Divisón Justa: Antecedentes, Algoritmos y Geometría

Tesis
para obtener el grado de

Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas

presenta

Manuel Alejandro Romo de Vivar López

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Morelia, Michoacán, Marzo del 2016

Director de tesis:
Dr. Miguel Raggi Pérez
ENES, Unidad
Morelia.

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mis padres, quienes me han dado todo y que gracias a ellos hoy estoy aquí y tengo la dicha de haber concluido la licenciatura. Sin ellos no sería quien soy ahora. Gracias por todo el amor y comprensión que me han dado.

A mi hermano, a quien le toca aguantar mis ratos de mal humor, sé que no he sido el mejor hermano del mundo pero quiero que sepas que te quiero como no tienes una idea.

A los profesores que de alguna forma contribuyeron a mi formación profesional: Karina, Edgar, Daniel, Fernando, Francisco, Luis, Malú, David, Jorge y Poke. Quiero mencionar en especial a Miguel por su paciencia y toda su ayuda al realizar este trabajo. Muchas gracias a todos por todos los conocimientos transmitidos, haré todo lo que esté a mi alcance para enorgullecerlos.

A Michaelle (cuyo nombre ya sé escribir), Alex Domínguez y Alex Solís; quienes han estado ahí desde tiempos inmemorables. Gracias por creer en mí y ayudarme a crecer.

A mis amigos y compañeros de la facultad: Chava, Erick, Iván, Memo, Richie, Richie, Rob, Santy, Jorge, Pau, Karen, Jona, Fanioli, Diego, Dulce, Prima. Gracias por todo, ustedes han hecho de este viaje algo memorable. Los quiero y nunca los voy a olvidar.

A mis primos, primas, tíos, tías y en particular a mis abuelitas, pues nunca habrá un amor como el de los abuelos.

Finalmente a quienes estén leyendo esto, pues si lo están leyendo es por algo.

A mis abuelos, Victor y Alfonso, y a mi tía Rosy, quienes ahora descansan en paz. Siempre estarán en mi corazón.

Resumen

Este trabajo consiste en analizar los antecedentes más cercanos al problema de la División Justa, así como introducir distintas formas de estudiar el problema central. Para esto primero hablaremos sobre Teoría de Utilidad y desarrollaremos una buena parte de Teoría de Juegos con la finalidad de que el lector se familiarice con matemáticas para la resolución de conflictos y además conozca los teoremas, resultados y algunas de las aplicaciones más importantes del área.

En los capítulos posteriores se dará la motivación del problema, las definiciones generales, un breve análisis de la clasificación de bienes y las suposiciones que uno debe hacer para estudiar formalmente la teoría. Una vez dado esto, el siguiente paso será dar algoritmos para lograr División Justa y otras variaciones del problema. Finalmente daremos una estructura geométrica al problema, con la cual podemos generalizar, dar interpretaciones a las definiciones básicas, demostrar teoremas y dar una justificación de porqué siempre existe una forma de solucionar el problema cuando se trata de cierto tipo de bienes a dividirse.

División, Justa, Algoritmos, Pastel, Geometría

Abstract

This works consists in analyzing the background in Fair Division problems, as well as giving an introduction to distinct ways to study the central problem. First we must talk about Utility Theory and then we will develop enough Game Theory in order that the reader is familiar with mathematics for dispute resolution and also get to know the theorems, results and some of the most important aplications on the field.

In subsequent chapters we will give the motivation for the Fair Division problem, general definitions, a brief goods clasification and the supositions one must assume in order to give formality to this theory. Once given this, the next step is to give algorithms for reaching Fair Division and other variations of the problem. Finally we will give a geometric structure to the problem, with which we can generalize, give geometrical interpretations to the previous definitions, proof some theorems and give an argument of why there is always a solution to the problem when it comes to certain types of goods to be divided.

Introducción

La División justa, así como la Teoría de Juegos, Teoría de Votaciones, Teoría de Elecciones y muchas más es parte de las matemáticas que se enfocan a la resolución de conflictos. La idea general del problema es buscar la forma de dividir un cierto conjunto dado entre una cierta cantidad de personas (denominadas en la literatura como “jugadores”) interesadas en dicho conjunto, de tal forma que todos los jugadores reciban una parte “justa” del total. Resulta que si el conjunto a dividir cumple ciertas características entonces siempre existe una solución al problema y será el objetivo principal de esta tesis argumentar la razón de dicha existencia y dar algoritmos para siempre conseguirla.

En el primer capítulo exploraremos un poco la Teoría de Utilidades, donde el objetivo principal es introducir el Teorema de Von Neumann y Morgenstern. Dicho resultado demuestra que siempre que tengamos un conjunto de posibilidades/objetos a elegir y que nuestras preferencias cumplan algunas propiedades básicas, entonces siempre podemos modelar nuestras preferencias por los objetos del conjunto con una función que va de dicho conjunto al intervalo $[0, 1]$.

En el segundo capítulo hablaremos de Teoría de Juegos, resultados importantes (como el Teorema de Nash), problemas importantes y estrategias con la finalidad de plantear y dar una solución a uno de los antecedentes más importantes al problema de División Justa: el Arbitraje.

En el tercer capítulo damos formalidad al problema central de la tesis, clasificamos los tipos de conjuntos que podemos dividir y planteamos algunas variaciones al problema.

El cuarto capítulo se centra en dar algoritmos, demostrar porqué generan una solución al problema y analizar las limitaciones de cada algoritmo. También discutimos la naturaleza de cada algoritmo y al final del capítulo se presenta un resultado interesante respecto a particiones contiguas que se desarrolla a mediados del capítulo.

Finalmente, en el quinto capítulo emplearemos un teorema de análisis y teoría de la medida para dar una interpretación geométrica al problema. Daremos interpretación geométrica a todos los conceptos que se plantearon en capítulos anteriores y se generalizarán conceptos para conseguir el objetivo principal del capítulo: saber porqué siempre existe una solución al problema siempre que la naturaleza del conjunto lo permita.

Índice general

Capítulo 1

Utilidad

La utilidad es uno de los conceptos centrales en las ciencias sociales, especialmente en la economía. Uno de los enfoques de la economía antes de la utilidad era simplemente estudiar el dinero y cómo la gente trataba de maximizarlo. Tiempo después los economistas se dieron cuenta de que los métodos que utilizaban con éste fin también podían ser utilizados para estudiar el comportamiento de los humanos, entendiendo que todos tenemos distintas preferencias.

El concepto de utilidad puede ser entendido como la intensidad de la felicidad individual, o la cantidad de satisfacción que puede proporcionar algo. La Teoría de la Utilidad, lo que dice a grandes rasgos, es que podemos asociar un número real a nuestras preferencias, que representan, intuitivamente, la satisfacción obtenida.

La pregunta es, entonces, si siempre podemos asociar estos números. Algo que frecuentemente ocurre en la realidad cuando intentamos dar un orden a nuestras preferencias es, por ejemplo, que nuestros gustos cambien con el tiempo (o dependiendo de nuestro humor) o simplemente que dos o más cosas sean tan diferentes entre sí que no podamos compararlos.

También puede suceder que nuestro orden *no sea transitivo*, aunque es un tanto difícil pensar en un ejemplo para este caso. Por ejemplo, podríamos imaginar una situación en donde tienes 3 opciones:

a) Ver televisión,

b) Trabajar,

c) Salir con tus amigos.

Si no tienes que trabajar y tus amigos te invitan a salir, sería muy raro decir que no puedes porque vas a ver la televisión ($c > a$). Si te invitan a salir y tienes que trabajar, usualmente sale nuestro lado responsable y rechazamos la invitación ($b > c$) pero, seamos honestos, seguramente hemos dejado de trabajar para ir a ver la televisión ($a > b$).

Dicho orden será asignado mediante una función de utilidad, que definiremos a continuación:

Definición 1.0.1. Sea A un conjunto y B un conjunto parcialmente ordenado, diremos que una función u es una *Función de Utilidad* si $u : A \to B$.

En este trabajo nos centraremos en dos tipos de utilidad: ordinal y cardinal.

1.1. Utilidad Ordinal

En este tipo de utilidad solo nos importará el orden que asignemos a cada objeto de nuestro conjunto A y querremos poder ordenar completamente. Supongamos, por ejemplo, que el conjunto de preferencias de un jugador J es $A = \{correr, nadar, bicicleta\}$ y tomemos como codominio a $\mathbb{N}$. Si J puede dar el siguiente orden al conjunto A: $bicicleta > correr > nadar$ entonces bastará con asignar $u(nadar) = 1, u(correr) = 2, u(bicicleta) = 3$.

Para poder hablar de este tipos de utilidad necesitamos pedir, además de lo anterior, el siguientes axioma:

- Completitud: $\forall(a_1, a_2 \in A)((u(a_1) \leq u(a_2)) \vee (u(a_2) \leq u(a_1)))$.

Es decir, queremos que cada jugador pueda dar un orden lineal al conjunto de sus preferencias.

Cabe destacar lo siguiente: como en la utilidad ordinal sólo queremos distinguir el orden de nuestras preferencias: si tomamos u_1 y u_2 dos funciones de utilidad tales que $f, g : \{a, b, c\} \to \mathbb{N}$, no habría diferencia en asignar $u_1(a) = 1, u_1(b) = 2, u_1(c) = 3$ a asignar $u_2(a) = 1, u_2(b) = 2, u_2(c) = 5000$.

Finalmente, si un jugador se ve en la situación de elegir entre dos objetos el jugador debería elegir el objeto que mayor utilidad le proporciona.

1.2. Utilidad Cardinal

A diferencia de la utilidad ordinal, aquí sí nos interesa qué tanto preferimos un elemento a otro. Pensemos un caso en el que tenga sentido distinguir el concepto de utilidad cardinal al de utilidad ordinal: usando las asignaciones del párrafo anterior imaginemos que en un concurso en el que nos va muy mal, aseguramos ganar el premio b que nos da una utilidad de 2, como una última oportunidad se nos da la opción de quedarnos con nuestro premio o tirar una moneda con la posibilidad de llevarnos el premio c (si cae cara) y en caso contrario obtenemos el premio a.

En este ejemplo, si la asignación fuera dada por u_1 quizá nos daría igual entre jugar o no pues los 3 premios tienen utilidades muy cercanas, mientras que si la asignación fuera dada por u_2 seguramente eligiríamos jugar. A estas asignaciones de probabilidad les llamaremos *loterias*.

1.2.1. Loterias

La idea general de las loterias es asignar probabilidades a nuestras preferencias, formalmente:

Definición 1.2.1. Sea $\Omega = \{w_1, \cdots, w_n\}$ el conjunto de posibilidades. Una *loteria* es una combinación convexa (formal) de Ω. En otras palabras, sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tales que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, entonces $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$ es una loteria.

Una lotería $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i$ la podemos pensar, entonces, como que hay λ_i de probabilidad de obtener la posibilidad w_i.

Denotaremos por $\mathbb{L} := \mathbb{L}(\Omega)$ al conjunto de loterias, es decir:

$$\mathbb{L} := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}$$

Esta vez no es tan claro qué es lo que un jugador debe de hacer si se ve en la situación de elegir entre dos loterías. Sean f y g dos loterías, la notación $f \prec g$ significará que la lotería g es preferida sobre la lotería f, $f \preceq g$ significará que la lotería g es preferida o es indiferente a la lotería f y finalmente $f \sim g$ que el jugador es indiferente al elegir entre f y g.

Von Neumann y Morgenstern propusieron 4 axiomas que creyeron que un jugador racional debería de tener para la elección entre loterías:

1. Completitud: $\forall (f, g \in \mathbb{L})(f \preceq g \vee g \preceq f)$.

2. Transitividad: $f \preceq g \wedge g \preceq h \Rightarrow f \preceq h$.

3. Independencia: Sean $f, g, h \in \mathbb{L}$ con $f \preceq g$ y sea $t \in [0, 1]$. Entonces $tf + (1-t)h \preceq tg + (1-t)h$.

4. Continuidad: Sean $f, g, h \in \mathbb{L}$ con $f \preceq g \preceq h$. Entonces $\exists (p \in [0, 1])(g \sim ph + (1-p)f)$.

1.2.2. Teorema de Von Neumann y Morgenstern

Ahora llegamos al Teorema objetivo del primer capítulo. Von Neumann y Morgenstern probaron el siguiente Teorema:

Teorema 1.2.2. *Si las preferencias de un jugador cumplen los axiomas antes mencionados, entonces existe una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que para cualesquiera dos loterías f y g se tiene que*

$$f \prec g \iff u(f) < u(g),$$

donde definimos $u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i\right) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(w_i)$.

Dicha u es única hasta funciones lineales que conserven el orden.

En otras palabras, si los axiomas se satisfacen, entonces las preferencias de dicho jugador pueden ser representadas por una función de utilidad u. Es decir, uno puede asignar utilidades a cada posible resultado de tal manera que la elección de la lotería de acuerdo con la preferencia $\prec$ equivale a elegir la lotería con la utilidad esperada más alta.

No se dará una prueba del teorema pero daremos un algoritmo basado en una construcción muy similar a la que utilizaron Von Neumann y Morgenstern en su demostración para construir la función de utilidad buscada.

Algorithm 1 Construcción de la Función de Utilidad

Identificar el elemento preferido y el menos preferido de Ω, y nombrarlos w_0 y w_1 respectivamente.
Definimos $u(w_0) = 0$ y $u(w_1) = 1$.
Definimos $L(p) = pw_1 + (1 - p)w_0$.
Para $i = 2$ **hasta** $i = n$ **, hacer:**
    $j \leftarrow 1$
    $p \leftarrow \frac{1}{2}$.
    Mientras $w_i \nsim L(p)$ **, hacer:**
        Preguntamos al jugador: ¿Prefieres la lotería $L(p)$ o prefieres w_i?
        Si Prefiere $L(p)$ **, entonces:**
            $p \leftarrow p - \frac{1}{2^{j+1}}$.
        Si no
            $p \leftarrow p + \frac{1}{2^{j+1}}$.
        $j \leftarrow j + 1$.
    Definimos $u(w_i) = \lim_{j\to\infty} p$.

De esta manera se puede aproximar tanto como se quiera a $u(w)$ para cada $w \in \Omega$.

No es difícil ver porqué el algoritmo funciona. Como el jugador sabe el orden de sus preferencias (y éste es lineal) entonces puede encontrar su elemento favorito y menos favorito. Por el resultado de Von Neumann y Morgenstern sabemos que da igual aplicar transformaciones lineales, por lo que podemos asociar al elemento menos favorito el 0 y al favorito al 1. Después de eso el algoritmo se reduce a una búsqueda binaria que encuentra el valor de cada elemento basado en las preferencias del jugador.

Ahora sabemos que siempre es posible representar las preferencias de cualquier jugador racional por medio de una función de utilidad, y que podemos calcular la utilidad que nos proporciona una lotería simplemente calculando su esperanza.

Para finalizar este capítulo cabe destacar dos puntos: la utilidad cardinal no se ve afectada por transformaciones lineales que conserven el orden (multiplicar por un número positivo y la suma de cualquier real). El segundo punto es que hay que recordar que la utilidad está definida a nivel personal. En otras palabras, no está bien definido lo que significa comparar utilidades de distintos jugadores.

Capítulo 2

Teoría de Juegos

2.1. Introducción

La teoría de juegos es el análisis lógico de situaciones de conflicto y cooperación. De manera más específica, un juego está definido como cualquier situación en que la que:

- Hay al menos dos jugadores.
- Cada jugador tiene un conjunto de estrategias que puede seguir.
- La estrategia elegida por cada jugador determina un único resultado para el juego.
- Asociado a cada resultado del juego se tiene una colección de pagos, uno para cada jugador.

Lo anterior es generalizado en la siguiente definición:

Definición 2.1.1. Un *juego finito de n jugadores en forma normal* es una terna $< N, A, U >$ donde $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ es un conjunto finito de índices; $A = (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)$, donde A_i es un conjunto finito de acciones para el jugador i y cada $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = a \in A$ es un perfil de acción; $U = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ es un perfil de funciones de utilidad, donde $u_i : A \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad para el jugador i.

En el caso particular de un juego finito de 2 jugadores en forma normal puede ser representado de manera simple en una matriz de tamaño $|A_1| \times |A_2|$ en donde el jugador 1 elige una fila i, el jugador 2 elige una columna j y la entrada de la matriz en la intersección es el perfil de función de utilidad $u_{i,j} = \left(u_1\left(a_{1_i}, a_{2_j}\right), u_2\left(a_{1_i}, a_{2_j}\right)\right)$. *Para el caso de 2 jugadores renombraremos al jugador 1 como Rosa y al jugador 2 como Colin.*

El objetivo en general de la teoría de juegos es identificar qué estrategias debe elegir cada jugador para maximizizar sus respectivas ganancias. Si existe comunicación entre los jugadores quizá podrían esperar a llegar a algún acuerdo, formar alianzas o comenzar a hacer amenazas unos a otros para que cada jugador pueda obtener más a partir de las acciones de los otros jugadores. Por otra parte si no existe comunicación ¿qué estrategias podrían hacer que cada jugador obtenga más ganancias? ¿Se podrá predecir cómo van a jugar los otros jugadores? ¿Y si los otros jugadores piensan que yo pienso que ellos van jugar cierta estrategía para aprovecharme de ellos?

Cabe mencionar que los juegos con más de dos jugadores pueden volverse increíblemente complejos, así que todos los ejemplos y algunas de las definiciones serán pensadas para $n = 2$.

2.2. Juegos de suma cero

2.2.1. Estrategias Puras

Definición 2.2.1. un *juego de suma cero* es un juego de 2 jugadores tal que $\forall a \in A, u_1(a) + u_2(a) = 0$.

Observación. Nótese que en un juego de suma cero los jugadores tienen intereses opuestos, por esta razón dicho juego puede expresarse como una matriz con entradas reales que representan las utilidades para Rosa.

Ejemplo. Primero visualicemos un juego en su forma matricial, digamos $< \{1,2\}, \{A,B,C\} \times \{D,E\}, U >$.

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} (2,-2) & (-3,3) \\ (0,0) & (5,-5) \\ (6,-6) & (-8,8) \end{pmatrix}
\end{array}$$

Es un juego entre dos personas, Rosa y Colin, donde Rosa puede elegir entre las estrategias A, B y C (filas de la matriz) y Colin puede elegir entre las estrategias D y E (columnas de la matriz). La intersección de la estrategia elegida por Rosa y la estrategia elegida por Colin es la utilidad que recibe cada uno. Digamos que Rosa elige B y Colin elige E, entonces Rosa recibiría un pago de 5 mientras que Colin recibiría un pago de -5.

Como se destaca en el comentario, será conveniente expresar la matriz de un juego de suma cero con entradas reales, así la matriz puede reescribirse como

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Los juegos de suma cero para dos jugadores son los más simples pero servirán para una primera introducción.

Notemos que en un juego de suma 0 expresado como anteriormente, Rosa quiere maximizar y Colin quiere minimizar.

Notación. Sea $a = (a_1, \cdots, a_n) \in A$. Ocasionalmente se utilizará la siguiente notación:

$$a_{-i} = (a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n).$$

Entonces abusando de la notación, pensaremos a a por (a_i, a_{-i}).

Esta notación será más clara para poder identificar ciertas propiedades en un juego en forma normal, en particular en forma matricial (para 2 jugadores) nos mostrará cómo identificar rápidamente la mejor estrategia que pueden utilizar ambos jugadores en cierto tipo de matrices.

Definición 2.2.2. Sea $a = (a_i, a_{-i}) \in A$:

1. $BR(a_{-i})$ es el conjunto de las estrategias que mejor responden a a_{-i}
2. $a_i^* \in BR(a_{-i}) \iff \forall a_i \in A_i, u_i\left(a_i^*, a_{-i}\right) \geq u_i(a_i, a_{-i})$

De manera informal, si supieramos de antemano lo que todos los jugadores van a hacer, seguramente podríamos elegir la estrategia que más nos beneficia en ese caso.

Ejemplo. Pensemos en el siguiente juego.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 100 & -9 \\ 0 & -1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Supongamos que Rosa sabe que Colin va a elegir A. Como cada jugador quiere maximizar su utilidad, lo mejor que puede hacer Rosa es elegir A para obtener la máxima utilidad que puede obtener en el juego. Por otro lado, si Colin anuncia públicamente que va a eligir B (y Colin siempre cumple lo que dice) entonces la mejor respuesta de Rosa es B.

El problema con esto es que realmente no siempre sabemos de antemano lo que los otros jugadores podrían elegir. Afortunadamente existen ciertos juegos en los que podemos encontrar un perfil de accion estable.

Definición 2.2.3. Sea $a \in A$. a es un *equilibrio de Nash en estrategia pura* $\iff \forall i, a_i \in BR(a_{-i})$.

Ejemplo. Revisemos una vez más el juego del ejemplo anterior

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 100 & -9 \\ 0 & -1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Pongamos atención al hecho de que Colin no tiene ningún motivo para elegir la estrategia A, pues todos los valores de la primer columna son mayores a los de la columna B, así que seguramente Colin eligirá la estrategia B. Rosa debe elegir la estrategia B, como mencionamos anteriormente, pues es su mejor respuesta. Cuando ambos juegan B resulta que ambos están jugando la mejor respuesta a la estrategia del otro por lo que el perfil (B,B) es un equilibrio de Nash en estrategia pura.

A continuación veremos la forma de encontrar el/los equilibrio(s) de Nash en estrategia pura (si es que existen).

Definición 2.2.4. Sean a_i y $a_i^{'}$ dos estrategias para el jugador i y sea

$$A_{-i} = A_1 \times \cdots \times A_{i-1} \times A_{i+1} \times \cdots \times A_n$$

1. Diremos que a_i *domina* a $a_i^{'}$ si $\forall a_{-i} \in A_{-i}, u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i\left(a_i^{'}, a_{-i}\right)$ con al menos una desigualdad estricta.

2. Si una estrategia domina a todas las demás, diremos que dicha estrategia es *dominante*.

Debe ser claro que un jugador racional nunca debe jugar una estrategia que esté dominada por otra. Esto nos permite eliminar estrategias y analizar un juego más pequeño.

Ejemplo.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 100 & -9 \\ 0 & -1 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Notemos que Colin B domina a Colin A, por lo tanto Rosa podía estar segura de que Colin iba a elegir B.

Observación. Un perfil de estrategia que consiste en estrategias dominantes para todos los jugadores debe ser un equilibrio de Nash.

Definición 2.2.5. Sea $< \{1, 2\}, A_1 \times A_2, U >$ un juego finito de suma cero en forma normal y sea $a = (a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$. a es un *punto silla* si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\forall a_i \in A_1, u_1(a_1, a_2) \geq u_1(a_i, a_2)$.

2. $\forall a_j \in A_2, u_2\left(a_1, a_j\right) \leq u_2(a_1, a_2)$.

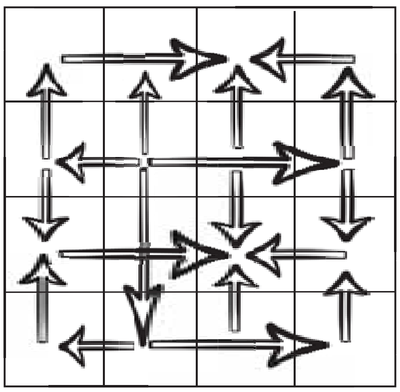
En otras palabras, si representamos el juego en forma matricial una entrada es punto silla si dicha entrada es menor o igual a cualquier otra entrada de su fila y mayor igual a cualquier otra entrada de su columna.

Una forma muy sencilla de localizar puntos silla es tomar el juego en forma matricial y dibujar un diagrama sobre éste de la siguiente manera: para cada fila dibujamos una flecha desde cada entrada hacia la entrada más pequeña de la fila mientras que en cada columna dibujamos flechas desde cada entrada hacia la entrada más grande de la columna. Si seguimos las flechas y encontramos un punto en el que no podamos seguir más flechas entonces dicho punto debe ser un punto silla. Llamaremos a este diagrama *Diagrama de Flechas*.

Ejemplo. Consideremos el juego:

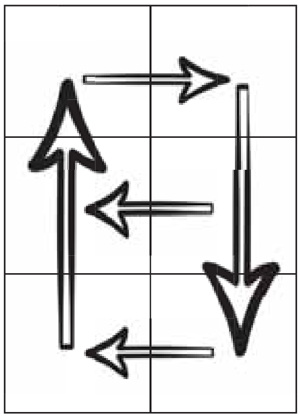
$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ -10 & 2 & 0 & -1 \\ 7 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & -4 & -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Los perfiles (A,C) y (C,C) son puntos silla en este juego. Basta con verificar que ambos son el valor más pequeño de la fila y que además son el valor más grande de su columna. No es difícil verificar que no hay más puntos silla.



Ejemplo. No todos los juegos tienen punto silla, consideremos el juego:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} \end{array}$$



Los puntos silla son claves en un juego en forma normal de dos jugadores pues si ambos jugadores están jugando en un punto silla ninguno tiene incentivos para cambiar de estrategia. Si el jugador 1 cambia su estrategia entonces el jugador 2 recibirá más (y por tanto el jugador 1 recibirá menos), lo mismo pasa para el jugador 2.

Las observaciones previas nos llevan a la siguiente proposición:

Proposición 2.2.6. *Sea* $< \{1, 2\}, A, U >$ *un juego finito de suma cero en forma normal y sea* $a \in A$. *a es un punto silla* $\iff$ *a es un equilibrio de Nash en estrategia pura.*

En un juego de suma cero de dos jugadores los puntos silla (si es que existen) contienen toda la información que necesitamos para saber cómo se debe jugar dicho juego. Podemos ir un paso más adelante y ver que éstos puntos se comportan de una manera muy amigable.

Teorema 2.2.7. *Cualesquiera dos puntos silla en un juego finito de suma cero para dos jugadores en forma normal tienen el mismo valor. Más aún si* P_1 *y* P_2 *juegan estrategias que contienen un punto silla, el resultado será un punto silla.*

Demostración. Supóngase que a y b son puntos silla en una matriz, sean c y d las otras entradas en las equinas del rectángulo que contiene a a y a b. Como a y b son punto silla entonces a es la entrada más chica de su fila mientras que b es la entrada más grande de su columna, así $a \leq c \leq b$. De manera similar $b \leq d \leq a$ de donde $a = b = c = d$. Finalmente se puede observar que c y d son las entradas más en sus columnas y las más pequeñas de sus filas, por tanto también son puntos silla. □

2.2.2. Estrategias Mixtas

¿Qué pasa si nuestro juego no contiene puntos silla? Ideas del tipo “Yo pienso que el oponente piensa que yo pienso que él piensa que $\cdots$” ya no llevan a nada pues terminan en un ciclo infinito. Por ejemplo, consideremos el siguiente juego:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Lo mejor que podemos hacer en este caso es jugar al azar, asignando probabilidades a nuestras estrategias. El problema con esto sería que el oponente lograra determinar la probabilidad que asignamos a cada una de nuestras estrategias y pudiera aprovecharse de ello.

Definición 2.2.8. Sea G un juego de n jugadores.

1. $S_i = \left\{ P_i \in [0,1]^{A_i} \;\middle|\; \sum_{a_i \in A_i} P_i(a_i) = 1 \right\}$ es el conjunto de *estrategias mixtas* para el jugador i.

2. $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ es el *conjunto de perfiles de estrategia*.

Ejemplo. Anteriormente vimos que el juego

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} \end{array}$$

no tiene puntos silla, por lo que para todo perfil de estrategia pura, existe un juegador al que le conviene cambiar su estrategia. Es posible que Colin conozca tan bien a Rosa que pueda predecir todas sus movidas y buscará aprovecharse de eso eligiendo la estrategia que mejor responde a la jugada de Rosa. En ese caso Rosa podría tratar de confundir a Colin asignando a cada una de sus estrategias $1/3$ de probabilidad y comenzar a tirar un dado, si cae 1 o 2 juega A, si cae 3 o 4 juega B y si cae 5 o 6 juega C.

Ahora que involucramos probabilidades hay que extender a la definición de función de utilidad.

Ejemplo. Pensemos en el juego:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Este juego no tiene puntos silla, asi que supongamos que Colin decide comenzar a jugar con una estrategia mixta $\mathbb{P}$, digamos, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$. Si Rosa logra determinar éstas probabilidades entonces lo mejor que puede hacer es maximizar la esperanza de su utilidad jugando B, pues $1/2(2) + 1/2(-3) = -1/2$ es la esperanza si Rosa decide jugar A mientras que $1/2(0) + 1/2(3) = 3/2$ es la esperanza si decide jugar B. A este razonamiento se le conoce como:

Principio de maximización de la esperanza. Si se conoce que el oponente está jugando con una cierta estrategia mixta, y continuará jugándola sin importar lo que hagas, debes jugar la estrategia que tiene el mayor valor esperado.

Usando la definición extendida de utilidad esperada se generalizan de manera inmediata los conceptos de mejor respuesta y equilibrio de Nash, es decir:

Definición 2.2.9. Sea G un juego y $s = (s_1, \cdots, s_n) \in S$.

1. $s_i^* \in BR(s_{-i}) \iff \forall s_i \in S_i, u_i^*(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$.
2. s es un *equilibrio de Nash* $\iff \forall i, s_i \in BR(s_{-i})$.

¿Cómo encontramos estos equilibrios de Nash? Si logramos encontrar un punto silla, no hay más que hacer. Por otro lado, en caso de no haber, cada jugador debe encontrar una estrategia que haga que al contrincante le de igual cómo jugar. Existen varios algoritmos para calcular equilibrios de Nash. Sin embargo, en general calcular un equilibrio de Nash es un problema difícil; en el 2005 Chen y Deng probaron que la complejidad del cálculo es PPAD-completo. Afortunadamente en el caso de juegos de suma cero para dos jugadores la situación no es tan desfavorable.

A continuación calcularemos equilibrios de Nash de un par de juegos.

Ejemplo. Retomemos el juego

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Anteriormente vimos que si Colin jugaba cada estrategia con probabilidad $1/2$ y Rosa lograba determinarlo, entonces Rosa podía jugar usando el principio de maximización de la esperanza. Colin puede buscar una distribución de probabilidad en la que a Rosa le sea indiferente que estrategia elegir. Para hacer esto suponemos que Colin comienza a jugar con la estrategia P tal que $P(A) = x$ y $P(B) = 1 - x$ y calcularemos los valores esperados de las estrategias de Rosa:

Rosa A: $x(2) + (1 - x)(-3) = -3 + 5x$
Rosa B: $x(0) + (1 - x)(3) = 3 - 3x$

Rosa no podría aprovecharse de la estrategia mixta de Colin si $-3x + 5x = 3 - 3x$, de donde obtenemos $x = 3/4$.

Podemos hacer lo mismo pero esta vez pensando que Rosa es quien juega la estrategia mixta $P^{'}$ con $P^{'}(A) = y$ y $P^{'}(B) = 1 - y$ y calculamos los valores esperados de las estrategias de Colin:

Colin A: $y(2) + (1 - y)(0) = 2y$
Colin B: $y(-3) = (1 - y)(3) = 3 - 6y$

Igualando ambas esperanzas podemos determinar que $y = 3/8$.

Éstas dos estrategias nos garantizan un equilibrio de Nash pues Rosa y Colin juegan para que el oponente no pueda aprovecharse de su estrategia mixta.

Teorema 2.2.10. (Von Neumann) *Todo juego de suma cero para dos jugadores tiene solución. Es decir, existen $v \in \mathbb{R}$, llamado* valor del juego, *$s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$ tales que:*

1. $\forall s_1^{'} \in S_1, u_1\left(s_1^{'}, s_2\right) \leq v$

2. $\forall s_2^{'} \in S_2, u_1\left(s_1, s_2^{'}\right) \geq v$

Además, la solución puede encontrarse como la solución de un subjuego de tamaño $k \times k$.

Corolario 2.2.11. *Todo juego de suma cero para dos jugadores tiene al menos un equilibrio de Nash.*

Ejemplo. En el ejemplo anterior calculamos el equilibrio de Nash encontrando las estrategias mixtas óptimas para Rosa y Colin (donde el oponente no puede aprovecharse de conocer la distribución de probabilidad asignada). Si Colin juega la estrategia mixta P tal que $P(A) = 3/4$ y $P(B) = 1/4$, Colin puede asegurar que Rosa no gane, en promedio, más de $3/4(2) + 1/4(-3) = 3/4$ unidades por juego (sin importar lo que haga Rosa). Por otro lado, si Rosa juega la estrategia mixta $P^{'}$ tal que $P^{'}(A) = 3/8$ y $P^{'}(B) = 5/8$, Rosa asegura ganar, en promedio, al menos $3/8(2) + 5/8(0) = 3/4$ unidades por juego (sin importar lo que haga Colin).

En realidad este tipo de equilibrios de Nash se asemeja a un punto silla en el sentido que Rosa tiene una estrategia óptima que le asegura ganar al menos $3/4$ mientras que Colin tiene una estrategia óptima que le asegura que Rosa no ganará más de $3/4$. Así $3/4$ es el valor del juego y P, $P^{'}$ y $3/4$ es la solución del juego.

La prueba original del teorema fue dada en el año 1928 y utilizaba el Teorema del Punto Fijo de Brouwer. No fue hasta 1947 que Danzig notó una fuerte conección entre los juegos de suma cero y la dualidad de Programación Lineal que finalmente dio origen al Algoritmo de Danzig (Equivalency to LP Duality) y al Algoritmo de Khachiyan (Polynomial-time solving).

2.2.3. Convirtiendo un Juego de Suma No Cero a uno de Suma Cero

Para terminar con la sección de juegos de suma cero, cabe destacar que las propiedades que tiene una función de utilidad permiten convertir algunos juegos de suma no cero a un juego de suma cero.

Al final del capítulo anterior analizamos porqué las funciones de utilidad cardinal son invariantes bajo funciones lineales positivas. Ésto inmediatamente nos dice que todo juego de suma constante puede ser convertido a un juego de suma cero simplemente restando dicha constante a las utilidades de alguno de los jugadores.

Podríamos preguntarnos ¿Existen más juegos además de éstos que puedan ser convertidos a un juego de suma cero? La respuesta es que sí. Consideremos el siguiente juego:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (27,-5) & (17,0) \\ (19,-1) & (23,-3) \end{pmatrix} \end{array}$$

Es muy fácil ver que no es un juego de suma constante, sin embargo, podemos pasar las utilidades de Rosa por la función lineal $g(x) = \frac{1}{2}(x - 17)$ y obtener el juego de suma cero:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (5,-5) & (0,0) \\ (1,-1) & (3,-3) \end{pmatrix} \end{array}$$

Un método gráfico que nos permite ver rápidamente si un juego de suma no constante puede ser convertido a un juego de suma cero es graficar cada entrada de la matriz como si fuera un punto en el plano. Si todos los puntos se encuentran en una recta de pendiente negativa, entonces el juego puede ser convertido a un juego de suma cero.

2.3. Juegos de Suma No Cero

2.3.1. Estrategias Puras

En esta sección consideraremos los juegos en los cuales las utilidades de Rosa y Colin no están completamente encontradas (y que por lo tanto debemos escribir las utilidades de ambos jugadores en cada entrada de la representación matricial).

Ejemplo.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (2,4) & (1,0) \\ (3,1) & (0,4) \end{pmatrix} \end{array}$$

Este juego no puede ser convertido a un juego de suma cero pues al graficar los puntos en el plano no pintan una recta. En este tipo de juegos la primer coordenada de cada entrada de la matriz es el pago que Rosa va a recibir mientras que la segunda coordenada es el pago para Colin.

Vamos a suponer por ahora que no hay forma de que Rosa y Colin puedan comunicarse, que ambos eligen su estrategia al mismo tiempo y que la elección de un jugador no es conocida por el otro. ¿Podemos decir algo sobre qué estrategia deberían seguir Rosa y Colin? ¿Las ideas de juegos de suma cero aún pueden ser aplicadas? ¿Cuáles siguen funcionando?

Consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (2,3) & (3,2) \\ (1,0) & (0,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Nótese que en este juego Rosa no tiene ningún motivo para jugar su estrategia B, pues no importa la estrategia que Colin juegue, Rosa siempre recibirá un pago mayor jugando A. En otras palabras Rosa A domina a Rosa B.

Como puede notarse, no hay ninguna diferencia en la idea de dominancia con respecto a los juegos de suma 0. Una vez más ningún jugador racional debería elegir una estrategia que esté dominada por otra. En otras palabras, nuestro diagrama de flechas seguirá siendo útil. En este caso tenemos un concepto equivalente al concepto de punto silla en un juego de suma cero:

Definición 2.3.1. Sea $a = (a_1, a_2) \in A$. Diremos que a es un *equilibrio en estrategia pura* si:

1. $\forall a_1^{'} \in A_1, u_1(a_1, a_2) \geq u_1\left(a_1^{'}, a_2\right)$.

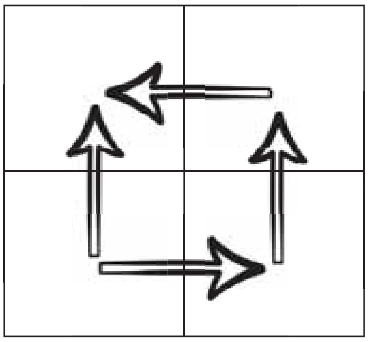
2. $\forall a_2^{'} \in A_2, u_2(a_1, a_2) \geq u_2\left(a_1, a_2^{'}\right)$.

En otras palabras, al igual que un punto silla en un juego de suma cero, ninguno de los jugadores tiene motivos para querer cambiar su estrategia. Debe ser claro que nuestros diagramas de flecha encuentran éstos puntos de equilibrio en estrategia pura y más aún:

Observación. Todo punto de equilibrio en estrategia pura es un Equilibrio de Nash.

Ejemplo.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (2,3) & (3,2) \\ (1,0) & (0,1) \end{pmatrix} \end{array}$$



Como mencionamos antes, Rosa A domina a Rosa B. La mejor respuesta de Colin a la movida de Rosa es Colin A, por lo que (A,A) debe ser un punto silla, por lo que también es un equilibrio de Nash en estrategia pura.

Recordemos que en el caso de juegos de suma cero, jugar estrategias que contenian un punto silla siempre llevaba a un punto silla. ¿Podemos obtener un resultado equivalente para equilibrios en estrategia pura? Resulta que no. Veamos esto con un ejemplo:

Ejemplo.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (1,1) & (2,3) \\ (3,2) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Nótese que los perfiles (A,B) y (B,A) son puntos silla. El perfil (A,B) favorece a Colin mientras que el perfil (B,A) favorece a Rosa. Si cada uno de los jugadores quiere obtener el punto de equilibrio que le favorece entonces ambos jugarán B, lo que lleva al perfil (B,B) que es el peor resultado para ambos. Por lo que no siempre elegir estrategias que contienen un equilibrio en estrategia pura llevan a un equilibrio en estrategia pura.

2.3.2. Estrategias Mixtas

Como vimos, aún en juegos que tienen equilibrios en estrategia pura la complejidad comienza a aumentar. De aquí en adelante las cosas sólo comenzarán a complicarse aún más pues, como es de esperarse, ahora nos enfrentaremos a juegos que no tienen un equilibrio en estrategia pura. Lo primero que habría que preguntarse es si existen estos juegos.

Ejemplo.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (2,4) & (1,0) \\ (3,1) & (0,4) \end{pmatrix} \end{array}$$

Es fácil ver que este juego no puede convertirse en un juego de suma cero. Además, para cualquier perfil de estrategia siempre habrá un jugador que quiera cambiar de estrategia, así que el juego no tiene ningún equilibrio en estrategia pura.

Como hicimos para los juegos de suma 0, asignamos probabilidades a las estrategias de cada jugador. Una vez más, supongamos que Colin comienza a jugar con una cierta estrategia mixta y Rosa logra determinar las probabilidades asignadas a dicha estrategia. Lo mejor que puede hacer Rosa es pensar en el *principio de maximización de la esperanza*.

Vamos un paso más adelante y vamos a encontrar un equilibrio de Nash. Para encontrarlo hay que jugar en el juego del otro. Recordemos que las definiciones son las mismas, por lo que debemos encontrar un perfil de estrategia en el cual ni Rosa ni Colin tengan una razón para jugar diferente. ¿Cómo hace el oponente para que a mi me de igual como jugar? La idea para esto es que Rosa ignore su utilidad y se fije sólo en la de Colin y juegue como si fuera un juego de suma cero (Colin debe hacer lo mismo pero en el juego de Rosa).

Ejemplo. Consideremos el siguiente juego:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (2,4) & (1,0) \\ (3,1) & (0,4) \end{pmatrix} \end{array}$$

Si Rosa juega en el juego de Colin su estrategia óptima $((\frac{3}{7}A, \frac{4}{7}B))$, entonces Colin recibirá como valor esperado $\frac{16}{7}$ sin importar su estrategia. Por otro lado, si Colin juega para contener el juego de Rosa $(\frac{1}{2}A, \frac{1}{2}B)$ entonces Rosa recibirá $\frac{3}{2}$ como valor esperado. Así ningún jugador podrá ganar más si intenta cambiar de estrategia y es por eso que este debe ser un Equilibrio de Nash.

Es curioso que ambos jugadores estén reteniendo los pagos del otro jugador, por lo que no es de sorprenderse que los valores que garantiza el equilibrio de Nash sean relativamente bajos. Quizá los dos jugadores podrían obtener más si cada quien jugara pensando sólo en sus pagos. Analizaremos este tipo de casos en un par de secciones más adelante (cuando hablemos de arbitraje). Algunos conceptos que serán de importancia son los siguientes:

Definición 2.3.2. Sea G un juego de suma no cero para dos jugadores.

- El *juego del jugador i* es el juego de suma cero con pagos para el jugador i que se construye ignorando los pagos para el otro jugador.
- La *estrategia prudente del jugador i* es la estrategia óptima del jugador i en el juego del mismo jugador.
- El *nivel de seguridad del jugador i* es el valor del juego del jugador i.

El teorema de Von Neumann nos garantizaba la existencia de un equilibrio de Nash en un juego de suma cero pero en ese entonces no se podía decir nada respecto a juegos de suma no cero. Veintidos años despus se enunció el siguiente teorema:

Teorema 2.3.3 (Nash)**.** *Todo juego finito tiene al menos un Equilibrio de Nash.*

Nash publicó su primer demostración del Teorema en 1950 [3] y originalmente usó el Teorema del Punto Fijo de Kakutani para correspondencias[1]. Un año después publicó una segunda pruebai [4] que, al igual que la de Von Neumann, utilizó el Teorema del Punto Fijo de Brouwer. Desafortunadamente no se ha logrado dar una prueba que utilice Programación Lineal o alguna construcción, y aunque existen algoritmos para calcular un equilibrio de Nash, ninguno es eficiente: Algoritmo de Lemke-Houson y el Algoritmo de Porter, ambos exponenciales en el peor caso (Que es de esperarse pues, como anteriormente se mencionó, encontrar equilibrios de Nash es PPAD-completo).

Veremos otro ejemplo para analizar otra de las cosas un poco extrañas que suceden con los equilibrios en estos juegos.

Ejemplo. Supongamos que Rosa y Colin cometen un robo a un banco. Rosa y Colin logran esconder toda evidencia y el dinero que robaron pero las armas que usaron no, asi que la policía los detiene. Cada uno es interrogado en un cuarto diferente y la policía le dice a cada uno “Te agarramos por posesión ilegal de armas, eso es 1 año de cárcel. Sabemos que ustedes robaron el banco pero no tenemos evidencia así que vamos a hacer un trato: Si testificas en contra de tu compañero y él no habla, te dejamos ir libre. Si tu compañero testifica contra ti y tú no lo haces, te tocan 10 años de cárcel. Finalmente si ambos atestiguan les damos a ambos 5 años de cárcel”.

Esta historia puede ser fácilmente convertida al juego:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (-5,-5) & (0,-10) \\ (-10,0) & (-1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Resulta que este juego tiene un equilibrio en estrategia pura, pues Rosa A domina a Rosa B y además Colin A domina a Colin B por lo que el perfil (A,A) es equilibrio de Nash en estrategia pura. Sin embargo ambos jugadores estarían mejor si ambos hubieran jugado B, la estrategia dominada. Este es uno de los ejemplos más famosos en teoría de juegos y se le conoce como el *Dilema del prisionero*.

Sería raro que la solución a un juego fuera un perfil de estrategia en el cual a los dos jugadores les va mal y existiera una estrategia que hiciera a ambos jugadores mucho más felices. El economista italiano Vilfredo Pareto propuso que no deberíamos aceptar un sistema económico si existe otro sistema el cual beneficia a todos. Adaptando esta idea a juegos tenemos lo siguiente:

[1] Una función del tipo $\varphi : \mathrm{X} \to 2^{\mathrm{Y}}$

Definición 2.3.4. Sea G un juego de n jugadores y sean $a, a^{'} \in A$. Diremos que:

1. a es *Pareto-mejor* que $a^{'}$ si $\forall i, u_i(a) \geq u_i\left(a^{'}\right)$ con al menos una desigualdad estricta.
2. a es *Pareto-óptimo* si no existe otro perfil de estrategia que sea Pareto mejor.

A estas alturas uno podría pensar que existen muchos juegos a los que no se les puede asociar una solución, y tienen razón. Sin embargo con este nuevo concepto podemos decir a cuáles juegos sí le podemos asociar una solución.

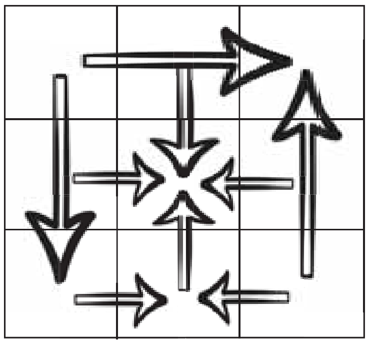
Definición 2.3.5. Decimos que un juego es *soluble en el sentido estricto (SSS)* si:

- Hay al menos un equilibrio de Nash que sea Pareto-Óptimo.
- Si hay más de un equilibrio Pareto-Óptimo, todos son equivalentes e independientes.

Para un juego que sea soluble en el sentido estricto vamos a decir que el conjunto de todos los equilibrios Pareto-óptimos equivalentese e intercambiables es la *solución del juego*.

Ejemplo. Consideremos el siguiente juego:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} (0,-1) & (0,2) & (2,3) \\ (0,0) & (2,1) & (1,-1) \\ (2,2) & (1,4) & (1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$



Tenemos dos equilibrios: (A,C) y (B,B). El perfil (A,C) es Pareto-óptimo, mientras que el perfil (B,B) no lo es (Pues (A,C) es Pareto-mejor), por lo que este juego es SSS siendo el único equilibrio aceptable el perfil: (A,C).

2.4. Movidas Estratégicas

2.4.1. Introducción

Hasta ahora los jugadores no podían comunicarse y eso ocasionó muchos problemas en los juegos de suma no cero. Imaginemos un escenario del Dilema del Prisionero donde Rosa y Colin pueden comunicarse. Seguramente existe algún escenario donde ambos pudieran ponerse de acuerdo para que ninguno delate al otro.

No todo es tan fácil como podría aparentar ser el hecho de que exista comunicación pues, como es costumbre, los jugadores podrían empeñarse a querer un resultado en particular y dar lugar a situaciones un tanto "oscuras". Por ejemplo, los jugadores pueden comenzar a amenazarse unos a otros, mentir, hacer promesas y hacer compromisos. Analizaremos estos casos desde la teoría de juegos como movidas estrategicas de los jugadores, en qué casos se puede usar de manera efectiva cada una y ejemplos de cada una.

2.4.2. Mover Primero

Vamos a comenzar con una de las movidas estratégicas más simples: mover primero. ¿Siempre conviene jugar primero? ¿En qué casos conviene jugar primero? Revisemos primero un juego de suma cero.

Ejemplo.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

En este juego, ¿qué sucede? Supongamos que Rosa elige primero. Si Rosa elige A a Colin le conviene elegir B, por otro lado si Rosa elige B a Colin le conviene elegir A. En el caso en que Colin juegue primero, de manera similar, Rosa puede elegir la estrategia que maximice su utilidad. En este juego el jugador que tira en segundo lugar es beneficiado. Más que eso, en cualquier juego de suma cero conviene jugar después.

Ahora veamos un juego donde pasa lo contrario.

Ejemplo. En los años 50 se popularizó entre los adolescentes un juego llamado "Chicken" en el que dos carros se movían uno en dirección al otro a altas velocidades, el primer jugador en acobardarse pierde. Podemos plantear este juego como la siguiente matriz:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (0,0) & (-2,1) \\ (1,-2) & (-8,-8) \end{pmatrix} \end{array}$$

donde A es "acobardarse" y B es "continuar". Si ambos jugadores eligieran B el resultado sería catastrófico y a ninguno de los jugadores le conviene salir herido. En este juego el jugador que elige primero es beneficiado. Si Rosa tira primero puede asegurar un pago de 1 eligiendo B, como Colin no quiere salir herido debe elegir A (nótese que a Rosa no le conviene elegir A pues Colin eligiría B siendo ella la lastimada). Por simetría del juego si Colin es el primero en elegir entonces puede asegurar un pago de 1 eligiendo B.

También existen casos en donde a ambos jugadores les conviene que Rosa juegue primero.

Ejemplo. Pensemos en el siguiente juego:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (2,3) & (4,1) \\ (1,2) & (3,4) \end{pmatrix} \end{array}$$

Primero hay que notar que Rosa A domina a Rosa B, después Colin eligirá Colin A por lo que el perfil (A,A) es un equilibrio de Nash. Por otro lado, si Colin juega primero obtendrá más al elegir Colin A (Pues si eligiera Colin B Rosa eligiría Rosa A y Colin obtendría solamente 1 unidad), luego Rosa jugará su estrategia A.

Ahora pensemos en lo que pasa si Rosa es quien juega primero. Si Rosa elige su estrategia B, Colin eligirá B. Esto resultará en el perfil (B,B) que es Pareto-mejor que el perfil (A,A).

Definición 2.4.1. Una *movida estratégica* del jugador i es un anuncio de qué acciones tomará i en los posibles futuros. Si i es el primer jugador, esto es simplemente un anuncio de cómo jugará. Si i es el segundo, es un anuncio de cómo jugará en cada caso de lo que haga el otro jugador.

Como conclusión de los ejemplos vistos, un jugador hace una movida estratégica con la finalidad de convencer a los otros jugadores de jugar de cierta manera; por lo general para conveniencia del mismo jugador i al jugar una acción que los jugadores normalmente no tomarían en el juego. El problema con usar movidas estratégicas en la vida "diaria" es la credibilidad de las mismas.

2.4.3. Compromisos

En la vida real hay muchos juegos que, en efecto, son simultaneos y uno simplemente no tiene el poder de jugar primero o después. Los compromisos son un "parche" que busca tener el mismo efecto que si pudieramos elegir o ponernos de acuerdo en el orden en que van a jugar.

Podemos pensar en que existen dos tipos de compromisos: el compromiso preventivo y el compromiso en respuesta. Como uno podrá imaginarse, cada uno corresponde a si el jugador que realiza el compromiso quiere jugar primero o quiere jugar después del otro jugador. Ambos tipos de compromiso deben ser pensados como movimientos previos al juego y deben ser hechos lo más pronto posible para que el otro jugador no pueda adelantársenos.

El *compromiso preventivo* corresponde a tomar la opción de mover primero mientras que el *compromiso en respuesta* ocurre cuando el jugador que quiere mover al último se adelanta y especifica una regla de respuesta antes de que el otro tome su decisión. Algunas formas de llevar a cabo estos compromisos son un tanto cómicas pero son muy eficientes.

Ejemplo. El siguiente juego es conocido como *La batalla de los sexos*. Supongamos que Rosa y Colin son novios y las amigas de Rosa invitan a Rosa y Colin a una fiesta de té, ese mismo día y a la misma hora los amigos de Colin invitan a Rosa y Colin a un bar. Rosa y Colin quieren, sobre todas las cosas, estar el uno con el otro pero, obviamente, Colin estaría un poco más feliz si estuviera con Rosa y con sus amigos, de igual forma Rosa estaría un poco más feliz si estuviera con Colin y con sus amigas. El juego puede ser planteado con la siguiente matriz:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (2,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Donde la estrategia A (Para ambos) es ir con las amigas de Rosa, la estrategia B es ir con los amigos de Colin.

Rosa podría hacer un compromiso preventivo si hace una llamada telefónica a Colin y le dice “Voy a ir a la fiesta con mis amigas”, inmediatamente cuelga y apaga el celular. De esa manera es como si Rosa hubiera eliminado su estrategia B asi que a Colin sólo le quedará también elegir A.

A partir de aquí nos referiremos a los compromisos preventivos como *amenazas y promesas*.

2.4.4. Amenazas

Antes de entrar en detalles consideremos el siguiente juego para ilustrar una amenaza.

Ejemplo.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (4,3) & (3,4) \\ (2,1) & (1,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Supongamos que Colin consigue la oportunidad de tirar primero; lo natural es que Colin elija su estrategia B (pues Colin B domina a Colin A) pero Rosa hace la siguiente amenaza: “Si eliges B, yo también eligiré B”. Si Colin cree la amenaza de Rosa entonces sólo tiene dos perfiles a elegir: (B,B) y (A,A) de los cuales le convendrá elegir (A,A) que resulta ser el pago más alto que Rosa puede obtener.

Resulta también interesante notar que en este juego un compromiso preventivo no tiene ningún efecto pues el juego es SSS con el perfil (A,B) siendo el único punto de equilibrio y que además es Pareto-óptimo, en otras palabras, si Rosa jugara primero, por dominancia, Rosa jugaría A; de igual forma si Colin jugara primero, jugaría su estrategia B.

Definición 2.4.2. Una *amenaza* del jugador i es una movida estratégica tal que:

- Hay una estrategia del otro jugador en donde i juega normalmente (i.e. cuando la amenaza no se lleva a cabo) y en las demás estrategias i no necesariamente juega normalmente (cuando la amenaza sí se lleva a cabo).
- Si la amenaza se lleva a cabo, es malo para ambos jugadores.

Podemos notar algunas propiedades que tienen las amenazas:

1. Rosa anuncia que tomará una acción en respuesta a cierta acción previa de Colin.
2. La acción de Rosa lastimará a Colin.
3. La acción de Rosa también lastimará a Rosa.

El problema de una amenaza es que no es creíble. Pensemos en el ejemplo: Colin no tiene ningún motivo para creerle a Rosa pues si Colin juega B a Rosa de todos modos le convendría elegir A. Pensemos en algunas maneras de hacer una amenaza creíble. Aquí hay algunas sugerencias para que te crean una amenaza:

- **Juegos repetidos**: Si los jugadores saben que van a jugar varias veces, te conviene llevar a cabo la amenaza las primeras veces para crearte una reputación creíble.
- **Reputación de irracionalidad**: Podría convenir crear una reputación de irracional para aparentar que no te importa (y quizás hasta te divierte) salir perdiendo.
- **Disminuir tus propias utilidades**: Hacer que si el otro escoge la opción que no quieres, sea peor para ti no vengarte. Por ejemplo, anunciando al mundo que llevarás a cabo la amenaza.
- **Cerrar puertas**: Hacer que la venganza sea automática y que no esté en tus manos detenerla.

Para lograr disminuir tus propias utilidades uno puede recurrir a situaciones como jurar por tu honor públicamente que si el otro jugador no hace lo que quieres, entonces te vengarás. Si no lo haces entonces será peor para ti pues todos creerán que tu palabra no tiene ningún valor. Uno también podría pagarle a una persona para que te golpee a ti mismo si no cumples con tu amenaza (y hacer este conocimiento público).

Hay un ejemplo clásico en “cerrar puertas” aplicado a la guerra: uno podría poner misiles que se disparen de manera automática si algo ocurre. Lo importante es que sean misiles que no puedan ser detenidos, y que el otro jugador sepa (o más bien, que crea) que el mecanismo es automático.

Para finalizar con esta sección, un detalle curioso respecto a la idea de juegos repetidos es que si se piensa en retroceso parecería que es una estrategia que no debería funcionar: Si el juego se va a repetir solo una cantidad finita de veces (conocida por ambos jugadores) y los jugadores se encuentran jugando la última ronda, entonces a cada jugador le conviene jugar como si se tratara de un juego de única repetición; el último juego se convierte en algo fijo y el penúltimo juego se convertiría en el último juego. Procediendo por inducción, en cada ronda les conviene jugar como si fuera un juego de única repetición.

2.4.5. Promesas

Pensemos en el siguiente juego:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (1,1) & (3,0) \\ (0,3) & (2,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Nótese que el perfil (A,A) es el único equilibrio pero (B,B) es Pareto-mejor. En este juego de nada serviría hacer un compromiso, pues no importa quien comience siempre será más conveniente jugar A y luego el otro jugador también eligirá A. Por otro lado en este juego tampoco funcionarán las amenazas. Para ver esto, supongamos que Colin juega primero (debe elegir A, pues Colin A domina a Colin B), la amenaza de Rosa debería ser entonces “Si tiras A yo eligiré B” pero eso sólo hará que Colin mejore. Por simetría el mismo argumento funciona si Rosa juega primero.

Lo que en este caso funciona es hacer una *promesa*: “Si tú eliges B, yo eligiré B”. Debe ser obvio que regresamos al mismo problema que con las amenazas: la promesa podría no parecer creíble.

Definición 2.4.3. Una *promesa* del jugador i es una movida estratégica con las siguientes propiedades:

- Hay una estrategia del otro jugador en la cual i no jugará normalmente, y en las demás jugará normalmente.
- Si la promesa se lleva a cabo, es malo para i y bueno para el otro jugador.

La principal diferencia entre una amenaza y una promesa es que en la promesa, si todo sale bien, el jugador que prometió sí debe llevar a cabo su movida estratégica. En la amenaza no es así: si todo sale bien, el jugador no debe llevar a cabo su movida estratégica. Es precisamente por esto que una promesa es más difícil de hacer creíble. Básicamente el jugador que la hace está prometiendo que no se va a aprovechar del otro jugador.

La manera usual de hacer una promesa creíble es exactamente igual que las amenazas: disminuir nuestras propias utilidades. Las mismas técnicas que usamos para disminuir nuestras propias utilidades en la sección de amenazas siguen siendo útiles. Desde luego, en la vida real siempre podemos usar dichas estrategias pero es muy extraño que podamos cambiar un juego para aumentar nuestras utilidades.

2.4.6. Amenazas y Promesas

Existen juegos donde ni las amenazas ni las promesas funcionan. Por ejemplo, en el siguiente juego juega primero Colin:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (3,3) & (1,5) \\ (4,0) & (0,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Colin eligirá su estrategia B y la mejor respuesta de Rosa será elegir A, por lo que el perfil (A,B) es un equilibrio. Si Rosa tratara de hacer una amenaza sería algo como: "Si eliges B, yo también eligiré B" pero luego Colin deberá elegir entre el perfil (B,B) y el perfil (B,A) de los cuales prefiere (B,B). Si Rosa hiciera una promesa debería de decirle a Colin: "Si eliges A, prometo también eligiré A", eso deja a Colin decidir entre los perfiles (A,A) y (A,B) de los cuales prefiere el perfil (A,B).

Aquí lo que funcionaría es combinar el poder de ambas (amenaza y promesa) y decirle a Colin: "Si eliges B, yo eligiré B, pero si eliges A prometo también elegir A". Eso deja a Colin, en caso de creerle a Rosa, con dos perfiles a elegir: (A,A) y (B,B) de los cuales le conviene más el perfil (B,B).

Esto podría hacernos plantear algunas preguntas interesantes como ¿Siempre se podrá utilizar alguna de las tres movidas estratégicas o combinaciones de amenazas y promesas para conseguir lo que se quiere? Desafortunadamente la respuesta a la pregunta es *no*.

Ejemplo.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (3,1) & (1,3) \\ (4,2) & (2,4) \end{pmatrix} \end{array}$$

Tenemos que el perfil (B,B) es el único equilibrio, sin embargo a Rosa le convendría el perfil (B,A). Sin embargo, no hay manera de que Colin escoja su estrategia A, pues el mejor pago que podría recibir con su estrategia A es menor que el peor pago que recibiría si eligiera su estrategia B. Por esta razón, Rosa no puede realizar ninguna movida estratégica para conseguir el perfil (B,A).

2.5. Arbitraje de Nash

2.5.1. Introducción

Para esta última sección de Teoría de Juegos hablaremos un poco de una forma diferente de comunicación: el arbitraje. Supongamos que Rosa y Colin tienen ideas diferentes respecto a un tema y quieren ponerse de acuerdo, así que ambos se sientan a conversar y posiblemente hay un juez/arbitro que al final de la conversación decidirá algo.

Como ejemplo, consideremos el siguiente juego:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (2,6) & (10,5) \\ (4,8) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Si nosotros fuéramos el árbitro, ¿Cómo podríamos sugerir a Rosa y Colin jugar para que cada quien obtenga un resultado justo? Podría alguien pensar que se debería elegir la casilla cuyas entradas sumen lo más posible. Esta idea no es válida, pues hay que recordar que estamos tratando con utilidades y que las utilidades no son transferibles.

Para dejarlo un poco más claro, consideremos un ejemplo de algo que todos conocemos.

Ejemplo. Vamos a pensar que Rosa va manejando y en una esquina se encuentra con Colin, quien va manejando en la calle perpendicular. Podrían suceder cuatro cosas diferentes: avanza primero Rosa, avanza primero Colin, avanzan los dos y chocan o ninguno avanza. Obviamente Rosa prefiere avanzar primero a que Colin avance primero, Colin prefiere avanzar primero que Rosa, a ninguno de los dos le gustaría chocar y a ninguna de los dos le gustaría sólo quedarse parado. Con esta información podemos construir el siguiente juego:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} P & N \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} (-5,-5) & (2,0) \\ (0,2) & (-1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

En el cual la primera estrategia de cada jugador es “pasar” (P) y la segunda estrategia es “no pasar” (N).

Es sencillo ver que en este juego hay 3 equilibrios de Nash distintos: (0,2), (2,0), que no son simétricos (aunque el juego lo era), y el equilibrio simétrico mixto en donde cada jugador juega su primera estrategia con probabilidad de $3/8$ y la segunda con probabilidad de $5/8$. En esta última, el valor esperado para cada jugador es $-5/8$, que es muy ineficiente en la práctica. Para una mejor solución podemos usar colocar un árbitro que diga a quien le toca pasar: un semáforo.

El árbitro tendría que usar alguna estrategia mixta global, pues de lo contrario si el semáforo sólo deja pasar a los autos del lado de Colin, los autos del lado de Rosa se enojarían y dejarían de hacerle caso, provocando muchos accidentes. Recordemos que el equilibrio de Nash es sólo un equilibrio y no tiene por qué ser lo mejor para ambos jugadores.

En cambio al poner un árbitro ambos recibirán un pago justo y *mejor* que el que garantiza el equilibrio de Nash simétrico.

Por ejemplo, al poner un semáforo, el semáforo podría decir que el 50 % de las veces elija el perfil (P,N) y el resto de las veces (N,P). Es decir el semáforo indica jugar la estrategia $\frac{1}{2}(P,N)+\frac{1}{2}(N,P)$ creando un tipo de equilibrio (pues a nadie le conviene desobedecerlo) llamado *equilibrio correlacionado*.

2.5.2. Propuestas de Neumann y Morgenstern

Los primeros en dar una sugerencia a este problema fueron Neumann y Morgenstern, quienes propusieron lo siguiente: cualquier solución arbitrada razonable a un juego de suma no cero debe ser:

- Pareto-óptimo. No debe haber ninguna otra posible estrategia que sea mejor para ambos jugadores.
- Los pagos resultantes deben ser igual o mayor al nivel de seguridad para ambos jugadores. Ningún jugador debería ser fozado a aceptar menos de lo que él o ella podría garantizarse jugando de forma no-cooperativa.

Definición 2.5.1. El conjunto de resultados que satisfacen las condiciones propuestas por Neumann y Morgenstern se llamará el *conjunto de negociación*.

Entonces, ¿cuáles son las estrategias que nos proporcionan los resultados que se encuentran en el conjunto de negociación? En primera estancia podría parecer un problema un tanto difícil. Afortunadamente se puede hacer mucho más sencillo apoyándonos en una herramienta geométrica.

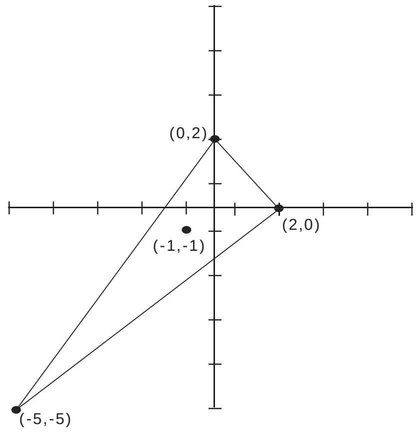
Definición 2.5.2. Sea G un juego de suma no-cero para dos jugadores. El *polígono de pago para el juego G* es el subespacio de $\mathbb{R}^2$ dado por la envolvente convexa de cada una de las entradas de la matriz de G.

En otras palabras, a cada punto de la matriz la dibujamos en el plano y luego obtenemos la envolvente convexa de la colección de puntos. El polígono de pago es una representación en $\mathbb{R}^2$ de todos los posibles valores esperados para Rosa (primera coordenada) y todos los posibles valores esperados para Colin (segunda coordenada).

Ejemplo. Consideremos una vez más el juego del ejemplo pasado y dibujemos su polígono de pago.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (-5,-5) & (2,0) \\ (0,2) & (-1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

En este caso la envolvente convexa está formada por las rectas que unen los puntos $(-5,-5),(0,2)$ y $(2,0)$, mientras que el punto $(-1,-1)$ está en el interior del polígono de pago.



Observación. Podemos obtener cualquier punto de la frontera o del interior como combinación convexa de los puntos que sirven como vértices al polígono de pago y que los coeficientes de la combinación convexa automáticamente nos dan la distribución de probabilidad de las estrategias usadas para expresar dicho punto.

Una vez dibujado el polígono de pago, ¿Cómo se ven los puntos Pareto-mejor a un punto (a,b) del polígono? Por definición son todos aquellos puntos que se encuentran a la derecha, arriba o combinación de ambas del punto (a,b) y que además se encuentran en el polígono de pago. Entonces los puntos Pareto-óptimos son aquellos en los que no existen puntos ni a la derecha ni arriba de ellos, es decir, deben ser puntos en la frontera y no deben existir puntos ni más arriba ni a la derecha.

Para visualizar completamente los puntos del conjunto de negociación en nuestra herramienta geométrica solamente hace falta restringir un poco el conjunto de los puntos Pareto-óptimos. Debemos graficar junto con nuestro polígono un punto especial: el nivel de seguridad. Una vez graficado solamente nos fijamos en todos los puntos Pareto-óptimos que se encuentran a la derecha y/o arriba. Estos deben ser los puntos que buscamos.

Finalmente ¿siempre existirán éstos puntos? ¿Cuántos son? Ambas preguntas son fáciles de contestar:

Proposición 2.5.3. *Sea G un juego finito de suma no cero. Existe al menos una estrategia que produce un punto Pareto-óptimo. Más aún, el conjunto de negociación, o consta de un solo punto, o consta de una infinidad de puntos.*

La demostración de la proposición es trivial pues nuestro juego es finito por lo que nuestro polígono es compacto. Se puede tomar cualquier recta con pendiente negativa y buscar una paralela a esta recta que intersecte solamente a la parte superior de la envolvente convexa. La intersección se debe dar en un vértice en una arista del polígono y finalmente restringimos a los puntos que se encuentran más arriba y/o a la derecha que los niveles de seguridad que son precisamente los puntos buscados.

2.5.3. Esquema de Arbitraje de Nash

Si el conjunto de negociación es un único punto, es obvio que deberíamos elegirlo como solución. ¿Qué punto deberíamos elegir si el conjunto de negociación es infinito? Una opción es dejar que los jugadores se pongan de acuerdo y esperar que todo salga bien. De no ser así, como árbitros tendremos que llegar a un veredicto justo.

Como árbitros nos enfrentamos a varios problemas. Pensemos en que los jugadores no pudieran llegar a un acuerdo y además no hubiera árbitro. Entonces cada jugador eligiría su estrategia óptima para maximizar su propia utilidad. Desde luego, en el caso en que haya un árbitro y no se lograra una negociación entre los jugadores, cada jugador debería recibir una utilidad al menos tan buena como la que podría asegurar sin árbitro.

Otro problema que enfrentamos es que si tenemos una infinidad de puntos en el conjunto de negociación, puede haber puntos que beneficien mucho más a un jugador que a otro y, claro, eso no sería justo.

A Nash se le ocurrió una forma de resolver ambos problemas. Él propuso localizar un punto dentro del polígono de pago que proporcione a cada jugador una utilidad al menos tan buena como la que puede asegurar sin árbitro y, a partir de éste, construir una solución. A esta idea se le conoce como el *esquema de arbitraje de Nash* y al punto que localizamos le llamaremos *Status Quo (SQ)*. Nash propone que si la negociación no tiene éxito entonces a cada jugador se le da lo indicado por el Status Quo. En general, a un método que trata de evitar dichos problemas se le conoce como un *esquema de arbitraje*.

Nash creía que un esquema de arbitraje razonable debía satisfacer los siguientes axiomas:

Sea P el polígono de pago, SQ su status quo y $N(P, SQ)$ la solución propuesta.

1. Racionalidad: $N(P, SQ)$ debe ser un punto en el conjunto de negociación.

2. Invarianza Lineal: Si las utilidades de Rosa o de Colin son transformadas por una función líneal positiva, la solución también debe ser transformada por la misma función.

3. Simetría: Si el polígono es simétrico respecto a la recta con pendiente 1 que pasa por SQ, entonces $N(P, SQ)$ debe encontrarse sobre la recta.

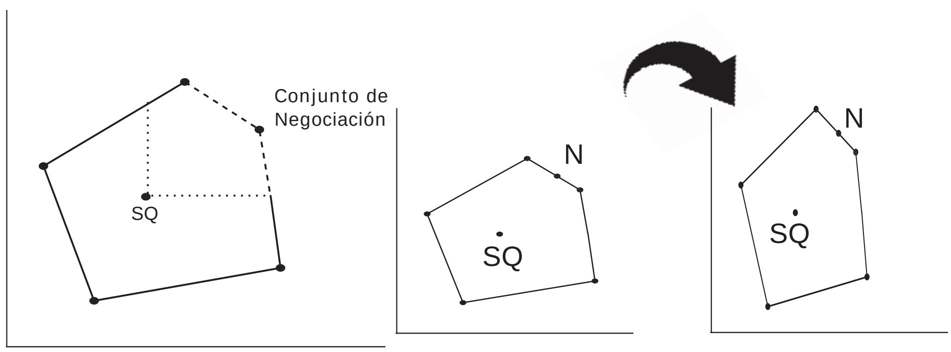
4. Independencia de Alternativas Irrelevantes: Si Q es un polígono contenido en nuestro polígono de pago que contiene tanto a SQ como a $N(P, SQ)$, entonces $N(Q, SQ) = N(P, SQ)$.

Por ahora pensemos que ya se logró localizar el Status Quo y a partir de éste vamos a construir una solución.

El axioma de racionalidad es un poco más general a lo que Von Neumann y Morgenstern proponen, por lo que la solución será Pareto-óptima y garantiza al menos el status quo (que podría ser mejor que el nivel de seguridad) para cada uno de los jugadores. El axioma de la invarianza líneal habla de que nuestra solución debe de ser inmune a transformaciones líneales. Esto tiene sentido, pues recordemos que la utilidad está definida salvo transformaciones lineales. El axioma de simetría habla sobre la noción de "justicia". En el caso en que nuestro polígono de pagos sea simétrico, ambos jugadores les debe ser repartido "lo mismo".

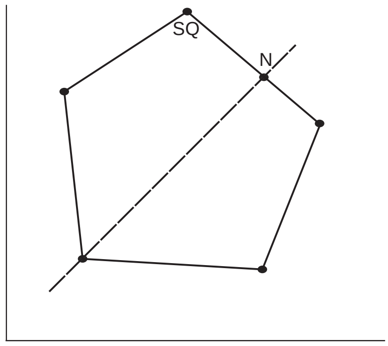
El axioma de independencia de alternativas irrelevantes es más complicado que los otros. El argumento de Nash para considerar este axioma fue el siguiente: Supón que *P* es el conjunto de alternativas disponibles y SQ es el status quo, Rosa y Colin acuerdan que *N* es el resultado más justo para ambos. Ahora supón que Rosa y Colin descubren que algunas de las alternativas en P realmente no eran posibles, encogiendo *P* a un subconjunto *Q*. Entonces *N*, que fue juzgado el punto más justo de entre todo *P*, debería seguir siendo el más justo de entre todo *Q*. En otras palabras, la "justicia" no debería ser afectada por la disponibilidad o indisponibilidad de alternativas irrelevantes.

Si aceptamos los 4 axiomas que propone Nash como condiciones que un esquema de arbitraje debe satisfacer, entonces el esquema de arbitraje está completamente determinado, Nash en 1950 probó el siguiente teorema:

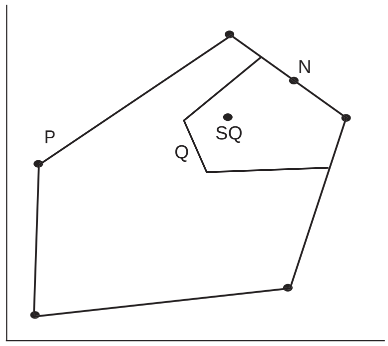


Axioma 1

Axioma 2



Axioma 3



Axioma 4

Teorema 2.5.4. *Existe un único sistema de arbitraje $N(P, SQ)$ que satisface los 4 axiomas de Nash. Además $N(P, SQ)$ es el punto en el conjunto de negociación que maximiza el producto $(x - x_0)(y - y_0)$, donde $N = (x, y)$ y SQ= (x_0, y_0).*

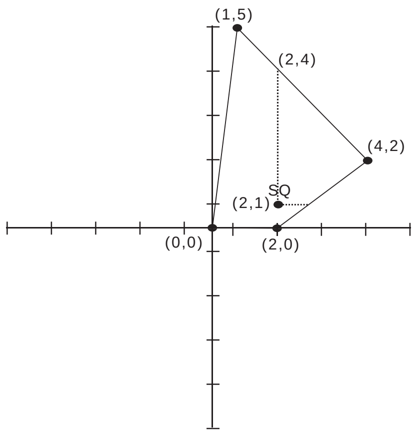
Demostración. Sea Q un polígono con status quo (x_0, y_0) y denotemos a N el punto en Q con $x \geq x_0, y \geq y_0$ que maximiza el producto $(x - x_0)(y - y_0)$ Hay que probar que cualquier esquema de arbitraje que satisfaga los 4 axiomas debe elegir a N como la solución.

Usando el axioma 2 podemos restar x_0 a todas las utilidades del primero y restar y_0 a todas las utilidades del segundo de tal forma de que SQ quede en $(0, 0)$. Después podemos multiplicar todas las utilidades de x y y por constantes positivas de tal forma que N se encuentre en el punto $(1, 1)$. Como N maximiza el producto, todo el polígono debe estar en o bajo la hipérbola $xy = 1$, más aún Q se encuentra en o bajo la línea tangente a la hipérbola en $(1, 1)$: $x + y = 2$. Podemos encerrar a Q en un polígono P más grande que tenga esta recta tangente como su frontera noreste y sea simétrica respecto a la línea $x = y$.

Por los axiomas 1 y 3, la solución al nuevo polígono P debe ser N. Ahora por el axioma 4, la solución al problema de arbitraje para nuestro polígono inicial Q debe ser también N. □

Observación. La demostración del teorema nos da un algoritmo fácil de calcular.

Ejemplo. Supongamos Rosa y Colin se encuentran en una situación donde deben ponerse de acuerdo. Resulta que en los posibles resultados dibujan el polígono de pago que tiene como vértices los puntos $(0, 0), (2, 0), (4, 2), (1, 5)$, si no pueden llegar a un acuerdo el resultado será $SQ = (2, 1)$. ¿Qué solución podemos proponer como árbitros? Buscaremos una solución usando el criterio dado por el teorema para dicho esquema de arbitraje.



Nuestra solución debe encontrarse en el conjunto de negociación, es decir, en el segmento de recta entre los puntos $(4, 2)$ y $(2, 4)$. Debe ser el punto de este segmento que maximice el producto $(x - 2)(y - 1)$. La ecuación de este segmento de recta es $y = 6 - x$ $(2 \leq x \leq 4)$, por lo que la expresión que debemos maximizar debe ser:

$$(x - 2)(6 - x - 1) = -x^2 + 7x - 10.$$

Esto es ahora un simple problema de cálculo de donde obtenemos que $(\frac{7}{2}, \frac{5}{2})$ es el punto que maximiza el producto.

Finalmente vamos a hablar un poco del status quo. ¿Qué punto deberíamos elegir como status quo en un juego? Si recordamos un poco lo que proponían Von Neumann y Morgenstern, el segundo punto era que ningún jugador debería aceptar menos de su nivel de seguridad, por lo que una primer propuesta sería elegir como status quo el punto que tiene como primer coordenada el nivel de seguridad del jugador 1 y como segunda coordenada el nivel de seguridad del jugador 2. Esto tiene la ventaja de que el status quo sería fácil de calcular.

En un intento de mejorar esto, Nash propuso que si se iba a usar el status quo para encontrar el arbitraje, los jugadores pueden tratar de influenciar el juego con amenazas del tipo “Si las negociaciones se rompen entonces yo voy a jugar esto, que te arruina”. Cada jugador debe buscar la manera de influenciar en el juego para obtener un status quo que los beneficie más. Esto termina convirtiéndose en un juego de amenazas donde el status quo es el punto donde cada uno de los jugadores está jugando su *amenaza óptima*. El juego de amenazas resulta ser un juego de suma cero.

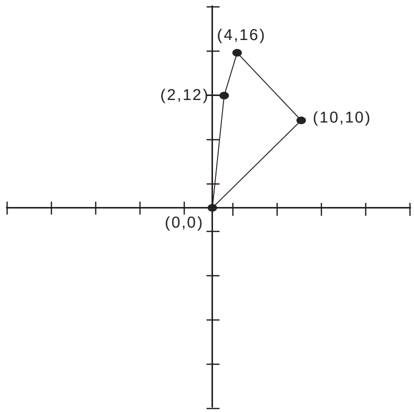
En general es difícil construir el juego de amenazas de un juego y encontrar la estrategia de amenaza óptima, pero hay un caso en el que no es tan difícil: cuando el conjunto de negociación tiene pendiente -1. En este caso nuestra solución puede ser encontrada si trazamos la recta con pendiente 1 que pasa por SQ y calculamos la intersección de la recta con la frontera superior del polígono de pagos. La diferencia en el Status Quo se conservara en cada uno de los puntos de la recta y en particular se conservará en la solución. A

Rosa le gustaría que esta solución fuera tan grande como sea posible mientras que Colin buscará que sea lo más chica posible, por lo que Rosa y Colin encontrarán su estrategia óptima jugando el juego de suma cero conocido como el *juego de diferencias* derivado del juego original.

Ejemplo. Consideremos el juego representado por la siguiente matriz

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} (2,12) & (10,10) \\ (4,16) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Si dibujamos el polígono de pagos de este juego podemos ver que el conjunto de negociación es el segmento que une los puntos $(4,16)$ y $(10,10)$.



Precisamente dicha recta tiene pendiente -1. Entonces, dado el SQ, para encontrar N hay que seguir la recta con pendiente uno que pasa por SQ hasta chocar con la frontera superior del polígono de pagos.

El “juego de diferencias” es

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ -12 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donde la estrategia óptima es el perfil (A,A) que es un equilibrio en estrategias puras. Entonces el SQ óptimo será el mismo perfil que la estrategia de amenaza óptima, es decir, (2,12).

En general para calcular el juego de amenazas se debe construir una matriz de mismo tamaño que el juego original en donde para cada pareja de estrategias puras de Rosa y Colin, R y C, escribimos el resultado de lo que ocurriría si ambos jugadores hacen la amenaza “Si las negociaciones se rompen, yo voy a jugar X”, donde X es R o C.

Si tenemos la fortuna de que el conjunto de negociación sea un único segmento de recta entonces podemos multiplicar las utilidades del jugador 1 o del jugador 2 por un número positivo para que el conjunto de negociación tenga pendiente -1 y así fácilmente calcular el Status Quo para dicho juego usando el mismo método que en el ejemplo.

Capítulo 3

Division Justa

3.1. Introducción

Al final del capítulo anterior ya hablamos del concepto de “justicia” donde los jugadores llegaban a un acuerdo gracias a la ayuda de un arbitro y además cada uno recibía un pago con el que cada jugador estaba conforme. La división justa busca extender estos conceptos con la finalidad de repartir un bien entre varias personas, de modo que cada uno de los participantes sienta que recibió una parte con la que esté conforme y así evitar conflictos.

Para entender un poco mejor la idea lo mejor es dar un ejemplo con el que seguramente todos hemos lidiado: realizar las tareas del hogar. Supongamos que Rosa, Colin y Larry son una familia. Los tres están dispuestos a ayudar con el quehacer pero, como es común, cada uno prefiere hacer actividades diferentes; obviamente no sería justo si Larry hiciera todas las tareas él solo.

Una posible solución podría ser que hicieran una tómbola con todas las tareas y que cada quien tuviera la misma cantidad de tareas. Supongamos que a Rosa le toca trapear y recoger la popó del perro. El problema es que puede ser que Rosa disfrute de podar el pasto y regar las plantas, no le moleste mucho lavar ropa ni barrer pero odie más que nada en el mundo recoger la popó del perrito y trapear. Quizás Colin prefiere trapear a podar el pasto. En ese caso Rosa podría no considerarlo justo, pues ella estaría mucho mejor si le tocara podar el pasto, regar las plantas y lavar ropa.

Otro ejemplo clásico es el de repartir un pastel. Imaginemos que tenemos un pastel de muchas frutas y sabores que queremos repartir completamente entre todos los invitados. El problema es que todos los invitados tienen gustos distintos y si partimos el pastel en N pedazos iguales y a cada invitado le damos un pedazo podría pasar que a alguien le toque un pedazo de un sabor que no le gusta y entonces pensarían que la forma en que repartimos el pastel no fue justa.

Al modelo utilizado en esta sección para describir al problema de división justa se le conoce como el *modelo de Robertson y Webb*.

3.2. Definiciones

Primero necesitamos describir los elementos básicos que necesitamos para pensar en división justa

- Bienes(“Botín”): Objetos que van a ser divididos.
- Jugadores: Conjunto de personas entre quienes el/los objetos(s) serán divididos.
- Función de Utilidad: Cada jugador tiene un sistema de medición interna que da a los jugadores la habilidad de cuantificar un bien o parte de él. Denotaremos la función de utilidad del jugador i como μ_i.

Al igual que como hicimos con la parte de teoría de juegos debemos asumir un par de cosas respecto a los jugadores:

- Racionalidad: Cada jugador busca maximizar su parte del botín. También asumiremos que todas las acciones que un jugador decida hacer están pensadas para bien propio.
- Cooperación: Todos los jugadores aceptan las reglas del juego y van a seguirlas al pie de la letra. Después de una cantidad finita de pasos el juego termina con una división del botín.
- Privacidad: Los jugadores no tienen información respecto a cómo los otros jugadores valuan el botín.
- Simetría: Todos los jugadores tienen el mismo derecho de dividir el botín.
- Interés: Cada jugador está interesado en recibir una parte del botín, en otras palabras, cada jugador piensa que el botín X tiene valor positivo.

Hasta ahora no hemos abusado de la intuición del lector para no mencionar exactamente a qué nos referimos con “justo”. Pero si vamos a hablar de División Justa, lo mejor será formalizar el concepto.

Definición 3.2.1. Sea Ω un botín (un conjunto) y $\{P_1, \cdots, P_N\}$ un conjunto de jugadores. Diremos que $X = \{X_1, \cdots, X_N\}$ es una *repartición de* Ω *entre N jugadores* si $\Omega = \bigcup_{i=1}^N X_i$ donde para cada $i \neq j, X_i \cap X_j = \emptyset$ y además X_1 le corresponde al jugador P_1,..., X_N le corresponde al jugador P_N.

Formalmente, queremos que cada μ_i sea una medida sobre Ω (o más específicamente, sobre una σ-álgebra en Ω) donde $\mu_i(\Omega) < \infty$. Dependiendo de la naturaleza del botín, la σ-álgebra deberá cumplir ciertas características. Más adelante hablaremos sobre los tipos de botín y en el capítulo 5 exploraremos las consecuencias que tiene analizar el problema desde el punto de vista analítico.

Definición 3.2.2. Sea Ω un botín, X una repartición de Ω entre N jugadores y sea P un jugador:

1. Diremos que X es una *división justa para el jugador* P si el pedazo que recibe P de X vale al menos $\frac{1}{N}$ del valor total de Ω (en la opinión de P).

2. Diremos que X es una *división justa* si X es una división justa para todos los jugadores.

Observación. Para facilitar las cosas, como trabajamos con utilidades, podemos multiplicar las utilidades de cada jugador por números positivos para que el valor total de Ω para cada jugador sea igual a 1.

Para lograr una división justa debemos darles a cada jugador un conjunto de reglas que defina cómo deben jugar un juego. Es decir, un algoritmo. En un juego de división justa siempre debemos considerar un bien Ω, un conjunto de los jugadores junto con su respectiva función de utilidad, y un algoritmo con el que planeamos lograr una división justa.

Dependiendo de la naturaleza de S, un juego de división justa puede ser clasificado en:

- Continuo: Ω es divisible de infinitas formas posibles y además el valor de un fragmento del botín puede ser incrementado o decrementado en valores arbitrariamente pequeños.

- Discreto: Ω está hecho de una cantidad finita de objetos indivisibles.

- Mixto: Algunos de los componentes son continuos y algunos son discretos.

Si quisiéramos dividir un terreno entre N personas estaríamos dividiendo algo continuo pues podemos agregar o quitar terreno tan pequeño como se quiera. Por otro lado, si se va a dividir una colección de cuadros, estaríamos dividiendo algo discreto pues nadie quisiera partir un cuadro en N pedazos para que cada quien se lleve un pedazo del cuadro a su casa.

Además el conjunto a ser dividido también puede ser:

- Homogéneo: Solo el valor importa.

- Heterogéneo: El tamaño y el contenido de la pieza es importante.

Para ser más claros, si fueramos a dividir dinero entonces estaríamos dividiendo un botín homogéneo pues sólo el valor es lo que importaría. Por otro lado dividir un pastel podría ser heterogéneo, pues si el pastel es mitad fresa y mitad chocolate y le damos toda la parte de chocolate a Rosa y toda la parte de fresa a Colin pero Colin es alérgico a las fresas seguro que tendríamos un problema.

Además Ω también puede ser:

- Deseable: Como una colección de automóviles.
- Indeseable: Un conjunto de tareas del hogar.

Además de considerar sólo el problema de división justa consideraremos otras versiones más fuertes del problema:

Definición 3.2.3. Sea Ω un botín y X una repartición de Ω entre N jugadores:

1. Diremos que X es una *división fuerte* si $\forall i \geq N, \mu_i(X_i) > \frac{1}{N}$.
2. Diremos que X es una *partición libre de envidias* si $\forall i, j(i \neq j), \mu_i(X_i) \geq \mu_i(X_j)$.

En otras palabras una partición es una división fuerte si cada persona se queda con un pedazo del botín que considera que tiene un valor mayor estrictamente que $\frac{1}{N}$. Por otro lado, una partición es libre de envidia si el pedazo que le tocó a cada quien es tan bueno como cualquier otro pedazo de botín de otro jugador.

En particular nos enfocaremos a algoritmos para lograr división justa en bienes deseables, heterogéneos y continuos, aunque muchos de estos algoritmos pueden ser modificados para lograr división justa en otro tipo de bienes. Por el tipo de bienes en el que estaremos trabajando será conveniente pensar en que trabajaremos con un pastel, asi que de ahora en adelante en lugar de referirnos a bienes deseables, heterogéneos y continuos hablaremos de pastel.

Vamos a poner ciertas reglas a los algoritmos diciendo qué tipo de jugadas se permitirán hacer:

- Las piezas pueden ser cortadas repetidamente sin disminuir su valor total, es decir, si tenemos inicialmente una pieza A que es cortada en dos piezas B y C con $B \cap C = \emptyset$ entonces $\mu(A) = \mu(B) + \mu(C)$.
- En cada paso del algoritmo, a cualquier jugador, digamos P_i, puede pedírsele cortar una pieza A en dos piezas $A = A_1 \cup A_2$ de tamaños específicos no negativos a_1 y a_2 tales que $a_1 + a_2 = \mu_i(A)$
- Los cortes indicados a un jugador son hechos sin consultar a otros jugadores sobre los tamaños de las resultantes A_1 y A_2, es decir, instrucciones del tipo "P_1, corta la pieza de tal forma que P_2 y tú consideren que mida más de $\frac{1}{2}$" no se permiten.
- Cuando un árbitro (o un algoritmo) indica a un jugador cortar cierta pieza en cierta proporción, el jugador debe partir dicha pieza, pero puede, estratégicamente, mentir y cortarla en la proporción que el jugador quiera. Si el jugador decide cortar el pedazo en otra proporción, entonces podría no recibir una pieza aceptable como resultado.

En la siguiente sección presentaremos distintos tipos de algoritmos:

- Finitos: Solo un número finito de decisiones tienen que ser hechas.
- Continuos: Involucran una cantidad infinita (incluso no numerable) de decisiones a ser tomadas. Tienden a ser más poderosos que los algoritmos finitos.
- Aproximados: No dan una solución exacta en tiempo finito pero puede dársele un margen de error. Los usaremos para resolver principalmente el problema de libre de envidias, que para calcular una solución exacta requiere de mucho tiempo, esfuerzo y paciencia por parte de los jugadores (en particular cuando son muchos jugadores).

Capítulo 4

Division Justa: Algoritmos

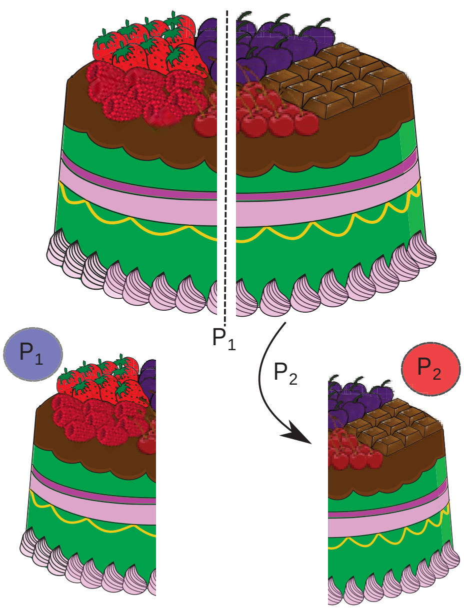
4.1. Algoritmos para División Justa

4.1.1. Tú Cortas, Yo Elijo

Comenzaremos con lo más fácil: algoritmos para partir un pastel entre dos jugadores. Posiblemente el algoritmo más sencillo y más conocido es el llamado *tú cortas, yo elijo*.

Algorithm 2 - Tú cortas, yo elijo

1: P_1 corta $X = X_1 \cup X_2$ de tal forma que $\mu_1(X_1) = \frac{1}{2} = \mu_1(X_2)$.
2: P_2 elige uno de los pedazos, el otro pedazo se lo queda P_1.



Por las suposiciones hechas en el capítulo anterior, el pastel debe valer 1 para ambos jugadores. El jugador 1 corta justamente por la mitad así que éste ya tiene garantizado una repartición justa. Como el jugador 2 intentará maximizar sus ganancias entonces eligirá el pedazo más grande (según él). Además, debe existir un pedazo de tamaño al menos $\frac{1}{2}$ según el jugador 2, por lo que al jugador 2 también se le garantiza una repartición justa. Por lo tanto el algoritmo sí garantiza una división justa.

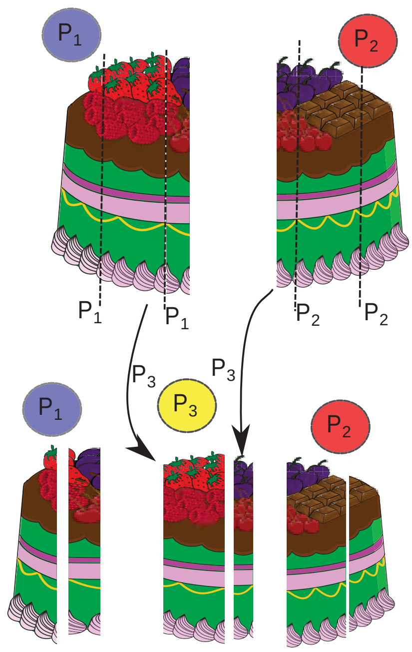
4.1.2. Pares Sucesivos

A continuación trataremos de extender el algoritmo "tú cortas, yo elijo" para más de dos jugadores haciendo inducción matemática.

Algorithm 3 -Pares Sucesivos (N jugadores)

Para dos jugadores hacemos "Tú cortas, yo elijo"
Hacer Pares Sucesivos para el caso de $N-1$ jugadores.
$P_1, \cdots, P_{N-1}$ cortan cada uno de sus piezas en N partes iguales.
P_N elige una de las N partes de cada pieza de cada jugador.

Parece ser un algoritmo un tanto enredoso así que para dejar más claro cómo funciona el algoritmo hicimos el siguiente dibujo:



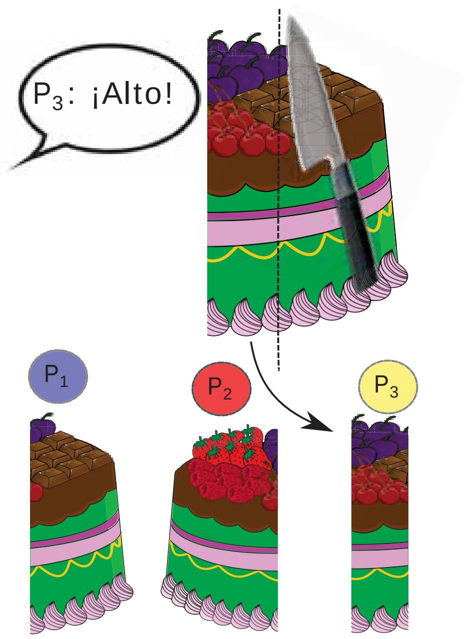
Suponiendo que "Pares sucesivos" para $N-1$ jugadores asegura a cada jugador al menos $\frac{1}{N-1}$ del total, en el caso de N jugadores, al final del algoritmo $P_1, \cdots, P_{N-1}$ obtienen exactamente $\frac{N-1}{N}$ de lo que ya tenían, por lo que se garantizan al menos $\frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N-1}\right) = \frac{1}{N}$. Por otro lado, si P_N evalúa se garantiza al menos $1/N$ de cada jugador, por lo tanto, se garantiza $1/N$ del total.

4.1.3. Cuchillo Móvil

El siguiente algoritmo es muy poderoso pues garantiza una división justa con una cantidad óptima de cortes y es muy fácil de llevar de la teoría a la práctica (siempre y cuando el tipo de botín lo permita).

Algorithm 4 -Cuchillo móvil

1: **Mientras** Exista jugador sin porción de pastel **, hacer:**
2: Un cuchillo es pasado continua y lentamente sobre un pastel de izquierda a derecha. Cuando alguno de los jugadores que aún no tienen pastel crea que la porción a la izquierda del pastel tenga tamaño $\frac{1}{N}$ grita "¡alto!".
3: El pastel es cortado y el jugador que gritó se queda con la pieza cortada.



La razón por la que garantiza una división justa debe ser evidente: cuando el primer jugador grita "¡alto!" es porque ese pedazo tiene un valor de $\frac{1}{N}$. La siguiente ronda el cuchillo se vuelve a mover hasta que alguno de los jugadores restantes creen que el valor del pedazo de pastel que se encuentra a la izquierda del cuchillo es de $\frac{1}{N}$ y así sucesivamente.

Cabe destacar que este es el primer ejemplo que tenemos de un algoritmo de tipo continuo pues involucra una cantidad infinita no numerable de decisiones que cada jugador debe hacer en cada momento, cada vez que el cuchillo se mueve cada jugador debe decidir si en ese momento específico debería gritar para cortar el pastel. A pesar de que es muy fácil de poner en práctica, es sumamente irrealista que todos los jugadores piensen en cada instante si ya deberían detener el cuchillo o no.

4.1.4. Recorte

El siguiente algoritmo es una versión discreta del algoritmo del cuchillo móvil, que tiene como objetivo identificar dónde cada uno de los jugadores hubiera gritado "¡alto!", sin tener que recurrir a mover un cuchillo.

Algorithm 5 -Recorte

Mientras Exista jugador sin porción de pastel **, hacer:**
  Los jugadores que no han recibido pastel son enumerados, digamos que son K.
  El jugador P_1 corta una pieza X' tal que $\mu_1(X') = \frac{1}{N}$
  $X^{'}$ es pasada sucesivamente a $P_2, \cdots, P_{K-1}$. Cualquier jugador que crea que la pieza $X^{''}$ que le pasaron tiene tamaño mayor que $\frac{1}{N}$ debe cortar un pedazo E para que $X^{''} - E$ tenga tamaño $\frac{1}{N}$
  El jugador P_K recibe la pieza $X^{''}$ resultante del paso anterior y:
  Si $\mu_K(X^{''}) \geq \frac{1}{N}$ **, entonces:**
    P_K se queda con la pieza $X^{''}$.
  Si no
    $X^{''}$ es dada al último jugador que la recortó.

El algoritmo logra una división justa pues si el último jugador elige quedarse con la pieza es porque para él la rebanada tiene valor al menos $\frac{1}{N}$. Si el último jugador elige no quedarse con ella, entonces se le da al último jugador que la recortó y éste la hizo más chica de tal forma que la rebanada tuviera valor exacto $\frac{1}{N}$ para él. En otras palabras cada jugador termina con una rebanada de valor al menos $\frac{1}{N}$.

4.1.5. Complejidad

Para medir la eficiencia de un algoritmo de división, se suele utilizar la cantidad de cortes como medida. Esto podría llevarnos a pensar cuál es el algoritmo que mejor se ajusta a lo que necesitamos: menos cortes, fácil de ejecutar, tipo de división justa, cantidad de jugadores, etc. Por ejemplo, podríamos pensar que queremos lograr una división justa entre muchos jugadores pero en la práctica hacemos tantos cortes que en lugar de tener una rebanada chiquita tienes una montaña de "boronitas".

Aunque matemáticamente el resultado es adecuado, en la práctica una montaña de boronitas y una rebanada definitivamente no son lo mismo, y uno podría preferir una rebanada por el simple hecho de verse más bonita y completa.

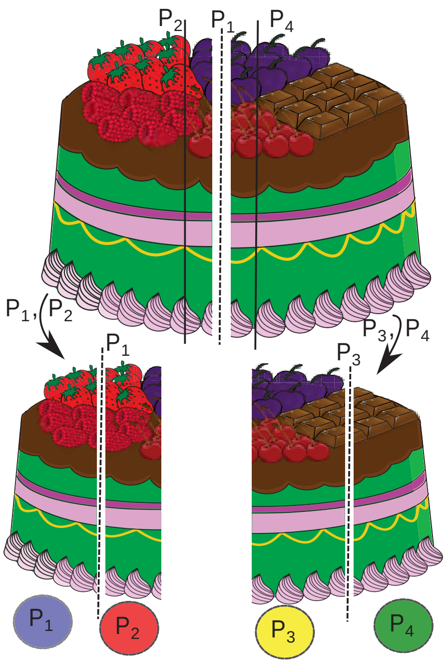
Resulta que un algoritmo óptimo (en términos del número de cortes) para conseguir división justa es el algoritmo del cuchillo móvil, que tiene un total de $N - 1$ cortes (que es la mínima cantidad de cortes necesarios para generar N pedazos). Eso es precisamente una característica que tienen los algoritmos continuos; al final del capítulo mencionaremos un resultado muy sorprendente que tiene que ver con éste hecho.

4.1.6. Divide y Vencerás

Regresando a los algoritmos, veremos una adaptación de un algoritmo clásico para resolver el problema de división justa: divide y vencerás. Esta modificación fue propuesta por Paz y Even y sigue la idea original de divide y vencerás, es decir, dividir el tamaño del grupo en dos secciones hasta que cada quien tenga su rebanada.

Algorithm 6 -Divide y Vencerás

Si $N = 1$ **, entonces:**
    El jugador recibe todo el pastel.
Si no , **Si** $N = 2K$
    Todos los jugadores excepto uno marcan con cortes paralelos dónde creen que se encuentra la mitad del pastel.
    Se le pregunta al jugador que sobra si cree que la mitad queda a la izquierda o a la derecha del corte que se encuentra en el corte de en medio.
    El jugador que no cortó comparte el pastel que eligió con los $K - 1$ jugadores cuyos cortes se encontraban en la región escogida en el paso anterior mientras que los jugadores restantes comparten la rebanada contraria.
Si no , **Si** $N = 2K + 1$
    Todos los jugadores excepto uno dividen el pastel con cortes paralelos en la proporción $K : K + 1$.
    Se le pregunta al jugador que sobra si cree que la parte izquierda del corte K (de izquierda a derecha) mide al menos $\frac{K}{N}$ o si la parte derecha mide al menos $\frac{K+1}{N}$.
    El jugador que no cortó comparte el pastel que eligió con los jugadores cuyos cortes se encontraban en la región escogida en el paso anterior mientras que los jugadores restantes comparten la rebanada contraria. De esta forma quedarán K jugadores en la región izquierda y $K + 1$ en la región derecha.



La clave para ver que el algoritmo funciona correctamente es ver que en el caso en el que N es par siempre quedan la mitad de los jugadores en un lado y la mitad en el otro, mientras que si N es impar, del lado izquierdo quedan K jugadores y del derecho $K + 1$ jugadores. Los jugadores cuyos cortes ya se encontraban en la región elegida por el jugador que no cortó pensarán que la rebanada que deben compartir es al menos lo que ellos esperaban al elegir marcar el pastel. Gracias a esto cada quien se asegura al menos $\frac{1}{N}$ que es justo lo que queríamos.

Hay algoritmos en los que el desacuerdo puede hacer que los jugadores reciban más de lo que esperan, como es el caso de "Divide y Vencerás" y "Recorte". A continuación veremos algunos algoritmos que tienen esta propiedad.

4.1.7. Método de Marcadores

Supongamos que tenemos que hay un terreno que se deja como herencia entre N personas. Obviamente cada persona quiere una parte justa del terreno. Digamos que este terreno tiene la peculiaridad de que se encuentra en la playa y que además conecta a una carretera recta con el mar, asi que todos querrían que su pedazo de terreno tenga acceso al mar y, para no entrar a propiedad privada, también tenga acceso a la carretera, por lo que todos acuerdan en que el terreno se dividirá por rectas perpendiculares a la carretera. ¿Será posible dividir este terreno de forma justa?

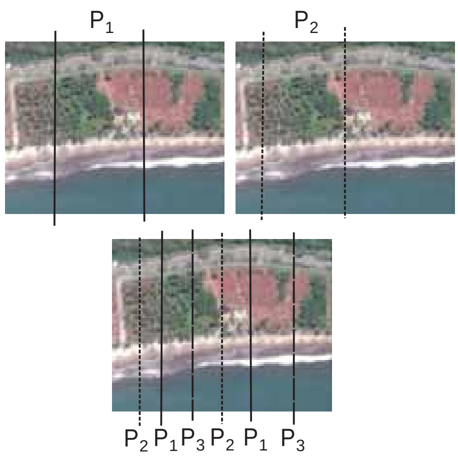
A este algoritmo se le conoce como el "Método de marcadores", pues cada recta sirve como marcador o separador de terrenos para cada uno de los jugadores. Podría ser interesante pensar en cómo puede ponerse en práctica este algoritmo. Se podría conseguir un

Algorithm 7 -Método de Marcadores

Cada uno de los jugadores divide de forma independiente (y privada) el terreno en N pedazos usando $N - 1$ rectas paralelas.
Cada recta se enumera de izquierda a derecha.
Se juntan todas las rectas de cada uno de los jugadores de tal forma que tengan forma de diferenciarse, es decir, las rectas que son de P_1, las que son de P_2, etc.
Para $i = 1$ **hasta** $i = N$ **, hacer:**
    Escanear el arreglo de izquierda a derecha hasta encontrar la primer recta número i.
    Asignar el terreno que va desde el límite del terreno anterior hasta la recta del paso anterior al dueño de dicha recta.
    Borrar todas las rectas del dueño de dicha recta.

plano de la propiedad vista desde arriba, sacar N copias, una para cada jugador, cada jugador traza sus líneas en la copia y al final usando alguna herramienta por computadora sobreponer todas las rectas de los jugadores donde las rectas rojas son del jugador 1, las rectas azules del jugador 2, etc.

Este algoritmo logra dividir el terreno con las caracteristicas antes mencionadas en terrenos de tamaño al menos $\frac{1}{N}$ a cada jugador, además tiene la peculiaridad de que si los jugadores difieren en donde creen que se debe encontrar cada recta, los jugadores podrían recibir más de lo que marcaron. Podemos ver lo anterior con la siguiente imagen:

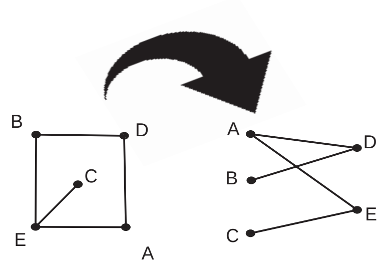


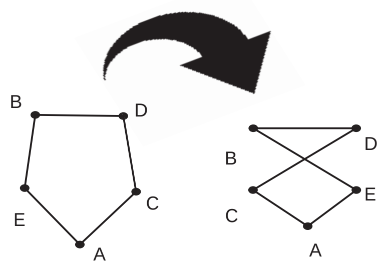
4.1.8. Algoritmo de Apareamiento

El último algoritmo de esta sección es una aplicación de un famoso resultado en gráficas bipartitas: el Teorema de Hall.

Para presentar este resultado primero debemos presentar algunas observaciones combinatorias. Supongamos que tenemos N jugadores $P_1, \cdots, P_N$ cada uno con su respectiva función de evaluación μ_i y tenemos que X fue cortado en M pedazos $X_1 \cdots, X_M$. Podemos construir una gráfica de la siguiente forma: Por cada jugador y cada pedazo de pastel ponemos un vértice, dibujamos una arista $P_i X_j \iff X_j$ es aceptable para el jugador P_i. Hay que notar que no pueden existir aristas entre el conjunto de jugadores ni entre el conjunto de pedazos de pastel.

Recordemos que una gráfica que se puede dividir en dos conjuntos disjuntos en los que no existen aristas entre elementos del mismo conjunto se denomina *gráfica bipartita*. En particular a esta gráfica bipartita la llamaremos *gráfica de aceptabilidad*.





Como podemos ver, en la primera imagen podemos tomar como primer subconjunto de vértices a $\{A, B, C\}$ y el complemento en el segundo subconjunto. No existen dos vértices dentro del mismo subconjunto que estén unidos por una arista, por lo que debe ser una gráfica bipartita. Si tratamos de hacer lo mismo con los vértices de la segunda gráfica llegaremos a que no podemos meter a A en ninguno de los dos subconjuntos, por lo que dicha gráfica no puede ser una bipartita.

Ahora supongamos que tenemos la misma cantidad de jugadores que de pedazos de pastel.

Definición 4.1.1. Un *apareamiento* es una asignación de algunas de las piezas a los jugadores de tal forma que cada jugador obtiene a lo más una pieza aceptable.

Definición 4.1.2. Un *apareamiento perfecto* es un apareamiento en el que todas las piezas fueron asignadas.

Antes de enunciar el teorema debemos introducir algo de notación: Sea S un conjunto de piezas. El número de jugadores que considera al menos una pieza de S aceptable será denotado por $N(S)$.

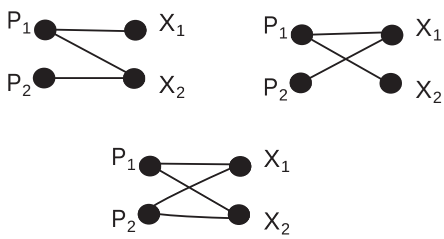
Teorema 4.1.3. (Hall) *Una gráfica de aceptabilidad para N jugadores tiene un apareamiento perfecto si y sólo si para cada k* ($1 \leq k \leq N$)*,* $N(S) \geq k$ *para todo subconjunto S con k piezas de pastel.*

Primero daremos el algoritmo y luego veremos la razón por la que funciona.

Algorithm 8 -Algoritmo de Apareamiento (N jugadores)

P_1 corta el pastel en N pedazos de valor $\frac{1}{N}$.
Encontrar el k más pequeño para el exista un cierto S_k de k piezas para el cual $N(S_k) = k$ tal que para cualquier $S_j \subset S_k$ $(1 \geq j < k)$ se tiene que $N(S_j) > j$.
Encontrar un apareamiento en S_k.
Realizar nuevamente el Algoritmo de Apareamiento para los $N-k$ jugadores restantes.

Para ver que el algoritmo funciona de la manera adecuada procederemos por inducción: El caso base es cuando tenemos sólo 2 jugadores y P_1 corta en dos pedazos de tamaño $\frac{1}{2}$, el Algoritmo de Apareamiento se reduce al algoritmo "Tú Cortas, Yo Elijo" y las únicas 3 posibles gráficas que pueden formarse son las siguientes:



Supongamos que el "Algoritmo de Apareamiento" hace bien el trabajo para $n-1$ jugadores y agreguemos un jugador más. Igual que antes, P_1 corta el pastel en n pedazos de igual valor. Si existe una pieza X_i para la cual $N(X_i) = 1$ eso quiere decir que la única persona que acepta la pieza es el jugador P_1, por lo que podemos darle la pieza a P_1 y dejar que el resto de los jugadores dividan el complemento. El resto de los jugadores estarán bien con que P_1 se lleve la pieza, pues tiene un valor chico para todos los otros jugadores y por la hipótesis de inducción el algoritmo cumple su objetivo para los $n-1$ jugadores restantes.

Ahora pensemos en el caso en el que para toda i se tiene que $N(X_i) > 1$. Si logramos encontrar dicha k, entonces el Teorema de Hall restringido al conjunto S_k nos asegura un apareamiento perfecto. En este caso también los $n-k$ jugadores restantes estarán de acuerdo con que los k jugadores se lleven éstas piezas, pues pensarán que todas tienen valores muy pequeños. Así, usando la hipótesis de inducción, los otros $n-k$ jugadores logran su objetivo y se logra una división justa.

Nótese que en la gráfica bipartita todos los jugadores tendrán al menos un pedazo que les guste y que si el k más pequeño resulta ser igual a n, entonces el Teorema de Hall garantiza que existe un apareamiento perfecto y que podemos repartir los pedazos logrando así una división justa.

4.2. Algoritmos Libres de Envidia

Lograr una partición libre de envidias es un problema mucho más difícil que el de lograr una división justa. Por lo general los algoritmos son mucho más elaborados y por lo mismo parecería no ser tan fácil de llevar a la práctica. Más adelante veremos que hay algoritmos que funcionan de manera muy eficiente y además es fácil que los jugadores puedan seguir las instrucciones en la práctica.

4.2.1. Algoritmo Guy-Selfridge-Conway

El primer algoritmo para lograr una partición libre de envidias es un elegante método atribuido a Richard Guy, John Selfridge y John Conway. Este algoritmo funciona sólo en el caso de 3 jugadores y sus mismos autores argumentan que no es fácil de generalizar.

Algorithm 9 -Libre de Envidias para 3 Jugadores

1: P_1 corta a X en 3 piezas de igual valor.
2: P_2 evalúa las piezas (de mayor a menor) X_1, X_2, X_3.
3: P_2 corta E de X_1 de tal forma que $\mu_2(X_1^{'}) = \mu_2(X_2)$, donde $X_1^{'} = X_1 - E$.
4: Los jugadores deben elegir entre $X_1^{'}, X_2, X_3$ en el siguiente orden: P_3, P_2, P_1. P_2 debe elegir $X_1^{'}$ si es que está disponible.
5: P_2 o P_3 debe recibir $X_1^{'}$, renombraremos al que lo reciba $P_1^{'}$ y al otro $P_2^{'}$.
6: **Si** $E \neq \emptyset$ **, entonces:**
7: $P_2^{'}$ corta E en 3 partes iguales que serán elegidas en el orden: $P_1^{'}, P_1, P_2^{'}$.

Cuando P_1, P_2 y P_3 eligen pedazo, todos son libre de envidias pues cada quien elige su pedazo favorito. ¿Qué pasa si E no es vacío? Recordemos que P_1 cortó inicialmente a X en 3 partes iguales, P_1 debió terminar con X_2 o X_3 asi que no puede tener envidia de la persona que se llevó $X_1^{'}$ (aún si ésta persona se queda con todo E). Para ver que el resto de los jugadores no tienen envidia pensemos que P_2 se llevó $X_1^{'}$, por lo que P_3 cortó E en 3 piezas iguales. P_2 eligirá primero, después P_1 y al final P_3 de donde P_2 eligirá su pieza favorita, a P_1 no le importa cuánto se lleve P_2 y a P_3 no le importa qué pieza se quede al final. En conclusión, una vez más todos tienen su pieza preferida y por lo tanto ésta es una partición libre de envidias.

4.2.2. Cuchillo Móvil Libre de Envidias para 3 Jugadores

Walter Stronquist sugirió un algoritmo continuo para hacer el mismo trabajo que el algoritmo anterior modificando un poco el algoritmo del Cuchillo Móvil. Esta versión requerirá además de los tres jugadores a un réferi.

La razón por la que este algoritmo es libre de envidias es la siguiente: el jugador que gritó debe estar satisfecho con su rebanada, pues pudo ver las dos rebanadas restantes, por

Algorithm 10 -Cuchillo Móvil Libre de Envidias para 3 Jugadores

1: El réferi mueve una espada sobre el pastel de izquierda a derecha de forma lenta y contínua.
2: Cada uno de los jugadores tiene un cuchillo paralelo a la espada sobre lo que cada quien considera la mitad del pedazo a la derecha de la espada. Los cuchillos se ajustan mientras la espada se mueve.
3: Cuando alguno de los jugadores grite “¡Corta!” el pastel es cortado por la espada y por el cuchillo de en medio de los 3. Quien gritó se queda con el pedazo a la izquierda de la espada, el jugador con el cuchillo más a la derecha (que no haya gritado) se queda con la rebanada más lejana a la espada, el jugador restante se queda con la parte de en medio.

lo que consideró que era la mejor opción; si el jugador con el cuchillo de en medio no fue quien gritó entonces a él le debe de dar igual cual de los pedazos restantes se quede con él; si el jugador con el cuchillo más lejano a la espada no fue quien gritó también debe estar satisfecho pues recibe más que lo que consideraba la mitad del pedazo a la derecha de la espada, además como no fue quien gritó prefería cualquiera de los dos pedazos a la derecha de la espada; el jugador con el cuchillo más cerca a la espada debe estar satisfecho por la misma razón.

4.2.3. Cuchillo Móvil Libre de Envidias para 4 Jugadores

El siguiente algoritmo requiere una pequeña preparación previa pues utilizará varias veces el siguiente algoritmo:

Algorithm 11 -Cuchillo Móvil para División Exacta con Valor $\frac{1}{2}$ para 2 Jugadores

1: P_1 sostiene dos cuchillos sobre el pastel: un cuchillo en el extremo izquierdo y el otro paralelo al primero de tal forma de que P_1 crea que la mitad del pastel se encuentra entre los dos cuchillos.
2: P_1 mueve el cuchillo izquierdo de forma lenta y continua hacia la derecha mientras adapta el cuchillo derecho para que siempre se encuentre un pedazo de valor $\frac{1}{2}$ entre ambos cuchillos.
3: P_2 grita “¡Corta!” cuando coincida que el pedazo entre ambos cuchillos mide $\frac{1}{2}$. P_2 se queda con la rebanada entre ambos cuchillos.

Podemos estar seguros de que P_2 en algún momento pensará que la rebanada va a medir $\frac{1}{2}$ gracias al siguiente argumento:. Si P_2 coincide con la posición inicial de P_1 no hay más que hacer. Por otro lado si no lo hace es porque dicho pedazo mide menos (sin pérdida de generalidad) que $\frac{1}{2}$ mientras que el resto de pastel mide el complemento. Como P_1 siempre mantiene entre ambos cuchillos una rebanada de tamaño $\frac{1}{2}$ y la evaluación de P_2 es continua y pasa de $< \frac{1}{2}$ a $> \frac{1}{2}$ el Teorema del Valor Intermedio garantiza que en algún momento P_2 evalúa dicha rebanada exactamente $\frac{1}{2}$.

Ahora sí tenemos todo listo para presentar el algoritmo de Brams, Taylor y Zwicker para lograr una partición libre de envidias para 4 jugadores.

Algorithm 12 -Cuchillo Móvil Libre de Envidias para 4 Jugadores

P_1 y P_2 cortan 4 piezas $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$ tales que $\forall i, \mu_1(X_i) = \mu_2(X_i) = \frac{1}{4}$.
P_3 acomoda las piezas por tamaño, supongamamos $\mu_3(X_1) \geq \cdots \geq \mu_3(X_4)$.
P_3 corta X_1 en $X_1 = X_1' \cup E : \mu_3(X_1') = \mu_3(X_2)$.
P_4 elige una rebanada de entre X_1', X_2, X_3, X_4.
Si P_4 eligió X_1' **, entonces:**
    Las rebanadas restantes se eligen en el orden: P_3, P_2, P_1.
Si no
    X_1' es asignada a P_3; P_1 y P_2 toman las piezas restantes.
Entre P_3 y P_4 llamaremos Cortador a quien no se haya quedado con X_1', al restante le renombraremos No-Cortador.
P_2 y Cortador cortan $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$ de tal forma que $\forall i, \mu_2(X_i) = \frac{\mu_2(E)}{4}$ y $\mu_C(E_i) = \frac{\mu_C(E)}{4}$.
Las piezas E_1, E_2, E_3, E_4 son elegidas en el orden: No-Cortador, P_1, Cortador, P_2.

Podemos utilizar un argumento muy similar al que se usó en el algoritmo de Selfridge y Conway: P_1 y P_2 cortan las piezas de tal forma que cualquiera de las 4 piezas les da igual. Cuando X_3 corta la rebanada más grande para que sea igual que la segunda asegura no tener envidia del pedazo que P_4 elija; en particular si P_4 no elige X_1' ésta pieza debe ser asignada a P_3 para evitar el peligro de haber cortado un pedazo de valor positivo para P_1 o P_2. Así al final cada jugador se quedó con su pedazo preferido y por tanto hasta este momento es libre de envidias. Para la siguiente parte hay que notar que a P_1 y a P_2 les dará igual si No-Cortador se lleva todo el E. Cortador y P_2 parten de tal forma de que cualquiera de los pedazos les de igual. Finalmente P_1 no puede tener envidia del pedazo favorito de No-Cortador al igual que Cortador y P_2 no pueden tener envidia de los pedazos de los otros jugadores por lo que cada jugador se quedó una vez más con su pedazo favorito y por lo tanto tenemos una partición libre de envidias.

4.2.4. Algoritmo de Taylor y Brams

El siguiente algoritmo fue dado por Taylor y Brams y fue el primer algoritmo que logró garantizar una división justa libre de envidias entre cualquier número de jugadores. Cabe mencionar que el algoritmo es muy complicado y necesita de una gran cantidad de cortes, así que analizaremos la versión para 4 jugadores. Antes de comenzar, debemos hablar de un par de conceptos que serán útiles.

Comenzaremos con algo de terminología. Diremos que *El jugador P ordena las piezas* $A < B < \alpha$ para referirnos a que $\mu_P(A) < \mu_P(B) < \alpha$. Si a los jugadores P_1 y P_2 se les han asignado las piezas A y B respectivamente, y R es una tercera pieza (residuo), diremos que P_1 *tiene una R-ventaja sobre* P_2 si P_1 siente que $A \geq B \cup R$.

Observación. Si P_1 posee una R-ventaja sobre P_2 cuando las piezas A y B han sido asignadas, entonces si P_1 y P_2 reciben porciones libres de envidia C y D respectivamente, entonces P_1 aún tendrá una R-ventaja sobre P_2 con respecto a las porciones asignadas $A \cup C$ y $B \cup D$.

Un algoritmo que ya utilizaba la idea de R-ventaja para realizar una división justa libre de envidias es el algoritmo de Guy, Selfridge y Conway.

El algoritmo utiliza de forma repetida otros dos algoritmos. El primero de ellos, dado una pieza A, 4 jugadores y un $\varepsilon > 0$, puede dividir un subconjunto B de A entre los 4 jugadores de forma libre de envidias de tal forma que la porción restante $R = A - B$ tenga un valor más chico que ε para todos los jugadores.

Algorithm 13 -SubAlg1

Mientras Exista jugador que piense que $\mu_j(R) > \varepsilon$ **, hacer:**
  Para $i = 1$ **hasta** $i = 4$ **, hacer:**
    Reenumerar a los jugadores de la siguiente forma: P_i es P_1, P_{i+1} es P_2, etc.
    P_1 corta A en 5 pedazos iguales.
    Para $i = 2$ **hasta** $i = 4$ **, hacer:**
      P_i identifica los $5 - i$ pedazos más grandes y troza los $4 - i$ pedazos más grandes de tal forma que resulten $5 - i$ pedazos de igual tamaño. Los residuos son separados de tal forma que sólo queden 5 pedazos para elegir.
    Los jugadores ahora eligen 4 de los 5 pedazos disponibles en el siguiente orden: P_4, P_3, P_2, P_1 con la restricción que cada jugador debe elegir uno de los pedazos que él trozó.

Debe ser claro que la repartición es libre de envidia pues cada quien se queda con un pedazo favorito y además como cada jugador toma el papel de P_1 debe ser el caso que el residuo es de valor decreciente para cada jugador y además converge a $R = \emptyset$, que para toda i $\mu_i(\emptyset) = 0$.

El segundo algoritmo es un poco más complicado, dados dos pedazos A y B tales que el jugador P_1 ve como igual pero el jugador P_2 ve el pedazo B estrictamente mayor que A, entonces a P_1 se le puede asignar parte de A, a P_2 se le puede asignar parte de B y a P_3, P_4 se les puede asignar partes de $A \cup B$ de tal forma que la división de las 4 piezas sea libre de envidias. Más que eso, P_1 y P_2 tendrán una $\alpha - ventaja$ ($\alpha > 0$) uno sobre el otro, donde α es un valor que depende del tamaño del desacuerdo del jugador P_2 en cuanto al valor de las piezas A y B.

Algorithm 14 -SubAlg2

1: Obtenemos un k entero positivo para el cual $\frac{\mu_2(B)}{\mu_2(A)} > \frac{(10^k+10)}{10^k}$ y reparametrizamos de tal forma que $\mu_2(B) > 10^k + (N-1)^2 + 1$ y $\mu_2(A) < 10^k$.
2: P_1 corta A y B en $10^k + (2)$ y $10^k + (3)$ piezas iguales, respectivamente.
3: P_2 debe buscar 3 piezas de A y 3 piezas de B tales que $A_1 \leq A_2 \leq A_3 < 1 < B_1 \leq B_2 \leq B_3$.
4: P_3 identifica las 2 rebanadas más grandes de entre A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 y B_3; luego cortará la más grande para tener dos rebanadas del mismo tamaño.
5: 4 de las 6 piezas resultantes del paso anterior serán elegidas en el orden P_4, P_3, P_2, P_1 con la condición de que P_3 debe tomar la pieza que cortó si se encuentra disponible.

Antes de continuar con el algoritmo principal hay algunas cosas que analizar sobre SubAlg2 y también hay algunas cosas que debemos probar. Primero veremos que existen las $N-1$ piezas de A y de B buscadas por el jugador P_2.

Proposición 4.2.1. *Si* $\mu_2(B) > 10^k + (10)$ *y* $\mu_2(A) < 10^k$ *para cierto k entero y* P_1 *parte A y B en* $10^k + 2$ *y* $10^k + 3$ *pedazos, respectivamente, entonces existen* A_1, A_2, A_3 *piezas de A y* B_1, B_2, B_{N-1} *piezas de B tales que* P_2 *piensa que* $A_1 \leq A_2 \leq A_3 < 1 < B_1 \leq B_2 \leq B_{N-1}$.

Demostración. Primero probaremos que existen las 3 piezas de A. Supongamos que no, es decir, existen 2 piezas o menos que cumplen la propiedad buscada. Puesto de otra forma tenemos que al menos $1 \leq A_3 \leq \cdots \leq A_{10^k+2}$, 10^k piezas que son mayores o iguales a 1 pero nuestra hipótesis decía que $\mu_2(A) < 10^k$ por lo que tenemos una contradicción.

Ahora probaremos que existen las 3 piezas de B. Si P_2 ordena las piezas $B_1 \geq \cdots \geq B_{10^k+3}$ y $B_3 > 1$ entonces ya tenemos dichas piezas. Por otro lado si $B_3 \leq 1$ entonces debe ser que $1 \geq B_3 \geq \cdots \geq B_{10^k+3}$. Como todas las piezas son disjuntas entonces $\mu_2(B - \bigcup_{i=1}^{3}) = \mu_2(B) - \mu_2(B_1 \cup \cdots \cup B_3) = \mu_2(B_1 \cup \cdots \cup B_3) + \mu_2(B_3 \cup \cdots \cup B_{10^k+3}) - \mu_2(B_3) - \mu_2(B_1 \cup \cdots \cup B_3) \leq 10^k$.

Usando la cota obtenida en el párrafo anterior tenemos que $3\mu_2(B_1) \geq \mu_2(B_1 \cup \cdots \cup B_3) \geq \mu_2(B) - 10^k \geq (3)^2 + 1$ por lo que $\mu_2(B_1) \geq \frac{3^2+1}{3} > 3$ y por lo tanto P_2 puede partir a B_1 en 3 partes con valor mayor que 1. □

Al momento de elegir las piezas seguramente P_2 tomará una pieza de B y P_1 eligirá una pieza de A pues para él las piezas A y B valían lo mismo pero A fue cortado en $10^k + 2$ pedazos mientras que B fue cortado en $10^k + 3$.

Ahora describiremos el algoritmo. Primero P_1 corta X en 4 piezas iguales y las reparte. Si los 4 jugadores están de acuerdo, entonces hemos terminado. Si no es el caso, entonces existe un par, digamos P_1 y P_2, para los cuales se puede usar $Subalg2$ para distribuir el pastel de una manera libre de envidias mientras crea alguna $\alpha_1 - ventaja$ entre P_1 y P_2.

Continuaremos repartiendo el pastel usando $Subalg1$ hasta que el residuo R tenga tamaño más chico que α_1 para todos los jugadores.

Ahora P_1 corta R en 4 partes iguales. Si P_3 y P_4 están de acuerdo, entonces R puede ser repartido de manera libre de envidias. Si no es el caso, entonces utilizamos una vez más $Subalg2$ al par P_1 y, digamos P_3, para crear una $\alpha_2 - ventaja$ entre ambos.

Si se llega al caso en que 3 de los jugadores tienen ventajas recíprocas sobre un 4$^{\text{to}}$ jugador, entonces el pastel puede ser repartido de forma libre de envidias (después de recortarse usando $Subalg1$ hasta que R tenga tamaño adecuado). En otro caso, debemos dejar que cualquier jugador divida R en 12 pedazos y luego dividir a los cuatro jugadores en dos conjuntos: el conjunto que está de acuerdo con quien cortó, y el conjunto de quienes no están de acuerdo.

Caso 1: Si hay dos jugadores, uno de cada conjunto de jugadores, quienes no tienen ventajas simétricas, entonces aplicamos $SubAlg2$ y luego $SubAlg1$ para crear una ventaja simétrica y luego reducir el tamaño de R a una porción más chica que cualquiera de las ventajas.

Caso 2: Si el caso 1 no aplica, dejemos que cada jugador que está de acuerdo con quien cortó tomen una cantidad igual de las 12 piezas disponibles. En este caso todo el pastel es asignado entre los cuatro jugadores de manera libre de envidias, pues cada jugador que no obtuvo porción final posee una ventaja sobre todos los jugadores que sí tuvieron porción final.

Así, después de tanto esfuerzo, logramos una división libre de envidias.

4.3. Lema de Sperner y División Justa

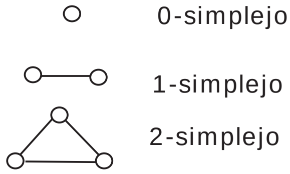
El Lema de Sperner puede ser utilizado para construir un algoritmo que se aproxima tanto como se quiera a una partición libre de envidias. Comenzaremos con algunas definiciones básicas.

Definición 4.3.1. Sea $n \in \mathbb{N}$,

- Un n-simplejo es la envolvente convexa de $n+1$ puntos afinmente independientes en $\mathbb{R}^m$, donde $m \geq n$.
- Una *k-cara de un n-simplejo* es el k-simplejo generado por cualquier subconjunto de $k+1$ vértices.

En otras palabras, un n-simplejo es una transformación afín de la realización geométrica de la gráfica completa en algún subespacio de dimensión n de $\mathbb{R}^m$ cuyo conjunto de vértices es:

$\mathbb{V} = \{(0,0,\cdots,0),(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,0,\cdots,1)\}$.

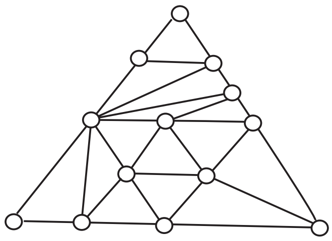


Veamos los 3 ejemplos más sencillos. Un 0-simplejo no es más que un vértice, un 1-simplejo es sólo una arista y finalmente un 2-simplejo es un triángulo. Inductivamente, como es de esperarse, un 3-simplejo sería un tetraedro.

Definición 4.3.2. Sea S un n-simplejo.

- Una *triangulación* de S es una colección de n-simplejos distintos cuya unión es S y que además cumplen con la propiedad de que cualesquiera dos intersectan en una cara común a ambos, o su intersección es vacía.
- A cada uno de los n-simplejos que componen la triangulación de S les llamaremos *simplejos elementales*.
- Llamaremos *vértices de la triangulación* al conjunto de vértices de todos los simplejos elementales que componen a la triangulación de S. Si T es una triangulación de S denotaremos a éste conjunto de vértices como $V(T)$.

Para aclarar el concepto de triangulación lo mejor será analizar un ejemplo sencillo



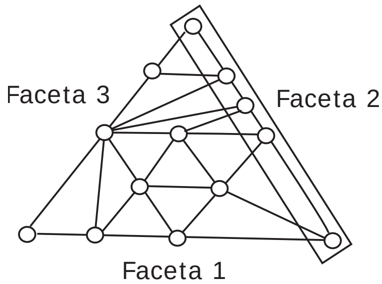
En la imagen tenemos un 2-simplejo que en su interior está dividido en más 2-simplejos (y sólo 2-simplejos). Cada uno de éstos es un simplejo elemental, mientras que el conjunto de todos los simplejos elementales es la triangulación de nuestro 2-simplejo. Finalmente, los vértices en la imagen conforman al conjunto de vértices de la triangulación.

Definición 4.3.3. Sea S un n-simplejo, cualquier cara generada por n vértices se le llamará *faceta*. Denotaremos al conjunto de facetas de S como $Face(S)$.

Un hecho trivial que vale la pena destacar es que un n-simplejo tiene $n + 1$ facetas distintas. Un 1-simplejo tiene 2 facetas, sus vértices; un 2-simplejo tiene 3 facetas, sus lados; un 3-simplejo tiene 4 facetas, sus caras triangulares.

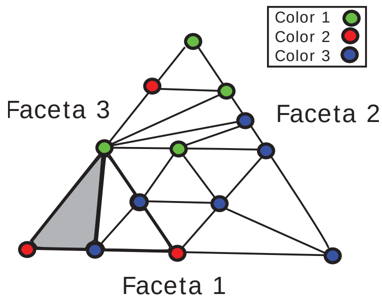
Definiremos un conjunto para facilitar un poco las cosas. Si S es un n-simplejo, T es una triangulación de S y $f \in Face(S)$, denotaremos como $\partial_f V(T)$ al conjunto de vértices de la triangulación que se encuentran en la faceta f.

Dada la triangulación del ejemplo anterior, el conjunto de vértices de la triangulación en la faceta 2 (al enumerar las facetas como en la imagen), es el siguiente:



Definición 4.3.4. Sea S un n-simplejo, sea T una triangulación de S, $h : Face(S) \to \{1, 2, \cdots, n+1\}$ una biyección y $g : V(T) \to \{1, 2, \cdots, n+1\}$ diremos que g es una *etiquetación de Sperner* si $\forall f \in Face(S), \nexists v \in \partial_f V(T) | g(v) = h(f)$.

En realidad la idea de una etiquetación de Sperner es algo muy sencillo, enumeramos cada una de las facetas del n-simplejo y coloreamos cada vértice de la triangulación usando sólo $n+1$ colores, entonces la coloración de los vértices es una etiquetación de Sperner si no existe ningún vértice que tenga color i en la faceta número i.



Nótese que no decimos nada sobre la coloración de los vértices interiores (los que no se encuentran en la frontera), es decir, los vértices interiores pueden tener cualquier color. Otra observación trivial pero que es necesaria hacerse notar es que un vértice puede estar en más de una faceta.

En la imagen anterior hay un simplejo elemental que resalta: el que tiene los 3 colores. En el caso general, nos gustaría resaltar y dar un nombre a aquellos simplejos elementales que tienen todos los colores, pues serán de gran importancia:

Definición 4.3.5. Sea S un n-simplejo, T una triangulación de S, $f : V(T) \to \{1, 2, \cdots, n+1\}$ y E un simplejo elemental de T. Diremos que E está *totalmente etiquetado* si $f \restriction_{V(E)}$ es suprayectiva.

Tenemos ya lo necesario para enunciar el Lema de Sperner. Quizás a primera vista, este lema podría parecer un juego, pero en realidad tiene muchas aplicaciones. Existen muchas formas de probar el lema, pero nos centraremos en una demostración por inducción que servirá de ayuda para construir el algoritmo.

Como la demostración es muy importante, con la finalidad de ayudar a su comprensión, damos un ejemplo en un 2-simplejo después de la prueba. La idea simplemente es generalizar por inducción el ejemplo.

Lema 4.3.6 (Sperner)**.** *Cualquier triangulación de un n-simplejo con etiquetación de Sperner debe contener una cantidad impar de simplejos elementales totalmente etiquetados. En particular, existe al menos uno.*

La demostración de este lemma puede ajustarse a un algoritmo. El algoritmo se le conoce en la literatura como el Algoritmo de Simmons y la siguiente demostración se atribuye a Forest Simmons y a Michael Starbird.

Demostración. Por inducción sobre la dimensión.

Nuestro caso base es un 1-simplejo. Como nuestro simplejo tiene etiquetación de Sperner entonces los vértices en los extremos deben de ser colores distintos: rojo y azul. Si empezamos a revisar desde un extremo hasta el otro en algún momento deberá haber un cambio de color, más que eso debe de cambiar de color un número impar de veces pues de otro modo los vértices de los extremos podrían ser del mismo color.

Supongamos que es cierto para la dimensión $(n - 1)$. Pensaremos en un n-simplejo como una gran casa en donde cada simplejo elemental es un cuarto. Una faceta es una puerta si posee las n primeras etiquetas. Observemos que cada cuarto puede tener a lo más dos puertas.

Si tenemos un n-simplejo triangulado con etiquetación de Sperner, podemos fijarnos en la faceta $n + 1$ (la que no tiene color $n + 1$) resulta que éste es un $(n - 1)$-simplejo con etiquetación de Sperner y, por hipótesis de inducción, tenemos una cantidad impar de simplejos elementales totalmente etiquetados. Cabe destacar que en esta faceta es en la única donde podemos encontrar puertas.

Para probar que existe al menos un simplejo elemental totalmente etiquetado debemos "entrar" por cada una de las puertas situadas en la faceta $n + 1$ y continuamos pasando por cada una de las puertas que nos encontremos.

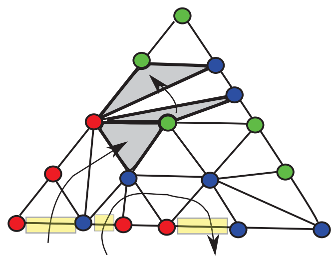
¿Qué cosas podrían ocurrir? el primer caso es que lleguemos a un cuarto donde no encontremos más puertas. En este caso ya habremos terminado pues si llegamos a dicho cuarto por una puerta y no hay más debe ser porque el vértice restante tiene el color $n + 1$. Podría ser que al comenzar por una puerta en la faceta $n + 1$ el camino nos regrese una vez más a la faceta $n + 1$. Finalmente ¿Podría ser el caso que encontremos un ciclo de puertas? Si comenzamos por la faceta $n + 1$ no es posible, pues en algún momento tendríamos que llegar a un cuarto con 3 puertas.

Como el párrafo anterior cubre todas las posibilidades las puertas de la faceta $n+1$ que se conectan entre sí deben estar asociadas en pares, pero tenemos un número impar de puertas en la faceta, por lo tanto debe ser porque una cantidad impar de puertas deben conducir a un cuarto sin más puertas, es decir, es un simplejo elemental totalmente etiquetado.

Finalmente todos los simplejos elementales completamente etiquetados que no son alcanzables mediante las puertas encontradas en la faceta n+1 deben venir en parejas unidas por caminos de puertas. Por lo que tenemos en total una cantidad impar de simplejos elementales totalmente etiquetados.

□

Ejemplo. Consideremos el siguiente 2-simplejo triangulado con Etiquetación de Sperner:



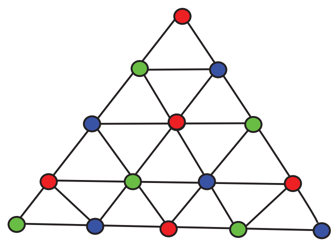
Las puertas en éste 2-simplejo son las aristas que tienen un vértice azul y el otro rojo. Podemos notar que en la faceta 1 (en éste caso es la faceta que no tiene color verde) hay una cantidad impar de puertas y pasar a través de cada una de las puertas nos puede conducir o a un simplejo elemental totalmente etiquetado o de vuelta a la faceta 1 (y son los únicos dos casos).

La cantidad de puertas en la faceta 1 que conducen nuevamente a la faceta 1 debe ser una cantidad par, pero como teníamos una cantidad impar de puertas en la faceta 1 entonces podemos concluir que existe una cantidad impar de puertas (al menos una) que conducen a un simplejo elemental totalmente etiquetado.

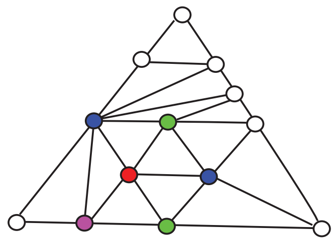
Finalmente, los simplejos elementales que no se encuentran unidos por una sucesión de puertas a la faceta 1 también deben ser una cantidad par. Ésto es porque cada uno de dichos simplejos debe estar unido con otro mediante una sucesión de puertas (y por definición de puerta, no pueden estar unidos por una sucesión de puertas ni a la faceta 2 ni a la faceta 3).

Otro tipo de etiquetación que necesitaremos para el algoritmo será la siguiente

Definición 4.3.7. Sea S un n-simplejo, T una triangulación de S, N un conjunto de $n+1$ jugadores y $f : V(T) \to N$ una etiquetación. Diremos que f es *propietario-etiquetado* si cada simplejo elemental σ obtiene todas las etiquetas en sus vértices, es decir, $f[V(\sigma)] = N$.



Cabe destacar que no toda triangulación acepta una etiquetación de éste tipo. Por ejemplo:



Sin pérdida de generalidad hemos pintado el vértice de color rojo. Como queremos una etiquetación propietario-etiquetado, debemos colorear a cada uno de los vértices adyacentes al rojo o de color azul o de color verde (alternadamente). El problema es que nuestro vértice rojo es adyacente a 5 vértices, por lo que nos quedará un vértice adyacente a un vértice de cada color (el vértice rosa).

Mientras que una triangulación que siempre acepta dicha etiquetación es la generada por *subdivisión baricéntrica*.

En esta ocasión será mejor explicar los detalles antes de escribir el algoritmo ya que se basa en ideas completamente diferentes a las trabajadas anteriormente. Dicho algoritmo fue construido a partir de una idea trabajada por Simmons.

Comenzaremos imaginando que tenemos un pastel rectangular de largo 1 que dividiremos entre N personas, por lo que debemos hacer $N-1$ cortes, ésta vez los cortes serán paralelos a la orilla izquierda del pastel.

Denotaremos al tamaño del largo de la pieza número i como x_i, por lo que $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$ donde cada $x_i \geq 0$. El espacio formado por dichos puntos debe ser la combinación convexa formada por la base canónica de $\mathbb{R}^n$, es decir $(1, 0, \cdots, 0), \cdots, (0, 0, \cdots, 1)$. El espacio es un $(N-1)$-simplejo que nombraremos S. Como cada punto de S representa una forma distinta de partir el pastel, a cada punto le llamaremos un *punto de corte*.

Recordemos que cada jugador está interesado en recibir una rebanada del pastel y que además cada jugador intenta maximizar sus ganancias, por lo que la preferencia de cada jugador dado un punto de corte no depende de los otros jugadores. Más aún si damos a elegir entre cada pieza del punto de corte a un jugador arbitrario, éste siempre eligirá una rebanada no vacía.

Ahora triangularemos a S usando cualquier triangulación T que acepte una etiquetación f tipo propietario-etiquetado y a continuación tomaremos cada vértice v de $V(T)$ como punto de corte y preguntaremos al jugador $f(v)$ "Si el pastel se partiera en las N rebanadas $(x_{v_1}, \cdots, x_{v_N})$, ¿Con cuál de ellas te quedaría?". Podemos construir una segunda etiquetación g con la respuesta a cada pregunta, supongamos que su respuesta a la pregunta en el vértice v fue "Con la rebanada i", asi que hacemos $g(v) = i$.

Observemos que g debe ser una etiquetación de Sperner. Gracias al Lema de Sperner podemos decir que existe al menos un simplejo elemental con todos los colores. Más aún como la primer etiquetación era de tipo propietario-etiquetado, si hacemos que la triangulación T tenga la caracteristica de que cada simplejo elemental quepa dentro de una bola de radio ε muy pequeño debe ser el caso que encontramos N particiones distintas pero muy parecidas en las cuales cada jugador eligió un número de rebanada distinto. Si además todos los jugadores concuerdan en que quieren recibir el mejor pedazo con un error de a lo más ε, entonces podemos elegir cualquier punto dentro de este simplejo y repartimos a cada jugador la rebanada que cada uno eligió dando así una partición tan cercana como se quiera a ser libre de envidias.

Finalmente nos topamos con un último problema: si quisiéramos programar el algoritmo anterior, ¿Cómo podemos encontrar las puertas en la faceta N? Podemos utilizar la construcción dada en la demostración del Lema de Sperner. Podemos enlazar puertas en sucesiones sucesivas pues un cuarto completamente etiquetado i-dimensional es una puerta en un $(i + 1)$-simplejo.

Dicho de otra forma podemos crear "súper-caminos" gracias a que podemos comenzar con encontrar un 1-simplejo completamente etiquetado; a partir de ahí pensamos que saltamos a un 2-simplejo y nos encontramos en una puerta en la faceta 3, así que buscamos un simplejo elemental completamente etiquetado de dimensión 2. Saltamos una vez más de dimensión pensando que estamos en un 3-simplejo y justo estamos en una puerta de la faceta 4, etc.

Cabe destacar que además de que el algoritmo es muy elegante, logra un hecho que ningún algoritmo libre de envidias logra: repartir una sola rebanada de pastel a cada jugador. En el 2008 Stromquist probó el siguiente teorema:

Teorema 4.3.8. *[8] Para todo $n \geq 3$ no existe un algoritmo finito que genere una repartición contigua libre de envidias.*

Capítulo 5

Geometría de Divisón Justa

En esta sección se trabajará una formalización de las ideas y conceptos que hemos usado previamente. La idea principal es precisamente una generalización del polígono de pago que se revisó en el capítulo de teoría de juegos. Supondremos que el lector tiene conocimientos básicos de Teoría de la Medida

5.1. Conceptos Básicos

Supondremos una vez más que nuestro pastel es algún conjunto C y queremos repartirlo entre N jugadores donde cada jugador i usa una medida μ_i para evaluar el tamaño de cualquier rebanada de pastel. Queremos que nuestra medida tenga algunas propiedades particulares que a continuación definiremos:

Definición 5.1.1. Sea (X, W, μ) un espacio con medida. Diremos que μ es:

- *numerablemente aditiva* si $\forall i \in \mathbb{N}, (A_i \in W) \wedge (\forall(m, n \in \mathbb{N})(m \neq n \Rightarrow A_m \cap A_n = \emptyset))$ entonces $\mu(\bigcup A_n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.
- *no-atómica* $\iff$ $\forall A \in W$, si $\mu(A) > 0 \Rightarrow \exists(B \subset A)$ tal que $(B \in W) \wedge (0 < \mu(B) < \mu(A))$.
- *de probabilidad* $\iff$ $\mu(X) = 1$.

Así, trabajaremos sobre el espacio medible (C, W) en donde cada jugador i tiene una medida de probabilidad, numerablemente aditiva y no-atómica μ_i sobre dicho espacio. Nos interesaremos en repartir todo el pastel entre los jugadores, es decir, nos interesan las particiones ordenadas $(P_1, \cdots, P_N)$ de C en donde la P_1 es para el Jugador 1,..., P_N es para el Jugador N. Además denotaremos como $PART_n$ al conjunto de todas las particiones de C para n jugadores..

A continuación enunciaremos los 2 teoremas (que no se demostrarán) que nos permiten dar una interpretación geométrica como lo hicimos anteriormente con el polígono de pago.

Teorema 5.1.2. (Lyapunov) *Sean $\mu_1, \cdots, \mu_N$ medidas no-atómicas y de probabilidad. El conjunto $\{(\mu_1(A), \cdots, \mu_N(A)) : A \subseteq C\}$ es un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^N$.*

Teorema 5.1.3. (Dvoretsky,Wald,Wolfovitz) *Sean $\mu_1, \cdots, \mu_N$ medidas no-atómicas. El conjunto $\left\{\left[\mu_i(P_j)\right]_{i,j\leq N} : (P_1, \cdots, P_N) \in PART_N\right\}$ es un subconjunto cerrado y convexo del conjunto de matrices de $n \times n$.*

Estos dos teoremas nos dan un par de corolarios que serán importantes más adelante.

Corolario 5.1.4. *Sean $p_1, \cdots, p_N$ números no negativos fijos tales que $\sum_{i=1}^{N} p_1 = 1$. Existe una partición $P \in PART_N$ tal que $\forall (i, j \in \{1, \cdots, N\}), \mu_i(P_j) = p_j$.*

Demostración. Sea $G = \left\{\left[\mu_i(P_j)\right]_{i,j\leq N}\right\}$. Para cada $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$ denotaremos como M_i a la matriz que tiene la i-ésima columna llena de 1's y 0's en todas las entradas restantes, entonces para cada i tenemos que $M_i \in G$ pues $(C, \emptyset, \cdots, \emptyset), \cdots, (\emptyset, \emptyset, \cdots, C)$ son posibles particiones de C.

Gracias al Teorema de Dvoretsky 5.1.3 sabemos que G es cerrado y convexo, asi que $\sum_{i=1}^{N} p_i M_i \in G$ pero ésta es precisamente la matriz llena de p_1 en la primer columna,...,p_N en la N-ésima columna. □

Corolario 5.1.5. *Para cualquier $A \subseteq C$ y $q_1, \cdots, q_N$ no negativos tales que $\sum_{i=1}^{N} q_i = 1$, existe $Q = (Q_1, \cdots, Q_N)$ partición de A tal que $\forall (i, j \in \{1, \cdots, N\}), \mu_i(Q_j) = q_j \mu_i(A)$.*

Demostración. Fijemos $A \subseteq C, q_1, \cdots, q_N$ como el enunciado los pide y sea $\delta = \{i \leq N : \mu_i(A) > 0\}$. Para cada $i \in \delta$ definimos para cada $B \subseteq A$, $\mu'_i(B) = \frac{\mu_i(B)}{\mu_i(A)}$, mientras que para cualquier $i \notin \delta$ hacemos que μ'_i sea cualquier medida de probabilidad, no-atómica y numerablemente aditiva sobre A.

Por el coroloario pasado, existe Q partición de A tal que $\forall i, j \in \{1, \cdots, N\}, \mu'_i(Q_j) = q_j$. Así Q es la partición que buscamos pues $\mu_i(Q_j) = q_j \mu_i(A)$, además si $i \notin \delta$ entonces $\mu_i(A) = 0 \Rightarrow \mu_i(Q_j) = 0$. □

Corolario 5.1.6. *Sea $A \subseteq C$ y sea $k \in 1, \cdots, N$. Si $\mu_k(A) > 0$, entonces para cualquier r con $0 \leq r \leq \mu_k(A)$, existe $B \subseteq A$ tal que $\mu_k(A) = r$.*

Demostración. Fijemos A y k como los pide el enunciado, además asumamos que $\mu_k(A) > 0$. Sea r arbitrario tal que $0 < r < \mu_k(A)$, ahora fijemos $q_k = \frac{r}{\mu_k(A)}$ y $\forall (i \neq k)$ fijemos q_i no negativo tales que $\sum_{i=1}^{N} q_i = 1$.

Por el corolario anterior, existe Q partición de A tal que $\mu_i(Q_j) = q_j \mu_i(A)$. Si fijamos $B = Q_k$ entonces $\mu_k(B) = \mu_k(Q_k) = q_k \mu_k(A) = r$. □

Dos tipos de configuraciones nos interesarán: justicia y eficiencia. Nos referiremos con *justicia* a los distintos tipos de división justa que ya fueron mencionados en el capítulo 3 (por el momento usaremos exactamente éstas mismas definiciones por lo cual no las enunciaremos aquí), es decir: división justa, división fuerte, libre de envidias, fuertemente libre de envidias y super libre de envidias. Por otro lado *eficiencia* involucra comparar particiones distintas, diremos que una partición P es eficiente si y sólo si ninguna otra partición hace a todos los jugadores al menos tan feliz como lo hace P.

Formalizaremos la idea de eficiencia con conceptos que ya son familiares:

Definición 5.1.7. Sea $P \in PART_n$. P es *Pareto Maximal* $\iff \nexists Q \in PART_n$ tal que $\forall i \in \{1, \cdots, N\}$, $\mu_i(Q_i) \geq \mu_i(P_i)$, con al menos una de éstas desigualdades siendo estricta.

Definición 5.1.8. Sea $P \in PART_n$. P es *Pareto Minimal* $\iff \nexists Q \in PART_n$ tal que $\forall i \in \{1, \cdots, N\}$, $\mu_i(Q_i) \leq \mu_i(P_i)$, con al menos una de éstas desigualdades siendo estricta.

Definición 5.1.9. Diremos que una partición es *Pareto Óptimo* si y sólo si es Pareto maximal (en el caso que se estén repartiendo bienes) o Pareto minimal (en el caso que se estén repartiendo un botín indeseable).

Una propiedad más de las medidas que será útil, es que cualquier pieza que tenga valor 0 para algún jugador tendrá valor 0 para todos los demás jugadores. Un conjunto de medidas que satisface esto se dice que es *absolutamente continuo*.

Definición 5.1.10. Una medida μ_i es *absolutamente continua con respecto a la medida* μ_j si y sólo si $\forall A \subseteq C$, se tiene que $\mu_j(A) = 0 \implies \mu_i(A) = 0$.

Si sabemos que todas las medidas son absolutamente continuas con respecto a las demás, podemos relajar un poco el concepto de Pareto maximal.

Lema 5.1.11. *Sea $P \in PART_N$. Si todas las medidas son absolutamente continuas con respecto a las demás entonces P es Pareto maximal $\iff \nexists Q \in PART_N$ tal que $\forall(i \in \{1, \cdots, N\}), \mu_i(Q_i) > \mu_i(P_i)$.*

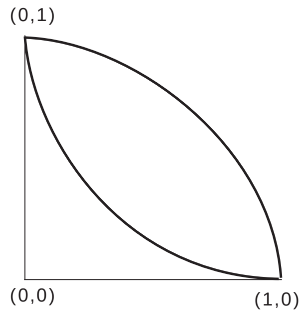
Demostración. Trivalmente si P es partición Pareto maximal entonces no existe partición Q tal que $\forall(i \in \{1, \cdots, N\})(\mu_i(Q_i) > \mu_i(P_i))$.

Por otro lado supongamos que P no es Pareto maximal. Entonces existe partición R Pareto-mejor que P. Es decir, $\exists k \in \{1, \cdots, N\}$ tal que $\mu_k(R_k) > \mu_k(P_k)$. Por el último corolario sabemos que $\exists S = (S_1, \cdots, S_N)$ partición de R_k tal que $\mu_k(S_k) > \mu_k(P_k)$ y además $\forall i \in \{1, \cdots, N\}$, se tiene que $\mu_k(S_i) > 0$.

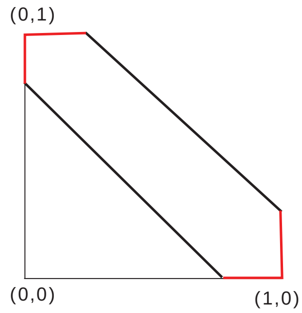
Ahora podemos definir una nueva partición Q de C de la siguiente forma:
$(Q_k = S_k) \wedge \forall(i \neq k)(Q_i = R_i \cup S_i)$.

Como todas las medidas son absolutamente continuas con respecto a las demás y además $\forall i \in \{1, \cdots, N\}, \mu_k(S_i) > 0 \Rightarrow \mu_i(S_i) > 0$.
Finalmente notemos que $\forall(i \neq k)$, tenemos que $(\mu_i(Q_i) = \mu_i(R_i) + \mu_i(S_i) > \mu_i(R_i) > \mu_i(P_i)) \wedge (\mu_k(Q_k) = \mu_k(S_k) > \mu_k(P_k))$, por lo que $\forall i(\mu_i(Q_i) > \mu_i(P_i))$. □

Este lema nos da una idea de cómo luce geométricamente nuestro conjunto cerrado y convexo cuando sabemos que todas las medidas son absolutamente continuas con respecto a las demás. Por ejemplo, una posible forma de un conjunto podría ser:



Mientras que no podría tener alguna de estas formas:



La idea de la demostración en realidad es sencilla. Cada jugador es al menos tan feliz con S como lo era con P, y al menos uno es estrictamente más feliz. Este jugador puede repartir pedazos chicos de su pastel a cada jugador y aún así sentirse mejor con el pedazo actual que con P mientras que cada jugador es estrictamente más feliz después de ésto en comparación a lo que era con P.

Para terminar con esta sección vamos a adelantarnos a hablar un poco sobre un objeto geométrico. Solo enunciaremos un par de propiedades y más adelante hablaremos más sobre él.

Definición 5.1.12. El *OPS* (One Piece Set) es $\{(\mu_1(A), \cdots, \mu_N(A)) : A \subseteq C\} \subset \mathbb{R}^N$.

Como corolario del Teorema de Lyapunov obtenemos que el OPS es un conjunto cerrado y convexo en el cual se encuentra siempre el segmento de recta que una al punto $(0, 0, \cdots, 0)$ con el punto $(1, 1, \cdots, 1)$.

Gracias al OPS podemos probar un pequeño lema que nos permitirá suponer durante el resto del capítulo que todas las medidas son absolutamente continuas con respecto a las demás.

Lema 5.1.13. *Sea C un pastel que se dividirá entre N jugadores. El conjunto* $\left\{\sum_{i=2}^{N}\mu_i(A) : (A \in C) \wedge (\mu_1(A) = 0)\right\} \subset \mathbb{R}$ *es un subconjunto compacto de* $\mathbb{R}$.

Antes de dar la demostración recordaremos que una función proyección $\pi_1 : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_1$ dada por $\pi_1(x_1, \cdots, x_n) = x_1$ que considera al primer espacio con la topología producto es una función contínua y abierta.

Demostración. Primero observemos que el conjunto está acotado superiormente por N e inferiormente por 0.

Para ver que el subconjunto es cerrado primero tomaremos al OPS como subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$. Sea $g : W \to OPS$ la función que manda a cada pieza de pastel a su punto correspondiente del OPS y sea $h : OPS \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \sum_{i=2}^{N}\pi_i(x)$.

Como el OPS es espacio compacto, $\mathbb{R}$ es T_2 y h es función continua entonces h es una función cerrada. Debe ser claro que $\pi_1^{-1}(0)$ es un cerrado en el OPS y que para cada punto $x \in OPS, \exists A \subseteq C$ tal que $g(A) = x$.

Finalmente, por lo mencionado en el párrafo anterior,

$$h\left[\pi_1^{-1}(0)\right] = \left\{\sum_{i=2}^{N}\mu_i(A) : (A \subseteq C) \wedge (\mu_1(A) = 0)\right\}.$$

Por lo tanto obtenemos lo que queríamos probar. □

Haciendo uso repetido del lema es fácil probar el siguiente teorema:

Teorema 5.1.14. *Sea C un pastel que se dividirá entre N jugadores. El pastel puede partirse en* $\{C_1, \cdots, C_n\}$ *pasteles disjuntos donde cada pastel se dividirá entre algún subconjunto* $N_{C_i} \subseteq \{1, \cdots, N\}$ *de los jugadores con la cualidad de que cada una de las medidas de* N_{C_i} *son todas absolutamente continuas con respecto a las demás.*

5.2. IPS (2 Jugadores)

Definición 5.2.1. Para cualquier partición $P \in PART_2$, sea $\mu(P) = (\mu_1(P_1), \mu_2(P_2))$. El *IPS* (Individual Piece Set) es el conjunto $\{\mu(P) : P \in PART_2\}$.

Podemos pensar en esta versión del IPS como tener 2 jugadores en cuartos separados a los que solo les vamos a enseñar la pieza que le corresponde a cada uno, ninguno de los jugadores verá la pieza del otro. Lo primero que podemos notar es que este objeto no nos va a dar información sobre particiones libres de envidia pero es un primer acercamiento para probar propiedades básicas de División Justa.

Teorema 5.2.2. *Sea C un pastel que será repartido entre dos jugadores.*

1. *El IPS contiene el segmento de linea cerrado entre (1,0) y (0,1).*

2. *El IPS consiste precisamente de éste segmento de linea si y sólo si $\mu_1 = \mu_2$.*

Demostración. La parte 1) es trivial usando el Teorema de Wolfovitz.

Observemos que el punto (p_1, p_2) pertenece a la línea cerrada si y sólo si $(p_1, p_2 \geq 0) \wedge (p_1 + p_2 = 1)$. Supongamos que $\mu_1 \neq \mu_2$. Entonces $\exists(A \subseteq C)(\mu_1(A) \neq \mu_2(A))$. Como $\mu_2(A) = 1 - \mu_2(C - A) \Rightarrow \mu_1(A) \neq 1 - \mu_2(C - A)$ y por tanto $\mu_1(A) + \mu_2(C - A) \neq 1$. Como $(A, C - A) \in PART_2 \Rightarrow (\mu_1(A), \mu_2(C - A))$ es un punto del IPS que no está en el segmento de linea entre (1,0) y (0,1) que es una contradicción.

Ahora asumamos que $\mu_1 = \mu_2$. Cualquier punto del IPS tiene la forma $(\mu_1(P_1), \mu_2(P_2))$ para algún $(P_1, P_2) \in PART_2$ Pero entonces, por hipótesis, $\mu_1(P_1) + \mu_2(P_2) = \mu_1(P_1) + \mu_1(P_2) = \mu_1(P_1 \cup P_2) = \mu_1(C) = 1$. Por lo que cada punto debe estar en el segmento de línea entre (1,0) y (0,1). □

Ahora daremos un poco de información de cómo luce el IPS cuando las medidas no son iguales:

Lema 5.2.3. *El IPS es simétrico con respecto al punto* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Demostración. Supongamos que $p = (p_1, p_2) \in IPS \Rightarrow \exists P = (P_1, P_2) \in PART_2$ tal que $\mu(P) = p \Rightarrow (\mu_1(P_2), \mu_2(P_1)) = (\mu_1(C - P_1), \mu_2(C - P_2)) = (1 - \mu_1(P_1), 1 - \mu_2(P_2)) = (1 - p_1, 1 - p_2) \in IPS$. Como $(1 - p_1, 1 - p_2)$ es la reflexión del punto (p_1, p_2) por el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ entonces se tiene lo que queríamos. □

5.2.1. Justicia

Si recordamos la sección de algoritmos no es difícil darse cuenta que en el caso de 2 jugadores los conceptos de División Justa y División Libre de Envidias coinciden, de igual modo coinciden los conceptos de División Fuerte y Fuertemente Libre de Envidias.

Ahora que ya tenemos una interpretación geométrica vamos a ver cuáles serían los puntos que nos interesan.

Definición 5.2.4. Supongamos que $p = (p_1, p_2) \in IPS$.

- p es un *Punto Proporcional* $\iff (p_1 \geq \frac{1}{2}) \wedge (p_2 \geq \frac{1}{2})$.
- p es un *Punto Fuertemente Proporcional* $\iff (p_1 > \frac{1}{2}) \wedge (p_2 > \frac{1}{2})$.

Como recordaremos del primer capítulo esto se parece mucho a los polígonos de pago, los puntos que nos interesan son el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y los puntos que se encuentran a la derecha y/o arriba de éste.

Con solo esta información es suficiente para probar el primer teorema importante que nos dice algo sobre División Justa:

Teorema 5.2.5. *Sea C un pastel que se dividirá entre dos personas.*

1. *Si $\mu_1 = \mu_2$ entonces*

   a) *El IPS tiene exactamente un punto proporcional: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.*

   b) *El IPS no tiene ningún punto fuertemente proporcional.*

2. *Si $\mu_1 \neq \mu_2$ entonces*

   a) *El IPS tiene una infinidad de puntos proporcionales. En particular para cada k con $0 \leq k \leq \infty$, existen una infinidad de puntos proporcionales $(p_1, p_2) \in IPS$ tales que $\frac{p_2-\frac{1}{2}}{p_1-\frac{1}{2}} = k$*

   b) *El IPS tiene una infinidad de puntos fuertemente proporcionales. En particular para cada k con $0 < k < \infty$, existen una infinidad de puntos fuertemente proporcionales $(p_1, p_2) \in IPS$ tales que $\frac{p_2-\frac{1}{2}}{p_1-\frac{1}{2}} = k$.*

Demostración. Enumerando como en el Teorema.

1. Trivial por el teorema anterior.

2. Supongamos que $\mu_1 \neq \mu_2$. Entonces el segmento de recta que une los puntos $(0, 1)$ y $(1, 0)$ es un subconjunto propio del IPS. LA convexidad y el corolario anterior implican que el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es un punto interior del IPS por lo que cualquier recta con pendiente no negativa que contenga al punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ contiene una infinidad de puntos proporcionales.

   La demostración para puntos fuertemente proporcionales es idéntica.

□

5.2.2. Eficiencia

Como hicimos en la parte de Justicia, consideraremos particiones Pareto-óptimas y veremos qué lugares en la representación geométrica corresponden a éstas particiones. Por definición tenemos que si P es una partición Pareto-óptima entonces no existe otra partición Q cuya representación geométrica se encuentre más a la derecha y/o arriba de la representación de P.

Para formalizar esta idea primero necesitaremos definir un par de conjunos:
$B^{+}(x_0, y_0) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq x_0) \wedge (y \geq y_0)\right\}$.

Definición 5.2.6. 1. La *Frontera Exterior del IPS* consiste en los puntos (p_1, p_2) en la frontera del IPS para los cuales $p_1 + p_2 \geq 1$, mientras que la *Frontera Interior del IPS* consiste de los puntos de la frontera del IPS para los cuales $p_1 + p_2 \leq 1$.

2. La *Frontera Pareto-Exterior del IPS* consiste en todos los puntos $(p_1, p_2) \in IPS$ para los cuales $B^+(p_1, p_2) \cap IPS = \{(p_1, p_2)\}$.

Como era de esperarse tenemos el siguiente teorema:

Teorema 5.2.7. *La frontera Pareto-exetrior del IPS consiste precisamente del conjunto de todos los puntos Pareto maximales del IPS.*

Teorema 5.2.8. *Si las medidas son absolutamente continuas respecto a la otra entonces la frontera Pareto-exterior del IPS es igual a la frontera exterior del IPS.*

Antes de dar una prueba a éste último teorema debemos probar un pequeño lema.

Lema 5.2.9. *Si las medidas son absolutamente continuas respecto a la otra entonces los únicos puntos del IPS que se encuentran en el cuadrado unitario son* $(0, 1)$ *y* $(1, 0)$.

Demostración. Supongamos que $p = (p_1, p_2) \in IPS \setminus \{(1, 0), (0, 1)\}$ y que además p se encuentra en el cuadrado unitario. Como $p \in IPS \Rightarrow \exists P \in PART_2$ tal que $\mu(P) = p$.

Podemos asumir que $(0 \leq p_1 < 1) \wedge (p_2 = 0)$, de donde observamos que $\mu_1(P_2) = 1 - \mu_1(P_1) > 0$ pero esto viola la condición de continuidad absoluta.

El caso en que $(p_1 = 0) \wedge (0 \leq p_2 < 1)$ es análogo y los lados restantes quedan descartados gracias a que el IPS es simétrico respecto al punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. □

Gracias a éste lema podemos probar el último teorema que enunciamos.

Demostración. Primero probaremos que la frontera exterior es subconjunto de la frontera Pareto-exterior.

Sea p en la frontera exterior del IPS, tenemos los siguientes 3 casos:

1. Si $\mu_1 = \mu_2$ entonces la frontera exterior y la frontera Pareto-exterior coinciden soniguales al simplejo, por tanto p está en la frontera Pareto-exterior.

2. Si $(\mu_1 \neq \mu_2) \wedge (p = (0, 1) \vee p = (1, 0))$, el lema implica que $B^+(1, 0) \cap IPS = \{(1, 0)\}$ y que $B^+(0, 1) \cap IPS = \{(0, 1)\}$ por lo que p está en la frontera Pareto-exterior.

3. Si $(\mu_1 \neq \mu_2) \wedge (p \neq (0, 1)) \wedge (p \neq (1, 0))$, como p está en la frontera exterior entonces $p_1 + p_2 > 1$. Supongamos que p no se encuentra en la frontera Pareto-exterior, entonces $\exists (q \in B^+(p) \cap IPS)(q \neq p)$. Ahora consideremos $G = \{q, (0, 1), (1, 0)\}$ y obtengamos su envolvente convexa $CH(G) \subset IPS$. Es fácil ver que $p \in Int(CH(G))$ pero esto es una contradicción con que p estaba en la frontera exterior.

La otra contención es muy similar , basta volver a analizar los tres casos anteriores. □

Este resultado deja las cosas muy sencillas para el resultado principal de ésta subsección:

Teorema 5.2.10. *El IPS tiene una infinidad de puntos Pareto-maximales. En particular* $\forall k \in [0, \infty]\ \exists p \in IPS$ *Pareto maximal tal que* $\frac{p_2}{p_1} = k$.

Para probar el teorema basta con considerar una linea recta que contenga al punto $(0, 0)$ y tenga pendiente k, la intersección de la recta con la frontera del IPS es un punto q (no vacío) y el punto q debe ser un punto Pareto-maximal.

5.2.3. Justicia y Eficiencia

Para terminar con el caso de 2 jugadores solo nos queda juntar los teoremas más importantes en uno solo:

Teorema 5.2.11. *Sea C un pastel que se dividirá entre dos personas.*

1. *Si* $\mu_1 = \mu_2$
   a) *El IPS tiene exactamente un punto proporcional y Pareto maximal:* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
   b) *El IPS no tiene ningún punto fuertemente proporcional y Pareto maximal.*
2. *Si* $\mu_1 \neq \mu_2$
   a) *El IPS tiene una infinidad de puntos proporcionales y Pareto maximales. En particular para cada k con* $0 \leq k \leq \infty$, *existen una infinidad de puntos proporcionales y Pareto maximales* $(p_1, p_2) \in IPS$ *tales que* $\frac{p_2 - \frac{1}{2}}{p_1 - \frac{1}{2}} = k$ *y es Pareto maximal y proporcional.*
   b) *El IPS tiene una infinidad de puntos fuertemente proporcionales y Pareto maximales. En particular para cada k con* $0 < k < \infty$, *existen una infinidad de puntos fuertemente proporcionales y Pareto maximales* $(p_1, p_2) \in IPS$ *tales que* $\frac{p_2 - \frac{1}{2}}{p_1 - \frac{1}{2}} = k$ *y es Pareto maximal y fuertemente proporcional.*

5.3. IPS

A continuación estudiaremos el caso para cualquier cantidad finita de jugadores. Comenzaremos con la definición del IPS en el caso general, que no es mas que generalizar nuestra previa definición.

Definición 5.3.1. $\forall P \in PART_N$, sea $\mu(P) = (\mu_1(P_1), \cdots, \mu_N(P_N))$. El *IPS* (Individual Piece Set) es el conjunto $\{\mu(P) : P \in PART_N\}$.

Notemos que los puntos $(1, 0, \cdots, 0), (0, 1, \cdots, 0) \cdots, (0, 0, \cdots, 1)$ siempre serán parte del IPS y por lo tanto, por el Teorema de Wolfovitz tendremos que el (N-1)-simplejo siempre será un subconjunto del IPS. Siguiendo el mismo camino que en el caso de 2 jugadores podemos conseguir un poco más:

Teorema 5.3.2. *El IPS consiste precisamente del simplejo si y sólo si* $\mu_1 = \cdots = \mu_N$.

Es fácil probar este teorema pues no es más que seguir la idea de la demostración para el caso de 2 jugadores, por lo que no se escribirá la prueba. Lo que seguiría, sería intentar buscar alguna simetría, y se nos podrían ocurrir un par de puntos para hacer esto, pero resulta ser que en el caso de N jugadores no siempre existe tal simetría. Afortunadamente podemos encontrar una propiedad que se le asemeja, pero para esto tendremos que desarrollar un poco de teoría.

Definición 5.3.3. Sean $q_1, \cdots, q_m \in \mathbb{R}^N$ con $m \leq N + 1$, denotamos al casco convexo de $q_1, q_2, ..., q_m$ por $CH(q_1, \cdots, q_m)$. También le llamamos el m-tetraedro.

Definición 5.3.4. El *centroide* de un m-tetraedro es su centro de masa (suponiendo que el objeto posee densidad "homogenea"), se denotará como $Cent(q_1, \cdots, q_m)$. Es decir,

$$Cent(q_1, ...q_m) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} q_i$$

Lema 5.3.5. *Supongamos* $q_1, \cdots q_m$ *son puntos en* $\mathbb{R}^n$ *y elijamos cualquier* $i \in \{1, \cdots, m\}$.

1. $Cent(q_1, \cdots, q_m)$ *se encuentra en el segmento de linea que conecta* q_i *y* $Cent(q_1, \cdots, q_{i-1}, q_{i+1}, \cdots, q_m)$.
2. *La distancia de* $Cent(q_1, \cdots, q_m)$ *a* $Cent(q_1, \cdots, q_{i-1}, q_{i+1}, \cdots, q_m)$ *es* $\frac{1}{m-1}$ *veces la distancia de* $Cent(q_1, \cdots, q_m)$ *a* q_i.

Demostración. Basta con hacer las cuentas para ver que el lema es cierto.

$Cent(q_1, \cdots, q_m) = \frac{1}{m}(q_1 + \cdots + q_m) = \left(\frac{1}{m}\right) q_i + \left(\frac{1}{m}\right)(q_1 + \cdots, q_{i-1} + q_{i+1} + \cdots, q_m)$
$= \left(\frac{1}{m}\right) q_i + \left(\frac{m-1}{m}\right)\left(\frac{1}{m-1}\right)(q_1 + \cdots + q_{i-1} + q_{i+1}, \cdots, q_m)$
$= \left(\frac{1}{m}\right) q_i + \left(\frac{m-1}{m}\right) Cent(q_1, \cdots, q_{i-1}, q_{i+1}, \cdots, q_m)$.

La última igualdad es una combinación afín del punto q_i y el punto $Cent(q_1, \cdots, q_{i-1}, q_{i+1}, \cdots, q_m)$, lo que prueba el primer punto del lema.

El segundo punto se da porque el coeficiente de q_i ($\frac{1}{m}$), es $\frac{1}{m-1}$ del coeficiente de $Cent(q_1, \cdots, q_{i-1}, q_{i+1}, \cdots, q_m)$ ($\frac{m-1}{m}$). □

Teorema 5.3.6. *Suponga que* $p \in IPS$. *Entonces* p *es un vértice de un* N*-tetraedro que yace en el IPS y tiene centroide* $(\frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N})$. *En otras palabras,* $\exists(q_1, \cdots, q_{N-1} \in \mathbb{R}^N)$ *tales que:*

1. $q_1, \cdots, q_{N-1} \in IPS$.
2. $Cent(p, q_1, \cdots, q_{N-1}) = \left(\frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N}\right)$.

Demostración. Las ideas de esta demostración son más sencillas de las que uno podría esperar. Sea $p \in IPS \Rightarrow \exists(P \in PART_N)(\mu(P) = p)$. Consideremos las N-1 particiones que se obtienen si los jugadores se sienta en una mesa redonda en el orden dado por las particiones y cada jugador para su pedazo de pastel a la derecha, es decir $P^1 = (P_N, P_1, \cdots, P_{N-1})$ $P^2 = (P_{N-1}, P_N, P_1, \cdots, P_{N-2})$, etc. Finalmente consideremos los N-1 puntos $p_1 = \mu(P^1), \cdots, p_{N-1} = \mu(P^{N-1})$ y renombremos $p_N = p$ y $P^N = P$.

Es claro que $p_1, \cdots, p_{N-1} \in IPS$ y además $\forall(i = 1, \cdots, N)(\sum_{j=1}^{N} \mu_i(P^j) = 1) \Rightarrow$
$CH(p, p_1, \cdots, p_{N-1}) = \frac{1}{N}(1, 1, \cdots, 1)$. □

Finalmente como corolario obtenemos la propiedad que buscábamos. Comparando con el caso de 2 jugadores, en donde el IPS era simétrico con respecto al punto $\left(\frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}\right)$, ahora no tenemos simetría. Sin embargo, el teorema anterior jugará el papel de la simetría.

Corolario 5.3.7. *Supongamos que $p \in IPS$. Si q es un punto tal que $p, (\frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N}), q$ son colineares (en dicho orden) y además la distancia de $(\frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N})$ a q es $\frac{1}{N-1}$ veces la distancia de $(\frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N})$ a p, entonces $q = (\frac{1-p_1}{N-1}, \cdots, \frac{1-p_N}{N-1}) \in IPS$.*

Demostración. Sea p como en el enunciado y sean $p_1, \cdots, p_{N-1}$ como en el teorema anterior. Sabemos que $Cent(p, p_1, \cdots, p_{N-1}) = \frac{1}{N}(1, 1, \cdots, 1)$ y por el último lema tenemos que $q = Cent(p_1, \cdots, p_{N-1})$ y por lo tanto $q \in IPS$.

Para terminar con la demostración, sólo hace falta hacer las cuentas. Sabemos que $q - (\frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N}) = \frac{1}{N-1}((\frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N}) - p)$ por lo que:

$$q = (\frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N}) + \frac{1}{N-1}((\frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N}) - p) = (\frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N}) + \frac{1}{N-1}((\frac{1-p_1 N}{N}, \cdots, \frac{1-p_N N}{N}))$$
$$= (\frac{N-1}{N}(N-1), \cdots, \frac{N-1}{N(N-1)}) + (\frac{1-p_1 N}{N(N-1)}, \cdots, \frac{1-p_N N}{N(N-1)}) = (\frac{N-p_1 N}{N(N-1)}, \cdots, \frac{N-p_N N}{N(N-1)})$$
$$= (\frac{1-p_1}{N-1}, \cdots, \frac{1-p_N}{N-1}).$$

□

5.4. FIPS

Recordemos que cuando tratamos con más de dos jugadores, los conceptos de libre de envidias y proporcionalidad no coinciden, por lo que serán tratados de manera separada. El IPS tiene la desventaja de que cada persona evalúa únicamente la pieza que le dan, y podría no evaluar las rebanadas de los otros jugadores. Así que el IPS no es suficiente para poder hablar de particiones libres de envidia. Por esa razón tenemos que introducir otro objeto geométrico: El FIPS.

Definición 5.4.1. Para cualquier partición $P \in PART_N$, sea $\mu_f(P)$ la matriz de $N \times N$ $\left[\mu_i(P_j)\right]_{i,j \leq N}$. El *FIPS* es el conjunto $\left\{\mu_f(P) : P \in PART_N\right\}$.

Podemos pensar en el FIPS como que el pastel es partido en N pedazos y todos los jugadores pueden ver los pedazos de los demás. Cada fila representa las N opiniones de algún jugador. Es decir, la i-ésima fila son las N valuaciones del jugador i.

Por consecuencia del Teorema de Dvoretsky 5.1.3 sabemos que el FIPS es un subespacio compacto y convexo.

Gracias a la introducción del FIPS debemos redefinir los conceptos de proporcional, fuertemente proporcional, libre de envidias, etcétera, para adaptarlos a este nuevo objeto.

Definición 5.4.2. Supongamos que $p \in FIPS$. Para toda partición $P \in PART_N$ tal que $\mu_f(P) = p$, P es:

1. *proporcional* $\Longleftrightarrow \forall i(p_{ii} \geq \frac{1}{N})$.
2. *Fuertemente Proporcional* $\Longleftrightarrow \forall i(p_{ii} > \frac{1}{N})$.
3. *Libre de Envidias* $\Longleftrightarrow \forall i \forall j(p_{ii} \geq p_{ij})$.
4. *Fuertemente Libre de Envidias* $\Longleftrightarrow \forall i \forall (j \neq i)(p_{ii} > p_{ij})$.
5. *Super Libre de Envidias* $\Longleftrightarrow \forall i \forall (j \neq i)(p_{ii} > \frac{1}{N} \wedge p_{ij} < \frac{1}{N})$.

Definición 5.4.3. Suponga que p y q son matrices de tamaño $n \times n$. El *segmento de linea* entre p y q es el conjunto de matrices de $n \times n$ de la forma $\{\lambda p + (1-\lambda)q \ : \ \lambda \in [0, 1]\}$.

Definición 5.4.4. Una matriz r se encuentra en el interior del segmento de recta que une a p y q si y sólo si $\exists \lambda \in (0, 1)$ tal que $r = \lambda p + (1-\lambda)q$.

Ahora consideremos los valores que puede llegar a tomar el FIPS: Por el Teorema 5.1.4 sabemos que si tomamos un punto del $p \in (N-1)$-simplejo, entonces la matriz que tiene p_1 en la primer columna, p_2 en la segunda columna, etcétera, es parte del FIPS.

¿Qué otras matrices podremos encontrar en el FIPS? Resulta que cada matriz en el conjunto debe cumplir las siguientes dos condiciones:

1. Cualquier fila de cualquier elemento del FIPS debe sumar 1
2. Cualquier columna de cualquier elemento del FIPS debe ser consistente con todas las relaciones de dependencia lineal entre las medidas.

La segunda condición se refiere a que puede ser que alguna de las medidas pueda ser escrita como combinación lineal de las otras medidas; por ejemplo podría ser el caso que $\mu_1 = \frac{1}{2}\mu_2 + \frac{1}{2}\mu_3$. A la pregunta de que si en este ejemplo podría existir una partición que nos de como resultado una matriz tal que $\mu_1(Q_2) = \frac{2}{7}, \mu_2(Q_2) < \frac{2}{7}, \mu_3(Q_2) < \frac{2}{7}$, podemos responder que si existiera, entonces se seguiría que $\frac{2}{7} = \mu_1(Q_2) = \frac{1}{2}\mu_2(Q_2) + \frac{1}{2}\mu_3(Q_2) < \frac{1}{2}(\frac{2}{7}) + \frac{1}{2}(\frac{2}{7}) = \frac{2}{7}$.

Denotaremos al conjunto de todas las ecuaciones lineales que se dan para las medidas $\mu_1, \cdots, \mu_N$ como *DEP*.

Definición 5.4.5. Supongamos que $q = \left[q_{ij}\right]_{i,j\leq N}$ es una matriz de tamaño $N \times N$. Diremos que q es una *matriz propia* si y sólo si las siguientes condiciones se satisfacen:

1. Cada fila de q suma a 0 ($\sum_{j=1}^{N} q_{ij} = 0$).

2. Cada columna de q es consistente con las ecuaciones en DEP.

Teorema 5.4.6. *Supongamos que $r \in (N-1)-simplejo$ y $q = \left[q_{ij}\right]_{i,j\leq N}$ es una matriz propia. Entonces $\exists(\lambda > 0)$ tal que $\left[r_j + \lambda q_{ij}\right]_{i,j\leq N} \in FIPS$.*

Este resultado dice que existe una distancia positiva en la dirección dada por la matriz q y seguir en el FIPS.

Antes de probar este resultado necesitamos enunciar un par de propiedades que posee el OPS, que ya presentamos anteriormente 5.1.12.

Lema 5.4.7. *El OPS es simétrico respecto al punto $(\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2})$.*

Demostración. Sea $p \in OPS \Rightarrow \exists(A \subseteq C)(p = (\mu_1(A), \cdots, \mu_N(A)))$. Pero entonces $(\mu_1(C-A), \cdots, \mu_N(C-A)) = (1-\mu_1(A), \cdots, 1-\mu_N) \in OPS$ pero este punto es precisamente la reflexión de p por el punto $(\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2})$. □

Lema 5.4.8. *Si las medidas son linealmente independientes entonces, para cualquier real $k \in (0,1)$, el punto $(k, \cdots, k)$ es un punto interior del OPS.*

Para probar éste lema usaremos un bien conocido resultado de teoría de convexidad:

Lema 5.4.9. (Supporting Hyperplane Theorem): *Dado cualquier conjunto convexo $G \subseteq \mathbb{R}^n$ y cualquier punto $p \in \partial G$, existe un hiperplano H que incluye a p y cumple la propiedad que G se encuentra en alguno de los semi-espacios cerrados de $\mathbb{R}^n$ determinados por H.*

No probaremos este último resultado, la demostración no es muy compleja y puede encontrarse en segundo capítulo del libro de González-Díaz[7] (bajo el nombre que se le dio al lema). Procederemos a probar el lema 5.4.8.

Demostración. Fijemos un $k \in (0,1)$ y supongamos que $\kappa = (k, \cdots, k) \notin Int(OPS)$. Entonces, $\kappa \in \partial OPS$. Por el lema anterior, debe existir un hiperplano H tal que $\kappa \in H$ y tal que el OPS se encuentra totalmente contenido en alguno de los semi-espacios cerrados determinados por H.

Como $(0, \cdots, 0)$ y $(1, \cdots, 1)$ se encuentran en el OPS y además κ se encuentra en la recta que los une, debe ser el caso que $(0, \cdots, 0), (1, \cdots, 1) \in H$.

Supongamos que la ecuación del hiperplano es $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i = c$. Como $(0, \cdots, 0) \in H$, tenemos que $c = 0$. Además $(1, \cdots, 1) \in H \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 0$.

Por el lema anterior sabemos que $\forall q \in OPS$ tenemos que $(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i q_i \geq 0) \vee (\sum_{i=1}^{N} \alpha_i q_i \leq 0)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que ocurre la segunda.

Notemos que $\forall p \in OPS$ tenemos que $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i q_i = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i q_i - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (p_i - 1) = -(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i (1 - p_i)) \geq 0$. En conclusión tenemos que $\forall (p \in OPS)(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i p_i = 0)$. Así que $p \in H$ y entonces concluimos que $OPS \subseteq H$.

Finalmente $\forall A \subseteq C$ se tiene que $\mu_1(A), \cdots, \mu_N(A) \in H$, así que $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu_i(A) = 0$. Como A es arbitrario entonces $\mu_1, \cdots, \mu_N$ son linealmente dependientes. □

Para demostrar el teorema 5.4.6 definiremos N-1 puntos (pues el N-ésimo punto queda determinado por los anteriores). El j-ésimo punto tendrá una característica importante en su j-ésima columna y a partir de éste punto construiremos la j-ésima columna de la matriz deseada, $\left[r_j + \lambda q_{ij}\right]_{i,j \leq N}$, tomando una combinación convexa apropiada de nuestros $N - 1$ elementos.

Demostración. (del teorema 5.4.6). Sea $r \in (N-1)$-simplejo con todas sus coordenadas positivas y sea $q = \left[q_{ij}\right]_{i,j \leq N}$. Reenumerando si es necesario, supongamos que para algunos $s \in \{1, \cdots, N\}$ las medidas $\mu_1, \cdots, \mu_s$ son linealmente independientes y que cada una de las medidas $\mu_{s+1}, \cdots, \mu_N$ pueden ser escritas como combinación lineal de las primeras s.

Para el resto de la prueba, cuando hablemos del OPS nos estaremos refiriendo al OPS de los primeros s jugadores (es decir $\{\mu_1(A), \cdots, \mu_s(A) : A \subseteq C\}$). Notemos que $0 < r_N < 1 \Rightarrow 0 < 1 - r_N < 1$ y por el lema tenemos que $(1 - r_N, \cdots, 1 - r_N)$ es punto interior del OPS, por lo que $\exists \varepsilon > 0$ para el cual $B_\varepsilon(1 - r_N, \cdots, 1 - r_N) \subseteq OPS$.

Ahora fijemos $\lambda > 0$ de tal forma que $max\left\{\lambda(\frac{1-r_N}{r_j})|(q_{1j}, \cdots, q_{sj})| \ : \ j \leq N-1\right\} < \varepsilon$.

Nótese que la elección de ε y λ garantizan que para cada $j \in \{1, \ldots, N-1\}$ se tiene que

$$(1 - r_N, \cdots, 1 - r_N) + \lambda(\frac{1 - r_N}{r_j})(r_{1j}, \cdots, r_{sj}) \in OPS.$$

Por lo que para para cada j existe $A_j \subseteq C$ para el cual

$$\mu_i(A_j) = (1 - r_N) + \lambda(\frac{1 - r_N}{r_j})q_{ij} \forall i \in \{1, \cdots, s\}$$

Si $s = N$, hemos terminado. Si no, queda ver que lo mismo pasa para las medidas que se pueden escribir como combinación lineal de las primeras s, así que supongamos que $s < N$ y fijemos algún $i \in \{s{+}1, \cdots, N\}$. Por nuestra suposición $\exists (c_1, \cdots, c_s)(\mu_i = c_1\mu_1 + \cdots + c_s\mu_s)$. Notemos que $c_1 + \cdots + c_s = c_1\mu_1(C) + \cdots + c_s\mu_s(C) = \mu_i(C) = 1$.

Debe ser el caso que $\mu_i = c_1\mu_1 + \cdots + c_s\mu_s$ sea una de las ecuaciones en DEP. Como cada columna de q es consistente con las ecuaciones de DEP entonces se sigue que para cada $j = 1, \cdots, N-1$, $q_{ij} = c_1 q_{1j} + \cdots + c_s q_{sj}$. Así que ahora podemos hacer las cuentas:

$\mu_i(A_j) = \sum_{h=1}^{s} c_h \mu_h(A_j) = \sum_{h=1}^{s} c_h \left[(1 - r_N) + \lambda(\frac{1-r_N}{r_j}) q_{hj} \right]$
$= (c_1 + \cdots + c_s)(1 - r_N) + \lambda(\frac{1-r_N}{r_j})(c_1 q_{ij} + \cdots + c_s q_{sj}) = (1 - r_N) + \lambda(\frac{1-r_N}{r_j}) q_{ij}$.

Ahora para cada j=1,... N-1 definiremos una matriz p^j de $N \times N$ de la siguiente forma:

1. La j-ésima columna de p^j está dada por $\left[\mu_i(A_j) \right]_{i \leq N}$.

2. La N-ésima columna de p^j está dada por $\left[\mu_i(C - A_j) \right]_{i \leq N}$.

3. Las columnas restantes de p^j consisten de 0's.

Cada una de las p^j se encuentra en el FIPS pues el elemento está dado por la partición $(\emptyset, \cdots, \emptyset, A_j, \emptyset, \cdots, \emptyset, C - A_j)$ Finalmente tomaremos una combinación convexa de éstos elementos para obtener la matriz que buscamos. Consideremos los números positivos $\frac{1-r_1}{1-r_N}, \cdots, \frac{1-r_{N-1}}{1-r_N}$ en donde notamos que $\sum_{i=1}^{N-1} \frac{1-r_i}{1-r_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} r_i}{1-r_N} = \frac{1-r_N}{1-r_N} = 1$ así que podemos considerar al elemento $p = \sum_{i=1}^{N-1} (\frac{r_i}{1-r_N}) p^i$, por lo que $p \in FIPS$.

Para terminar con la demostración solo queda verificar que $p = \left[r_j + \lambda q_{ij} \right]_{i,j \leq N}$. Sabemos que las filas de p suman a 1. como $r \in (N-1) - simplex$ y las filas de q sumas a 0 entonces las filas de $\left[r_j + \lambda q_{ij} \right]_{ij \leq N}$ sumas a 1, por lo que solo queda ver que las primeras N-1 columnas coinciden.

La j-ésima columna de $p = (\frac{r_j}{1-r_N}) \left[\mu_i(A_j) \right]_{i \leq N} = (\frac{r_j}{1-r_N}) \left[(1 - r_N) + \lambda(\frac{1-r_N}{r_j}) q_{ij} \right]_{i \leq N} = \left[r_j + \lambda q_{ij} \right]_{i \leq N}$. Por lo que ambas matrices son iguales.

□

Finalmente usaremos los resultados obtenidos sobre el IPS, FIPS y OPS para ver qué podemos decir sobre justicia y eficiencia en el caso general. Como hicios en el caso para 2 jugadores, comenzaremos con Justicia, luego eficiencia y para terminar combinaremos los resultados.

5.5. Justifia y Eficiencia para $N \geq 3$

A continuación usaremos los resultados obtenidos sobre el IPS, FIPS y OPS y los desarrollaremos con la finalidad de poder decir algo sobre justicia y eficiencia en el caso general. Como hicios en el caso para 2 jugadores, comenzaremos con Justicia, luego eficiencia y para terminar combinaremos los resultados.

5.5.1. Justicia

Teorema 5.5.1. *Sea C un pastel que será dividido entre N jugadores. Tenemos los siguientes casos:*

1. *Si las medidas son iguales, entonces*

   a) *El IPS tiene exactamente un punto proporcional:* $(\frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N})$.

   b) *El IPS no tiene puntos fuertemente proporcionales.*

2. *Si no todas las medidas son iguales, entonces*

   a) *El IPS tiene una infinidad de puntos proporcionales. En particular, para cada* $q \in \mathbb{R}^N_{\geq 0}$ *y al menos una coordenada positiva, existen una infinidad de* $\lambda > 0$ *tales que* $(\frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N}) + \lambda q$ *es un punto proporcional.*

   b) *El IPS tiene una infinidad de puntos fuertemente proporcionales. En particular, para cada* $q \in \mathbb{R}^N_{>0}$*, existen una infinidad de* $\lambda > 0$ *tales que* $(\frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N}) + \lambda q$ *es un punto fuertemente proporcional.*

Demostración. La primer parte del teorema es solamente repetir lo que se hizo en el caso de 2 jugadores. El IPS es el simplejo si y sólo si todas las medidas iguales, por lo que $(\frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N})$ es el único punto proporcional. No pueden existir puntor fuertemente proporcionales pues todas las coordenadas del simplejo suman a 1.

Para la segunda parte usaremos el Corolario 5.0.26. Por hipótesis tenemos que $\exists(i \in \{1, \cdots, N\})(\forall(j \neq i)(\mu_i \neq \mu_j)) \Rightarrow (N-1) - simplejo \subset IPS$. El corolario y la convexidad del IPS implican que deben existir puntos en ambos lados del simplejo, por lo que podemos situarnos en el punto $(\frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N})$, dar cualquier dirección q como en el enunciado y encontrar una distancia positiva para la cual todos los puntos en ese recta son puntos proporcionales.

El inciso restante no es mas que repetir el párrafo anterior con sus respectivas modificaciones especificacas en el enunciado. □

El siguiente teorema a enunciar hablará sobre los distintos tipos de libre de envidias que tenemos:

Teorema 5.5.2. *Dividiremos el teorema en secciones:*

1. *Libre de Envidias.*

   a) *Si todas las medidas son iguales, entonces el FIPS tiene exactamente un punto libre de envidias:* $\left[\frac{1}{N}\right]_{i,j\leq N}$.

   b) *Si no todas las medidas son iguales, entonces el FIPS posee una infinidad de puntos libres de envidia.*

2. *Fuertemente libre de envidias. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

    a) *No existen dos medidas iguales.*

    b) *El FIPS tiene al menos un punto fuertemente libre de envidias.*

    c) *El FIPS posee una infinidad de puntos fuertemente libre de envidias.*

3. *Super libre de envidias. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

    a) *Las medidas son linealmente independientes.*

    b) *El FIPS tiene al menos un punto super libre de envidias.*

    c) *El FIPS tiene una infinidad de puntos super libre de envidias.*

Desafortunadamente tendremos que retrasar una vez más la demostración del teorema pues debemos enunciar y probar un lema antes.

Lema 5.5.3. *Existe una matriz propia $q = \left[q_{ij}\right]_{i,j \leq N}$ tal que $\forall (i, j)(q_{ii} \geq q_{ij})$ donde la igualdad se da si y sólo si $\mu_i = \mu_j$.*

Demostración. Una vez más, reenumerando si es necesario, asumimos que para algunos $s \in \{1, \cdots, N\}$ las medidas $\mu_1, \cdots, \mu_s$ son linealmente independientes y las medidas $\mu_{s+1}, \cdots, \mu_N$ pueden ser escritas como combinación lineal de las primeras s.

Para cada $j \in \{s + 1, \cdots, N\}$ denotamos como $c^j = (c_1^j, \cdots, c_s^j)$ a los coeficientes tales que $\mu_j = \sum_{i=1}^{s} c_i^j \mu_i$. Entonces para cada j, $\sum_{i=1}^{s} c_i^j = \sum_{i=1}^{s} c_i^j \mu_i(C) = \mu_j(C) = 1$.

Ahora construiremos un vector para cada jugador, éstos vectores serán útiles para definir la matriz que buscamos. Para cada $j \in \{1, \cdots, s\}$ hacemos $d^j \in \mathbb{R}^s$ el vector que tiene 1 en la j-ésima posición y 0's en el resto. Para cada $j \in \{s + 1, \cdots, N\}$ hacemos $d^j = \frac{c^j}{|c^j|}$.

Definiremos una matriz q'' donde para cada $j \in \{1, \cdots, N\}$ su j-ésima columna será el vector d^j. Por lo que las primeras s columnas son la matriz identidad y el resto son el vector unitario correspondiente a cada jugador.

Usando la matriz q'' construiremos una matriz q' de $N \times N$. Para cada $i \in \{1, \cdots, s\}$ hacemos la i-ésima fila de q' igual a la i-ésima fila de q''. Para cada $i \in \{s + 1, \cdots, N\}$ y $j \in \{1, \cdots, N\}$ hacemos la entrada ij de q' igual a $c^i \bullet f^j = \sum_{h=1}^{s} c_k^i q'_{kj}$.

La construcción de q' implica que sus columnas deben de ser consistentes con todas las ecuaciones de DEP que involucran a c^i. Por consiguiente las columnas de q' son consistentes con todas las ecuaciones de DEP.

A continuación probaremos que q' cumple las condiciones del lema. Consideremos los siguientes casos:

1. $(i = 1, \cdots, s) \wedge (j = 1, \cdots, s)$. Tenemos que $q'_{ii} = 1$ y para $j \neq i, q'_{ij} = 0$ por lo que las condiciones se cumplen. Además $\mu_i \neq \mu_j$ pues $\mu_1, \cdots, \mu_s$ son linealmente independientes.

2. $(i = 1, \cdots, s) \wedge (j = s+1, \cdots, N)$. Entonces $q'_{ii} = 1$ mientras que $q'_{ij} = \frac{c_i^j}{|c^j|}$. Como c_i^j es una componente del vector c^j se tiene que $c_i^j \leq |c^j|$ y por lo tanto $q'_{ij} = \frac{c_i^j}{|c^j|} \leq 1 = q'_{ii}$. Más aún $\frac{c_i^j}{|c^j|} = 1 \iff c^j$ es el vector con 1 en la i-ésima posición y 0 en todas las demás ($\mu_i = \mu_j$).

3. $(i = s+1, \cdots, N) \wedge (j = 1, \cdots, N)$. Recordando que las entradas en la i-ésima fila son el producto punto de c^i con $d^1, \cdots, d^N$ y que cada d^j tiene magnitud 1. También debe ser claro que $d^j = \frac{c^j}{|c^j|}$ tiene la misma dirección que c^j. Por lo tanto $q'_{ii} = c^i \bullet d^i \geq c^i \bullet d^j = q'_{ij}$, donde la igualdad se da si y sólo si $d^i = d^j$ ($\mu_i = \mu_j$).

Notemos que esta matriz aún no tiene ninguna razón para ser propia pues puede que sus filas no sumen a 0, por lo que para terminar esta demostración construiremos una última matriz q usando la matriz q' que cumpla todas las condiciones. Definiremos la matriz q como la matriz obtenida de q' restando en cada entrada el promedio de las entradas de esa fila. Para ser más específicos, $\forall(i, j \in \{1, \cdots, N\})(q_{ij} = q'_{ij} - (\frac{1}{N}) \sum_{j=1}^{N} q'_{ij})$.

Ahora sí cada fila suma a 0, además también se cumple que cada columna de q satisface las ecuaciones de DEP. Para ver esto último solo debemos hacer las cuentas y llegar a que $q_{ij} = \sum_{h=1}^{s} c_h^i q_{hj}$, para ello fijamos i y j con $i \in \{s+1, \cdots, N\}$ y $j \in \{1, \cdots, N\}$

$$\sum_{h=1}^{s} c_h^i q_{hj} = c_1^i \left[q'_{1j} - (\tfrac{1}{N}) \sum_{j=1}^{N} q'_{1j} \right] + \cdots + c_s^i \left[q'_{sj} - (\tfrac{1}{N}) \sum_{j=1}^{N} q'_{sj} \right]$$

$$= \left[\sum_{h=1}^{s} c_h^i q'_{hj} \right] - (\tfrac{1}{N}) \left[c_1^i \sum_{j=1}^{N} q'_{1j} + \cdots + c_s^i \sum_{j=1}^{N} c_k^i q'_{kN} \right] = \sum_{h=1}^{s} c_k^i q'_{kj} - (\tfrac{1}{N}) \left[\sum_{h=1}^{s} c_k^i q'_{k1} + \cdots + \sum_{h=1}^{s} c_h^i q'_{hN} \right]$$

$$= (c^i \bullet d^j) - (\tfrac{1}{N}) \left[(c^i \bullet d^1) + \cdots + (c^i \bullet d^N) \right] = q'_{ij} - (\tfrac{1}{N}) \sum_{j=1}^{N} q'_{ij} = q_{ij}.$$

Por lo que q es una matriz propia. Notemos que las condiciones del lema son cumplidas por q pues la construimos a partir de q' restando el mismo número a cada entrada de una fila dada. Por lo que q cumple todas las condiciones buscadas.

□

Ahora la demostración del teorema que dejamos pendiente:

Demostración. Enumeraremos cada demostración como en el lema para facilitar la lectura.

1. Libre de Envidias.

   a) Sabemos que el elemento $\left[\frac{1}{N}\right]_{i,j \leq N} \in FIPS$ y claramente es libre de envidias. Supongamos que existen más puntos libres de envidias, por hipótesis todas las medidas son iguales, por lo que todas las entradas de una columna deben coincidir. Como cada fila debe sumar a 1 entonces debe existir una columna para la cual todas sus entradas son menores que $\frac{1}{N}$, es decir, $\exists(i\{1,\cdots,N\})(q_{ii} < \frac{1}{N})$ que es una contradicción.

b) Sea $q = \left[q_{ij}\right]_{i,j\leq N}$ como en el lema y sea $r = (\frac{1}{N},\cdots,\frac{1}{N})$. Sabemos que $\exists(\lambda > 0)(\left[\frac{1}{N}+\lambda q_{ij}\right]_{i,j\leq N} \in FIPS)$. Ésta matriz es libre de envidias pues $q_{ii} \geq q_{ij}$. Finalmente $\left[\frac{1}{N}+\lambda q_{ij}\right]_{i,j\leq N} \neq \left[\frac{1}{N}\right]_{i,j\leq N}$ pues por hipótesis $\exists(i,j)(i \neq j)$ para los cuales $\mu_i \neq \mu_j$ que implica que $q_{ii} > q_{ij}$. Hemos encontrado ya dos puntos libres de envidia y la linea que los une está compuesta de puntos libres de envidia.

2. Fuertemente Libre de Envidias.

$a \implies b$) Sea q como en el lema, entonces $\exists(i,j)(i \neq j)$ para los cuales $q_{ii} > q_{ij}$. Por teorema sabemos que $\exists(\lambda > 0)(\left[\frac{1}{N}+\lambda q_{ij}\right]_{i,j\leq N}) \in FIPS$. Claramente este elemento es un punto fuertemente libre de envidias.

$b \implies a$) Supongamos que $p \in FIPS$ es fuertemente libre de envidias y que $\exists(i,j)(i \neq j)$ para los cuales $\mu_i = \mu_j$. Como p es fuertemente libre de envidias, entonces $(q_{ii} > q_{ij}) \wedge (p_{jj} > p_{ji})$, además la fila i y la fila j de p son iguales, por lo que concluimos con $p_{ii} > p_{ij} = p_{jj} > p_{ji} = p_{ii}$ que es una contradicción.

$b \implies c$) Asumamos que $p \in FIPS$ es un punto fuertemente libre de envidias y sea $p' = \left[\frac{1}{N}\right]_{i,j\leq N} \in FIPS$. Claro que $p \neq p'$ pues p' no es fuertemente libre de envidias. Para finalizar basta ver que para todo punto q que se encuentra en la recta que une a p y p' (a excepción de p') se tiene que $q \in FIPS$ y que q es fuertemente libre de envidias.

$c \implies b$) La demostración es trivial.

3. Super Libre de Envidias.

$a \implies b$) Supongamos que las medidas son linealmente independientes y sea $q = \left[q_{ij}\right]_{i,j\leq N}$ en donde $(q_{ij} = 1 \iff i = j) \wedge (q_{ij} = -\frac{1}{N-1} \iff i \neq j)$. Claramente todas las filas suman a 0 y además por hipótesis $DEP = \emptyset$, por lo que q es una matriz propia.

Sabemos también que $\exists(\lambda > 0)(\left[\frac{1}{N}+\lambda q_{ij}\right]_{i,j\leq N}) \in FIPS$. Esto implica que $\forall i(\mu_i(P_i) = \frac{1}{N}+\lambda q_{ii} = \frac{1}{N}+\lambda)$ que claramente es mayor que $\frac{1}{N}$. Más aún, $\forall(i,j)(i \neq j)$ tenemos que $\mu_i(P_j) = \frac{1}{N}+\lambda q_{ij} = \frac{1}{N}-\frac{\lambda}{N-1} < \frac{1}{N}$. Por lo que q es super libre de envidias.

$b \implies a$) Supondremos que $p \in FIPS$ es super libre de envidias y que $P \in PART_N$ tal que $\mu_f(P) = p$.

También supondremos que $\mu_1,\cdots,\mu_N$ son linealmente dependientes y por tanto $\exists((k_1,\cdots,k_N) \neq (0,\cdots,0))(\sum_{i=1}^{N} k_i\mu_i = 0)$. Cambiando un poco de notación, existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t$ todos positivos y también existen $\{a_1, \cdots, a_s\}, \{b_1, \cdots, b_t\} \subseteq \{1, \cdots, N\}$ donde $\{a_1, \cdots, a_s\} \cap \{b_1, \cdots, b_t\} = \emptyset$ para los cuales $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \mu_{a_i} = \sum_{i=1}^{t} \beta_i \mu_{b_i}$. Entonces notemos lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \mu_{a_i}(C) = \sum_{i=1}^{t} \beta_i \mu_{b_i}(C) = \sum_{i=1}^{t} \beta_i$$

Será conveniente definir λ igual a cualquiera de éstos dos valores.
Nuestra hipótesis implica que para algún $j \notin \{a_1, \cdots, a_s\}$ fijo, $\forall (i = 1, \cdots, s)(\mu_{a_i}(P_j) < \frac{1}{N})$. Por lo que $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \mu_{a_i}(P_j) < \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = \frac{\lambda}{N}$.
Finalmente supongamos que $j \in \{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\} \Rightarrow j \notin \{\beta_1, \cdots, \beta_t\}$. Como antes $\sum_{i=1}^{t} \beta_i \mu_{b_i} < \frac{\lambda}{N}$, pero $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \mu_{a_i} = \sum_{i=1}^{t} \beta_i \mu_{b_i}$, por lo que $\forall j, \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \mu_{a_i}(P_j) < \frac{\lambda}{N}$. Por lo que tenemos que $\lambda = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \mu_{a_i}(C) = \alpha_1 \sum_{j=1}^{N} \mu_{a_1}(P_j) + \cdots + \alpha_s \sum_{j=1}^{s} \mu_{a_s}(P_j) = \sum_{j=1}^{N} \left[\alpha_1 \mu_{a_1}(P_j) + \cdots + \alpha_s \mu_{a_s}(P_j)\right] < \sum_{j=1}^{N} \frac{\lambda}{N} = \lambda$, que es una contradicción, por lo que las medidas son linealmente independientes.

$b \implies c)$ No tenemos que hacer más que lo mismo que se hizo en $b \Rightarrow c$ en la parte de Fuertemente Libre de Envidias.

$c \implies b)$ Trivial.

$\square$

5.5.2. Eficiencia

Comenzaremos generalizando las ideas que usamos en la sección de eficiencia para 2 jugadores, por lo que definiremos el siguiente conjunto:

$$B^+(p_1, \cdots, p_N) = \left\{(q_1, \cdots, q_N) \in \mathbb{R}^N : \forall i q_i \geq p_i\right\}$$

Definición 5.5.4. La *Frontera Exterior del IPS* consiste en $\left\{(p_1, \cdots, p_N) \in \partial_{IPS} : \sum_{i=1}^{N} p_i \geq 1\right\}$, mientras que la *Frontera Interior del IPS* consiste en $\left\{(p_1, \cdots, p_N) \in \partial_{IPS} : \sum_{i=1}^{N} p_i \leq 1\right\}$.

Definición 5.5.5. La *Frontera Pareto-Exterior del IPS* consiste en $\{p \in IPS : B^+(p) \cap IPS = \{p\}\}$.

Algo más que agregaremos a la notación, sean $a, b \in \mathbb{R}^n$, denotaremos como $\mathbb{L}(a, b)$ a todos los puntos que se encuentran en la recta que una a los puntos a y b.

Siguiendo los pasos del caso para dos jugadores tenemos los siguientes resultados:

Teorema 5.5.6. *Asumamos que hay más de 2 jugadores.*

1. *La frontera Pareto-exterior consiste precisamente del conjunto de todos los puntos Pareto maximales del IPS.*

2. *La frontera Pareto-exterior es un subconjunto propio de la frontera exterior a menos que todas las medidas sean iguales, en cuyo caso la frontera Pareto-exterior es igual a la frontera exterior del IPS.*

Demostración. Para probar la parte a solo debemos repetir lo que hicimos para el caso de dos jugadores.

Para la parte b comenzaremos suponiendo que todas las medidas son iguales, entonces $IPS = (N-1) - simplejo$ por lo que la frontera exterior y la frontera Pareto-exterior son iguales al simplejo.

Ahora supongamos que no todas las medidas son iguales. Debe ser claro que la frontera Pareto-exterior es un subconjunto de la frontera exterior por lo que solo resta probar que es propia. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\mu_1 \neq \mu_2$ y consideremos $IPS_{12} = \{(p_1, p_2, 0, \cdots, 0) \in IPS\}$ y fijemos un punto $p \in IPS_{12}$ tal que $p \in \mathbb{L}[(1, 0, \cdots, 0), (0, 1, 0, \cdots, 0)] - \{(1, 0, \cdots, 0), (0, 1, 0, \cdots, 0)\}$. Así $p \in \partial_{IPS}$ y $p_1 + p_2 = 1$ por lo que p está en la frontera exterior del IPS pero p no se encuentra en la frontera Pareto-exterior, pues el conjunto $B^+(p)$ tiene una infinidad de elementos. □

Corolario 5.5.7. *Existen puntos en la frontera del IPS que no corresponden a particiones Pareto maximales o Pareto minimales.*

Recordemos que en la versión para dos jugadores utilizamos el hecho de que los únicos dos puntos que se encontraban la frontera del cuadrado unitario $[0, 1]\times[0, 1]$ eran los puntos $(0, 1)$ y $(1, 0)$. Desafortunadamente en el caso general eso no es cierto, por lo que tendremos que usar un resultado más débil.

Teorema 5.5.8. *Supongamos que $p \in IPS$ y que p es punto interior del hipercubo unitario (es decir, $\forall(i \leq N)(0 < p_i < 1)$), entonces p está en la frontera exterior del IPS si y sólo si p está en la frontera Pareto-exterior.*

Demostración. Fijemos p como en el enunciado. Sea $P \in PART_N$ para el cual $\mu(P) = p$ y supongamos que p no se encuentra en la frontera Pareto-exterior del IPS, por lo que P no es una partición Pareto-maximal.

Sea Q partición Pareto-mejor que P, sabemos que $\forall(i \leq N)(\mu_i(Q_i) \geq \mu_i(P_i))$con al menos una de las desigualdades siendo estricta. Por el corolario 5.1.6 $\forall(i \leq N)\exists R_i \subseteq Q_i(\mu_i(R_i) = \mu_i(P_i))$.

A continuación definiremos una partición S de la siguiente forma:

$$(S_i = R_i \bigcup_{j \leq N} \left(Q_j - R_j\right) \iff i = 1) \wedge (S_i = R_i \iff i \neq 1)$$

Nótese que $\exists j(\mu_j(Q_j - R_j) > 0)$, por lo que $\mu_1(S_1) > \mu_1(R_1) = \mu_1(P_1)$. Además $\forall(i \neq 1)(\mu_i(S_i) = \mu_i(R_i) = \mu_i(P_i))$.

Sea $s = \mu(S)$, entonces s y p coinciden en todas sus coordenadas excepto en la primera, por lo cual $\exists(\varepsilon_1 > 0)(s = (p_1 + \varepsilon_1, \cdots, p_N))$. De manera similar podemos encontrar $\varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_N$ tales que $(p_1, p_2+\varepsilon_2, p_3, \cdots, p_N), \cdots, (p_1, \cdots, p_{N-1}, p_N+\varepsilon_N) \in IPS$ y podemos seleccionar $\varepsilon = min\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_N\}$. Así $(p_1+\varepsilon, p_2, \cdots, p_N), \cdots, (p_1, \cdots, p_{N-1}, p_N+\varepsilon) \in IPS$.

Ahora consideremos los números $\frac{p_1}{\sum p_i}, \cdots, \frac{p_N}{\sum p_i}$ (que suman a 1) y consideremos $t = \frac{p_1}{\sum p_i}(p_1 + \varepsilon, p_2, \cdots, p_N) + \cdots + \frac{p_N}{\sum p_i}(p_1, \cdots, p_{N-1}, p_N + \varepsilon)$. Como t es combinación convexa de elementos del IPS, entonces $t \in IPS$.

Simplificando vemos que $t = (1 + \frac{\varepsilon}{\sum p_i})p$, por lo que p, t y $(0, \cdots, 0)$ son colineales. Sea $\mathbb{L}$ la linea que contiene dichos puntos, como $(\sum p_i > 0) \wedge (\varepsilon > 0) \Rightarrow (1 + \frac{\varepsilon}{\sum p_i}) > 1$, por lo que $p \in Int(\mathbb{L})$. Finalmente como $t \in IPS$ eso quiere decir que p no se encuentra en la frontera exterior del IPS.

La demostración de la dirección contraria del teorema es trivial pues la frontera Pareto-exterior es un subconjunto de la frontera exterior. □

Corolario 5.5.9. *Si p está en la frontera exterior del IPS pero p no está en la frontera Pareto-exterior, entonces $p \in \partial\left([0, 1]^N\right)$.*

Para probar el teorema más importante de esta sección necesitaremos recurrir antes al siguiente lema:

Lema 5.5.10. *Si $q \in \partial\,[0, 1]^N \cap IPS$, entonces:*

1. *Ninguna de sus coordenadas es 1*

2. *Alguna de sus coordenadas es 1 y todas las restantes son 0.*

Demostración. Sea $q \in \partial\,[0, 1]^N \cap IPS$, supongamos $\exists i(q_i = 1)$, entonces fijemos $j \neq i$ y obtengamos $Q \in PART_N$ para el cual $\mu(Q) = q$. Entonces $\mu_i(Q_i) = 1 \Rightarrow \mu_i(Q_j) = 0$, como μ_j es absolutamente continua respecto a μ_i tenemos que $\mu_j(Q_j) = 0 \Rightarrow q_j = 0$. □

Pasaremos a probar el teorema más importante de esta sección.

Teorema 5.5.11. *El IPS tiene una infinidad de puntos Pareto maximales. En particular, $\forall p \in \mathbb{R}^N$ con todas las coordenadas no-negativas y al menos una coordenada positiva, $\exists\lambda$ para el cual λp es Pareto maximal.*

Demostración. Fijemos $p \in \mathbb{R}^N_{\geq 0}$ con al menos una coordenada positiva.

Si tenemos la suerte que $p \in \mathbb{R}^N_{>0}$, consideremos $G = \{\lambda > 0 : \lambda p \in IPS\}$ y hagamos $\lambda_1 = Sup(G)$. Como el IPS es cerrado entonces $\lambda_1 p \in IPS$ y trivialmente $\lambda_1 p$ se encuentra en la frontera exterior del IPS. Por el lema anterior, como $\lambda_1 p \in \mathbb{R}^N_{>0}$ y además p se encuentra en la frontera exterior entonces $\lambda_1 p$ también se encuentra en la frontera Pareto-exterior y por lo tanto la partición que genera dicho punto debe ser Pareto maximal.

Si $p \notin \mathbb{R}^N_{>0}$ hagamos $\delta = \{i \leq N : p_i > 0\}$ y definamos $p' = (p_i : i \in \delta) \in \mathbb{R}^{|\delta|}$. Hagamos lo que hicimos en el caso anterior para obtener un $\lambda > 0$ para el cual la partición $P \in PART_{|\delta|}$ que genera al punto $\lambda p'$ sea Pareto maximal y definamos la partición $Q \in PART_N$ como sigue:

$$(Q_i = P_i \iff i \in \delta) \wedge (P_i = \emptyset \iff i \notin \delta)$$

Debe ser claro que Q genera el punto $\lambda_1 p$ y que además éste punto se encuentra en la frontera Pareto-exterior, por lo que Q es una partición Pareto maximal. □

Antes de pasar a la última sección enunciaremos un último corolario.

Corolario 5.5.12. *Sea $P \in PART_N$. Si P no es Pareto-maximal entonces existe una partición $Q \in PART_N$ tal que Q es Pareto-mejor que P.*

5.5.3. Justicia y Eficiencia

En ésta última sección solo nos queda combinar los resultados de proporcionalidad y proporcionalidad fuerte con eficiencia. La demostración de cada uno de los resultados no es mas que repetir cada una de las pruebas por separado y por tanto no daremos una demostración.

Teorema 5.5.13. *Sea C un pastel que será dividido entre N jugadores, tenemos los siguientes casos:*

1. *Si todas las medidas son iguales, entonces*

   a) *El IPS tiene exactamente un punto proporcional y Pareto maximal: $(\frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N})$.*

   b) *El IPS no tiene puntos fuertemente proporcionales y Pareto maxiamles.*

2. *Si no todas las medidas son iguales, entonces*

   a) *El IPS tiene una infinidad de puntos proporcionales y Pareto maximales. En particular $\forall q \in \mathbb{R}^N_{\leq 0} - \{(0, \cdots, 0)\} \exists \lambda ((\frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N}) + \lambda q)$ es proporcional y Pareto maximal.*

   b) *El IPS tiene una infinidad de puntos fuertemente proporcionales y Pareto maximales. En particular $\forall q \in \mathbb{R}^N_{>0} \exists \lambda ((\frac{1}{N}, \cdots, \frac{1}{N}) + \lambda q)$ es fuertemente proporcional y Pareto maximal.*

Bibliografía

[1] Straffin, P., (2006), *Game Theory and Strategy*, Washington DC, EEUU: The Mathematical Association of America.

[2] Myerson, R., (1997), *Game Theory Analysis of Conflict*, Massachusetts, USA: Harvard University Press.

[3] Nash, J., (1950), *Equilibrium Points in n-Person Games*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 36(1):48-49. 22

[4] Nash, J., (1951), *Non-Cooperative Games*, The Annals of Mathematics, 54(2):286-295. 22

[5] Robertson, J. y Webb, W., (1998), *Cake-Cutting Algorithms: Be Fair If You Can*, Massachusetts, USA: A K Peters.

[6] Barbanel, J., (2005), *The Geometry of Efficient Fair Division*, New York, USA: Cambridge University Press.

[7] González-Díaz, J., (2010), *An Introductory Course on Mathematical Game Theory*, USA: The American Mathematical Society. 79

[8] Procaccia, A. (in press). Capítulo 13 en *Handbook of Computational Social Choice*, Pennsylvania, USA: School of Computer Sciences at Research Showcase (CMU). 65

[9] Brams, J. y Taylor A. (1995). *An Envy-Free Cake Division Protocol*. The American Mathematical Monthly, 102(1),9-18.

[10] Simmons, F., comunicación privada a Michael Starbird, 1980.

[11] Su,F. (1999) *Rental Harmony: Sperner's Lemma in Fair Division*. The American Mathematical Monthly, 106(1999),930-942.