cámaras de video que se utilizaron de la siguiente manera: una cámara grababa lo que hacían los alumnos que pasaban al pizarrón y sus opiniones de las preguntas que se les hacían; mientras que la otra cámara estaba en movimiento, ya que enfocaba las opiniones de los alumnos que no pasaban al pizarrón.

La forma de trabajar, fue hacer equipos de dos alumnos ya que no contaba con el equipo suficiente para todos se intentó que los equipos no cambiaran de integrantes, sin embargo, hubo algunos que se cambiaron a lo largo de la experimentación.

La experimentación constó de tres actividades, las cuales están estructuradas por una sección de lápiz y papel, una sección utilizando el sistema CAS y una sección que genera la discusión conceptual de los estudiantes.

Descripción de las fases de cada actividad

La primera actividad se realizó en seis sesiones, de 90 minutos cada una, en cuales se trabajaron 40 minutos, luego 10 minutos de descanso y se concluía con otros 40 minutos de trabajo. El tema fue el de “expresiones equivalentes”, el cual constaba de cinco apartados:

1. Comparación de expresiones mediante evaluación numérica.
2. Comparación de expresiones mediante manipulación algebraica.

3. Verificación de la equivalencia mediante la re-escritura de la forma de una expresión, usando el comando EXPAND.
4. Verificación de la equivalencia sin re-escribir la forma de una expresión, usando una prueba de la igualdad.
5. Verificación de la equivalencia, usando cualquiera de los métodos de CAS.

Las estraegias para resolver la actividad fue: en un primer paso, se les pidió a los alumnos que leyeran la hoja de trabajo, para la comprensión de las actividades a realizar, dándoles para esto un tiempo de 10 minutos, en un segundo paso, se trabajó en las hojas donde se les daba 40 minutos por apartado para contestar. Todas las sesiones con el grupo, las diriguió el autor de la Tesis. Al terminar las hojas de trabajo se hicieron las discusiones correspondientes, la cual para esta primer hoja de trabajo consto de cinco discusiones, las cuales se pasaban a tres alumnos al pizarrón donde se escogían al azar, después se les hacían preguntas sobre la hoja de trabajo y si ninguno sabia, los demás alumnos podían opinar o podían opinar sobre lo que respondían o escribían en el pizarrón, en ambas discusiones se utilizaron dos cámaras de video.

La segunda actividad se realizó en ocho sesiones, con la misma metodología que la primera. El tema fue el de “expresiones equivalentes”, el cual constaba de dos apartados:

1. Exploración e interpretación de los efectos de la tecla ENTER, asi como de los comandos EXPAND y FACTOR.
2. Muestra de la equivalencia de expresiones, mediante diversos usos de los comandos de CAS.

Antes de que los alumnos contestaran dicha actividad se les explico brevemente la sintaxis del comando “factor” y su función con unos ejemplos, para que no tuvieran ninguna duda a la hora de contestar la actividad.

La tercera actividad se realizó en siete sesiones. El tema fue el de “Transición de expresiones a Ecuaciones”, el cual constaba de cuatro apartados:

1. Introducción al uso del comando SOLVE.
2. Expresiones ya abordadas y subsecuente integración en ecuaciones.
3. Construccion de ecuaciones e identidades.
4. Sintesis de varias ecuaciones tipo.

Antes de que los alumnos contestaran dicha actividad se les explicó brevemente la sintaxis del comando “Solve” y su función, con unos ejemplos para que no tuvieran ninguna duda a la hora de contestar la hoja de trabajo.

Para seleccionar una muestra, primero se procedió a revisar qué estudiantes contestaron todas las pruebas. Los estudiantes que no tenían contestada al menos una actividad no fueron tomados en cuenta para la muestra, si un estudiante tenía dos páginas o más sin contestar, se consideró que no completó la prueba.

La primera prueba la hicieron los veinte alumnos, la segunda la realizaron dieciocho alumnos y finalmente la última la hicieron quince alumnos. De manera que sólo quince alumnos completaron las tres actividades.

De estos quince alumnos, sólo hubo dos equipos que se mantuvieron desde el inicio hasta el final, un equipo se mantuvo en dos actividades. Los demás cambiaron constantemente de equipo a lo largo de las pruebas. Por ello, se puede decir que hubo trece resultados diferentes.

Como se ha mencionado anteriormente, los datos se obtuvieron a través de las tres actividades y de las videograbaciones de los debates. Estos datos se analizaron de la siguiente manera:

Se revisó cada una de las actividades por escrito, de manera que cada reactivo se calificó como bien o mal. Las respuestas de argumentos se consideraron bien si tenían una respuesta adecuada.

En las videograbaciones se analizaron los comentarios de cinco alumnos de seleccionados, así como, algunos comentarios ajenos a ellos que tenian importancia en el contexto de sus comentarios. En esta parte se hicieron transcripciones, por lo que fue necesario marcar el tiempo en el que se realizó cada comentario.

Posteriormente se cotejó lo respondido en las actividades con las respuestas y argumentos obtenidos de las videograbaciones de los debates. De esta manera se pudieron complementar algunas respuestas, ya que en algunos casos, algunos estudiantes dieron respuestas correctas en las hojas de trabajo, pero sus argumentos no fueron del todo claros; mientras que en otras ocasiones algunos estudiantes dieron buenos argumentos pero sus respuestas en las actividades fueron diferentes.

Capítulo 4. Análisis y discusión de datos y resultados de las hojas de trabajo

Actividad A: Expresiones Equivalentes

La primera actividad se tituló “Expresiones Equivalentes”, esta fue una actividad sobre la equivalencia de expresiones. El propósito de esta actividad es que los alumnos identifiquen cuando dos expresiones son equivalentes.

Los resultados de la parte **I (A)** fueron los siguientes:
B significa bien, M significa mal y – no contestaron.

Para el valor de **x= 1/3**

Nombre	Expresión 1	Expresión 2	Expresión 3	Expresión 4	Expresión 5
1. Andrea Yuritzi	B	B	B	B	M
2. María Elena	B	M	B	B	M
3. María Luisa	B	B	B	B	B
4. Karla	B	B	B	B	B
5. Daniel	B	B	B	B	B
6. Kelvin	B	B	B	B	B
7. Jacqueline	B	B	B	B	B
8. Victoria	B	B	B	B	B
9. Emmanuel	B	B	B	B	B
10. Brayan	B	B	B	B	B

Conclusiones: El 100% de los alumnos obtuvieron bien la expresión 1, 3 y 4, el 90% de los alumnos obtuvieron bien la expresión 2, al 20% de los alumnos se le dificultó el evaluar la expresión 5. El 80% de los alumnos obtuvieron bien esta prueba.

Para el valor de **x= -5**

Nombre	Expresión 1	Expresión 2	Expresión 3	Expresión 4	Expresión 5
1.Andrea Yuritzi	B	B	B	B	-
2. María Elena	B	B	B	B	M
3. María Luisa	B	B	M	B	B
4. Karla	B	B	B	B	B
5. Daniel	B	B	M	B	B
6. Kelvin	B	B	B	B	B
7. Jacqueline	B	B	B	B	B
8. Victoria	B	B	B	B	B
9. Emmanuel	B	B	B	B	B
10. Brayan	M	B	B	B	B

Conclusiones: El 100% de los alumnos obtuvieron bien la expresión 2 y 4, el 90% de los alumnos obtuvieron bien la expresión 1, al 20% de los alumnos se le dificultó el evaluar la expresión 3 y 5. El 50% de los alumnos obtuvieron bien esta prueba.

En la parte I (b). Las opiniones fueron las siguientes:

Nombre	Observación
1.Andrea Yuritzi	Donde es un número fraccionario el resultado es también fraccionario o cero.
2. María Elena	La tercera y la cuarta ilera son diferentes los resultados porque cada quien escogio diferente.
3. María Luisa	La ilera 1 y 4 son iguales y la 2,3 y 5 son diferentes.
4. Karla	En el número 1 y 4 las respuestas fueron las mismas, en el número 2,3 y 4 las dos primeras respuestas es la misma. Son poco complicadas y es estresante en ocasiones.
5. Daniel	La ilera 2,3 y 5 tienen ceros y la ilera 1 y 4 no tienen ceros.
6. Kelvin	Que la 1ra y la 4 son iguales.

7. Jacqueline	La tercera y la cuarta ilera son diferentes los resultados. Porque cada quien se escogio diferente número. También que la primera es fracción.
8. Victoria	Que en algunos son los mismos resultados, es decir que me salieron lo mismo. Ejemplo: En la 1 y 4 son iguales, al igual que la 3 y 5, solamente el 2 no es igual exepto por los 2 últimos resultados, esas no son igual a ningún otro resultado.
9. Emmanuel	En que los resultados de la operación 1 y 4 son iguales, y la 3 y la 5 también son iguales y la 2 es diferente que todos.
10. Brayan	En la primera todos los resultados son diferentes, en la segunda, tercera y quinta los dos primeros son cero y en la cuarta son diferentes.

En la parte **II(a)**. Cuatro alumnas (Andrea, Ma. Elena, Ma. Luisa y victoria) contestaron que la expresión 1 es la forma común de la expresión 4 y la expresión 3 es la forma común de la expresión 5. Seis alumnos (Karla, Daniel, kelvin, Jacqueline, Emmanuel y Brayan) contestaron que la expresión 1 es la forma común de la expresión 4. Al 100% le quedó claro que la expresión 1 es la forma común de la expresión 4, pero el 60% no vió que la expresión 3 es la forma común de la expresión 5.

Discusión del video 1

1. ¿Qué fue lo que notaste tú?

Minuto	Nombre	Opinión
0:15 a 0:23	Ma. Luisa	La fila número 1 y la fila número 4 son iguales, salió el mismo resultado.
0:30 a 0:37	Victoria	Que la 1 y la 4 sale el mismo resultado, igual que la tercera y la quinta.
0:40 a 3:29	Ma. Luisa	Escribe en el pizarrón las expresiones.
5:02 a 5:10	Emmanuel	Pues para mí, los que me salieron iguales es la 1 y la 4, y la 3 y la 5 igual como dice mi compañera victoria.

5:35 a 5:59	Ma. Luisa	Pues a mí nada más me salieron de la 1 y la 4 los valores iguales, la tercera y la quinta no, excepto nada más un número que es el número que yo puse, que es el número 3, nada más ese, los números de más ya no.

2. ¿Qué notan de la expresión número 2?

Minuto	Nombre	Opinión
6:18 a 6:46	Ma. Luisa	Los resultados no se parecen a ninguno de los otros yo siento que es porque, porque la ecuación, bueno si se parece alguna la expresión. Los resultados si no se parecen, nada más uno se parece a la quinta.
6:59 a 7:20	Victoria	Lo único que se parece al 2 es que en la… es en los primeros 2 resultados se parece con el número 3 y 5.

3. Las expresiones 1 y 4, 3 y 5. ¿Piensan que para cualquier valor de "X" va dar el mismo resultado?

Minuto	Nombre	Opinión
7:40 a 7:50	Ma. Luisa	Pues como a mí la tercera y la quinta no me salieron los mismos resultados no sé si me den, no sabría decirle.
7:57 a 8:00	Victoria	Yo digo que sí.

4. ¿Creen que se puede encontrar un valor de X que nos diera resultados diferentes?

Minuto	Nombre	Opinión
8:38 a 8:40	Ma. Luisa	Yo creo que sí.
8:56 a 9:08	Victoria	Yo creo que no, el primer caso al ver que los otros me salieron igual, yo digo que me va a salir igual al meter cualquier número para las 1 y 4, 3 y 5 siempre le va dar el mismo resultado.

En la parte **II (b)**. Los resultados fueron los siguientes:

B significa bien, M significa mal y – no contestaron.

Nombre	Expresión 1	Expresión 2	Expresión 3	Expresión 4	Expresión 5
1.Andrea Yuritzi	M	M	M	M	-
2. María Elena	M	M	M	M	M
3. María Luisa	M	M	M	M	M
4. Karla	M	M	M	M	M
5. Daniel	M	M	M	M	M
6. Kelvin	M	M	M	M	M
7. Jacqueline	M	M	M	M	M
8. Victoria	M	M	-	M	M
9. Emmanuel	M	M	M	M	M
10. Brayan	M	M	M	M	M

Conclusiones: El 100% de los alumnos obtuvieron mal esta prueba. La mayoría de los alumnos desarrollaban las expresiones haciendo multiplicaciones, luego sumas y restas hasta que llegaban a un resultado, al parecer no entendieron la forma re – escrita.

En la parte **III(a)**. Los resultados fueron los siguientes:

B significa bien, M significa mal y – no contestaron.

Nombre	Expresión 1	Expresión 2	Expresión 3	Expresión 4	Expresión 5
1.Andrea Yuritzi	B	B	B	B	B
2. María Elena	B	M	B	B	B
3. María Luisa	M	M	B	B	B
4. Karla	B	B	B	B	B

5. Daniel	B	B	B	B	B
6. Kelvin	B	B	B	B	M
7. Jacqueline	B	B	B	B	B
8. Victoria	B	B	B	B	B
9. Emmanuel	B	B	B	B	M
10. Brayan	B	B	B	B	M

Conclusiones: El 100% de los alumnos obtuvieron bien la expresión 3 y 4, el 90% de los alumnos obtuvieron bien la expresión 1, al 20% de los alumnos se le dificultó el evaluar la expresión 2, al 30% de los alumnos se le dificultó el evaluar la expresión 5. El 50% de los alumnos obtuvieron bien esta prueba.

Discusión del video 2

1. ¿Qué es lo que el comando expand parece que hace?

Minuto	Nombre	Opinión
0:38 a 0:47	Emmanuel	El sistema expand, expande las ecuaciones para que salga el resultado.
0:51 a 0:54	Andrea	Expande las ecuaciones.
1:06 a 1:28	Ma. Luisa	Igual expande la expresión pero los paréntesis son como para dar el resultado, porque si nomas le pones nada más los paréntesis sale un resultado diferente.

2. Qué notaste sobre las expresiones 1 y 4. ¿Se produjo la misma forma expandida al usar calculadora en las expresiones 1 y 4?

Minuto	Nombre	Opinión
1:56 a 1:57	Emmanuel	Si iguales.
1:58 a 2:00	Andrea	También iguales.

3. Tomen la parte encerrada 1 y 4, es posible transformar la expresión 4 a llegar a la expresión 1.

Minuto	Nombre	Opinión
3:07 a 3:08	Emmanuel	Sí.
3:09 a 3:10	Andrea	Sí.

4. Notemos que hemos llegado a formas comunes de las expresiones dadas 1 y 4 en dos formas distintas o diferentes, una es expandiéndo las expresiones 1 y 4 produciendo la forma común que nos da $4x^2-15x+9$ y la otra factorizando la función. ¿Qué piensas de estos dos métodos diferentes para obtener forma comunes?

Minuto	Nombre	Opinión
4:42 a 4:47	Emmanuel	A mí sí me sirvieron de mucho.
4:48 a 4:59	Andrea	Pues que se ve lógico, pues son dos formas distintas pero al final llegas a lo mismo, es lo mismo.
5:24 a 5:28	Ma. Luisa	A mi si me gustaron se me hicieron fáciles.

5. Pueden tener las expresiones 3 y 5 la misma forma sin expandirlas, más bien por medio de la factorización o simplificación llegar una a la otra.

Minuto	Nombre	Opinión
6:04 a 6:06	Emmanuel	Yo creo que sí.
6:08 a 6:09	Andrea	Sí.

6. Tu trabajo algebraico en papel y lápiz, y de CAS, te dio resultados iguales.

Minuto	Nombre	Opinión
7:41 a 7:46	Emmanuel	En la primera y en la tercera el mismo, bueno parecido.
7:54 a 7:55	Andrea	A mí no.

7. Basados en nuestro trabajo algebraico y en la verificación usando CAS, podemos ahora concluir que las expresiones 1 y 4, 3 y 5, pueden ser escritas en la misma forma algebraica.

Minuto	Nombre	Opinión
8:48 a 8:49	Emmanuel	Sí.
8:51 a 8:52	Andrea	Sí.
9:04 a 9:19	Victoria	Si se puede, lo que pasa que a mí no me salió igual pero será lo mismo porque me equivoqué en algunas, es decir la 1 y 4 si se parecen algo las expresiones pero como a la 5 no le entendí no me salió el mismo resultado.

En la parte **IV(a)**. Las opiniones fueron las siguientes:

Nombre	¿Qué muestra la calculadora como resultado?	¿Cómo interpretas este resultado?	Interpretación del resultado mostrado por la calculadora.
1. Andrea Yuritzi	True	Que las dos ecuaciones son iguales, nada más que de diferente forma.	False. Porque son diferentes las ecuaciones por eso sale false.
2. María Elena	True	Esa palabra significa verdadero y nos da entender que esa expresión es verdadero porque es la misma expresión es verdadero.	False. Que la expresión que realicé es falsa, o sea que no es verdadero lo que dice ahí.
3. María Luisa	True	Significa que es verdadero, o sea que la expresión 1 es el equivalente de la otra expresión. Son iguales sólo que factorizadas.	False. Significa que es falso, o sea que las expresiones no son iguales, son diferentes.

4. Karla	True	Las dos son iguales, sólo que están escritas en forma diferente.	False. Porque false, el “tal que” altera el resultado de las ecuaciones.
5. Daniel	True	Que son iguales las ecuaciones.	Sale false porque son diferentes.
6. Kelvin	True	Que las ecuaciones son iguales sólo que con diferente forma escrita.	False. Porque las ecuaciones no son iguales.
7. Jacqueline	True	Que son iguales las expresiones, que sale el mismo resultado de las ecuaciones.	False. No es igual porque aquí tengo que poner “tal que” (I) y en la primera no.
8. Victoria	True	Que las dos ecuaciones son iguales.	False. Porque no son iguales las ecuaciones.
9. Emmanuel	True	Por que son iguales las dos ecuaciones.	False. No son iguales.
10. Brayan	True	Que las dos expresiones son iguales.	False. Que es falso el resultado que salió.

En la parte **IV (b)**. Las opiniones fueron las siguientes:

Nombre	¿Qué muestra la calculadora como resultado?	¿Cómo interpretas este resultado?
1. Andrea Yuritzi	$(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)=\ (x+5)(3x-1)(x^2-x-2)$	Es lo mismo porque el orden de los factores no altera el producto.
2. María Elena	$(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)=\ (x+5)(3x-1)(x^2-x-2)$	Que no son iguales y que es falsa.

3. María Luisa	$(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)=(x+5)(3x-1)(x^2-x-2)$	Que son distintas porque dio lo mismo.
4. Karla	$(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)=(x+5)(3x-1)(x^2-x-2)$	Es la misma, sólo que después del signo están escritas de diferente manera.
5. Daniel	$(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)=(x+5)(3x-1)(x^2-x-2)$	Que la ecuación es diferente.
6. Kelvin	$(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)=(x+5)(3x-1)(x^2-x-2)$	Que es igual pero algunos cambian de posición.
7. Jacqueline	$(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)=(x+5)(3x-1)(x^2-x-2)$	Que es falso porque la expresión dos es diferente a todas.
8. Victoria	$(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)=(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$	Salió lo mismo por la razón de que son distintas.
9. Emmanuel	$(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)=(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$	Sale lo mismo porque son totalmente diferentes.
10. Brayan	$(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)=(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$	Que es verdadero porque sale igual.

Conclusiones: Al 70% les dio el resultado: $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)=$ $(x+5)(3x-1)(x^2-x-2)$, al 30% les dio la misma ecuación que introducían. Ambas respuestas son correctas, ya que lo único que cambiaba era el orden de la multiplicación de los factores.

Discusión del video 3

1. ¿Qué resultado fue lo que les mostró la calculadora?

Minuto	Nombre	Opinión
0:13 a 0:14	Daniel	True.

¿Para cualquier valor esas dos expresiones que son?

Minuto	Nombre	Opinión
1:17 a 1:18	Daniel	Son equivalentes.

En la pregunta 3. ¿Cuando remplazaron el -2, qué fue lo que les resultó?

Minuto	Nombre	Opinión
1:52 a 1:53	Daniel	También false.

¿Cómo interpretan ese resultado?

Minuto	Nombre	Opinión
2:02 a 2:12	Daniel	Que los dos eran iguales, pero se le agrego el -2 y fue lo que cambio el resultado.

¿Por qué el -2 dio false, crees que si le pongo x = 5, también me puede dar false?

Minuto	Nombre	Opinión
2:26 a 2:27	Daniel	Puede ser.

¿Qué fue lo que les mostró cuando metieron las dos expresiones en la línea de entrada de la calculadora?

Minuto	Nombre	Opinión
5:56 a 5:57	Daniel	Me cambió la posición.
6:04 a 6: 16	Victoria	A mí me salieron las expresiones iguales, a mí no me las movió.

¿Cómo interpretas ese resultado, por qué no te dio ni false ni true?

Minuto	Nombre	Opinión
7:28 a 7:31	Daniel	Que no son iguales ni verdaderas ni una ni otra las expresiones.
7:39 a 7:43	Andrea	Que sólo son iguales para algunos valores de x las expresiones.
8:44 a 8:46	Victoria	No son iguales ni distintas las expresiones.

En la parte **V(a)**. Los resultados fueron los siguientes:

Nombre	Qué introduces en la CAS	Resultado mostrado por la CAS
1.Andrea Yuritzi 2. María Elena 3. Karla 4. Jacqueline 5. Emmanuel	expand ($4(x-1)^2-(x+1)^2$) expand($(2x+5)(x-3)-(x-3)^2$) expand($(x-3)(3x-1)$) expand($\frac{(3x-1)(x^2-x-6)}{(x+2)}$)	$3x^2$-$10x$+3 x^2+$5x$-24 $3x^2$-$10x$+3 $3x^2$-$10x$+3
6. María Luisa 7. Daniel 8. Kelvin 9. Victoria	Expand ($4(x-1)^2-(x+1)^2$) Expand($(2x+5)(x-3)-(x-3)^2$) Expand($(x-3)(3x-1)$) Expand($\frac{(3x-1)(x^2-x-6)}{(x+2)}$)	$3x^2$-$10x$+3 x^2+$5x$-24 $3x^2$-$10x$+3 $3x^2$-$10x$+3

10. Brayan	expand ($4(x-1)^2-(x+1)^2$) expand($(2x+5)(x-3)-(x-3)^2$) expand($(x-3)(3x-1)$) expand($\frac{(3x-1)(x^2-x-6)}{(x+2)}$)	$3x^2-10x+3$ $(x-3)(x+8)$ $(x-3)(3x-1)$ ----------

Conclusiones: El 100% de los alumnos utilizó el comando EXPAND, el 100% introdujo bien el comando y las cuatro expresiones correspondientes, al 100% le dio bien el resultado de la expresión y el 90% obtuvo bien el resultado de las expresiones 2,3 y 4. El 90% de los alumnos obtuvieron bien esta prueba.

En la parte **V (b)**. Las opiniones fueron las siguientes:

Nombre	¿Cuáles son las expresiones equivalentes?
1. Andrea Yuritzi	Las equivalentes son la 1,3 y 4.
2. María Elena	Son iguales la expresión: 1,3 y 4, en x-2 no son equivalentes.
3. María Luisa	Las expresiones: 1, 3 y 4 en x-2 no son equivalentes.
4. Karla	Las equivalentes son la 1,4 y 3.
5. Daniel	Cuando x+2=0. Las equivalentes son 1, 3 y 4.
6. Kelvin	1,3 y 4 son equivalentes, x-2 no equivalen.
7. Jacqueline	Cuando x+2 es igual a 0. Las equivalentes son 1, 3 y 4.
8. Victoria	Los equivalentes son las ecuaciones 1, 3 y 4 y no son equivalentes para el x= -2.
9. Emmanuel	-no escribió nada-
10. Brayan	-no escribió nada-

Actividad B: Continuación de la equivalencia de expresiones

La segunda actividad fue sobre la equivalencia de expresiones. El propósito de esta actividad es que los alumnos identifiquen cuándo dos expresiones son equivalentes.

Primero se les explicó cómo utilizar algunos comandos de la calculadora que utilizarían después. Luego se les puso a contestar la actividad donde trabajaban primero con la calculadora y luego sacaban sus conclusiones.

Los resultados de la parte **I (A)** fueron los siguientes:

B significa bien, M significa mal y – no contestaron.

Para el resultado producido por **ENTER**

Nombre	Expresión 1	Expresión 2	Expresión 3	Expresión 4
1. Andrea Yuritzi	B	B	B	B
2. María Elena	B	B	B	B
3. María Luisa	B	B	B	M
4. Karla	B	B	B	B
5. Daniel	B	B	B	B
6. Kelvin	B	B	B	B
7. Jacqueline	B	B	B	B
8. Victoria	B	B	B	B
9. Emmanuel	B	B	B	B
10. Brayan	B	B	B	M

Conclusiones: El 100% de los alumnos obtuvieron bien las expresiones 1, 2 y 3, al 20% de los alumnos se le dificultó el evaluar la expresión 4. El 80% de los alumnos obtuvieron bien esta prueba.

Para el resultado producido por **FACTOR**

Nombre	Expresión 1	Expresión 2	Expresión 3	Expresión 4
1. Andrea Yuritzi	B	B	B	B
2. María Elena	M	M	B	B
3. María Luisa	B	M	B	M
4. Karla	B	B	B	B
5. Daniel	B	B	B	B
6. Kelvin	B	B	B	B
7. Jacqueline	B	B	B	B
8. Victoria	B	B	B	B
9. Emmanuel	B	B	B	B
10. Brayan	B	B	B	M

Conclusiones: El 100% de los alumnos obtuvieron bien la expresión 3, el 90% de los alumnos obtuvieron bien la expresión 1, al 20% de los alumnos se le dificultó el evaluar la expresión 2 y 4. El 70% de los alumnos obtuvieron bien esta prueba.

Para el resultado producido por **EXPAND**

Nombre	Expresión 1	Expresión 2	Expresión 3	Expresión 4
1. Andrea Yuritzi	B	B	B	B
2. María Elena	B	B	B	M
3. María Luisa	B	B	B	B
4. Karla	B	B	B	B
5. Daniel	B	B	B	B
6. Kelvin	M	B	B	M
7. Jacqueline	B	B	B	B
8. Victoria	B	M	B	B
9. Emmanuel	B	M	B	B
10. Brayan	M	B	B	M

Conclusiones: El 100% de los alumnos obtuvieron bien la expresión 3, el 80% de los alumnos obtuvieron bien la expresión 1 y 2, al 30% de los alumnos se le dificultó el evaluar la expresión 4. El 50% de los alumnos obtuvieron bien esta prueba.

En la parte I (b). Describe cómo es la estructura de cada una de las tres formas producidas por la calculadora y compáralas con la expresión dada.

Nombre	Observación
1. Andrea Yuritzi	Al darle enter la expresión pasa igual, al ponerle factor me factoriza la expresión y expand me la expande.
2. María Elena	Que el enter hace una equivalencia, al sacar factor se hace una factorización y la otra opción da la expasion.
3. María Luisa	El enter hace el efecto, el factor hace que la expresión, o sea factoriza la expresión y el expand, expande, o sea expande la expresión.
4. Karla	Tres de ellas son fracciones y uno no, la 2 y la 5 me salieron lo mismo en todo y la 1 y 4 solo salieron igual en factor y expand pero en enter no en la dos y en la tres, en la ultima sale positivo y otro negativo.
5. Daniel	Que en el entero hace el efecto. Factor factoriza el resultado. Expand expande el resultado.
6. Kelvin	Que el enter hace el efecto, factor factorisa el resultado y expand expande las cosas.
7. Jacqueline	El resultado producido por enter la 2 y la 3 si comparan pero la uno y la cuatro no, el resultado de factor si comparan la 1 y la 4 y la 2 y 3 al igual que expand la 1 y 4 y la 2 y 3.
8. Victoria	Que cada exprecion salió de diferente manera por la razón de que usamos diferentes formas en la calculadora ejemplo: el expand y factor.
9. Emmanuel	Cuando le doy FACTOR y EXPAND a la expresión 1 y 4 me sale lo mismo.
10. Brayan	Que ni una de las tres quedó igual más que la que le di enter y la primera el expand expande y el factor factoriza las ecuaciones.

Todas estas formas, ¿son equivalentes a la expresión dada? Por favor, explica.

Nombre	Explicación
1. Andrea Yuritzi	Sí son equivalentes nada más que están re-escritas, quiere decir de diferente forma, pero al final es lo mismo.
2. María Elena	Sí, porque eso es lo que produce; cuando le pones expand y factor. Porque expandes y factorizas.
3. María Luisa	Si todas son equivalentes porque sólo es un proceso por lo que pasan pero es igual, solo que uno es factorizado y el otro ya expandido.
4. Karla	Si, todas son iguales entre ellas, están escritas de diferente forma pero dan lo mismo.
5. Daniel	Si, son equivalentes porque en la expresión 2, 3 todos sus productos son iguales.
6. Kelvin	Si porque la expresión 2 y 3 todas las ecuaciones son iguales.
7. Jacqueline	Si son equivalentes porque el resultado de la expresion 2 y 3 equivalen, el resultado producido por factor y expand la 1 y la 4 equivalen al igual que la 2 y 3.
8. Victoria	Si pues por la razón de que usamos la misma estructura.
9. Emmanuel	Si poque no son ni falsas ni verdaderas.
10. Brayan	Si porque son iguales.

En la parte 2. Dada la expresión 2, muestra los pasos algebraicos que usarías para obtener la forma producida por la tecla ENTER.

Nombre	Pasos algebraicos
1. Andrea Yuritzi	$\frac{(x-2)^2+(7x-2)(x-2)}{4}$ = (x-2)(2x-1) $x^2 + 2*(x)*(-2) + 4 + 7x - 14x - 2 + 4 = x^2 + 23x + 12$.

2. María Elena	$(x-2)^2 = x^2 + 2(x)(-2) + (-2)^2$ $\quad \dfrac{(x-2)^2 + (7x-2)(x-2)}{4}$ $= \dfrac{x^2 - 4x + 4 + 7x^2 - 14x - 2x + 4}{4} = (x-2)(2x-1)$ $= \dfrac{8x^2 - 20x + 8}{4} = 2x^2 - 5x + 2 = (x-2)(2x-1)$
3. María Luisa	$\dfrac{(x-2)^2 + (7x-2)(x-2)}{4} = (x-2)(2x-1)$ $\dfrac{x^2 - 4x + 4 + 7x^2 - 14x - 2x + 4}{4}$ $= 8x^2 - 20x + 8 /4 = 2x^2 - 5x + 2 = (x-2)(2x-1)$
4. Karla	$\dfrac{(x-2)^2 + (7x-2)(x-2)}{4}$ $\dfrac{x^2 + 2(x)(-2) + 4 + 7x - 14x - 2 + 4}{4}$
5. Daniel	$\dfrac{(x-2)^2 + (7x-2)(x-2)}{4} = (x-2)(2x-1)$ $= \dfrac{x^2 - 4x + 4 + 7x^2 - 14x - 2x + 4}{4}$ $= \dfrac{8x^2 - 20x + 8}{4} = \dfrac{4(2x^2 - 3x + 2)}{4} = 2x^2 - 5x + 2 = (x-2)(2x-1)$
6. Kelvin	$(x-2)^2 + (7x-2)(x-2) = (x-2)(2x-1)$ $x^2 + 2(x)(-2) + (-2)^2$ $x^2 - 4x + 4 + 7x^2 - 14x - 2x + 4$ $8x^2 - 20x + 8 = \dfrac{4(2x^2 - 3x + 2)}{4}$

7. Jacqueline	$\dfrac{(x-2)^2+(7x-2)(x-2)}{4}$ = (x-2)(2x-1) $x^2 + 2x -2 + 7x + 2x + 14x + 4 + x^2 + 2 + 2x + 4 + 8x^2 + 12x + 8$ $= \dfrac{4(2x^2 -3x +2)}{4}$
8. Victoria	$\dfrac{(x-2)^2+(7x-2)(x-2)}{4}$ = (x-2)(2x-1) $= x^2 + 2(x)(-2) + (-2) + 7x^2 -14x - 2x + 4$ $= \dfrac{x^2 - 4x + 4 + 7x^2 -14x - 2x + 4}{4}$ $= \dfrac{8x^2 + 20x + 8}{4} = \dfrac{8x^2}{4} + \dfrac{20x}{4} + \dfrac{8}{4} = 8x^{2-4} + 20x^{1-4} + 8^{-4}$
9. Emmanuel	$\dfrac{(x-2)^2+(7x-2)(x-2)}{4}$ = (x-2)(2x-1) $= \dfrac{x^2 + 2(x)(2) + (-2)^2 + 7x^2 -14x - 2x + 4}{4}$ $= x^2 - 4x + 4 + 7x^2 -14x - 2x + 4 / 4$
10. Brayan	No escribió nada.

En la parte 3. Considera la expresion 3 dada. Muestra, usando <u>álgebra en papel y lápiz</u> la forma producida por el comando FACTOR.

Nombre	Pasos algebraicos
1. Andrea Yuritzi	$(2 - x)(1 - 2x) = (x - 2)(2x - 1)$ $= 2 - 4x - x + 2x^2 = 2x^2 -5x + 2$
2. María Elena	$(2 - x)(1 - 2x) = 2 - 4x - x + 2x^2$ $= 2x^2 - 5x +2 = (2x - 1) (x - 2)$

3. María Luisa	$(2 - x)(1 – 2x) = (x - 2)(2x - 1)$ $= 2 - 4x – x + 2x^2$ $= 2x^2 -5x + 2 = (x - 2)(2x - 1)$
4. Karla	$(2 - x)(1 – 2x) = (x - 2)(2x - 1)$ $= 2 - 4x – x + 2x^2 = 2x^2 -5x + 2$
5. Daniel	$(2 - x)(1 – 2x) = (x - 2)(2x - 1)$ $= 2 - 4x – x + 2x^2$ $= 2x^2 -5x + 2 = (x - 2)(2x - 1)$
6. Kelvin	$(2 - x)(1 – 2x) = (x - 2)(2x - 1)$ $= 2 - 4x – x + 2x^2 = 2x^2 -5x + 2$
7. Jacqueline	$(2 - x)(1 – 2x) = (x - 2)(2x - 1)$ $= 2 - 4x – x + 2x^2$ $= 2x^2 -5x + 2 = (x - 2)(2x - 1)$
8. Victoria	No contestó nada.
9. Emmanuel	$(2 - x)(1 – 2x) = (x - 2)(2x - 1)$ $= 2 - 4x – x + 2x^2 = 2x^2 -5x + 2$
10. Brayan	$(2 - x)(1 – 2x) = (x - 2)(2x - 1)$ $= 2 - 4x – x + 2x^2 = 2x^2 -5x + 2$

En la parte 4. Considera la expresión 4 dada. Muestra, usando álgebra en papel y lápiz, cómo obtienes la forma producida por el comando EXPAND.

Nombre	Pasos algebraicos
1. Andrea Yuritzi	$\frac{(3x-4)(2x^2+5x+2)}{(6x+12)} = x^2 - \frac{5x}{6} - \frac{2}{3}$ $= \frac{6x^2 + 15x^2 + 6x - 8x^2 + 20x – 8}{(6x + 12)} = 29x^2 + 26x – 8.$
2. María Elena	No contestó nada.

3. María Luisa	$\frac{(3x-4)(2x^2+5x+2)}{(6x+12)} = x^2 - \frac{5x}{6} - \frac{2}{3}$ $= \frac{6x^2 + 15x^2 + 6x - 8x^2 + 20x - 8}{(6x + 12)}$ $= \frac{13x^2 - 14x - 8}{(6x + 12)}$
4. Karla	$(3x-4)(2x^2+5x+2) = x^2 - \frac{5x}{6} - \frac{2}{3}$ $= \frac{6x^2 + 15x^2 + 6x - 8x^2 + 20x - 8}{(6x + 12)} = 29x^2 + 26x - 8.$
5. Daniel	$\frac{(3x-4)(2x^2+5x+2)}{(6x+12)} = x^2 - \frac{5x}{6} - \frac{2}{3}$ $= \frac{6x^2 + 15x^2 + 6x - 8x^2 - 20x - 8}{(6x + 12)}$ $= \frac{13x^2 - 14x - 8}{(6x + 12)} = 6(x+2)$
6. Kelvin	$\frac{(3x-4)(2x^2+5x+2)}{(6x+12)} = x^2 - \frac{5x}{6} - \frac{2}{3}$ $= \frac{6x^2 + 15x^2 + 6x^2 - 8x^2 - 20x - 8}{(6x + 12)} = \frac{13x - 14x - 8}{(6x + 12)}$ 12(x+2)
7. Jacqueline	$\frac{(3x-4)(2x^2+5x+2)}{(6x+12)} = x^2 - \frac{5x}{6} - \frac{2}{3}$ $= \frac{6x^2 + 15x + 6x - 8x^2 - 20x - 8}{(6x + 12)}$ $= \frac{14x^2 - 41x - 8}{(6x + 12)} = 6(x+2)$ $= 12(x+2)$
8. Victoria	No contestó nada.
9. Emmanuel	$\frac{(3x-4)(2x^2+5x+2)}{(6x+12)}$ $=(x + 3)(x + 1)$

10. Brayan	$\frac{(3x-4)(2x^2+5x+2)}{(6x+12)}$

En la parte 5. En la tabla de la Parte IA precedente, ¿cuáles de esas expresiones son equivalentes entre ellas? (Compáralas tanto como puedas.) Por favor, justifica tu respuesta. En esta equivalencia de expresiones, ¿hay algunas restricciones en cuanto a los valores posibles de *x*? Por favor, explica.

Nombre	Explicación
1. Andrea Yuritzi	La 2 y la 3 son equivalentes porque el resultado producido por enter y por factor es igual y si hay restricciones para cuando el valor de x es -4.
2. María Elena	No escribió nada.
3. María Luisa	Son equivalentes la 1 y la 4. Cuando son equivalente es por con cualquier valor de x el resultado serán iguales y también hay equivalencia en la 2 y en la 3. Porque cuando hay una restricción es cuando da cero.
4. Karla	La expresion 2 y 3 son equivalentes y no hay restricciones. La expresion 1 y 4 son equivalentes en factor y expand y son equivalentes.
5. Daniel	Las expresiones 2 y 3 son equivalentes. No, hay restricciones.
6. Kelvin	Las expresiones 2 y 3 son iguales si hay restricción. x + 2 = 0 , x= -2
7. Jacqueline	El resultado producido por enter la expresion 2 y 3 son equivalentes, el resultado producido por factor y por expand la 2 y 3 son equivalentes y la 1 y 4 igual, son todas iguales nada más que las expresiones están escritas de otras formas.
8. Victoria	No contestó nada.
9. Emmanuel	La expresion 2 y 3 son equivalentes porque son iguales y la expresion 1 y 4 son equivalentes porque los resultados salieron iguales. Sí, porque agarra todos los valores de x.
10. Brayan	1.- (x - 2)(2x - 1) y 3.- (x - 2)(2x - 1) son equivalentes porque dan el mismo resultado.

Discusión del video 4

¿Cuáles son las expresiones equivalentes?

Minuto	Nombre	Opinión
0:30 a 0:34	Daniel	La 1 y la 4 y la 2 y la 3.
0:35 a 0:37	Andrea	La 2 y la 3.
0:55 a 1:15	Emmanuel	La 1 y la 4, me sale distinta cuando se expande, la 2 y la 3.

¿Cómo es la estructura de enter, factor, expand y qué diferencia tiene a la expresión dada?

Minuto	Nombre	Opinión
2:11 a 2:26	Daniel	La estructura enter 1 me salió igual y en la 3, en la de factor y expand en ninguna igual.
2:22 a 2:30	Andrea	Igual en la expresión 1, me salió igual en enter nada más y en factor y expand me salieron diferentes.

¿La forma producida por enter, factor y expand son equivalentes a la expresión dada y por qué?

Minuto	Nombre	Opinión
3:36 a 3:40	Daniel	Para mi nada más enter y expand.
4:12 a 4:19	Andrea	Para mi enter, factor y expand si son equivalentes, como dice mi compañera con un proceso podemos llegar a la expresión dada.

La expresión 2 muestra los pasos algebraicos que usarías para obtener la forma producida por la tecla enter.

Minuto	Nombre	Opinión
4:52 a 6:16	Daniel	Escribe en el pizarrón lo siguiente: $x^2 - 4x + 4 + 7x^2 -14x - 2x + 4$ $= 8x^2 - 12x + 8 = \frac{4(2x^2 -3x +2)}{4} = 2x^2 - 5x + 2$ $= (x - 2)(2x - 1)$
6:43 a 7:45	Daniel	Da su explicación y corrige, le faltó dividir entre 4 desde el comienzo en los dos primeros pasos.
11:54 a 13:16	Andrea	Escribió en el pizarrón: $\frac{(x-2)^2 + (7x-2)(x-2)}{4} = (x-2)(2x-1)$ $= x^2 + 2*(x)*(-2) + 4 + 7x -14x -2 + 4 = x^2 + 23x + 12.$
13:36 a 13:37	Andrea	Eso es lo que tengo yo pero ya no me acuerdo los pasos.

La expresión 3 muestra los pasos algebraicos que usarías para obtener la expresión por el comando factor.

Minuto	Nombre	Opinión
14:53 a 16:15	Daniel	Escribe en el pizarrón lo siguiente: $(2 - x)(1 – 2x) = (x - 2)(2x - 1)$ $= 2 - 4x – x + 2x^2$ $= 2x^2 -5x + 2 = (x - 2)(2x - 1).$
16:37 a 17:41	Daniel	Explicación “no supo explicar” al comienzo, no se acordaba hasta el último se acordó.
17:50 a 18:01	Daniel	Da la explicación bien.
18:41 a 19:41	Andrea	$(2 - x)(1 – 2x) = (x - 2)(2x - 1)$ $= 2 - 4x – x + 2x^2$ $= 2x^2 -5x + 2 = (x - 2)(2x - 1).$

He aquí una lista de cuatro expresiones equivalentes, sujetas a ciertas restricciones.

Tabla 1

Expresión dada
1. $\frac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{(7x+21)}$
2. $\frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$
3. $6x^2-21x+9$
4. $\frac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)}$

II(A) Determina el máximo conjunto común de valores posibles de *x* de estas expresiones. Muestra y explica cómo determinaste este conjunto de valores.

Nombre	Explicación
1. Andrea Yuritzi	El máximo conjunto común de valores de x para estas cuatro expresiones son todos los números reales, excepto para: -3 , 4 y -3. 7x + 21 = 0 x – 4 = 0 x + 3 = 0 7x = -21/7 x = +4 x = -3
2. María Elena	Pues cuando están restringidas que serían la expresión: 1, 2, 4. Los números reales IR\ {-3, 4 , -3}
3. María Luisa	El máximo conjunto son todos los IR y cuando es cero el denominador. Los valores son: 1.(7x + 21) = 7x = 21 2. (x – 4) = x + 4 4. (x+3) = x = -21 / 7 x = -3 x = -3 Los números reales IR\ {-3, 4 , -3}

4. Karla	El máximo conjunto común para las cuatro expresiones y todos contienen números reales, todas se pueden restringir menos la 3 porque no tiene restricciones. $7x + 21 = 0$ $x - 4 = 0$ $x = 4$ $x + 3 = 0$
5. Daniel	Que la función no esta completa cuando es cero y que x tiene otro valor. Cuando el máximo común es cero no esta definida y son $x - 4 = 0$ $x + 3 = 0$ $x = 4$ $x = -3$
6. Kelvin	Que la función que hace es encontrar el valor de 0 para sacar el conjunto. $7x + 21 = 0$ $x - 4 = 0$ $x + 3 = 0$ $7x = -21$ $x = 4$ $x = -3$ $x = -21/7 = -3$
7. Jacqueline	El conjunto más grande de estas expresiones que son cuatro, sólo 3 expresiones son equivalentes o sea que son iguales para las cuales están definidas. Para la primera es $7x + 21 = 0$, $7x = - 21$ para la segunda es $(x - 4) = 0$, $x = 4$ para la cuarta es $x + 3 = 0$, $x = -3$ la tercera no la pongo porque si es equivalente o sea porque si es igual a las otras pero no tiene.
8. Victoria	El máximo común son los números reales menos para los números de x que es 0 denominador que a la vez son los números -3, +4, -3. 1) $7x + 21 = 0$ 2) $x - 4 = 0$ 4) $x + 3 = 0$ $7x = 21$ $x = +4$ $x = -3$ $x= 21/7 = -3$
9. Emmanuel	El conjunto más grande de valores para estas cuatro expresiones contienen todo los números reales para los cuales están definidas. $7x + 21 = 0$ $x - 4 = 0$ $x + 3 = 0$ $7x = -21$ $x = - 4$ $x = -3$ $x = -21/7 = -3$ $\text{IR} < -3 , -4 , -3 >$
10. Brayan	Que la función no esta completa cuando es cero o sea que x tiene un valor de tres. $(7x + 21) = 0$, $x + 5= 0$ $x = -5$, $x+ 3 = 0$ $x = -3$. Las restricciones es cuando el de abajo se hace cero. Que el máximo conjunto son los reales pero cuando x va de -3 y -5 Cuando el denominador es cero no está definida.

II (B). Usando, una vez y sólo una vez, cada uno de los cuatro métodos para determinar la equivalencia, muestra que todas las cuatro expresiones de la Tabla 1 son equivalentes. En la Tabla 2, establece qué es lo que introduces en la calculadora y qué es lo que obtienes. (Puedes usar la hoja de trabajo dada en la última página para conservar los registros de tu trabajo.)

Tabla 1

Expresión dada
Exp1. $\frac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{(7x+21)}$
Exp2. $\frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$
Exp3. $6x^2-21x+9$
Exp4. $\frac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)}$

Método de **verificación de la igualdad**

Nombre	Qué introduces en la CAS	Resultado mostrado por la CAS
1. Andrea Yuritzi	$\frac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{(7x+21)} = 6x^2-21x+9$	True
2. María Elena	$\frac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{(7x+21)} = \frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$	True
3. María Luisa	$\frac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{(7x+21)} = \frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$	True
4. Karla	$\frac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{(7x+21)} = 6x^2-21x+9$	True
5. Daniel	$\frac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{(7x+21)} = \frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$	True
6. Kelvin	$\frac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{(7x+21)} = \frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$	True
7. Jacqueline	$\frac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{(7x+21)} = 6x^2-21x+9$	True

8. Victoria	$\frac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{(7x+21)} = \frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$	True
9. Emmanuel	$\frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)} = \frac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)}$	True
10. Brayan	$\frac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{(7x+21)} = \frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$	True

Método de **FACTOR**

Nombre	Qué introduces en la CAS	Resultado mostrado por la CAS
1. Andrea Yuritzi	Factor($\frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$)	3 (x - 3) (2x -1)
2. María Elena	factor($\frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$)	3 (x - 3) (2x -1)
3. María Luisa	Factor($\frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$)	3 (x - 3) (2x -1)
4. Karla	factor($\frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$)	3 (x - 3) (2x -1)
5. Daniel	Factor($\frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$)	3 (x - 3) (2x -1)
6. Kelvin	Factor $\frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$	3 (x - 3) (2x -1)
7. Jacqueline	factor($\frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$)	3 (x - 3) (2x -1)
8. Victoria	factor(6x^2 - 21x + 9)	3 (x - 3) (2x -1)
9. Emmanuel	factor($\frac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{(7x+21)}$)	3 (x - 3) (2x -1)
10. Brayan	Factor($\frac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)}$)	3 (x - 3) (2x -1)

Método de **EXPAND**

Nombre	Qué introduces en la CAS	Resultado mostrado por la CAS
1. Andrea Yuritzi	expand ($\frac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)}$)	$6x^2 - 21x + 9$
2. María Elena	Expand ($6x^2 - 21x + 9$)	$6x^2 - 21x + 9$
3. María Luisa	Expand ($6x^2 - 21x + 9$)	$6x^2 - 21x + 9$
4. Karla	expand ($\frac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)}$)	$6x^2 - 21x + 9$
5. Daniel	Expand ($6x^2 - 21x + 9$)	$6x^2 - 21x + 9$
6. Kelvin	Expand $6x^2 - 21x + 9$	$6x^2 - 21x + 9$
7. Jacqueline	expand ($\frac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)}$)	$6x^2 - 21x + 9$
8. Victoria	expand ($\frac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)}$)	$6x^2 - 21x + 9$
9. Emmanuel	Expand ($6x^2 - 21x + 9$)	$6x^2 - 21x + 9$
10- Brayan	expand ($6x^2 - 21x + 9$)	$6x^2 - 21x + 9$

Método de **ENTER**

Nombre	Qué introduces en la CAS	Resultado mostrado por la CAS
1. Andrea Yuritzi	$6x^2 - 21x + 9$	$6x^2 - 21x + 9$
2. María Elena	$\frac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)}$	3 (x - 3) (2x -1)
3. María Luisa	$\frac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)}$	3 (x - 3) (2x -1)
4. Karla	$6x^2 - 21x + 9$	$6x^2 - 21x + 9$
5. Daniel	$\frac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)}$	3 (x - 3) (2x -1)
6. Kelvin	$\frac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)}$	3 (x - 3) (2x -1)
7. Jacqueline	$6x^2 - 21x + 9$	$6x^2 - 21x + 9$
8. Victoria	$\frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$)	3 (x - 3) (2x -1)

9. Emmanuel	$\frac{3(2x - 1)(x^2 - 9)}{(x + 3)}$	3 (x - 3) (2x -1)
10. Brayan	$\frac{3(2x - 1)(x^2 - 9)}{(x + 3)}$	3 (x - 3) (2x -1)

II(C). Usando <u>sólo</u> los resultados de la Tabla 2, prueba las seis afirmaciones de equivalencia.

Afirmación de equivalencia Exp1 ≡ Exp2

Nombre	**Prueba de la equivalencia**
1. Andrea Yuritzi	Si son equivalentes porque la igualación de la 1 es la expansión de la 2.
2. María Elena	Bueno pues al introducir las dos expresiones me salió que era True, se da a referir que el valor de “x” es igual en las dos.
3. María Luisa	Pues yo introduci la expresion 1 y la dos en la calculadora, por lo tanto me salio true, o sea que las dos son equivalentes, por lo tanto el resultado es igual.
4. Karla	Son equivalentes porque el resultado que medio la exp.2 al factorizar es la misma exp.1 pero con diferente posición.
5. Daniel	A través de la verificación de igualdad puse el exp.1 y el exp.2 me salió true asi que los dos exponentes son equivalentes.
6. Kelvin	No escribió nada.
7. Jacqueline	Son distintos los resultados porque la expresion 1 la puse en igualdad y la 2 en factor.
8. Victoria	Los verifiqué y me salió true es decir que son verdaderos.
9. Emmanuel	Que en la exp.1 dice que es verdadero el igual de la exp.2.
10. Brayan	Salió true porque las ecuaciones son equivalentes.

Afirmación de equivalencia Exp1 ≡ Exp3

Nombre	**Prueba de la equivalencia**
1. Andrea Yuritzi	Si son equivalentes porque al verificar la igualdad me salió True que significa verdadero.
2. María Elena	La exprecion uno es igual que el factor de la dos y el resultado de la dos es igual que el de la tercera.

3. María Luisa	Pues como yo introduci la expresion 1, o sea la repetí y pues mi resultado de la 1 y la 3 me dio igual, por lo tanto son equivalentes, o sea que cualquier valor de x me va dar =.
4. Karla	Son equivalentes porque las usamos en una misma operación con el signo de igualdad y salió “true”.
5. Daniel	Al poner verificación de la igualdad es diferente al poner expand a la exp.3.
6. Kelvin	No escribió nada.
7. Jacqueline	Si son equivalentes porque al ponerlas en igualdad nos da true o sea que si son verdaderas.
8. Victoria	En la 3 le di enter y la otra la hice verificar y no son iguales por causa de x.
9. Emmanuel	Que al ser equivalente las dos dan el resultado diferente.
10. Brayan	No son equivalentes porque da cero.

Afirmación de equivalencia Exp1 ≡ Exp4

Nombre	**Prueba de la equivalencia**
1. Andrea Yuritzi	Si son equivalentes porque al expandir la (4) me resultó la igualdad de la expresión 1.
2. María Elena	Si es igual porque la uno es el resultado de la 2 y la 2 se parece a la 4.
3. María Luisa	Pues la 1 y la 4 son equivalentes porque a mi me dieron el mismo resultado por lo tanto son equivalentes.
4. Karla	Tienen la misma forma de exp. Pero puede y son equivalentes porque al expandir la exp.4 me dio un resultado y me dio true en la exp.1 cuando la verifique con otra exp.
5. Daniel	Son equivalentes porque el uno es igual a las 2 y la 4.
6. Kelvin	No escribió nada.
7. Jacqueline	También son distintas porque la uno la puse en igualdad y la cuatro en enter y me salieron los resultados distintos.
8. Victoria	La 1 la verifiqué y la 4 la expandí y no son iguales porque una salió true y la otra no.
9. Emmanuel	El resultado reproducido de factor exp.1 da el mismo resultado que el enter de la exp.4.

10. Brayan	No escribió nada.

Afirmación de equivalencia Exp2 ≡ Exp3

Nombre	**Prueba de la equivalencia**
1. Andrea Yuritzi	Si son equivalentes porque factorizada la exp. 2, si la expando me resulta lo de la exp. 4.
2. María Elena	El valor de “x” no siempre va hacer a mismo en las dos.
3. María Luisa	Pues como yo en la primera meti la expresion 1 y 2 y entonces no tengo un resultado parecido pero es como factorizados los resultados pero son iguales.
4. Karla	Son equivalentes porque tienen la misma respuesta sólo que una está factorizado y el otro expandido y el resultado se pone en diferente posición.
5. Daniel	Cuando pongo factor la exp.2 me sale un resultado diferente al poner Expand al exp.3 asi que no son equivalentes.
6. Kelvin	No escribió nada.
7. Jacqueline	Me salieron distintos los resultados porque la expresion 2 la puse en factor y la expresion 3 en expand.
8. Victoria	En la 2 factorice y en la 3 le di enter y me dio el mismo resultado.
9. Emmanuel	Que en la exp.2 da verdadero y la exp.3 dada por factor da si factorización.
10. Brayan	No escribió nada.

Afirmación de equivalencia Exp2 ≡ Exp4

Nombre	**Prueba de la equivalencia**
1. Andrea Yuritzi	Son equivalentes porque la 3 es la expansión de la 4.
2. María Elena	Da lo mismo de resutado.
3. María Luisa	Pues como de ahí, pero son iguales porque los resultados de la 1 y 4 son iguales por lo tanto la 2 también, porque al principio iguale la 1 y la 2 y me salió verdadero.
4. Karla	Son equivalentes pero están acomodados los resultados de diferente manera.

5. Daniel	En estos exponentes es el resultado igual al poner factor a la exp.2 y al poner antes al exp.4 asi que sí son equivalentes.
6. Kelvin	No escribió nada.
7. Jacqueline	Son distintas las respuestas porque las 2 puse en factor y la cuatro en expand eso hace que me salga diferente resultado.
8. Victoria	La 2 la factorize y la 4 la expandi y no son iguales para ciertos x.
9. Emmanuel	Que sale verdadero en la exp.2 y una expresión dada de enter en la exp.4.
10. Brayan	3(x-3)(2x - 1)

Afirmación de equivalencia Exp3 ≡ Exp4

Nombre	**Prueba de la equivalencia**
1. Andrea Yuritzi	Al expandir la 4 me resulta la 3 por eso son equivalentes.
2. María Elena	Son diferentes pero quizás el valor de “x” no es siempre el mismo.
3. María Luisa	En el caso de la 3 y la 4 tambien son iguales los resultados, sólo que factorizado ya el resultado.
4. Karla	Son equivalentes porque a la expresion 3 cuando presione enter me dio el mismo resultado que cuando expandi la exp.4
5. Daniel	Al poner expand al exp.3 sale diferente al poner enter a la exp.4.
6. Kelvin	No escribió nada.
7. Jacqueline	Me salieron iguales los resultados nada más que están escritas de diferente formas pero dan el mismo resultado.
8. Victoria	La 3 le di enter y la 4 la expandi y son iguales para ciertas x.
9. Emmanuel	Que al ser equivalentes dan un resultado diferente.
10. Brayan	Son equivalentes.

Análisis de video 5

¿Cuál es el máximo conjunto común de valores de x, de esas expresiones que son equivalentes?

Minuto	Nombre	Opinión
0:24 a 0:43	Victoria	Yo puse con mis palabras que el máximo común de los números son los números reales menos para los números de x que es cero, es el denominador que también son los números -3, +4 de las expresiones que tengo aquí en la tabla.
0:48 a 1:00	Emmanuel	Para mi son todos los números reales excepto el denominador es cero. Para el -3 y 4.
1:21 a 2:28	Victoria	Escribe en el pizarrón lo siguiente: 1)7x + 21 = 0 2) x – 4 = 0 7x = 21 x = +4 x= 21/7 = -3

¿Por qué no tomaste el denominador de la 3 y 4 Victoria?

Minuto	Nombre	Opinión
2:41 a 2:52	Victoria	La de la 4 no la tome por la razón que es la misma que la primera y la 3 no tiene denominador.

¿Hiciste las mismas operaciones emmanuel?

Minuto	Nombre	Opinión
3:04 a 4:18	Emmanuel	Casi hice lo mismo. 7x + 21 = 0 x – 4 = 0 7x = -21 x = +4 x = -21/7 = -3
4:37 a 4:40	Emmanuel	La expresión 4, sale lo mismo. Y la tercera no tiene denominador.

Actividad C: Transición de Expresiones a Ecuaciones

La tercera fue una actividad para resolver una ecuacion. El propósito de esta actividad es que los alumnos resolviendo dos expresiones vieran si eran equivalentes dichas expresiones y construyeran con su propio criterio expresiones equivalentes. Primero se les explicó cómo utilizar algunos comandos de la calculadora que utilizarían después. Luego se les puso a contestar la actividad donde trabajaban primero con la calculadora y luego sacaban sus conclusiones.

Los resultados de la parte **I.** fueron los siguientes:

Resuelve la ecuación $x^2 = x$ usando el comando SOLVE de la calculadora.

1. ¿Qué muestra la calculadora como resultado?

Nombre	Resultado
1. Andrea Yuritzi	x = 1 or x = 0.
2. María Elena	x = 1 or x = 0.
3. María Luisa	x = 1 or x = 0.
4. Karla	x = 1 or x = 0.
5. Daniel	x = 1 or x = 0.
6. Kelvin	x = 1 or x = 0.
7. Jacqueline	x = 1 or x = 0.
8. Victoria	x = 1 or x = 0.
9. Emmanuel	x = 1 or x = 0.
10. Brayan	x = 1 or x = 0.

Conclusiones: El 100% de los alumnos obtuvieron bien esta pregunta, ya que todos obtuvieron como resultado x = 1 or x = 0, lo cual el 100% de los alumnos ejecutó bien el comando SOLVE.

2. ¿Puedes anticipar lo que mostraría la calculadora cuando sustituyas cada uno de estos valores de *x* en la ecuación?

Nombre	Resultado
1. Andrea Yuritzi	True.
2. María Elena	True.
3. María Luisa	True.
4. Karla	True.
5. Daniel	True.
6. Kelvin	True.
7. Jacqueline	True.
8. Victoria	True.
9. Emmanuel	True.
10. Brayan	True.

Conclusiones: El 100% de los alumnos obtuvieron bien esta pregunta, ya que todos obtuvieron como resultado true, el 100% anticipó lo que mostraría la calculadora al evaluar cada uno de los valores de x en la ecuación.

He aquí tres expresiones:

1. $x(x^2 - 9)$
2. $(x+3)(x^2-3x) - 3x - 3$
3. $(x^2 - 3x)(x+3)$

II(A). Usa tu calculadora para determinar cuáles de estas expresiones son equivalentes. Completa la tabla de abajo con la información apropiada.

Nombre	Qué introduces en la CAS	Qué muestra la CAS	Mi interpretación de lo que muestra la CAS
1. Andrea Yuritzi	$x(x^2 - 9) = (x+3)(x^2-3x) - 3x – 3$ $x(x^2 - 9) = (x^2 - 3x)(x+3)$	$x(x^2 - 9) = x^3 - 12x -3$ True	No son equivalentes. Sí son equivalentes.
2. María Elena	$x(x^2 - 9) = (x+3)(x^2-3x) - 3x – 3$ $x(x^2 - 9) = (x^2 - 3x)(x+3)$	$x(x^2 - 9) = x^3 - 12x -3$ true	No son equivalentes. Que si son equivalentes.

3. María Luisa	$x(x^2 - 9) = (x+3)(x^2-3x) - 3x – 3$ $x(x^2 - 9) = (x^2 - 3x)(x+3)$	$x(x^2 - 9) = x^3 - 12x -3$ true	Dio ese resultado porque las expresiones no son equivalentes. Las expresiones son equivalentes.
4. Karla	$x(x^2 - 9) = (x+3)(x^2-3x) - 3x – 3$ $x(x^2 - 9) = (x^2 - 3x)(x+3)$	$x(x^2 - 9) = x^3 - 12x -3$ True	No son equivalentes. Equivalentes para cualquier valor.
5. Daniel	$x(x^2 - 9) = (x+3)(x^2-3x) - 3x – 3$ $x(x^2 - 9) = (x^2 - 3x)(x+3)$	$x(x^2 - 9) = x^3 - 12x -3$ True	Que la 1 y 2 no son equivalentes. Que la 1 y 3 si son equivalentes
6. Kelvin	$x(x^2 - 9) = (x+3)(x^2-3x) - 3x – 3$ $x(x^2 - 9) = (x^2 - 3x)(x+3)$	$x(x^2 - 9) = x^3 - 12x -3$ True	No son equivalentes sólo para unos valores. Sí son equivalentes.
7. Jacqueline	$x(x^2 - 9) = (x+3)(x^2-3x) - 3x – 3$ $x(x^2 - 9) = (x^2 - 3x)(x+3)$	$x(x^2 - 9) = x^3 - 12x -3$ True	No son equivalentes la expresion 1 y 2. Sí son equivalentes la expresion 1 y 3.
8. Victoria	$(x^2 - 3x)(x+3) = x(x^2 - 9)$ $(x^2 - 3x)(x+3) = (x+3)(x^2-3x) - 3x – 3$	True $(x^2 - 3x)(x+3) = x^3 - 12x -3$	Son equivalentes. No son equivalentes.
9. Emmanuel	$x(x^2 - 9) = (x^2 - 3x)(x+3)$ $x(x^2 - 9) = (x+3)(x^2-3x) - 3x – 3$	True $x(x^2 - 9) = (x+3)(x^2-3x) - 3x – 3$	La expresion 1 y 3 son equivalentes. La expresion 1 y 2 no son equivalentes.
10. Brayan	$x(x^2 - 9) = (x^2 - 3x)(x+3)$ $x(x^2 - 9) = (x+3)(x^2-3x) - 3x – 3$	True $x(x^2 - 9) = (x+3)(x^2-3x) - 3x – 3$	La exprecion 1 y 3 son equivalentes. La expresion 1 y 2 no son equivalentes.

II (B). ¿Cuáles, de las expresiones precedentes, son equivalentes? ¿Cuáles no son equivalentes? Por favor, explica.

Nombre	Explicación
1. Andrea Yuritzi	La exp.1 y la 2 no son equivalentes y la exp.1 y 3 si son equivalentes, la 2 y la 3 no son equivalentes
2. María Elena	La expresión 1 y 2 no son equivalentes. La 1 y 3 si lo son, y por lógica la 3 y 2 no son.
3. María Luisa	La expresión 1 y 2 no son equivalentes. La 1 y 3 si son equivalentes y por lógica la 2 y la 3 no son equivalentes.
4. Karla	Expresión 1 y 2 no son equivalentes. Expresión 1 y 3 son equivalentes para cualquier valor.
5. Daniel	La exprecion 1 y 2 no son equivalentes, ni tampoco para la expresión 3 y las expresiones 1 y 3 si son equivalentes.
6. Kelvin	Son equivalentes la 1 y la 3 y la 1 y la 2 no.
7. Jacqueline	Son equivalentes la 1 y la 3 y no son equivalentes la 1 y la 2, eso significa que la 2 y la 3 no son equivalentes.
8. Victoria	La 3 y la 1 son equivalentes pero la 3 y la 2 no lo son.
9. Emmanuel	La 1 y la 3 son equivalentes, la 1 y la 2 no son equivalentes y la 2 y la 3 no son equivalentes porque la 1 y la 2 no son equivalentes y la 1 y la 3 si son equivalentes.
10. Brayan	Que la ex la 1 y la 3 son equivalentes, la 1 y la 2 no son equivalentes como la 1 es equivalente a la 3, la tres no es equivalente con la 2, así que ni la 1 ni la 3 son equivalentes con la 2.

II(C). Construye una ecuación, usando un par de las expresiones dadas que no son equivalentes (observa Parte II B, precedente). Usa tu calculadora para determinar esos valores de *x*, si hay algunos para los que ambas expresiones escritas como ecuación, son iguales.

Nombre	Qué introduces en la CAS	Qué muestra la CAS
1. Andrea Yuritzi	Solve $(x(x^2-9) = (x+3)(x^2-3x)-3x-3, x)$	$x = -1$
2. María Elena	Solve $(x(x^2-9) = (x+3)(x^2-3x)-3x-3, x)$	$x = -1$
3. María Luisa	Solve $(x(x^2-9) = (x+3)(x^2-3x)-3x-3, x)$	$x = -1$
4. Karla	Solve $(x(x^2-9) = (x+3)(x^2-3x)-3x-3, x)$	$x = -1$
5. Daniel	Solve $(x(x^2-9) = (x+3)(x^2-3x)-3x-3, x)$	$x = -1$
6. Kelvin	Solve $(x(x^2-9) = (x+3)(x^2-3x)-3x-3, x)$	$x = -1$
7. Jacqueline	Solve $(x(x^2-9) = (x+3)(x^2-3x)-3x-3, x)$	$x = -1$
8. Victoria	Solve $((x^2 -3x)(x+3) = (x+3)(x^2-3x)-3x-3, x)$	$x = -1$
9. Emmanuel	SOLVE $(x(x^2-9) = (x+3)(x^2-3x)-3x-3, x)$	$x = ()$
10. Brayan	Solve $(x(x^2-9) = (x+3)(x^2-3x)-3x-3, x)$	

II(D). ¿Cómo usarías la calculadora para verificar que los valores encontrados para *x* son soluciones de tu ecuación? Completa la tabla de abajo con la información apropiada.

Nombre	Qué introduces en la CAS	Qué muestra la CAS
1. Andrea Yuritzi	$x(x^2-9) = (x+3)(x^2-3x)-3x-3 \mid x = -1$	True
2. María Elena	$x(x^2-9) = (x+3)(x^2-3x)-3x-3 \mid x = -1$	True
3. María Luisa	$x(x^2-9) = (x+3)(x^2-3x)-3x-3 \mid x = -1$	True
4. Karla	$x(x^2-9) = (x+3)(x^2-3x)-3x-3 \mid x = -1$	True
5. Daniel	$x(x^2-9) = (x+3)(x^2-3x)-3x-3 \mid x = -1$	True
6. Kelvin	$x(x^2-9) = (x+3)(x^2-3x)-3x-3 \mid x = -1$	True
7. Jacqueline	$x(x^2-9) = (x+3)(x^2-3x)-3x-3 \mid x = -1$	True
8. Victoria	$(x^2 -3x)(x+3) = (x+3)(x^2-3x)-3x-3\mid x = -1$	True
9. Emmanuel	$x(x^2-9) = (x+3)(x^2-3x)-3x-3\mid x =$	True
10. Brayan	$x(x^2-9) = (x+3)(x^2-3x)-3x-3\mid x =$	True

II (E). Construye una ecuación, usando otro par de expresiones dadas que **no son equivalentes**. Sin usar la calculadora y sin usar álgebra en papel y lápiz, encuentra la solución de esta ecuación. Por favor, explica.

Nombre	Explicación
1. Andrea Yuritzi	$(x+3)(x^2-3x) - 3x – 3 = (x^2-3x)(x+3)$. La exp. 1 y 3 son equivalentes, así que en la parte II(C) al comparar exp.1 con exp.2 x resulta -1, y al comparar exp.2 y 3 debe resultar x = -1 porque la exp.3 y 1 son equivalentes.
2. María Elena	$(x+3)(x^2-3x) - 3x – 3 = (x^2-3x)(x+3)$. Como la expresión 1 es igua a la 3, la 1 y 2 son equivalentes, no afectaría en nada el cambio, y como ya se resolvió la 1 y 2, yo digo que por lógica seria x = -1.
3. María Luisa	$(x+3)(x^2-3x) - 3x – 3 = (x^2-3x)(x+3)$. Pués como la expresión 1 y 3 son equivalentes y el resultado de la 1 y 2 es -1 es por lógica que da el mismo resultado con la 2 y la 3.
4. Karla	Si ponemos la expresión dos y tres en lugar de uno y tres no me afectaría en el resultado porque uno y dos son equivalentes, y si no fueron equivalentes alterarían el resultado supongo. $(x+3)(x^2-3x) - 3x – 3 = (x^2-3x)(x+3)$
5. Daniel	Las expresiones 1 y 2 no son equivalentes porque también cuando pongo las expresiones 2 y 3 sale lo mismo así que la 3 no es equivalente para las expresiones 1 y 3.
6. Kelvin	La expresión 2 y 3 no son equivalentes.
7. Jacqueline	$(x+3)(x^2-3x) - 3x – 3 = (x^2 - 3x)(x+3) = x = -1$ Eso explica que la 1 y la 2 no son equivalentes e igual la 2 y la 3 no son equivalentes.
8. Victoria	$(x^2 - 3x)(x+3) = (x+3)(x^2-3x) - 3x – 3$. No eran equivalentes pero al ponerle “solve” me dio un número al cual si son equivalentes, en este caso seria x = -1 y asi la expresión sale equivalente.
9. Emmanuel	$x(x^2 - 9) = (x^2 - 3x)(x+3)$ $6x^2 – 3x = 0$ $x^3 - 9x = x^3 -3x^2 – 3x^2 - 6x$ $x(6x - 3) = 0$ $- 9x = – 6x^2 - 6x$ x = 0 (solucion) $6x^2 - 9x + 6x = 0$ 6x - 3 = 0 x = 3/6 = ½ (solucion)
10. Brayan	$(x+3)(x^2-3x) - 3x – 3 = (x^2 - 3x)(x+3)$. Que el resultado que salió es el mismo que cuando se pone la ecuación 1 con la 2.

II (F). Construye una ecuación, usando un par de las expresiones dadas que **son equivalentes** (observa la Parte II B precedente). Sin usar la calculadora ni álgebra en papel y lápiz, encuentra la solución (es) de esta ecuación. Por favor, explica.

Nombre	Explicación
1. Andrea Yuritzi	$x(x^2 - 9) = (x^2 - 3x)(x+3)$. Esto significa que al sustituir x por cualquier número real van a ser iguales.
2. María Elena	$x(x^2 - 9) = (x^2 - 3x)(x+3)$. Es equivalente en cualquier número de x porque no hay restricciones, pero sólo para números reales.
3. María Luisa	$x(x^2 - 9) = (x^2 - 3x)(x+3)$. Es equivalente en cualquier valor de x, porque no hay restricción, pero sólo para números reales.
4. Karla	$x(x^2 - 9) = (x+3)(x^2-3x) - 3x – 3$. Si son equivalentes las dos expresiones significa que las x son iguales para cualquier valor.
5. Daniel	Las expresiones 1 y 3 si son equivalentes porque sale true y son equivalentes para cualquier valor de x.
6. Kelvin	Las expresiones 1 y 3 son equivalentes para cualquier valor de x.
7. Jacqueline	$x(x^2 - 9) = (x^2 - 3x)(x+3)$. Eso explica que el valor de x es igual a todos los valores por eso el resultado sale true.
8. Victoria	Las expresiones 3 y 1 son equivalentes por la razón de que las expresiones son iguales y cualquier valor de x le daría el mismo resultado a las expresiones por la razón que los números son reales.
9. Emmanuel	$x(x^2 - 9) = (x^2 - 3x)(x+3)$. La expresion 1 y 3 son equivalentes por la razón que x tiene el mismo valor para cualquier número.
10. Brayan	La ecuación 3 y 1 son equivalentes porque son iguales.

VIDEO 6

¿Al resolver la ecuación $x^2 = x$, usando el comando Solve de la calculadora qué obtuviste?

Minuto	Nombre	Opinión
0:16 a 0:19	Ma. Luisa	Yo obtuve x igual a cero o x igual a 1.

¿Qué lo que hace el comando Solve?

Minuto	Nombre	Opinión
0:41 a 0:54	Ma. Luisa	Yo pienso que hace. O sea que, o sea equivalen las expresiones.
1:24 a 1:38	Ma. Luisa	O sea muestra una expresión con la otra y te muestra si son equivalentes o no son equivalentes cuando utilizas una expresión con otra.

¿Qué fue lo que les dio de resultado cuando hicieron Solve, pusieron las expresiones?

Minuto	Nombre	Opinión
1:49 a 1:51	Ma. Luisa	X igual a cero.

¿Entonces qué es lo que hace el comando Solve?

Minuto	Nombre	Opinión
2:09 a 2:13	Andrea	Te da los valores de x para los cuales las dos expresiones son iguales.

En la parte 2. ¿Cuáles de las expresiones que tienen ahí son equivalentes?

Minuto	Nombre	Opinión
2:47 a 2:54	Ma. Luisa	La expresión 1 y la expresión 2 no son equivalentes, y o sea la expresión 1 y la expresión 3 son equivalentes.

¿Por qué piensan que las expresiones son equivalentes?

Minuto	Nombre	Opinión
3:18 a 3:23	Ma. Luisa	Igual porque introducí en la calculadora la expresión 1 y la expresión 3 y como resultado me dio true.

¿Cuáles no son equivalentes?

Minuto	Nombre	Opinión
3:27 a 3:35	Ma. Luisa	La 1 y la 2 no son equivalentes y la 2 y la 3.

¿Por qué piensan que no son equivalentes?

Minuto	Nombre	Opinión
3:43 a 4:03	Ma. Luisa	Porque como la 1 y la.. porque acá arriba introduce la expresión 1 y la expresión 2 y me dio otro resultado. O sea que son iguales para ciertos valores no son equivalentes, para todos los x.
4:22 a 4:24	Ma. Luisa	Y por lógica la 2 y la 3 tampoco son equivalentes.

En esa misma parte pero en el inciso e. ¿cuál es el par de ecuaciones que no son equivalentes que dieron ustedes?

Minuto	Nombre	Opinión
4:53 a 5:37	Ma. Luisa	Escribe en el pizarrón lo siguiente: $(x+3)(x^2-3x) - 3x – 3 = (x^2 - 3x)(x+3)$ Para mi esas dos expresiones no son equivalentes.

¿Cuál es la solución de esa ecuación?

Minuto	Nombre	Opinión
5:43 a 5:59	Ma. Luisa	Pues como la expresión 1 y la expresión 3 de la anterior hoja, como son equivalentes y entonces el resultado de la 1 y la 2 es menos 1, que es por lógica que da el mismo resultado con la 2 y la 3.

¿Cuál es la solución de esa ecuación $((x+3)(x^2-3x) - 3x - 3 = (x^2 - 3x)(x+3))$?

Minuto	Nombre	Opinión
6:12 a 6:13	Ma. Luisa	Es el valor de x a menos 1.
7:01 a 7:03	Daniel	Le faltó el comando Solve.
7:12 a 7:16	Ma. Luisa	En esa no se introduce esa expresión.

En el inciso F. ¿Cuál fue la ecuación o el par de expresiones equivalentes?

Minuto	Nombre	Opinión
7:50 a 8:13	Ma. Luisa	$x(x^2 - 9) = (x^2 - 3x)(x+3)$
8:22 a 8:28	Ma. Luisa	Esas 2 son equivalentes en cualquier valor de x porque no hay restricción pero sólo para números reales.

Parte III. Construcción de ecuaciones e identidades.

III(A) 1. Construye una ecuación formada por dos expresiones equivalentes de tu propia elección.

Nombre	Construcción
1. Andrea Yuritzi	$x(3x- 1) = 3x^2 – x$.
2. María Elena	$x(3+ x) = 3x + x^2$.
3. María Luisa	$x(2+ x) = 2x + x^2$.
4. Karla	$x(3x + 2) = 3x^2 + 2x$.
5. Daniel	$x(x + 4) = x^2 + 4x$.
6. Kelvin	$x(x + 6) = x^2 + 6x$.
7. Jacqueline	$x(x^2 - 6) = (x^2 - 5x)(x + 4)$.
8. Victoria	$(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$.
9. Emmanuel	$x(x + 9) = x^2 + 9x$.
10. Brayan	$x(x + 8) = x^2 + 8x$.

2. Explica tus razones de por qué elegiste esas dos expresiones en particular.

Nombre	Explicación
1. Andrea Yuritzi	Porque la primera fue inventada y de esa fui sacando la otra para que fueran equivalentes.
2. María Elena	Porque no tenia ninguna expresion en mente, y sólo desarrolle.
3. María Luisa	Yo las elegí porque a mi se me hizo fácil.
4. Karla	Use sólo una ecuación con los números que fueron.
5. Daniel	Porque me gusto ponerlas.
6. Kelvin	Porque fue la primera que se me ocurrió.
7. Jacqueline	Porque me apoye en dos expresiones del trabajo anterior que eran equivalentes.
8. Victoria	Solo agarré cualquier número.
9. Emmanuel	Porque puse el primer número que pensé.
10. Brayan	Porque puse el número que me vino primero a la mente.

3. ¿Qué puedes decir en torno a las soluciones de esta ecuación?

Nombre	Explicación
1. Andrea Yuritzi	Para cualquier valor de x van a ser iguales porque son equivalentes.
2. María Elena	Que el valor de x es cualquier número reales porque no hay restricciones.
3. María Luisa	Para cualquier valor x, da el mismo resultado. Porque no hay restricción.
4. Karla	Son equivalentes ya que después de igual sólo multiplique la primera expresión y la segunda expresion me salió ya que es el resultado.
5. Daniel	Que es equivalente para cualquier valor de x.
6. Kelvin	Que es una solución equivalente para cualquier valor de x.
7. Jacqueline	De que valor de x será el mismo resultado para cualquier valor que sean equivalentes.
8. Victoria	De que cualquier valor de x seria el mismo resultado para las ecuaciones por la razón de que son iguales.

9. Emmanuel	Para cualquier valor de x da el mismo resultado para cualquier número.
10. Brayan	Pues que para todos los valores da el mismo resultado.

4. ¿Cómo usarías la calculadora para apoyar tu respuesta a la Pregunta A3 precedente?

Nombre	Explicación
1. Andrea Yuritzi	Comparándolas usando el signo de igual o usando el comando SOLVE.
2. María Elena	Que las dos son equivalentes, asi que el valor de “x” es igual para todos los números reales.
3. María Luisa	Cuando introduces una expresión en la CAS y otra, para comparar, da true, que quiere decir que son equivalente, para cualquier valor de x.
4. Karla	$x(3x + 2) = 3x^2 + 2x$ true. Como son equivalentes es true.
5. Daniel	$x(x + 4) = x^2 + 4x$ True
6. Kelvin	Por el signo de igualda.
7. Jacqueline	$x(x^2 - 6) = (x^2 - 5x)(x + 4)$ True
8. Victoria	$(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$ $x = 3$ true
9. Emmanuel	Pondría mi expresión y le diera tal que y pondría una expresión sumada de x.
10. Brayan	Que cuando pones la ecuación en la CAS y le pones enter y sale true son equivalentes.

III (B). 1. Construye una ecuación formada por <u>dos expresiones no equivalentes</u>.

Nombre	Construcción
1. Andrea Yuritzi	$x(3x- 2) = 3x^2 + 2x -1$.
2. María Elena	$x(5 + x^2) = 5x + x^3 + 1$.
3. María Luisa	$x(x + 3) = x^2 + 3x + 1$.
4. Karla	$x(4x + 2) = 4x^2 + 2x + 1$.
5. Daniel	$x(x + 2) = x^2 + 3x$.

6. Kelvin	$x(x + 5) = x^2 + 5x + 1$.
7. Jacqueline	$x(x^2 - 6) = (x^2 - 5x)(x + 4) – 1$.
8. Victoria	$(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2 – 3$
9. Emmanuel	$x(x + 5) = x^2 + 5x + 1$.
10. Brayan	$x(x + 8) = x^2 + 8x + 1$.

2. Explica tus razones de por qué elegiste esas dos expresiones en particular.

Nombre	Explicación
1. Andrea Yuritzi	La primera se me vino a la mente y en la segunda primero saque la equivalencia y le agregue -1 para que no fueran equivalentes.
2. María Elena	Al azar.
3. María Luisa	Elegí esas expresiones porque se me hicieron fáciles.
4. Karla	Use cualquier expresión para sacar la segunda expresión en la ecuación.
5. Daniel	Porque me gustó elegirla.
6. Kelvin	Porque no es difícil la ecuación.
7. Jacqueline	Use la misma expresión nada más que al final le agregué otro número.
8. Victoria	Porque no sabía cual agarrar.
9. Emmanuel	Porque puse el número que pensé primero.
10. Brayan	Porque hice la de arriba nada más le sume el 1.

3. ¿Qué puedes decir en torno a las soluciones de esta ecuación?

Nombre	Explicación
1. Andrea Yuritzi	Que no son equivalentes y sólo serán iguales para algunos o ningún valor de x.
2. María Elena	Como no son equivalentes, en solve me saldría false.
3. María Luisa	No para cualquier valor de x, es equivalente.
4. Karla	Al agregar un sólo número convierte la ecuación no equivalente, entonces yo multiplique $x(4x + 2)$ ya el resultado le agregue un número.

5. Daniel	Que no son equivalentes a ningún valor de x.
6. Kelvin	Porque son equivalentes para cierto valor de x.
7. Jacqueline	De que x no es igual para ningún valor.
8. Victoria	No son equivalentes.
9. Emmanuel	Que no son equivalentes cuando le sumas un número cualquiera.
10. Brayan	Que no son equivalentes si les sumas un número cualquiera.

4. ¿Cómo usarías la calculadora para apoyar tu respuesta a la Pregunta B3 precedente?

Nombre	Explicación
1. Andrea Yuritzi	Usando el comando SOLVE para que me de los valores de x para los cuales es equivalente.
2. María Elena	Haciendo una solución, y como no son equivalentes, saldría false.
3. María Luisa	Pués cuando comparas una expresión con otra, da false, que quiere decir que no son equivalentes.
4. Karla	$x(4x + 2) = 4x^2 + 2x + 1$ $2x(4x + 2) = 4x^2 + 2x + 1$ Como no son equivalentes y sólo agregué un número tal vez por eso salió la ecuación expandida.
5. Daniel	$x(x + 2) = x^2 + 3x$ $x(x + 2) = x^2 + 3x$
6. Kelvin	Por el signo de igualdad.
7. Jacqueline	$x(x^2 - 6) = (x^2 - 5x)(x + 4) – 1$ False
8. Victoria	$(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$ $x = 3$ false
9. Emmanuel	Pondría mi expresión, luego pongo tal que y sumará un número cualquiera.
10. Brayan	Que cuando pones la ecuación en la CAS y le pones enter y sale false no son equivalentes.

Parte IV (con calculadora): Síntesis de varias ecuaciones tipo

1. Resuelve las siguientes ecuaciones, usando el comando SOLVE de la calculadora.

Nombre	1. $(2–x)^2$ = x(2x–4)	2. (x–5)(3x+7) – 5 = $3x^2$-8x–40	3. $3x^2$–x–1 = 2x+5	4. -3x + 7 = ((-6x + 3)/3) –x +7
1. Andrea Yuritzi	x = - 2 or x = 2	True	x = -1 or x = 2	False
2. María Elena	x = - 2 or x = 2	True	x = -1 or x = 2	False
3. María Luisa	x = - 2 or x = 2	True	x - 1 or x = 2	False
4. Karla	x = - 2 or x = 2	True	x = -1 or x = 2	False
5. Daniel	x = - 2 or x = 2	True	x = -1 or x = 2	False
6. Kelvin	x = - 2 or x = 2	True	x = -1 or x = 2	False
7. Jacqueline	x = - 2 or x = 2	True	x = -1 or x = 2	False
8. Victoria	x = - 2 or x = 2	True	x = -1 or x = 2	False
9. Emmanuel	x = - 1/2 or x = 2	True	x = -1 or x = 2	x = - 4/9
10. Brayan	x = - 1/2 or x = 2	True	x = -1 or x = 2	x = - 4/9

2. ¿Cómo interpretas cada expresión mostrada en la pantalla de la calculadora, al responder la Pregunta 1 precedente?

Nombre	Interpretación
1. Andrea Yuritzi	1. No son equivalentes sólo para los valores: x = -2 y x = 2. 2. Son equivalentes para cualquier valor de x. 3. No son equivalentes sólo para los valores: x = -1 y x = 2. 4. No son equivalentes para ningún valor.
2. María Elena	1. Sólo son iguales para algunos valores de “x”. 2. Sí son equivalentes, asi que el valor de “x” serían iguales para cualquier número real. 3. Sólo son iguales para algunos valores de “x”. 4. No son equivalentes, porque hay restricciones.
3. María Luisa	1. La expresión 1. Sólo son iguales para ciertos valores de x. 2. La expresión 2. Son equivalentes para cualquier valor de x. 3. La expresión 3. Son iguales sólo para ciertos valores de x. 4. La expresión 4. No son equivalentes, porque hay una restricción.

4. Karla	1. Sólo es equivalente para x = -2 or x = 2, creo porque la x no tiene valor en la ecuación. 2. Son equivalentes para cualquier resultado, para cualquier valor, ya que sale true. 3. Sólo es equivalente para x = -1 or x = 2. 4. No es equivalente para ningún valor.
5. Daniel	1. Son solamente iguales para x = -2 or x = 2. 2. Son equivalentes para cualquier valor de x. 3. Son solamente iguales para x = -1 or x = 2 4. No son equivalente ni son iguales
6. Kelvin	1. Son iguales para uno que otro resultado para x = -2 or x = 2 2. Que son equivalentes 3. Son solo iguales para x = -1 or x = 2. 4. No son equivalentes ni iguales
7. Jacqueline	En la primera ecuación me salió x = -2 y x = 2 eso quiere decir que no es equivalente, es equivalente para ciertos valores, la ecuación 2 me salió True eso quiere decir que son equivalentes, la ecuación 3 me salió x = -1 or x = 2 eso quiere decir que no son equivalentes, son equivalentes para ciertos valores, la ecuación 4 me salió false eso quiere decir que no son equivalentes ni iguales.
8. Victoria	1. Es solamente equivalente para x = -2 or x = 2 2. Es equivalente para cualquier valor de x 3. Es solamente equivalente para x = -1 or x = 2 4. No es equivalente para ningún valor de x
9. Emmanuel	Que la ecuación 1 y 3 son iguales.
10. Brayan	No escribió nada.

Análisis del video 8

¿Cómo interpretan el resultado para resolver la ecuación 1?

Minuto	Nombre	Opinión
0:24 a 0:29	Victoria	A mí me dio el resultado de x igual a menos 2 or x igual a 2.

¿Cómo lo interpretas?

Minuto	Nombre	Opinión
0:32 a 0:36	Victoria	Que esta expresión sólo es equivalente para estos resultados.
0:50 a 1:04	Andrea	A mi igual me resultó que x igual -2, x igual a 2 que sólo para esos valores esas 2 expresiones son equivalentes, son iguales dan resultados iguales porque no son equivalentes.

¿En la segunda expresión que fue lo que obtuviste?

Minuto	Nombre	Opinión
1:14 a 1:20	Victoria	Me dio true que es decir que la expresión es equivalente para cualquier número de x.
1:29 a 1:32	Andrea	Me dio true son equivalentes para todos los números reales.

¿En la ecuación 3 que fue lo que te dio?

Minuto	Nombre	Opinión
1:48 a 1:52	Victoria	Me dio x igual -1 or x igual a 2.

¿Cómo lo interpretas?

Minuto	Nombre	Opinión
1:55 a 1:59	Victoria	Pués que solo las expresiones son sólo equivalentes para esos números.
2:12 a 2:13	Andrea	Lo mismo que mis compañeras.

¿En la ecuación 4 qué fue lo que obtuviste?

Minuto	Nombre	Opinión
2:22 a 2:26	Victoria	False. Que no equivalente para ningún valor de x, no son iguales.
2:39 a 2:40	Andrea	No son equivalentes para ningún valor de x.
2:54 a 3:32	Ma. Luisa	No son las mismas interpretaciones pero llegan a lo mismo. El significado es igual, la expresión 1 me salió x igual a -2, que sólo son iguales para ciertos valores de x, en la expresión 2 me salió true que son equivalentes para cualquier valor de x, en la expresión 3 me salió x igual a -1 o x igual a 2 que sólo son iguales para ciertos valores de x, en la última expresión 4 me salió false que no son equivalentes porque hay restricción.

Capítulo 5.Conclusiones

Conclusión General

Los estudiantes mostraron un aprendizaje muy bueno y rápido para la manipulación del CAS, ya que sólo bastó de una sesión para que supieran utilizar los comandos que se vieron a lo largo de todas las actividades, por lo que añadir el CAS a una clase no representa una pérdida de tiempo si no al contrario.

A la hora de contestar la actividad sobre si dos expresiones eran equivalentes, los alumnos tenían mucha dudas con respecto al significado, ya que muchos comparaban dos expresiones y cuando en la calculadora le mostraba true, se sorprendían porque ambas expresiones eran equivalentes pero tenían diferente forma de escribirse cuando se les pedía que con pasos algebraicos llegaran de una expresión a otra, se daban cuenta que dos expresiones pueden ser equivalentes sin que tengan la misma forma. Al término de la actividad, todos los alumnos comprendieron cuándo dos expresiones son equivalentes o iguales para ciertos números y que algunas tienen restricciones.

El debate ayudó a que los estudiantes conocieran ideas diferentes y en algunas ocasiones, los estudiantes que no eran los que tuvieron la idea original podían tener una mejor comprensión sobre ella. Además, también permitió conocer las dudas que algun estudiante tenía y en realidad eran dudas similares para varios alumnos.

En las actividades llevadas a cabo, los estudiantes tuvieron oportunidad de poner a prueba sus habilidades y razonamientos, en un principio fue complicado que los estudiantes dieran sus puntos de vista y se atrevieran a equivocarse, sin embargo, poco a poco para las demás actividades mostraron una mayor iniciativa.

Bibliografía

Artigue, M. (2002). Learning methematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. International Journal of Computers for Mathematical Learning 7: 245-272, 2002. Kluwer Academic Publishers. Netherlnads.

Cortés, J., C. & Hitt, F. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas.

González, F. (2009). Cómo los estudiantes de tercero de secundaria establecen y comprueban conjeturas con la calculadora. Una experiencia con la metodología ACODESA. Tesis de maestría. U.M.S.N.H. Morelia, 2009.

Hitt, F. (2010). Construction of mathematical knowledge using calculators (CAS) in the mathematics classroom. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 2011.

Hitt, F., & Kieran, C. (2009). Constructing knowledge a peer intectaction in a CAS environment with tasks designed from a task-technique- theory perspective. Springer Science+Business Media B.V. 2009.

Kieran, C. (2009). Conceptualizing the Learning of Algebraic Technique: Role of Task and Technology. Univesité du Québec à Montréal.

Martínez, C (2013). El desarrollo del conocimiento algebraico de estudiantes en un ambiente CAS con tareas diseñadas desde un enfoque Técnico-Teórico: Un estudio sobre la simplificación de expresiones radicales. Tesis de doctorado. Cinvestav-ipn, México, 2013.

Mercedes, M., Ruano, R., & Socas, R. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. I Seminario nacional sobre lenguaje y matemáticas.

Mercedes, M., Ruano, R., & Socas, R.. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra.

Sutherland R (2001). Perspectives on School Algebra. Beyond Unknowns and Variables- Parameters and Dummy Variables in High School Algebra, Hava Bloedy-Vinner.

ANEXO A

Nombre: **Fecha:**

Actividad 1: Expresiones equivalentes

Lección 1

Parte I (con CAS): Comparación de expresiones mediante evaluación numérica

(A) La tabla de abajo muestra cinco expresiones algebraicas y dos valores posibles de x.

Usando los dos valores dados de x (i.e., 1/3 y –5) y otros dos valores que tú elijas, calcula los valores que resultan en cada una de las expresiones, usando la herramienta de evaluación de tu calculadora [i.e., el “operador tal que”, (|)].

<u>Importante:</u> completa una fila de la tabla y así hasta que la termines.

Registra tus elecciones adicionales de los valores de x, y anótalos en la fila de arriba de la tabla; escribe los resultados apropiados en las celdas de abajo.

Para x =	1/3	-5		
Expresión	Resultado	Resultado	Resultado	Resultado
1. $(x-3)(4x-3)$				
2. $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$				
3. $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$				
4. $(-x+3)^2+x(3x-9)$				
5. $\dfrac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$				

(B) Compara los resultados obtenidos en las diferentes expresiones de la tabla anterior. Registra, en el rectángulo siguiente, todo aquello que observas.

Discusión en el salón de clase de las Partes I A, B

Parte II (con papel y lápiz): comparación de expresiones mediante manipulación algebraica

(A) Con base en las observaciones de la Parte I A y en la sigiente discusión en el salón de clases, ¿qué puedes deducir respecto a que el conjunto de expresiones anteriores pueda ser re-expresado en una forma común?

(B) Verifica tu conclusión anterior mediante el uso de álgebra en papel y lápiz; re-escribe las expresiones dadas en otra forma (no necesariamente en forma expandida). Muestra todo tu trabajo en la columna derecha de la tabla de abajo.

Expresión dada	Expresión dada en su forma re-escrita
1. $(x-3)(4x-3)$	
2. $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$	
3. $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$	
4. $(-x+3)^2+x(3x-9)$	
5. $\dfrac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$	

Parte III (con CAS):
Verificación de la equivalencia mediante la re-escritura de la forma de una expresión, usando el comando EXPAND

La columna del lado izquierdo de la tabla de abajo contiene las expresiones de la lección previa. Usando tu calculadora, completa la columna del lado derecho de la tabla con las expresiones obtenidas al usar el comando EXPAND (toma en cuenta el menú de F2 en la calculadora).

Sintaxis: EXPAND (*expresión*)

Expresión dada	Resultado producido por EXPAND
1. $(x-3)(4x-3)$	
2. $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$	
3. $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$	
4. $(-x+3)^2+x(3x-9)$	
5. $\dfrac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$	

Discusión en el salón de clase de la Parte III

Parte IV (con CAS):
Verificación de la equivalencia sin re-escribir la forma de una expresión, usando una prueba de la igualdad

(A) Introduce, directamente, en la línea de entrada de tu calculadora las ecuaciones formadas por las expresiones 3 y 5:

$$(3x-1)(x^2-x-2)(x+5) = \frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$$

1. ¿Qué muestra la calculadora como resultado?

2. ¿Cómo interpretas este resultado?

3. Usa el operador "tal que" (|) de tu calculadora, y reemplaza *x* por –2 en la ecuación anterior. Interpreta el resultado mostrado por la calculadora.

Discusión en el salón de clase de la Parte IV A

(B) Introduce, directamente, en la línea de entrada de tu calculadora la ecuación formada por las expresiones dadas 2 y 3:

$$(x^2+x-20)(3x^2+2x-1) = (3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$$

1. ¿Qué muestra la calculadora como resultado?

2. ¿Cómo interpretas este resultado?

Discusión en clase de la Parte IV B

Parte V (con CAS): Verificación de la equivalencia, usando cualquiera de los métodos de CAS

He aquí un nuevo conjunto de expresiones:

Expresiones dadas
1. $4(x-1)^2-(x+1)^2$
2. $(2x+5)(x-3)-(x-3)^2$
3. $(x-3)(3x-1)$
4. $\dfrac{(3x-1)(x^2-x-6)}{(x+2)}$

(A) Usa tu CAS para determinar cuáles de estas expresiones son equivalentes. Usa cualquiera de los métodos de CAS que prefieras. Muestra todo tu trabajo con CAS en la tabla de abajo:

Qué introduces en la CAS	Resultado mostrado por la CAS

(B) Con base en tu trabajo anterior, ¿cuáles son las expresiones equivalentes? (No olvides especificar el conjunto de los valores posibles de x.) Por favor, explica tu decisión acerca de la equivalencia.

ANEXO B

Nombre: **Fecha:**

Actividad 2: Continuación de la Equivalencia de Expresiones

Lección 3
Parte I: Exploración e interpretación de los efectos de la tecla ENTER, así como de los comandos EXPAND y FACTOR.

(A) **(con CAS)** Completa la tabla de abajo con lo mostrado en la pantalla de la calculadora, según sea requerido:

Expresión dada	Resultado producido por ENTER	Resultado producido por FACTOR	Resultado producido por EXPAND
1. $\dfrac{6x^2 - 5x - 4}{6}$			
2. $\dfrac{(x-2)^2 + (7x-2)(x-2)}{4}$			
3. $(2-x)(1-2x)$			
4. $\dfrac{(3x-4)(2x^2+5x+2)}{(6x+12)}$			

(B) (con papel y lápiz)

1. Dada la expresión 1 (de la Parte I A):
   - Describe cómo es la estructura de cada una de las tres formas producidas por la calculadora y compáralas con la expresión dada.

   - Todas estas formas, ¿son equivalentes a la expresión dada? Por favor, explica.

2. Dada la expresión 2, muestra los pasos algebraicos que usarías para obtener la forma producida por la tecla ENTER.

3. Considera la expresión 3 dada. Muestra, usando <u>álgebra en papel y lápiz</u> cómo obtienes la forma producida por el comando FACTOR.

4. Considera la expresión 4 dada. Muestra, usando álgebra en papel y lápiz, cómo obtienes la forma producida por el comando EXPAND.

5. En la tabla de la Parte I A anterior, ¿cuáles, de esas expresiones, son equivalentes entre ellas? (Compáralas tanto como puedas.) Por favor, justifica tu respuesta. En esta equivalencia de expresiones, ¿hay algunas restricciones en cuanto a los valores posibles de x? Por favor, explica.

Discusión en el salón de clases de las Partes I A y B

Parte II**:** Muestra de la equivalencia de expresiones, mediante diversos usos de los comandos de CAS

He aquí una lista de cuatro expresiones equivalentes, sujetas a ciertas restricciones.

Tabla 1

Expresión dada
1. $\frac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{(7x+21)}$
2. $\frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$
3. $6x^2-21x+9$
4. $\frac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)}$

(A) Determina el máximo conjunto común de valores posibles de *x* de estas expresiones. Muestra y explica cómo determinaste este conjunto de valores.

(B) Usando, <u>una vez y sólo una vez</u>, cada uno de los cuatro métodos para determinar la equivalencia, muestra que todas las cuatro expresiones de la Tabla 1 son equivalentes. En la Tabla 2, establece qué es lo que introduces en la CAS y qué es lo que obtienes. (Puedes usar la hoja de trabajo dada en la última página para conservar los registros de tu trabajo.)

Tabla 1

Expresión dada
Exp1. $\dfrac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{(7x+21)}$
Exp2. $\dfrac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$
Exp3. $6x^2-21x+9$
Exp4. $\dfrac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)}$

Tabla 2

Método de CAS	**Qué introduces en la CAS**	**Resultado mostrado por la CAS**
Verificación de la igualdad		
FACTOR		
EXPAND		
ENTER		

(C) Usando sólo los resultados de la Tabla 2, prueba las seis afirmaciones de equivalencia mostradas en la Tabla 3.

Tabla 3 (el símbolo “≡” denota equivalencia)

Afirmación de equivalencia	**Prueba de la equivalencia**
Exp1 ≡ Exp2	
Exp 1 ≡ Exp3	
Exp1 ≡ Exp4	
Exp2 ≡ Exp3	
Exp2 ≡ Exp4	
Exp3 ≡ Exp4	

Discusión en el salón de clases de las Partes II A, B, y C

A. Prueba que las cuatro expresiones de la Tabla 4 son equivalentes, mediante cualquier uso de los comandos de CAS que desees. Muestra tu trabajo en la Tabla 5.

Tabla 4

Expresión dada
1. $\dfrac{5-4x}{(4x-5)(x-3)}$
2. $\dfrac{1}{3-x}$
3. $\dfrac{3x-1}{10x-3-3x^2}$
4. $\dfrac{1-3x}{4(x-1)^2-(x+1)^2}$

Tabla 5

Qué introduces en la CAS	**Resultado mostrado por la CAS**

B. Determina el máximo conjunto común formado por los valores que pueden ser asignados a x en este conjunto de expresiones. Muestra cómo determinaste ese conjunto de valores.

C. ¿Encuentras algo sorprendente acerca de las formas de las expresiones factorizadas y expandidas de este conjunto dado de expresiones? Por favor, explica.

ANEXO C

Nombre: **Fecha:**

Actividad 3: Transición de expresiones a Ecuaciones

Parte I (con CAS): Introducción al uso del comando SOLVE

En la primera actividad, en torno a la equivalencia de expresiones, anulamos aquellas expresiones encontradas que no eran equivalentes (un recordatorio de la definición de equivalencia: "si para cualquier número posible que reemplaza a x, cada una de las expresiones dan el mismo valor, se dice que esas expresiones son equivalentes en el conjunto de valores posibles que puede tomar x.").

Con esas expresiones no equivalentes, cuando las introducíamos en la CAS, las ecuaciones formadas con tales expresiones, la CAS no mostraba "true". Esto fue así porque hay sólo *algunos* (o *ninguno*) valores de x, los cuales al sustituirlos en ambos lados de la ecuación produce resultados iguales. En la presente actividad se usará la CAS para encontrar los valores de x que producen resultados iguales.

He aquí un ejemplo de dos expresiones claramente no equivalentes: x^2 y x.

Si se introduce en la calculadora una ecuación formada por estas dos expresiones ($x^2 = x$), la pantalla de la calculadora no muestra "true". Si se quiere encontrar esos valores de x para los cuales las dos expresiones producen valores iguales, se puede usar el comando SOLVE de la CAS.
Syntax: SOLVE (Expr1 = Expr2, x), suponiendo que x es el nombre de la variable que aparece en cada expresión, y que Expr1 y Expr2 representan las expresiones dadas.

Resuelve la ecuación $x^2 = x$ usando el comando SOLVE de CAS.

1. ¿Qué muestra la CAS como resultado?

2. ¿Puedes anticipar lo que mostraría la calculadora cuando sustituyas cada uno de estos valores de x en la ecuación?

3. Usando CAS "con el operador " ("|"), verifica que la calculadora muestra, en realidad, aquello que se esperaba en la Pregunta 2.

Syntax: Expr1=Expr2 | x=*valor*

Terminología: Los valores de x para los cuales ambas expresiones producen resultados iguales son, comúnmente, conocidos como "soluciones" de la ecuación.

Parte II (con CAS):
Expresiones ya abordadas y su subsecuente integración en ecuaciones

He aquí tres expresiones:

4. $x(x^2 - 9)$,
5. $(x+3)(x^2-3x) - 3x - 3$
6. $(x^2 - 3x)(x+3)$

(A) Usa tu calculadora para determinar cuáles de estas expresiones son equivalentes. Completa la tabla de abajo con la información apropiada.

Qué introduces en la CAS	Qué muestra la CAS	Mi interpretación de lo que muestra la CAS

(B) ¿Cuáles, de las expresiones anteriores, son equivalentes? ¿Cuáles no son equivalentes? Por favor, explica.

(C) Construye una ecuación, usando un par de las expresiones dadas que no son equivalentes (observa Parte II B, anterior). Usa tu calculadora para determinar esos valores de x, si hay algunos para los que ambas expresiones, escritas como ecuación, son iguales.

Qué introduces en la CAS	Qué muestra la CAS

(D) ¿Cómo usarías la CAS para verificar que los valores encontrados para x (en la Pregunta C, anterior) son soluciones de tu ecuación? Completa la tabla de abajo con la información apropiada.

Qué introducirías en la CAS	El resultado que mostraría la CAS

(E) Construye una ecuación, usando otro par de expresiones dadas que **no son equivalentes** (observa la Pregunta B. precedente). Sin usar la CAS y sin usar álgebra en papel y lápiz, encuentra la solución de esta ecuación. Por favor, explica.

(F) Construye una ecuación, usando un par de las expresiones dadas que **son equivalentes** (observa la Parte II B precedente). Sin usar la CAS ni álgebra en papel y lápiz, encuentra la solución (es) de esta ecuación. Por favor, explica.

Discusión en el salón de clases de las Partes I y II

Parte III (papel y lápiz): Construcción de ecuaciones e identidades

(A) 1. Construye una ecuación formada por dos expresiones equivalentes de tu propia elección.

2. Explica tus razones de por qué elegiste esas dos expresiones en particular.

3. ¿Qué puedes decir en torno a las soluciones de esta ecuación?

4. ¿Cómo usarías la CAS para apoyar tu respuesta a la Pregunta A3 anterior?

(B) 1. Construye una ecuación formada por dos expresiones no equivalentes de tu propia elección.

2. Explica tus razones de por qué elegiste esas dos expresiones en particular.

3. ¿Qué puedes decir en torno a las soluciones de esta ecuación?

4. ¿Cómo usarías la CAS para apoyar tu respuesta a la Pregunta B3 anterior?

Discusión en el salón de clases de la Parte III, A y B

Parte IV (con CAS): Síntesis de varias ecuaciones tipo

1. Resuelve las siguientes ecuaciones, usando el comando SOLVE de la CAS.

Ecuación dada	Qué muestra la CAS
1. $(2-x)^2 = x(2x-4)$	
2. $(x-5)(3x+7) - 5 = 3x^2$-$8x-40$	
3. $3x^2-x-1 = 2x+5$	
4. $-3x+7=\frac{-6x+3}{3}-x+7$	

2. ¿Cómo interpretas cada expresión mostrada en la pantalla de la CAS, al responder la Pregunta 1 anterior?

Discusión en el salón de clases de la Parte IV