



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Y
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO



CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
E
INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS UNAM-UMSNH

Representación de Weierstrass de Superficies Mínimas

T E S I S

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Roberto Carlos Huaranca Ampa

Director: Dr. en Matemáticas, Jesús Ruperto Muciño Raymundo

Morelia, Michoacán, México - Mayo del 2014.

Roberto Carlos Huaranca Ampa

Representación de Weierstrass de Superficies Mínimas

Aspectos Geométricos

Morelia, Michoacán, México - Mayo del 2014.

CCM-UNAM

A mis Padres.

Resumen

Dados un automorfismo unitario holomorfo en la esfera de Riemann y un dato de Weierstrass; en este trabajo veremos que con ello podemos introducir un nuevo dato de Weierstrass y probaremos que existe un movimiento rígido tal que la representación de Weierstrass del primer dato compuesta con este movimiento rígido es la representación de Weierstrass del nuevo dato que se introdujo.

Palabras Clave *Superficies Mínimas, Datos de Weierstrass.*

Abstract

Given a holomorphic unitary automorphism on the Riemann sphere and a Weierstrass data, in this paper we will see that with this we can introduce a new Weierstrass data and prove that there is a rigid motion such that the representation of Weierstrass the first data composed this rigid motion is the Weierstrass representation of the new data that was entered.

Keywords *Minimal Surfaces, Weierstrass Data.*

Agradecimientos

Este trabajo se realizó durante mi estancia en Morelia en la gestión 2013. Estoy muy agradecido con el Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo y con el Centro de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México por la hospitalidad que me brindaron.

Así también agradezco al Dr. Jesús Ruperto Muciño Raymundo, por sus consejos, por generosidad intelectual y la confianza que tuvo en mi.

Índice general

Resumen	VII
Abstract	IX
Agradecimientos	XI
Introducción	XV
0.1. Objetivos.	XV
0.2. Mapa mental.	XV
0.3. Resultado principal.	XVII
1. Superficies Mínimas	1
1.1. Problema de Plateau.	1
1.2. Inmersiones y variación de área.	1
1.3. Inmersiones mínimas conformes.	2
2. Representación de Weierstrass	7
2.1. Datos de Weierstrass.	7
2.2. Datos de Weierstrass equivalentes.	10
3. Ejemplos	17
3.1. El Catenoide.	17
3.2. El Helicoide.	18
3.3. Superficie mínima de Enneper.	19
3.4. k -Noid de Jorge-Meeks.	20
Referencias	22

Introducción

0.1. Objetivos.

El objeto de este trabajo son las superficies mínimas en \mathbb{R}^3 . Ellas provienen o se construyen usando los llamados datos de Weierstrass. Una terna (Ω, g, fdz) es un *dato de Weierstrass* si cumple las siguientes propiedades:

- $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es un conjunto abierto simplemente conexo,
- $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función meromorfa,
- $f, fg, fg^2 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones holomorfas y
- $|f|(1 + |g|^2) > 0$.

Representamos con \mathcal{D} a la colección de todos los datos de Weierstrass, variando los elementos Ω, g y fdz en las ternas. A continuación tenemos la siguiente:

Proposición (Representación de Weierstrass) Si $(\Omega, g, fdz) \in \mathcal{D}$ y $z_0 \in \Omega$, entonces

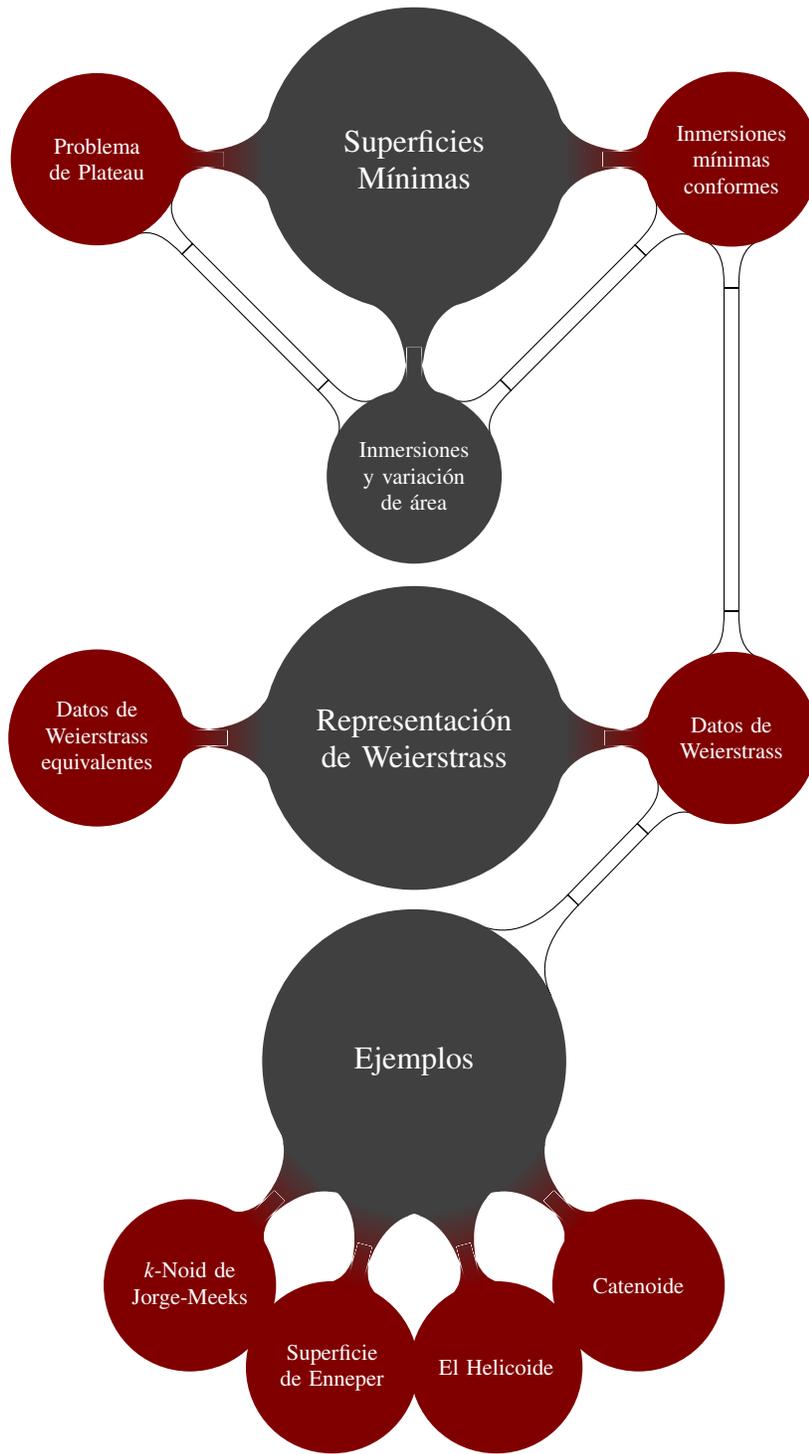
$$\omega : (\Omega, g, fdz) \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$z \mapsto \omega(z) := \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \left(\frac{1}{2} f(\xi)(1 - g(\xi)^2), \frac{\sqrt{-1}}{2} f(\xi)(1 + g(\xi)^2), f(\xi)g(\xi) \right) d\xi$$

es una inmersión conforme mínima. Esta parametrización es llamada la **representación de Weierstrass de** (Ω, g, fdz) .

Nuestro objetivo es estudiar los fenómenos que resultan al mover g y fdz .

0.2. Mapa mental.

En el siguiente mapa mental mostramos la interdependencia entre los capítulos y secciones del contenido de este trabajo.



0.3. Resultado principal.

Consideremos el grupo de automorfismos unitarios holomorfos en $\widehat{\mathbb{C}}$

$$\text{PSU}(2, \mathbb{C}) := \left\{ \mu(z) = \frac{az+b}{-\bar{b}z+\bar{a}} : a, b \in \mathbb{C} \quad \text{con} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

En este trabajo probaremos el siguiente:

Teorema *La aplicación*

$$\delta : \text{PSU}(2, \mathbb{C}) \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$$

$$\left(\frac{az+b}{-\bar{b}z+\bar{a}}, (\Omega, g, f dz) \right) \longmapsto \left(\Omega, \frac{ag+b}{-\bar{b}g+\bar{a}}, (-\bar{b}g+\bar{a})^2 f dz \right)$$

da lugar al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{\omega} & \mathbb{R}^3 \\ \delta_\mu \downarrow & & \downarrow \tau \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{\omega_\mu} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

$$\text{donde, } \tau = \begin{pmatrix} -\text{Re}(\bar{b}^2 - a^2) & \text{Im}(\bar{b}^2 - a^2) & -2\text{Re}(ab) \\ -\text{Re}(\sqrt{-1}(a^2 + \bar{b}^2)) & \text{Im}(\sqrt{-1}(a^2 + \bar{b}^2)) & -2\text{Im}(ab) \\ -2\text{Re}(-\bar{b}a) & 2\text{Im}(-\bar{b}a) & |a|^2 - |b|^2 \end{pmatrix} \in \text{O}(3).$$

Capítulo 1

Superficies Mínimas

1.1. Problema de Plateau.

El físico J. Plateau (1801-1883) popularizó los experimentos de películas de jabón. En 1873 J. Plateau postuló que; para todo marco de alambre cerrado existe al menos una película de jabón soportada en dicho marco. Este problema fue también planteado por Joseph-Louis Lagrange en 1760, actualmente su formulación en geometría diferencial se conoce como el:

Problema de Plateau Dada $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva cerrada simple. Determinar de entre todas las superficies $S \subseteq \mathbb{R}^3$ con frontera $\partial(S) = \gamma(I)$, aquellas que localmente minimizan el área.

El problema de Plateau fue resuelto en 1930 por el matemático estadounidense J. Douglas (Medalla Fields 1936) en [2]. Independientemente de J. Douglas y casi al mismo tiempo T. Radó dio una prueba diferente, ver [4].

1.2. Inmersiones y variación de área.

En lo que sigue $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ denotará siempre un conjunto abierto, trabajaremos también con funciones y aplicaciones siempre de clase C^∞ . Con esto en mente consideramos el siguiente conjunto de aplicaciones $\text{Inm}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3) := \left\{ \varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 : \varphi \text{ es una inmersión} \right\}$. Consideremos $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ una inmersión; quedan definidas los dos siguientes conceptos:

$$\begin{aligned} N: \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto N(u, v) := \frac{1}{|(\varphi_u \times \varphi_v)(u, v)|} (\varphi_u \times \varphi_v)(u, v) \end{aligned}$$

Esta aplicación es llamada *la aplicación de Gauss de φ* .

$$\begin{aligned} H: \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto H(u, v) := \frac{1}{2} \text{traza}(-dN(u, v)). \end{aligned}$$

A esta función le llamamos **la curvatura media** de φ .

Dada una región $R \subseteq \Omega$ y una función diferenciable $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f|_{\partial R} \equiv 0$, tenemos el siguiente:

Lema Existe una $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña tal que la curva de aplicaciones

$$\begin{aligned} \alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow \text{Inm}^\infty(\Omega: \mathbb{R}^3) \\ t &\longmapsto \alpha(t) := \varphi + t f N \end{aligned}$$

es diferenciable (respecto a la variable t). Diremos que α es una **variación normal** de φ .

Definimos el funcional de **área** como sigue

$$\begin{aligned} A: \text{Inm}^\infty(\Omega: \mathbb{R}^3) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto A(\varphi) := \int_U \sqrt{\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2} dudv. \end{aligned}$$

Con ello tenemos el siguiente:

Teorema (Fórmula de la primera variación del área) La derivada con respecto a t de una variación normal de φ cumple que

$$(A \circ \alpha)'(0) = -2 \int_R f H \sqrt{\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle - \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2} dudv.$$

Una demostración de este teorema se puede encontrar en Wolfgang [5], pág. 99.

Como corolario del Teorema anterior se sigue que una inmersión es un punto crítico del funcional de área si, su curvatura media es idénticamente cero. Este corolario nos permite establecer la siguiente:

Definición 1.1 Una inmersión $\varphi: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es **mínima** si, su curvatura media es idénticamente cero, i.e. $H \equiv 0$.

1.3. Inmersiones mínimas conformes.

Identificaremos $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ como es usual y sus respectivos haces tangentes $T\mathbb{R}^2 \cong T\mathbb{C}$, como haces vectoriales reales.

Definición 1.2 Una inmersión $\varphi: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es **conforme** si existe una función $\lambda: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que para todo $p \in \Omega$ se tiene

$$\langle d\varphi(p)z, d\varphi(p)w \rangle_{\mathbb{R}^3} = \lambda(p)^2 \langle z, w \rangle_{\mathbb{R}^2}, \text{ para todo } z, w \in T_p\mathbb{C}.$$

La función λ es llamada el **factor conforme** de φ .

Dada $\psi : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación diferenciable; definimos el **Laplaciano de ψ** como sigue

$$\begin{aligned} \Delta \psi : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ z &\longmapsto \Delta \psi(z) := \psi_{uu}(z) + \psi_{vv}(z) \\ &= \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial u^2}(z) + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial v^2}(z), \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial u^2}(z) + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial v^2}(z), \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial u^2}(z) + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial v^2}(z) \right). \end{aligned}$$

Con esta definición tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.3 Si φ es conforme, entonces $\Delta \varphi = 2\lambda^2 \mathbf{HN}$ donde, λ es el factor conforme de φ .

Demostración. Como φ es conforme tenemos

$$\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \quad (1.1)$$

$$\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0. \quad (1.2)$$

Luego, derivando (1.1) respecto de u y v se tiene

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle \quad (1.3)$$

$$\langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle = \langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle. \quad (1.4)$$

En forma análoga, de (1.2) obtenemos

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle = -\langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle \quad (1.5)$$

$$\langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle = -\langle \varphi_u, \varphi_{vv} \rangle. \quad (1.6)$$

Luego, de (1.3) y (1.6) se sigue

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{uu} + \varphi_{vv}, \varphi_u \rangle &= \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle + \langle \varphi_{vv}, \varphi_u \rangle \\ &= \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle - \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, de (1.4) y (1.5) obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{uu} + \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle &= \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle \\ &= -\langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle + \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por ello existe $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\sigma = \langle \Delta \varphi, \mathbf{N} \rangle$ tal que $\Delta \varphi = \sigma \mathbf{N}$.

Por otra parte, σ se calcula como,

$$\begin{aligned} \langle \Delta \varphi, \mathbf{N} \rangle &= \langle \varphi_{uu} + \varphi_{vv}, \mathbf{N} \rangle \\ &= \langle \varphi_{uu}, \mathbf{N} \rangle + \langle \varphi_{vv}, \mathbf{N} \rangle. \end{aligned}$$

Usando que $\langle \varphi_u, \mathbf{N} \rangle = \langle \varphi_v, \mathbf{N} \rangle = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} &= -\langle \varphi_u, \mathbf{N}_u \rangle - \langle \varphi_v, \mathbf{N}_v \rangle \\ &= |\varphi_u|^2 \left\langle \frac{\varphi_u}{|\varphi_u|}, -d\mathbf{N} \frac{\varphi_u}{|\varphi_u|} \right\rangle + |\varphi_v|^2 \left\langle \frac{\varphi_v}{|\varphi_v|}, -d\mathbf{N} \frac{\varphi_v}{|\varphi_v|} \right\rangle. \end{aligned}$$

Finalmente, como $|\varphi_u|^2 = |\varphi_v|^2 = \lambda^2$, obtenemos

$$\begin{aligned} &= \lambda^2 \left(\left\langle \frac{\varphi_u}{|\varphi_u|}, -d\mathbf{N} \frac{\varphi_u}{|\varphi_u|} \right\rangle + \left\langle \frac{\varphi_v}{|\varphi_v|}, -d\mathbf{N} \frac{\varphi_v}{|\varphi_v|} \right\rangle \right) \\ &= \lambda^2 \text{traza}(-d\mathbf{N}) \\ &= 2\lambda^2 \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Como consecuencia de la Proposición anterior tenemos el siguiente:

Corolario 1.4 Si φ es conforme, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) φ es una inmersión mínima.
- b) El Laplaciano de φ es idénticamente cero, i.e. $\Delta\varphi \equiv 0$.

Con el fin de obtener una nueva expresión para φ , le asociamos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \Phi : \Omega \subseteq \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ z &\longmapsto \Phi(z) = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \\ &:= \varphi_u(z) - \sqrt{-1}\varphi_v(z) \\ &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(z) - \sqrt{-1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(z), \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(z) - \sqrt{-1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(z), \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}(z) - \sqrt{-1}\frac{\partial\varphi_3}{\partial v}(z) \right). \end{aligned}$$

A esta aplicación la denominamos *complexificación de φ* .

Por cálculo directo tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \Phi_j^2 &= \sum_{j=1}^3 \left[\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial v} \right)^2 - 2\sqrt{-1} \frac{\partial\varphi_j}{\partial u} \frac{\partial\varphi_j}{\partial v} \right] \\ &= \sum_{j=1}^3 \left[\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial v} \right)^2 \right] - 2\sqrt{-1} \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial\varphi_j}{\partial u} \frac{\partial\varphi_j}{\partial v} \right] \\ &= (|\varphi_u|^2 - |\varphi_v|^2) - 2\sqrt{-1} \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle. \end{aligned} \tag{1.7}$$

A partir de (1.7) se demuestra la siguiente:

Proposición 1.5 φ es conforme si y solamente si $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 \equiv 0$.

Ahora, es bien conocido que si $\Phi_j = \frac{\partial \varphi_j}{\partial u} - \sqrt{-1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial v}$ es holomorfa, entonces por las ecuaciones de Cauchy-Riemann tenemos $\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial u} \right) = -\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial v} \right)$, de donde $\Delta \varphi_j \equiv 0$, para todo $j \in \{1, 2, 3\}$.

Por otra parte, si $\Delta \varphi_j \equiv 0$ tenemos $\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial u} \right) = -\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial v} \right)$ y como φ es diferenciable, se sigue por el Teorema de Schwarz (simetría de las segundas derivadas) que $\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial u} \right)$, entonces como Φ_j es diferenciable, se tiene que Φ_j es holomorfa, para todo $j \in \{1, 2, 3\}$.

Luego, por el Corolario 1.4 y la Proposición 1.5 se tiene la siguiente:

Proposición 1.6 Si $\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 \equiv 0$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) φ es una inmersión mínima.
- b) Φ_1, Φ_2, Φ_3 son funciones holomorfas.

Finalmente, si consideramos ahora un abierto simplemente conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y un punto $z_0 \in \Omega$, tenemos la siguiente:

Proposición 1.7 $\varphi(z) = \varphi(z_0) + \operatorname{Re} \int_{z_0}^z (\Phi_1(\xi), \Phi_2(\xi), \Phi_3(\xi)) d\xi$.

Demostración. Por cálculo directo obtenemos

$$\begin{aligned}
 \varphi_j(z) - \varphi_j(z_0) &= \int_{z_0}^z d\varphi_j \\
 &= \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_j}{\partial v} dv \right) \\
 &= \int_{z_0}^z \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial u} - \sqrt{-1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial v} \right) (du + \sqrt{-1} dv) \right] \\
 &= \int_{z_0}^z \operatorname{Re} [\Phi_j(z) dz] \\
 &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \Phi_j(z) dz,
 \end{aligned}$$

para todo $j \in \{1, 2, 3\}$.

Capítulo 2

Representación de Weierstrass

2.1. Datos de Weierstrass.

Definición 2.1 Dado $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto simplemente conexo; una terna $(\Omega, g, f dz)$ es un **dato de Weierstrass** si, la terna satisface las siguientes tres propiedades:

- a) $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función meromorfa,
- b) $f, fg, fg^2 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones holomorfas y
- c) $|f|(1 + |g|^2) > 0$.

Si una terna $(\Omega, g, f dz)$ cumple (a), (b) y no necesariamente (c), entonces diremos que la terna es un **dato débil de Weierstrass**.

Consideremos $(\Omega, g, f dz)$ un dato débil de Weierstrass y un punto $z_0 \in \Omega$. Con ello queda bien definida la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \omega : (\Omega, g, f dz) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ z &\longmapsto \omega(z) := \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \left(\frac{1}{2} f(\xi)(1 - g(\xi)^2), \frac{\sqrt{-1}}{2} f(\xi)(1 + g(\xi)^2), f(\xi)g(\xi) \right) d\xi. \end{aligned}$$

Esta aplicación es llamada la **representación de Weierstrass de $(\Omega, g, f dz)$** . Por comodidad denotaremos a

$$\Phi := \left(\frac{1}{2} f(1 - g^2), \frac{\sqrt{-1}}{2} f(1 + g^2), fg \right), \quad (2.1)$$

pensando en ellas como ternas de funciones.

Entonces por definición de la integral de una aplicación compleja tenemos la siguiente igualdad

$$\int_{z_0}^z \Phi(\xi) d\xi = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \Phi(\xi) d\xi + \sqrt{-1} \operatorname{Im} \int_{z_0}^z \Phi(\xi) d\xi. \quad (2.2)$$

Ahora, derivando (2.2) y aplicando el teorema fundamental del cálculo para aplicaciones complejas, obtenemos

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\partial}{\partial u} \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \Phi(\xi) d\xi - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial v} \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \Phi(\xi) d\xi \\ &= \frac{\partial \omega}{\partial u} - \sqrt{-1} \frac{\partial \omega}{\partial v}.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Luego, igualando coordenada a coordenada se obtiene el siguiente:

Lema 2.2

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega_1}{\partial u} - \sqrt{-1} \frac{\partial \omega_1}{\partial v} &= \frac{1}{2} f(1 - g^2), \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial u} - \sqrt{-1} \frac{\partial \omega_2}{\partial v} &= \frac{\sqrt{-1}}{2} f(1 + g^2), \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial u} - \sqrt{-1} \frac{\partial \omega_3}{\partial v} &= fg.\end{aligned}$$

De (2.3) obtenemos las derivadas parciales de ω , esto es

$$\omega_u = \operatorname{Re} \Phi \quad (2.4)$$

$$\omega_v = -\operatorname{Im} \Phi. \quad (2.5)$$

Luego, calculando el producto cruz tenemos

$$\begin{aligned}\omega_u \times \omega_v &= \operatorname{Re} \Phi \times (-\operatorname{Im} \Phi) \\ &= -(\operatorname{Re} \Phi_1, \operatorname{Re} \Phi_2, \operatorname{Re} \Phi_3) \times (\operatorname{Im} \Phi_1, \operatorname{Im} \Phi_2, \operatorname{Im} \Phi_3) \\ &= -(\operatorname{Re} \Phi_2 \operatorname{Im} \Phi_3 - \operatorname{Re} \Phi_3 \operatorname{Im} \Phi_2, \operatorname{Re} \Phi_3 \operatorname{Im} \Phi_1 - \operatorname{Re} \Phi_1 \operatorname{Im} \Phi_3, \operatorname{Re} \Phi_1 \operatorname{Im} \Phi_2 - \operatorname{Re} \Phi_2 \operatorname{Im} \Phi_1) \\ &= (\operatorname{Re} \Phi_3 \operatorname{Im} \Phi_2 - \operatorname{Re} \Phi_2 \operatorname{Im} \Phi_3, \operatorname{Re} \Phi_1 \operatorname{Im} \Phi_3 - \operatorname{Re} \Phi_3 \operatorname{Im} \Phi_1, \\ &\quad \operatorname{Re} \Phi_2 \operatorname{Im} \Phi_1 - \operatorname{Re} \Phi_1 \operatorname{Im} \Phi_2).\end{aligned}\quad (2.6)$$

Por otra parte, si $i, j \in \{1, 2, 3\}$ observemos que

$$\begin{aligned}\Phi_i \overline{\Phi_j} &= (\operatorname{Re} \Phi_i + \sqrt{-1} \operatorname{Im} \Phi_i)(\operatorname{Re} \Phi_j - \sqrt{-1} \operatorname{Im} \Phi_j) \\ &= (\operatorname{Re} \Phi_i \operatorname{Re} \Phi_j + \operatorname{Im} \Phi_i \operatorname{Im} \Phi_j) + \sqrt{-1} (\operatorname{Re} \Phi_j \operatorname{Im} \Phi_i - \operatorname{Re} \Phi_i \operatorname{Im} \Phi_j).\end{aligned}\quad (2.7)$$

Ahora, usando la fórmula (2.7) en (2.6) tenemos

$$\omega_u \times \omega_v = \left(\operatorname{Im}(\Phi_2 \overline{\Phi_3}), \operatorname{Im}(\Phi_3 \overline{\Phi_1}), \operatorname{Im}(\Phi_1 \overline{\Phi_2}) \right). \quad (2.8)$$

Reemplazando (2.1) en (2.8) y luego simplificando se tiene

$$\begin{aligned}
\omega_u \times \omega_v &= \left(\operatorname{Im} \left[\frac{\sqrt{-1}}{2} f(1+g^2) \overline{f} g \right], \operatorname{Im} \left[f g \frac{1}{2} \overline{f(1-g^2)} \right], \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2} f(1-g^2) \frac{\sqrt{-1}}{2} \overline{f(1+g^2)} \right] \right) \\
&= \left(\operatorname{Im} \left[\frac{\sqrt{-1}}{2} |f|^2 (\overline{g} + |g|^2 g) \right], \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2} |f|^2 (g - |g|^2 \overline{g}) \right], \operatorname{Im} \left[\frac{-\sqrt{-1}}{4} |f|^2 (1 + \overline{g}^2 - g^2 - |g|^4) \right] \right) \\
&= \left(\operatorname{Im} \left[\frac{1}{2} |f|^2 (\sqrt{-1} \overline{g} + |g|^2 \sqrt{-1} g) \right], \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2} |f|^2 (g - |g|^2 \overline{g}) \right], \right. \\
&\quad \left. \operatorname{Im} \left[\frac{-\sqrt{-1}}{4} |f|^2 (1 - 2\sqrt{-1} \operatorname{Im} g^2 - |g|^4) \right] \right) \\
&= \left(\frac{1}{2} |f|^2 (\operatorname{Re} g + |g|^2 \operatorname{Re} g), \operatorname{Im} \left[\frac{1}{2} |f|^2 (\operatorname{Im} g - |g|^2 (-\operatorname{Im} g)) \right], \frac{1}{4} |f|^2 (-1 + |g|^4) \right) \\
&= \left(\frac{1}{4} |f|^2 (1 + |g|^2) (2 \operatorname{Re} g), \frac{1}{4} |f|^2 (1 + |g|^2) (2 \operatorname{Im} g), \frac{1}{4} |f|^2 (|g|^2 + 1) (|g|^2 - 1) \right) \\
&= \frac{1}{4} |f|^2 (1 + |g|^2) (2 \operatorname{Re} g, 2 \operatorname{Im} g, |g|^2 - 1) \\
&= \frac{1}{4} |f|^2 (1 + |g|^2)^2 \frac{1}{(1 + |g|^2)} (2 \operatorname{Re} g, 2 \operatorname{Im} g, |g|^2 - 1). \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Por otro lado, si consideremos la esfera unitaria $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ y la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, entonces queda definida la aplicación

$$\begin{aligned}
\pi : \quad S^2 &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\
x = (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \pi(x) := \begin{cases} \frac{x_1}{1-x_3} + \sqrt{-1} \frac{x_2}{1-x_3} & ; \text{ si } x \neq (0, 0, 1) \\ \infty & ; \text{ si } x = (0, 0, 1). \end{cases}
\end{aligned}$$

Ella se llama la **proyección estereográfica** y tiene como inversa a la aplicación

$$\begin{aligned}
\pi^{-1} : \widehat{\mathbb{C}} &\longrightarrow S^2 \\
z &\longmapsto \pi(z) := \begin{cases} \frac{1}{1+|z|^2} (2 \operatorname{Re} z, 2 \operatorname{Im} z, |z|^2 - 1) & ; \text{ si } z \neq \infty \\ (0, 0, 1) & ; \text{ si } z = \infty. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ahora, de (2.9) obtenemos la siguiente expresión

$$\omega_u \times \omega_v = \frac{1}{4} |f|^2 (1 + |g|^2)^2 \pi^{-1} \circ g. \tag{2.10}$$

Puesto que $(\pi^{-1} \circ g)(\Omega) \subseteq S^2$, se tiene

$$|\omega_u \times \omega_v| = \frac{1}{4}|f|^2(1+|g|^2)^2. \quad (2.11)$$

A partir de (2.11) se demuestra el siguiente:

Lema 2.3 ω es una inmersión si y solamente si $|f|(1+|g|^2) > 0$.

Hasta ahora hemos considerado de manera general a (Ω, g, fdz) como un dato débil de Weierstrass. De ahora en adelante consideraremos a (Ω, g, fdz) solamente como un dato de Weierstrass y a la colección de datos de Weierstrass las denotaremos por \mathcal{D} , variando los elementos Ω, g y fdz en las ternas.

Puesto que la representación de Weierstrass de (Ω, g, fdz) es ahora una inmersión (por la hipótesis (c) de un dato de Weierstrass y por el Lema 2.3) tenemos la siguiente:

Proposición 2.4 (Representación de Weierstrass) ω es una inmersión conforme mínima.

Demostración. Consideremos nuevamente a

$$\Phi = \left(\frac{1}{2}f(1-g^2), \frac{\sqrt{-1}}{2}f(1+g^2), fg \right).$$

Observemos primero que Φ es una aplicación holomorfa, pues f, fg, fg^2 son funciones holomorfas (por la hipótesis (b) en el dato de Weierstrass). Finalmente, ya que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}f(1-g^2) \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}f(1+g^2) \right)^2 + (fg)^2 &= \frac{1}{4}f^2(1-g^2)^2 + \frac{-1}{4}f^2(1+g^2)^2 + f^2g^2 \\ &= \frac{1}{4}f^2(1+g^4-2g^2) - \frac{1}{4}f^2(1+g^4+2g^2) + f^2g^2 \\ &= -\frac{1}{2}f^2g^2 - \frac{1}{2}f^2g^2 + f^2g^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por las Proposiciones 1.5 y 1.6 del capítulo anterior, se tiene que ω es una inmersión conforme mínima.

2.2. Datos de Weierstrass equivalentes.

Consideremos el grupo de automorfismos unitarios holomorfos en $\widehat{\mathbb{C}}$

$$\text{PSU}(2, \mathbb{C}) := \left\{ \mu(z) = \frac{az+b}{-\bar{b}z+\bar{a}} : a, b \in \mathbb{C} \quad \text{con} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

Ahora tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.5 *La aplicación*

$$\delta : \text{PSU}(2, \mathbb{C}) \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$$

$$\left(\frac{az+b}{-\bar{b}z+\bar{a}}, (\Omega, g, fdz) \right) \longmapsto \left(\Omega, \frac{ag+b}{-\bar{b}g+\bar{a}}, (-\bar{b}g+\bar{a})^2 fdz \right)$$

da lugar al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{\omega} & \mathbb{R}^3 \\ \delta_\mu \downarrow & & \downarrow \tau \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{\omega_\mu} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

$$\text{donde, } \tau = \begin{pmatrix} -\text{Re}(\bar{b}^2 - a^2) & \text{Im}(\bar{b}^2 - a^2) & -2\text{Re}(ab) \\ -\text{Re}(\sqrt{-1}(a^2 + \bar{b}^2)) & \text{Im}(\sqrt{-1}(a^2 + \bar{b}^2)) & -2\text{Im}(ab) \\ -2\text{Re}(-\bar{b}a) & 2\text{Im}(-\bar{b}a) & |a|^2 - |b|^2 \end{pmatrix} \in \text{O}(3).$$

Demostración. Sean $\mu(z) = \frac{az+b}{-\bar{b}z+\bar{a}} \in \text{PSU}(2, \mathbb{C})$ y $(\Omega, g, fdz) \in \mathcal{D}$. Primeramente veamos que δ esta bien definida, es decir necesitamos comprobar que $\left(\Omega, \frac{ag+b}{-\bar{b}g+\bar{a}}, (-\bar{b}g+\bar{a})^2 fdz \right)$ cumple las cuatro condiciones de un dato de

Weierstrass. En la condición (a), que se refiere a que la función $\frac{ag+b}{-\bar{b}g+\bar{a}}$ sea meromorfa, se satisface pues g es meromorfa. En la condición (b), que se refiere a que la 1-forma $(-\bar{b}g+\bar{a})^2 fdz$ sea holomorfa, también se satisface pues f, fg y fg^2 son holomorfas. Ahora, en la condición (c), que se refiere a que la representación de Weierstrass sea una inmersión (por el Lema 2.3), se satisface asumiendo la segunda parte del Teorema, i.e. que existe $\tau \in \text{O}(3)$ tal que $\omega_\mu = \tau \circ \omega$, esto implica que ω_μ es una inmersión, pues es composición de dos inmersiones. Y claramente la condición (d) también se satisface.

Ahora demostraremos que el diagrama es conmutativo. Para esto, notemos primero que $\pi^{-1} \circ \mu \circ \pi$ es una aplicación ortogonal de S^2 en S^2 , esto implica que existe $\tau = (t_{ij}) \in \text{O}(3)$ tal que $\tau|_{S^2} = \pi \circ \mu \circ \pi^{-1}$. Ahora, consideremos la complexificación $\Phi_\tau = (\Phi_{\tau_1}, \Phi_{\tau_2}, \Phi_{\tau_3})$, de la expresión $\tau \circ \omega = \left((\tau \circ \omega)_1, (\tau \circ \omega)_2, (\tau \circ \omega)_3 \right)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\Phi_\tau &= \frac{\partial(\tau \circ \omega)}{\partial u} - \sqrt{-1} \frac{\partial(\tau \circ \omega)}{\partial v} \\
&= \left(\frac{\partial(\tau \circ \omega)_1}{\partial u} - \sqrt{-1} \frac{\partial(\tau \circ \omega)_1}{\partial v}, \frac{\partial(\tau \circ \omega)_2}{\partial u} - \sqrt{-1} \frac{\partial(\tau \circ \omega)_2}{\partial v}, \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial(\tau \circ \omega)_3}{\partial u} - \sqrt{-1} \frac{\partial(\tau \circ \omega)_3}{\partial v} \right). \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Luego, aplicando la regla de la cadena a (2.12) se obtiene

$$\Phi_{\tau j} = \sum_{i=1}^3 t_{ji} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x} - \sqrt{-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial y} \right), \tag{2.13}$$

para todo $j \in \{1, 2, 3\}$. Por otro lado, escribimos la transformación de Möbius en coordenadas cartesianas, esto es

$$\begin{aligned}
\mu(z) &= \frac{(az+b)(-\bar{b}z+\bar{a})}{|-\bar{b}z+\bar{a}|^2} \\
&= \frac{((a_1, a_2)(x, y) + (b_1, b_2))(-b_1, b_2)(x, -y) + (a_1, a_2)}{|(b_1, -b_2)(x, y) + (a_1, -a_2)|^2} \\
&= \frac{(a_1x - a_2y + b_1, a_2x + a_1y + b_2)(-b_1x - b_2y + a_1, -b_2x + b_1y + a_2)}{|(b_1x + b_2y + a_1, -b_2x + b_1y - a_2|^2} \\
&= \frac{(a_1x - a_2y + b_1)(-b_1x - b_2y + a_1) - (a_2x + a_1y + b_2)(-b_2x + b_1y + a_2)}{(b_1x + b_2y + a_1)^2 + (-b_2x + b_1y - a_2)^2} \\
&\quad + \sqrt{-1} \frac{(a_2x + a_1y + b_2)(-b_1x - b_2y + a_1) + (a_1x - a_2y + b_1)(-b_2x + b_1y + a_2)}{(b_1x + b_2y + a_1)^2 + (-b_2x + b_1y - a_2)^2} \\
&= \frac{(a_2b_2 - a_1b_1)(x^2 + y^2 - 1) + (a_1^2 - a_2^2 - b_1^2 + b_2^2)x + 2(-a_1a_2 - b_1b_2)y}{(b_1x + b_2y + a_1)^2 + (-b_2x + b_1y - a_2)^2} \tag{2.14} \\
&\quad + \sqrt{-1} \frac{(-a_1b_2 - a_2b_1)(x^2 + y^2 - 1) + 2(a_1a_2 - b_1b_2)x + (a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2)y}{(b_1x + b_2y + a_1)^2 + (-b_2x + b_1y - a_2)^2}.
\end{aligned}$$

Análogamente, también escribimos a $\pi \circ \tau \circ \pi^{-1}$ en coordenadas cartesianas, esto es

$$\begin{aligned}
\pi \circ \tau \circ \pi^{-1}(z) &= \pi \left(\frac{t_{11}2x + t_{12}2y + t_{13}(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{t_{21}2x + t_{22}2y + t_{23}(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2 + 1}, \right. \\
&\quad \left. \frac{t_{31}2x + t_{32}2y + t_{33}(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2 + 1} \right) \\
&= \frac{(2t_{11}x + 2t_{12}y + t_{13}(x^2 + y^2 - 1), 2t_{21}x + 2t_{22}y + t_{23}(x^2 + y^2 - 1))}{x^2 + y^2 + 1 - (2t_{31}x + 2t_{32}y + t_{33}(x^2 + y^2 - 1))} \\
&= \frac{(2t_{11}x + 2t_{12}y + t_{13}(x^2 + y^2 - 1), 2t_{21}x + 2t_{22}y + t_{23}(x^2 + y^2 - 1))}{(1 - t_{33})x^2 + (1 - t_{33})y^2 - 2t_{31}x - 2t_{32}y + (1 + t_{33})}.
\end{aligned}$$

Luego, igualando esta última ecuación y (2.14) tenemos que existe $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que

$$2t_{11} = k(a_1^2 - a_2^2 - b_1^2 + b_2^2) \quad (2.15)$$

$$t_{12} = k(-a_1a_2 - b_1b_2) \quad (2.16)$$

$$t_{13} = k(a_2b_2 - a_1b_1) \quad (2.17)$$

$$t_{21} = k(a_1a_2 - b_1b_2) \quad (2.18)$$

$$2t_{22} = k(a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2) \quad (2.19)$$

$$t_{23} = k(-a_1b_2 - a_2b_1) \quad (2.20)$$

$$1 - t_{33} = k(b_1^2 + b_2^2) \quad (2.21)$$

$$t_{31} = k(a_1b_1 + a_2b_2) \quad (2.22)$$

$$t_{32} = k(a_1b_2 - a_2b_1) \quad (2.23)$$

$$1 + t_{33} = k(a_1^2 + a_2^2). \quad (2.24)$$

Ahora, sumando las ecuaciones (2.21) y (2.24) se obtiene que $k = 2$ (pues $|a|^2 + |b|^2 = 1$). Luego, reemplazando el valor de k en las ecuaciones (2.15) a la (2.24) y luego escribiéndolas de otra manera se obtiene

$$\begin{aligned} t_{11} &= (a_1^2 - a_2^2 - b_1^2 + b_2^2) = -\operatorname{Re}(\bar{b}^2 - a^2) &&= \operatorname{Re}(\bar{a}^2 - b^2) \\ t_{12} &= 2(-a_1a_2 - b_1b_2) = \operatorname{Im}(\bar{b}^2 - a^2) &&= \operatorname{Im}(\bar{a}^2 - b^2) \\ t_{13} &= 2(a_2b_2 - a_1b_1) = -2\operatorname{Re}(ab) \\ t_{21} &= 2(a_1a_2 - b_1b_2) = -\operatorname{Re}(\sqrt{-1}(a^2 + \bar{b}^2)) = \operatorname{Re}(\sqrt{-1}(\bar{a}^2 + b^2)) \\ t_{22} &= (a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2) = \operatorname{Im}(\sqrt{-1}(a^2 + \bar{b}^2)) = \operatorname{Im}(\sqrt{-1}(\bar{a}^2 + b^2)) \\ t_{23} &= 2(-a_1b_2 - a_2b_1) = -2\operatorname{Im}(ab) \\ t_{31} &= 2(a_1b_1 + a_2b_2) = -2\operatorname{Re}(-\bar{b}a) = 2\operatorname{Re}(\bar{a}b) \\ t_{32} &= 2(a_1b_2 - a_2b_1) = 2\operatorname{Im}(-\bar{b}a) = 2\operatorname{Im}(\bar{a}b) \\ t_{33} &= 2(a_1^2 + a_2^2) - 1 = |a|^2 - |b|^2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ahora, reemplazando (2.25) en (2.13) y luego simplificando tenemos

$$\begin{aligned}
& -\operatorname{Re}(\bar{b}^2 - a^2) \frac{1}{2} f(1 - g^2) + \operatorname{Im}(\bar{b}^2 - a^2) \frac{\sqrt{-1}}{2} f(1 + g^2) - 2\operatorname{Re}(ab)fg = \Phi_{\tau 1} \\
& \left(-\operatorname{Re}(\bar{b}^2 - a^2)(1 - g^2) + \sqrt{-1}\operatorname{Im}(\bar{b}^2 - a^2)(1 + g^2) - 4\operatorname{Re}(ab)g \right) \frac{f}{2} = \Phi_{\tau 1} \\
& \left((\operatorname{Re}(\bar{b}^2 - a^2) + \sqrt{-1}\operatorname{Im}(\bar{b}^2 - a^2))g^2 + (-2\operatorname{Re}(ab))g + (-\operatorname{Re}(\bar{b}^2 - a^2) + \sqrt{-1}\operatorname{Im}(\bar{b}^2 - a^2)) \right) \frac{f}{2} = \Phi_{\tau 1} \\
& \left((\operatorname{Re}(\bar{b}^2 - a^2) + \sqrt{-1}\operatorname{Im}(\bar{b}^2 - a^2))g^2 + (-2\operatorname{Re}(ab))g + (\operatorname{Re}(\bar{a}^2 - b^2) + \sqrt{-1}\operatorname{Im}(\bar{a}^2 - b^2)) \right) \frac{f}{2} = \Phi_{\tau 1} \\
& \left((\bar{b}^2 - a^2)g^2 + (-2\operatorname{Re}(ab))g + (\bar{a}^2 - b^2) \right) \frac{f}{2} = \Phi_{\tau 1} \\
& \left((-\bar{b}g + \bar{a})^2 - (ag + b)^2 \right) \frac{f}{2} = \Phi_{\tau 1} \\
& \frac{1}{2}(-\bar{b}g + \bar{a})^2 f \left(1 - \left(\frac{ag + b}{-\bar{b}g + \bar{a}} \right)^2 \right) = \Phi_{\tau 1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\operatorname{Re}(\sqrt{-1}(a^2 + \bar{b}^2)) \frac{1}{2} f(1 - g^2) + \operatorname{Im}(\sqrt{-1}(a^2 + \bar{b}^2)) \frac{\sqrt{-1}}{2} f(1 + g^2) - 2\operatorname{Im}(ab)fg = \Phi_{\tau 2} \\
& \left(-\operatorname{Re}(\sqrt{-1}(a^2 + \bar{b}^2))(1 - g^2) + \sqrt{-1}\operatorname{Im}(\sqrt{-1}(a^2 + \bar{b}^2))(1 + g^2) - 4\operatorname{Re}(ab)g \right) \frac{f}{2} = \Phi_{\tau 2} \\
& \left((\operatorname{Re}(\sqrt{-1}(a^2 + \bar{b}^2) + \sqrt{-1}\operatorname{Im}(\sqrt{-1}(a^2 + \bar{b}^2)))g^2 \right. \\
& \left. + (-4\operatorname{Im}(ab))g + (-\operatorname{Re}(\sqrt{-1}(a^2 + \bar{b}^2) + \sqrt{-1}\operatorname{Im}(\sqrt{-1}(a^2 + \bar{b}^2)))) \right) \frac{f}{2} = \Phi_{\tau 2} \\
& \left((\operatorname{Re}(\sqrt{-1}(a^2 + \bar{b}^2) + \sqrt{-1}\operatorname{Im}(\sqrt{-1}(a^2 + \bar{b}^2)))g^2 \right. \\
& \left. + (-4\operatorname{Im}(ab))g + (\operatorname{Re}(\sqrt{-1}(\bar{a}^2 + b^2)) + \sqrt{-1}\operatorname{Im}(\sqrt{-1}(\bar{a}^2 + b^2))) \right) \frac{f}{2} = \Phi_{\tau 2} \\
& \left(\sqrt{-1}(\bar{b}^2 + a^2)g^2 + (\sqrt{-1}\sqrt{-1}4\operatorname{Im}(ab))g + \sqrt{-1}(\bar{b}^2 + a^2) \right) \frac{f}{2} = \Phi_{\tau 2} \\
& \left(\sqrt{-1}(\bar{b}^2 + a^2)g^2 + \sqrt{-1}2(ab - \bar{a}\bar{b})g + \sqrt{-1}(\bar{b}^2 + a^2) \right) \frac{f}{2} = \Phi_{\tau 2} \\
& \left((-\bar{b}g + \bar{a})^2 + (ag + b)^2 \right) \frac{\sqrt{-1}f}{2} = \Phi_{\tau 2} \\
& \frac{\sqrt{-1}}{2}(-\bar{b}g + \bar{a})^2 f \left(1 + \left(\frac{ag + b}{-\bar{b}g + \bar{a}} \right)^2 \right) = \Phi_{\tau 2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2\operatorname{Re}(-\bar{b}a)\frac{1}{2}f(1-g^2) + 2\operatorname{Im}(-\bar{b}a)\frac{\sqrt{-1}}{2}f(1+g^2) + (|a|^2 - |b|^2)fg &= \Phi_{\tau^3} \\
\left(-\operatorname{Re}(-\bar{b}a)(1-g^2) + \sqrt{-1}\operatorname{Im}(-\bar{b}a)(1+g^2) + (|a|^2 - |b|^2)g\right)f &= \Phi_{\tau^3} \\
\left((\operatorname{Re}(-\bar{b}a) + \sqrt{-1}\operatorname{Im}(-\bar{b}a))g^2 + (|a|^2 - |b|^2)g + (\operatorname{Re}(\bar{a}b) + \sqrt{-1}\operatorname{Im}(\bar{a}b))\right)f &= \Phi_{\tau^3} \\
\left((\operatorname{Re}(-\bar{b}a) + \sqrt{-1}\operatorname{Im}(-\bar{b}a))g^2 + (|a|^2 - |b|^2)g + (\operatorname{Re}(\bar{a}b) + \sqrt{-1}\operatorname{Im}(\bar{a}b))\right)f &= \Phi_{\tau^3} \\
\left((- \bar{b}a)g^2 + (\bar{a}a - \bar{b}b)g + (\bar{a}b)\right)f &= \Phi_{\tau^3} \\
(-\bar{b}g + \bar{a})(ag + b)f &= \Phi_{\tau^3} \\
\frac{ag + b}{-\bar{b}g + \bar{a}}(-\bar{b}g + \bar{a})^2 f &= \Phi_{\tau^3}.
\end{aligned}$$

Así, $\omega_\mu = \tau \circ \omega$.

Definición 2.6 *Dos datos de Weierstrass $(\Omega, g, f dz)$ y $(\Omega, g', f' dz)$ son equivalentes si, existe $\frac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}} \in \operatorname{PSU}(2, \mathbb{C})$ tal que $g' = \frac{ag + b}{-\bar{b}g + \bar{a}}$ y $f' = (-\bar{b}g + \bar{a})^2 f$.*

Capítulo 3

Ejemplos

3.1. El Catenoide.

El Catenoide es el primer ejemplo no trivial de superficie mínima. J. Lagrange demostró que el Catenoide es mínima en 1760 (ver Figura 3.1). El dato de Weierstrass del Catenoide viene dado por

$$\left(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], -z, \frac{-a}{z^2} dz\right)$$

donde $a > 0$.

Su representación de Weierstrass viene dada por

$$\begin{aligned} \omega(z) &= \operatorname{Re} \int_1^z \left(\frac{1}{2} \left(\frac{-a}{\xi^2} \right) (1 - (-\xi)^2), \frac{\sqrt{-1}}{2} \left(\frac{-a}{\xi^2} \right) (1 + (-\xi)^2), \frac{-a}{\xi^2} (-\xi) \right) d\xi \\ &= \operatorname{Re} \int_1^z \left(\frac{a}{2} \left(\frac{-1}{\xi^2} + 1 \right), \frac{\sqrt{-1}a}{2} \left(\frac{-1}{\xi^2} - 1 \right), \frac{a}{\xi} \right) d\xi \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{a}{2} \left(\frac{1}{z} + z \right), \frac{\sqrt{-1}a}{2} \left(\frac{1}{z} - z \right), a \log(z) \right) - (a, 0, 0) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{a}{2} \left(\frac{\bar{z}}{|z|^2} + z \right), \frac{\sqrt{-1}a}{2} \left(\frac{\bar{z}}{|z|^2} - z \right), a(\log(|z|) + \sqrt{-1} \arg(z)) \right) - (a, 0, 0) \\ &= \left(\frac{a}{2} \left(\frac{u}{u^2 + v^2} + u \right), \frac{a}{2} \left(\frac{v}{u^2 + v^2} + v \right), a \log(\sqrt{u^2 + v^2}) \right) - (a, 0, 0) \\ &= \left(\frac{au}{2} \left(\frac{1}{u^2 + v^2} + 1 \right), \frac{av}{2} \left(\frac{1}{u^2 + v^2} + 1 \right), a \log(\sqrt{u^2 + v^2}) \right) - (a, 0, 0) \\ &= \left(\frac{au}{2} \left(\frac{1}{u^2 + v^2} + 1 \right), \frac{av}{2} \left(\frac{1}{u^2 + v^2} + 1 \right), a \log(\sqrt{u^2 + v^2}) \right) - (a, 0, 0). \end{aligned}$$

Luego, en coordenadas polares $(u, v) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$ se tiene

$$\begin{aligned}\omega(\rho, \theta) &= \left(\frac{a\rho \cos(\theta)}{2} \left(\frac{1}{\rho^2} + 1 \right), \frac{a\rho \sin(\theta)}{2} \left(\frac{1}{\rho^2} + 1 \right), a \log(\rho) \right) - (a, 0, 0) \\ &= \left(\frac{a \cos(\theta)}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \rho \right), \frac{a \sin(\theta)}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \rho \right), a \log(\rho) \right) - (a, 0, 0).\end{aligned}$$

Finalmente, haciendo el cambio de variable $\rho = \exp(\phi)$ tenemos

$$\begin{aligned}\omega(\phi, \theta) &= \left(\frac{a \cos(\theta)}{2} \left(\frac{1}{\exp(\phi)} + \exp(\phi) \right), \frac{a \sin(\theta)}{2} \left(\frac{1}{\exp(\phi)} + \exp(\phi) \right), a\phi \right) - (a, 0, 0) \\ &= (a \cos(\theta) \cosh(\phi), a \sin(\theta) \cosh(\phi), a\phi) - (a, 0, 0).\end{aligned}$$

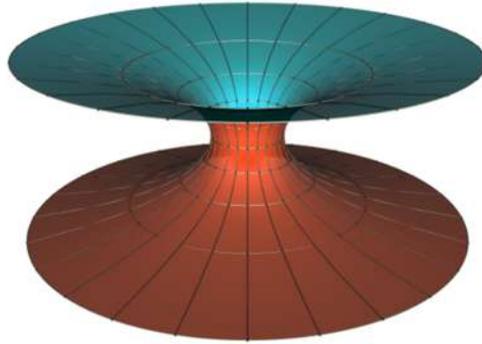


Figura 3.1 El Catenoide.
[3] Pág. 339.

3.2. El Helicoide.

J. Meusnier demostró que el Helicoide es una superficie mínima en 1776 (ver Figura 3.2). El dato de Weierstrass del Helicoide viene dado por

$$\left(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], -z, \frac{-a\sqrt{-1}}{z^2} dz\right)$$

donde $a > 0$.

Su representación de Weierstrass viene dada por:

$$\begin{aligned} \omega(z) &= \operatorname{Re} \int_1^z \left(\frac{1}{2} \left(\frac{-a\sqrt{-1}}{\xi^2} \right) (1 - (-\xi)^2), \frac{\sqrt{-1}}{2} \left(\frac{-a\sqrt{-1}}{\xi^2} \right) (1 + (-\xi)^2), \frac{-a\sqrt{-1}}{\xi^2} (-\xi) \right) d\xi \\ &= \operatorname{Re} \int_1^z \left(\frac{a\sqrt{-1}}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi^2} \right), \frac{a}{2} \left(\frac{1}{\xi^2} + 1 \right), \frac{a\sqrt{-1}}{\xi} \right) d\xi \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{a\sqrt{-1}}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{a}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right), a\sqrt{-1} \log(z) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{a\sqrt{-1}}{2} \left(z + \frac{\bar{z}}{|z|^2} \right), \frac{a}{2} \left(\frac{-\bar{z}}{|z|^2} + z \right), a\sqrt{-1} (\log(|z|) + \sqrt{-1} \arg(z)) \right) \\ &= \left(\frac{a}{2} \left(v + \frac{v}{u^2 + v^2} \right), \frac{a}{2} \left(u + \frac{-u}{u^2 + v^2} \right), -a \arg(u, v) + \sqrt{-1} a \log(\sqrt{u^2 + v^2}) \right) \\ &= \left(\frac{av}{2} \left(\frac{1}{u^2 + v^2} + 1 \right), \frac{au}{2} \left(1 + \frac{-1}{u^2 + v^2} \right), -a \arg(u, v) \right) \\ &= \left(\frac{av}{2} \left(\frac{1}{u^2 + v^2} + 1 \right), \frac{au}{2} \left(1 + \frac{-1}{u^2 + v^2} \right), -a \arg(u, v) \right). \end{aligned}$$

En coordenadas polares $(u, v) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$ tenemos:

$$\begin{aligned} \omega(\rho, \theta) &= \left(\frac{a\rho \sin(\theta)}{2} \left(\frac{1}{\rho^2} + 1 \right), \frac{a\rho \cos(\theta)}{2} \left(1 + \frac{-1}{\rho^2} \right), -a\theta \right) \\ &= \left(\frac{a \sin(\theta)}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \rho \right), \frac{a \cos(\theta)}{2} \left(\rho + \frac{-1}{\rho} \right), -a\theta \right). \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $\rho = \exp(\phi)$ tenemos:

$$\begin{aligned} \omega(\phi, \theta) &= \left(\frac{a \sin(\theta)}{2} \left(\frac{1}{\exp(\phi)} + \exp(\phi) \right), \frac{a \cos(\theta)}{2} \left(\exp(\phi) + \frac{-1}{\exp(\phi)} \right), -a\theta \right) \\ &= (a \sin(\theta) \cosh(\phi), a \cos(\theta) \sinh(\phi), -a\theta). \end{aligned}$$

3.3. Superficie mínima de Enneper.

Esta superficie fue descubierta por Enneper en 1864 (ver Figura 3.3). El dato de Weierstrass de la superficie de Enneper viene dado por

$$\left(\mathbb{C}, z, 1 dz\right).$$

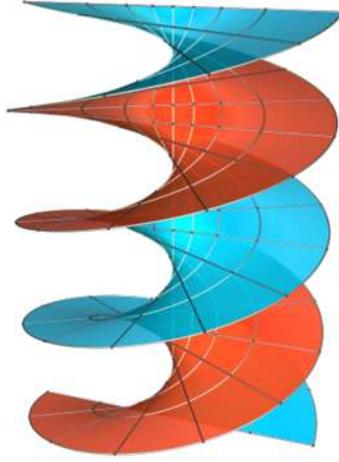


Figura 3.2 El Helicoide.
[3] Pág. 339.

Su representación de Weierstrass viene dada por:

$$\begin{aligned}\omega(z) &= \operatorname{Re} \int_0^z \left(\frac{1}{2}(1 - (\xi)^2), \frac{\sqrt{-1}}{2}(1 + (\xi)^2), \xi \right) d\xi \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} \left(z - \frac{z^3}{3} \right), \frac{\sqrt{-1}}{2} \left(z + \frac{z^3}{3} \right), \frac{z^2}{2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}u - \frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{2}uv^2, -\frac{1}{2}v + \frac{1}{6}v^3 - \frac{1}{2}u^2v, \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \right).\end{aligned}$$

3.4. k -Noid de Jorge-Meeks.

Un k -noid es una superficie mínima que tiene k terminaciones catenoidales donde $k \geq 1$. El primer ejemplo de un k -noid fue dado por L. P. Jorge y W. H. Meeks III en 1983 (ver Figura 3.4). El dato de Weierstrass de un k -noid de Jorge-Meeks viene dado por

$$\left(\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z^k = 1\}, z^{k-1}, \frac{1}{(z^k - 1)^2} dz \right).$$

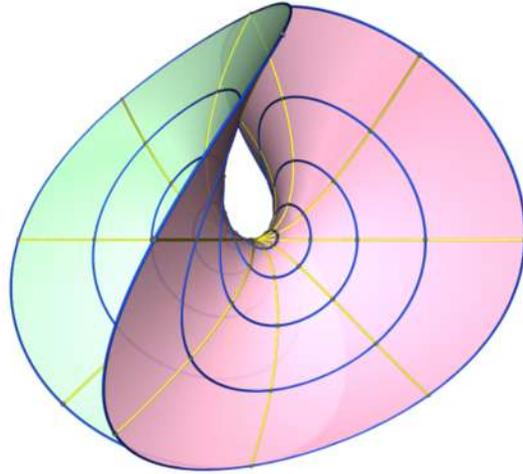


Figura 3.3 Superficie de Enneper.
[3] Pág. 339.

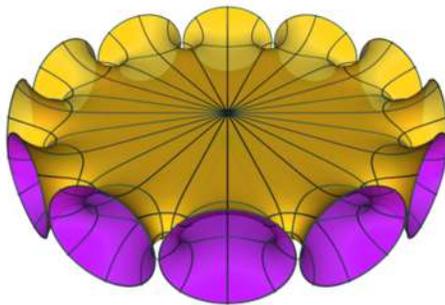


Figura 3.4 12-Noid de Jorge-Meeks.

Referencias

- [1] T. H. Colding; W. P. Minicozzi III; *A Course in Minimal Surfaces*. AMS, 2011.
- [2] J. Douglas *Solution of the problem of Plateau*. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 33: 263-321, 1930.
- [3] W. H. Meeks III; J. Pérez; *The classical theory of minimal surfaces*. Bulletin on The American Mathematical Society, vol. 48: 325-407, 2011.
- [4] T. Radó; *On Plateau's problem*. The Annals of Mathematics, vol. 31: 457-469, 1930.
- [5] K. Wolfgang; *Differential Geometry*. AMS, 2006.
- [6] M. Weber; *Classical minimal surfaces in Euclidean space by examples: geometrical and computational aspects of the Weierstrass representation*. Clay Mathematics Proceedings, vol. 2: 19-63, 2004. D. Hoffman, editor.