UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

"LEY ASINTÓTICA DE DISTRIBUCIÓN DE LOS NÚMEROS PRIMOS"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

PRESENTA:

ILIA PAVLOVICH NAUMKIN KAIKINA

ASESOR:

DR. EUGENIO BALANZARIO GUTIÉRREZ

Centro de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México

MORELIA, MICHOACÁN - ABRIL de 2016

Agradecimientos

La vida se encuentra plagada de retos, y uno de ellos es la universidad. Tras verme dentro de ella, me he dado cuenta que más allá de ser un reto, es una base no solo para el entendimiento del campo en el que me he visto inmerso, sino para lo que concierne a la vida y mi futuro.

Quiero agradecer a mi asesor de tesis el Dr. Eugenio Balanzario Gutierréz por ser mi guía, por compartir su conocimiento conmigo y por el tiempo que tuvo que invertir en mi.

También quiero agradecer a mi familia por siempre creer en mi y por darme su apoyo hasta el final, sin ellos no hubiera sido lo mismo.

Por último me gustaría agradecer a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo por aceptarme como alumno y a todos mis maestros por sus esfuerzos para que finalmente pudiera graduarme.

Resumen

Esta tesis está dedicada a la exposición de las propiedades principales de la función zeta de Riemann. Se demuestra la ecuación funcional de la función zeta de Riemann, los teoremas básicos sobre los ceros no triviales de la función zeta y se obtiene la aproximación de la suma final. Además se revela la relación entre la suma de los coeficientes de la serie de Dirichlet y la función dada por esta serie y se demuestra la representación de la función de Chebyshev en forma de suma según los ceros de la función.

Palabras clave:

-Zeta función de Riemann

-Serie de Dirichlet

-Función de Chebyshev

-Ceros de la función de Riemann

-Números primos

Abstract

This thesis is devoted to the exhibition of the main properties of the Riemann zeta function. The functional equation of the Riemann zeta function is demonstrated. The basic theorems of non-trivial zeros of the zeta function are proved and the approximation of the final sum is obtained. Furthermore the relationship is revealed between the sum of the coefficients of the Dirichlet series and the function given by this series. The representation of the Chebyshev function is shown in the form of the sum by the zeros of the function.

ÍNDICE GENERAL

Introducción

Desde hace 2500 años los números primos atraen la atención de matemáticos y aficionados de todo el mundo, se los califica de misteriosos e indomables ya que no parece existir alguna regla que determine sus ubicaciones entre los demás números naturales. Un número primo se define como un entero mayor que uno cuyos únicos divisores son el uno y él mismo, es decir,

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...$$

El concepto de número primo ya se conocía en la antigua Grecia en la escuela de Pitágoras (hace 2500 años) y un poco después en las obras de Euclides se incluye la demostración de la existencia de una cantidad infinita de estos números. Para saber si un número es primo basta dividirlo por todos los números naturales menores a la raíz cuadrada de dicho número y si no se encuentra ningún divisor entonces el número es primo. Si se encuentra un divisor o si el número es par y mayor que 2 se dice que es un número compuesto. Los números primos son importantes porque son los átomos de las matemáticas, ya que todos los demás números enteros se construyen a partir de ellos en forma de productos. Los números que no son primos se llaman compuestos, excepto el número 1 que no es ni primo ni compuesto.

El Teorema Fundamental de la Aritmética establece que todo entero mayor o igual que 2 se escribe de manera única como producto de primos sin importar el orden de los factores. Por esta razón, el estudio de las propiedades de los números primos siempre ha sido objeto de intenso estudio por matemáticos de todas las épocas.

La distribución de los números primos es muy irregular, se sabe que podemos encontrar espacios tan grandes como se quieran donde no exista ningún número primo; por ejemplo, la sucesión

$$(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, ..., (n+1)! + (n+1)$$

consiste de n enteros consecutivos compuestos. Por otro lado, la conjetura de los primos gemelos afirma la existencia de una infinidad de parejas de primos p y q cuya diferencia es 2, es decir,

$$p - q = 2.$$

Desde Euclides (año 300 a.C.) se sabe que la sucesión de números primos es infinita. En la Teoría de los Números, la función $\pi(x)$ denota la cantidad de números primos que pertenecen al intervalo $[1, x]$, es decir,

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1,$$

donde la sumatoria es tomada sobre los números primos. Bajo esta notación el teorema de Euclides establece

$$\pi(x) \longrightarrow \infty \text{ cuando } x \longrightarrow \infty.$$

En 1737 Euler demostró que la serie $\sum_n \frac{1}{p_n}$ diverge, lo cual lleva a otra demostración de la existencia de infinita cantidad de números primos. Uno de los más notables descubrimientos de Euler fue la siguiente fórmula [1]

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

La observación de Euler (1749) de que el producto

$$\prod_p \left\{1 - p^{-s}\right\}^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \qquad s > 1$$

donde p recorre todos los números primos y n los naturales, será el comienzo de las investigaciones de Riemann en esta dirección. Riemann se interesó, entre otros temas, por la distribución de los números primos. Se plantean inmediatamente númerosas preguntas como son: existencia de infinitos números primos; determinación de fórmulas que permitan obtener los números primos; distribución de los mismos en otras sucesiones distintas de la de números naturales; medida de los intervalos entre dos primos consecutivos; etc.

En 1849 A. de Polignac conjeturó que para todo número par $2n$ había infinitas parejas de primos cuya diferencia era $2n$. El caso $n = 1$ corresponde a la famosa conjetura de los números gemelos. Una caracterización de los primos gemelos la da Clement [1]. Sea $n \geq 2$, los enteros n y $n + 2$ forman un par de primos gemelos sí y sólo si

$$4\left[(n-1)! + 1\right] + n \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} n\,(n+2)).$$

Legendre y Gauss se interesaron por el problema de establecer la cantidad de números primos que existen en un intervalo $[1, x]$. Legendre afirmaba que para valores suficientemente grandes de x, $\pi(x)$ es aproximadamente igual a $x/(\log x - 1.08366)$.

Independientemente de Legendre, Gauss (1792), calculando la cantidad de primos consecutivos que hay en cada mil números de la sucesión natural, afirmaba que $\pi(x)$ se diferencia relativamente poco de la integral

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Prácticamente, la hipótesis de Legendre y Gauss se expresan por las fórmulas

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\log x}, \qquad \pi(x) \approx \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Esta última integral es denotada usualmente por Li x. Aplicando integración por partes el Li x se demuestra que

$$\text{Li } x = \int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} \sim \frac{x}{\log x}$$

así que $\pi(x) \sim \text{Li } x$ y $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ cuando $x \longrightarrow \infty$ son equivalentes.

Chebyshev (1851) demuestra las desigualdades $0.92 \leq \frac{\pi(x)}{x/\log x} \leq 1.11$ y deduce que si existe el límite cuando $x \longrightarrow \infty$ de $\frac{\pi(x)}{x/\log x}$, entonces debe ser la unidad, es decir,

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1,$$

(en el supuesto de que el límite exista). Es decir que se cumpliría la equivalencia asintótica siguiente $\pi(x) \sim x/\log x$ cuando $x \longrightarrow \infty$. Esta afirmación es la que conocemos como teorema de los números primos sobre la densidad de los naturales.

La existencia del límite la demostraron Hadamard y de la Vallée Poussin independientemente uno de otro en 1896, mediante las ideas desarrolladas por Riemann relacionadas con la función $\zeta(s)$ para valores complejos de s. Con ello quedaba completamente demostrada la ley asintótica de distribución de los números primos.

En 1859 Riemann introdujo la función $\zeta(s)$ definida en $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > 1\}$ por la serie armónica generalizada

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},$$

$s = \sigma + it$, donde $\sigma, t \in \mathbb{R}$. Esta función es conocida como la Función Zeta de Riemann. N. Oresme (1323-1382) ya había demostrado que $\zeta(1)$, la propia serie armónica, diverge. Sabemos así que esta serie es convergente en la región dada y en $\text{Re}(s) \geq \delta > 1$ la serie está dominada término a término por la serie absolutamente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\delta}$ por lo que converge uniformemente en $\{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) \geq \delta\}$, según el criterio de Weierstrass.

La conexión fundamental entre la función $\zeta(s)$ y los números primos está dada por

$$\zeta(s) = \prod_p \left\{1 - p^{-s}\right\}^{-1}, \quad \text{Re } s > 1$$

donde el producto está tomado sobre todos los números primos p. Riemann también demostró que $\zeta(s)$ satisface una ecuación funciónal. De tal ecuación se sigue que los enteros pares negativos $-2n, n \in \mathbb{N}$, anulan a $\zeta(s)$. Tales ceros son conocidos como los ceros triviales. De las condiciones de simetría de la ecuación funciónal se sigue que los ceros que no son triviales deben estar ubicados en la franja critica $0 \leq \sigma \leq 1$, y además simétricamente distribuidos con respecto a la línea crítica $\sigma = \frac{1}{2}$ y al eje real. Los ceros que están en la franja crítica son llamados ceros no triviales. Riemann afirmó sin demostración que todos ellos deben estar ubicados en la línea crítica, conjetura aún abierta y conocida como la Hipótesis de Riemann.

El objetivo principal de la tesis es dar una introducción breve pero completa con todas las demostraciones detalladas de la teoría de la función zeta de Riemann. Esta tesis se puede tomar como base para un curso de nivel licenciatura. El contenido de la tesis es el siguiente: en el primer capítulo vamos a introducir las notaciones que usamos en toda la tesis, vamos a demostrar las fórmulas de sumación de Euler y Abel así como la estimación de Van der Corput. El segundo capítulo está dedicado a las propiedades básicas de la función Gamma de Euler y demostramos la formula integral de la esta función. En el tercer capítulo consideramos las propiedades principales de la función zeta de Riemann, demostramos la ecuación funcional de la función zeta y unos teoremas acerca de los ceros no triviales y por ultimo obtenemos la aproximación de la suma final. La relación entre la suma de los coeficientes de la serie de Dirichlet y la función dada por esta serie está desarrollado en el ultimo capitulo. Demostramos teorema general para series de Dirichlet, obtenemos la distribución de los números primos y representamos la función de Chébyshev en forma de suma según los ceros de la función zeta.

Preliminares

1.1. Notaciones

Para un A positivo, las notaciones $B = O(A)$, $B \ll A$ significan que existe c tal que $|B| \leq cA$. Los números $\varepsilon, \varepsilon_1, ...$ son constantes positivas tan pequeños como se quiera, n, m, k y N son números naturales y $p, p_1, ...$ son números primos.

La función de Mobius $\mu(n)$, se define por:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } \ n = 1, \\ 0, & \text{si } \ p^2 | n, \\ (-1)^k, & \text{si } \ \ n = p_1 p_2 ... p_k. \end{cases}$$

La función de Mangoldt $\Lambda(n)$, se define como:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k, \\ 0 & \text{si } n \neq p^k. \end{cases}$$

La función $\phi(k)$ se llama la función de Euler, y denota el número de los números naturales menores que k y primos con k.

La función $\pi(x)$ se define como la sumatoria

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$$

y se llama función contadora de números primos. Es una función que cuenta el número de números primos menores o iguales a cierto número x.

La función de Chebyshev se define como la sumatoria

$$\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

Para cualquier real $u, [u]$ denota al entero más cercano a u tal que $0 \leq u - [u] < 1$. El número $u - [u]$ es conocido como la parte fraccionaria de u y se denota por $\{u\}$. Definimos las siguientes funciónes:

$$\begin{aligned} \rho(u) &= 1/2 - \{u\}, \\ \|u\| &= \min(\{u\}, 1 - \{u\}). \end{aligned}$$

El número s es complejo, $s = \sigma + it$, donde $i^2 = -1$, $\operatorname{Re} s = \sigma$, $\operatorname{Im} s = t$; $\overline{s} = \sigma - it$.

1.2. Propiedades de $\Lambda(n)$ y $\mu(n)$

Lema 1.0. [**4**] Tiene lugar la fórmula

$$\sum_{d/n} \Lambda(d) = \log n.$$

Demostración: Sea $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{d/n} \Lambda(d) &= \Lambda(p_1) + \Lambda(p_1^2) + ... + \Lambda(p_1^{\alpha_1}) + \\
& \quad +\Lambda(p_2) + \Lambda(p_2^2) + ... + \Lambda(p_2^{\alpha_2}) + \\
& \quad +... + \Lambda(p_k) + \Lambda(p_k^2) + ... + \Lambda(p_k^{\alpha_k}) \\
&= \alpha_1 \log p_1 + \alpha_2 \log p_2 + ... + \alpha_k \log p_k \\
&= \log p_1^{\alpha_1} + \log p_2^{\alpha_2} + ... + \log p_k^{\alpha_k} \\
&= \log(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}) = \log n.
\end{aligned}$$

Lema 1.1. **[5]** (Fórmula de inversión de Mobius). Sean $F(n)$ y $f(n)$ funciónes definidas para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ y supongamos que

$$F(n) = \sum_{d/n} f(d),$$

entonces

$$f(n) = \sum_{d/n} \mu(d) F(\frac{n}{d}).$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\sum_{d/n} \mu(d) F(\frac{n}{d}) &= \sum_{d/n} \mu(d) (\sum_{t/\frac{n}{d}} f(t)) = \sum_{\substack{d/n \\ t/\frac{n}{d}}} \mu(d) f(t) = \\
\sum_{td/n} \mu(d) f(t) &= \sum_{\substack{t/n \\ d/\frac{n}{t}}} \mu(d) f(t) = \sum_{t/n} f(t) (\sum_{d/\frac{n}{t}} \mu(d)).
\end{aligned}$$

Falta demostrar que

$$\sum_{d/m} \mu(d) = \begin{cases} 1 \text{ para } m = 1, \\ 0 \text{ para } m > 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Si $m = 1$ tenemos $\sum_{d/1} \mu(d) = \mu(1) = 1$.

Ahora demostramos que $\sum_{d/m} \mu(d) = 0$ para $m > 1$. Sea $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, $k \geq 1$, entonces los divisores tienen forma $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_k^{\beta_k}$ con $0 \leq \beta_j \leq \alpha_j$. Tenemos

$$\sum_{d/m} \mu(d) = \sum_{0 \leq \beta_j \leq \alpha_j} \mu(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_k^{\beta_k}).$$

Por la definicion de la función de Mobius, $\mu(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_k^{\beta_k}) = 0$ si algun $\beta_j \geq 2$. Entonces

$$\sum_{d/m}\mu(d) = \sum_{\beta_j=0,1}\mu(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_k^{\beta_k}).$$

La función de Mobius depende solo de número de factores primos, esto es si $\beta_1 + ... + \beta_k = l$ y $\beta_j = 0, 1$ tenemos $\mu(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_k^{\beta_k}) = (-1)^l$, donde $0 \leq l \leq k$, $k \geq 1$. Usando la fórmula de binomio de Newton

$$\sum_{l=0}^{k}\left(\begin{array}{c} l \\ k \end{array}\right)a^l b^{k-l} = (a+b)^k,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{d/m}\mu(d) &= \sum_{l=0}^{k}\sum_{\substack{\beta_j=0,1 \\ \beta_1+...+\beta_k=l}}\mu(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_k^{\beta_k}) \\
&= \sum_{l=0}^{k}(-1)^l\sum_{\substack{\beta_j=0,1 \\ \beta_1+...+\beta_k=l}}1 = \sum_{l=0}^{k}(-1)^l\left(\begin{array}{c} l \\ k \end{array}\right) \\
&= \sum_{l=0}^{k}\left(\begin{array}{c} l \\ k \end{array}\right)(-1)^l\,1^{k-l} = (-1+1)^k = 0^k = 0.
\end{aligned}$$

Entonces se tiene $\sum_{d/m}\mu(d) = 0$ para $m > 1$. Fórmula (1) está demostrada. Notamos que si $t = n$ entonces

$$\sum_{d/\frac{n}{t}}\mu(d) = \sum_{d/1}\mu(d) = 1.$$

Si $t < n$ es un divisor de n, entonces, el número entero $m = \frac{n}{t} > 1$. Por la fórmula (1) obtenemos

$$\sum_{d/\frac{n}{t}}\mu(d) = \sum_{d/m}\mu(d) = 0.$$

Por consiguiente

$$\sum_{t/n}f(t)(\sum_{d/\frac{n}{t}}\mu(d)) = f(n).$$

Lema 1.1 queda demostrado.

Lema 1.2. [8] Tiene lugar la fórmula

$$\sum_{d/n}\mu(d)\log d = -\Lambda(n).$$

Demostración: Usamos la fórmula de inversión de Mobius. Sean $F(n) = \log n$ y $f(n) = \Lambda(d)$, se cumple (Lema 1.0)

$$\sum_{d/n}\Lambda(d) = \log n,$$

entonces

$$\begin{aligned}\Lambda(n) &= \sum_{d/n}\mu(d)\log\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d/n}\mu(d)(\log n - \log d)\\ &= \sum_{d/n}\mu(d)\log n - \sum_{d/n}\mu(d)\log d.\end{aligned}$$

Observemos que

$$\sum_{d/n}\mu(d)\log n = \sum_{\substack{d/n\\ n=1}}\mu(d)\log n + \sum_{\substack{d/n\\ n>1}}\mu(d)\log n = 0$$

porque

$$\sum_{d/n}\mu(d) = \begin{cases} 1, & n=1\\ 0, & n>1\end{cases}$$

y $\log n = 0$ si $n = 1$. Así obtenemos lo siguiente

$$\Lambda(n) = -\sum_{d/n}\mu(d)\log d.$$

1.3. Fórmulas de sumación

Lema 1.3. **[2]** (Fórmula de sumación de Abel). Sea $\{c_n\}$ una sucesión de números complejos y $f(x) \in C^1[a,b]$. Entonces se cumple

$$\sum_{a<n\leq b} c_n f(n) = -\int_a^b C(u)f'(u)du + C(b)f(b)$$

donde

$$C(u) = \sum_{a<n\leq u} c_n.$$

Demostración: Sea la función

$$g(u,n) = \begin{cases} 1, & n\leq u\leq b\\ 0, & a\leq u<n\end{cases},$$

entonces

$$C(b)f(b) - \sum_{a<n\leq b} c_n f(n) = \sum_{a<n\leq b} c_n f(b) - \sum_{a<n\leq b} c_n f(n) =$$

$$= \sum_{a<n\leq b} c_n(f(b)-f(n)) = \sum_{a<n\leq b} c_n \int_n^b f'(u)du =$$

$$= \sum_{a<n\leq b}\int_n^b c_n f'(u)du = \sum_{a<n\leq b}\int_a^b c_n f'(u)g(u,n)du =$$

$$= \int_a^b (\sum_{a<n\leq b} c_n f'(u)g(u,n))du = \int_a^b (\sum_{a<n\leq u} c_n f'(u))du = \int_a^b C(u)f'(u)du\ .$$

Lema 1.4. **[2]** (Fórmula de sumación de Euler). Sea $f(u)$ una función que es continuamente diferenciable en $[a,b]$, $b>a>0$. Entonces tiene lugar la igualdad

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(u)du + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) - \int_a^b \rho(u)f'(u)du.$$

Demostración: Recordemos que

$$\begin{aligned} \rho(u) &= 1/2 - \{u\}, \\ \{u\} &= u - [u]. \end{aligned}$$

Notamos que la función $\rho(u)$ es semicontinua por la derecha en los números enteros j: $\lim_{u\to j+0}\rho(u) = \frac{1}{2}$ y $\lim_{u\to j-0}\rho(u) = -\frac{1}{2}$.

Denotamos $m = [b]-[a]$, entonces entre a y b se tiene m números enteros. Tenemos que $a < [a]+1 < ... < [a]+m = [b] \leq b$. Entonces

$$\begin{aligned} &\int_a^b \rho(u)f'(u)du = \int_a^{[a]+1} \rho(u)f'(u)du \\ &+ \sum_{j=1}^{m-1} \int_{[a]+j}^{[a]+j+1} \rho(u)f'(u)du + \int_{[b]}^b \rho(u)f'(u)du. \end{aligned} \tag{2}$$

Integrando por partes en cada sumando

$$\begin{aligned} \int_a^{[a]+1} \rho(u)f'(u)du &= \rho([a]+1-0)f([a]+1) \\ &\quad -\rho(a)f(a) - \int_a^{[a]+1} \rho'(u)f(u)du, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_{[a]+j}^{[a]+j+1} \rho(u)f'(u)du = \rho([a]+j+1-0)f([a]+j+1) \\ &-\rho([a]+j+0)f([a]+j) - \int_{[a]+j}^{[a]+j+1} \rho'(u)f(u)du, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{[b]}^b \rho(u)f'(u)du &= \rho(b)f(b) \\ &\quad -\rho([b]+0)f([b]) - \int_{[b]}^b \rho'(u)f(u)du. \end{aligned}$$

Como $\rho(u) = \frac{1}{2} - u + [u]$, notamos que $\rho'(u) = -1$ dentro de cada intervalo de integración y $\rho(j+0) = \frac{1}{2}$ y $\rho(j-0) = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_a^{[a]+1} \rho(u)f'(u)du &= -\frac{1}{2}f([a]+1) \\ &\quad -\rho(a)f(a) + \int_a^{[a]+1} f(u)du, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{[a]+j}^{[a]+j+1} \rho(u)f'(u)du &= -\frac{1}{2}f([a]+j+1) \\ &\quad -\frac{1}{2}f([a]+j) + \int_{[a]+j}^{[a]+j+1} f(u)du,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{[b]}^{b} \rho(u)f'(u)du &= \rho(b)f(b) \\ &\quad -\frac{1}{2}f([b]) + \int_{[b]}^{b} f(u)du.\end{aligned}$$

Sustituyendo las últimas fórmulas en (2) obtenemos

$$\begin{aligned}&\int_{a}^{b} \rho(u)f'(u)du = \int_{a}^{[a]+1} f(u)du \\ &+\sum_{j=1}^{m-1}\int_{[a]+j}^{[a]+j+1} f(u)du + \int_{[b]}^{b} f(u)du \\ &-\frac{1}{2}f([a]+1) - \rho(a)f(a) \\ &-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} f([a]+j+1) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} f([a]+j) \\ &+\rho(b)f(b) - \frac{1}{2}f([b]).\end{aligned}$$

Haciendo el cambio del índice de sumacion $j+1 \to j$ en la primera suma del lado derecho de la última igualdad, obtenemos

$$\sum_{j=1}^{m-1} f([a]+j+1) = \sum_{j=2}^{m} f([a]+j).$$

Como

$$f([a]+1) + \sum_{j=2}^{m} f([a]+j) = \sum_{j=1}^{m} f([a]+j)$$

y

$$\sum_{j=1}^{m-1} f([a]+j) + f([b]) = \sum_{j=1}^{m} f([a]+j).$$

Entonces

$$\begin{aligned}&\int_{a}^{b} \rho(u)f'(u)du = \int_{a}^{b} f(u)du + \rho(b)f(b) \\ &-\rho(a)f(a) - \sum_{j=1}^{m} f([a]+j).\end{aligned}$$

Como
$$\sum_{j=1}^{m} f([a]+j) = \sum_{a<n\leq b} f(n),$$
por lo tanto
$$\int_a^b \rho(u)f'(u)du = \int_a^b f(u)du + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) - \sum_{a<n\leq b} f(n).$$
El lema queda demostrado.

1.4. Estimación de Van der Corput

Teorema 1.1. **[5]** Sea $f(x)$ una función real con derivada continua y monótona en $[a,b]$, además
$$|f'(x)| \leq \delta < 1.$$
Entonces
$$\sum_{a<n\leq b} e^{2\pi i f(n)} = \int_a^b e^{2\pi i f(x)}dx + O\left(\frac{1}{1-\delta}\right),$$
donde la constante en O es absoluta.

Demostración: Sin perder generalidad se puede considerar que $f'(x) \geq 0$ en $[a,b]$. Veamos la función
$$F_n(x) = e^{2\pi i f(n+x)}, \quad 0 < x < 1,$$
la que extenderemos a toda la recta periódicamente con período 1, suponiendo que
$$F_n(0) = F_n(1) = \frac{e^{2\pi i f(n)} + e^{2\pi i f(n+1)}}{2}.$$
Entonces
$$F_n(x) = \lim_{K\to\infty} \sum_{m=-K}^{K} c_m e^{2\pi i m x},$$
donde ($m \neq 0$)
$$\begin{aligned} c_m &= c_m(n) = \int_0^1 F_n(x)e^{-2\pi i m x}dx = \int_0^1 e^{2\pi i\{f(n+x)-mx\}}dx \\ &= -\frac{e^{2\pi i f(n+1)} - e^{2\pi i f(n)}}{2\pi i m} - \frac{1}{m}\int_0^1 f'(n+x)e^{2\pi i\{f(n+x)-mx\}}dx, \end{aligned}$$
$$c_0 = \int_0^1 e^{2\pi i f(n+x)}dx.$$

Notamos que

$$\begin{aligned}\sum_{m=-K,m\neq 0}^{K} c_m(n) &= \sum_{m=-K,m\neq 0}^{K} \frac{1}{m}\int_n^{n+1} f'(x)\, e^{2\pi i\{f(x)-mx\}}dx \\ &\quad -\left(e^{2\pi i f(n+1)}-e^{2\pi i f(n)}\right)\sum_{m=-K,m\neq 0}^{K}\frac{1}{2\pi i m} \\ &= \sum_{m=-K,m\neq 0}^{K} \frac{1}{m}\int_n^{n+1} f'(x)\, e^{2\pi i\{f(x)-mx\}}dx.\end{aligned}$$

Por lo tanto, cuando $x=1$

$$\frac{e^{2\pi i f(n)}+e^{2\pi i f(n+1)}}{2} = \int_0^1 e^{2\pi i f(n+x)}dx + \lim_{K\to\infty}\sum_{m=-K,m\neq 0}^{K} c_m(n)$$

$$= \int_n^{n+1} e^{2\pi i f(x)}dx - \lim_{K\to\infty}\sum_{m=-K,m\neq 0}^{K}\frac{1}{m}\int_n^{n+1} f'(x)\, e^{2\pi i\{f(x)-mx\}}dx.$$

Sumando las dos partes por n, $a<n<b$, hallamos

$$\sum_{a<n\leq b} e^{2\pi i f(n)} = \int_a^b e^{2\pi i f(x)}dx - \sum_{m\neq 0}\frac{1}{m}U_m + O(1), \tag{3}$$

donde

$$\begin{aligned} U_m &= \int_{[a]+1}^{[b]} f'(x)\, e^{2\pi i\{f(x)-mx\}}dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{[a]+1}^{[b]}\frac{f'(x)}{f'(x)-m}de^{2\pi i\{f(x)-mx\}} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{f'([b])}{f'([b])-m}e^{2\pi i\{f([b])-m([b])\}} - \frac{f'([a]+1)}{f'([a]+1)-m}e^{2\pi i\{f([a]+1)-m([a]+1)\}}\right) \\ &\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_{[a]+1}^{[b]} e^{2\pi i\{f(x)-mx\}}d\left(\frac{f'(x)}{f'(x)-m}\right).\end{aligned}$$

Ahora demostraremos que $\frac{f'(x)}{f'(x)-m}$ es monótona. Supongamos que $x>y$, entonces

$$\frac{f'(x)}{f'(x)-m}-\frac{f'(y)}{f'(y)-m} = \frac{f'(x)(f'(y)-m)-f'(y)(f'(x)-m)}{(f'(x)-m)(f'(y)-m)}$$

$$= \frac{f'(x)f'(y)-mf'(x)-f'(x)f'(y)+mf'(y)}{(f'(x)-m)(f'(y)-m)} = \frac{m(f'(y)-f'(x))}{(f'(x)-m)(f'(y)-m)}$$

Es claro que el denominador siempre es positivo y como $f'(x)$ es monótona por definición, tenemos

$$m(f'(y)-f'(x))\geq 0$$

ó

$$m\left(f'(y)-f'(x)\right)\leq 0.$$

Así obtenemos que

$$\frac{m\left(f'(y)-f'(x)\right)}{\left(f'(x)-m\right)\left(f'(y)-m\right)}\geq 0$$

ó

$$\frac{m\left(f'(y)-f'(x)\right)}{\left(f'(x)-m\right)\left(f'(y)-m\right)}\leq 0.$$

Esto quiere decir que $\frac{f'(x)}{f'(x)-m}$ también es monótona.

Ahora, como la función es monótona

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{[a]+1}^{[b]} e^{2\pi i\{f(x)-mx\}}\, d\left(\frac{f'(x)}{f'(x)-m}\right)\right| \\
\leq\ & \frac{1}{2\pi}\int_{[a]+1}^{[b]} \left|e^{2\pi i\{f(x)-mx\}}\right| \left|d\left(\frac{f'(x)}{f'(x)-m}\right)\right| \\
=\ & \frac{1}{2\pi}\int_{[a]+1}^{[b]} \left|d\left(\frac{f'(x)}{f'(x)-m}\right)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{[a]+1}^{[b]} d\left(\frac{f'(x)}{f'(x)-m}\right)\right| \\
=\ & \left|\frac{1}{2\pi}\left(\frac{f'([b])}{f'([b])-m}-\frac{f'([a]+1)}{f'([a]+1)-m}\right)\right| \leq O\left(\frac{1}{|m|-\delta}\right)
\end{aligned}$$

como

$$\left|\frac{f'(x)}{f'(x)-m}\right|\leq\frac{|f'(x)|}{|m|-|f'(x)|}\leq\frac{\delta}{|m|-\delta}.$$

Entonces

$$U_m=O\left(\frac{1}{|m|-\delta}\right).$$

Sustituyendo la última fórmula en (3) obtenemos el resultado del teorema.

La función Gamma de Euler

2.1. Definición y propiedades básicas

Definición 2.1. Sea $\{u_k\}$ una sucesión infinita de números complejos distintos de -1. Definimos

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)=\lim_{k\to\infty}\prod_{n=1}^{k}(1+u_n)=\lim_{k\to\infty}v_k=v$$

Si la sucesión de números v_k converge cuando $k\longrightarrow\infty$, hacia el número $v\neq 0$, entonces se dice que el producto infinito converge y tiene un valor igual a v.

Teorema 2.1. **[2]** Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ converge entonces tambien converge el producto $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$.

Demostración: En principio consideramos el caso cuando los números u_n son reales. Por hipótesis converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, por esto $\lim_{n\to\infty}|u_n|=0$; por lo tanto, sin perder generalidad, se puede considerar $|u_n|\leq\frac{1}{2}$, $n=1,2,3,....$ Entonces $|\log(1+u_n)|\leq 2|u_n|$, ya que

$$|\log(1+x)|\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}|x|^k\leq\sum_{k=1}^{\infty}|x|^k=\frac{|x|}{1-|x|}\leq\frac{|x|}{1-\frac{1}{2}}=2|x|.$$

De donde se deduce la convergencia de la sucesión

$$\sum_{k=1}^{n}\log(1+u_k)=\log\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)$$

y, por lo tanto, del producto $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$.

Sean ahora los u_n, números complejos arbitrarios. Es necesario demostrar que cuando $n\longrightarrow\infty$, convergen las dos sucesiones de números reales

$$|v_n|=|(1+u_1)\ldots(1+u_n)|=|1+u_1|\ldots|1+u_n|,$$

$$\arg v_n=\arg(1+u_1)\ldots(1+u_n)=\arg(1+u_1)+\ldots+\arg(1+u_n).$$

Para que la sucesión $|v_n|$ converja, es necesaria y suficiente la convergencia de la sucesión $|v_n|^2$. Pero

$$\begin{aligned}|1+u_n|^2&=|1+\alpha_n+i\beta_n|^2=1+\alpha_n^2+\beta_n^2+2\alpha_n,\\ \alpha_n&=\operatorname{Re}u_n,\qquad\beta_n=\operatorname{Im}u_n,\end{aligned}$$

y puesto que

$$\left|\alpha_n^2+\beta_n^2+2\alpha_n\right| \le |u_n|^2+2\,|u_n|\,,$$

entonces la convergencia de $|v_n|^2$ se deduce de lo demostrado. La convergencia del argumento se deduce del hecho que a partir de un n_0 suficientemente grande y $n>n_0$

$$|\arg{(1+u_n)}| = \left|\arcsin\frac{\beta_n}{\sqrt{(1+\alpha_n)^2+\beta_n^2}}\right| < \pi\,|\beta_n|\,.$$

El teorema queda demostrado.

Definición 2.2. La función Gamma de Euler $\Gamma(s)$ se define por

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{s}{n})e^{-s/n}$$

para todo $s\in\mathbb{C}$, donde $\gamma = \lim_{N\to\infty}(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\log N)$ es la constante de Euler.

Este producto converge ya que

$$\begin{aligned}\log\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{s}{n})e^{-s/n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\log(1+\frac{s}{n})e^{-s/n}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\log\left(1+\frac{s}{n}\right)-\frac{s}{n}\right).\end{aligned}$$

Teorema 2.2. **[9]** (Fórmula de Euler). Tiene lugar la igualdad

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}.$$

Demostración: Usando la definición de $\Gamma\,(s)$ y tomando en cuenta que

$$e^{s(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}-\log m)}\prod_{n=1}^{m}e^{-\frac{s}{n}} = e^{-s\log m} = e^{\log m^{-s}} = m^{-s},$$

$$\prod_{n=1}^{m-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s} = \left((2)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{4}\right)...\left(\frac{m}{m-1}\right)\right)^{-s} = m^{-s}.$$

Tomamos límite de la definición

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s\lim_{m\longrightarrow\infty}e^{s(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}-\log m)}\lim_{m\longrightarrow\infty}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}}$$

$$= s\lim_{m\longrightarrow\infty}m^{-s}\prod_{n=1}^{m}(1+\frac{s}{n}) = s\lim_{m\longrightarrow\infty}\prod_{n=1}^{m-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{s}{n}\right)$$

$$= s \lim_{m \longrightarrow \infty} \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} \left(1 + \frac{s}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{s}$$

$$= s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} \left(1 + \frac{s}{n}\right).$$

Teorema 2.3. [2] (Ecuación funciónal de la función Gamma). Tiene lugar la igualdad

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Demostración:

$$\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)} = \frac{s}{s+1} \lim_{m \longrightarrow \infty} \prod_{n=1}^{m} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s+1} \left(1+\frac{s+1}{n}\right)^{-1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{s} \left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}}$$

$$= \frac{s}{s+1} \lim_{m \longrightarrow \infty} \prod_{n=1}^{m} \frac{n+1}{n} \frac{n+s}{n+s+1} = \frac{s}{s+1} \lim_{m \longrightarrow \infty} \frac{(m+1)(s+1)}{m+s+1} = s.$$

Definición 2.3. La función $f(s)$, analítica en toda parte finita del s-plano, se denomina entera.

Teorema 2.4. [2] (Teorema de Hadamard). Si $f(z)$ es una función entera finita con un orden ρ, entonces ésta admite una factorización

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{a_n}) e^{-h_n(z)},$$

donde $g(z)$ es un polimonio de grado q, $q \leq \rho$, $m \geq 0$, donde a_n son todos los raices de la función $f(z)$,

$$h_n(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + ... + \frac{z^{p_n}}{p_n a_n^{p_n}}$$

y p_n es una suseción de los números enteros tal que para todo $r > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{1+p_n}$ converge.

Lema 2.1. [4] Tiene lugar la siguiente igualdad

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Demostración: Usando la definición y el Teorema 2.3 obtenemos lo siguiente

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{s}{\Gamma(s+1)} = s e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{s}{n}) e^{-s/n},$$

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)} = e^{-\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{s}{n}) e^{s/n},$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} &= (se^{\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{s}{n})e^{-s/n})(e^{-\gamma s}\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{s}{n})e^{s/n}) \\ &= s\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{s^2}{n^2}).\end{aligned}$$

Falta desarrollar $\sin \pi s$ en un producto infinito. Este resultado es una aplicación del teorema de Hadamard para las funciónes enteras (las funciónes analíticas definidas en todo el plano complejo) (véase [3]).

Sabemos que los ceros de $\sin z$ son $0, -\pi, \pi, -2\pi, 2\pi, ..., -n\pi, n\pi, ...$. Además la serie

$$\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}+...+\frac{1}{n\pi}+\frac{1}{n\pi}+...$$

diverge cuando la serie

$$\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{\pi^2}+...+\frac{1}{(n\pi)^2}+\frac{1}{(n\pi)^2}+...$$

converge. Entonces el desarrollo es el siguiente

$$\begin{aligned}\sin z &= e^{g(z)}z\prod_{1}^{\infty}\left(\left[\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)e^{\frac{z}{n\pi}}\right]\left[\left(1+\frac{z}{n\pi}\right)e^{-\frac{z}{n\pi}}\right]\right) \\ &= e^{g(z)}z\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).\end{aligned}$$

Como el orden de $\sin z$ es 1, entonces por el teorema de Hadamard $g(z)$ es un polinomio de grado no mayor que 1, es decir

$$g(z) = A_0 + A_1 z.$$

Para determinar los coeficientes A_0 y A_1 debemos notar que

$$e^{g(z)} = \frac{\sin z}{z\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)}$$

es una función par y entonces $e^{A_0+A_1 z} = e^{A_0-A_1 z}$, de donde $e^{2A_1 z} = 1$ y por consiguente $A_1 = 0$. Ahora, tomando límite cuando $z \longrightarrow 0$ obtenemos $e^{A_0} = 1$, entonces $A_0 = 0$ y $e^{g(z)} = 1$. Finalmente

$$\sin z = z\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}),$$

haciendo $z = \pi s$ nos da

$$\sin \pi s = \pi s\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{s^2}{n^2}).$$

Entonces

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} = \frac{\sin \pi s}{\pi},$$

y

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Esta propiedad tiene una consecuencia directa, si hacemos $s = \frac{1}{2}$ y lo sustituimos en la fórmula anterior nos da

$$\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1-\frac{1}{2}) = \Gamma^2(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi,$$

y

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

2.2. Fórmula integral de la función Gamma

Así se llama la afirmación del teorema siguiente:

Teorema 2.5. **[2]** (La fórmula integral de la función Gamma). Para $x = \text{Re } s > 0$ se cumple

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt.$$

Demostración: Observemos que la integral converge absolutamente en la región $x = \text{Re } s > 0$. Sea $s = x + iy$,

$$\begin{aligned} t^{s-1} &= t^{x-1+iy} = e^{(x-1+iy)\log t}, \\ \left|e^{-t}t^{s-1}\right| &= e^{-t+(x-1)\log t} = e^{-t}t^{x-1}. \end{aligned}$$

Cuando $t \longrightarrow \infty$ la integral converge por el término e^{-t} y cuando $t \longrightarrow 0$ la función integrante se comporta como t^{x-1}, de esta forma si $x > 0$ la integral va a converger. Ahora analicemos la función

$$f_n(s) = \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{s-1} dt,$$

denotamos $\tau = \frac{t}{n}$ y aplicamos la fórmula de integración por partes

$$\begin{aligned} f_n(s) &= \int_0^1 (1-\tau)^n (\tau n)^{s-1} d\tau n = n^s \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{s-1} d\tau = \\ &= \frac{n^s}{s} n \int_0^1 (1-\tau)^{n-1} \tau^s d\tau \\ &= \frac{n^s}{s(s+1)} n(n-1) \int_0^1 (1-\tau)^{n-2} \tau^{s+1} d\tau. \end{aligned}$$

Repitiendo este proceso hasta que el término $(1-\tau)$ desaparece, obtenemos

$$\begin{aligned} f_n(s) &= \frac{n^s n!}{s(s+1)...(s+n-1)} \int_0^1 \tau^{s+n-1} d\tau \\ &= \frac{n^s n!}{s(s+1)...(s+n-1)(s+n)}, \end{aligned}$$

$$n!s \prod_{k=1}^{n} \Big(1+\frac{s}{k}\Big) = s(s+1)...(s+n),$$

$$f_n(s) = \frac{e^{s\log n}}{s\prod\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{s}{k})}.$$

Multiplicando el numerador y denominador por

$$e^{-s\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} = \prod_{k=1}^{n} e^{-s/k}$$

nos queda lo siguiente

$$f_n(s) = \frac{e^{-s(\log n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k})}}{s\prod\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{s}{k})e^{-s/k}},$$

tomando el límite cuando $n \longrightarrow \infty$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(s) = \frac{1}{se^{\gamma s}\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+\frac{s}{k})e^{-s/k}} = \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \Gamma(s).$$

Por otro lado $(1-\frac{t}{n})^n \longrightarrow e^{-t}$ cuando $n \longrightarrow \infty$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(s) = \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{s-1}dt = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt.$$

Lema 2.2. Tiene lugar la siguiente igualdad

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$$

Demostración: Sustituimos en la fórmula integral.

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t}dt = -e^{-t}|_0^\infty = 1, \\ \Gamma(2) &= \int_0^\infty e^{-t}tdt = -te^{-t}|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}dt = 1. \end{aligned}$$

La convergencia a cero del término integrado cuando $t \longrightarrow \infty$ se debe a e^{-t}.

La función zeta de Riemann

3.1. Definición y propiedades básicas

Definición 3.1. Sean $s = \sigma + it$, $\sigma \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R}$ y $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$. Entonces

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

se llama la función ζ de Riemann.

Esta serie converge absolutamente en la región $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$. En efecto, puesto que

$$\begin{aligned} n^{it} &= e^{it\log n} = \cos(t\log n) + i\sin(t\log n), \\ n^{\sigma+it} &= n^{\sigma}n^{it} = n^{\sigma}e^{it\log n} = n^{\sigma}(\cos(t\log n) + i\sin(t\log n)), \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} &\left|n^{\sigma}e^{it\log n}\right| = |n^{\sigma}(\cos(t\log n) + i\sin(t\log n))| = \\ &= \sqrt{n^{2\sigma}(\cos^2(t\log n) + \sin^2(t\log n))} = \sqrt{n^{2\sigma}} = n^{\sigma}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^s}\right| &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma}} \leq 1 + \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\sigma}} = 1 + \left(\frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right)\Big|_1^{\infty} \\ &= 1 - \frac{1}{1-\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma-1}. \end{aligned}$$

De aquí la importancia de $\sigma > 1$, así $1-\sigma < 0$ y por lo tanto $x^{1-\sigma} \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow \infty$.

Lema 3.1. **[5]** (Identidad de Euler). Para $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$, se cumple la siguiente identidad

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \prod_{p}^{\infty}(1 - \frac{1}{p^s})^{-1},$$

donde el producto está tomado sobre todos los números primos.

Demostración: Sea $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$, tenemos

$$\begin{aligned} &\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s} = \prod_{p}\sum_{k\geq 0}(p^{-s})^k \\ = &\left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + ...\right)\left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + ...\right) \\ &\left(1 + \frac{1}{(p-1)^s} + \frac{1}{(p-1)^{2s}} + ...\right)\left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + ...\right). \end{aligned}$$

Para cada primo p, $\sum_{k\geq 0}(p^{-s})^k$ es una serie geométrica convergente para cualquier s con $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$. Sea $p^{-s} = q$ con $|q| < 1$, entonces

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = (1-q)(1+q+q^2+q^3+...+q^n) = 1-q^{n+1},$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

De aquí la importancia de $|q| < 1$. Si tomamos límite cuando $n \longrightarrow \infty$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Cambiando q por p^{-s}, nos queda

$$\sum_{k=0}^{\infty}(p^{-s})^k = \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Sustituyendo este resultado completamos la demostración

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right) = \prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Lema 3.2. **[6]** En la región $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$, tiene lugar la siguiente fórmula

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda(k)}{k^s}.$$

Note que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda(k)}{k^s}$ converge absolutamente en la región necesaria, ya que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda(k)}{k^s} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\Lambda(k)}{k^s}\right| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^\varepsilon}{n^\sigma} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma-\varepsilon}}.$$

Siempre podemos escoger un $\varepsilon > o$ tal que $\sigma - \varepsilon > 1$ así demostramos que la serie converge absolutamente.

Demostración: Calculemos la derivada de $\zeta(s)$,

$$n^{-s} = e^{\log n^{-s}} = e^{-s\log n},$$

$$\frac{d}{ds}(n^{-s}) = (-\log n)e^{-s\log n} = (-\log n)n^{-s} = -\frac{\log n}{n^s},$$

entonces

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)}{n^s}.$$

Queremos demostrar que

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Lambda(k)}{k^s}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Lambda(k)}{(mk)^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^s}.$$

Si $n = mk$, la fórmula queda demostrada porque

$$\sum_{k/n}\Lambda(k)=\log n.$$

Lema 3.3. **[3]** La función $\zeta(s)$ no se anula cuando $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$.

Demostración: Para poder demostrar el lema necesitamos el recíproco de la función $\zeta(s)$. Este puede ser expresado mediante una serie de Dirichlet sobre la función de Möbius $\mu(n)$, definido para cualquier número complejo s con $\sigma > 1$

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}.$$

De esta forma tenemos

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}\le 1+\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^\sigma}=\\ &= 1+\left(\frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right)\Bigg|_1^{\infty}=1-\frac{1}{1-\sigma}=\frac{1-\sigma-1}{1-\sigma}=\frac{\sigma}{\sigma-1},\end{aligned}$$

$$|\zeta(s)|\ge\frac{\sigma-1}{\sigma}=1-\frac{1}{\sigma}>0.$$

Teorema 3.1. **[6]** Sea $N \ge 1$ un entero fijo. Si $\operatorname{Re} s > 0$, entonces la función $\zeta(s)$ se puede representar de la siguiente forma

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\frac{N^{1-s}}{s-1}-\frac{N^{-s}}{2}+s\int_N^{\infty}\frac{\rho(x)}{x^{s+1}}dx.$$

Demostración:

$$\zeta(s)-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}=\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

Usamos la fórmula de sumación de Euler. Sea $M > N$ y $f(x) = \frac{1}{x^s}$ la función continuamente diferenciable en $[N, M]$, entonces tiene lugar la igualdad

$$\sum_{N<n\le M}\frac{1}{n^s}=\int_N^M\frac{dx}{x^s}+\rho(M)f(M)-\rho(N)f(N)-\int_N^M\rho(x)f'(x)dx,$$

$$\rho(M)=\rho(N)=\frac{1}{2},$$

$$\int_N^M \frac{dx}{x^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s}|_N^M = \frac{M^{1-s}}{1-s} - \frac{N^{1-s}}{1-s},$$

$$f'(x) = -\frac{s}{x^{s+1}}.$$

Sustituyendo en la fórmula

$$\sum_{N<n\leq M} \frac{1}{n^s} = \frac{M^{1-s}}{1-s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} + \frac{1}{2}M^{-s} - \frac{1}{2}N^{-s} + s\int_N^M \frac{\rho(x)}{x^{s+1}}dx.$$

Ahora, tomamos límite $M \longrightarrow \infty$

$$\lim_{M\longrightarrow\infty} \sum_{n=N+1}^{M} \frac{1}{n^s} = \lim_{M\longrightarrow\infty}(\frac{M^{1-s}}{1-s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} + \frac{1}{2}M^{-s} - \frac{1}{2}N^{-s} + s\int_N^M \frac{\rho(x)}{x^{s+1}}dx),$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}N^{-s} + s\int_N^\infty \frac{\rho(x)}{x^{s+1}}dx.$$

Teorema 3.2. **[9]** Sea $N \geq 1$ un entero fijo. Si $\operatorname{Re} s > 1$, entonces la función $\zeta(s)$ se puede representar de la siguiente forma

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{N^{-s}}{2} + s(s+1)\int_N^\infty \frac{\sigma(x)}{x^{s+2}}dx,$$

donde

$$\sigma(x) = \int_0^x \rho(t)\,dt.$$

Demostración: Sea $M > N$ y $f(x) = \frac{1}{x^s}$ una función continuamente diferenciable en $[N, M]$ .Entonces tiene lugar la igualdad

$$\sum_{N<n\leq M} f(n) = \int_N^M f(x)dx + \rho(M)f(M) - \rho(N)f(N) - \int_N^M \rho(u)f'(u)du$$

Integrando por partes la última integral obtenemos

$$\int_N^M \rho(u)f'(u)du = -\sigma(M)f'(M) + \sigma(N)f'(N) + \int_N^M \sigma(x)f''(x)dx.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{N<n\leq M} f(n) &= \int_N^M f(x)dx + \rho(M)f(M) - \rho(N)f(N) \\ &\quad -\sigma(M)f'(M) + \sigma(N)f'(N) + \int_N^M \sigma(x)f''(x)dx, \end{aligned} \quad (4)$$

donde

$$\begin{aligned}
\sigma(M) &= \int_0^M \rho(x)dx = \int_0^M (\frac{1}{2} - x + [x])dx = \\
&= (\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2})|_0^M + \frac{M(M-1)}{2} \\
&= \frac{M}{2} - \frac{M^2}{2} + \frac{M^2}{2} - \frac{M}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Tenemos

$$\rho(M) = \rho(N) = \frac{1}{2},$$

$$f''(x) = s(s+1)\frac{1}{x^{s+2}},$$

y

$$\int_N^M \frac{dx}{x^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s}|_N^M = \frac{M^{1-s}}{1-s} - \frac{N^{1-s}}{1-s}.$$

Sustituyendo en la fórmula (4) obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{N<n\leq M} \frac{1}{n^s} &= \frac{M^{1-s}}{1-s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} + \frac{1}{2}M^{-s} \\
&\quad -\frac{1}{2}N^{-s} + s(s+1)\int_N^M \frac{\sigma(x)}{x^{s+2}}dx.
\end{aligned}$$

Ahora, tomamos límite $M \longrightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{M\longrightarrow\infty} \sum_{n=N+1}^{M} \frac{1}{n^s} &= \lim_{M\longrightarrow\infty} (\frac{M^{1-s}}{1-s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} + \frac{1}{2}M^{-s} \\
&\quad -\frac{1}{2}N^{-s} + s(s+1)\int_N^M \frac{\sigma(x)}{x^{s+2}}dx),
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{N^{-s}}{2} + s(s+1)\int_N^\infty \frac{\sigma(x)}{x^{s+2}}dx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}\frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{N^{-s}}{2} + s(s+1)\int_N^\infty \frac{\sigma(x)}{x^{s+2}}dx.$$

3.2. Ecuación funciónal de la función zeta de Riemann

Vamos a usar la siguiente afirmación.

Lema 3.4. **[3]** Sea $x > 0$, α real, y

$$\theta(x,\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi x(n+\alpha)^2}.$$

Entonces

$$\theta(\frac{1}{x},\alpha) = \sqrt{x}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x + 2\pi i n\alpha}.$$

El resultado principal de esta sección es el siguiente

Teorema 3.3. **[5]** La función

$$\xi(s) = s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

satisface la relación

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Demostración. Para $\operatorname{Re} s > 0$, está definida la forma integral de la función gamma

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{s}{2}-1} dt.$$

Hacemos cambio de variable $t = \pi n^2 x$ y sustituimos en la integral

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 x}(\pi n^2 x)^{\frac{s}{2}-1}\pi n^2 dx = \pi^{\frac{s}{2}} n^s \int_0^\infty e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{s}{2}-1} dx,$$

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\frac{1}{n^s} = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{s}{2}-1} dx.$$

Tomando $\operatorname{Re} s > 1$ y sumando sobre todos los números naturales, tenemos

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{s}{2}-1} dx \\ &= \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}\right) x^{\frac{s}{2}-1} dx. \end{aligned}$$

Sea

$$\varpi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x},$$

entonces

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \int_0^\infty \varpi(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx = \\ &= \int_0^1 \varpi(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx + \int_1^\infty \varpi(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx \\ &= I + \int_1^\infty \varpi(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx. \end{aligned}$$

Usando Lema 3.4 con $\alpha = 0$, tenemos

$$\theta(\frac{1}{y}, 0) = \sqrt{y} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 y}.$$

Como

$$\theta(y, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi y n^2} = 1 + 2\varpi(y).$$

Entonces

$$1 + 2\varpi(\frac{1}{y}) = \sqrt{y}\left(1 + 2\varpi(y)\right).$$

De donde

$$\varpi(\frac{1}{y}) = \frac{\sqrt{y} - 1}{2} + \sqrt{y}\varpi(y).$$

Cambiando variable de integración $x = \frac{1}{y}$ en la integral

$$I = \int_0^1 \varpi(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx,$$

entonces

$$x^{\frac{s}{2}-1} = \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{s}{2}-1} = y^{1-\frac{s}{2}},$$

$$dx = d\left(\frac{1}{y}\right) = -y^{-2} dy$$

y

$$\varpi(x) = \varpi(\frac{1}{y}) = \frac{\sqrt{y} - 1}{2} + \sqrt{y}\varpi(y)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \varpi(x) x^{\frac{s}{2}-1} dx = \int_1^{\infty} \left(\frac{\sqrt{y} - 1}{2} + \sqrt{y}\varpi(y)\right) y^{-1-\frac{s}{2}} dy = \\ &= \frac{1}{2}\int_1^{\infty} (y^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} - y^{-1-\frac{s}{2}}) dy + \int_1^{\infty} y^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \varpi(y) dy = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{y^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}}{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} + \frac{y^{-\frac{s}{2}}}{\frac{s}{2}}\right)\Big|_1^{\infty} + \int_1^{\infty} y^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \varpi(y) dy = \\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^{\infty} y^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \varpi(y) dy \\ &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} y^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \varpi(y) dy. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} x^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \varpi(x) dx + \int_1^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \varpi(x) dx \\ &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} \left(x^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} + x^{\frac{s}{2}-1}\right) \varpi(x) dx. \end{aligned}$$

Denotando
$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\frac{1}{s(s-1)}\xi(s)$$
obtenemos la relación
$$\frac{1}{s(s-1)}\xi(s)=\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^{\infty}\left(x^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}+x^{\frac{s}{2}-1}\right)\varpi(x)dx,$$
de donde
$$\xi(s)=1+s(s-1)\int_1^{\infty}\left(x^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}+x^{\frac{s}{2}-1}\right)\varpi(x)dx.$$
Notamos que esta expresión es invariante bajo la transfomación $s\to 1-s$, es decir,
$$\begin{aligned}\xi(1-s) &= 1+(1-s)(-s)\int_1^{\infty}\left(x^{-\frac{1}{2}-\frac{1-s}{2}}+x^{\frac{1-s}{2}-1}\right)\varpi(x)dx= \\ &= 1+s(s-1)\int_1^{\infty}\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}\right)\varpi(x)dx=\xi(s).\end{aligned}$$
El teorema esta demostrado.

Del Teorema 3.3 se sigue la ecuación funciónal para la función ζ de Riemann
$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s). \tag{5}$$
En realidad, ya que $\xi(s)=\xi(1-s)$, tenemos
$$\begin{aligned} & s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \\ = & \ \xi(s)=\xi(1-s) \\ = & \ (1-s)(-s)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) \\ = & \ s(s-1)\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).\end{aligned}$$

3.3. Teoremas acerca de los ceros no triviales de $\zeta(s)$

De la ecuación funciónal para la función ζ de Riemann (5) vemos que,
$$\zeta(s)=\frac{\pi^{s-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$
Entonces, cuando $s=-2,-4,...,-2n,...$ la función $\zeta(s)=0$, ya que $\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}=0$. Cuando $s=0$ la función zeta es distinta de cero ya que cero de la función $\frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})}$ se

cancela por el polo de la función $\zeta\,(1-s)$. Los ceros señalados $-2,-4,...,-2n,...$ se llaman triviales. Ademas de los ceros triviales, la función zeta tiene infinitos ceros no triviales, que se encuentran en la zona (zona crítica) $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$.

Teorema 3.4. [9] La función $\xi(s)$ es una función entera de primer orden, que tiene una infinidad de ceros ρ_n tales que, $0 \leq \operatorname{Re}\,\rho_n \leq 1$; la serie $\sum |\rho_n|^{-1}$ diverge, y la serie $\sum |\rho_n|^{-1-\varepsilon}$ converge para cualquier $\varepsilon > 0$. Los ceros de $\xi(s)$ son ceros no triviales de $\zeta(s)$.

Demostración: Cuando $\operatorname{Re} s > 1$, la función zeta, y por lo tanto, $\xi(s)$ no tiene ceros; de la ecuación funciónal se deduce que $\xi(s) \neq 0$ también cuando $\operatorname{Re} s < 0$. Ya que $\xi(s) = \xi(1) \neq 0$, los ceros de $\xi(s)$ serán solo los ceros no triviales de $\zeta(s)$.

Calculemos el orden de $\xi(s)$. Para esto estimemos $|\zeta(s)|$ cuando $|s| \longrightarrow \infty$. Cuando $\operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2}$ por Teorema 3.1 se deduce que,

$$|\zeta(s)| = \left|\sum_{n=1}^{N} n^{-s} + \frac{1}{s-1}N^{1-s} - \frac{1}{2}N^{-s} + s\int_N^\infty \frac{\rho(x)}{x^{s+1}}dx\right|$$

$$\leq \quad \sum_{n=1}^{N} n^{-\operatorname{Re} s} + \frac{1}{|s-1|}N^{1-\operatorname{Re} s} + \frac{1}{2}N^{-\operatorname{Re} s} + \frac{1}{2}s\int_N^\infty x^{-\frac{3}{2}}dx \leq C\,|s|\,.$$

Esto es

$$\zeta(s) = O(|s|).$$

Ya que

$$|\Gamma(s)| \leq e^{c|s|\log|s|},$$

el orden de $\xi(s)$ no es mayor que primero. Pero cuando $s \longrightarrow +\infty$

$$\log\Gamma(s) \backsim s\log s,$$

el orden de $\xi(s)$ es igual a la unidad. De un teorema demostrado anteriormente se deduce que la serie

$$\sum |\rho_n|^{-1}$$

donde ρ_n son los ceros de $\xi(s)$, diverge, y por lo tanto, $\xi(s)$ tiene una infinidad de ceros, y la serie

$$\sum |\rho_n|^{-1-\varepsilon}$$

converge para cualquier $\varepsilon > 0$, lo que demuestra el teorema.

Corolario 3.1. Tiene validez la fórmula

$$\xi(s) = e^{A+Bs}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{\rho_n}\right)e^{\frac{s}{\rho_n}}.$$

Corolario 3.2. Los ceros no triviales de la función zeta están distribuidos simétricamente con la relación a las rectas $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{Im} s = 0$. Numeraremos los ceros no triviales de la función zeta según el orden creciente de la magnitud absoluta de sus partes imaginarias. Cuando sean iguales las magnitudes absolutas de sus partes imaginarias, en orden arbitrario.

Teorema 3.5. **[9]** Tiene lugar la igualdad

$$\begin{aligned}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= -\left(\frac{1}{s-1}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right)\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right)+B_0\end{aligned}$$

para todos $s\neq\rho_n$, y $s\neq -2n$, donde ρ_n son todos los ceros no triviales de $\zeta(s)$, y B_0 es una constante absoluta.

Demostración: Sea s distinto de las raices ρ_n y ceros triviales $-2n$, de la función $\zeta(s)$. Como

$$\zeta(s)=\frac{1}{s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\xi(s).$$

Tomando logaritmo de ambas partes en la ecuación del corolario anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}\log\zeta(s) &= \log\left(\frac{1}{s(s-1)}\right)+\log\left(\frac{1}{\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\right)+\log\xi(s)\\ &= -\log\left(s(s-1)\right)+\log\left(\frac{1}{\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\right)+A\\ &+Bs+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log\left(1-\frac{s}{\rho_n}\right)+\frac{s}{\rho_n}\right)\end{aligned}$$

donde la serie converge uniformamente. Derivando la última fórmula obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= B+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right)-\frac{1}{s}\\ &-\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}\log\left(\pi\right)-\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Por Teorema 2.2

$$\log\Gamma(\frac{s}{2})=\log\frac{2}{s}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{s}{2}}-\log\left(1+\frac{s}{2n}\right)\right).$$

Derivando

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} &= -\frac{1}{s}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2n}\right)\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+s}\right).\end{aligned}$$

De donde obtenemos resultado con

$$B_0 = -\frac{1}{2}\log(\pi) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n}\right) + B.$$

El teorema esta demostrado.

Teorema 3.6. [**5**] Sean $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$, $n = 1, 2, ...,$ todos los ceros no triviales de $\zeta(s)$, $T \geq 2$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2} \leq c\log T.$$

Demostración: Sea $s = 2 + iT$. Entonces

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right)\right| \leq \sum_{n\leq T}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\right) + \sum_{n>T}\frac{|s|}{4n^2} \leq \log T + 1$$

y, por lo tanto

$$\begin{aligned}
&-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \\
= \quad & \operatorname{Re}\left(\frac{1}{s-1} - B_0 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right)\right) \\
\leq \quad & c_1\log T - \operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right).
\end{aligned}$$

Ya que

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{2+iT}}\right| < c_2,$$

entonces

$$\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) \leq c_3\log T.$$

Sustituimos $s = 2 + iT$ y $\rho_n = \beta_n + i\gamma_n$, y luego tomamos parte real

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2+iT-\beta_n-i\gamma_n} + \frac{1}{2-iT-\beta_n+i\gamma_n} + \frac{1}{\beta_n+i\gamma_n} + \frac{1}{\beta_n-i\gamma_n}\right) \\
\leq \quad & c_3\log T.
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2-\beta_n}{(2-\beta_n)^2 + (T-\gamma_n)^2} + \frac{\beta_n}{\beta_n^2+\gamma_n^2}\right) \leq c_3\log T.$$

Como $0 < \beta_n < 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2} &\leq 4\frac{2-\beta_n}{(2-\beta_n)^2+(T-\gamma_n)^2} \\
&\leq 4\left(\frac{2-\beta_n}{(2-\beta_n)^2+(T-\gamma_n)^2}+\frac{\beta_n}{\beta_n^2+\gamma_n^2}\right).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2} &\leq 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2-\beta_n}{(2-\beta_n)^2+(T-\gamma_n)^2}+\frac{\beta_n}{\beta_n^2+\gamma_n^2}\right) \\
&\leq 4c_3\log T = c\log T.
\end{aligned}$$

Corolario 3.3. El número de ceros ρ_n de la función zeta para los cuales $T \leq |\mathrm{Im}\,\rho_n| \leq T+1$, no sobrepasa a $c_4\log T$.

Demostración: Por Teorema 3.4

$$N = \int_{\mathcal{C}}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}ds = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathcal{C}}\frac{1}{s-\rho_n}ds \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2} \leq c\log T,$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \{s=x+iy : 0<x<1, y=T-1\} \\
&\quad \cup\{s=x+iy : 0<x<1, y=T+2\} \\
&\quad \cup\{s=x+iy : x=1, T-1<y<T+2\} \\
&\quad \cup\{s=x+iy : x=0, T-1<y<T+2\}.
\end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{C}}\frac{1}{s-\rho_n}ds \\
&= \int_0^1\frac{1}{x+i(T-1)-\beta_n-i\gamma_n}dx-\int_0^1\frac{1}{x+i(T+2)-\beta_n-i\gamma_n}dx \\
&\quad +\int_{T-1}^{T+2}\frac{1}{1+iy-\beta_n-i\gamma_n}dy-\int_{T-1}^{T+2}\frac{1}{iy-\beta_n-i\gamma_n}dy \\
&= i\int_0^1\frac{dx}{(x+i(T-1)-\beta_n-i\gamma_n)(x+i(T+2)-\beta_n-i\gamma_n)} \\
&\quad +\int_{T-1}^{T+2}\frac{1}{(1+iy-\beta_n-i\gamma_n)(iy-\beta_n-i\gamma_n)}dy.
\end{aligned}$$

Luego para $0<x<1$

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{(x+i(T-1)-\beta_n-i\gamma_n)(x+i(T+2)-\beta_n-i\gamma_n)}\right| \\
&\leq \frac{3}{(T-1-\gamma_n)(T+2-\gamma_n)} \\
&\leq \frac{3}{3(T-1-\gamma_n)+(T-1-\gamma_n)^2} \leq \frac{3}{1+(T-1-\gamma_n)^2}
\end{aligned}$$

y similarmente para $T-1<y<T+2$

$$\left|\frac{1}{(1+iy-\beta_n-i\gamma_n)\,(iy-\beta_n-i\gamma_n)}\right| \le \frac{C}{1+(T-1-\gamma_n)^2}.$$

Entonces por Teorema 3.6

$$\begin{aligned} N &\le \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 dx \frac{3}{1+(T-1-\gamma_n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_T^{T+1} \frac{3dy}{1+(T-1-\gamma_n)^2} \\ &\le 6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(T-1-\gamma_n)^2} \le 6c\log(T-1) \le c_4\log(T). \end{aligned}$$

Corolario 3.4. Cuando $T\ge 2$ es justa la estimación

$$\sum_{|T-\gamma_n|>1}\frac{1}{(T-\gamma_n)^2} = O(\log T).$$

Demostración: Por Teorema 3.6

$$\begin{aligned} \sum_{|T-\gamma_n|>1}\frac{1}{(T-\gamma_n)^2} &\le 2\sum_{|T-\gamma_n|>1}\frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2} \\ &\le 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(T-\gamma_n)^2} \le 2c\log T. \end{aligned}$$

Corolario 3.5. Cuando $-1\le\sigma\le 2$, $s=\sigma+it$, $|t|\ge 2$,

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|t-\gamma_n|\le 1}\frac{1}{s-\rho_n} + O(\log|t|),$$

además, la suma se lleva a cabo por los ceros ρ_n de la función $\zeta(s)$, para los cuales $|t-\operatorname{Im}\rho_n|\le 1$.

Demostración: Para $s=\sigma+it$, $|t|\ge 2$, $-1\le\sigma\le 2$, tenemos

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2n}\right)\right| \le \sum_{n\le|t|+2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right) + \sum_{n>|t|+2}\frac{|s|}{n^2} = O(\log|t|).$$

Por lo tanto usando Teorema 3.5 obtenemos

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right) + O(\log|t|).$$

Tomamos esta fórmula para $s=2+it$

$$\frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2+it-\rho_n}+\frac{1}{\rho_n}\right) + O(\log|t|).$$

Restemos dos fórmulas anteriores

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s-\rho_n} - \frac{1}{2+it-\rho_n} \right) + \frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)} + O\left(\log|t|\right).$$

Si $|\gamma_n - t| > 1$, entonces

$$\left| \frac{1}{\sigma+it-\rho_n} - \frac{1}{2+it-\rho_n} \right| \leq \frac{2-\sigma}{\left(\gamma_n - t\right)^2} \leq \frac{3}{\left(\gamma_n - t\right)^2}$$

Ademas por Corolario 3.3 el número de ceros ρ_n de la función zeta para los cuales $t-1 \leq |\mathrm{Im}\,\rho_n| \leq t+1$, no sobrepasa a $c_4 \log|t|$. Por lo tanto

$$\left| \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1} \frac{1}{2+it-\rho_n} \right| \leq \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1} \frac{1}{2-\beta_n} \leq \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1} 1 \leq c_4 \log|t|$$

y por corolario 3.4

$$\sum_{|t-\gamma_n|>1} \frac{1}{\left(t-\gamma_n\right)^2} = O\left(\log|t|\right).$$

Tambien $2+it$ esta fuera de los ceros de la función zeta de Riemann y la función $\zeta'(2+it)$ esta acotada, entonces

$$\frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)} = O\left(1\right) = O\left(\log|t|\right).$$

La confirmación ahora se deduce como

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1} \frac{1}{s-\rho_n} - \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1} \frac{1}{2+it-\rho_n} \\ &\quad +3 \sum_{|t-\gamma_n|>1} \frac{1}{\left(\gamma_n - t\right)^2} + \frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)} + O\left(\log|t|\right) \\ &= \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1} \frac{1}{s-\rho_n} + O\left(\log|t|\right). \end{aligned}$$

El corolario esta demostrado.

Teorema 3.7. **[12]** (Ch. J. La Vallee Poussin). Existe $c > 0$ tal que en la region de $s-$plano

$$\mathrm{Re}\, s = \sigma \geq 1 - \frac{c}{\log\left(|t|+2\right)}$$

no hay ceros de la función zeta.

Demostración: Demostremos inicialmente que para cualquier $\gamma_0 > 0$ se encuentra la constante positiva $c_0 = c_0(\gamma_0)$ tal que, si ρ es un cero de la función zeta, $\rho = \beta + i\gamma$, $|\gamma| \geq \gamma_0$, entonces

$$\beta \leq 1 - \frac{c_0}{\log(|\gamma| + 2)}.$$

Sea φ real, entonces

$$3 + 4\cos\varphi + \cos 2\varphi = 2(1 + \cos\varphi)^2 \geq 0.$$

Cuando $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} e^{-it\log n}$$

y, por lo tanto,

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} \cos(t\log n).$$

De aquí

$$3\left(-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\right) + 4\left(-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right) + \left(-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma+i2t)}{\zeta(\sigma+i2t)}\right) \geq 0. \tag{6}$$

Del Teorema 3.5 para $s \neq \rho$, donde ρ es cero de $\zeta(s)$,

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \frac{1}{s-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right) - B. \end{aligned}$$

Por esto cuando $1 < \sigma \leq 2$ existe una constante absoluta $B_1 > 0$ tal que

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma - 1} + B_1. \tag{7}$$

Cuando $|t| \geq t_0 > 0$ y $1 < \sigma \leq 2$ existe $A = A(t_0) > 0$, tal que

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} < A\log(|t| + 2) - \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right).$$

Por otro lado, si $\zeta(\rho) = 0$, entonces $\operatorname{Re}\rho = \beta \leq 1$ y para $\operatorname{Re} s > 1$

$$\operatorname{Re}\frac{1}{s-\rho} = \operatorname{Re}\frac{1}{\sigma - \beta + i(t-\gamma)} = \frac{\sigma - \beta}{(\sigma-\beta)^2 + (t-\gamma)^2} > 0.$$

Sea $t = \gamma$ la ordenada del cero ρ. Entonces

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} &< A\log(|t|+2) - \frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} \\ &= A\log(|t|+2) - \frac{1}{\sigma-\beta} \qquad (8) \end{aligned}$$

y

$$-\operatorname{Re}\frac{\zeta'(\sigma+i2t)}{\zeta(\sigma+i2t)} < A\log(|t|+2). \qquad (9)$$

Sustituyendo las estimaciones (7), (8) y (9) en desigualdad (6), encontramos

$$\begin{aligned} &3\left(\frac{1}{\sigma-1}+B_1\right)+4\left(A\log(|t|+2)-\frac{1}{\sigma-\beta}\right) \\ &+A\log(|t|+2) \geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{3}{\sigma-1}+5A\log(|t|+2)-\frac{4}{\sigma-\beta}+3B_1 \geq 0.$$

De donde

$$\frac{3}{\sigma-1}+A_1\log(|t|+2)-\frac{4}{\sigma-\beta} \geq 0,$$

con $A_1 = 5A + 3B_1 > 0$. Si ahora en la desigualdad anterior tomamos

$$\sigma = 1 + \frac{c_1}{\log(|t|+2)},$$

obtenemos

$$\beta \leq 1 - \left(\frac{4}{3+A_1c_1}-1\right)c_1\frac{1}{\log(|t|+2)},$$

de la última desigualdad obtenemos

$$\beta \leq 1 - \frac{c_0}{\log(|\gamma|+2)},$$

con

$$c_0 \geq \left(\frac{4}{3+A_1c_1}-1\right)c_1.$$

Ya que $\zeta(s)$ tiene en el punto $s = 1$ un polo, de lo demostrado se deduce la afirmación del teorema.

Corolario 3.6. Sea $T \geq 2$ y $c > 0$, la constante absoluta del teorema. Entonces la región

$$\sigma \geq 1 - \frac{c_1}{\log(|t|+2)}, \qquad 2 \leq |t| \leq T,$$

se puede hacer la siguiente estimación

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| = O\left(\log^2 T\right).$$

Demostración: Por el Corolario 3.5

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1} \frac{1}{s-\rho_n} + O(\log T)$$

y, por lo tanto,

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1} \frac{1}{|\sigma-\beta_n+i(t-\gamma_n)|} + O(\log T).$$

Ya que

$$\beta_n \leq 1 - \frac{c}{\log(T+2)}, \qquad \sigma \geq 1 - \frac{c}{2\log(T+2)},$$

y por Corolario 3.3 el número de ceros ρ_n de la función zeta para los cuales $t-1 \leq |\mathrm{Im}\,\rho_n| \leq t+1$, no sobrepasa a $c\log|t|$, esto es

$$\sum_{|t-\gamma_n|\leq 1} 1 \leq c\log|t|,$$

entonces

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq \frac{2}{c}\log(T+2) \sum_{|t-\gamma_n|\leq 1} 1 + O(\log T) = O\left(\log^2 T\right).$$

3.4. Aproximación de la suma final

Teorema 3.8. **[10]** Cuando $0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 2$, $x \geq \frac{|t|}{\pi}$ tiene lugar la fórmula

$$\zeta(s) = \sum_{n\leq x} \frac{1}{n^s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + O\left(x^{-\sigma}\right),$$

donde la constante en el signo O depende sólo de σ_0.

Demostración: Por el Teorema 3.1 $(N > x)$

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2}N^{-s} + s\int_N^\infty \frac{\frac{1}{2}-\{u\}}{u^{s+1}}du \\ &= \sum_{n\leq x} \frac{1}{n^s} + \sum_{x<n\leq N} \frac{1}{n^s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2}N^{-s} + s\int_N^\infty \frac{\frac{1}{2}-\{u\}}{u^{s+1}}du.\end{aligned}$$

El último sumando es

$$\begin{aligned}\left|s\int_N^\infty \frac{\frac{1}{2}-\{u\}}{u^{s+1}}du\right| &\leq \frac{1}{2}|s|\left|\int_N^\infty \frac{1}{u^{\sigma+1}}du\right| \\ &\leq C|s|N^{-\sigma} \leq C|t|N^{-\sigma} = O\left(|t|N^{-\sigma}\right).\end{aligned}$$

Analicemos la suma

$$\sum_{x<n\le N}\frac{1}{n^s}.$$

Aplicamos la fórmula de sumación de Abel. Tomando $c_n=\frac{1}{n^{it}}$ y $f\left(x\right)=x^{-\sigma}$, se cumple

$$\sum_{x<n\le N}\frac{1}{n^s}=\sum_{x<n\le N}\frac{1}{n^{it}n^{\sigma}}=-\int_x^N\mathbf{C}(u)f'(u)du+\mathbf{C}(N)f(N), \qquad (10)$$

donde

$$\mathbf{C}\left(u\right)=\sum_{x<n\le u}\frac{1}{n^{it}}.$$

Por el Teorema de Cauchy encontramos

$$\mathbf{C}\left(u\right)=\int_x^u v^{-it}dv+O\left(1\right)=\frac{u^{1-it}-x^{1-it}}{1-it}+O\left(1\right). \qquad (11)$$

Por lo tanto sustituyendo (11) en (10)

$$\begin{aligned}\sum_{x<n\le N}\frac{1}{n^s} &= \sigma\int_x^N u^{-\sigma-1}\mathbf{C}\left(u\right)du+\mathbf{C}\left(N\right)N^{-\sigma}=\\ &= \sigma\int_x^N\frac{u^{-s}-u^{-\sigma-1}x^{1-it}}{1-it}du+\frac{N^{1-s}}{1-it}\\ &\quad +O\left(xN^{-\sigma}\right)+O\left(1\right)\left(N^{-\sigma}+x^{-\sigma}\right)\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}&\sigma\int_x^N\frac{u^{-s}-u^{-\sigma-1}x^{1-it}}{1-it}du\\ =&\ \frac{\sigma}{1-it}\int_x^N u^{-s}du-\frac{\sigma x^{1-it}}{1-it}\int_x^N u^{-\sigma-1}du\\ =&\ \frac{\sigma}{\left(1-it\right)\left(1-s\right)}\left(N^{1-s}-x^{1-s}\right)+\frac{x^{1-it}}{1-it}\left(N^{-\sigma}-x^{-\sigma}\right),\end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{x<n\le N}\frac{1}{n^s} &= \frac{\sigma+1-s}{\left(1-s\right)\left(1-it\right)}\left(N^{1-s}-x^{1-s}\right)\\ &\quad +O\left(1\right)x^{-\sigma}+O\left(xN^{-\sigma}\right)+O\left(1\right)N^{-\sigma}.\end{aligned}$$

De donde obtenemos con $s=\sigma+it$

$$\sum_{x<n\le N}\frac{1}{n^s}=\frac{N^{1-s}}{1-s}+\frac{x^{1-s}}{s-1}+O\left(1\right)x^{-\sigma}+O\left(xN^{-\sigma}\right)+O\left(1\right)N^{-\sigma}.$$

Ahora, haciendo tender N hacia $+\infty$, obtenemos

$$\sum_{x<n\leq N} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{s-1} + O\left(1\right) x^{-\sigma}.$$

De donde sigue la afirmación del teorema.

Relación entre la suma de los coeficientes de la serie de Dirichlet y la función dada por esta serie

4.1. Teorema general

Definición 4.1. Se llama serie de Dirichlet la expresión

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

donde a_n son números complejos y $s = \sigma + it$.

Teorema 4.1. **[7]** Supongamos que la serie de Dirichlet para $f(s)$ converge absolutamente cuando $\sigma > 1$, $|a_n| \leq A(n)$, donde $A(n) > 0$ es una función de n monótona creciente y cuando $\sigma \longrightarrow 1 + 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, n^{-\sigma} = O\left((\sigma - 1)^{-\alpha}\right), \quad \alpha > 0.$$

Para cualquier $b_0 \geq b > 1$, $T \geq 1, x = N + \frac{1}{2}$ se cumple la fórmula

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-it}^{b+it} f(s) \frac{x^s}{s} ds \\ &\quad + O\left(\frac{x^b}{T(b-1)^{\alpha}}\right) + O\left(\frac{xA(2x)\log x}{T}\right),\end{aligned}$$

donde la constante en el signo O depende sólo de b_0.

Demostración: Tenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{a^s}{s} ds = \begin{cases} 1 + O\left(\frac{a^b}{T|\log a|}\right), & \text{si} \quad a > 1; \\ O\left(\frac{a^b}{T|\log a|}\right), & \text{si} \quad 0 < a < 1. \end{cases}$$

Sea $a > 1$ ó $0 < a < 1$. Tomemos $U > b$ y analicemos el contorno de Γ y Γ_1. Los contornos Γ y Γ_1 se recorren en el sentido positivo, es decir, en contra de las manecillas del reloj

$$\begin{aligned}\Gamma &= \{s \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} s = b;\ \operatorname{Im} s \in [-T, T]\} \\ &\quad \cup \{s \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} s = T;\ \operatorname{Re} s \in [-U, b]\} \\ &\quad \cup \{s \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} s = -U;\ \operatorname{Im} s \in [-T, T]\} \\ &\quad \cup \{s \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} s = -T;\ \operatorname{Re} s \in [-U, b]\},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\Gamma_1 \quad = \quad & \{s \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} s = U;\ \operatorname{Im} s \in [-T, T]\} \\ & \cup \{s \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} s = T;\ \operatorname{Re} s \in [b, U]\} \\ & \cup \{s \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} s = b;\ \operatorname{Im} s \in [-T, T]\} \\ & \cup \{s \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} s = -T;\ \operatorname{Re} s \in [b, U]\}.\end{aligned}$$

Por el teorema de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{a^s ds}{s} = 1, \text{ para } a > 1$$

y correspondientemente

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{a^s ds}{s} = 0, \text{ para } a < 1,$$

es decir,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^s ds}{s} = 1 + R, \text{ para } a > 1,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\frac{a^s ds}{s} = R_1, \text{ para } 0 < a < 1,$$

donde R y R_1 son las integrales correspondientes por los lados 1, 2 y 3. Las integrales por 1 y por 3 son idénticas en valor absoluto; si $a > 1$, entonces

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_1 \frac{a^s}{s} ds\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-U}^{b}\frac{a^\sigma d\sigma}{\sqrt{T^2+\sigma^2}} \leq \frac{a^b}{T\log a};$$

si $0 < a < 1$, entonces

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_1 \frac{a^s}{s} ds\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{b}^{U}\frac{a^\sigma d\sigma}{\sqrt{T^2+\sigma^2}} \leq \frac{a^b}{T\left|\log a\right|}.$$

Si $a > 1$, entonces

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_2 \frac{a^s}{s} ds\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{+T}\frac{a^{-U} dt}{\sqrt{U^2+t^2}} = O\left(a^{-U}\right) \longrightarrow 0,$$

cuando $U \longrightarrow +\infty$, y si $0 < a < 1$, entonces

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_2 \frac{a^s}{s} ds\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{+T}\frac{a^{U} dt}{\sqrt{U^2+t^2}} = O\left(a^{U}\right) \longrightarrow 0,$$

cuando $U \longrightarrow +\infty$.

La serie de Dirichlet converge absolutamente para $s = b + it$. Integrando obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} f(s)\,\frac{x^s}{s}ds &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}\right)\\ &= \sum_{n\le x} a_n + R,\end{aligned}$$

donde

$$R = O\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\,\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^b}{T\left|\log\frac{x}{n}\right|}\right).$$

La suma en O la descomponemos en dos: en la primera pondremos aquellos sumandos, donde $\frac{x}{n}\le\frac{1}{2}$ ó $\frac{x}{n}\ge 2$; para ellos $\left|\log\frac{x}{n}\right|\ge\log 2$, y ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^b} = O\left(\frac{1}{(b-1)^{\alpha}}\right),$$

entonces la primera suma será

$$O\left(\frac{x^b}{T\,(b-1)^{\alpha}}\right);$$

la segunda suma tiene la forma

$$\sum_{\frac{x}{2}<n<2x}|a_n|\,\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^b}{T\left|\log\frac{x}{n}\right|}\le\frac{A\,(2x)\,2^b}{T}\sum_{\frac{x}{2}<n<2x}\frac{1}{\left|\log\frac{N+\frac{1}{2}}{n}\right|};$$

ya que $\log\frac{N+\frac{1}{2}}{n}\ge c_1\frac{N+\frac{1}{2}-n}{N}$, si $\frac{N}{2}<n\le N$, y $\log\frac{n}{N+\frac{1}{2}}\ge c_2\frac{n-N-\frac{1}{2}}{N+\frac{1}{2}}$, si $N+1\le n<2x$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{\frac{x}{2}<n<2x}\frac{1}{\left|\log\frac{N+\frac{1}{2}}{n}\right|} &= \sum_{\frac{x}{2}<n\le N}\frac{1}{\log\frac{N+\frac{1}{2}}{n}}+\sum_{N+1\le n<2x}\frac{1}{\log\frac{n}{N+\frac{1}{2}}}\\ = \quad & O\left(\sum_{\frac{x}{2}<n\le N}\frac{1}{\left|\log\frac{N+\frac{1}{2}}{n}\right|}\right)+O\left(\sum_{N+1\le n\le 2x}\frac{N}{n-N-\frac{1}{2}}\right)\\ = \quad & O\left(x\log x\right).\end{aligned}$$

El teorema queda demostrado.

4.2. Distribución de los números primos

Se llama ley asintótica de distribución de los números primos la afirmación $\pi(x)\backsim\frac{x}{\log x}$, o su equivalente, $\Psi(x)\backsim x$.

A continuación demostramos una afirmación más fuerte.

Teorema 4.2. [12] (Ch. J. La Vallée Poussin). Existe una constante absoluta $c > 0$, tal que

$$\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x + O\left(xe^{-c\sqrt{\log x}}\right);$$

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\log x}}\right),$$

Demostración: Para $\operatorname{Re} s > 1$ tenemos

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Vamos a suponer que $x = N + \frac{1}{2} \geq 100$, sin pérdida de generalidad. Tomemos ahora

$$\begin{aligned} b &= 1 + \frac{1}{\log x}, \\ T &= e^{\sqrt{\log x}}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right).$$

para cierta constante absoluta $c_1 > 0$ en la región

$$\operatorname{Re} s = \sigma \geq \sigma_1 = 1 - \frac{c_1}{2\log(T+2)}, \qquad |t| \leq T,$$

la función $\zeta(s)$ no se hace cero y además de esto, $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O\left(\log^2 T\right)$.

Examinemos la integral J por el contorno Γ. El contorno Γ se recorre en el sentido positivo, es decir, en contra de las manecillas del reloj.

$$\begin{aligned} \Gamma = \; & \{s \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} s = b;\ \operatorname{Im} s \in [-T, T]\} \\ & \cup \{s \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} s = T;\ \operatorname{Re} s \in [\sigma_1, b]\} \\ & \cup \{s \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} s = \sigma_1;\ \operatorname{Im} s \in [-T, T]\} \\ & \cup \{s \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} s = -T;\ \operatorname{Re} s \in [\sigma_1, b]\}, \end{aligned}$$

$$\sigma_1 < 1 < b,$$

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds.$$

La función subintegral tiene dentro del contorno un polo de primer orden de residuo igual a x. Por esto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s} ds = x + R,$$

donde R es la suma de las integrales según el lado superior, inferior e izquierdo de Γ. Las dos primeras son iguales en valor absoluto y se valorizan

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-iT}^{b+iT}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds\right| &\leq \int_{\sigma_1}^{b}\left|\frac{\zeta'\left(\sigma+iT\right)}{\zeta\left(\sigma+iT\right)}\right|\frac{x^\sigma}{T}d\sigma\\ &= O\left(\frac{x\log^2 T}{T}\right);\end{aligned}$$

la integral por el lado izquierdo es igual a

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-iT}^{\sigma_1+iT}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-T}^{+T}\frac{\zeta'(\sigma_1+iT)}{\zeta(\sigma_1+iT)}\frac{x^{\sigma_1+it}}{\sigma_1+it}dt\right|\\ &= O\left(x^{\sigma_1}\log^2 T\left(\int_0^1\frac{dt}{\sigma_1}+\int_1^T\frac{dt}{t}\right)\right) = O\left(x^{\sigma_1}\log^3 T\right).\end{aligned}$$

De las estimaciones obtenidas, de la definición de T y σ_1, se deduce la primera afirmación del teorema.

Analicemos
$$S=\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda(n)}{\log n}=\sum_{p\leq x}1+\sum_{\substack{n=p^k\leq x\\ k\geq 2}}\frac{\Lambda(n)}{\log n}.$$

En la segunda suma $k\leq\log x$, y para cada $k\geq 2$ en la suma de los sumandos $\leq\sqrt{x}$ que no sobrepasan 1. Por esto

$$S=\pi\left(x\right)+O\left(\sqrt{x}\log x\right).$$

Suponiendo en la transformación de Abel

$$c_n=\Lambda\left(n\right),$$

y
$$f(x)=\frac{1}{\log x},$$

es decir,
$$\mathbf{C}\left(x\right)=\sum_{n\leq x}c_n=\Psi(x)=x+O\left(xe^{-c\sqrt{\log x}}\right),$$

$$f'(x)=-\frac{1}{x\log^2 x},$$

hallamos

$$S=\int_2^x\frac{\Psi\left(u\right)}{u\log^2 u}du+\frac{\Psi(x)}{\log x}=\int_2^x\frac{du}{\log^2 u}+\frac{x}{\log x}+R,$$

donde

$$\begin{aligned}
R &= O\left(\int_2^x e^{-c\sqrt{\log u}}\frac{du}{\log^2 u} + xe^{-c\sqrt{\log x}}\right) = \\
&= O\left(\int_2^{\sqrt{x}} du + \int_{\sqrt{x}}^x e^{-c\sqrt{\log u}} du + xe^{-c\sqrt{\log x}}\right) \\
&= O\left(xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\log x}}\right)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\int_2^x \frac{du}{\log^2 u} + \frac{x}{\log x} &= -\frac{u}{\log u}\Big|_2^x + \int_2^x \frac{du}{\log u} + \frac{x}{\log x} \\
&= \int_2^x \frac{du}{\log u} + \frac{2}{\log 2}.
\end{aligned}$$

La segunda afirmación queda demostrada.

4.3. Representación de la función de Chebyshev en forma de suma según los ceros de la función zeta

Teorema 4.3. [**6**] Sea $2 \leq T \leq x$. Entonces

$$\Psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n) = x - \sum_{|\operatorname{Im}\rho|\leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right),$$

donde los ρ son los ceros de la función zeta en la zona crítica.

Demostración: Cuando $\operatorname{Re} s > 1$

$$\begin{aligned}
-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s} = \frac{1}{s-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right) \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n}\right) - B_0,
\end{aligned}$$

donde los ρ_n son todos los ceros no triviales de $\zeta(s)$. Al igual que en la demostración del teorema 4.1 $\left(b = 1 + \frac{1}{\log x}\right)$,

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT_1}^{b+iT_1}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds + O\left(\frac{x\log^2 x}{T}\right),$$

donde $T \leq T_1 \leq T+1$ y T_1 ha sido tomada de tal forma que la distancia desde la recta $\operatorname{Im} s = T_1$ hasta el cero mas cercano de $\zeta(s)$ sea

$$\gg \frac{1}{\log T}$$

esto siempre se puede hacer, ya que el número de ceros de $\zeta(s)$, para los cuales $T \leq \operatorname{Im}\rho \leq T+1$, es $O(\log T)$.

Analicemos la integral J,

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds,$$

donde Γ es

$$\begin{aligned}\Gamma &= \{s \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re}s = b;\ \operatorname{Im}s \in [-T_1, T_1]\} \\ &\cup\ \{s \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im}s = T_1;\ \operatorname{Re}s \in [1-b, b]\} \\ &\cup\ \{s \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re}s = 1-b;\ \operatorname{Im}s \in [-T_1, T_1]\} \\ &\cup \{s \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im}s = -T_1;\ \operatorname{Re}s \in [1-b, b]\},\end{aligned}$$

$$1-b < 0 < 1 < b$$

y se recorre en el sentido positivo, es decir, en contra de las manecillas del reloj.

Por el teorema de Cauchy

$$J = x - \sum_{|\operatorname{Im}\rho| \leq T_1}\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}.$$

Solo queda estimar las integrales por los lados de Γ 1, 2 y 3. Las integrales por 1 y 3 son iguales en valor absoluto y se estiman

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{1-b+iT_1}^{b+iT_1}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds\right| < \frac{x}{T_1}\int_{1-b}^{b}\left|\frac{\zeta'(\sigma+iT_1)}{\zeta(\sigma+iT_1)}\right|d\sigma.$$

La integral 2 no sobrepasa a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\left|\int_{1-b-iT_1}^{1-b+iT_1}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}ds\right| \\ <\ & x^{1-b}\int_{-T_1}^{T_1}\left|\frac{\zeta'(1-b+it)}{\zeta(1-b+it)}\right|\frac{dt}{\frac{1}{\log x}+|t|}.\end{aligned}$$

Ahora estimemos

$$\left|\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right|,$$

donde $1-b \leq \sigma \leq b$ y $t = T_1$, o $\sigma = 1-b = -\frac{1}{\log x}$, $|t| \leq T_1$.

$$\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)} = \sum_{|t-\gamma_n| \leq 1}\frac{1}{\sigma-\sigma_n+i(t-\gamma_n)} + O(\log(|t|+2)).$$

La última suma es $O(\log^2 x)$, ya que si $|t| \leq T_1$, entonces $\sigma = -\frac{1}{\log x}$ y los ceros de $\zeta(s)$ tales que $|t-\gamma_n| \leq 1$, no son mayores que $O(\log(|t|+2))$; si $t = T_1$, $1-b \leq \sigma \leq b$, entonces como consecuencia de la elección de T_1

$$|T_1 - \gamma_n| \gg \frac{1}{\log T}.$$

De las estimaciones obtenidas se deduce la afirmación del teorema.

Bibliografía

[1] P.A. Clement, Congruences for sets of primes. Amer. Math. Monthly, 56, (1949), 23-25.

[2] J. B. Conway, Functions of One Complex Variable I, 2nd ed., Springer, (1995).

[3] A. A. Karatsuba, Fundamentos de la Teoría Analítica de los Números. Mir Moscú, primera edición, 1979 (1986).

[4] A. A. Karatsuba, Complex Analysis in Number Theory. CRC Press, Ann Arbor (1995).

[5] A. A. Karatsuba and S. M. Voronin, The Riemann Zeta-Function. Walter de Gruyter, Berlin, (1992).

[6] I. M. Vinogradov, Fundamentos de la Teoría de los Números. Mir Moscú, segunda edicion, (1977).

[7] I. M. Vinogradov, On estimates of trigonometric sums. Dokl. Akad. Nauk SSSR 34, No 7 (1942), 199-200.

[8] I. M. Vinogradov, The Method of Trigonometrical Sums in the Theory of Numbers. Dover Publications, New York, (2004).

[9] E. C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-Function. Oxford science publications, second edition, (1986).

[10] I. M. Vinogradov, A new evaluation of $\zeta(i + it)$. Izv. Akad. Nauk SSSR.22 (1958), 161-164.

[11] A. Ivic, The Riemann Zeta-Function (Theory and Aplications). Dover Publications, Inc. Mineola, New York. First edition, (2003).

[12] M. R. Murty, Problems in Analytic Number Theory. Springer, New York, Berlin, Heidelberg (1996).