



# Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

---

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas  
"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

**"USO DE LA CALCULADORA TI-NSPIRE PARA EL APRENDIZAJE  
DE LOS TEMAS: EXPRESIONES EQUIVALENTES, TRANSICIÓN DE  
EXPRESIÓN A ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES EN EL  
BACHILLERATO"**

Tesis que presenta

**Esteban Alonzo Castillo**

COMO REQUISITO PARA OBTENER EL TÍTULO DE

**Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas**



ASESOR DE TESIS:

Doctor José Carlos Cortés Zavala

*Con todo mi amor a mis padres Esteban Alonzo y Laura  
Castillo.....*

*Con todo mi ser a mi princesa Verónica Ornelas.....*

# AGRADECIMIENTOS

Antes que nada, agradezco a Dios por brindarme la sabiduría en cada etapa de mi vida hasta el día de hoy que puedo concluir mis estudios de licenciatura.

Agradezco a mis padres Esteban Alonzo Nambo y Laura Castillo Guzmán, por brindarme la posibilidad de concluir mis estudios, gracias por toda la dedicación que me han otorgado y me seguirán brindando. En verdad valoro cada gota de sudor y ese cansancio que sin ninguna duda realizaron para verme triunfar.

Quiero agradecer a mis hermanos Ana Laura, Juan José y María Celeste por cada momento que pasamos juntos y siempre creer en mí.

No puedo dejar de lado, también, a mis abuelos Serafín Alonzo y María Guadalupe Nambo, por la ayuda durante estas etapas de mi educación.

Agradezco a Dios por haber puesto en mi camino a tan hermosa mujer, mi esposa Verónica, gracias mi amor por estar conmigo tanto en los momentos malos y buenos, por motivarme cada día en la terminación de este trabajo, gracias por creer siempre en mí.

A todos mis amigos que formaron parte en mi educación, Francisco, José y Armando gracias por su apoyo.

Mis más sinceros agradecimientos a mi asesor de tesis Dr. José Carlos Cortés Zavala, gracias por brindarme la oportunidad de trabajar a su lado.

De la misma manera quiero mencionar al M.C. Christian Morales y la M.C. Patricia Manríquez, gracias por todos sus consejos.

Finalizo agradeciendo a mi casa de estudios Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo a través de la cual pude concluir esta licenciatura.

| Índice         | PÁG |
|----------------|-----|
| Resumen. ....  | V   |
| Abstract. .... | VI  |

## Capítulo 1

### El problema de investigación

|                                               |   |
|-----------------------------------------------|---|
| Introducción. ....                            | 2 |
| Justificación. ....                           | 2 |
| Objetivo de investigación general. ....       | 3 |
| Objetivos de investigación particulares. .... | 4 |
| Problema de investigación. ....               | 4 |
| Preguntas de investigación. ....              | 4 |

## Capítulo 2

### Marco teórico

|                                                    |    |
|----------------------------------------------------|----|
| Tecnología en la educación. ....                   | 6  |
| Antecedentes. ....                                 | 6  |
| La Teoría Antropológica de lo Didáctico. ....      | 8  |
| La génesis instrumental. ....                      | 9  |
| La aproximación instrumental. ....                 | 10 |
| Ventajas del uso del CAS. ....                     | 11 |
| Problemas de aprendizaje dentro del algebra. ....  | 12 |
| Problemas de aprendizaje dentro de los temas. .... | 14 |

## Capítulo 3

### Metodología

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| CBTIS 94 y Descripción del grupo. .... | 18 |
|----------------------------------------|----|

|                                                                                        |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Capacitación para la manipulación del CAS. ....                                        | 18 |
| Descripción de las actividades. ....                                                   | 19 |
| Implementación de la experimentación (acopio de datos) y selección de la muestra. .... | 22 |

## **Capítulo 4**

### **Análisis y discusión de datos y resultados de las hojas de trabajo**

|                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------|----|
| Actividad 1: Expresiones equivalentes. ....                       | 25 |
| Actividad 2: Continuación de la Equivalencia de Expresiones. .... | 41 |
| Actividad 3: Transición de expresiones a Ecuaciones. ....         | 58 |
| Actividad 4: Sistemas de ecuaciones. ....                         | 77 |

## **Capítulo 5**

### **Conclusiones**

|                                                              |     |
|--------------------------------------------------------------|-----|
| Conclusiones respecto a las preguntas de investigación. .... | 111 |
| Referencias bibliográficas. ....                             | 115 |

## **Anexos**

|               |     |
|---------------|-----|
| Anexo A. .... | 120 |
| Anexo B. .... | 129 |
| Anexo C. .... | 136 |
| Anexo D. .... | 142 |

# Resumen

En este documento se reportaron los resultados derivados de la investigación experimental cuyo objetivo fue estudiar el rol de un ambiente CAS y un enfoque Técnico-Teórico del álgebra en el desarrollo del conocimiento algebraico de los estudiantes de bachillerato. Los antecedentes de los que partió la investigación fueron, el potencial que ofrecen las nuevas tecnologías digitales, en particular los manipuladores simbólicos, en la promoción del razonamiento algebraico.

Esta experimentación consistió en la aplicación de cuatro paquetes de actividades de trabajo, las cuales se desarrollaron con un trabajo en papel y lápiz, así como con CAS, ésto también llamado un ambiente CAS. Las actividades fueron diseñadas por un equipo de trabajo conformado por los doctores Fernando Hitt y Carolyn Kieran.

Los resultados de la investigación indican un rol positivo del ambiente CAS y de las Tareas (Actividades) diseñadas. En particular, los resultados muestran diferentes roles del uso de CAS y de las Técnicas de papel-y-lápiz. Esta investigación nos ayudó para analizar en qué tipo de procesos los estudiantes de bachillerato cometen más errores dentro de los temas que abarca dicha investigación, además de que los alumnos mostraron un avance significativo de los temas en cuestión.

**Palabras clave:** TAD, Ambiente CAS, Génesis instrumental, Aproximación instrumental, Expresiones equivalentes.

# Abstract

In this document we present results derived from experimental research study whose goal was to investigate the role played by a CAS environment and Tasks designed with a Technical-Theoretical approach to algebra on the development of students' algebraic knowledge. Past studies on which this research was based include, the more recent studies on the potential technological tools, such as CAS, to promote the development of algebraic reasoning.

This experimentation consisted of four work activities, they by the frame theory consisted of work with paper and pencil, and with CAS too, this also called CAS environment. The activities were designed by a work team conformed by doctors Fernando Hitt and Carolyn Kieran.

Research results indicate the positive role played by the CAS environment and the design of the Tasks. In particular, the results point to the different roles played by CAS use and also by paper-and-pencil Techniques. This research help us to analyze what kind of processes high school students discuss more errors in the issues covered by the investigation, besides the students they showed significant progress in the issues in question.

**Key words:** TAD, CAS environment, Instrumental genesis, Instrumental approach, equivalent expression.

# **CAPÍTULO 1**

## **EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN**

## Introducción

Actualmente nos encontramos inmersos en un mundo donde los términos tecnología y educación están estrechamente vinculados, así lo han indicado organismos internacionales como la UNESCO. Con el surgimiento de las nuevas tecnologías una de las áreas de interés por la comunidad de investigadores ha sido estudiar el papel que tiene la tecnología digital en el aprendizaje de las matemáticas.

La NTCM (National Council Of Teachers Of Mathematics) argumenta que la tecnología es esencial en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, ya que este medio puede influir positivamente en la matemática que se enseña e incrementar el aprendizaje de los estudiantes, para desarrollar un aprendizaje más profundo de las matemáticas, siempre y cuando se haga un uso apropiado de la tecnología.

En particular al usar la tecnología, no será suficiente realizar lo que hacíamos antes, si no que se deben cambiar las metodologías, estrategias y las actividades de enseñanza. Se tendrá la necesidad de implementar en el aula actividades que demanden un uso coherente de diferentes representaciones. Las herramientas tecnológicas desde este punto de vista, podrá ayudar a los estudiantes a la construcción de conceptos matemáticos más profundos, los cuales se verán reflejados en la resolución de problemas.

Dentro de esta investigación se pusieron en práctica diferentes actividades de álgebra para estudiantes de bachillerato con el uso de la tecnología, en particular, el uso de calculadoras con CAS (Sistema Algebraico Computacional).

## Justificación

El álgebra representa la transición de las matemáticas de primaria y secundaria hacia los grados académicos superiores, que requieren del lenguaje algebraico para moldear situaciones y resolver problemas. Se sabe que en México y en otros países se presentan dificultades en el paso del lenguaje natural al lenguaje algebraico, y por lo tanto, para que el alumno desarrolle habilidades que le permitan usar adecuadamente el lenguaje simbólico (Córdoba, 2005).

De acuerdo a las investigaciones reportadas, respecto a este tipo de problemas, clasificados como errores comunes, frecuentes y persistentes, éstos, en su mayoría han sido llevados en ambientes de papel y lápiz.

Una forma diferente de atacar esta problemática es implementando el uso de las nuevas tecnologías, particularmente los manipuladores simbólicos (CAS). El desarrollo del conocimiento algebraico en un ambiente CAS, es un campo abierto para la investigación.

En los años de los noventa se inició la utilización de programas computacionales de cálculo formal llamados CAS. Ahora, en el presente siglo con la construcción teórica de la aproximación instrumental, se ha profundizado sobre el uso de la tecnología en las clases de matemáticas.

Existen diferentes investigaciones sobre el uso de la tecnología digital dentro del aula de matemáticas, en particular del álgebra, los cuales, han permitido distintas perspectivas acerca del aprendizaje del álgebra dentro de estos ambientes. Guzmán y Martínez (2009) mencionan que el uso del CAS beneficia a los estudiantes a identificar algunos errores algebraicos, conocidos en la literatura, como frecuentes y persistentes.

También, se puede observar que los estudios respecto del uso de manipuladores simbólicos, han evolucionado a partir de la idea de que este ambiente permite un mayor énfasis en la comprensión conceptual más que en la habilidad de manipulación simbólica. Sin embargo, de acuerdo con varios estudios (e.g., Artigue, 2002a; Guin & Trouche, 1999; Lagrange 2003, 2005, entre otros) el aspecto técnico (i.e., la manipulación simbólica) es fundamental para promover en el estudiante el razonamiento algebraico. De acuerdo con esto, el aspecto técnico es particularmente importante en la actividad transformacional del álgebra.

El presente trabajo trata sobre la influencia de un ambiente CAS y de actividades diseñadas bajo un enfoque teoría-técnica-tarea el cual, se explicará posteriormente. Uno de los propósitos de este trabajo, es aportar ayuda en el manejo de las nuevas tecnologías dentro de los cursos de álgebra en el nivel medio superior.

## **Objetivo de investigación general**

Experimentar con actividades de trabajo en las que se hace uso del CAS dentro de una aproximación teoría-técnica, con el fin de investigar aspectos que involucren el aprendizaje del álgebra en estudiantes de tercer semestre de bachillerato.

## **Objetivos de investigación particulares**

Investigar si el uso del CAS con la calculadora TI-nspire CAS Texas Instruments ayuda a los estudiantes en su proceso de desarrollo de conocimiento algebraico respecto a expresiones equivalentes.

Investigar si el uso del CAS con la calculadora TI-nspire CAS Texas Instruments, ayuda a los estudiantes en su proceso de desarrollo de conocimiento algebraico respecto a sistemas de ecuaciones.

## **Problema de investigación**

Estudiar un ambiente CAS bajo una aproximación teoría-técnica-tarea, y analizar si de esta manera se puede promover el razonamiento algebraico de los estudiantes.

## **Preguntas de investigación**

¿Es recomendable que los estudiantes utilicen el CAS en las clases de algebra?

¿Qué técnicas surgen en los alumnos en el contexto de este ambiente CAS?

¿El debate científico ayuda a los alumnos a dar puntos de vista respecto a una situación dada?

¿Un ambiente CAS ayuda a comprender la transición de expresiones equivalentes y no equivalentes a Ecuaciones?

¿Un ambiente CAS ayuda a la mejor comprensión de los Sistemas de Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas?

## **CAPÍTULO 2**

### **MARCO TEÓRICO**

# **Tecnología en la educación**

## **Introducción**

Hoy en día es bien sabido que la enseñanza es una actividad compleja, que a través de la historia ha tenido diversos cambios (métodos y procedimientos), para así lograr ser más eficiente tanto en la enseñanza, como en el aprendizaje. En particular, en estos tiempos de modernidad se ha introducido poco a poco adelantos tecnológicos como lo son: computadoras, pizarrones electrónicos, calculadoras, etc.

Esto, con la finalidad de que la enseñanza sea más significativa y atractiva para los alumnos. Aproximadamente hace unas cuatro décadas se empezó a estudiar la utilidad y conveniencia del uso de computadoras dentro de la escuela. Hoy en día la mayoría de las escuelas cuenta con este avance tecnológico y en muchas de ellas no se concibe la vida sin este. Sin embargo, el uso de la tecnología, en particular dentro de la clase de matemáticas, no ha tenido el impacto esperado como lo ha sido dentro de la vida cotidiana (por ejemplo: celulares, computadoras, Tablet).

En el ámbito de la enseñanza de las matemáticas con el uso de tecnología, existen diferentes posturas por parte de los profesores, las cuales se pueden mencionar a continuación:

Existen aquellos profesores con mucho entusiasmo por utilizar la tecnología que se despreocupan por el aprendizaje significativo de las matemáticas, también se encuentran los profesores que están completamente en contra del uso de ésta, ya que piensan que su uso inhibe el desarrollo de las habilidades matemáticas, y por último, encontramos aquellos maestros que reflexionan sobre el uso de las tareas a papel y lápiz junto con el uso de la tecnología.

## **Antecedentes**

Las matemáticas han evolucionado desde los primeros registros que se tienen hace aproximadamente 5000 años (papiros egipcios, tablillas babilónicas), hasta nuestros días y esa enseñanza es una actividad que se viene dando desde ese momento.

A través de la historia se han presentado sucesivos descubrimientos científicos-tecnológicos que han transformado la manera de actuar y pensar de los hombres. Con la introducción de la computadora en la enseñanza se ha dado una revolución

con los métodos de la didáctica en general, en particular en la didáctica de las matemáticas, definiendo así, una nueva función para el profesor.

El desarrollo de las Tics así como del internet, abre un mundo nuevo de posibilidades para la enseñanza, es por eso que los desarrolladores de software educativo dentro de la enseñanza de las matemáticas se han preocupado por la creación de éstos, cumpliendo las necesidades de nuestros tiempos.

Uno de los casos más conocidos utilizando computadora es el lenguaje LOGO, creado por (Papert 1987), quien menciona que este lenguaje facilitaría el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

Existen diversos tipos de software hoy en día (geometría dinámica, sistemas algebraicos computacionales) los cuales permiten que el alumno pueda “construir” su propio conocimiento, esto mencionado por diversos investigadores dentro de este rubro.

Recientemente el software de Geometría Dinámica como los Sistemas Computacionales Algebraicos (CAS), dieron lugar a diversas investigaciones. La inclusión de las tecnologías aporta una gran visualización de los diferentes conceptos matemáticos, es decir, no solo nos quedamos en la parte algebraica del problema, si no que, se puede visualizar el concepto desarrollado.

Hitt (2003) menciona lo siguiente:

“...podemos percibir una mosca que vuela y no prestamos atención a ese hecho, sin embargo, al querer atravesar una calle y vemos un coche que viene hacia nosotros, realizamos un acto de conocimiento directo en términos de evaluar su velocidad y decidir si es conveniente atravesar o no la calle. Esto último, visualizar, generalmente lo hacemos inconscientemente”

Para que el alumno logre la visualización de los conceptos matemáticos para el aprendizaje de las matemáticas, la introducción de las nuevas tecnologías es una poderosa herramienta que nos puede ayudar a lograrlo.

En la última década, un grupo de investigadores franceses se ha encargado de trabajar e investigar sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas sobre un entorno con CAS, al cual ellos llaman “Ambientes CAS”, estas investigaciones han reflejado cuestiones acerca de la “instrumentación” y la dialéctica entre los conceptos y las técnicas de trabajo.

## La Teoría Antropológica de lo Didáctico

El punto crucial al respecto de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), iniciada por Yves Chevallard a finales de los años ochenta, es que considera a la actividad del estudio de la matemática dentro de las actividades humanas y sociales.

Dentro de la teoría se habla de un sistema didáctico conformado por el profesor, el alumno y el concepto de estudio en cuestión, el cual, permitirá identificar un proceso de estudio en específico. La palabra **estudio** engloba las nociones de enseñanza y aprendizaje, comúnmente utilizadas dentro de la pedagogía, refiriéndose a todo aquello se realiza dentro de una institución para aportar respuestas a las cuestiones o para llevar a cabo las tareas que se plantean.

Uno de los aspectos clave dentro de la TAD, es la noción de praxeología o de organización praxeológica, la cual, constituye una herramienta fundamental para la actividad matemática, considerando a ésta como una actividad humana más. De hecho, Yves Chevallard menciona que dentro de una praxeología matemática se pueden distinguir dos niveles inseparables:

1. La “praxis” o la práctica matemática, es decir, el saber-hacer, consta de un conjunto de **tareas** en diferentes tipos de problemas y de un conjunto de **técnicas** o maneras de hacer, que son útiles para llevar a cabo las tareas citadas.
2. Y “logos” (saber) o el discurso razonado sobre la práctica, dentro de éste se sitúan dos escalones o niveles, dentro del primer nivel se sitúa el discurso que describe, explica y justifica la técnica a la cual llamamos **tecnología** y dentro del segundo nivel, se encuentra la fundamentación de la tecnología a la cual se conoce como **teoría**.

De esta manera describe la praxeología matemática formada por estos dos bloques “praxis” y “logos” o mediante estos cuatro componentes: tareas, técnicas, tecnología y teoría.

Chevallard (1999), hace mención de estos cuatro componentes de la siguiente manera:

**Tarea:** la considera la raíz de la praxeología y ésta es expresada mediante un verbo (por ejemplo: Sumar, Restar, Derivar, etc.), la cual se puede mencionar como el problema a resolver.

**Técnica:** Del griego *techne* (saber cómo), se refiere a la técnica como una manera de realizar o lograr la tarea, la tarea no forzosamente es de manera algorítmica o

cuasi algorítmica, aunque existe una tendencia de algoritmización dentro de matemáticas.

**Tecnología:** La maneja como los discursos que tienen el objetivo principal de justificar racionalmente la técnica. Chevallard menciona que la Tecnología tiene tres funciones sobre la técnica: Justificar (para lograr lo que se pretende), explicar (porque esto es así) y producir nuevas técnicas.

**Teoría:** Es un nivel superior de justificación, explicación y producción sobre la tecnología.

## **La génesis instrumental**

Dentro del aula la tecnología puede resultar un instrumento para que los estudiantes examinen situaciones y problemas desde diferentes perspectivas y puedan construir relaciones matemáticas. La tecnología perturba fuertemente el ambiente de trabajo y nos lleva a modificar los planteamientos clásicos dentro del salón de clases. Trouche (2000), menciona el concepto de “génesis instrumental”, el cual, lo considera como el proceso mediante el cual un artefacto se convierte en instrumento en las manos de un usuario, en nuestro caso será el estudiante.

La génesis instrumental, es el curso de un complejo proceso que necesita tiempo para relacionar las características del artefacto con la actividad del sujeto, sus conocimientos previos y su antiguo método de trabajo. Trouche, apoyado en las ideas de Vigostky, afirma que un instrumento puede considerarse una extensión del cuerpo, un órgano funcional hecho de un artefacto y de una componente psicológica.

Podemos mencionar entonces que el instrumento es el producto de una historia, el usuario a partir de un artefacto construye un instrumento, dentro de un ambiente determinado, para realizar una tarea específica. Donde esta historia la llamamos “la génesis de lo instrumental”.

Dentro de la génesis instrumental existen dos elementos, el primero que se refiere a la instrumentalización: ésta se refiere a la apropiación del artefacto y sus propiedades; la segunda que es la instrumentación: la cual se refiere a la construcción de los esquemas de uso.

Dentro del proceso de instrumentalización el sujeto se adapta al artefacto, haciéndose poseedor de las propiedades del mismo, logrando así también construir nuevas funciones del artefacto, es decir, el artefacto se adapta a las necesidades del usuario. En la parte de la instrumentación la cual se refiere a la construcción de esquemas de uso por el sujeto, los diseños de uso tiene una componente privada y

una social, es decir, una construcción consustancial al sujeto y otra debido a las relaciones con otros sujetos y distintas ayudas exteriores.

## **La aproximación instrumental**

Investigadores franceses principalmente Artigue, familiarizados con la Teoría Antropológica de lo Didáctico y habituados a colaborar con investigadores en Ergonomía Cognitiva, dieron origen a través de estas dos teorías a lo que se conoce como aproximación instrumental.

La aproximación instrumental (Artigue, 2002a; Drijvers & Trouche, 2008; Lagrange, 2003,2005; Trouche 2005) es un marco con elementos teóricos para analizar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas desde diferentes ambientes tecnológicos (por ejemplo; CAS). Esta aproximación instrumental reconocida dentro del medio de investigación.

Artigue (2002), hace mención que dentro de la aproximación instrumental para el uso de herramientas tecnológicas existen dos influencias a seguir: Una de éstas es la Ergonomía Cognitiva (Vérillon & Rabardel, 1995); la otra es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999). De esta manera podemos distinguir dos caminos dentro de este marco conceptual; uno de ellos que va bajo la línea de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, la cual considera las tareas y técnicas instrumentadas dentro del entorno escolar, en el cual las tareas serán actividades para el aprendizaje de las matemáticas y en consecuencia, las técnicas subyacentes a dicha actividad instrumentada, corresponden a las técnicas de un sujeto que aprende matemáticas en actividad con un artefacto y el otro bajo la Ergonomía Cognitiva, la cual tiene que ver con las distinciones y herramientas conceptuales particularmente apropiadas para estudiar el rol que las tecnologías digitales juegan en la enseñanza, así como analizar el proceso de transformación del artefacto en instrumento (génesis instrumental).

Finalmente, en la adaptación que realizaron Artigue (2002) y sus colegas dentro de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999), reduciendo en tres de las cuatro componentes de su praxeología: Tarea, Técnica y Teoría; dentro de este nuevo marco que se conoce como T-T-T, se definió lo que se entiende por cada termino: La *tarea* se considera como el problema o actividad a resolver, generalmente se expresa mediante un verbo (Por ejemplo: Dividir, Restar, Multiplicar etc.). La *técnica* es una manera o un método para resolver la tarea; se puede ver como una combinación compleja de razonamiento como trabajo rutinario, teniendo tanto un valor pragmático como epistémico; un valor pragmático en el sentido de que éstas producen resultados que cambian al mundo, y un valor epistémico porque nos ayudan a comprender los objetos matemáticos que

movilizan. Y por último tenemos la *teoría*, que se considera como el discurso que explica o justifica la técnica (Hitt & Kieran, 2009), y se puede ver como la estructura cognitiva que construye el estudiante, la cual surge cuando se lleva a cabo una tarea mediante una determinada técnica.

El primer camino (para delinear nuestro trabajo) es el que seguiremos bajo el enfoque TAD, la parte conocida como Tarea-Técnica-Teoría. Haremos especial hincapié en como el alumno mejora sus técnicas y teorías con el uso de la tecnología. Las hojas de trabajo que se proponen fueron realizadas por Carolyn Kieran y Fernando Hitt.

## **Ventajas del uso de CAS**

Los Sistemas Algebraicos Computacionales (Computer Algebra System, CAS) por sus siglas en inglés, cuentan con recursos de manipulación, desarrollo y cálculo de expresiones simbólicas, las cuales permiten una alternativa para la enseñanza del álgebra; con ello los alumnos pueden verificar los trabajos que están realizando o plantear conjeturas, lo que no se hace con papel y lápiz.

Hoy en día la tecnología de los CAS está fácilmente disponible para grandes ordenadores, microcomputadoras y calculadoras de mano. Con este software que facilita el cálculo simbólico, se ha demostrado por la comunidad científica que se promueve la comprensión conceptual y razonamiento algebraico de los estudiantes. Investigaciones realizadas del 2003 a 2008 del grupo internacional para la psicología de la educación matemática, mencionan algunas ventajas sobre el uso del CAS, las cuales se muestran a continuación:

- Ayuda a hacer exploraciones que reorganicen los conocimientos que se tienen sobre una regla algebraica.
- Respeta la jerarquía de operaciones.
- Hace la clase más interesante para los alumnos apáticos
- Hace que el desarrollo de la clase sea más eficiente y permite discusiones colectivas para validar los resultados.
- Permite rectificar los errores de forma inmediata.

Algunas de estas ventajas sobre el uso del CAS las podemos observar en la figura 1, en la cual se logra apreciar la interpretación correcta de las expresiones dadas.

(B) Introduce, directamente, en la línea de entrada de tu calculadora la ecuación formada por las expresiones dadas 2 y 3:

$$(x^2 + x + 20)(3x^2 + 2x - 1) = (3x - 1)(x^2 - x - 2)(x + 5)$$

1. ¿Qué muestra la calculadora como resultado?

$$(x^2 + x + 20) \cdot (3x^2 + 2x - 1) = (x + 5) \cdot (3x - 1) \cdot (x^2 - x - 2)$$

2. ¿Cómo interpretas este resultado?

Que son equivalentes dando el mismo valor de X.

Por lo la ecuación 2 y 3 dando mas resultados uno si coinciden y otros no por lo tanto no es falso ni verdadera.

Figura 1. Respuesta de una de las actividades.

## Problemas de aprendizaje dentro del álgebra

Es bien sabido que las dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas han sido y son hoy en día un foco de estudio e investigación en educación matemática. Sabemos que para muchos alumnos, el álgebra resulta difícil e incluso irrelevante y algunos llegan a experimentar un rechazo tan intenso, que se ve reflejado en su actitud hacia las matemáticas, como también es importante notar que incluso aquellos alumnos que tienen una actuación satisfactoria ocultan probablemente serios errores.

En particular los problemas específicos en la enseñanza-aprendizaje del álgebra escolar son las dificultades, obstáculos y errores.

El aprendizaje del álgebra genera muchas dificultades en los alumnos y a su vez, éstas son de diferente naturaleza, teniendo que ver con la complejidad de los objetos del álgebra, con los procesos de pensamiento algebraico, con los métodos de enseñanza, con el desarrollo cognitivo de los alumnos y con las actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra.

Estas dificultades de distinta procedencia, se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores.

Socas (1997,) considera tres ejes no disjuntos, que permiten analizar el origen del error: Obstáculo, ausencia de sentido, actitudes afectivas y emocionales.

Los obstáculos tienen que ver con la organización de los errores. Tanto Bachelard como Brousseau, caracterizan un obstáculo como: "aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas,

y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas”.

Los errores que tienen su origen en una ausencia de sentido se originan dentro de lo semiótico, estructural y autónomo que se dan en los sistemas de representación, por lo que podemos clasificarlos en tres etapas:

1. Errores del álgebra, que tienen su origen en la aritmética (asimilar los procesos en el contexto aritmético, por ejemplo en las fracciones, uso de paréntesis, potencias, etc.)

$$\frac{-(3+5)}{4} = -\frac{3}{4} + \frac{5}{4} \rightarrow \frac{-(a+b)}{c} = -\frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

2. Errores de procedimiento (Uso incorrecto de fórmulas o generalizaciones)

$$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$

3. Errores del álgebra debidos propiamente al lenguaje algebraico (Por ejemplo el uso del signo “=”).

El uso del signo “=” se conserva en el álgebra cuando usamos tautologías algebraicas, pero no en el uso de ecuaciones, las cuales no son afirmaciones universales verdaderas:

$$5x - 2 = 7x - 6 \quad \text{La cual sólo es verdadera para } x = 2$$

Los errores que se originan en las actitudes afectivas y emocionales se dan por diversos motivos como: Olvidos, falta de concentración, etc.

De esta manera, es necesario diagnosticar y tratar con atención los errores que puedan generarse, como profesor es importante entonces tratar de no centrarse solamente en las respuestas correctas de los estudiantes, sino también, en los errores que cometen.

*“Considerar el error no como una falta o una insuficiencia sino como una parte coherente de un proceso, ayuda al alumno a tomar conciencia de que puede aprender de sus errores y a nosotros mismos los docentes, a aprender mucho de los errores de nuestros alumnos.” Roland Charnay.*

## Problemas de aprendizaje dentro de los temas

Son muchas las investigaciones que dan cuenta de las dificultades u obstáculos que se oponen al aprendizaje del álgebra (Booth, 1984; Kieran, 1980; Gallardo, A. y Rojano, T. 1988 entre otros). La literatura especializada, identifica problemas que tienen que ver con la manipulación simbólica cuando se realizan tareas algebraicas. En general la investigación en el álgebra, se ha ocupado de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los conceptos y procedimientos algebraicos en el sistema educativo y medio social.

Por mencionar algunos de estos trabajos: El trabajo de Booth, 1984, se enfoca a la investigación de las causas de los errores a nivel secundaria. El trabajo de M. Matz, 1982, se propone explicar la sorprendente uniformidad de los errores cometidos por estudiantes de nivel medio superior. Kieran, 1981, investigan las diversas interpretaciones que adquieren las literales en las expresiones algebraicas.

Es difícil abarcar todas estas perspectivas en un trabajo como éste, pero es necesario conocer sobre estos temas de investigación.

Por lo cual en este trabajo de investigación presentamos algunas hojas de trabajo puestas en práctica con los siguientes temas: **Expresiones equivalentes, Continuación de la equivalencia de expresiones, Transición de expresiones a Ecuaciones, Sistemas de Ecuaciones.**

Los siguientes ejemplos muestran partes de las actividades trabajadas por los estudiantes dentro de los temas ya mencionados:

### Expresiones equivalentes

Introduce, directamente, en la línea de entrada de tu calculadora las ecuaciones formadas por las expresiones 3 y 5:

$$(3x-1)(x^2-x-2)(x+5) = \frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$$

1. ¿Qué muestra la calculadora como resultado?

2. ¿Cómo interpretas este resultado?

### Continuación de la equivalencia de expresiones

He aquí una lista de cuatro expresiones equivalentes, sujetas a ciertas restricciones.

| Expresión dada                          |
|-----------------------------------------|
| 1. $\frac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{(7x+21)}$ |
| 2. $\frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$    |
| 3. $6x^2-21x+9$                         |
| 4. $\frac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)}$       |

(A) Determina todos los valores en común que puede tomar  $x$  de estas expresiones. Muestra y explica cómo determinaste este conjunto de valores.

### Transición de expresiones a Ecuaciones

Resuelve la ecuación  $x^2 = x$  usando el comando SOLVE de CAS.

1. ¿Qué muestra la CAS como resultado?

2. ¿Puedes anticipar lo que mostraría la calculadora cuando sustituyas cada uno de estos valores de  $x$  en la ecuación?

|  |
|--|
|  |
|--|

### Sistemas de Ecuaciones.

(A) Solución de una ecuación con una incógnita.

Usa el comando "SOLVE" de la CAS para resolver la siguiente ecuación:

$$4(3x-7) = 2(3-x)+5$$

| Qué introduces en la CAS | Qué muestra la CAS como resultado |
|--------------------------|-----------------------------------|
|                          |                                   |

Se puede mencionar que las dificultades que se encontraron dentro de la investigación respecto a estos temas fueron las siguientes:

- Comparar expresiones mediante manipulación algebraica
- Igualdad de expresiones
- Probar cuando dos expresiones son equivalentes
- Construcción de ecuaciones
- Reconocer soluciones dentro de un sistema de ecuaciones

## **CAPÍTULO 3**

# **METODOLOGÍA**

## PLAN DE TRABAJO

A continuación se describirá el proceso mediante el cual se realizó la experimentación de las hojas de trabajo.

La experimentación consistió en aplicar actividades didácticas (Hojas de trabajo), en total fueron 4 hojas de trabajo distintas, las cuales se describirán detalladamente más adelante.

### **CBTIS 94 y Descripción del grupo**

El lugar de trabajo fue en el Centro de bachillerato tecnológico industrial y de servicios número 94, de la ciudad de Pátzcuaro Michoacán.

Estas hojas de trabajo se aplicaron a un grupo de tercer semestre de dicha institución de la especialidad de puericultura (Área Químico-Biológico), constituido por 40 alumnos.

Por consiguiente, se explicará la forma de trabajo que se lleva a cabo con el grupo.

Para aplicar las hojas de trabajo se contó con la ayuda de la profesora a cargo del grupo, García Villa Yovana y el compañero de licenciatura Francisco Vidal De Jesús Rendón, trabajando durante 4 horas a la semana. Cabe mencionar que estas horas estuvieron fuera del horario de clases del grupo, 2 horas consecutivas durante el día martes, 1 hora el día miércoles y otra hora el día viernes.

Para motivar al grupo a la forma de trabajo que requeríamos, la profesora les dio incentivos en su calificación final durante uno de sus parciales, ya que la experimentación se llevó a cabo desde el martes 8 de octubre de 2013 hasta el martes 19 de noviembre de 2013.

### **Capacitación para la manipulación del CAS**

Para la primera etapa de esta experimentación, tuve que implementar una capacitación a los alumnos durante una sesión de 2 horas, además de resolver las dudas que tuviera la profesora acerca de las hojas de trabajo, para aprender a utilizar los comandos básicos del software que utilizaríamos para la resolución de los problemas. El software utilizado fue TI- Nspire CAS, mediante la Calculadora Texas Instruments Ti-Nspire CX CAS.

Para esta sesión mostré la utilización del software mediante la computadora y un proyector, para que todos los alumnos pudieran visualizar los pasos a seguir.

En esta sesión como en todas las demás, se trabajó en parejas, ya que solo contamos con 25 calculadoras, las cuales las facilitó la institución.

## **Descripción del trabajo durante la sesión:**

Primeramente se les mostró la estética en general de la calculadora, la descripción de los distintos botones que la componen, así como su ubicación y uso. Posteriormente se pasó al encendido de la misma, para crear un nuevo documento. Se comenzó con operaciones básicas de aritmética con números enteros, incluso con ejemplos donde manejaran las operaciones jerárquicas de los signos en la calculadora (agrupación de signos).

Después manejamos operaciones con fracciones, una vez de haber explicado las operaciones básicas, comenzamos a explicar operaciones algebraicas (Operaciones con letras), explicando como introducir literales con exponentes, raíces y fracciones.

Concluyendo con estos ejemplos, enseñamos a utilizar el comando “tal que” | para evaluar expresiones algebraicas, resolviendo algunos ejemplos con la sintaxis adecuada, para que los alumnos comprendieran el uso del comando.

Posteriormente, el comando “Expand”, con algunos productos como  $(x^3 - 3x)(x^2 + 2x)$ , para la comprensión del comando.

Los comandos que se utilizarían en las actividades 2, 3, y 4 se explicó la función de cada uno previo a cada actividad.

## **Descripción de las actividades**

Una vez terminada esta sesión, comenzamos con el trabajo de las actividades, siendo dirigidas por la profesora Yovana. Como se mencionó se trabajó con 40 alumnos, éstos trabajaron en parejas en total 20 parejas.

En la aplicación de las actividades se utilizaron dos cámaras una fija y una móvil, la manipulación de éstas fue con el apoyo del compañero de licenciatura Francisco Vidal De Jesús Rendón.

Las actividades aplicadas fueron las siguientes:

- Actividad 1: Expresiones equivalentes
- Actividad 2: Continuación de equivalencia de expresiones
- Actividad 3: Transición de expresiones equivalentes
- Actividad 4: Sistemas de ecuaciones

Cada una de estas actividades se divide en apartados, constituyendo partes que se trabajó a papel y lápiz y partes donde se utilizó la Texas Instruments, apartados con un tiempo aproximado de 30min cada uno.

La forma de trabajo que se desarrolló con cada una de las actividades fue mediante la metodología ACODESA (aprendizaje en colaboración, debate científico y auto-reflexión)

Para cada actividad se trabajó con las siguientes partes:

1. Etapa individual o de apertura
2. Etapa en equipo
3. Debate científico o trabajo grupal
4. Etapa de institucionalización o de cierre

1.- Para la primera etapa como ya se mencionó se trabajó en parejas con 25 calculadoras, asignando el tiempo determinando para la terminación de la tarea.

2.- La etapa en equipo se realizó en equipos de 4 personas, es decir, se juntaron dos parejas, con un tiempo aproximado de 5 minutos para compartir sus resultados y si era necesario corregir. Cabe mencionar que no siempre fueron las mismas parejas y equipos de trabajo, ya que en algunas sesiones faltaban compañeros.

3.- El debate científico o trabajo grupal, se realizó en cada una de las discusiones de cada actividad respectivamente, esto fue inmediatamente después de la etapa en equipo. Dichas discusiones fueron dirigidas por la profesora al mando, ella lanzaba preguntas al grupo y de esa forma ellos contestaban a cada pregunta.

Algunas veces los equipos se mostraban más participativos y pasaban al frente del grupo a exponer su trabajo, otras, solamente de manera individual desde su lugar exponían su trabajo.

4.- Para esta etapa de cierre, la profesora se encargaba de dar la idea general de acuerdo a cada discusión que se llevó acabo, además de resolver dudas de alumnos que las tuvieran.

A continuación se muestra un ejemplo de las hojas de trabajo mencionadas.

Nombre:  
Fecha:

### Actividad 1: Expresiones equivalentes

#### Leción 1

##### Parte I (con CAS): Comparación de expresiones mediante evaluación numérica

(A) La tabla de abajo muestra cinco expresiones algebraicas y dos valores posibles de  $x$ .

Usando los dos valores dados de  $x$  (1/3 y -5) y otros dos valores que tú elijas, calcula los valores que resultan en cada una de las expresiones, usando la herramienta de evaluación de tu calculadora [el "operador tal que?":  $\rightarrow$ ].

Importante: completa una fila de la tabla y así hasta que la termines.

Registra tus elecciones adicionales de los valores de  $x$ , y anótalos en la fila de arriba de la tabla; escribe los resultados apropiados en las celdas de abajo.

| Expresión                                     | Para $x =$     |     |                    |      |
|-----------------------------------------------|----------------|-----|--------------------|------|
|                                               | 1/3            | -5  | 1/6                | -3   |
| 1. $6x^2 + 4x - 3$                            | $\frac{40}{9}$ | 184 | $\frac{119}{18}$   | 90   |
| 2. $(x^2 + x - 20)(3x^2 - 2x - 1)$            | 0              | 0   | $\frac{4991}{432}$ | -780 |
| 3. $(3x-1)(x^2-x-2)(x-5)$                     | 0              | 0   | $\frac{2387}{432}$ | -200 |
| 4. $(-x+3)^2 - x(3x-9)$                       | $\frac{40}{9}$ | 184 | $\frac{119}{18}$   | 90   |
| 5. $\frac{(x^2-3x-10)(3x-1)(x^2+x+2)}{(x-2)}$ | 0              | 0   | $\frac{2387}{432}$ | -200 |

(B) Compara los resultados obtenidos en las diversas expresiones de la tabla anterior. En base a esto que puedes decir sobre las siguientes expresiones.

- Expresión 1 y Expresión 4
- Expresión 3 y Expresión 5
- Expresión 2 y Expresión 1
- Expresión 2 y Expresión 5

1 y 4 = los resultados fueron iguales  
3 y 5 = fueron iguales  
2 y 3 = Cambio la fracción  
2 y 5 = Cambio todo.  
con cinco cuenta que dando mas valores de  $x$   
los resultados seguían siendo iguales

## **Implementación de la experimentación (acopio de datos) y selección de la muestra**

Para la primera actividad se realizaron 4 discusiones que fueron grabadas por las cámaras una fija y una móvil, en la segunda se llevaron a cabo dos discusiones, en la tercera se realizaron tres discusiones y finalmente en la cuarta cinco discusiones.

Una vez terminadas las cuatro actividades (Recopilados los datos), se prosiguió con el análisis de la información obtenida tanto en las hojas de trabajo, como los videos filmados.

Lo primero que se realizó fue seleccionar aleatoriamente 15 alumnos de los 40 con los que se trabajó, cabe mencionar que para hacer la selección de estos alumnos se revisaron todas las pruebas para ver que alumnos de estos 40 tenían contestado cada una de las partes de las 4 actividades. Una vez seleccionados estos 15 alumnos, se comenzó con el análisis de cada una de las pruebas de los 15 estudiantes.

Se realizaron reportes individuales de cada una de las pruebas, en donde se analizó cada parte de las mismas. En este primer análisis se especificó en qué partes falló cada estudiante, así como también cuales fueron sus aciertos, para la parte donde se encontraban preguntas abiertas maneje el termino bien o mal según mi criterio, si el alumno tenía noción sobre la pregunta se consideraba correcta.

También se manejó un reporte global de cada una de las hojas de trabajo, es decir, en total 4 reportes globales. Este reporte consiste en ver cuántos alumnos de los 15 en total estuvieron correctos en cada una de las partes, así como cuantos fallaron y cuantos no contestaron. Además de dar una conclusión general para cada una de las partes de las actividades de trabajo en base a la información obtenida.

Una vez hecho este análisis, el siguiente paso fue seleccionar 5 estudiantes de los 15 en total, para poder comparar la información obtenida de éstos en las hojas de trabajo y su participación frente a las cámaras. Las alumnas seleccionadas son las siguientes: Guadalupe, Mayte, Karla, Andrea y Liliana.

Para esto se analizaron los videos grabados en cada una de las discusiones, una vez hecho, se comenzó con la transcripción de cada una de las discusiones grabadas en los videos. Posteriormente se crearon diálogos donde participo cada una de las 5 alumnas seleccionadas.

Estos diálogos o información obtenida mediante los videos se reforzaron con partes escaneadas de las hojas de trabajo, con el fin de verificar si dicha información coincidía. Terminamos este análisis con conclusiones respecto a cada dialogo

transcrito e imágenes escaneadas respecto al trabajo realizado por cada una de las 5 estudiantes seleccionadas.

## **CAPÍTULO 4**

# **ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE DATOS Y RESULTADOS DE LAS HOJAS DE TRABAJO**

## ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LAS HOJAS DE TRABAJO

### Actividad 1: Equivalencia de expresiones

El propósito de esta actividad es que los estudiantes de bachillerato tengan como base un enfoque numérico, para la discusión en la equivalencia de expresiones.

Dentro de esta actividad se desarrollaron 4 discusiones con el grupo, llegando así a los siguientes resultados:

En el inicio de la primera actividad se les pidió a los estudiantes lo siguiente:

(A) La tabla de abajo muestra cinco expresiones algebraicas y dos valores posibles de  $x$ .

Usando los dos valores dados de  $x$  ( $1/3$  y  $-5$ ) y otros dos valores que tú elijas, calcula los valores que resultan en cada una de las expresiones, usando la herramienta de evaluación de tu calculadora [el “operador tal que”,  $( | )$ ].

En seguida se muestra la tabla realizada por Guadalupe:

| Para $x =$                                     | $1/3$          | $-5$      | $1/6$              | $-3$      |
|------------------------------------------------|----------------|-----------|--------------------|-----------|
| Expresión                                      | Resultado      | Resultado | Resultado          | Resultado |
| 1. $(x-3)(4x-3)$                               | $\frac{40}{9}$ | 184       | $\frac{119}{18}$   | 90        |
| 2. $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$                     | 0              | 0         | $\frac{4991}{432}$ | -280      |
| 3. $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$                      | 0              | 0         | $\frac{2387}{432}$ | -200      |
| 4. $(-x+3)^2 + x(3x-9)$                        | $\frac{40}{9}$ | 184       | $\frac{119}{18}$   | 90        |
| 5. $\frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$ | 0              | 0         | $\frac{2387}{432}$ | -200      |

Imagen 1: Resultados de Guadalupe

Para esta parte de la actividad todas las alumnas contestaron de manera correcta, lo único que cambio fueron sus resultados para la columna tres y cuatro, ya que tomaron valores diferentes para "x".

Para la parte B se les pido lo siguiente:

(B) Compara los resultados obtenidos en las diversas expresiones de la tabla anterior. En base a esto que puedes decir sobre las siguientes expresiones.

- Expresión 1 y Expresión 4
- Expresión 3 y Expresión 5
- Expresión 2 y Expresión 3
- Expresión 2 y Expresión 5

En general las 5 estudiantes coincidieron en sus respuestas, mencionando que la expresión 1 y la expresión 4 de la tabla anterior sus resultados eran iguales, así como la 3 y 5.

1 y 4 = sus resultados fueron iguales  
3 y 5 = fueron iguales  
2 y 3 = Cambio la fracción  
2 y 5 = Cambio todo.  
nos dimos cuenta que dando mas valores de x  
los resultados seguiron siendo iguales

**Imagen 1.1: Resultados de Guadalupe**

Después de esta actividad se realizó la primera discusión, dentro de la cual, la profesora menciona que podían dar opiniones sobre lo que observaron con las expresiones de la tabla. Mayte tuvo la siguiente participación:

Pues, nosotros llegamos a la conclusión de que la expresión 1 con la expresión 2, si nos dan por ejemplo más valores de "x" siempre nos va a salir el mismo resultado en la expresión 1 y la 4 y también en la expresión 3 y 5, si nos vuelven a dar más valores de "x" sus resultados van hacer siendo igual, van a coincidir el 3 y 5.

Después de esto la profesora preguntó lo siguiente:

Las expresiones 1 y 4 físicamente se ven diferentes, ¿Por qué creen que den lo mismo?

Para la pregunta anterior solamente Guadalupe tuvo participación mencionando lo siguiente:

Porque utilizamos los mismos valores de "x"

La respuesta de Guadalupe no fue muy explícita, entonces la profesora explica a todo el grupo:

Se pueden re-escribir las expresiones algebraicas para que te puedan dar los mismos valores aunque las expresiones se vean físicamente diferentes.

Para la parte II se les pidió a los estudiantes que re-escribieran algunas expresiones mediante el uso de papel y lápiz sin utilizar el CAS. A continuación se muestran los resultados obtenidos por dos de las estudiantes:

(B) Verifica tus conclusiones anteriores mediante el uso de álgebra en papel y lápiz; re-escribe las expresiones dadas en otra forma (no necesariamente en forma expandida). Muestra todo tu trabajo en la columna derecha de la tabla de abajo.

| Expresión dada             | Expresión dada en su forma re-escrita                                                                                                         |
|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $(x-3)(4x-3)$           | $4x^2 - 3x - 12x + 9$ $\underline{4x^2 - 15x + 9 //}$                                                                                         |
| 2. $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$ | $3x^4 + 2x^3 - 1x^2 + 3x^3 + 2x^2 - 1x$ $- 60x^2 - 40x + 20$ $3x^4 + 5x^3 - 59x^2 - 41x + 20$ $\underline{3x^4 + 5x^3 - 59x^2 - 41x + 20 //}$ |
| 3. $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$  | $3x^3 - 3x^2 - 6x + 3x^2 + 15x - 1x^2 + 1x + 2 - 1x - 5$ $\underline{3x^3 - x^2 + 9x - 3 //}$                                                 |

|                                                |                                                                                                                     |
|------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4. $(-x+3)^2 + x(3x-9)$                        | $-x^2 + 3x + 9 + x(3x-9)$ $-x^2 + 3x + 9 + 3x^2 - 9x$ $\underline{2x^2 - 6x + 9 + 3x^2}$                            |
| 5. $\frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$ | $4x^3 - 1x^2 + x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 9x^2 - 3x + 3x^3 + 9x^2 + 6x$ $\underline{-30x + 10 - 10x^2 - 30x - 20}$ $(x+2)$ |

Imagen 1.2: Resultados de Guadalupe

| Expresión dada             | Expresión dada en su forma re-escrita                                                                                                                          |
|----------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $(x-3)(4x-3)$           | $4x^2 - 3x - 12x + 9$ $4x^2 - 15x + 9$                                                                                                                         |
| 2. $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$ | $x^4 + 2x^3 - 1x^2 + 3x^3 + 2x^2 - 1x - 60x^2 - 40x + 20$ $x^4 + 5x^3 - 59x^2 - 42x + 20$                                                                      |
| 3. $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$  | $(3x^3 - 3x^2 - 6x - 1x^2 + 1x + 2)(x+5)$ $3x^4 - 3x^3 - 6x^2 - 1x^3 + 1x^2 + 2x + 15x^3 - 15x^2 - 30x - 5x^2$ $+ 5x + 10 =$ $3x^4 + 11x^3 - 24x^2 - 23x + 10$ |

|                                                |                                                                                                                                                                                              |
|------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4. $(-x+3)^2 + x(3x-9)$                        | $(-x+3)(-x+3) = -x^2 + 9$<br>$3x^2 - 9x$<br>$(x^2 + 9)(3x^2 - 9x) = 3x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 9x$                                                                                                |
| 5. $\frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$ | $(3x^3 + 9x^2 - 30x - 1x^2 - 3x + 10)(x^2 + 3x + 2) = (3x^3 + 9x^2 - 30x^3 + 10x^4 + 3x^3 + 10x^2)(x^2 + 3x + 2) = 3x^7 + 9x^6 - 30x^5 - 1x^6 - 3x^5 + 10x^4 + 9x^6 + 27x^5$<br>Al otro lado |

Imagen 1.3: Resultados de Mayte

Se puede observar en las tablas anteriores que, tanto Guadalupe como Mayte, pudieron re-escribir la primera expresión, así como cada una pudo re-escribir la expresión 2 y 3 respectivamente. Las dos tuvieron problemas para re-escribir las siguientes dos expresiones de la tabla.

En general las demás alumnas también tuvieron problemas para poder re-escribir las expresiones 4 y 5.

El inciso C de esta parte II consistió en lo siguiente:

(C) En la discusión en el salón de clases, hiciste algunas conclusiones basadas en evaluaciones numéricas de expresiones. Explica en qué forma las manipulaciones algebraicas, en la Parte II B, apoyaron (o no) cada una de esas conclusiones.

Enseguida se muestran las respuestas de Mayte y Guadalupe respectivamente:

Que gracias a las conclusiones pude solucionar unas ecuaciones por que una trate y asi la deje en como le entendí pero estas observaciones me sirvieron para aprender más del tema y de las ecuaciones y como resolverlas más fácil.

se apoyaron ya que daban resultados semejantes en cada una de las ocasiones, ya sean de dos o tres terminos.

Imagen 1.4: Resultados de Mayte y Guadalupe

Podemos observar en base a las respuestas de Mayte y Guadalupe, que a las dos les sirvió la discusión en clase, ya que las dos afirmaron que si las apoyo dicha discusión. Guadalupe da una explicación un poco más explícita del porque le ayudó a comprender la discusión.

Las respuestas de las demás alumnas cayeron a respuestas semejantes a las de Guadalupe, concluyeron que la discusión les ayudó para saber que existen diferentes formas en las que puedes utilizar una expresión algebraica, en la cual puedes llegar a un mismo resultado.

Dentro de la parte III de esta actividad se realizó con ayuda de la calculadora utilizando el comando EXPAND, de igual manera re-escribiendo las expresiones utilizadas anteriormente con papel y lápiz, y se obtuvieron los siguientes resultados:

| Expresión dada             | Resultado producido por EXPAND                                |
|----------------------------|---------------------------------------------------------------|
| 1. $(x-3)(4x-3)$           | $4 \cdot x^2 - 15 \cdot x + 9$                                |
| 2. $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$ | $3 \cdot x^4 + 5 \cdot x^3 - 59 \cdot x^2 - 41 \cdot x + 20$  |
| 3. $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$  | $3 \cdot x^4 + 11 \cdot x^3 - 25 \cdot x^2 - 23 \cdot x + 10$ |

|                                                |                                   |
|------------------------------------------------|-----------------------------------|
| 4. $(-x+3)^2 + x(3x-9)$                        | $4 \cdot x^2 - 15 \cdot x + 9$    |
| 5. $\frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$ | $3x^4 + 11x^3 - 25x^2 - 23x + 10$ |

**Imagen 1.5: Resultados de Karla**

Para esta parte todas las alumnas tienen los mismos resultados presentados por Karla, lo cual nos muestra que todas supieron manipular el comando Expand y las expresiones dentro de CAS.

Después de esta actividad se realizó la discusión de la parte III, en donde la profesora junto con el salón de clase concluyó que las expresiones 1 y 4, así como las expresiones 3 y 5, se pueden re-escribir llegando a la misma forma, esto de acuerdo al trabajo previo en dichas actividades.

La profesora también dio la definición de expresiones equivalentes mencionando lo siguiente:

Profa. : Vamos a decir de ahora en adelante que dos expresiones son equivalentes, sí para cualquier número que reemplace a "x" cada una de las expresiones dadas nos arroja el mismo valor, dentro del conjunto de valores posibles.

La parte IV de la actividad, consistió en tres preguntas en base a una ecuación formada por dos expresiones:

(A) Introduce, directamente, en la línea de entrada de tu calculadora las ecuaciones formadas por las expresiones 3 y 5:

$$(3x-1)(x^2-x-2)(x+5) = \frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$$

En las siguientes dos imágenes se muestra los resultados de las tres preguntas obtenidos de las alumnas Mayte, Guadalupe y Liliana respectivamente:

1. ¿Qué muestra la calculadora como resultado?

true

2. ¿Cómo interpretas este resultado?

Nos salió true porque es verdadero ya que las 2 ecuaciones son equivalentes

3. Usa el operador "tal que" (|) de tu calculadora, y reemplaza  $x$  por  $-2$  en la ecuación precedente. Interpreta el resultado mostrado por la calculadora.

Salió falso por que esas ecuaciones ya no son equivalentes. con  $x = -2$ .  
valor

Imagen 1.6: Resultados de Mayte

1. ¿Qué muestra la calculadora como resultado?

True  
(Verdadera)

2. ¿Cómo interpretas este resultado?

Es verdadera la ecuación

3. Usa el operador "tal que" (|) de tu calculadora, y reemplaza  $x$  por  $-2$  en la ecuación precedente. Interpreta el resultado mostrado por la calculadora.

false  
(falsa)

Imagen 1.7: Resultados de Guadalupe

1. ¿Qué muestra la calculadora como resultado?

~~\*~~  
true

2. ¿Cómo interpretas este resultado?

que no da un resultado sino una palabra que es verdadera

3. Usa el operador “tal que” (|) de tu calculadora, y reemplaza x por -2 en la ecuación precedente. Interpreta el resultado mostrado por la calculadora.

False quiere decir que de esta forma esta mal la operación

**Imagen 1.8: Resultados de Liliana**

En esta parte de la actividad lo que se quería lograr es que verificaran la equivalencia usando una prueba de igualdad, sin re-escribir las expresiones dadas. Analizando los resultados tanto de Mayte, Guadalupe y Liliana podemos observar que Mayte identificó que las dos expresiones son equivalentes, así como también identificó que con el valor de -2 las expresiones no son equivalentes.

Por otro lado, analizando los resultados de Guadalupe, ella solamente tradujo los resultados de la calculadora diciendo que es verdadera la ecuación para el primer caso, así como falsa una vez que introduces el valor de -2, pero no dio una explicación del porqué sucedió eso. De la misma manera encontré las respuestas de Liliana.

Acerca de las respuestas proporcionadas de las otras dos estudiantes, Andrea y Karla fueron muy similares a las de Guadalupe, a lo cual concluyo que solo una alumna de las cinco comprendió de manera correcta.

Una vez realizada esta actividad se pasó a la siguiente discusión IV A, la cual fue de manera breve, de donde se puede rescatar el siguiente dialogo de las videograbaciones:

Simbología: DM. = Dulce Mayte; Profesora = Profa.

|        |                                                                                                                                                                                           |
|--------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Profa. | <p>Para las expresiones 3 y 5:</p> $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5) = \frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$ <p>¿Por qué sale “VERDADERO”?</p>                                                   |
| DM.    | Porque las dos expresiones son equivalentes                                                                                                                                               |
| Profa. | ¿Y que habíamos dicho que significa que dos expresiones son equivalentes?                                                                                                                 |
| DM.    | Que dan el mismo resultado                                                                                                                                                                |
| Profa. | Ok, que independientemente del valor de “x” que yo le dé me va a dar el mismo resultado de un lado y del otro. Es decir si de un lado me da 50 del otro lado también me tiene que dar 50. |

Para la parte IV B, nuevamente se dieron dos expresiones en forma de ecuación para verificar la equivalencia, dentro de ésta se hicieron dos preguntas las cuales consistían en lo siguiente:

(B) Introduce, directamente, en la línea de entrada de tu calculadora la ecuación formada por las expresiones dadas 2 y 3:

$$(x^2+x-20)(3x^2+2x-1) = (3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$$

En esta actividad se muestran los resultados de Guadalupe así como los de Andrea:

1. ¿Qué muestra la calculadora como resultado?

$$(x^2 + x - 20) \cdot (3x^2 + 2x - 1) = (x + 5) \cdot (3x - 1) \cdot (x^2 - x - 2)$$

2. ¿Cómo interpretas este resultado?

Que son equivalentes dando el mismo valor de  $x$ .

Para la ecuación 2 y 3 dando mas resultados uno si coinciden y otros no por lo tanto no es falso ni verdadera.

**Imagen 1.9: Resultados de Guadalupe**

1. ¿Qué muestra la calculadora como resultado?

$$(x^2 + x - 20)(3x^2 + 2x - 1) = (x + 5)(3x - 1)(x^2 - x - 2)$$

2. ¿Cómo interpretas este resultado?

porque al cambiarlos de lugar sale el mismo resultado.

**Imagen 1.10: Resultados de Andrea**

Podemos observar que Guadalupe reafirmó su teoría una vez terminado la discusión anterior, ya que ahora las dos preguntas las contestó adecuadamente. Caso contrario lo que paso con Andrea, que aún no le quedó claro cómo interpretar los resultados, ya que solo mencionó que los factores cambiaron de lugar.

Una vez terminada la actividad se pasó con la discusión de la parte IV B, en donde se muestran los siguientes diálogos rescatados de las videograbaciones:

Simbología: GF. = Guadalupe Fraga Mateo; Profesora = Profa.

|        |                                                                                                                    |
|--------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Profa. | Haber todos vean su tablita de la página 1, vean los valores de la expresión 3 y 5, ¿qué les salió?                |
| GF.    | Salen iguales, porque las dos ecuaciones son equivalentes no importa los valores que les demos.                    |
| Profa. | Y cuando meten la 2 y la 3, que les dice                                                                           |
| GF.    | Nos sale el mismo resultado pero en diferente orden. Porque en algunas ocasiones va hacer verdadera y en otras no. |

Simbología: AM. = Andrea Méndez; Profesora = Profa.

|        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|--------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Profa. | <p>¿Que nos pueden decir de esta parte?</p> $(x^2 + x - 20)(3x^2 + 2x - 1) = (3x - 1)(x^2 - x - 2)(x + 5)$ <p>¿Que muestra la calculadora como resultado?</p>                                                                                                                                                                                                                                               |
| AM.    | <p>Pues que el resultado es el mismo, Pero ya después dice que como interpretas este resultado, el primer resultado que sale en la calculadora es igual, pero ya el segundo es el mismo pero sale cambiado, se cambian de posición.</p>                                                                                                                                                                     |
| Profa. | <p>¿Y eso afectara en el resultado?</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| AM.    | <p>No, es el mismo</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Profa. | <p>Ok, la pregunta va en este sentido en el anterior que hicieron era la tres y la cinco <math>(3x - 1)(x^2 - x - 2)(x + 5) = \frac{(x^2 + 3x - 10)(3x - 1)(x^2 + 3x + 2)}{(x + 2)}</math> y si ustedes la ponían les decía que verdadero es decir que son equivalentes y en esta <math>(x^2 + x - 20)(3x^2 + 2x - 1) = (3x - 1)(x^2 - x - 2)(x + 5)</math> no les sale ni verdadera ni falso, ¿Porque?</p> |
| AM.    | <p>Por el acomodo yo creo.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |

La última parte de esta actividad consistió nuevamente en verificar la equivalencia de expresiones de un conjunto de 4 expresiones dadas, las cuales se muestran a continuación:

| Expresiones dadas                  |
|------------------------------------|
| 1. $4(x-1)^2 - (x+1)^2$            |
| 2. $(2x+5)(x-3) - (x-3)^2$         |
| 3. $(x-3)(3x-1)$                   |
| 4. $\frac{(3x-1)(x^2-x-6)}{(x+2)}$ |

Dentro de éstas se les pidió lo siguiente:

- (A) Usa tu CAS para determinar cuáles de estas expresiones son equivalentes. Usa cualquiera de los métodos de CAS que prefieras. Muestra todo tu trabajo con CAS en la tabla de abajo:

A continuación se mostraran los resultados obtenidos por todas las alumnas

| Qué introduces en la CAS                         | Resultado mostrado por la CAS |
|--------------------------------------------------|-------------------------------|
| 1) $\text{Expand}(4(x-1)^2 - (x+1)^2)$           | $3x^2 - 10x + 3$              |
| 2) $\text{Expand}(2x+5)(x-3) - (x-3)^2$          | $x^2 + 5x - 24$               |
| 3) $\text{Expand}(x-3)(3x-1)$                    | $3x^2 - 10x + 3$              |
| 4) $\text{Expand} \frac{(3x-1)(x^2-x-6)}{(x+2)}$ | $3x^2 - 10x + 3$              |

| Qué introduces en la CAS                             | Resultado mostrado por la CAS |
|------------------------------------------------------|-------------------------------|
| $4(x-1)^2 - (x+1)^2 = (x-3)(3x-1)$                   | true                          |
| $(x-3)(3x-1) = \frac{(3x-1)(x^2-x-6)}{(x+2)}$        | true                          |
| $4(x-1)^2 - (x+1)^2 = \frac{(3x-1)(x^2-x-6)}{(x+2)}$ | true                          |
|                                                      |                               |

| Qué introduces en la CAS        | Resultado mostrado por la CAS |
|---------------------------------|-------------------------------|
| $4(x-1)^2 - (x+1)^2$            | $3x^2 = 10x + 3$              |
| $(2x+5)(x-3) - (x-3)^2$         | $(x-3)(x+8)$                  |
| $(x-3)(3x-1)$                   | $(x-3)(3x-1)$                 |
| $\frac{(3x-1)(x^2-x-6)}{(x+2)}$ | $(x-3)(3x-1)$                 |

| Qué introduces en la CAS                      | Resultado mostrado por la CAS |
|-----------------------------------------------|-------------------------------|
| 4 $\frac{(3x-1)(x^2-x-6)}{x+2}$               | $(x-3)(3x-1)$                 |
| 3 $(x-3)(3x-1)$                               | $(x-3)(3x-1)$                 |
| 1 $4(x-1)^2 - (x+1)^2$                        | $3x^2 - 10x + 3$              |
| 2 $\text{expand=}$<br>$(2x+5)(x-3) - (x-3)^2$ | $(x-3)(x-8)$                  |

| Qué introduces en la CAS | Resultado mostrado por la CAS |
|--------------------------|-------------------------------|
| La 1 y la 3              | true                          |
| La 3 y 4                 | true                          |
| La 1 y 4                 | true                          |
|                          |                               |

**Imagen 1.11: Resultados de Guadalupe, Mayte, Andrea, Karla y Liliana**

Para la parte B de esta actividad se les pido lo siguiente:

- (B) Con base en tu trabajo precedente, ¿cuáles son las expresiones equivalentes? (No olvides especificar el conjunto de los valores posibles de  $x$ ). Por favor, explica tus decisiones respecto de la equivalencia.

A continuación se muestra el resultado de Guadalupe

La expresión 1, 3, 4 son equivalentes  
y la 2 no es equivalente.

Observando lo que contestaron todas alumnas, solamente Guadalupe y Mayte pudieron contestar de manera correcta cuales eran las expresiones equivalentes entre sí. Andrea y Karla, únicamente llegaron a la conclusión que la expresión 3 y 4 son equivalentes de acuerdo al método que utilizaron, y Liliana escribió las expresiones equivalentes, pero no utilizó ningún método.

## Actividad 2: Continuación de la Equivalencia de Expresiones

Para esta actividad como su nombre lo indica, es la continuación de la Actividad 1. Comenzando con la parte I, se les pide a los estudiantes de bachillerato que llenen una tabla utilizando el CAS.

(A) **(con CAS)** Completa la tabla de abajo con lo mostrado en la pantalla de la calculadora, según sea requerido:

A continuación se muestran los resultados obtenidos por Andrea:

| Expresión dada                         | Resultado producido por ENTER | Resultado producido por FACTOR | Resultado producido por EXPAND     |
|----------------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|------------------------------------|
| 1. $\frac{6x^2 - 5x - 4}{6}$           | $\frac{6x^2 - 5x - 4}{6}$     | $\frac{(2x-1)(3x-4)}{6}$       | $x^2 - \frac{5x}{6} - \frac{2}{3}$ |
| 2. $\frac{(x-2)^2 + (7x-2)(x-2)}{4}$   | $(x-2)(2x-1)$                 | $(x-2)(2x-1)$                  | $2x^2 - 5x + 2$                    |
| 3. $(2-x)(1-2x)$                       | $(x-2)(2x-1)$                 | $(x-2)(2x-1)$                  | $2x^2 - 5x + 2$                    |
| 4. $\frac{(3x-4)(2x^2+5x+2)}{(6x+12)}$ | $\frac{(2x+1)(3x-4)}{6}$      | $\frac{(2x+1)(3x-4)}{6}$       | $x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{2}{3}$ |

Imagen 2: Resultados de Andrea

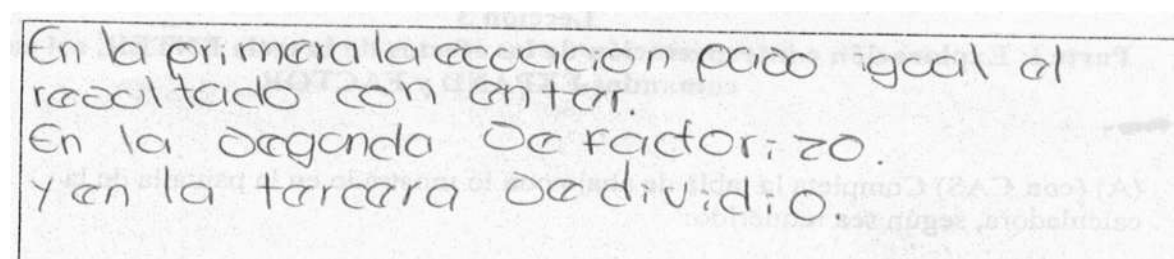
Para esta primera parte de la actividad los resultados de Guadalupe, Mayte, Karla y Liliana son prácticamente los mismos, lo cual, nos muestra que se desempeñaron de buena manera utilizando los comandos con el CAS.

Para la parte B, la cual fue a papel y lápiz, consistió en varios cuestionamientos acerca de la parte I. A continuación se muestran varias respuestas obtenidas por las alumnas Guadalupe, Liliana y Karla:

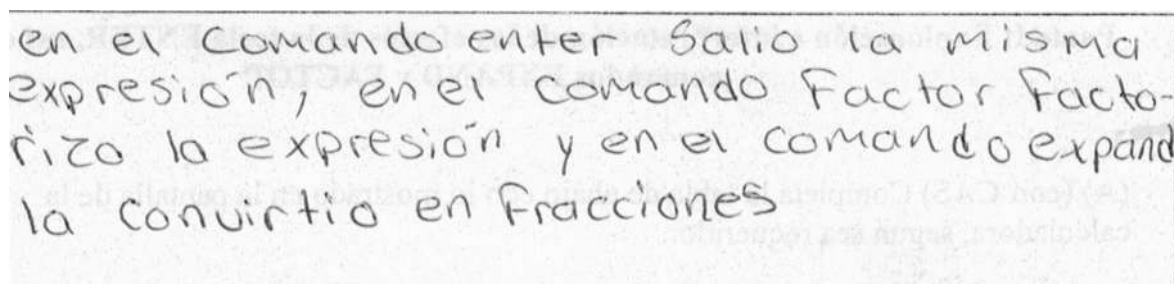
(B) (con papel y lápiz)

1. Dada la expresión 1 (de la Parte I A):

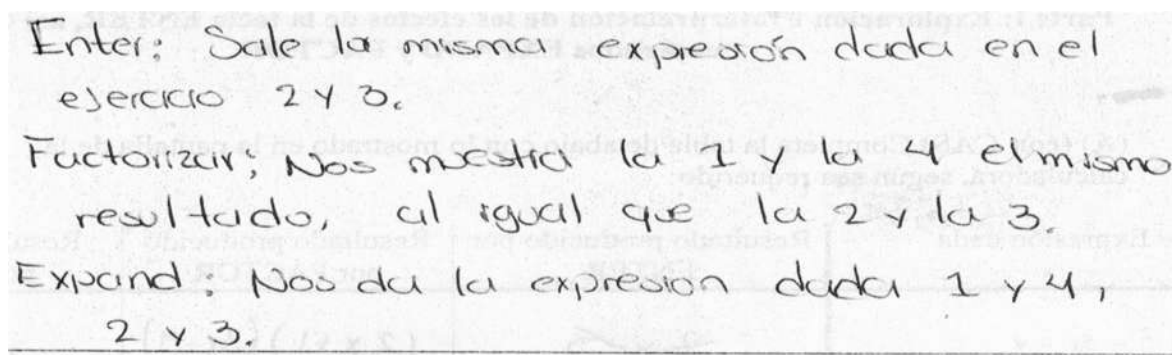
- Describe cómo es la estructura de cada una de las tres formas producidas por la calculadora y compáralas con la expresión dada.



En la primera la ecuación quedó igual al resultado con enter.  
En la segunda de factorizo.  
Y en la tercera de dividir.



en el comando enter salió la misma expresión, en el comando Factor Factorizo la expresión y en el comando expand la convirtió en fracciones



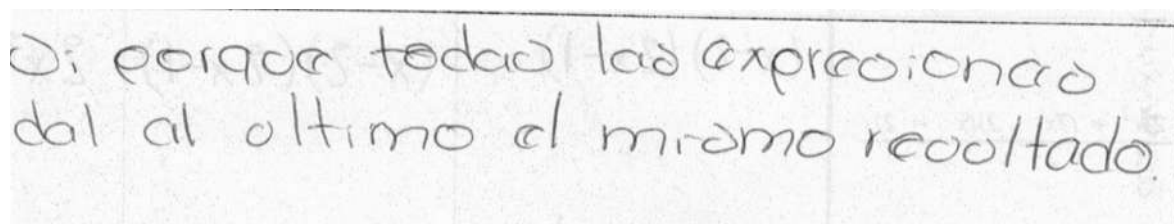
Enter: Sale la misma expresión dada en el ejercicio 2 y 3.  
Factorizar: Nos muestra la 1 y la 4 el mismo resultado, al igual que la 2 y la 3.  
Expand: Nos da la expresión dada 1 y 4, 2 y 3.

Imagen 2.1: Resultados de Guadalupe, Liliana y Karla

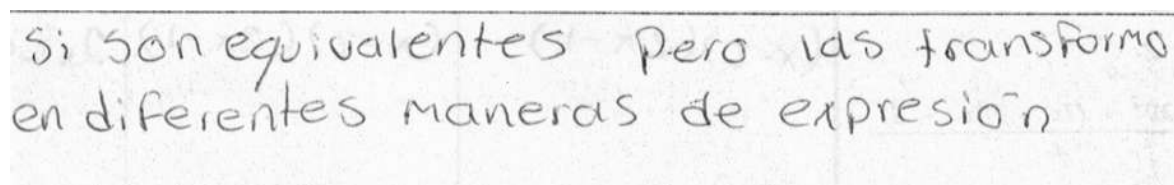
De acuerdo a las respuestas dadas por las alumnas, podemos observar que Guadalupe y Liliana tienen respuestas similares, que aunque no fueron muy explícitas, tienen la idea de lo que está pasando con las expresiones. Por otro lado vemos que Karla no entendió la pregunta, ya que está comparando todos los resultados entre sí. Tanto Andrea como Mayte dieron respuestas similares a Guadalupe y Liliana.

Sobre la misma expresión se les hizo la siguiente pregunta:

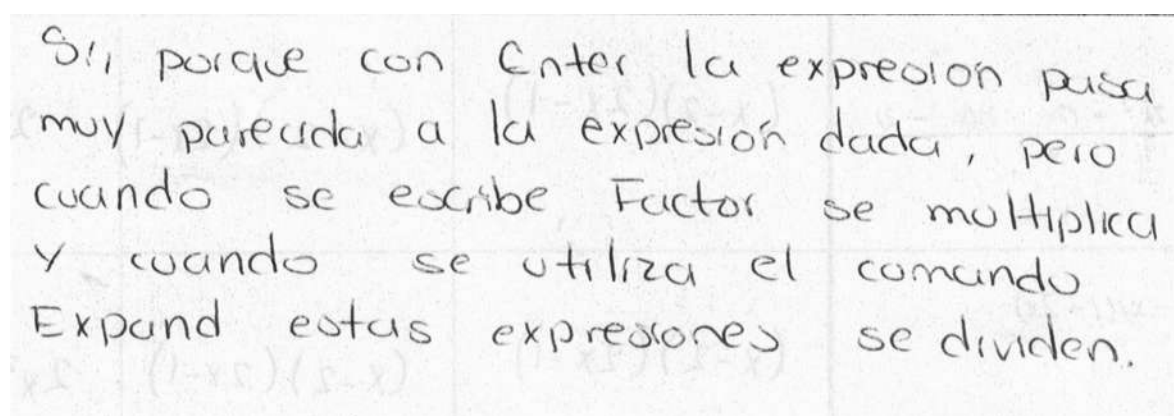
Todas estas formas, ¿son equivalentes a la expresión dada? Por favor, explica.



Si, porque todas las expresiones dan al ultimo el mismo resultado.



Si son equivalentes pero las transformo en diferentes maneras de expresion



Si, porque con Enter la expresion pasa muy parecida a la expresion dada, pero cuando se escribe Factor se multiplica y cuando se utiliza el comando Expand estas expresiones se dividen.

Imagen 2.1: Resultados de Guadalupe, Liliana y Karla

Nuevamente podemos observar que tanto Guadalupe y Liliana saben que las expresiones son equivalentes, que solamente se re-escribieron de diferente manera, caso contrario a Karla, que ahora trata de dar la explicación a la primera pregunta y no menciona por qué son equivalentes las expresiones entre sí.

Las respuestas dadas por Andrea y Mayte son muy parecidas a las de Liliana, lo cual nos muestra que solo Karla estuvo fuera de contexto para esta parte.

La pregunta número 2 de la parte B consistió en lo siguiente:

Dada la expresión 2, muestra los pasos algebraicos que usarías para obtener la forma producida por la tecla ENTER.

Se muestran las respuestas de Liliana y Guadalupe:

$$\begin{array}{l}
 (x-2)(x-2) + (7x-2)(x-2) \\
 (x-2) [(x-2) + (7x-2)] \\
 (x-2) (8x-4) \qquad (x-2)(2x-1)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 (x-2)^2 + (7x-2)(x-2) \\
 (x-2) + (7x-2) \xrightarrow{(x-2)} (2x-1) \\
 (x-2) \xrightarrow{8x-4} (2x-1) \\
 (x-2)(2x-1)
 \end{array}$$

Imagen 2.2: Resultados de Liliana y Guadalupe

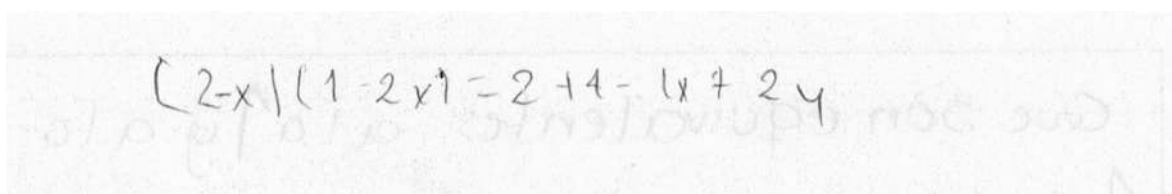
Para esta pregunta solo Liliana y Guadalupe intentaron hacer pasos algebraicos, podemos ver que las dos tienen cosas similares, dentro del proceso que realizaron

están en lo correcto, pero les faltaron pasos para llegar a la solución. Tanto Mayte y Andrea contestaron de manera escrita que no se produce ningún cambio. Karla intento dar explicación de lo que haría, sumas y restas y quitar los paréntesis y al final hacer la división, pero no mostró ningún paso algebraico.

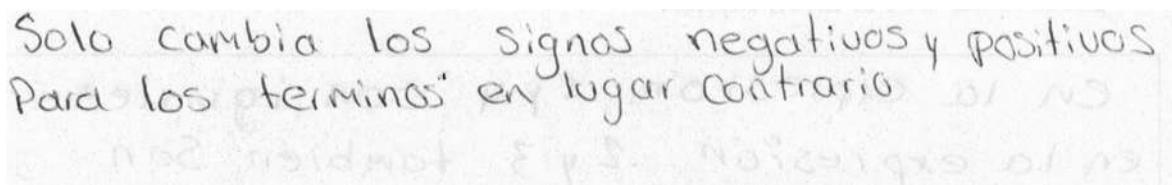
La pregunta número 3 consistió en lo siguiente:

3. Considera la expresión 3 dada. Muestra, usando álgebra en papel y lápiz cómo obtienes la forma producida por el comando FACTOR.

Para esta pregunta se muestran los resultados de Mayte y Liliana



The image shows a handwritten algebraic expression on lined paper. The expression is  $(2-x)(1-2x) = 2 + 4 - 1x + 2y$ . The handwriting is in black ink and appears to be a student's work.



The image shows a handwritten note on lined paper. The text reads: "Solo cambia los signos negativos y positivos Para los terminos en lugar contrario". The handwriting is in black ink and appears to be a student's work.

Imagen 2.3: Resultados de Mayte y Liliana

Para esta pregunta ninguna alumna pudo contestar de manera correcta, vemos dos de los casos que se dieron, por un lado Mayte quien intento desarrollar pero no llegó a nada, y por otro lado Liliana quien tiene idea que algo pasa con los signos pero no hizo ninguna operación algebraica, es decir, factorizar el -1. Fue el caso de Guadalupe, Karla y Andrea que contestaron de manera similar a Liliana.

Para la pregunta número 4 se les pido lo siguiente:

4. Considera la expresión 4 dada. Muestra, usando álgebra en papel y lápiz, cómo obtienes la forma producida por el comando EXPAND.

A continuación se muestra el resultado de Guadalupe:

$$\begin{array}{r}
 (3x-4)(2x+1)(1+2) \\
 (3x-4)(2x+1)(x+2) \\
 \hline
 6(x+2) \\
 6x^2 - 5x - 4 \\
 \hline
 6 \\
 x^2 - \frac{5x}{6} - \frac{2}{3}
 \end{array}$$

Imagen 2.4: Resultados de Guadalupe

Para esta pregunta solamente Guadalupe contesto de manera correcta, prácticamente Andrea, Liliana, Karla y Mayte no intentaron nada respecto a esta pregunta, lo que nos deja ver que tuvieron muchas dificultades para hacer manipulaciones algebraicas a papel y lápiz.

La última pregunta dentro de la parte I B consistió en lo siguiente:

5. En la tabla de la Parte I A anterior, ¿cuáles, de esas expresiones, son equivalentes entre ellas? (Compáralas tanto como puedas.) Por favor, justifica tu respuesta. En esta equivalencia de expresiones, ¿hay algunas restricciones en cuanto a los valores que pueda tomar  $x$ ? Por favor, explica.

en la expresión 1 y 4 son iguales  
 en la expresión 2 y 3 también son  
 iguales ~~ya que~~ la uno y la cuatro  
~~vale~~ (son iguales menos cuando la  $x$  vale  
 -2) con cualquier otro número si

Pues las que son equivalentes  
son la 1-4 con estas obtenemos los mismos resultados

Y en la 2-3 tambien son equivalentes y son igual

La ecuacion 1 con la 4 son equivalentes tanto en enter, expand y factorizacion

La 2 con la 3 son tambien equivalentes en todos los aspectos

En la ecuacion 4 que es:

$$\frac{(3x-4)(2x^2+5x+2)}{(6x+12)}$$

Si cambiara el valor de  $(6x)$  por  $(-2x)$  serian una ecuacion indefinida.

$$\frac{(3x-4)(2x^2+5x+2)}{(-2x+12)}$$

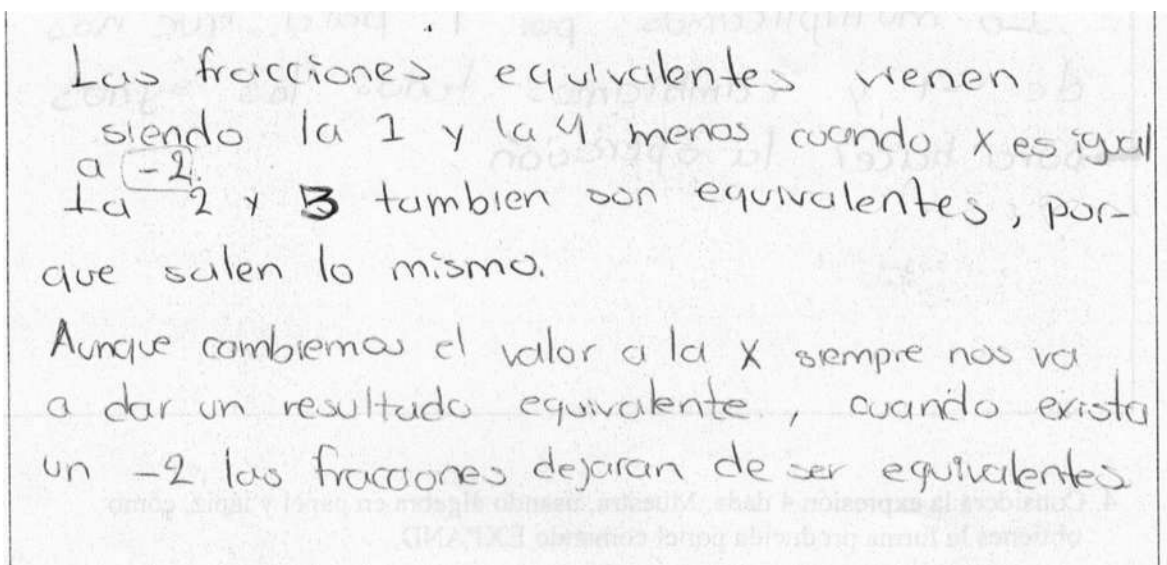


Imagen 2.4: Resultados de Liliana, Andrea, Guadalupe y Karla

Para esta pregunta podemos ver que los resultados fueron correctos de todas las alumnas, prácticamente todas coinciden mencionando que la expresión 1 y 4 son equivalentes, así como la 2 y 3.

Todas las alumnas tienen claro el concepto de expresiones equivalentes, de igual manera mencionan que la expresión 4 está restringida para el valor de  $-2$ .

Una vez terminada esta actividad se pasó a la primera discusión que abarca las partes I A y B.

Dentro de esta discusión fue un poco rápida la profesora, destaco las siguientes preguntas:

¿Cuáles son las expresiones equivalentes en la tabla precedente? ¿Y existen restricciones para las expresiones?

De acuerdo a las videograbaciones se pudieron rescatar los siguientes diálogos teniendo la participación de Guadalupe y Andrea respectivamente.

Simbología: GF. = Guadalupe Fraga Mateo; Profesora = Profa.

| Nombre | Discusión                                                                                                                                                      |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Profa. | Ustedes tienen la expresión 2 en sus hojas, ahora si ponemos ENTER, FACTOR Y EXPAND, ¿Creen que esos tres resultados son equivalentes a la expresión original? |

|        |                                                                                                                                                                  |
|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| GF.    | Pues si... Porque en las 4 vamos a obtener el mismo resultado                                                                                                    |
| Profa. | Ya me dijeron que la expresión 1 y 4 son equivalentes, así como la 2 y 3, entonces, ¿Esas expresiones son equivalentes para todos los valores? (ver Imagen 2.4). |
| GF.    | No, para las expresiones 1 y 4 en el valor de -2 no son equivalentes.                                                                                            |

Nota: Para esta discusión, los equipos estuvieron conformados por dos parejas (equipos de 4)

Simbología: AM. = Andrea Méndez; Profesora = Profa.

| Nombre | Discusión                                                                                                  |
|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Profa. | ¿Que nos pueden decir de esta parte? ¿Cuáles expresiones son Equivalentes?                                 |
| AM.    | Pues que si le damos valores diferentes a la 1 y la 4 y la 2 y 3 siempre nos van a dar el mismo resultado. |

|        |                                                               |
|--------|---------------------------------------------------------------|
| Profa. | ¿Quiere decir que esas expresiones son equivalentes entre sí? |
| AM.    | Si esas expresiones van hacer equivalentes. (Ver Imagen 2.4)  |

Se puede observar que en los diálogos, que tanto Guadalupe como Andrea reafirman frente a las cámaras lo que plasmaron en las hojas de trabajo. Después de esto todo el grupo quedo de acuerdo en cuales eran las expresiones equivalentes y sus restricciones.

Continuando con esta actividad dentro de la parte II, se les dio una tabla con 4 expresiones equivalentes y se les pidió las siguientes actividades:

He aquí una lista de cuatro expresiones equivalentes, sujetas a ciertas restricciones.

Tabla 1

| Expresión dada                          |
|-----------------------------------------|
| 1. $\frac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{(7x+21)}$ |
| 2. $\frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$    |

$$3. 6x^2 - 21x + 9$$

$$4. \frac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)}$$

Para esta primera actividad se mostraran los resultados de Karla, Mayte y Guadalupe respectivamente:

- (A) Determina todos los valores en común que puede tomar  $x$  de estas expresiones. Muestra y explica cómo determinaste este conjunto de valores.

1)  $\frac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{(7x+21)} = (-3)(7x) = (-21) + 21 \leftarrow \text{se eliminan}$

2)  $\frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)} = (+4)(-4) \text{ se eliminan}$

3)  $6x^2 - 21x + 9 =$

4)  $\frac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)} = (-3)(x) = -3+3 \text{ se elimina}$

la número 1:  $x$  valor a -3  
 en la número 2:  $x$  valor a 4  
 en la número 3: no tiene restricciones  
 en la número 4:  $x$  valor a 3

En la ecuación 1 le damos valor a  $(7x)$  por  $(-3)$   
y es indefinida.  
 $7(-3) + 21$   
 $= -21 + 21 = 0$

En la ecuación 2 despejamos y tambien  
es indefinida.  
 $(x - 4) = 0$   
 $x = +4$

En la 4 tambien despejamos.  
 $x + 3 = 0$   
 $x = -3$

Imagen 2.5: Resultados de Karla, Mayte y Guadalupe

Observamos aquí que las tres alumnas están en lo correcto, ninguna sintetiza el rango de valores, pero todas supieron cómo encontrar los valores para los cuales ciertas expresiones tienen restricción. Cada una a su forma escribió el procedimiento pero las tres se resumen a sustituir el valor de “x” donde la expresión se hace indefinida. De igual manera Liliana y Andrea contestaron de manera similar a las ya mostradas.

- (B) Usando, una vez y sólo una vez, cada uno de los cuatro métodos para determinar la equivalencia, muestra que todas las cuatro expresiones de la Tabla 1 son equivalentes. En la Tabla 2, establece qué es lo que introduces en la CAS y qué es lo que obtienes.

| Método de CAS               | Qué introduces en la CAS                                    | Resultado mostrado por la CAS       |
|-----------------------------|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| Verificación de la igualdad | $\frac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{(7x+21)} = 6x^2 - 21x + 9$       | true                                |
| FACTOR                      | $\text{factor}\left(\frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}\right)$ | $3 \cdot (x-3) \cdot (2 \cdot x-1)$ |
| EXPAND                      | $((6 \cdot x^2 - 21 \cdot x + 9))$                          | $6 \cdot x^2 - 21 \cdot x + 9$      |
| ENTER                       | $\frac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)}$                              | $3 \cdot (x-3) \cdot (2 \cdot x-1)$ |

| Método de CAS               | Qué introduces en la CAS                                       | Resultado mostrado por la CAS |
|-----------------------------|----------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| Verificación de la igualdad | $\frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{x-4} = \frac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)}$ | $3(x-3)(2x-1) = 3(x+3)(2x-1)$ |
| FACTOR                      | $\text{Factor}\left(\frac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{7x+21}\right)$   | $3(x-3)(2x-1)$                |
| EXPAND                      | $\text{Expand}(6x^2-21x+9)$                                    | $6x^2-21x+9$                  |
| ENTER                       | $\frac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)} \quad \text{enter}$              | $3(x-3)(2x-1)$                |

| Método de CAS               | Qué introduces en la CAS                                             | Resultado mostrado por la CAS      |
|-----------------------------|----------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| Verificación de la igualdad | $\frac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{(7x+21)} = \frac{6x^2-21x+9}{6x^2-21x+9}$ | $\frac{3(x-3)(2x-1)}{\text{True}}$ |
| FACTOR                      | $\text{Factor}\left(\frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}\right) =$        | $3(x-3)(2x-1)$                     |
| EXPAND                      | $\text{expand}\left(\frac{3(2x-1)(x^2-9)}{x+3}\right)$               | $6x^2-21x+9$                       |
| ENTER                       | $6x^2-21x+9$                                                         | $6x^2-21x+9$                       |

| Método de CAS               | Qué introduces en la CAS             | Resultado mostrado por la CAS                       |
|-----------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| Verificación de la igualdad | $\frac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{(7x+21)}$ | $\frac{3(x-3)^2(2x-1)}{x+3} = 3(x-3)(2x-1)$<br>true |
| FACTOR                      | $6x^2 - 21x + 9$                     | $3(x-3)(2x-1)$                                      |
| EXPAND                      | $\frac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)}$       | $6x^2 - 21x + 9$                                    |
| ENTER                       | $\frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$    | $3(x-3)(2x-1)$                                      |

| Método de CAS               | Qué introduces en la CAS          | Resultado mostrado por la CAS |
|-----------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|
| Verificación de la igualdad | $7(2x-1)(x+3)(3x-9)$              | $3(x-3)(2x-1)$                |
| FACTOR                      | $\frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$ | $3(x-3)(2x-1)$                |
| EXPAND                      | $6x^2 - 21x + 9$                  | $6x^2 - 21x + 9$              |
| ENTER                       | $3(2x-1)(x-9)$                    | $3(x-3)(2x-1)$                |

Imagen 2.5: Resultados de Mayte, Guadalupe, Karla, Liliana y Andrea

Para esta parte se mostraron todos los resultados de las 5 alumnas, en cada uno sabemos lo siguiente:

Analizando el procedimiento de Mayte, solo puede llegar a que las expresiones 1, 3 son equivalentes así como la 2 y 4, pero no podrá mencionar las demás combinaciones de expresiones equivalentes.

Para Guadalupe, con el procedimiento que realizó, solo puede llegar a la conclusión de que las expresiones 2 y 4, 1 y 2, 1 y 4 son equivalentes, pero las demás expresiones no las puede comprobar.

En la manera de resolver de Karla, el procedimiento que realizó, solo puede llegar a que las expresiones 1, 3 y 4 son equivalentes, pero no puede mencionar que también la expresión 2 es equivalente a las demás. Así que no contesto bien la tabla.

En la forma de Liliana, el procedimiento que realizó solo puede llegar a la conclusión de que las expresiones 2 y 3, 3 y 4, 2 y 4 son equivalentes, pero las demás expresiones no las puede comprobar.

Y finalmente se puede mencionar lo siguiente para Andrea, el procedimiento que realizó, se puede concluir solo que la exp2 y exp4 son equivalentes. Además que no utilizó la verificación de igualdad, tal vez no entendió como usarlo.

Podemos concluir que ninguna alumna mostro que las 4 expresiones son equivalentes entre sí, cada una con sus respectivos resultados, comprobó que algunas expresiones son equivalentes.

La última parte de esta actividad número dos consistió en lo siguiente:

(C) Usando sólo los resultados de la Tabla 2, prueba las seis afirmaciones de equivalencia mostradas en la Tabla 3.

A continuación se mostrarán los resultados obtenidos por Mayte y Guadalupe, mencionando que para comprobar esta tabla, las alumnas tenían que tomar en cuenta sus resultados anteriores. Por lo tanto, no podrán hacer la comprobación de todas estas expresiones, sin embargo, estas dos estudiantes tienen correcta la tabla.

Tabla 3 (el símbolo " $\equiv$ " denota equivalencia)

| Afirmación de equivalencia | Prueba de la equivalencia                                                         |
|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| Exp1 $\equiv$ Exp2         | Que la expresión 1 es igual a 3 y la 2 $\equiv$ 3 por lo tanto la 1 $\equiv$ a 2. |
| Exp 1 $\equiv$ Exp3        | Son equivalentes por la verificación de la igualdad                               |

|                    |                                                                                    |
|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Exp1 $\equiv$ Exp4 | Por que la 2 es igual a la 1 y la 1 es igual a la 2 por lo tanto 1 es igual a la 1 |
| Exp2 $\equiv$ Exp3 | que la 1 es igual a la 2 y 1 es igual a 3 por lo tanto 2 es igual a la 3.          |
| Exp2 $\equiv$ Exp4 | la 2 es igual a la 4 por el factor y el enter.                                     |
| Exp3 $\equiv$ Exp4 | Por que la 2 es igual a la 3 y la 2 a la 1 por lo tanto la 3 es igual a la 1       |

Tabla 3 (el símbolo " $\equiv$ " denota equivalencia)

| Afirmación de equivalencia | Prueba de la equivalencia                                                                                                 |
|----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Exp1 $\equiv$ Exp2         | Son igual Resultado de la 1 = $3(x-3)(2x-1)$<br>Resultado de la 2 = $3(x-3)(2x-1)$                                        |
| Exp1 $\equiv$ Exp3         | Son igual Resultado 1 = $3(x-3)(2x-1)$ Por factorización.<br>Resultado 3 = $6x^2 - 21x + 9$ de la 3                       |
| Exp1 $\equiv$ Exp4         | Son iguales Factor $\frac{7(2x-1)(x+3)(3x+9)}{(7x+21)} \Rightarrow 73(x-3)(2x-1)$<br>Enter $\frac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)}$ |
| Exp2 $\equiv$ Exp3         | Son igual Resultado 2 = $3(x-3)(2x-1)$<br>Resultado 3 = $6x^2 - 21x + 9$ Por factorización<br>Se llega al mismo R.        |
| Exp2 $\equiv$ Exp4         | Son igual Resultado 2 = $3(x-3)(2x-1)$<br>R. 4 = $3(x-3)(2x-1)$                                                           |
| Exp3 $\equiv$ Exp4         | Son igual R. 3 = $6x^2 - 21x + 9$ Por factorización<br>R. 4 = $3(x-3)(2x-1)$ se llega al mismo R.                         |

Imagen 2.5: Resultados de Mayte y Guadalupe

Observando las respuestas de Mayte y Guadalupe podemos mencionar lo siguiente:

La alumna Mayte solo pudo decir que la expresión 1 y 3, y 2 y 4 son equivalentes. Para probar las demás expresiones, uso la transitividad, este uso está correcto, es decir, todo el procedimiento, cada uno de las expresiones las demostró, pero partió de una expresión que no estaba demostrada y la dio por hecho.

Y Guadalupe Solo tiene 3 incisos correctos, respecto a su trabajo de la tabla anterior. Las restantes también las contesto, pero utilizo un argumento que no definió antes.

Lo cual nos señala que hubo un cambio de técnicas de una tabla a otra para bien. Las demás alumnas, como la lógica lo indicaba, solo pudieron contestar los incisos que tenían correctos en la tabla 2.

Después de esto se pasó a la última discusión de las partes II A, B y C, en donde la profesora aclaro las dudas de los estudiantes demostrando solo el uso de la propiedad transitiva del símbolo " $\equiv$ " para mostrar las afirmaciones de equivalencia dadas en la tabla 3.

### Actividad 3: Transición de Expresiones a Ecuaciones

Recordando la primera actividad, en torno a la equivalencia de expresiones, anulamos aquellas expresiones encontradas que no eran equivalentes. Con esas expresiones no equivalentes, cuando las introducíamos en la CAS, las ecuaciones formadas con tales expresiones, la CAS no mostraba “true”.

Esto fue así, porque hay sólo algunos (o ninguno) valores de  $x$ , los cuales al sustituirlos en ambos lados de la ecuación produce resultados iguales.

**El objetivo** de esta actividad consiste en usar la CAS para encontrar los valores de  $x$  que producen resultados iguales.

Para la primera parte de esta actividad, se mostrará el resultado de Andrea, el cual consistió en lo siguiente:

Resuelve la ecuación  $x^2 = x$  usando el comando SOLVE de CAS.

3. ¿Qué muestra la CAS como resultado?

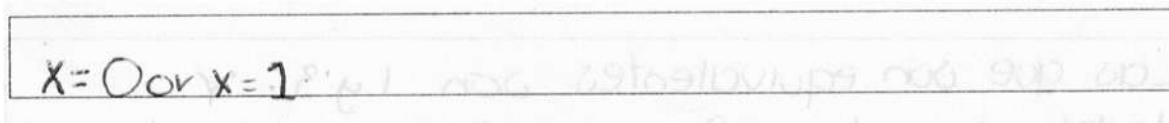


Imagen 3: Resultado de Andrea

En esta primera pregunta para la que se utilizó el comando SOLVE, para encontrar los valores de  $x$  en donde las dos expresiones son equivalentes, las 5 alumnas supieron utilizar el comando encontrando los respectivos valores.

Para la pregunta número dos se mostraran las respuestas de Andrea y Karla

4. ¿Puedes anticipar lo que mostraría la calculadora cuando sustituyas cada uno de estos valores de  $x$  en la ecuación?

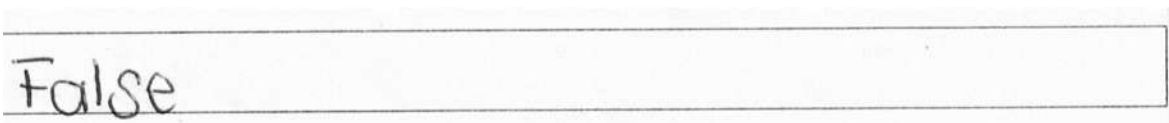


Imagen 3.1: Resultado de Andrea y Karla

Para esta pregunta número dos encontramos dos casos, uno que fue el caso de Andrea quien supone que la CAS mostrará “FALSE” y por otro lado, donde tiene la idea de que dará el mismo resultado.

Hubo casos más específicos donde pusieron “True” que es a lo que se quería llegar en esta pregunta.

La parte II, en la que se utilizó la CAS, se les dieron tres expresiones y la parte A consistió en lo siguiente:

He aquí tres expresiones:

1.  $x(x^2 - 9)$ ,
2.  $(x+3)(x^2-3x) - 3x - 3$
3.  $(x^2 - 3x)(x+3)$

(A) Usa tu calculadora para determinar cuáles de estas expresiones son equivalentes. Completa la tabla de abajo con la información apropiada.

La parte A, consistió en pedirles llenar una tabla, de lo cual mostraremos los resultados de las 5 alumnas Guadalupe, Karla, Mayte, Liliana y Andrea respectivamente:

| Qué introduces en la CAS                                         | Qué muestra la CAS                            | Mi interpretación de lo que muestra la CAS                                                   |
|------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x(x^2-9) = (x+3)(x^2-3x)-3x-3$<br>①                      ②      | $x(x^2-9) = x^3-12x-3$                        | <p>pues que la ecuación 1 y 2 no son equivalentes o bueno si: solo para algunos valores.</p> |
| $(x+3)(x^2-3x)-3x-3 = (x^2-3x)(x+3)$<br>②                      ③ | <p>True<br/>solo para <math>x = -1</math></p> | <p>Es equivalente</p>                                                                        |
| $x(x^2-9) = (x^2-3x)(x+3)$<br>①                      ③           | <p>True</p>                                   | <p>Es equivalente la ecuación.</p>                                                           |

|       | Qué introduces en la CAS                                                             | Qué muestra la CAS                                 | Mi interpretación de lo que muestra la CAS                  |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| 1 y 3 | Expand $(x(x^2-9) = (x^2-3x)(x+3))$                                                  | Muestra TRUE                                       | que las expresiones si son equivalentes                     |
| 2 y 3 | Factor $((x^2-3 \cdot x) \cdot (x+3) = (x+3) \cdot (x^2-3 \cdot x) - 3 \cdot x - 3)$ | $x \cdot (x-3) \cdot (x+3) = x^3 - 12 \cdot x - 3$ | son equivalentes y por ello nos muestra el mismo resultado. |
| 1 y 2 | Expand $(x \cdot (x^2-9) = (x+3) \cdot (x^2-3 \cdot x) - 3 \cdot x - 3)$             | $x^2-9 \cdot x = x^3-12 \cdot x-3$                 | Las expresiones no son equivalentes, como muestra la CAS.   |

| Qué introduces en la CAS                                                           | Qué muestra la CAS                        | Mi interpretación de lo que muestra la CAS                                                   |
|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x \cdot (x^2-9) \neq (x^2-3x)(x+3)$<br>$x \cdot (x^2-9) = (x+3)(x^2-3x) - 3x - 3$ | true<br>$x \cdot (x^2-9) = x^3 - 12x - 3$ | Que las ecuaciones son equivalentes<br>Que la 1 con la 2 y la 2 con la 3 no son equivalentes |

| Qué introduces en la CAS   | Qué muestra la CAS | Mi interpretación de lo que muestra la CAS      |
|----------------------------|--------------------|-------------------------------------------------|
| $x(x^2-9) = (x^2-3x)(x+3)$ | true               | significa que la uno y la tres son equivalentes |

| Qué introduces en la CAS | Qué muestra la CAS | Mi interpretación de lo que muestra la CAS |
|--------------------------|--------------------|--------------------------------------------|
| $x(x^2-9)=(x^2-3x)(x+3)$ | true               | Se ignifica que la 1-3 son equivalentes.   |

Imagen 3.1: Resultado de Guadalupe, Karla, Mayte, Liliana y Andrea

De acuerdo a lo que observamos en las imágenes, afirmamos lo siguiente de cada una de las respuestas:

Guadalupe encontró cual expresión es equivalente, pero, también se puede observar que su resultado llegó a dos expresiones no equivalentes y mencionó que esas expresiones son equivalentes solo para -1.

Por otra parte, el trabajo Karla está un poco raro, ya que combinó los dos comandos a la vez, como se observa en la tabla, la calculadora tomó las igualdades. Con el trabajo que realizó pudo concluir cuales expresiones son equivalentes y cuales no lo son.

También observamos que Mayte, Liliana y Andrea, determinan cuales expresiones son equivalentes, pero, no utilizan las demás expresiones y no concluyen nada sobre éstas.

En general, podemos concluir que el trabajo de las 5 es correcto.

Para la parte B se les pregunto lo siguiente:

(B) ¿Cuáles, de las expresiones anteriores, son equivalentes? ¿Cuáles no son equivalentes? Por favor, explica.

A continuación se muestra la respuesta de Karla:

La 1 y la 3 son las expresiones equivalentes, la 2 y 3 y la 2 y 3 no son equivalentes segun nos muestra la CAS.

Imagen 3.2: Resultado de Karla

De acuerdo al resultado de la tabla anterior pudo contestar correctamente, en general todas las alumnas contestaron de manera similar, solamente podemos mencionar que tanto Guadalupe como Mayte mencionaron que las expresiones 2 y 3 son equivalentes solo para el valor de -1.

En la parte C de esta actividad se les pido lo siguiente:

(C) Construye una ecuación, usando un par de las expresiones dadas que no son equivalentes (observa Parte II B, anterior). Usa tu calculadora para determinar esos valores de  $x$ , si hay algunos para los que ambas expresiones, escritas como ecuación, son iguales.

A continuación se muestra un ejemplo de lo realizado, donde sólo Guadalupe y Mayte pudieron construir la ecuación que se les pedía.

| Qué introduces en la CAS                                                                         | Qué muestra la CAS |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| $\text{solve}((x+3) \cdot (x^2 - 3 \cdot x) - 3 \cdot x - 3 = (x^2 - 3 \cdot x) \cdot (x+3), x)$ | $x = -1$           |

Imagen 3.3: Resultado de Mayte

Karla, Andrea y Liliana no pudieron construir la ecuación, tal vez únicamente no comprendieron la pregunta, ya que su trabajo anterior está bien realizado.

(D) ¿Cómo usarías la CAS para verificar que los valores encontrados para  $x$  (en la Pregunta C, anterior) son soluciones de tu ecuación? Completa la tabla de abajo con la información apropiada.

| Qué introducirías en la CAS                              | El resultado que mostraría la CAS |
|----------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| $(x+3)(x^2 - 3x) - 3x - 3 = (x^2 - 3x)(x+3)$<br>$x = -1$ | $\text{true} = \text{verdadero}$  |

Imagen 3.4: Resultado de Mayte

Nuevamente Guadalupe y Mayte contestaron de manera correcta, Karla, Andrea y Liliana no pudieron contestar, ya que iba relacionada con la pregunta anterior.

- (E) Construye una ecuación, usando otro par de expresiones dadas que **no son equivalentes** (observa la Pregunta B. anterior). Sin usar la CAS y sin usar álgebra en papel y lápiz, encuentra la solución de esta ecuación. Por favor, explica.

Para esta pregunta ninguna alumna pudo construir la ecuación que se les pedía.

Mostraremos las respuestas de Guadalupe y de Liliana:

Todos las demas ecuaciones son equivalentes.

$$x(x^2-9)=(x+3)(x^2-3x)-3x-3$$

po esta ecuacion no es equivalente solo si se intercambian algunos valores de  $x$  pues si se podria.

esta mal porque no es equivalente

Imagen 3.5: Resultado de Guadalupe y Liliana

En el trabajo de Guadalupe mencionó: “no existen ya expresiones equivalentes” y utilizó nuevamente el par de expresiones que tomó para el inciso C. Por otra parte Liliana menciona que está mal la pregunta, tal vez no ha comprendido del todo como formar una ecuación.

- (F) Construye una ecuación, usando un par de las expresiones dadas que **son equivalentes** (observa la Parte II B anterior). Sin usar la CAS ni álgebra en papel y lápiz, encuentra la solución (es) de esta ecuación. Por favor, explica.

Para esta pregunta, únicamente la alumna Mayte pudo responder correctamente, mencionando lo siguiente:

$$x(x^2-9)=(x^2-3x)(x+3)$$

eso quiere decir que con cualquier valor lo van hacer

### Imagen 3.6: Resultado de Mayte

De acuerdo a lo que concluimos dentro de estos incisos, solamente una alumna pudo contestar la mayoría correctamente, establecer ecuaciones con expresiones equivalentes y no equivalentes, fue algo complicado para las demás.

Después de esta pregunta, se realizó la primera discusión la cual involucró las partes I y II, dentro de ésta se pudieron rescatar los siguientes diálogos, donde se puede observar las preguntas de la profesora y las respuestas de Mayte y Karla en este caso.

Nota: Para esta discusión, los equipos estuvieron conformados por dos parejas (equipos de 4)

Simbología: DM. = Dulce Mayte; Profesora = Profa.

|        |                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Profa. | <p>Del trabajo que realizaron había tres expresiones ¿Cuáles expresiones son Equivalentes?</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>x(x^2 - 9)</math></li> <li>2. <math>(x+3)(x^2-3x) - 3x - 3</math></li> <li>3. <math>(x^2 - 3x)(x+3)</math></li> </ol> |
| DM.    | La expresión 1 y 3. (Ver Imagen 3.1 )                                                                                                                                                                                                                                |
| Profa. | ¿Solamente esas expresiones son equivalentes?                                                                                                                                                                                                                        |
| DM.    | Si solamente esas expresiones son equivalentes. (Ver Imagen 3.1)                                                                                                                                                                                                     |
| Profa. | Para la pregunta F les menciona que comparen dos expresiones equivalentes ¿Cuáles tomaron? ¿Y qué fue lo que hicieron?                                                                                                                                               |
| DM.    | Tomamos la expresión 1 y 3 , solamente les pusimos el signo “=” y nos dio que era verdadero y por lo tanto son equivalentes.                                                                                                                                         |

|        |                                                                                                                                    |
|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Profa. | Ya sabemos entonces que esas expresiones son equivalentes, ¿Tendrán alguna restricción estas expresiones?                          |
| DM.    | No tienen restricción, porque no están dividiendo las expresiones, para todos los valores van hacer equivalentes. (Ver Imagen 3.6) |

Simbología: KG. = Karla Guadalupe; Profesora = Profa.

### Nombre

### Discusión

|        |                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Profa. | <p>Del trabajo que realizaron había tres expresiones ¿Cuáles expresiones son Equivalentes?</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>x(x^2 - 9)</math></li> <li>2. <math>(x+3)(x^2-3x) - 3x - 3</math></li> <li>3. <math>(x^2 - 3x)(x+3)</math></li> </ol> |
| KG.    | La expresión 1 y 3. (Ver Imagen 3.1 )                                                                                                                                                                                                                                |
| Profa. | ¿Solamente esas expresiones son equivalentes?                                                                                                                                                                                                                        |
| KG.    | Si solamente esas expresiones son equivalentes. (Ver Imagen 3.1)                                                                                                                                                                                                     |

Después de esta discusión, la profesora despejó algunas dudas que se mostraron de los estudiantes, quedando así, un poco más claro el cómo formar ecuaciones y ver cuando son equivalentes y cuando no lo son.

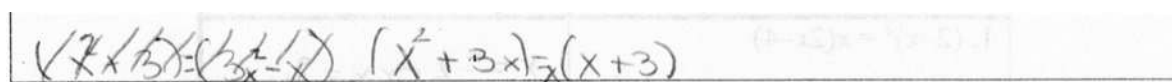
Dentro de la parte III, se formuló una serie de preguntas las cuales se contestaron a papel y lápiz. Se muestran a continuación las respuestas de varias alumnas.

Parte III (papel y lápiz): Construcción de ecuaciones e identidades

(A) 1. Construye una ecuación formada por dos expresiones equivalentes de tu propia elección.



$$(x-3) \cdot (x+3) = x^2 - 9$$

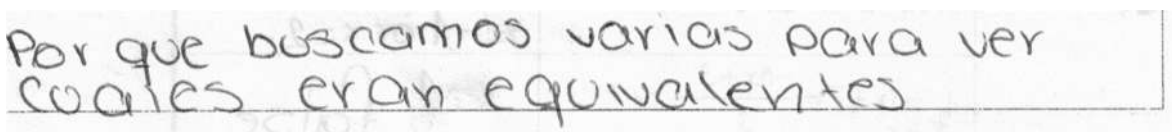


$$(x^2 + 3x) = x(x+3)$$

Imagen 3.6: Resultado de Mayte y Andrea

En esta pregunta, Liliana fue la única que no pudo construir la ecuación que se les pidió. Como vemos las respuestas de Mayte y Andrea son correctas, similares a las que dieron Guadalupe y Karla.

2. Explica tus razones de porqué elegiste esas dos expresiones en particular



Por que buscamos varias para ver  
cuales eran equivalentes



Porque fueron las primeras que se me ocurrieron

Imagen 3.7: Resultado de Mayte y Andrea

En general las respuestas a esta pregunta fueron similares a las de Mayte y Andrea, si observamos, la primera respuesta menciona que buscaron varias expresiones

hasta llegar a un par, llegando a esto haciendo pasos algebraicos, pero no los muestran. Por otra parte Andrea no menciona ninguna razón algebraica.

3. ¿Qué puedes decir en torno a las soluciones de esta ecuación?

Que con cualquier valor de  $x$  siempre va a dar el mismo

Que son muy similares

Imagen 3.8: Resultado de Mayte y Andrea

Nuevamente podemos observar que la respuesta de Mayte es correcta, respondiendo de forma clara, por otro lado Andrea no menciona nada que responda la pregunta en cuestión.

4. ¿Cómo usarías la CAS para apoyar tu respuesta a la Pregunta A3 anterior?

$$(x-3)(x+3) = x^2 - 9 \quad | = x - 1$$

Pues solo la introduces y compare resultado

Imagen 3.9: Resultado de Mayte y Andrea

Podemos ver que para esta pregunta las respuestas son muy similares ya que las dos mencionan en introducir valores para comprobar lo dicho en la pregunta 3, de

hecho ninguna alumna pudo mencionar que se utiliza el comando SOLVE con que se ha estado trabajando.

Notamos en esta parte A, que hubo una mejoría respecto al trabajo anterior, en cuanto a la construcción de ecuaciones, pero, aún existen dudas de cómo encontrar las soluciones de dichas ecuaciones.

La parte B de esta actividad consistió nuevamente en 4 preguntas, las cuales se muestran a continuación:

**(B) 1.** Construye una ecuación formada por dos expresiones no equivalentes de tu propia elección

$$x^2(x+4)+2x = x^3-6x \qquad 2x(x^2-6)+8x=5x+1$$

$$(x+2)(x+1) \cdot (x-3)(x+8)-3x-3$$

$$(4x-5)(5x-4)$$

Imagen 3.9: Resultado de Guadalupe, Karla y Andrea

Mostramos los resultados de Guadalupe, Karla y Andrea como podemos observar las tres alumnas pudieron construir la ecuación requerida. Solamente Liliana no pudo contestar de manera correcta esta actividad.

2. Explica tus razones de porqué elegiste esas dos expresiones en particular.

Fueron las dos primeras que se nos ocurrieron

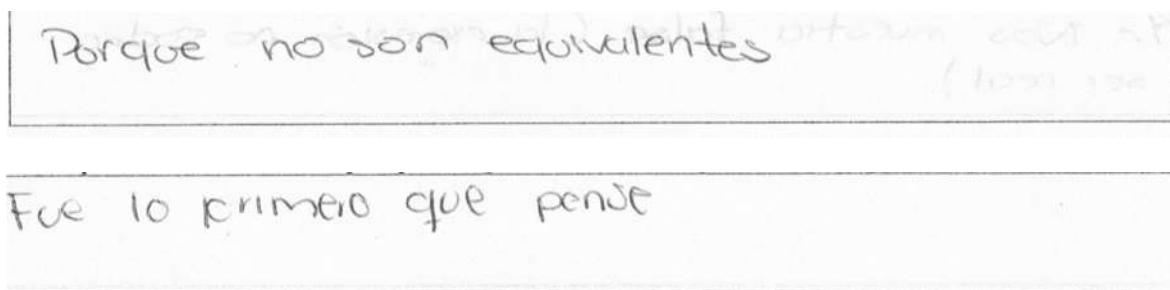
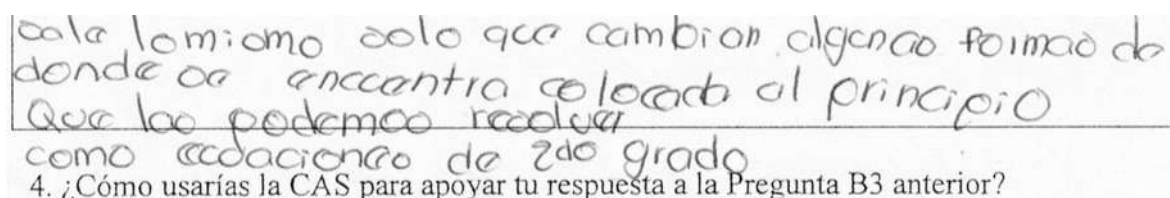


Imagen 3.10: Resultado de Guadalupe, Karla y Andrea

Para esta pregunta, todas las alumnas dieron razones muy superficiales, ninguna dio alguna razón algebraica.

3. ¿Qué puedes decir en torno a las soluciones de esta ecuación?



4. ¿Cómo usarías la CAS para apoyar tu respuesta a la Pregunta B3 anterior?

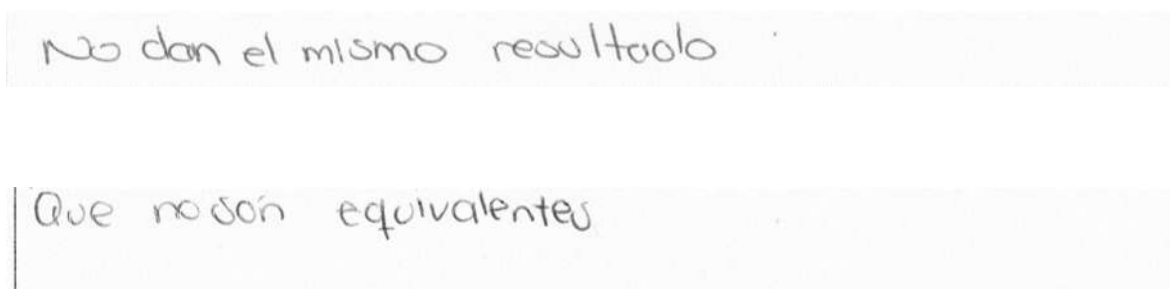


Imagen 3.11: Resultado de Guadalupe, Karla y Andrea

De igual manera, para esta pregunta sus respuestas fueron muy superficiales, ya que de nuevo ninguna pudo demostrar que solo existen algunos valores o soluciones o ninguna solución.

4. ¿Cómo usarías la CAS para apoyar tu respuesta a la Pregunta B3 anterior?

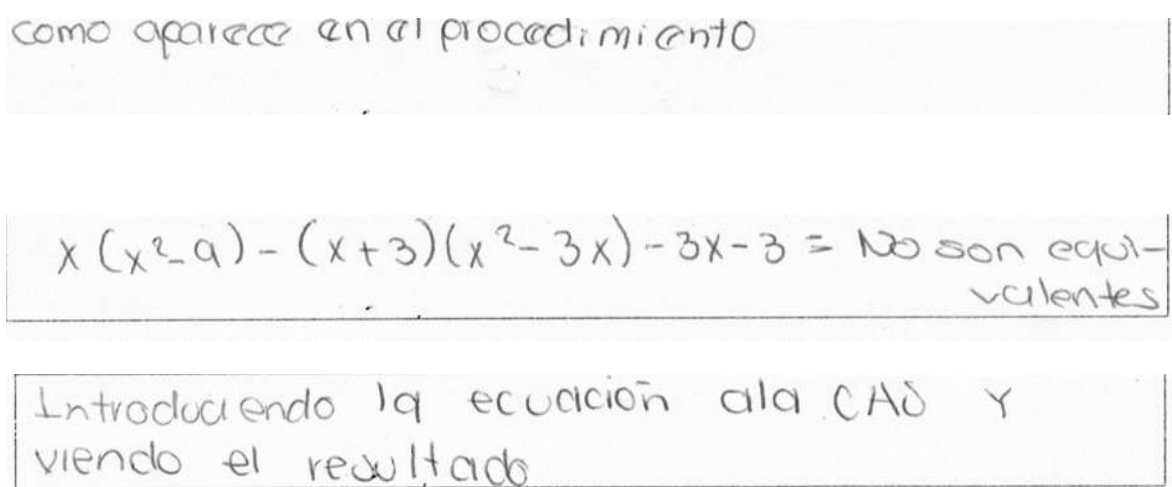


Imagen 3.12: Resultado de Guadalupe, Karla y Andrea

Como podemos observar, ninguna podría contestar esta pregunta de acuerdo a lo que respondió en la pregunta número 3, sin embargo, Guadalupe menciona que puedes encontrar las soluciones de esta ecuación como en el procedimiento que está en sus hojas lo cual es correcto. Tanto la respuesta de Karla y Andrea nos muestra la manera de como saber que las expresiones no son equivalentes, pero no, de cómo encontrar las soluciones.

En general como en las 4 preguntas anteriores, podemos observar que hubo una gran mejoría en cuanto a saber cómo formar una ecuación equivalente y no equivalente. Pero aún existe la confusión de cómo encontrar o mostrar los valores de esas ecuaciones usando el comando SOLVE, o en su caso, poder especificar qué significado tiene la palabra TRUE o FALSE.

Una vez terminada esta actividad se pasó a la segunda discusión de la parte III A y B, dentro de la cual se extrajeron los siguientes diálogos de las videograbaciones.

Nota: Para esta discusión, los equipos estuvieron conformados por dos parejas (equipos de 4)

Simbología: GF. = Guadalupe Fraga Mateo; Profesora = Profa.

| Nombre | Discusión                                                |
|--------|----------------------------------------------------------|
| Profa. | ¿Qué par de expresiones tomaron para formar la ecuación? |

|        |                                                                                                                                                                       |
|--------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| GF.    | Nosotros pusimos la siguiente ecuación $x(x^2 - 8) + 3x = x^3 - 5x$ .                                                                                                 |
| Profa. | Esas son las equivalentes, entonces, ¿Cómo demostrarías que son equivalentes? usando las CAS                                                                          |
| GF.    | Con FACTOR y EXPAND podemos ver que son equivalentes.                                                                                                                 |
| Profa. | Ok, y ¿cuáles expresiones tomaste como no equivalentes?                                                                                                               |
| GF.    | Nosotros pusimos la siguiente ecuación $x^2(x + 4) + 2x = x^3 - 6x$ .<br>(Ver Imagen 3.9)                                                                             |
| Profa. | Esas son las no equivalentes, entonces, ¿Cómo demostrarías que no son equivalentes? usando las CAS                                                                    |
| GF.    | Poniéndolo en la CAS igual que como lo escribimos, nos da la misma expresión pero con algunos factores cambiados, por eso no son equivalentes para todos los valores. |

Simbología: KG. = Karla Guadalupe; Profesora = Profa.

|        |                                                                                                        |
|--------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Profa. | Ok, y ¿cuáles expresiones tomaste como no equivalentes?                                                |
| KG.    | Nosotros pusimos la siguiente ecuación<br>$(x + 2)(x + 1)(x - 5)(x + 8) - 3x - 3.$<br>(Ver Imagen 3.9) |
| Profa. | Esas son las no equivalentes, entonces, ¿Cómo demostrarías que no son equivalentes? usando las CAS     |
| KG.    | Lo pongo en la CAS y no da el mismo resultado.                                                         |

Podemos darnos cuenta, de que tanto Guadalupe como Karla, saben cómo formar una ecuación no equivalente y explicar por qué esas expresiones no son equivalente.

Reafirmamos entonces, que en la parte A y B de esta actividad, las ideas de expresiones de equivalencia y no equivalente les quedan claras a las 5 alumnas. En lo que aún hubo problema fue en cómo utilizar el comando SOLVE para encontrar las soluciones de las ecuaciones que formaban.

Una vez terminada la discusión, la profesora explicó a todos los alumnos como se utiliza el comando SOLVE y para que nos sirve, además de agregar la terminología de identidad, mencionándoles que una ecuación formada por dos expresiones equivalentes, comúnmente se le conoce como identidad (ésto es los dos lados, tanto izquierdo como derecho son idénticamente iguales).

Para la parte IV y última de esta actividad constó de dos preguntas, en la primera se les pidió que llenaran una tabla de acuerdo a la siguiente información:

1. Resuelve las siguientes ecuaciones, usando el comando SOLVE de la CAS.

Se mostrara los resultados de Liliana

| Ecuación dada                            | Qué muestra la CAS        |
|------------------------------------------|---------------------------|
| 1. $(2-x)^2 = x(2x-4)$                   | $x = -2 \text{ o } x = 2$ |
| 2. $(x-5)(3x+7) - 5 = 3x^2 - 8x - 40$    | true                      |
| 3. $3x^2 - x - 1 = 2x + 5$               | $x = -1 \text{ o } x = 2$ |
| 4. $-3x + 7 = \frac{-6x + 3}{3} - x + 7$ | False                     |

Imagen 3.13: Resultado de Liliana

Para esta parte prácticamente todas las alumnas supieron cómo utilizar el comando SOLVE, para encontrar las soluciones de las ecuaciones como lo muestra la tabla.

2. ¿Cómo interpretas cada expresión mostrada en la pantalla de la CAS, al responder la Pregunta 1 anterior?

En esta pregunta se mostrarán los resultados de Liliana, Guadalupe y Karla

- que en la 1 solo es equivalente con -2 y 2
- y la dos es verdadera que es equivalente
- solo puede ser equivalente con valores de -1 y 2
- no esta correcta y no es equivalente

- ① Es equivalente solo para  $x = -2$  o  $x = 2$
- ② Es para algunos valores. equivalen to para todas
- ③ Es equivalente solo para  $x = -1$  o  $x = 2$
- ④ En esta ocasion no es equivalente para ningun valor.

1. Pues en la primera expresion nos muestra dos posibles resultados ya sea -2 o +2.
2. En la segunda la CAS nos muestra que la expresion es real o verdadera, por ello sale TRUE.
3. En la 3ª al igual que en la 1ª expresion (nos) salen dos posibles resultados que serian  $x = -1$  o  $x = 2$ .
4. Nos muestra false (la expresion no podria ser real).

Imagen 3.14: Resultado de Liliana, Guadalupe y Karla

No perdemos de vista que para el cierre de esta actividad tanto Liliana como Guadalupe, expresan de manera correcta que es lo que significa cada resultado que muestra la CAS. Por otra parte, a Karla le faltó dar el verdadero significado de las

expresiones, prácticamente fue la única que no definió bien el significado, ya que tanto Andrea y Mayte dieron respuestas similares a Liliana y Guadalupe.

Después de esta actividad se pasó a la última discusión, dentro de la cual se muestran los diálogos obtenidos de las videograbaciones.

Nota: Para esta discusión, los equipos estuvieron conformados por dos parejas (equipos de 4)

Simbología: GF. = Guadalupe Fraga Mateo; Profesora = Profa.

**Nombre                  Discusión**

|        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Profa. | ¿Cuáles fueron los resultados obtenidos en las ecuaciones dadas?                                                                                                                                                                                                                                                    |
| GF.    | Para la primera nos salió $x = -2$ o $x = 2$ , para la segunda <i>TRUE</i> , para la tercera $x = -1$ o $x = 2$ , y en la última nos salió <i>FALSE</i><br><br>(Ver Imagen 3.13)                                                                                                                                    |
| Profa. | ¿Cómo interpretan los resultados obtenidos de la ecuación dada?                                                                                                                                                                                                                                                     |
| GF.    | Para la primera ecuación quiere decir que solo para esos dos valores es equivalente, para el segundo resultado que la ecuación es equivalente para todos los valores, para la siguiente que también solo es equivalente en esos dos valores, y la última que no es equivalente para ningún valor. (Ver Imagen 3.14) |

La participación de Guadalupe demuestra la comprensión del tema, tanto la parte de encontrar soluciones como en dar respuesta al significado de dichas soluciones. Lo que nos señala que tuvo una mejora muy grande respecto a la actividad anterior de esta parte IV.

De hecho todas las alumnas mostraron una mejoría notable en esta parte final de la prueba, ya que percibimos que la mayoría muestra respuestas similares, exclusivamente Karla fue la que tuvo un error en la parte de interpretar las soluciones.

## Actividad 4: Sistemas de ecuaciones

El propósito de esta actividad es desarrollar en los estudiantes la comprensión de los métodos algebraicos de sustitución e igualación, utilizados para resolver sistemas de ecuaciones.

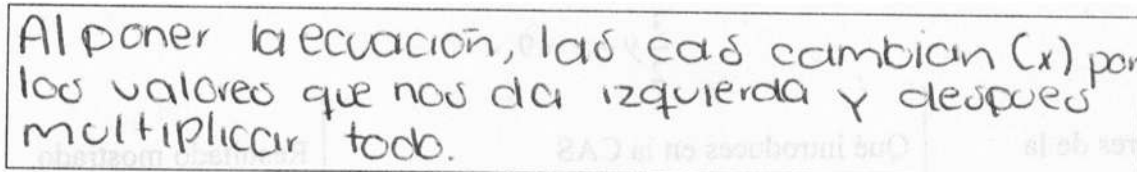
En el proceso de esta actividad se exhibieron 5 discusiones, la actividad 4 fue la más larga e incluso enervada para los estudiantes. La parte A consistió en 3 preguntas, las cuales abordamos a continuación junto con los resultados de algunas alumnas.

### (A) Ecuaciones de primer grado con una incógnita

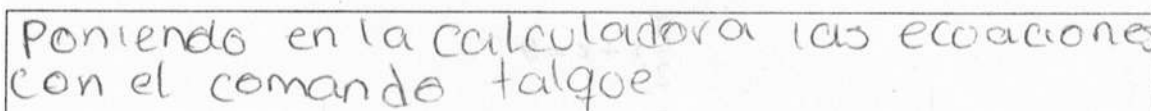
1. La tabla siguiente contiene una ecuación y algunos valores numéricos:

*Sin resolver* esta ecuación, determina si los valores de la columna de la izquierda son soluciones de la ecuación (usando la CAS). Pero antes de usar la CAS, describe, en el rectángulo de abajo, cómo propones usar la CAS para determinar esto, y di qué información te dará la calculadora.

Mostramos a continuación las respuestas de Andrea y Mayte



Al poner la ecuación, las cas cambian (x) por los valores que nos da izquierda y despues multiplicar todo.



Poniendo en la calculadora las ecuaciones con el comando tal que

Imagen 4: Resultado de Andrea y Mayte

Existieron dos vertientes dentro de esta pregunta, la primera como es el caso de Andrea la cual menciona que puede sustituir los valores directamente. Y por otro lado Mayte quien menciona que utilizaría el comando “tal que”.

Las respuestas de las demás alumnas fueron similares a estas dos, cualquiera de estas vertientes es correcta.

Para la pregunta número 2 se les solicitó llenar una tabla en la cual se les muestra una expresión y algunos valores de  $x$ .

2. Ahora el trabajo con la calculadora (pero no resuelvas, por favor). Completa la tabla de abajo con la información apropiada.

$$12x + 15 = 4(x - 2) + 7$$

| Valores de $x$ | Qué introduces en la CAS      | Resultado mostrado por la CAS |
|----------------|-------------------------------|-------------------------------|
| $x = -2$       | $12(-2) + 15 = 4(-2 - 2) + 7$ | TRUE                          |
| $x = 2$        | $12(2) + 15 = 4(2 - 2) + 7$   | FALCE                         |
| $x = -5$       | $12(-5) + 15 = 4(-5 - 2) + 7$ | FALCE                         |

| Valores de $x$ | Qué introduces en la CAS              | Resultado mostrado por la CAS |
|----------------|---------------------------------------|-------------------------------|
| $x = -2$       | $12x + 15 = 4(x - 2) + 7 \mid x = -2$ | true                          |
| $x = 2$        | $12x + 15 = 4(x - 2) + 7 \mid x = 2$  | false                         |
| $x = -5$       | $12x + 15 = 4(x - 2) + 7 \mid x = -5$ | false                         |

Imagen 4.1: Resultado de Andrea y Mayte

Observamos que los resultados de Andrea y Mayte coinciden con su primera respuesta, Andrea quien se inclinó en sustituir el valor de "x" en donde ésta apareciera, y por otro lado Mayte quien decidió utilizar el comando "tal que" con el que puedes evaluar los valores de "x". Pero podemos mencionar que para esta parte las 5 alumnas estuvieron en lo correcto ya que las restantes siguieron un camino similar al de los resultados mostrados.

3. Pregunta adicional: ¿puedes encontrar otras soluciones de esta ecuación? Por favor, explica.

Para esta pregunta se mostraran los resultados de las 5 alumnas:

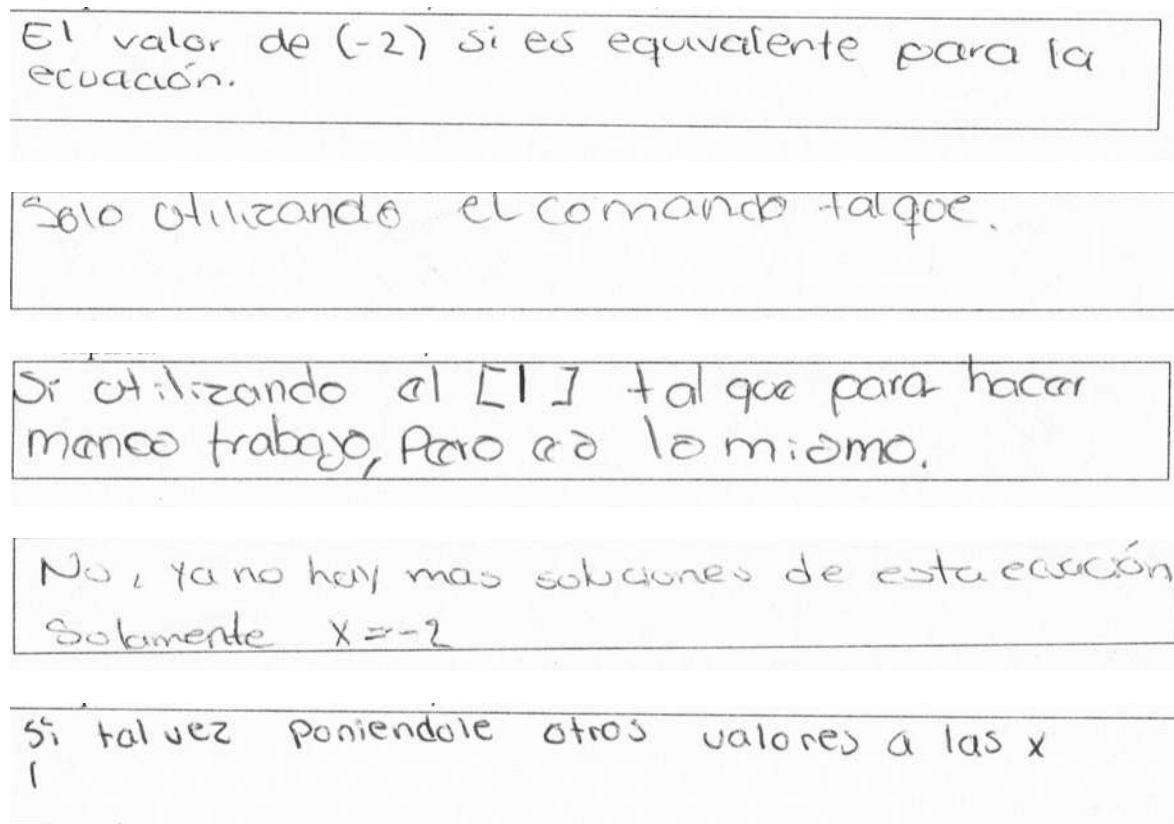


Imagen 4.1: Resultado de Andrea, Mayte, Guadalupe, Karla y Liliana

Al inicio de esta actividad, las 5 alumnas supieron como sustituir valores en la ecuación dada, pero cuando se les cuestiona por las soluciones, todas tuvieron problemas, solamente Karla menciona que no existen más soluciones, pero sin explicar el porqué.

La razón de incluir todas las respuestas en este segmento, es demostrar que hubo mucha mejoría en sus técnicas dentro de esta actividad.

La parte B, ahora tiene que ver con ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. La pregunta número uno consiste en lo siguiente:

(B) Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

1. La tabla siguiente contiene una nueva ecuación y algunos valores numéricos:

*Sin resolver* esta ecuación, pero de nuevo usando la CAS, determina si cada par de valores de la columna de la izquierda es solución. Pero antes de usar la CAS, describe, en el rectángulo de abajo, cómo propones usar la CAS para determinar esto, y di qué información te dará la calculadora.

En las repuestas siguientes las cuales son de Andrea y Guadalupe respectivamente, vemos que utilizaron técnicas parecidas al trabajo anterior.

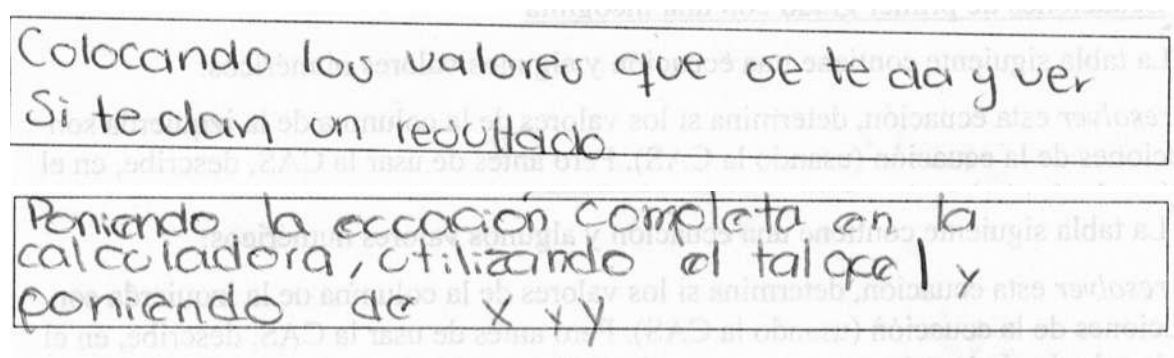


Imagen 4.2: Resultado de Andrea y Guadalupe

Se observara que hubo un poco más de dudas al trabajar con una ecuación con dos incógnitas. La pregunta número dos consiste en lo siguiente:

2. Ahora el trabajo con la calculadora (pero sin resolver, por favor). Completa la tabla de abajo con la información apropiada.

$$\frac{3}{2}y - x = 9$$

Nuevamente se les pidió a los estudiantes que llenaran una tabla, pero esta vez con una ecuación con dos incógnitas, las respuestas de Andrea, Guadalupe y Mayte fueron los caminos que siguieron las 5 alumnas.

| Valores de la pareja $x$ y $y$ | Qué introduces en la CAS  | Resultado mostrado por la CAS |
|--------------------------------|---------------------------|-------------------------------|
| $x=3$ y $y=12$                 | $\frac{3}{2}(12)-(3)=9$   | FALCE.                        |
| $x=-3$ y $y=4$                 | $\frac{3}{2}(4)-(-3)=9$   | TRUE.                         |
| $x=-18$ y $y=-6$               | $\frac{3}{2}(-6)-(-18)=9$ | TRUE.                         |

| Valores de la pareja $x$ y $y$ | Qué introduces en la CAS                                              | Resultado mostrado por la CAS           |
|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| $x=3$ y $y=12$                 | $\frac{3}{2}x - x = 9 \mid x=3$<br>$\frac{3}{2}y - x = 9 \mid y=12$   | $\frac{3y}{2} - 3 = 9$<br>$18 - x = 9$  |
| $x=-3$ y $y=4$                 | $\frac{3}{2}x - x = 9 \mid x=-3$<br>$\frac{3}{2}y - x = 9 \mid y=4$   | $\frac{3y}{2} + 3 = 9$<br>$6 - x = 9$   |
| $x=-18$ y $y=-6$               | $\frac{3}{2}y - x = 9 \mid x=-18$<br>$\frac{3}{2}x - x = 9 \mid y=-6$ | $\frac{3y}{2} + 18 = 9$<br>$-x - 9 = 9$ |

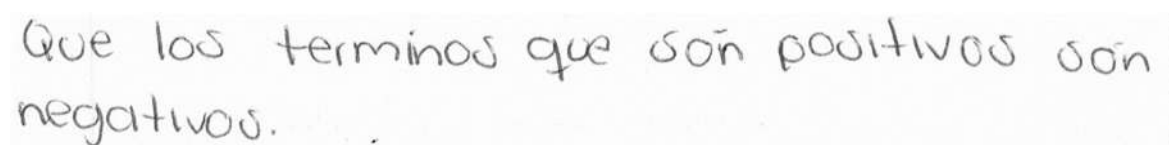
| Valores de la pareja $x$ y $y$ | Qué introduces en la CAS                                                                                 | Resultado mostrado por la CAS |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| $x=3$ y $y=12$                 | $\frac{3}{2}y - x = 9 \mid x=3$<br>$\frac{3 \cdot y}{2} - 3 = 9 \mid y=12$                               | false                         |
| $x=-3$ y $y=4$                 | $\frac{3}{2}y - x = 9 \mid x=-3$ $\frac{3 \cdot y}{2} + 3 = 9$<br>$\frac{3 \cdot y}{2} + 3 = 9 \mid y=4$ | true                          |
| $x=-18$ y $y=-6$               | $\frac{3}{2}y - x = 9 \mid x=-18$<br>$\frac{3 \cdot y}{2} + 18 = 9 \mid y=-6$                            | true                          |

Imagen 4.3: Resultado de Andrea, Guadalupe y Mayte

Para esta parte solamente Guadalupe se equivocó, ya que se quería utilizar el comando “tal que” cuando debió utilizar el procedimiento que muestra Mayte. Podemos observar que de nuevo todas, en general mostraron dominio sobre este apartado.

Donde se volvió a presentar problema, fue en el análisis de las soluciones de esta ecuación como se muestra a continuación.

3. Pregunta adicional: ¿puedes encontrar otras soluciones de esta ecuación? Por favor, explica.



Que los terminos que son positivos son negativos.



Solo utilizando el comando tal que

Imagen 4.4: Resultado de Andrea y Mayte

Vemos nuevamente que se presentaron problemas para poder definir qué soluciones tiene la ecuación. Andrea concluyó que todos los valores positivos darán resultados y Mayte quien cree que si existen soluciones, pero no da la razón del porque puede existir. Casos similares existieron en las respuestas de las demás alumnas.

Ahora en el apartado C se trabajó con un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. La primera pregunta consistió en lo siguiente:

1. La tabla siguiente contiene un sistema de ecuaciones y algunas parejas ordenadas de números.

*Sin resolver* este sistema de ecuaciones, determina si cada par de valores de la columna de la izquierda es solución (usando la CAS). Pero antes de usar la CAS, describe, en el rectángulo de abajo, cómo propones usar la CAS para determinar esto, y di qué información te dará la calculadora.

Mostraremos las respuestas de Liliana y Guadalupe:

Sustituyendo los valores como en las anteriores  
Y puede dar verdadero o falso o algún otro  
valor

Introduciendo toda la ecuación y utili-  
zando el tal que.

Imagen 4.5: Resultado de Liliana y Guadalupe

Para este procedimiento, no hubo cambios respecto al trabajo previo que mostraron las alumnas. Podemos observar que siguieron la misma línea de desarrollo, por un lado sustituir los valores directamente, y por el otro utilizar el comando “tal que”. Ésto lo podremos observar de manera más clara en la siguiente tabla:

- Ahora el trabajo con la calculadora (pero no resuelvas). Por favor, escribe, en la tabla de abajo, qué introduces en la calculadora, así como aquello que la calculadora muestra como resultado.

$$2x = 8 - 4y$$

$$17x - 31y = 3$$

| Valores de la pareja $x$ y $y$ | Qué introduces en la CAS                              | Resultado mostrado por la CAS |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------|
| $x = 0$ y $y = 2$              | $0 = 8 - 4y \mid y = 2$<br>$-3 \mid y = 3 \mid y = 2$ | true<br>False                 |
| $x = 4$ y $y = 3$              | $8 = 8 - 4y \mid y = 3$<br>$68 - 31y = 3 \mid y = 3$  | False<br>False                |
| $x = 2$ y $y = 1$              | $4 = 8 - 4y \mid y = 1$<br>$34 - 31y = 3 \mid y = 1$  | true<br>true                  |

| Valores de la pareja $x$ y $y$ | Qué introduces en la CAS                                                                           | Resultado mostrado por la CAS                        |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| $x=0$ y $y=2$                  | $2x=8-4y \mid x=0$<br>$2x=8-4y \mid y=2$<br>$17x-3 \mid x=3 \mid x=0$<br>$17x-3 \mid y=3 \mid y=2$ | $0=8-4y$<br>$2x=0$<br>$-3 \mid y=3$<br>$17x-62=3$    |
| $x=4$ y $y=3$                  | $2x=8-4y \mid x=4$<br>$2x=8-4y \mid y=3$<br>$17x-3 \mid y=3 \mid x=4$<br>$17x-3 \mid y=3 \mid y=3$ | $8=8-4y$<br>$2x=-4$<br>$68-3 \mid y=3$<br>$17x-93=3$ |
| $x=2$ y $y=1$                  | $2x=8-4y \mid x=2$<br>$2x=8-4y \mid y=1$<br>$17x-3 \mid y=3 \mid x=2$<br>$17x-3 \mid y=3 \mid y=1$ | $1=8-4y$<br>$2x=4$<br>$34-3 \mid y=3$<br>$17x-31=3$  |

Imagen 4.6: Resultado de Liliana y Guadalupe

Como ya habíamos mencionado, las alumnas siguieron el mismo camino, Liliana quien sustituyo el primer valor directamente y luego utilizó el comando “tal que”. Guadalupe quien podemos observar siguió el mismo camino que en su tabla anterior, no supo utilizar el comando “tal que”.

Acabando con esta parte, otra vez solo Guadalupe tuvo problemas para mostrar cuales valores eran soluciones.

Para la última pregunta de manera repetida ninguna estudiante pudo contestar de manera correcta, se mostraran los resultados de Liliana, Karla y Guadalupe:

- Pregunta adicional: ¿puedes encontrar otras soluciones de este sistema de ecuaciones? Por favor, explica.

Puede que si dependiendo del metodo que ocupemos

Si porque nos salio True para dos valores.

Si con utilizar el talque.  
solo sustituyendo los valores  
indicados ahí.

Imagen 4.7: Resultado de Liliana, Karla y Guadalupe

Como pudimos observar durante el trabajo con este tipo de ecuaciones, 4 de las 5 alumnas pudieron sustituir los valores dados en cada una de las ecuaciones mostradas, pero, no están relacionadas con el significado de estas, ya que en este último sistema todas mencionan que puede haber más soluciones.

Para la última pregunta de esta parte se les preguntó si existían dudas en los procesos anteriores, a lo cual se respondió de la siguiente manera:

4. ¿Hay algunas preguntas o ideas que se te hayan ocurrido, mientras trabajabas con esos tres tipos de ecuaciones?

Si solo preguntas de acuerdo a los  
ejercicios.

Si, cambiarle los valores de  $x$  y  $y$  pero  
lo hice y sale false.

Imagen 4.8: Resultado de Mayte y Karla

Observando las respuestas, Mayte comenta que si hubo dudas dentro de los ejercicios pero no comenta cuales fueron. Por otro lado Karla menciona que existieron dudas en cómo utilizar la CAS para cambiar los valores. Liliana, Andrea y Guadalupe mencionaron que no tuvieron dudas.

Después de esta pregunta se pasó a la discusión dentro de clase, de donde podemos rescatar el siguiente dialogo:

Nota: Para esta discusión, los equipos estuvieron conformados por dos parejas (equipos de 4)

Simbología: AM. = Andrea Méndez; Profesora = Profa.

|        |                                                                                                                                                                                                          |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Profa. | ¿Cómo le hicieron para verificar que esos valores que les dieron en la primera tabla para la ecuación dada eran solución?                                                                                |
| AM.    | Usamos el operador “tal que” para ver si era solución. (Ver Imagen 4.1 )                                                                                                                                 |
| Profa. | ¿Cuáles de esos valores te dio que eran solución?                                                                                                                                                        |
| AM.    | La primera nos dio que era verdadera, la segunda falsa y la tercera también nos dio falsa. (Ver Imagen 4.1)                                                                                              |
| Profa. | Ahora para la segunda parte tenemos un sistema de ecuaciones en función de dos variables “x” y “y” ¿Cómo le hicieron para verificar que esos valores que les dieron para la ecuación dada eran solución? |
| AM.    | Usamos el operador “tal que” para ver si era solución. (Ver Imagen 4.6)                                                                                                                                  |

|        |                                                                                                                                                                                                          |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Profa. | ¿Cuáles de esos valores te dio que eran solución?                                                                                                                                                        |
| AM.    | Cuando en una ecuación nos daba TRUE Y FALSE, era porque no eran compatibles esas ecuaciones, así que la única que nos dios en las dos TRUE fue para los valores de $x = 2$ y $y = 1$ . (Ver Imagen 4.6) |

Dentro de este dialogo prestamos atención en la parte donde las compañeras de Andrea la hicieron cambiar de opinión, porque menciona que en la elaboración de su trabajo utilizaron el comando “tal que”, cuando no lo hicieron. También se puede ver reflejada la interpretación del TRUE Y FALSE dentro de las soluciones, lo cual lo explica de manera correcta.

Después de la discusión, la profesora dio solución a cada una de las ecuaciones junto con el grupo, despejando las dudas de los alumnos respecto a estas ecuaciones y sus soluciones, cabe mencionar que para el sistema de ecuaciones solo mencionó que puede haber una única solución y ésta se puede resolver por los métodos de sustitución, igualación o suma y resta, lo cual podemos ver dentro de las siguientes hojas de trabajo:

Respuesta de Mayte:

[Para tomar nota durante la discusión con todo el grupo]

Sección A, ecuación:  $12x + 15 = 4(x - 2) + 7$

$$12x + 15 = 4(x - 2) + 7$$

$$12x + 15 = 4x - 8 + 7$$

$$12x - 4x = 8 + 7 - 15$$

$$8x = -16$$

$$x = \frac{-16}{8} \quad x = -2$$

|                         |                        |          |
|-------------------------|------------------------|----------|
| Sección B, ecuación:    | $\frac{3}{2}y - x = 9$ | $2 = 4y$ |
| $-x = 9 - \frac{3}{2}y$ | $2 = 4y$               | $2 = 4y$ |
| $x = -9 + \frac{3}{2}y$ | $2 = 4y$               | $2 = 4y$ |
| $\frac{3}{2}y = 9 + x$  | $2 = 4y$               | $2 = 4y$ |
| $3y = 2(9 + x)$         | $2 = 4y$               | $2 = 4y$ |
| $y = 2(9 + x)$          | $2 = 4y$               | $2 = 4y$ |

Imagen 4.9: Resultado de Mayte

Para la parte II en la cual se trabajó con el comando SOLVE visto en la actividad número 3, nuevamente se buscó la interpretación de soluciones para ecuaciones de 1 y 2 incógnitas. La primera actividad se menciona a continuación:

(A) Solución de una ecuación con una incógnita.

Usa el comando "SOLVE" de la CAS para resolver la siguiente ecuación:

$$4(3x-7) = 2(3-x)+5$$

Se muestra la respuesta obtenida por Karla:

| Qué introduces en la CAS    | Qué muestra la CAS como resultado |
|-----------------------------|-----------------------------------|
| Solve (4(3x-7)=2(3-x)+5, x) | $x = \frac{39}{14}$               |

Imagen 4.10: Resultado de Karla

De la misma manera que Karla contestó, las 4 alumnas restantes lo hicieron, donde se nota un mejor dominio del comando SOLVE.

Para la parte B de esta actividad se relacionan 6 preguntas que tienen que ver con lo siguiente:

(B) Solución de una ecuación con dos incógnitas.

Las siguientes seis preguntas se refieren a la ecuación:

$$2x+7=8y+11.$$

1. ¿Cuál crees que sea el resultado si usas la CAS para resolver esta ecuación en términos de  $x$ ?

En esta pregunta, fueron dos caminos los que se encontraron los cuales fueron los siguientes:

2. Usa la CAS para resolver esta ecuación en términos de  $x$ :

Puede que de resultados iguales

Imagen 4.11: Resultado de Guadalupe y Liliana

De acuerdo a las respuestas obtenidas, ninguna alumna pudo despejar la ecuación. La única que intento hacer álgebra para esta parte fue Guadalupe, quien tuvo un error al momento de despejar, por otra parte Liliana dudó en cuál sería el resultado, al igual que Liliana también Karla, Mayte y Andrea contestaron de manera similar.

Para la pregunta 2 ahora se utilizó la CAS para poder resolver la ecuación anterior:

2. Usa la CAS para resolver esta ecuación en términos de  $x$ :

| Qué introduces en la CAS  | Qué muestra la CAS como resultado |
|---------------------------|-----------------------------------|
| Solve ( $2x+7=8y+11, y$ ) | $x = \frac{x-2}{4}$               |

| Qué introduces en la CAS     | Qué muestra la CAS como resultado              |
|------------------------------|------------------------------------------------|
| $\text{solve}(2x+7=8y+11,y)$ | $y = \frac{19x-11}{8} \quad y = \frac{x-2}{4}$ |

Imagen 4.12: Resultado de Karla y Guadalupe

Notamos que nuevamente las alumnas mostraron un mejor dominio del comando SOLVE y supieron expresar una variable en términos de la otra. Solamente Liliana se confundió en el significado de poner una variable en términos de la otra, ya que en su trabajo expresa a “x” en términos de “y”.

### 3. ¿Cómo interpretas el resultado mostrado por la CAS?

Aquí se expresa la interpretación de los resultados de las ecuaciones que vimos, apartado donde se presentaron más problemas, y las respuestas de Karla y Guadalupe nos hacen ver cosas distintas.

|                                                                  |
|------------------------------------------------------------------|
| ya de acuerdo al resultado<br>le podemos dar valores a<br>x y y. |
| Le podemos dar algún valor a x.                                  |

Imagen 4.13: Resultado de Karla y Guadalupe

Notamos que las dos interpretan de manera correcta el resultado anterior, Guadalupe siendo un poco más explícita en su respuesta, pero, las dos tienen la misma idea en su interpretación. Respuestas similares se obtuvieron en los trabajos de Andrea, Mayte y Liliana.

4. ¿Cuál crees que sea el resultado si usas la CAS para resolver esta ecuación en términos de  $y$ ?

Ahora lo que se les pidió fue despejar “ $x$ ” y veremos qué fue lo que respondió Karla, Guadalupe y Liliana:

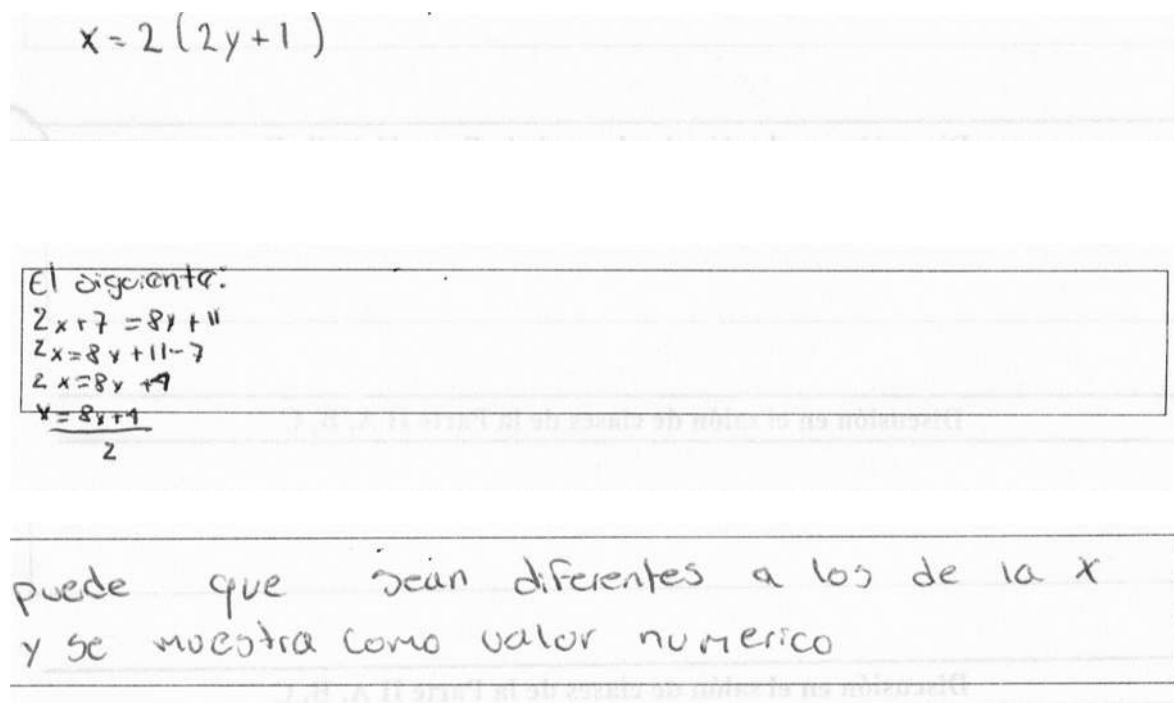


Imagen 4.14: Resultado de Karla, Guadalupe y Liliana

Para una pregunta similar a la número 1, se obtuvieron mejores resultados, Karla se dio cuenta que se debe de obtener una variable en términos de la otra, el resultado está correcto, pero, no explica como lo obtuvo, Guadalupe nos muestra el despeje a papel y lápiz, el cual es correcto, y por último Liliana quien fue la única que estuvo fuera de contexto, ya que piensa que dará un número en específico.

En la siguiente pregunta se les pide resolver la ecuación en términos de “ $y$ ”. Veamos los resultados de las tres alumnas anteriores:

5. Usa la CAS para resolver la ecuación:  $2x + 7 = 8y + 11$  en términos de  $y$ :

| Qué introduces en la CAS     | Qué muestra la CAS como resultado |
|------------------------------|-----------------------------------|
| $\text{solve}(2x+7=8y+11,x)$ | $x = 2(2y+1)$                     |

| Qué introduces en la CAS     | Qué muestra la CAS como resultado |
|------------------------------|-----------------------------------|
| $\text{solve}(2x+7=8y+11,x)$ | $x = 2(2y+1)$                     |

| Qué introduces en la CAS | Qué muestra la CAS como resultado |
|--------------------------|-----------------------------------|
| $2x+7=8y+11,y$           | $y = \frac{x-2}{4}$               |

Imagen 4.15: Resultado de Karla, Guadalupe y Liliana

El trabajo en general fue correcto, pero como mencionamos en la pregunta número 2, la única que tuvo problemas fue Liliana de igual manera aquí, ya que se le pidió despejar “x” y lo que hizo fue despejar “y”.

Para la última pregunta nuevamente se les pido dar una interpretación de sus resultados:

6. ¿Cómo interpretas el resultado mostrado por la CAS?

|                                                        |
|--------------------------------------------------------|
| Dándole valores a X, y para que no afecte la ecuación. |
|--------------------------------------------------------|

Imagen 4.16: Resultado de Karla

En donde podemos observar con la interpretación que tiene la idea de darle valores a una variable para obtener un segundo valor. Las respuestas de las alumnas restantes fueron similares a las de Karla.

Para la parte C de esta actividad constó en reafirmar su trabajo anteriormente descrito con las siguientes dos preguntas:

(C) Distinción entre soluciones de ecuaciones con una y dos incógnitas

1. Es probable que te hayas dado cuenta de que, en la Parte II (A), la CAS mostró un valor numérico como solución para  $x$ . Por el contrario, en la Parte II (B), la calculadora mostró el resultado en forma de expresión algebraica. ¿Cómo explicas esta diferencia?

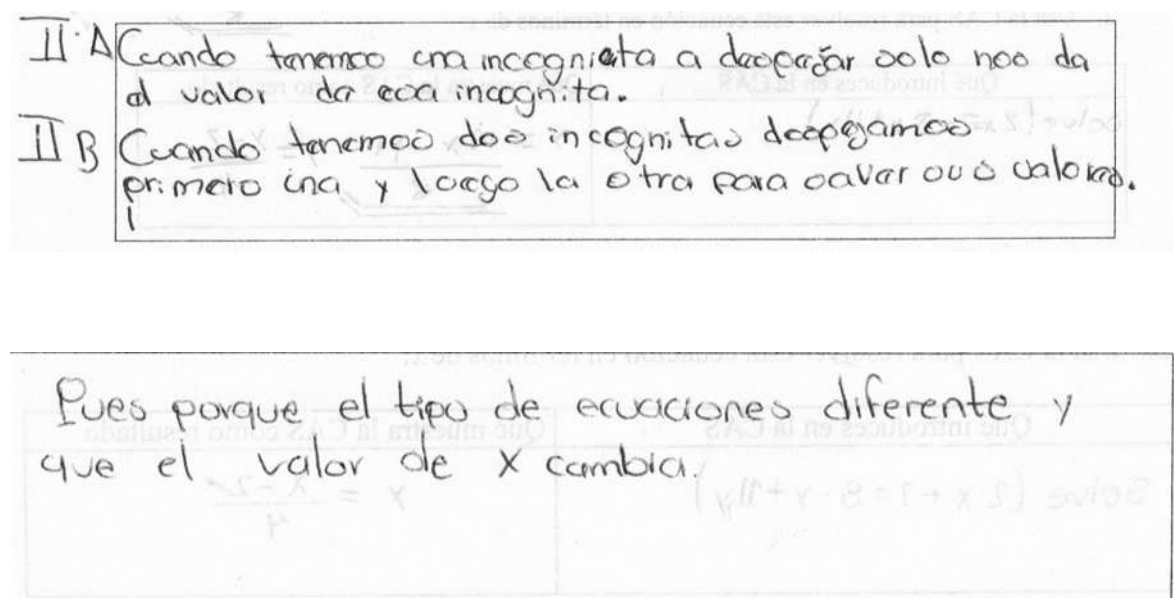


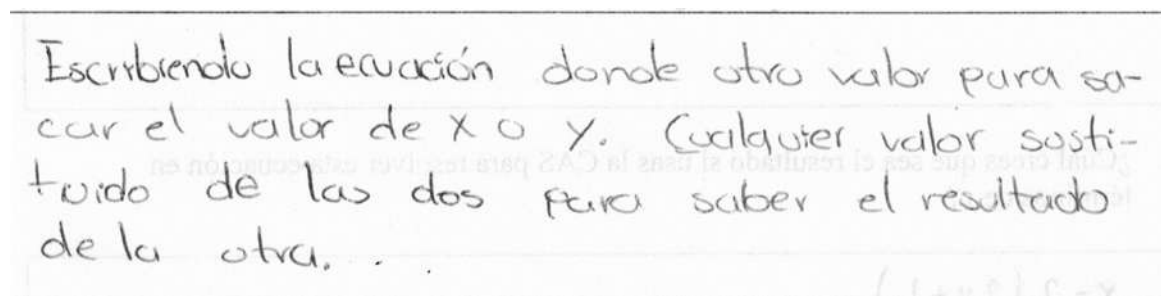
Imagen 4.17: Resultado de Guadalupe y Karla

La primera respuesta la cual es de Guadalupe notamos que ahora le ha quedado claro el procedimiento para resolver una ecuación de una y dos incógnitas, las respuestas de Andrea, Mayte y Liliana fueron similares. Para la respuesta de Karla, vemos que fue la única que no fue más explícita en su respuesta.

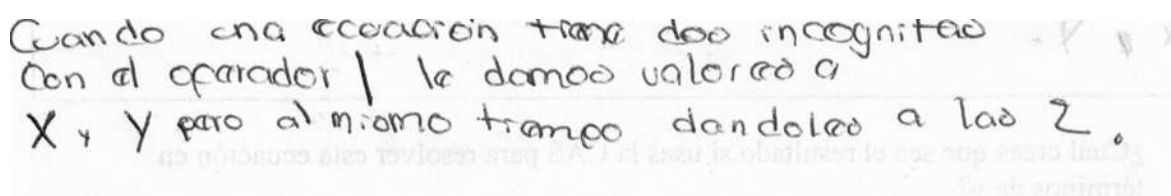
Una vez que reafirmaron cual es la diferencia entre las dos ecuaciones, se les pidió lo siguiente:

2. ¿Cómo puedes usar esas expresiones, mostradas por la CAS, para encontrar soluciones numéricas de las ecuaciones?

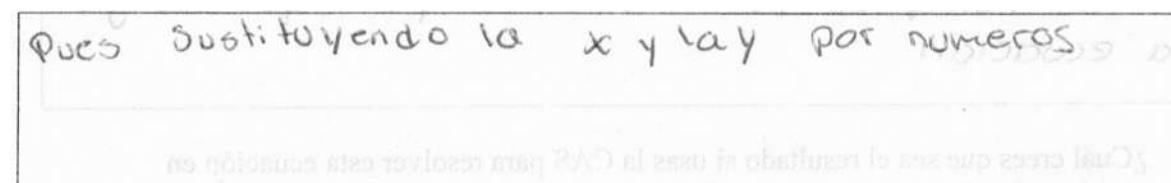
Las respuestas fueron muy similares, todas las alumnas coincidieron en darle un valor a una de las variables y te arrojará el otro valor la ecuación. Observemos las respuestas de Karla, Guadalupe y Liliana:



Escribiendo la ecuación donde otro valor para sacar el valor de  $x$  o  $y$ . Cualquier valor sustituido de las dos para saber el resultado de la otra.



Cuando una ecuación tiene dos incógnitas con el operador  $|$  le damos valores a  $x$  y  $y$  pero al mismo tiempo dándoles a las  $z$ .



Pues sustituyendo la  $x$  y la  $y$  por números.

Imagen 4.17: Resultado de Karla, Guadalupe y Liliana

Una vez terminada esta actividad se pasó a la discusión de las parte II A, B, C donde la discusión fue un poco rápida ya que solo hubo participación de Guadalupe. A continuación se muestra la discusión frente a cámaras.

Nota: Para esta discusión, los equipos estuvieron conformados por dos parejas (equipos de 4)

Simbología: GF. = Guadalupe Fraga Mateo; Profesora = Profa.

| Nombre | Discusión                                                                                                                                                              |
|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Profa. | ¿Por qué CAS mostró una expresión en $y$ o en $x$ cuando usaste el comando SOLVE para resolver la ecuación: $2x+7 = 8y+11$ ?                                           |
| GF.    | Porque en una le estas pidiendo que despeje " $x$ " y en la otra le pides que despeje " $y$ ". Pero te va a dar los mismos valores cuando sustituyas.                  |
| Profa. | ¿Cómo te quedan las expresiones cuando resuelves en términos de " $x$ " y en términos de " $y$ "?                                                                      |
| GF.    | En términos de " $x$ " nos queda $y = \frac{x-2}{4}$ y para términos de " $y$ " nos quedo $x = 2(2y + 1)$ . (Ver Imagen 4.12 y 4.15)                                   |
| Profa. | ¿Y cómo interpretas esos resultados?                                                                                                                                   |
| GF.    | En la primera que dándole valores a " $x$ " nos dará un valor en " $y$ " y en la segunda que dándole valores a " $y$ " nos dará el valor de " $x$ ". (Ver Imagen 4.17) |

Después de esta discusión fueron resueltas las dudas de los estudiantes, acerca de lo que comento Guadalupe.

Continuando con la actividad la parte II D, se les dió a los alumnos un par de ecuaciones para que generen soluciones:

(D) Uso de la CAS para generar y verificar soluciones de ecuaciones con una y dos incógnitas

1. Usa la CAS para generar tres soluciones de cada una de estas ecuaciones (registra todo aquello que introduces en la CAS mientras prosigues con tu trabajo, y de lo que la CAS muestra como resultado, en cada paso). Verifica al menos una solución de cada ecuación (con la CAS).

(a) 
$$\frac{x+1}{3} = 5y - 7$$

En general para encontrar las soluciones de estas expresiones no hubo mayor problema, mostramos el trabajo de Andrea y Liliana:

| Qué introduces en la CAS        | Qué resultado muestra la CAS |
|---------------------------------|------------------------------|
| Solve (x+1=5-y-7x)              | $x = 15y - 22$               |
| Solve $\frac{x+1}{3} = 5y - 7y$ | $y = y + 22$                 |
| $y = x + 22$<br>15              | $y = \frac{5}{3}$            |
| $y = \frac{x+22}{15}$ 1x=3      | $y = \frac{9}{6}$            |
| $y = \frac{x+22}{15}$ 1x=8      | $y = 2$                      |

| Qué introduces en la CAS                       | Qué resultado muestra la CAS |
|------------------------------------------------|------------------------------|
| Solve $\left(\frac{x+1}{3} = 5y - 7, x\right)$ | $x = 15y - 22$               |
| $x = 15y - 22$ 1y=1                            | $x = -7$                     |

Imagen 4.18: Resultado de Andrea y Liliana

Para esta primera expresión Andrea decidió encontrar soluciones de “y”, mientras que Liliana optó por encontrar soluciones de “x”.

(b) 
$$-\frac{1}{7}y + \frac{11}{12} = 3x - \frac{5}{8}$$

Para la segunda expresión de igual manera las 5 alumnas no tuvieron problemas para encontrar soluciones respuestas similares a las de Andrea y Liliana también tuvieron Karla, Guadalupe y Mayte.

| Qué introduces en la CAS                                                                                    | Qué resultado muestra la CAS                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| $x = (14 - y - 259) \mid y = 4$ $\frac{504}{504}$ $x = (24y - 229) \mid y = 2$ $x = (24y - 259) \mid y = 4$ | $x = \frac{163}{504}$ $x = \frac{211}{504}$ $x = \frac{43}{504}$ |

2. Plantea al menos una pregunta o da alguna idea que se te haya ocurrido, mientras

| Qué introduces en la CAS                                                                                                 | Qué resultado muestra la CAS                         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| $\text{Solve}\left(-\frac{1}{7}y + \frac{11}{12} = 3x - \frac{5}{8}, x\right)$ $x = \frac{-(24y - 259)}{504} \mid y = 2$ | $x = \frac{-(24y - 259)}{504}$ $x = \frac{211}{504}$ |

Imagen 4.19: Resultado de Andrea y Liliana

Para esta expresión tanto Andrea como Liliana optaron por despejar “x” y podemos observar que las dos están en lo correcto, ya que las dos utilizaron el valor de  $y = 2$  y obtuvieron el mismo resultado para “x”.

En la siguiente pregunta de esta parte II D se les pidió que plantearan alguna pregunta o idea sobre su trabajo. Solamente Liliana y Guadalupe contestaron la pregunta:

Qué es lo que hiciste para sacar el resultado

pues lo que vimos fue que copiando la ecuación que ya avisamos sustituido con el solver, introduciendo el resultado a la CAD con el operador | podíamos dar los valores que quisiéramos dependiendo de  $x$  y  $y$ .

Imagen 4.20: Resultado de Liliana y Guadalupe

Liliana quien se puede decir planteo una pregunta, y Guadalupe quien decide dar una idea para facilitar el trabajo en esta parte.

La parte III y última de esta actividad consistió en un repaso del método de igualación y sustitución. Para la pregunta número 1 se les mostró cómo funciona el método de IGUALACIÓN y posteriormente se les hizo una pregunta.

1. He aquí el método de IGUALACIÓN para resolver un sistema de ecuaciones lineales:

|                                                                                                                                               |                                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| MÉTODO DE IGUALACIÓN                                                                                                                          | $x + 3y = 5$<br>$7x + 6y = 20$   |
| El método algebraico de Igualación consiste en:                                                                                               |                                  |
| 1. Despejar la misma variable en cada una de las ecuaciones y, de este modo, construir dos expresiones; las cuales tienen una variable común; | $y = (5-x)/3$<br>$y = (20-7x)/6$ |
| 2. Proponer que las dos expresiones obtenidas en el paso 1 sean iguales entre ellas, y así construir una ecuación con una variable;           | $(5-x)/3 = (20-7x)/6$            |

|                                                                                                                                                 |                                                                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3. Resolver la ecuación que resulta;                                                                                                            | $(5-x)/3 = (20-7x)/6$ $2(5-x) = (20-7x)$ $10-2x = 20-7x$ $7x-2x = 20-10$ $5x = 10$ $x = 2$                        |
| 4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema, con objeto de calcular el valor de la otra variable de la pareja solución. | $y = (5 - x)/3 = (5 - 2)/3 = 1$ <p>La pareja solución es <math>(x, y) = (2, 1)</math></p> <p>¡Verifique esto!</p> |

Una vez mostrado el método de IGUALACIÓN se les hizo siguiente pregunta, a la cual se muestran las respuestas de Guadalupe, Andrea y Karla:

Pregunta: ¿por qué piensas que este método es llamado Método de Igualación? En otras palabras, ¿en qué sentido se lleva a cabo la igualación en este método?

¿por qué se llama de igualación en este método?

\*por que se busca un numero que se iguale con la otra ecuación, el resultado que sale de las dos ecuaciones se iguala y se despeja para encontrar la solución.

2º En el despeje.

En ecuaciones que tienen un termino comun.

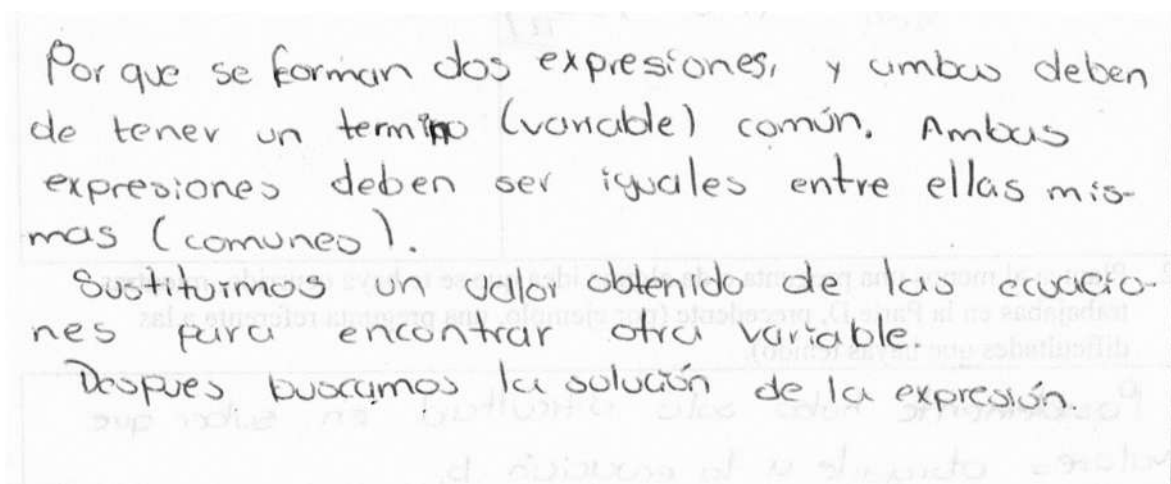


Imagen 4.21: Resultado de Guadalupe, Andrea y Karla

Podemos observar que las tres alumnas tienen una idea clara del porque se llama el método de igualación. De ahí saben también que podrán encontrar una de las variables, únicamente les faltó mencionar que el sentido es llevarlo a una ecuación con una incógnita para abordar un sistema que ya se conoce. Las respuestas de Liliana y Mayte fueron muy similares a éstas.

La siguiente actividad de esta parte III A se mostró el método de SUSTITUCIÓN y de igual manera se les cuestionó sobre este:

2. He aquí el método de SUSTITUCIÓN para resolver un sistema de ecuaciones lineales:

|                                                                                                                                                          |                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| MÉTODO DE SUSTITUCIÓN                                                                                                                                    | $2x + 3y = 25$<br>$5x + y = 30$ |
| El método de sustitución algebraica consiste en:                                                                                                         |                                 |
| 1. Despejar, si es necesario, una de las variables en una de las ecuaciones;                                                                             | $y = 30 - 5x$                   |
| 2. Sustituir la expresión obtenida, en el paso 1, en la variable apropiada de la otra ecuación y, de este modo, construir una ecuación con una variable; | $2x + 3(30 - 5x) = 25$          |

|                                                                                                                                                 |                                                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3. Resolver la ecuación obtenida en el paso 2;                                                                                                  | $2x + 90 - 15x = 25$ $-13x = 25 - 90$ $-13x = -65$ $x = 65/13$                                                       |
| 4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema; con objeto de calcular el valor de la otra variable de la pareja solución. | $y = 30 - 5(65/13)$ $= 65/13$ <p>La pareja solución es <math>(x, y) = (65/13, 65/13)</math><br/>¡Verifique esto!</p> |

Una vez que se mostró cómo funciona el método de SUSTITUCIÓN, se les hicieron las preguntas que mostraremos a continuación junto con las respuestas de Guadalupe, Karla y Liliana. Las respuestas que dieron fueron muy similares una vez más.

Pregunta: ¿por qué piensas que este método es llamado Método de Sustitución?

Porque se sustituye la expresión obtenida al despejar una de las ecuaciones, para sustituirlo.

Porque este método consiste en sustituir (como su nombre lo dice) la expresión obtenida construyendo una ecuación con una variable.

Para poner en orden los valores y poder sacar un resultado para resolverlo.

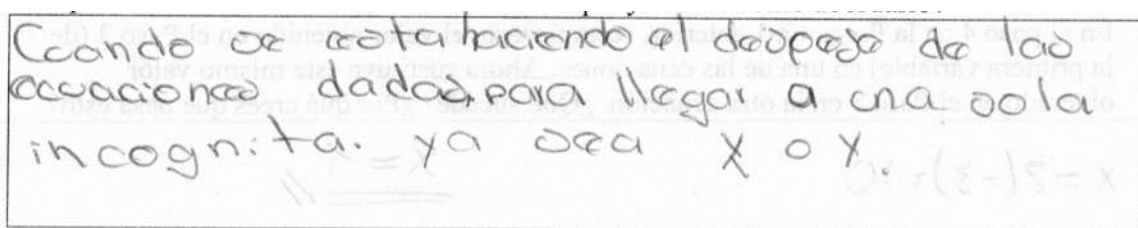
Imagen 4.22: Resultado de Guadalupe, Karla y Liliana

En esta pregunta Liliana fue la que tuvo problema al explicar su respuesta, tanto Guadalupe como Karla describen bien la idea de este método, respuestas parecidas a la de Karla fueron las que dieron Andrea y Mayte para esta parte.

En la última pregunta de esta actividad se les pidió a los estudiantes de bachillerato su opinión sobre los dos métodos como vemos a continuación:

3. ¿En qué forma estos dos métodos (los métodos de Igualación y de Sustitución) te permiten reducir el sistema dado en otro que ya sabes cómo abordarlo?

De acuerdo a los resultados obtenidos anteriormente las 5 alumnas fueron capaces de establecer bien la idea, la respuesta de Guadalupe nos permite ver esto de manera más clara.



Cuando se está haciendo el despeje de las ecuaciones dadas para llegar a una sola incógnita, ya sea  $x$  o  $y$ .  $3x - 15 = x$

Imagen 4.23: Resultado de Guadalupe

Al igual que Guadalupe las demás alumnas mostraron respuestas similares dentro de esta pregunta.

Después de esta pregunta se pasó a la discusión en el salón de clases de la parte III A, la cual fue de manera muy breve sobre las preguntas 1, 2 y 3, en las que no hubo mucho problema como se mostró en los resultados.

Ya que los alumnos mostraron no tener dudas, la profesora sólo escuchó las respuestas de algunos alumnos de manera breve.

La parte III B se continuó con el método de igualación, pero, ahora el trabajo de las alumnas fue a través de CAS, solamente se presentara el trabajo de Karla, las alumnas restantes presentaron un trabajo similar.

He aquí un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x - 8 &= 2y + 2 \\ 3x + 5y + 3 &= 0 \end{aligned}$$

1. Con la CAS, usa el método de Igualación para resolver este sistema (registra todo aquello que introduces en la calculadora, mientras prosigues con tu trabajo, y de lo que la calculadora muestra como resultado al usar sus comandos).

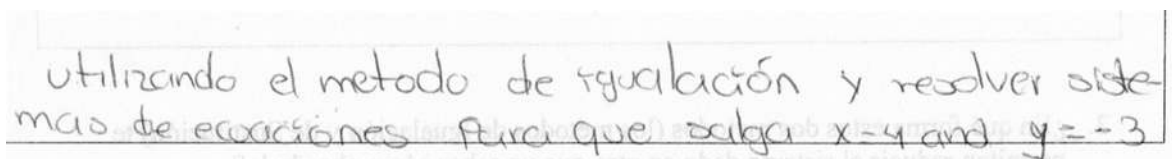
| El método de Igualación consiste en:                                                                                                                                     | Qué introduces en la CAS                                                | Qué muestra la CAS como resultado        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| 1. Despejar la misma variable en cada una de las ecuaciones y, de este modo, crear dos expresiones, las cuales tienen una sola variable;                                 | $\text{Solve}(y - 8 = 2y + 2, x)$<br>$\text{Solve}(3x + 5y + 3 = 0, x)$ | $x = 2y + 10$<br>$x = \frac{-5y + 3}{3}$ |
| 2 y 3. Proponer que las dos expresiones obtenidas en el paso 1 sean iguales entre ellas, para construir una ecuación con una variable; resolver la ecuación que resulta; | $\text{Solve}(2y + 10 = \frac{-5y + 3}{3}, y)$                          | $y = -3$                                 |
| 4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema; con objeto de calcular el valor de la otra variable de la pareja solución.                          | $x = 2 \cdot -3 + 10$                                                   | $x = 4$                                  |

Imagen 4.24: Resultado de Karla

Incluimos el mismo cuadro que cuando se les presentó cómo funciona el método, solamente cambia que el paso 2 y ahora están juntos y no separados. El manejo de CAS dentro de este método está muy bien definido.

Las siguientes preguntas van en relación al método anterior:

2. ¿Cómo verificas con la CAS que tu solución es correcta?



utilizando el metodo de igualación y resolver sistemas de ecuaciones para que salga  $x=4$  and  $y=-3$

Imagen 4.25: Resultado de Karla

De igual manera todas las alumnas mostraron el mismo método para comprobar la solución de este sistema de ecuaciones, el cual es una manera fácil y rápida de comprobar esto.

3. En el paso 4 de la Pregunta 1 anterior, reemplazaste el valor obtenido en el Paso 3 (de la primera variable) en una de las ecuaciones. Ahora sustituye este mismo valor obtenido en el Paso 3 en la otra ecuación. ¿Qué sucede? ¿Por qué crees que pasa esto?



$X = 2(-3) + 10$   $X = 4$

Imagen 4.26: Resultado de Karla

Para esta pregunta en particular, notamos que hubo dificultades, tal vez no se comprendió la pregunta ya que todas sustituyeron el valor en la misma ecuación y no tomaron la restante.

Terminando esta pregunta se pasó a la discusión de la parte III B, de donde podemos observar las preguntas realizadas a los alumnos y la participación de Karla dentro de la misma:

Nota: Para esta discusión, los equipos estuvieron conformados por dos parejas (equipos de 4)

Simbología: KG. = Karla Guadalupe; Profesora = Profa.

|        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Profa. | Ustedes realizaron el método de igualación y obtuvieron un valor para “x” y para “y”, entonces, ¿Cómo verificaron que esos valores son una solución correcta?                                                                                                                                                 |
| KG.    | Resolviendo el método nos salió $y = -3$ ; $x = 4$ . Estos valores los verificamos en la calculadora, nos fuimos a la parte de sistemas de ecuaciones lineales, ahí tiene opciones para poner las dos ecuaciones y le dimos resolver, nos salieron los mismos valores que obtuvimos. (Ver Imagen 4.24 y 4.25) |
| Profa. | ¿Qué sucedió cuando sustituiste el mismo valor obtenido en el Paso 3, en la otra ecuación?                                                                                                                                                                                                                    |
| KG.    | Nos sale el mismo resultado. (Imagen 4.26)                                                                                                                                                                                                                                                                    |

El dialogo captado por las cámaras, nos muestra que coinciden sus respuestas con lo expresado a papel y lápiz, solamente quedó la duda de como sustituir el mismo valor en la otra ecuación, razón por la cual la profesora explicó a todos a que se refería esta pregunta, mencionando que se quería llegar a que las dos ecuaciones eran iguales por lo tanto nos daría el mismo resultado.

El método de sustitución se continuó en la parte III C pero ahora usando CAS

1. Con la CAS, usa el método de Sustitución para resolver este sistema (registra todo aquello que introduces en la calculadora, mientras continuas con tu trabajo, y de lo que la calculadora muestra como resultado al usar sus comandos).

$$x + 3y = 5$$

$$7x + 6y = 20$$

Ahora mostraremos el trabajo de Guadalupe:

| El método de Sustitución consiste en:                                                                                                                     | Qué introduces en la CAS               | Qué muestra la CAS como resultado |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------|
| 1. Despejar, si es necesario, una de las variables de alguna de las ecuaciones;                                                                           | $\text{Solve}(x + 3y = 5, x)$          | $x = 5 - 3y$                      |
| 2. Sustituir la expresión obtenida, en el paso 1, en la variable apropiada de la otra ecuación y, de este modo, crear una ecuación con una sola variable; | $\text{Solve}(7(5 - 3y) + 6y = 20, y)$ | $y = 1$                           |
| 3. Resolver la ecuación obtenida en el paso 2;                                                                                                            |                                        |                                   |
| 4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema; con objeto de calcular el valor de la otra variable de la pareja solución.           | $x = 5 - 3(1)$                         | $x = 2$                           |

Imagen 4.27: Resultado de Guadalupe

Ahora vemos con el trabajo de Guadalupe, que las 5 alumnas volvieron a mostrar el buen manejo de CAS, y aquí en este trabajo notamos un hueco en blanco, ya que

Guadalupe hizo el paso 2 y 3 juntos como se les había mostrado en el cuadro anterior. Las respuestas de Karla, Liliana, Andrea y Mayte fueron similares a éste.

2. ¿Cómo verificas con la CAS que tu solución es correcta?

Observemos la respuesta de Guadalupe quien al igual que Karla en el trabajo anterior, uso el sistema de ecuaciones de la CAS para comprobar sus valores, en este caso solo puso la respuesta arrojada por la CAS.

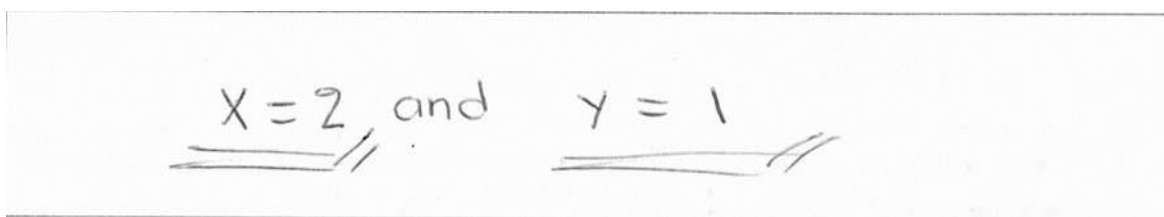
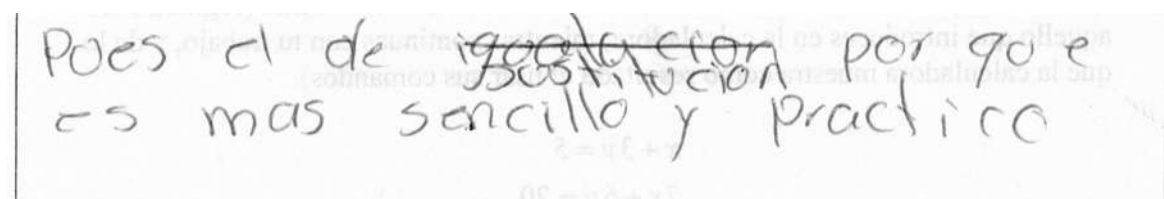

$$\underline{\underline{X=2}} \text{ and } \underline{\underline{y=1}}$$

Imagen 4.28: Resultado de Guadalupe

Lo comprendido en la parte final de esta actividad 4, se les preguntó cuál de los dos métodos prefieren, para esta pregunta mostraremos las respuestas de Andrea, Guadalupe y Karla:

3. ¿Cuál de los dos métodos (IGUALACIÓN y SUSTITUCIÓN) prefieres y por qué?



Pues el de ~~igualación~~ <sup>sustitución</sup> por 90 e  
es mas sencillo y practico

El de sustitución porque primero se despeja en una ecuación y luego en la otra y luego se igualan las ecuaciones y es más fácil.

El método de igualación nos resulta más fácil y entendible y más correcto al comprobar algún resultado de una expresión.  
El método de sustitución es un poco más complicado pero también lo resolvimos.

Imagen 4.29: Resultado de Andrea, Guadalupe y Karla

Analizando las respuestas, vemos una inclinación por el método de sustitución, en el caso de Karla, y llama la atención que menciona que es más correcto para comprobar un resultado, aunque no explica porque. Generalizando, las alumnas señalaron que el método de Igualación es más sencillo y práctico. Cabe mencionar que se percataron de que realizan un paso menos dentro de este método, es decir, menos pasos algebraicos.

Dentro de la última pregunta de esta actividad se les preguntó lo siguiente:

4. ¿Qué tienen en común esos dos métodos? (No re-escriba sólo los pasos de los dos métodos).

Se les pidió que no re-escribieran los pasos, cosa que no fue así, se les dificultó escribir con sus propias palabras que los dos métodos te permiten reducir el sistema

a una ecuación de una incógnita, lo que nos muestra que aún los alumnos están muy mecanizados para solo repetir procedimientos. Veamos la respuesta de Karla.

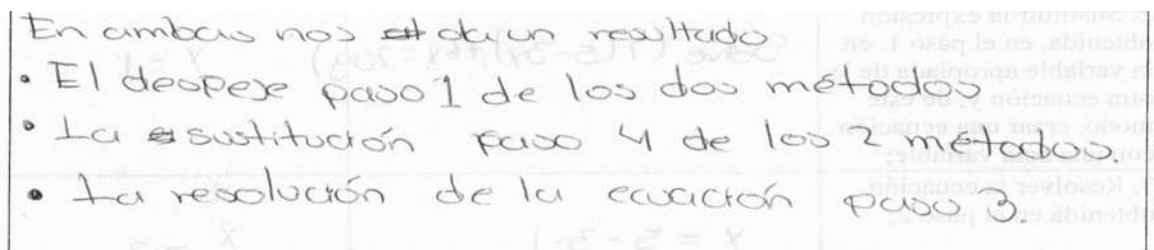


Imagen 4.30: Resultado de Guadalupe

Hubo algunas respuestas muy superficiales también por parte de Andrea y Liliana quienes mencionan que los dos métodos les dan los mismos resultados.

Una vez terminada esta pregunta, se realizó la última discusión en la cual podemos observar la participación de Karla y los cuestionamientos de la profesora al grupo en general:

Nota: Para esta discusión, los equipos estuvieron conformados por dos parejas (equipos de 4)

Simbología: KG. = Karla Guadalupe; Profesora = Profa.

|        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|--------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Profa. | Ustedes realizaron el método de sustitución y obtuvieron un valor para "x" y para "y", entonces, ¿Cómo verificaron que esos valores son una solución correcta?                                                                                                                                        |
| KG.    | Resolviendo el método nos salió $y = 1$ ; $x = 2$ . Estos valores los verificamos en la calculadora, nos fuimos a la parte de sistemas de ecuaciones lineales, ahí tiene opciones para poner las dos ecuaciones y le dimos resolver, nos salieron los mismos valores que obtuvimos. (Ver Imagen 4.27) |
| Profa. | Comparando estos dos métodos que resolvieron, ¿Qué método prefieren?                                                                                                                                                                                                                                  |

|        |                                                          |
|--------|----------------------------------------------------------|
| KG.    | El método de igualación resulta más fácil. (Imagen 4.29) |
| Profa. | ¿Qué tienen en común estos dos métodos?                  |
| KG.    | Que en ambas nos da un resultado (Imagen 4.30)           |

Prácticamente reafirma lo realizado en las hojas de trabajo dentro de esta discusión.

Como pudimos ver en este análisis , en lo particular las 5 alumnas y los estudiantes en general fueron de menos a más, ya que comenzaron prácticamente en ceros sobre las distintas ecuaciones y el análisis de sus soluciones.

Pasando cada una de las discusiones grupales se notó la mejoría dentro de los temas, cerrando esta misma actividad con una alta efectividad en sus respuestas.

## **CAPÍTULO 5**

## **CONCLUSIONES**

Generalizaremos en una primera parte las conclusiones, y lo mismo haremos en una segunda parte para responder las preguntas de investigación planteadas en el capítulo 1.

Una vez finalizado el análisis de nuestras hojas de trabajo, logramos destacar los siguientes puntos:

1. Notamos que se necesita una buena planeación para realizar las hojas de trabajo, esto con el fin de que los alumnos a la hora de contestar las tareas diseñadas no les surja duda dentro de la misma.
2. Al comienzo de un tema nuevo, notamos que la mayoría de los alumnos estaba prácticamente en ceros de acuerdo al tema.
3. Las técnicas utilizadas para resolver las tareas no eran buenas o correctas en la mayoría de los alumnos, esto se apreciaba de manera más clara dentro de las primeras actividades.
4. Dentro de los temas en las tres primeras actividades, los alumnos muestran un aspecto muy mecanizado a la hora de resolver problemas, es decir, no intentaban razonar sus soluciones, únicamente encontraban lo que se les pedía dentro del problema.
5. Sin dejar de mencionar el interés de los alumnos por el uso del CAS, lo cual se observaba de manera muy clara al momento de trabajar en forma combinada el uso del papel, lápiz y la CAS.
6. En la última actividad se notó una gran mejoría en las técnicas de los alumnos en general, así como también un avance en el aspecto de mecanización ya que al momento de reflexionar sobre sus respuestas lo hacían de manera más concreta.
7. Para lograr un avance significativo en el punto número 5, fue de gran ayuda los debates científicos, es decir, las discusiones dentro del salón de clases, porque éstos ayudaron a librar dudas que tenían los alumnos.

A continuación se dará respuesta a las preguntas de investigación planteadas dentro del capítulo 1:

**1. ¿Es recomendable que los estudiantes utilicen el CAS en las clases de álgebra?**

De acuerdo a los resultados obtenidos en la investigación, concluimos que el buen manejo del CAS dentro de las clases de álgebra permite al alumno de bachillerato la mejor comprensión de los conceptos algebraicos, así como su manipulación. Cabe mencionar que la CAS utilizada en las clases admite que emerjan técnicas nuevas para la solución de las tareas planteadas.

**2. ¿Qué técnicas surgen en los alumnos en el contexto de este ambiente CAS?**

Podemos mencionar que las técnicas que surgieron dentro de estas hojas de trabajo fueron las siguientes:

- Identificar cuando dos expresiones son equivalentes y no equivalentes.
- Distinguir entre la factorización y multiplicación de términos.
- Manipulación de expresiones algebraicas.
- Obtención del rango de valores o restricciones que pueden tener ciertas expresiones.
- Poder diferenciar los tipos de ecuaciones.
- El CAS permitió también elevar las técnicas que tenía para la resolución de un sistema de ecuaciones.

**3. ¿El debate científico ayuda a los alumnos a dar puntos de vista respecto a una situación dada?**

Al comienzo de las actividades fue un poco difícil conseguir que los estudiantes platicaran sus puntos de vista dentro de los debates, pero conforme avanzaba el trabajo y las discusiones eran más abiertas, los estudiantes se mostraron más participativos y percibimos que las dudas que surgían en uno de los alumnos algunas veces fueron las mismas del grupo en general, lo cual ayudaba a que los demás alumnos aportaran sus puntos de vista.

#### **4. ¿Un ambiente CAS ayuda a comprender la transición de expresiones equivalentes y no equivalentes a Ecuaciones?**

El trabajo de las alumnas marcado en el capítulo 4 nos permite ver, que una vez que los alumnos dominaron el tema de expresiones equivalentes y no equivalentes, no bastó para que llevaran éstas a una ecuación.

Con el progreso de la actividad 3, se pudo distinguir la mejoría tanto en la técnica como en la teoría del tema. Esto nos permite concluir que un ambiente CAS favorece a la mejor comprensión de la transición de estas expresiones a ecuaciones.

#### **5. ¿Un ambiente CAS ayuda a la mejor comprensión de los Sistemas de Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas?**

Los resultados obtenidos en la última actividad del capítulo 4, nos permiten saber que un ambiente CAS ayuda también al surgimiento de nuevas técnicas, las cuales, aportan una mejoría dentro de los temas estudiados.

Como ya hemos mencionado los alumnos prácticamente inician en cero al realizar esta actividad, y en específico en el ambiente CAS, Guadalupe y Karla mostraron un efectivo desarrollo en la solución de ecuaciones de este tipo.

Con base en el análisis y los datos recabados en el capítulo anterior, podemos concluir y afirmar que un ambiente CAS y las tareas diseñadas para éste, influyen sobre el alumno de manera positiva para el desarrollo de su conocimiento algebraico.

## **REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7: 245-272, 2002. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 221-266.

Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, 195-227.

Guzmán, J. & Martínez, C. (2009). The role of task in exploring algebraic linearity epistemological obstacle in technological environment. En S. L. Swars, D. W. Stinson & L-S. Shonda (Eds.), *Proceedings of the Thirty-First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 218-225). Atlanta, GA: PME-NA.

Area, M., (2005). Tecnologías de la información y comunicación en el sistema escolar. Una revisión de las líneas de investigación. *Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa*, 11(1), 3-25.

Socas, M.M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Cap. V, pp. 125-154. En Rico, L. y otros: *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Ed. Horsori. Barcelona.

Socas, M.M. y otros, *Iniciación al Álgebra*. Capítulo uno. Síntesis. Madrid. 1989

Bello, I. (1999). *Álgebra elemental*. México DF: International Thompson Editores.

Mercedes, M., Ruano, R., & Socas, R. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. I Seminario nacional sobre lenguaje y matemáticas.

Kieran, C. (1992). The learning and Teaching of School Algebra. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. In D. Grouws (Ed).

Kieran, C. –FILLOY, E. (1989) El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica (traducido por Puig, L.). Enseñanza de las Ciencias, Vol.7 (3).

Kieran, C. & Yerushalmy, M. (2004). Research on the role of technological environments in algebra learning and teaching. En K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study (pp. 99-152). New York: Kluwer Academic.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana. X(2), 213-223.

Guzmán, J., Kieran, K., & Martínez, C. (2012). El papel de CAS en la promoción del razonamiento algebraico y en el surgimiento de teoría. Cinvestav, México, 2009.

Hitt, F. (2010). Construction of mathematical knowledge using calculators (CAS) in the mathematics classroom. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 2011.

Hitt, F., & Kieran, C. (2009). Constructing knowledge a peer interaction in a CAS environment with tasks designed from a task-technique- theory perspective. Springer Science+Business Media B.V. 2009.

Vygotsky, L. (1995). Pensamiento y lenguaje. Barcelona, España: Paidós.

Martínez, C (2013). El desarrollo del conocimiento algebraico de estudiantes en un ambiente CAS con tareas diseñadas desde un enfoque Técnico-Teórico: Un estudio sobre la simplificación de expresiones radicales. Tesis de doctorado. Cinvestav-ipn, México, 2013.

# **ANEXOS**

# Anexo A

Nombre:

Fecha:

## Actividad 1: Expresiones equivalentes

### Lección 1

#### Parte I (con CAS): Comparación de expresiones mediante evaluación numérica

(A) La tabla de abajo muestra cinco expresiones algebraicas y dos valores posibles de  $x$ .

Usando los dos valores dados de  $x$  ( $1/3$  y  $-5$ ) y otros dos valores que tú elijas, calcula los valores que resultan en cada una de las expresiones, usando la herramienta de evaluación de tu calculadora [el “operador tal que”,  $( | )$ ].

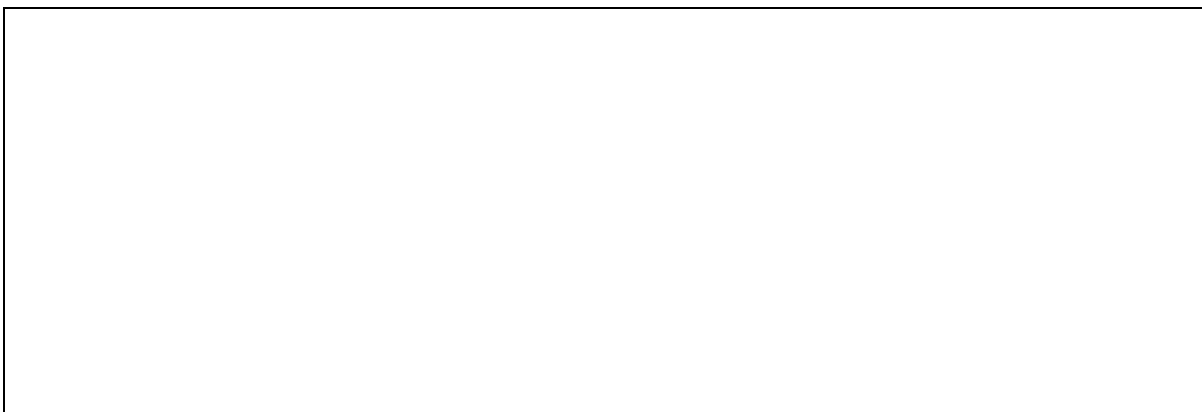
Importante: completa una fila de la tabla y así hasta que la termines.

Registra tus elecciones adicionales de los valores de  $x$ , y anótalos en la fila de arriba de la tabla; escribe los resultados apropiados en las celdas de abajo.

| Para $x =$                                     | $1/3$     | $-5$      |           |           |
|------------------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Expresión                                      | Resultado | Resultado | Resultado | Resultado |
| 1. $(x-3)(4x-3)$                               |           |           |           |           |
| 2. $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$                     |           |           |           |           |
| 3. $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$                      |           |           |           |           |
| 4. $(-x+3)^2 + x(3x-9)$                        |           |           |           |           |
| 5. $\frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$ |           |           |           |           |

(B) Compara los resultados obtenidos en las diversas expresiones de la tabla anterior. En base a esto que puedes decir sobre las siguientes expresiones.

- Expresión 1 y Expresión 4
- Expresión 3 y Expresión 5
- Expresión 2 y Expresión 3
- Expresión 2 y Expresión 5



---

**Discusión en el salón de clase de las Partes I A, B, C**

---

**Parte II (con papel y lápiz): comparación de expresiones mediante manipulación algebraica**

(B) Verifica tus conclusiones anteriores mediante el uso de álgebra en papel y lápiz; re-escribe las expresiones dadas en otra forma (no necesariamente en forma expandida). Muestra todo tu trabajo en la columna derecha de la tabla de abajo.

| Expresión dada                                 | Expresión dada en su forma re-escrita |
|------------------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $(x-3)(4x-3)$                               |                                       |
| 2. $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$                     |                                       |
| 3. $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$                      |                                       |
| 4. $(-x+3)^2 + x(3x-9)$                        |                                       |
| 5. $\frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$ |                                       |

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|--|--|

(C) En la discusión en el salón de clases, hiciste algunas conclusiones basadas en evaluaciones numéricas de expresiones. Explica en qué forma las manipulaciones algebraicas, en la Parte II B, apoyaron (o no) cada una de esas conclusiones.

|  |
|--|
|  |
|--|

## Lección 2

### Parte III (con CAS):

#### Verificación de la equivalencia mediante la re-escritura de la forma de una expresión, usando el comando EXPAND

La columna del lado izquierdo de la tabla de abajo contiene las expresiones de la lección previa. Usando tu calculadora, completa la columna del lado derecho de la tabla con las expresiones obtenidas al usar el comando EXPAND (toma en cuenta el menú de F2 en la calculadora).

Sintaxis: EXPAND (*expresión*)

| Expresión dada                                 | Resultado producido por EXPAND |
|------------------------------------------------|--------------------------------|
| 1. $(x-3)(4x-3)$                               |                                |
| 2. $(x^2+x-20)(3x^2+2x-1)$                     |                                |
| 3. $(3x-1)(x^2-x-2)(x+5)$                      |                                |
| 4. $(-x+3)^2+x(3x-9)$                          |                                |
| 5. $\frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$ |                                |

---

Discusión en el salón de clase de la Parte III

---

**Parte IV (con CAS):**

**Verificación de la equivalencia sin re-escribir la forma de una expresión, usando una prueba de la igualdad**

- (A) Introduce, directamente, en la línea de entrada de tu calculadora las ecuaciones formadas por las expresiones 3 y 5:

$$(3x-1)(x^2-x-2)(x+5) = \frac{(x^2+3x-10)(3x-1)(x^2+3x+2)}{(x+2)}$$

1. ¿Qué muestra la calculadora como resultado?

2. ¿Cómo interpretas este resultado?

3. Usa el operador “tal que” ( | ) de tu calculadora, y reemplaza  $x$  por  $-2$  en la ecuación precedente. Interpreta el resultado mostrado por la calculadora.

---

**Discusión en el salón de clase de la Parte IV A**

---

(B) Introduce, directamente, en la línea de entrada de tu calculadora la ecuación formada por las expresiones dadas 2 y 3:

$$(x^2 + x - 20)(3x^2 + 2x - 1) = (3x - 1)(x^2 - x - 2)(x + 5)$$

1. ¿Qué muestra la calculadora como resultado?

2. ¿Cómo interpretas este resultado?

---

**Discusión en clase de la Parte IV B**

---

**Parte V (con CAS): Verificación de la equivalencia, usando cualquiera de los métodos de CAS**

He aquí un nuevo conjunto de expresiones:

| Expresiones dadas                      |
|----------------------------------------|
| 1. $4(x-1)^2 - (x+1)^2$                |
| 2. $(2x+5)(x-3) - (x-3)^2$             |
| 3. $(x-3)(3x-1)$                       |
| 4. $\frac{(3x-1)(x^2 - x - 6)}{(x+2)}$ |

(A) Usa tu CAS para determinar cuáles de estas expresiones son equivalentes. Usa cualquiera de los métodos de CAS que prefieras. Muestra todo tu trabajo con CAS en la tabla de abajo:

| Qué introduces en la CAS | Resultado mostrado por la CAS |
|--------------------------|-------------------------------|
|                          |                               |
|                          |                               |
|                          |                               |
|                          |                               |

(B) Con base en tu trabajo anterior, ¿cuáles son las expresiones equivalentes? (No olvides especificar todos los valores posibles que puede tomar  $x$ .) Por favor, explica tu decisión acerca de la equivalencia.

# Anexo B

Nombre:

Fecha:

## Actividad 2: Continuación de la Equivalencia de Expresiones

### Lección 3

#### Parte I: Exploración e interpretación de los efectos de la tecla ENTER, así como de los comandos EXPAND y FACTOR

(A) (**con CAS**) Completa la tabla de abajo con lo mostrado en la pantalla de la calculadora, según sea requerido:

| Expresión dada                         | Resultado producido por ENTER | Resultado producido por FACTOR | Resultado producido por EXPAND |
|----------------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 1. $\frac{6x^2 - 5x - 4}{6}$           |                               |                                |                                |
| 2. $\frac{(x-2)^2 + (7x-2)(x-2)}{4}$   |                               |                                |                                |
| 3. $(2-x)(1-2x)$                       |                               |                                |                                |
| 4. $\frac{(3x-4)(2x^2+5x+2)}{(6x+12)}$ |                               |                                |                                |

(B) (con papel y lápiz)

1. Dada la expresión 1 (de la Parte I A):

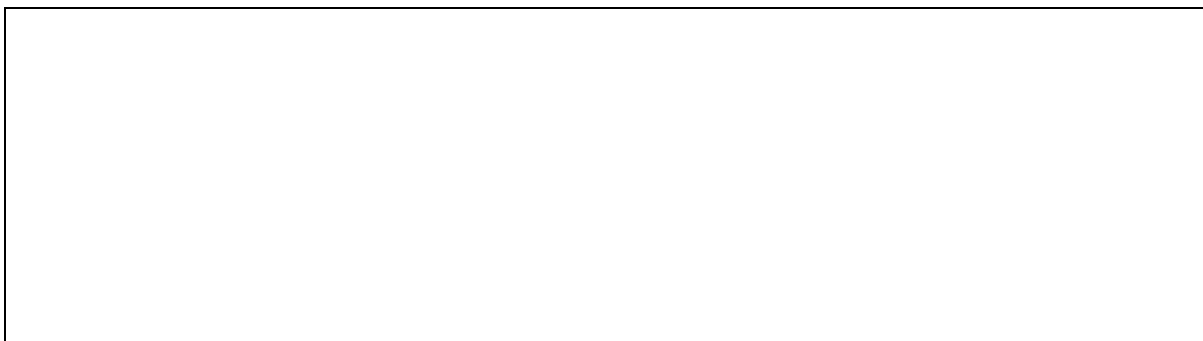
- Describe cómo es la estructura de cada una de las tres formas producidas por la calculadora y compáralas con la expresión dada.



- Todas estas formas, ¿son equivalentes a la expresión dada? Por favor, explica.



2. Dada la expresión 2, muestra los pasos algebraicos que usarías para obtener la forma producida por la tecla ENTER.



3. Considera la expresión 3 dada. Muestra, usando álgebra en papel y lápiz cómo obtienes la forma producida por el comando FACTOR.

4. Considera la expresión 4 dada. Muestra, usando álgebra en papel y lápiz, cómo obtienes la forma producida por el comando EXPAND.

5. En la tabla de la Parte I A anterior, ¿cuáles, de esas expresiones, son equivalentes entre ellas? (Compáralas tanto como puedas.) Por favor, justifica tu respuesta. En esta equivalencia de expresiones, ¿hay algunas restricciones en cuanto a los valores que pueda tomar  $x$ ? Por favor, explica.

---

**Discusión en el salón de clases de las Partes I A y B**

---

**Parte II: Muestra de la equivalencia de expresiones, mediante diversos usos de los comandos de CAS**

He aquí una lista de cuatro expresiones equivalentes, sujetas a ciertas restricciones.

Tabla 1

| Expresión dada                          |
|-----------------------------------------|
| 1. $\frac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{(7x+21)}$ |
| 2. $\frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$    |
| 3. $6x^2-21x+9$                         |
| 4. $\frac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)}$       |

- (A) Determina todos los valores en común que puede tomar  $x$  de estas expresiones. Muestra y explica cómo determinaste este conjunto de valores.

- (B) Usando, una vez y sólo una vez, cada uno de los cuatro métodos para determinar la equivalencia, muestra que todas las cuatro expresiones de la Tabla 1 son equivalentes. En la Tabla 2, establece qué es lo que introduces en la CAS y qué es lo que obtienes.

Tabla 1

| Expresión dada                             |
|--------------------------------------------|
| Exp1. $\frac{7(2x-1)(x+3)(3x-9)}{(7x+21)}$ |
| Exp2. $\frac{(6x-3)(x^2-7x+12)}{(x-4)}$    |
| Exp3. $6x^2-21x+9$                         |
| Exp4. $\frac{3(2x-1)(x^2-9)}{(x+3)}$       |

Tabla 2

| Método de CAS               | Qué introduces en la CAS | Resultado mostrado por la CAS |
|-----------------------------|--------------------------|-------------------------------|
| Verificación de la igualdad |                          |                               |
| FACTOR                      |                          |                               |
| EXPAND                      |                          |                               |
| ENTER                       |                          |                               |

- (C) Usando sólo los resultados de la Tabla 2, prueba las seis afirmaciones de equivalencia mostradas en la Tabla 3.

Tabla 3 (el símbolo “ $\equiv$ ” denota equivalencia)

| <b>Afirmación de equivalencia</b> | <b>Prueba de la equivalencia</b> |
|-----------------------------------|----------------------------------|
| Exp1 $\equiv$ Exp2                |                                  |
| Exp 1 $\equiv$ Exp3               |                                  |
| Exp1 $\equiv$ Exp4                |                                  |
| Exp2 $\equiv$ Exp3                |                                  |
| Exp2 $\equiv$ Exp4                |                                  |
| Exp3 $\equiv$ Exp4                |                                  |

---

**Discusión en el salón de clases de las Partes II A, B, y C**

---

# Anexo C

**Nombre:**

**Fecha:**

## Actividad 3: Transición de expresiones a Ecuaciones

### Parte I (con CAS): Introducción al uso del comando SOLVE

En la primera actividad, en torno a la equivalencia de expresiones, anulamos aquellas expresiones encontradas que no eran equivalentes (un recordatorio de la definición de equivalencia: “si para cualquier número posible que reemplaza a  $x$ , cada una de las expresiones dan el mismo valor, se dice que esas expresiones son equivalentes en el conjunto de valores posibles que puede tomar  $x$ .”).

Con esas expresiones no equivalentes, cuando las introducíamos en la CAS, las ecuaciones formadas con tales expresiones, la CAS no mostraba “true”. Esto fue así porque hay sólo *algunos* (o *ninguno*) valores de  $x$ , los cuales al sustituirlos en ambos lados de la ecuación produce resultados iguales. En la presente actividad se usará la CAS para encontrar los valores de  $x$  que producen resultados iguales.

He aquí un ejemplo de dos expresiones claramente no equivalentes:  $x^2$  y  $x$ .

Si se introduce en la calculadora una ecuación formada por estas dos expresiones ( $x^2 = x$ ), la pantalla de la calculadora no muestra “true”. Si se quiere encontrar esos valores de  $x$  para los cuales las dos expresiones producen valores iguales, se puede usar el comando SOLVE de la CAS.

**Syntax:** SOLVE (Expr1 = Expr2,  $x$ ), suponiendo que  $x$  es el nombre de la variable que aparece en cada expresión, y que Expr1 y Expr2 representan las expresiones dadas.

**Resuelve la ecuación  $x^2 = x$  usando el comando SOLVE de CAS.**

1. ¿Qué muestra la CAS como resultado?

2. ¿Puedes anticipar lo que mostraría la calculadora cuando sustituyas cada uno de estos valores de  $x$  en la ecuación?

3. Usando CAS “con el operador ” (“|”), verifica que la calculadora muestra, en realidad, aquello que se esperaba en la Pregunta 2.

**Syntax:** Expr1=Expr2 |  $x=valor$

**Terminología:** Los valores de  $x$  para los cuales ambas expresiones producen resultados iguales son, comúnmente, conocidos como “soluciones” de la ecuación.

**Parte II (con CAS):**

**Expresiones ya abordadas y su subsecuente integración en ecuaciones**

He aquí tres expresiones:

4.  $x(x^2 - 9)$ ,
5.  $(x+3)(x^2-3x) - 3x - 3$
6.  $(x^2 - 3x)(x+3)$

(A) Usa tu calculadora para determinar cuáles de estas expresiones son equivalentes. Completa la tabla de abajo con la información apropiada.

| Qué introduces en la CAS | Qué muestra la CAS | Mi interpretación de lo que muestra la CAS |
|--------------------------|--------------------|--------------------------------------------|
|                          |                    |                                            |

(B) ¿Cuáles, de las expresiones anteriores, son equivalentes? ¿Cuáles no son equivalentes? Por favor, explica.

(C) Construye una ecuación, usando un par de las expresiones dadas que no son equivalentes (observa Parte II B, anterior). Usa tu calculadora para determinar esos valores de  $x$ , si hay algunos para los que ambas expresiones, escritas como ecuación, son iguales.

| Qué introduces en la CAS | Qué muestra la CAS |
|--------------------------|--------------------|
|                          |                    |

(D) ¿Cómo usarías la CAS para verificar que los valores encontrados para  $x$  (en la Pregunta C, anterior) son soluciones de tu ecuación? Completa la tabla de abajo con la información apropiada.

| Qué introducirías en la CAS | El resultado que mostraría la CAS |
|-----------------------------|-----------------------------------|
|                             |                                   |

(E) Construye una ecuación, usando otro par de expresiones dadas que **no son equivalentes** (observa la Pregunta B. anterior). Sin usar la CAS y sin usar álgebra en papel y lápiz, encuentra la solución de esta ecuación. Por favor, explica.

|  |
|--|
|  |
|--|

- (F) Construye una ecuación, usando un par de las expresiones dadas que **son equivalentes** (observa la Parte II B anterior). Sin usar la CAS ni álgebra en papel y lápiz, encuentra la solución (es) de esta ecuación. Por favor, explica.

---

**Discusión en el salón de clases de las Partes I y II**

---

### Parte III (papel y lápiz): Construcción de ecuaciones e identidades

(A) 1. Construye una ecuación formada por dos expresiones equivalentes de tu propia elección.

2. Explica tus razones de porqué elegiste esas dos expresiones en particular.

3. ¿Qué puedes decir en torno a las soluciones de esta ecuación?

4. ¿Cómo usarías la CAS para apoyar tu respuesta a la Pregunta A3 anterior?

(B) 1. Construye una ecuación formada por dos expresiones no equivalentes de tu propia elección.

2. Explica tus razones de porqué elegiste esas dos expresiones en particular.

3. ¿Qué puedes decir en torno a las soluciones de esta ecuación?

4. ¿Cómo usarías la CAS para apoyar tu respuesta a la Pregunta B3 anterior?

---

**Discusión en el salón de clases de la Parte III, A y B**

---

#### Parte IV (con CAS): Síntesis de varias ecuaciones tipo

1. Resuelve las siguientes ecuaciones, usando el comando SOLVE de la CAS.

| Ecuación dada                            | Qué muestra la CAS |
|------------------------------------------|--------------------|
| 1. $(2-x)^2 = x(2x-4)$                   |                    |
| 2. $(x-5)(3x+7) - 5 = 3x^2 - 8x - 40$    |                    |
| 3. $3x^2 - x - 1 = 2x + 5$               |                    |
| 4. $-3x + 7 = \frac{-6x + 3}{3} - x + 7$ |                    |

2. ¿Cómo interpretas cada expresión mostrada en la pantalla de la CAS, al responder la Pregunta 1 anterior?

---

**Discusión en el salón de clases de la Parte IV**

---

# Anexo D

Nombre:

Fecha:

## Actividad 4: Sistemas de ecuaciones

### Lección 1: Introducción a los sistemas de ecuaciones

#### Parte I (con CAS): uso de evaluaciones numéricas para verificar soluciones dadas con números de cierto tipo de ecuaciones dadas

##### (A) Ecuaciones de primer grado con una incógnita

1. La tabla siguiente contiene una ecuación y algunos valores numéricos:

*Sin resolver* esta ecuación, determina si los valores de la columna de la izquierda son soluciones de la ecuación (usando la CAS). Pero antes de usar la CAS, describe, en el rectángulo de abajo, cómo propones usar la CAS para determinar esto, y di qué información te dará la calculadora.

|  |
|--|
|  |
|--|

2. Ahora el trabajo con la calculadora (pero no resuelvas, por favor). Completa la tabla de abajo con la información apropiada.

$$12x + 15 = 4(x - 2) + 7$$

| Valores de $x$ | Qué introduces en la CAS | Resultado mostrado por la CAS |
|----------------|--------------------------|-------------------------------|
| $x = -2$       |                          |                               |
| $x = 2$        |                          |                               |
| $x = -5$       |                          |                               |

3. Pregunta adicional: ¿puedes encontrar otras soluciones de esta ecuación? Por favor, explica.

(B) Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

1. La tabla siguiente contiene una nueva ecuación y algunos valores numéricos:

*Sin resolver* esta ecuación, pero de nuevo usando la CAS, determina si cada par de valores de la columna de la izquierda es solución. Pero antes de usar la CAS, describe, en el rectángulo de abajo, cómo propones usar la CAS para determinar esto, y di qué información te dará la calculadora.

2. Ahora el trabajo con la calculadora (pero sin resolver, por favor). Completa la tabla de abajo con la información apropiada.

$$\frac{3}{2}y - x = 9$$

| Valores de la pareja $x$ y $y$ | Qué introduces en la CAS | Resultado mostrado por la CAS |
|--------------------------------|--------------------------|-------------------------------|
| $x = 3$ y $y = 12$             |                          |                               |
| $x = -3$ y $y = 4$             |                          |                               |
| $x = -18$ y $y = -6$           |                          |                               |

3. Pregunta adicional: ¿puedes encontrar otras soluciones de esta ecuación? Por favor, explica.

(C) Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

1. La tabla siguiente contiene un sistema de ecuaciones y algunas parejas ordenadas de números.

*Sin resolver* este sistema de ecuaciones, determina si cada par de valores de la columna de la izquierda es solución (usando la CAS). Pero antes de usar la CAS, describe, en el rectángulo de abajo, cómo propones usar la CAS para determinar esto, y di qué información te dará la calculadora.

2. Ahora el trabajo con la calculadora (pero no resuelvas). Por favor, escribe, en la tabla de abajo, qué introduces en la calculadora, así como aquello que la calculadora muestra como resultado.

$$2x = 8 - 4y$$

$$17x - 31y = 3$$

| Valores de la pareja $x$ y $y$ | Qué introduces en la CAS | Resultado mostrado por la CAS |
|--------------------------------|--------------------------|-------------------------------|
| $x = 0$ y $y = 2$              |                          |                               |
| $x = 4$ y $y = 3$              |                          |                               |
| $x = 2$ y $y = 1$              |                          |                               |

3. Pregunta adicional: ¿puedes encontrar otras soluciones de este sistema de ecuaciones?  
Por favor, explica.

4. ¿Hay algunas preguntas o ideas que se te hayan ocurrido, mientras trabajabas con esos tres tipos de ecuaciones?

---

### Discusión en el salón de clases de la Parte I

---

[Para tomar nota durante la discusión con todo el grupo]

Sección A, ecuación:

$$12x + 15 = 4(x - 2) + 7$$

Sección B, ecuación:

$$\frac{3}{2}y - x = 9$$

|                                   |                               |
|-----------------------------------|-------------------------------|
| Sección C, sistema de ecuaciones: | $2x = 8 - 4y$ $17x - 31y = 3$ |
|-----------------------------------|-------------------------------|

### Parte II (con CAS):

#### Interpretación con la CAS de las soluciones de ecuaciones con una y dos incógnitas

##### (A) Solución de una ecuación con una incógnita.

Usa el comando “SOLVE” de la CAS para resolver la siguiente ecuación:

$$4(3x-7) = 2(3-x)+5$$

| Qué introduces en la CAS | Qué muestra la CAS como resultado |
|--------------------------|-----------------------------------|
|                          |                                   |

##### (B) Solución de una ecuación con dos incógnitas.

Las siguientes seis preguntas se refieren a la ecuación:  $2x+7 = 8y+11$ .

1. ¿Cuál crees que sea el resultado si usas la CAS para resolver esta ecuación en términos de  $x$ ?

|  |
|--|
|  |
|--|

2. Usa la CAS para resolver esta ecuación en términos de  $x$ :

| Qué introduces en la CAS | Qué muestra la CAS como resultado |
|--------------------------|-----------------------------------|
|                          |                                   |

3. ¿Cómo interpretas el resultado mostrado por la CAS?

|  |
|--|
|  |
|--|

4. ¿Cuál crees que sea el resultado si usas la CAS para resolver esta ecuación en términos de  $y$ ?

|  |
|--|
|  |
|--|

5. Usa la CAS para resolver la ecuación:  $2x+7 = 8y+11$  en términos de  $y$ :

| Qué introduces en la CAS | Qué muestra la CAS como resultado |
|--------------------------|-----------------------------------|
|                          |                                   |

6. ¿Cómo interpretas el resultado mostrado por la CAS?

|  |
|--|
|  |
|--|

(C) Distinción entre soluciones de ecuaciones con una y dos incógnitas

1. Es probable que te hayas dado cuenta de que, en la Parte II (A), la CAS mostró un valor numérico como solución para  $x$ . Por el contrario, en la Parte II (B), la calculadora mostró el resultado en forma de expresión algebraica. ¿Cómo explicas esta diferencia?

|  |
|--|
|  |
|--|

2. ¿Cómo puedes usar esas expresiones, mostradas por la CAS, para encontrar soluciones numéricas de las ecuaciones?

---

**Discusión en el salón de clases de la Parte II A, B, C**

---

(D) Uso de la CAS para generar y verificar soluciones de ecuaciones con una y dos incógnitas

1. Usa la CAS para generar tres soluciones de cada una de estas ecuaciones (registra todo aquello que introduces en la CAS mientras prosigues con tu trabajo, y de lo que la CAS muestra como resultado, en cada paso). Verifica al menos una solución de cada ecuación (con la CAS).

(a)  $\frac{x+1}{3} = 5y - 7$

| Qué introduces en la CAS | Qué resultado muestra la CAS |
|--------------------------|------------------------------|
|                          |                              |

(b)  $-\frac{1}{7}y + \frac{11}{12} = 3x - \frac{5}{8}$

| Qué introduces en la CAS | Qué resultado muestra la CAS |
|--------------------------|------------------------------|
|                          |                              |

2. Plantea al menos una pregunta o da alguna idea que se te haya ocurrido, mientras trabajabas en la Parte D, precedente (por ejemplo, una pregunta referente a las dificultades que hayas tenido).

## Lección 2 (Partes IIIA, IIIB, IIIC)

### Parte IIIA (con papel y lápiz): Repaso de los métodos de Igualación y de Sustitución

1. He aquí el método de IGUALACIÓN para resolver un sistema de ecuaciones lineales:

| MÉTODO DE IGUALACIÓN                                                                                                                            | $\begin{aligned}x + 3y &= 5 \\ 7x + 6y &= 20\end{aligned}$                                                                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| El método algebraico de Igualación consiste en:                                                                                                 |                                                                                                                                   |
| 1. Despejar la misma variable en cada una de las ecuaciones y, de este modo, construir dos expresiones; las cuales tienen una variable común;   | $\begin{aligned}y &= (5-x)/3 \\ y &= (20-7x)/6\end{aligned}$                                                                      |
| 2. Proponer que las dos expresiones obtenidas en el paso 1 sean iguales entre ellas, y así construir una ecuación con una variable;             | $(5-x)/3 = (20-7x)/6$                                                                                                             |
| 3. Resolver la ecuación que resulta;                                                                                                            | $\begin{aligned}(5-x)/3 &= (20-7x)/6 \\ 2(5-x) &= (20-7x) \\ 10-2x &= 20-7x \\ 7x-2x &= 20-10 \\ 5x &= 10 \\ x &= 2\end{aligned}$ |
| 4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema, con objeto de calcular el valor de la otra variable de la pareja solución. | $y = (5 - x)/3 = (5 - 2)/3 = 1$ <p>La pareja solución es <math>(x, y) = (2, 1)</math><br/>¡Verifique esto!</p>                    |

Pregunta: ¿por qué piensas que este método es llamado Método de Igualación? En otras palabras, ¿en qué sentido se lleva a cabo la igualación en este método?

2. He aquí el método de SUSTITUCIÓN para resolver un sistema de ecuaciones lineales:

|                                                                                                                                                          |                                                                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| MÉTODO DE SUSTITUCIÓN                                                                                                                                    | $2x + 3y = 25$ $5x + y = 30$                                                                                         |
| El método de sustitución algebraica consiste en:                                                                                                         |                                                                                                                      |
| 1. Despejar, si es necesario, una de las variables en una de las ecuaciones;                                                                             | $y = 30 - 5x$                                                                                                        |
| 2. Sustituir la expresión obtenida, en el paso 1, en la variable apropiada de la otra ecuación y, de este modo, construir una ecuación con una variable; | $2x + 3(30 - 5x) = 25$                                                                                               |
| 3. Resolver la ecuación obtenida en el paso 2;                                                                                                           | $2x + 90 - 15x = 25$ $-13x = 25 - 90$ $-13x = -65$ $x = 65/13$                                                       |
| 4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema; con objeto de calcular el valor de la otra variable de la pareja solución.          | $y = 30 - 5(65/13)$ $= 65/13$ <p>La pareja solución es <math>(x, y) = (65/13, 65/13)</math><br/>¡Verifique esto!</p> |

Pregunta: ¿por qué piensas que este método es llamado Método de Sustitución?

3. ¿En qué forma estos dos métodos (los métodos de Igualación y de Sustitución) te permiten reducir el sistema dado en otro que ya sabes cómo abordarlo?

---

## Discusión en el salón de clases de la Parte IIIA

---

### Parte IIIB (con CAS): Uso del método de Igualación con la CAS

He aquí un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x - 8 &= 2y + 2 \\ 3x + 5y + 3 &= 0 \end{aligned}$$

1. Con la CAS, usa el método de Igualación para resolver este sistema (registra todo aquello que introduces en la calculadora, mientras prosigues con tu trabajo, y de lo que la calculadora muestra como resultado al usar sus comandos).

| El método de Igualación consiste en:                                                                                                                                     | Qué introduces en la CAS | Qué muestra la CAS como resultado |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|-----------------------------------|
| 1. Despejar la misma variable en cada una de las ecuaciones y, de este modo, crear dos expresiones, las cuales tienen una sola variable;                                 |                          |                                   |
| 2 y 3. Proponer que las dos expresiones obtenidas en el paso 1 sean iguales entre ellas, para construir una ecuación con una variable; resolver la ecuación que resulta; |                          |                                   |
| 4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema; con objeto de calcular el valor de la otra variable de la pareja solución.                          |                          |                                   |

2. ¿Cómo verificas con la CAS que tu solución es correcta?

3. En el paso 4 de la Pregunta 1 anterior, reemplazaste el valor obtenido en el Paso 3 (de la primera variable) en una de las ecuaciones. Ahora sustituye este mismo valor obtenido en el Paso 3 en la otra ecuación. ¿Qué sucede? ¿Por qué crees que pasa esto?

**Parte IIIC (con CAS): Uso del método de Sustitución con la CAS**

1. Con la CAS, usa el método de Sustitución para resolver este sistema (registra todo aquello que introduces en la calculadora, mientras continuas con tu trabajo, y de lo que la calculadora muestra como resultado al usar sus comandos).

$$x + 3y = 5$$

$$7x + 6y = 20$$

| El método de Sustitución consiste en:                                                                                                                     | Qué introduces en la CAS | Qué muestra la CAS como resultado |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|-----------------------------------|
| 1. Despejar, si es necesario, una de las variables de alguna de las ecuaciones;                                                                           |                          |                                   |
| 2. Sustituir la expresión obtenida, en el paso 1, en la variable apropiada de la otra ecuación y, de este modo, crear una ecuación con una sola variable; |                          |                                   |
| 3. Resolver la ecuación obtenida en el paso 2;                                                                                                            |                          |                                   |
| 4. Sustituir el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema; con objeto de calcular el valor de la otra variable de la pareja solución.           |                          |                                   |

2. ¿Cómo verificas con la CAS que tu solución es correcta?

|  |
|--|
|  |
|--|

3. ¿Cuál de los dos métodos (IGUALACIÓN y SUSTITUCIÓN) prefieres y por qué?

4. ¿Qué tienen en común esos dos métodos? (No re-escriba sólo los pasos de los dos métodos).

---

**Discusión en el salón de clases de la Parte IIIC**

---