



UNIVERSIDAD MICHOACANA
DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO



FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“Matemático Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

“ACTIVIDADES DIDÁCTICAS PARA EL ANÁLISIS DE LA ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA”

TESIS

Para obtener el grado de Licenciada en Ciencias
Físico-Matemáticas

Presenta:

MÓNICA BEATRIZ SAUCEDO LEÓN

ASESOR: DR. JOSÉ CARLOS CORTÉS ZAVALA

Morelia, Michoacán, junio del 2016

AGRADECIMIENTOS

A mis padres:

Juan Ramón Saucedo Pereyra y Martha Mónica León Cano, por concederme la vida, por su apoyo incondicional y esfuerzo diario al impulsarme y permitirme realizar mis sueños.

A mis hermanos:

Juan Ramón Saucedo León, Leonardo David Saucedo León y Nancy Saray Saucedo León, por su comprensión y apoyo para que fuera posible.

Al Dr. José Carlos Cortés por el conocimiento compartido y valiosa guía, así como la comprensión, paciencia y tiempo implícitos en éste proyecto.

Al Instituto Mahatma Gandhi por la confianza y los medios permitidos para llevarlo a cabo.

A la generación de alumnos que me brindó el apoyo, motivación e iluminación necesaria al ser la fuente de inspiración en cada una de las pruebas realizadas.

A todas las personas cuya valiosa aportación a lo largo del proyecto y de mi vida, ha permitido tanto la puesta en marcha como la conclusión del mismo.

A Víctor Quintana, gracias por tanto... gracias por todo.

A tu memoria Juan Carlos Rafael... Siddhartha.

	3
RESUMEN	6
ABSTRACT	7
CAPÍTULO I	8
INTRODUCCIÓN	8
Justificación de la Tesis	9
Problema de investigación	10
Preguntas de investigación	11
Objetivos	12
Objetivo general	12
Objetivos específicos	12
CAPÍTULO II	14
MARCO TEÓRICO	14
Uso de la tecnología en la enseñanza	14
Teoría sobre la resolución de problemas	15
Aprendizaje de la geometría analítica	19
Aprendizaje de la recta y la circunferencia	22
Caso GeoGebra	26
Actividades de aprendizaje con Geogebra	28
CAPÍTULO III	32
METODOLOGÍA	32

	4
Diseño de las hojas de trabajo	32
Diseño de la experimentación	33
Objetivos de las actividades	39
CAPÍTULO IV	46
ANÁLISIS VERBATIM	46
ACTIVIDAD I	46
Fragmento 1	47
Fragmento 2	52
Fragmento 3	58
Fragmento 4	63
Fragmento 5	67
ACTIVIDAD II	73
Fragmento 1	74
Fragmento 2	80
Fragmento 3	85
Fragmento 4	90
Fragmento 5	97
Fragmento 6	107
Fragmento 7	116
Fragmento 8	121

Fragmento 9	125
Fragmento 10	129
CAPÍTULO V	136
CONCLUSIONES	136
Con respecto a las hojas de trabajo	136
Con respecto a la actividad en binas	137
Con respecto a la actividad grupal	137
Con respecto al análisis de las actividades implementadas	139
Con respecto a la pertinencia del software	140
BIBLIOGRAFÍA	142
ANEXOS	146
ANEXO1	146
Actividad I (prueba piloto)	146
Actividad II (prueba piloto)	150
ANEXO 2 (MI DÍA EN PREPA)	155
ANEXO 3	157
Actividad I (definitiva)	157
Actividad II (definitiva)	161

RESUMEN

El presente trabajo de investigación consiste en el diseño y aplicación de actividades didácticas que de manera secuencial, haciendo uso de GeoGebra, le permitan al estudiante de preparatoria reflexionar sobre la ecuación de la circunferencia y su relación con el medio que le rodea, dado que se plantean problemas de aplicación en los que ésta interviene de manera directa, permitiendo profundizar y mejorar el acceso a ideas de difícil comprensión sobre el tema.

Con lo cual, se pretende crear un ambiente de aprendizaje colaborativo en el que el alumno logre ser más activo, analítico, reflexivo, y a la vez, construya su propio aprendizaje significativo, todo ello con la finalidad de obtener a través del software y el diseño adecuado de actividades, un mejor aprovechamiento y disminución máxima posible de los altos índices de reprobación (y deserción) que actualmente existen. Considerando que, es necesario que un nuevo proyecto de investigación que incluye el uso de la tecnología, evite basarse únicamente en el potencial idealista de ésta y aborde también la comprensión del aprendizaje.

Palabras clave: Actividades didácticas, aprendizaje significativo, circunferencia, GeoGebra, verbatim.

ABSTRACT

The present work of research consists in the design and implementation of educational activities that sequentially, making use of GeoGebra, will allow the high school student to reflect on the equation of the circumference and their relationship with the environment that surrounds him, given that there are problems of application in which it intervenes directly, allowing deepen and improve access to the ideas of difficult to understand on the subject.

With which it intends to create a collaborative learning environment in which the student will become more active, analytical, reflexive, and at the same time, build your own significant learning, all with the aim of obtaining through software and the appropriate design of activities, a better use and the maximum possible decrease of the high failure rates (and desertion) that currently exist. Considering that, it is necessary that a new research project that includes the use of technology, avoid based solely on the potential of this and addressed idealist also understanding of learning.

Keywords: didactic activities, significant learning, circumference, GeoGebra verbatim.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación consta de cinco capítulos, de los cuales el primero de ellos aborda tanto la justificación del mismo como el problema a investigar, y por ende, las preguntas de investigación que se pretenden resolver tras llevarlo a cabo. Asumiendo de manera automática los objetivos de éste.

En lo que respecta al capítulo II, aborda la fundamentación del trabajo a través del marco teórico. Mostrando a través de ello, aspectos significativos a indagarse vinculados con el problema.

Posteriormente, en un tercer capítulo, nos encontramos con la metodología que describe el diseño de las hojas de trabajo, elaboradas como parte de la estrategia que permitió abordar el problema de investigación en base a los objetivos planteados, así mismo, se detallan los pasos realizados para el diseño de las mismas a fin de establecer un modelo definitivo. En consecuencia, se describe también, el diseño de la experimentación que permitió realizar un adecuado análisis e interpretación tanto de la participación de los estudiantes como de los resultados arrojados, haciendo posible la verificación de los conocimientos adquiridos.

Finalmente, éste capítulo concluye con la descripción detallada de los objetivos de cada una de las instrucciones que formaron parte fundamental de las hojas de trabajo.

En el capítulo IV se muestra un análisis detallado de cada uno de los fragmentos en que se dividieron las hojas de trabajo, en base al verbatim extraído del material obtenido como parte de

la experimentación del trabajo. Realizando a su vez, un análisis comparativo de las dos vertientes generales en que se dividió la experimentación del trabajo, es decir, los resultados arrojados en el trabajo en parejas con respecto al análisis grupal del mismo. Obteniendo así valiosas conclusiones.

Finalmente, un quinto capítulo expresa las conclusiones con respecto a las actividades y a los objetivos planteados, seguido de una sección de anexos en la que se incluyen las distintas evoluciones de las hojas de trabajo hasta concluir con la obtenida de manera definitiva.

Justificación de la Tesis

Actualmente nos encontramos ante un modelo más dinámico del proceso educativo enseñanza-aprendizaje que interrelaciona tanto los objetivos que se persiguen al final del proceso como los métodos de enseñanza que se supone conducirán al alumno al logro de éstos.

Considerando a su vez, que los alumnos utilizan la tecnología de forma habitual, a través de distintos soportes como lo son el celular o los videojuegos, lo cual nos brinda la facilidad de que se encuentren familiarizados con un lenguaje multimedia, a través del cual dirigirlos hacia formas de mayor beneficio. Sin embargo, es necesario que un nuevo proyecto de investigación que incluye el uso de la tecnología, evite basarse únicamente en el potencial idealista de ésta y aborde también la comprensión del aprendizaje.

Tomando en cuenta que existen en el mercado diferentes tipos de software con características varias que se pueden implementar como medios didácticos de aprendizaje, éste

proyecto explora el uso de **GeoGebra**, quien entre sus múltiples bondades brinda la ventaja de ser un software manipulable que ayuda a reducir el tiempo de construcción geométrica a la vez que permite al usuario realizar modificaciones inmediatas, y a través de ellas, hacer visibles los cambios tanto algebraicos como geométricos en su ventana gráfica, tarea que a lápiz y papel resultaría más compleja absorbiendo valioso tiempo para abordar otras cuestiones que en ocasiones resultan más relevantes que el proceso mismo. Además, de estar dispuesto de manera gratuita en la red.

Con lo cual, la aplicación de este trabajo ofrece la oportunidad de implementar actividades didácticas a través del diseño de hojas de trabajo que con ayuda del software GeoGebra permitan poner en práctica el uso de la tecnología en el nivel bachillerato, abordando parte de los temas implícitos en la materia de Geometría Analítica correspondiente al tercer semestre del nivel preparatoria. En donde las hojas de trabajo permitan al alumno reflexionar sobre los pasos en la actividad realizada, así como sintetizar la información para expresar los resultados de manera escrita y oral, contexto bajo el cual es posible que mediante el uso de la tecnología informática nos permitan profundizar en la interpretación de las construcciones guiadas y de ésta forma mejorar el acceso a ideas de difícil comprensión.

Problema de investigación

Consciente de las necesidades actuales en el ámbito educativo y de que la tecnología va invadiendo nuestra sociedad de forma trascendente, el presente trabajo de investigación se basa en la enseñanza de los conceptos y ecuaciones tanto de la recta como de la circunferencia, desde

una perspectiva enfocada a su entorno cotidiano a través de problemas de aplicación, con lo que se pretende que el alumno logre ser más activo, analítico, reflexivo, y a la vez, construya su propio aprendizaje significativo, por medio de la implementación de actividades diseñadas de tal manera que el profesor funge ahora como un guía que, auxiliado por las actividades elaboradas previamente, contribuya a fomentar el espíritu de exploración y formulación de hipótesis en el estudiante.

Preguntas de investigación

Con la finalidad de orientar la investigación hacia aspectos de interés específico se consideran las siguientes posibilidades:

- Si se implementan actividades de aprendizaje a estudiantes de tercer semestre de bachillerato y en éstas se incluyen problemas de aplicación para el caso de la circunferencia o de la recta a través de una serie de instrucciones guiadas ¿esto hará que sigan correctamente las indicaciones?
- Una vez que obtienen la información de un problema de aplicación y la concentran en una tabla de registro ¿son capaces de observar y relacionar los datos contenidos en ésta?
- De la información que obtienen los estudiantes en una tabla de registro ¿pueden llegar a relacionar los datos y escribir la expresión de la circunferencia cuando se les proporcionan las coordenadas del centro y el radio de ésta?

- Si se les proporciona la ecuación de una circunferencia ¿son capaces de distinguir las coordenadas del centro y su radio?

Objetivos

Objetivo general

Implementar el uso de la tecnología, a través de GeoGebra, para la enseñanza de la ecuación de la recta y la circunferencia en el tercer grado de bachillerato, por medio de la aplicación de actividades guiadas basadas en la elaboración de hojas de trabajo que presentan problemas de aplicación.

Objetivos específicos

Evaluar la pertinencia del software GeoGebra en cuanto a la facilidad de manipulación y eficacia en la realización de tareas, relacionadas con las ecuaciones de la recta y de la circunferencia.

Evaluar la implementación de hojas de trabajo constituidas por instrucciones y preguntas guiadas para promover aprendizajes sobre el contenido deseado.

Que el estudiante identifique los elementos que conforman la ecuación de la circunferencia.

Que el estudiante escriba la ecuación de una circunferencia cuando se le proporcionan las coordenadas del centro y el radio de ésta.

Que el estudiante sea capaz de realizar conjeturas a partir de la información obtenida.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

Uso de la tecnología en la enseñanza

Constantemente nos percatamos de que las nuevas tecnologías penetran en nuestras actividades de un modo avasallador cuyo impacto indudablemente afecta el ámbito educativo y por consiguiente, el área matemática como disciplina básica de cualquier desarrollo tecnológico.

Sin embargo, por fortuna se trata de una preocupación colectiva, misma que sin duda anuncia un cambio en el saber humano y la transmisión de conocimientos, puesto que en definitiva rompe con el modelo tradicional, considerando que:

En nuestro caso, la motivación para experimentar con estas nuevas herramientas en nuestra enseñanza, no ha sido tanto el gusto por la tecnología como el deseo de conseguir dar una formación matemática cada vez mejor, más adecuada a las necesidades de nuestros días y más atractiva, tanto para los alumnos como para los profesores (García, Martínez, Miñano, 1995, p.15).

Posteriormente el beneficio se multiplica, dado que un cambio de enfoque en la enseñanza puede ser un medio que proporcione mayor claridad y calidad en el proceso (de enseñanza), puesto que: *“En el campo educativo es posible sacarle un jugo insospechado para el desarrollo de actividades didácticas, ya que las hace más atractivas para el estudiante y se podría decir que le sirve como un laboratorio de investigación al estudiante” (Ávalos, 1995).*

Considerando que, para que la tecnología favorezca el desarrollo de capacidades de razonamiento, es muy importante no llegar a emplear de manera abusiva tal recurso didáctico. Ya que:

“...efectivamente el uso de las computadoras en el salón de clase está arrojando mejores resultados en la comprensión de conceptos, si previamente se hizo un buen diseño de actividades didácticas” (Ávalos, 1995).

Sin olvidar que el propósito permanente a considerar es ayudar a los alumnos a que se involucren en las actividades de enseñanza, que rescaten sus conocimientos matemáticos previamente adquiridos y logren apropiarse de manera adecuada de las ideas matemáticas nuevas.

Además, como señalan Santos y Moreno (2013) *“El uso de las herramientas implica investigar las formas de razonamiento matemático que se producen durante la comprensión de los conceptos matemáticos y en la resolución de problemas”* (p.71).

Teoría sobre la resolución de problemas

Si se logra reducir el tiempo empleado para la realización de algunos cálculos matemáticos, es posible aprovechar ese lapso para enfoques más enriquecedores como lo son: la reflexión del procedimiento realizado y el análisis de los datos obtenidos. Ya que frecuentemente se alude a la insuficiencia de tiempo el hecho de que el alumno no logre la construcción del conocimiento matemático, sin embargo:

“Las nuevas tecnologías pueden permitir una especie de proceso de simulación, que facilite, en menos tiempo, el estudio de diferentes situaciones y la experimentación a bajo coste” (García, Martínez, Miñano, 1995, p.20).

Considerando que, pensar matemáticamente es un proceso a través del cual podemos aumentar el entendimiento del mundo que nos rodea, con aplicaciones muy amplias, para enfrentarse tanto a problemas matemáticos y científicos como generales. Puesto que, como menciona Polya:

Un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica tiempo a ejercitar a sus alumnos en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando esa oportunidad. Pero si, por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello (Polya, 1965, p.7).

Con lo que, a través de la resolución de problemas (planteados de forma adecuada), es posible que se logre captar la atención del alumno de manera casi involuntaria al generar una emoción positiva en éste, dado que:

Emoción y aprendizaje son inseparables. Dentro de la vida escolar, las emociones tienen un papel relevante en el aprendizaje en todas sus etapas: adquisición, almacenamiento, recuperación de la información, etc. Afectan directamente la motivación; por lo tanto, pueden alterar el proceso de aprendizaje... (Carminati y Waipan, 2012, p.52)

Situación que sin lugar a dudas representa un vínculo importante entre la enseñanza y el aprendizaje si se considera que, para lograr despertar el interés y en consecuencia la atención del estudiante, es importante considerar dentro de los elementos el modo de enseñar, puesto que en

numerosas ocasiones la entrega del estudiante no surge en realidad del propio contenido. Sin embargo:

Aun cuando existen varios factores que influyen en el éxito en el estudio de las matemáticas, un factor que se considera importante es la habilidad de los estudiantes para reconocer y usar ciertas estrategias en la resolución de problemas. Esto es, no solamente es importante que el estudiante conozca la existencia de ciertas estrategias, sino que también es importante que desarrolle una serie de habilidades que le permitan identificar en qué situaciones utilizarlas (Santos, 2007, p.47).

Puesto que la solución de problemas es un proceso complejo que involucra diversos aspectos en la relación existente entre la resolución de los mismos y el aprendizaje de las matemáticas, si se considera que:

Para que el conocimiento tenga sentido, éste debe poderse utilizar en la resolución de problemas. Es así como el conocimiento de los conceptos y de las técnicas es productivo solamente cuando éste conocimiento se puede transferir a entornos que no necesariamente pertenecen al espacio dentro del cual estos conceptos y técnicas fueron presentados (Gómez, 1995, p.144).

Por lo que, la resolución de problemas juega un papel fundamental en el aprendizaje de las matemáticas, dado que pone énfasis en el tipo de situaciones problemáticas presentadas al estudiante, que le permitan tanto la búsqueda de respuestas como la reflexión, razonamiento y explicaciones que conlleva el proceso de solución incluyendo la interpretación del significado implícito. “Es decir, resolver un problema implica que el individuo entienda lo que hizo, y pueda explicar porque sus acciones fueron correctas o apropiadas” (Santos, 2007, p.72).

No obstante, al incluir la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas es fundamental considerar que el proceso de aprendizaje conlleva una conceptualización dinámica,

puesto que una forma de enseñanza eficiente debe contemplar en igual grado de importancia tanto la presentación de conceptos y resultados como el carácter experimental del problema; a través del ensayo, el análisis y la experimentación, pues:

El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas reconoce que para que los estudiantes desarrollen un pensamiento matemático robusto, éstos se deben involucrar en actividades de resolución de problemas donde tengan la oportunidad de desarrollar distintas maneras de comprender y razonar acerca de un problema o situación (NCTM, por sus siglas en inglés; 2009, citado por Santos y Moreno, 2013, p.70).

Sin embargo, dado que la propuesta de la resolución de problemas como aprendizaje de las matemáticas se presume como un conjunto de conocimientos abierto al ser una disciplina en constante evolución, tanto de métodos y principios generales como en soluciones, donde se pretende que el estudiante en su proceso de aprendizaje haga uso de ejemplos y contraejemplos, analice y discuta estrategias, verifique métodos y justifique resultados:

...es importante que los docentes conozcan lo que representa realmente un problema, las taxonomías que existen al respecto, sus características, etapas de resolución, así como también sobre las estrategias para su enseñanza, de manera que puedan crear enunciados creativos, originales y variados que constituyan un reto para los estudiantes e impliquen un esfuerzo cognoscitivo al resolverlos, en este sentido... (Pérez, Ramírez, 2011, p.191).

Por otra parte, al analizar las variadas interpretaciones que pueden surgir en el empleo de actividades en las que sea incluida la resolución de problemas, es importante distinguir los elementos que permiten destacar el potencial de su uso, así como la forma en que el estudiante adquiere el conocimiento dado que:

En la resolución de problemas, siempre es posible observar varios niveles y tipos de respuesta, una de las cuales es la mejor, dependiendo del propósito y las circunstancias, y los estudiantes deben adquirir la capacidad de juzgar su valor relativo o buscar formas alternativas de pensar el problema. De otra manera, el estudiante no tiene modo de saber que debe ir más allá de la forma inicial de pensar el problema y tampoco tiene manera de juzgar las ventajas y desventajas de un modo alternativo de pensar (Sepúlveda, Medina, Sepúlveda, 2009, p.88).

Aprendizaje de la geometría analítica

En lo que respecta al caso particular de la enseñanza aprendizaje de la geometría analítica (como área de la matemática), Villareal, Carmona y Arango (2013) nos hacen una interesante observación, al señalar que:

Una de las dificultades que se vienen presentando en el proceso de enseñanza de los conceptos de la Geometría Analítica es que por la automatización de procedimientos, la memorización de ecuaciones, los problemas tipo y repetitivos, se ha venido perdiendo la esencia de la geometría, en este caso el concepto de lugar geométrico (p.1664).

Lo cual, indudablemente ha llegado a afectar el aprendizaje del alumno, dado que la geometría analítica es un puente entre el álgebra y la geometría que hace posible resolver algebraica o analíticamente problemas geométricos, no obstante, con regularidad un curso de tal índole suele dejar de lado el aspecto de aplicación en su entorno, e inclusive, otras tantas parece reflejar que el álgebra y la geometría son diametralmente opuestas al no establecer contacto

directo o indirecto a lo largo de la solución a un determinado problema. Puesto que como menciona Ávalos (1995):

Algunas de las dificultades que se pueden mencionar dentro del área de geometría analítica y que han reportado investigadores como Raymond Duval, Bisho palan, etc., son las siguientes, dificultad de conversión de un registro de representación a otro, a saber los registros de representación más usados en matemáticas son: las figuras, las gráficas cartesianas, la escritura simbólica (sistemas de escritura de números, escritura algebraica, lenguas formales) y la lengua natural; otra dificultad en el aprendizaje de la geometría analítica es la visualización; diferentes tratamientos ante una representación gráfica, etc.

Situación que desencadena un problema mayor cuando al alumno (debido a esa falta de relación) le es imposible la tarea de observar una ecuación e identificar el lugar geométrico al cual pertenece o viceversa, pues como mencionan Salazar, Vega y Bahena:

Problemas típicos que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje en geometría analítica son: dada una ecuación hallar el lugar geométrico correspondiente, y el proceso inverso, es decir, dado un lugar geométrico hallar la ecuación que lo representa. Para ambos tipos de problemas el uso de la computadora viene a aliviar carencias en tiempo y en la capacidad expresiva gráfica de los sujetos del proceso educativo (s.f).

Sin embargo, aunque la Geometría, desde sus inicios y hasta nuestros tiempos, ha sido la rama por excelencia de las matemáticas que nos ha acercado increíblemente a un pensamiento geométrico el cual nos permite resolver problemas, encontrar nuevos argumentos y buscar otras posibles variantes, como menciona Soto (2013) “*La geometría analítica aún no ha alcanzado el sitio preferencial que merece en el currículo escolar, ni en su enseñanza se han logrado*

introducir los cambios que permitan generar ambientes propicios para un aprendizaje significativo por parte de los estudiantes” (p.7).

Dado que, en el sistema de enseñanza de la Geometría Analítica usualmente sus contenidos son presentados a los estudiantes como un producto acabado o apoyado en construcciones mecanicistas y descontextualizadas, por lo que se limitan los procesos implícitos en la construcción y razonamiento, pues:

Se supone que la geometría analítica presenta los modelos algebraicos para las situaciones geométricas. Pero, tan pronto como los estudiantes son introducidos a estos métodos nuevos, son empujados repentinamente a un mundo de cálculos y símbolos en los que se rompen las ligas entre las situaciones geométricas y sus modelos algebraicos y con frecuencia son omitidas las interpretaciones geométricas de los cálculos numéricos (Soto, 2013, p.7).

Por lo que “una de las primeras y principales obligaciones del maestro es no dar a sus alumnos la impresión de que los problemas de matemáticas no tienen ninguna relación entre sí, ni con el mundo físico”. (Polya, 1965, p.35) sino ayudar al estudiante a que se involucre en la actividad, puesto que en numerosas ocasiones “El estudiante realiza cálculos numéricos y obtiene conclusiones sin expresar o explicar el procedimiento adoptado” (Whimbey, Lochhead, 1999, p.20) de manera que, tal acción le impide poner en juego su saber matemático anterior y llegar a desarrollar correctamente ideas matemáticas nuevas a partir de sus propias experiencias, situación desfavorable para el aprendizaje de tal disciplina.

Por lo cual, el presente trabajo de investigación ofrece la posibilidad de abordar éstas áreas de oportunidad detectadas, de manera que la enseñanza de la geometría analítica se torne más

enriquecedora al incluir actividades que inducen al alumno a construir su propio aprendizaje, a través del razonamiento de cada uno de los pasos ejecutados al realizar la búsqueda de una solución, en problemas cuya redacción le permite a la vez proyectar en su entorno la aplicación de tales conocimientos, descubriendo con ello la posibilidad de un campo de acción.

Aprendizaje de la recta y la circunferencia

Dominar un concepto matemático requiere conocer y reconocer sus principales representaciones, para así convertirlas o traducirlas de un modo a otro, por lo que en el aprendizaje que involucra el caso de la recta y la circunferencia como temas implícitos en un curso basado en el estudio de la Geometría Analítica es necesario el dominio de tal relación existente. Pese a ello:

La enseñanza de la línea recta en el nivel bachillerato se hace siguiendo el método tradicionalista, método en el cual el maestro es el amo y señor del conocimiento y el alumno es un simple espectador. En esta forma de enseñanza, la reproducción de un fenómeno físico es nula y la posibilidad de que el educando cambie variables para observar físicamente el comportamiento del mismo también es nula (Barrón et al., 2009, p.27).

Por lo cual, aunque una de las características principales de la geometría analítica es trazar la gráfica de una ecuación mientras que otra no menos importante, es encontrar una ecuación para

un lugar geométrico, en múltiples ocasiones, encontrar una ecuación que represente determinada curva suele ser un reto mayúsculo para el alumno, ya que:

Hoy por hoy enseñamos distintos lugares geométricos dando su definición, y explicando el algoritmo que permite su construcción como una receta, la cual se debe seguir paso a paso, y que parece carecer de fundamentos. El alumno empieza a considerar al lugar geométrico como el algoritmo de construcción en vez de como un conjunto de puntos del plano que cumple con cierta condición o propiedad (Sanes, 2014, p.13).

Ya que cuando el aprendizaje se reemplaza con la memorización, dista mucho de ser una actividad intelectual, pues:

“En la enseñanza tradicional son numerosos los errores en que incurren los alumnos, a pesar de los esfuerzos que hacen los profesores para que los corrijan y eviten en lo sucesivo. Por ejemplo, presentan dificultades para usar las operaciones aritméticas más elementales en problemas verbales que involucran ecuaciones o sistemas de ecuaciones; aun cuando saben aplicar perfectamente los algoritmos de resolución...” (Guzmán, 2000, citado por Segura, 2004, p.52).

No obstante, en la búsqueda de alternativas para resolver dicho conflicto es posible abordar ambos temas (recta y circunferencia) estableciendo su relación implícita al obtener la ecuación de una circunferencia dados tres puntos por donde ésta pasa, dado que en este caso participan varias condiciones como lo son: puntos de tangencia en la circunferencia, segmentos que unen los puntos por pares, punto medio de un segmento, mediatriz de un segmento, punto de intersección de las mediatrices, distancia del punto de intersección a los puntos por donde pasa la

circunferencia, etc. Por lo que, resolver un problema de ésta índole se torna sumamente enriquecedor al proporcionar elementos importantes para determinar los parámetros que intervienen e identificar la ecuación deseada. Sin embargo, frecuentemente:

Al alumno se le proporcionan todas las variables necesarias para obtener la gráfica y la ecuación de la línea recta, o bien, se les facilita la ecuación para que obtenga datos importantes de ella, sin habérseles informado nunca el origen práctico de esta, obligando al alumno a que recurra a métodos memorísticos, en el cual lo aprendido lo hacen suyo momentáneamente y la información que el docente les proporciona la hacen propia para un solo fin ¡aprobar la materia!, de tal forma que al resolver un examen únicamente vacían en este lo poco que lograron memorizar, sin haber comprendido nunca la utilidad de la línea recta (Barrón et al., 2009, p.27).

Con lo cual, es necesario realizar un análisis de las prácticas pedagógicas empleadas, así como repensar y cuestionar la pedagogía tradicional, de manera que sea posible generar en el alumno tanto su proceso como el desarrollo de su pensamiento analítico, crítico y lógico que le permita desarrollar su capacidad de asociación tanto en lo subjetivo como en lo objetivo:

Por lo tanto el profesor debe tener un profundo dominio no solo, del contenido matemático, sino también del pedagógico y de la didáctica correspondiente. Surge entonces la decisión de encontrar soluciones que disminuyan el rechazo y los bajos logros de aprendizaje en esta área, razón por la cual se ha planteado como una solución, la elaboración y aplicación de recursos didácticos y material concreto para facilitar el aprendizaje de un tema importante de la geometría analítica como es la “Línea recta y la ecuación de la circunferencia (Defas, 2013, p.21).

Siendo una de las finalidades reconocer la importancia de la relación entre las variables que forman las parejas ordenadas y el lugar geométrico que determinan, pues muy a menudo, los estudiantes *“En general, no efectúan la representación y resolución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales, dándole un estatus inframatemático a este registro de representación* (Ramírez; 1997, citado por Segura, 2004, p.52).

Sin embargo, el establecer dicha relación permite posteriormente aplicar los elementos y ecuaciones de la circunferencia en la solución de problemas, considerando que:

“La importancia del círculo y la circunferencia no sólo es propiedad exclusiva de la geometría en sus diferentes formas de clasificación, a través de la historia y según los avances en la teoría del conocimiento (epistemología) ha sido importante inclusive para el desarrollo de avances tecnológicos o la forma de ver el mundo” (Carmona, 2011, p.50).

Motivo por el cual el contenido del presente trabajo incluye entre sus apartados la aplicación y resolución de actividades diseñadas para cubrir ésta importante necesidad de abordar ambos temas (ecuación de la recta y de la circunferencia), de tal modo que se le proporcione al alumno una vasta gama de herramientas referentes a la ecuación de la recta y que requiera utilizar al resolver y responder las actividades que se le presentan sobre la circunferencia. De modo que, de manera casi inconsciente pero perceptible a la vez logre establecer esa conexión y relación entre ambos temas, puesto que, un cambio de variables en la función le hará percatarse de una modificación en el comportamiento gráfico, así como su participación implícita en la construcción de la circunferencia, de tal forma que logre una asociación adecuada.

Finalmente, el diseño de las actividades impide evidentemente que el alumno llegue a hacer uso de la memorización a fin de responder las preguntas en cuestión, ya que se propone un análisis de la relación existente entre los elementos de la circunferencia como solución al problema dado, con lo cual se pretende permitirle desarrollar su pensamiento lógico-matemático, y por consiguiente que sea él quien construya su propio aprendizaje, ya que se le guía a la comprensión de los pasos efectuados así como los cambios experimentados durante el proceso de construcción, de manera que identifique el álgebra implícita en la geometría de las actividades y por ende la utilidad de la línea recta así como de la circunferencia.

Caso GeoGebra

GeoGebra es un software dinámico desarrollado por Markus Hohenwarter en la universidad de Salzburgo (Austria) y aplicado al área matemática para la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, cuyas herramientas pueden ayudar a profundizar en la comprensión de conceptos imprescindibles, tendiendo un puente entre áreas importantes de ella, como lo son el álgebra y la geometría. Puesto que:

“La idea de GeoGebra es proporcionar dos representaciones de cada objeto matemático, en sus ventanas gráfica y algebraica. Si se realiza una transformación en cualquiera de las dos ventanas, la retroalimentación es inmediatamente actualizada en ambas. Esta posibilidad de influir en las dos representaciones de un objeto de manera directa se llama conexión bidireccional.” (Basurto y Gallardo, 2013, p.90)

A la vez, GeoGebra proporciona herramientas básicas aplicables al área de la geometría dado que permite realizar construcciones a través de puntos, líneas y secciones cónicas. Lo cual, se apega de manera adecuada a la iniciativa del matemático René Descartes de estudiar los objetos geométricos euclidianos mediante un sistema de coordenadas en el plano.

Además, es un software sencillo de utilizar ya que, aunque permite trabajar de modo similar al trazo en papel también muestra sus posibilidades de acción al hacer posible la movilidad de los trazos realizados a cualquier otro punto referente.

“Así, los estudiantes pueden construir su propio repertorio de resultados matemáticos a partir de analizar el comportamiento de los elementos de la configuración (búsqueda de variantes) al mover componentes dentro de la misma figura o construcción. En éste proceso, se resalta la importancia de que el estudiante se plantee preguntas, formule conjeturas, busque argumentos que le permitan explicar la validez de las conjeturas y comunique sus formas de razonamiento y resultados” (Santos, 2007, p.123)

Por otro lado, para el uso y manipulación de éste, se requiere muy poca preparación previa por parte de los alumnos. Aunque antes de realizar actividades con el apoyo de ésta herramienta es conveniente una sesión de presentación del mismo, en la que se le permita al estudiante manipular y explorar por su cuenta.

Posteriormente, se pueden destacar indicaciones puntuales en base a los objetivos didácticos o el tipo de actividad planteada. Considerando que:

En los cursos de geometría del nivel medio, en lugar de hablar de demostrar o probar proposiciones y teoremas, se habla de explorar, plantear conjeturas y justificar resultados mediante argumentos matemáticos, como parte de los temas más importantes del currículo (Hanna, 2007, citado por Núñez, 2014, p.111).

Aspecto que es posible abordar haciendo uso de GeoGebra ya que, como herramienta informática favorece la experimentalidad y el descubrimiento de resultados generando un aprendizaje más activo por parte del alumno. A la vez que permite mayor énfasis en las ideas, los procesos y la metodología de resolución de problemas gracias a su potencia de cálculo y de representación gráfica.

Actividades de aprendizaje con Geogebra

Dado que *“el uso de la tecnología en el aula de matemáticas modifica las relaciones entre los diversos actores que interactúan en ella”* (Cortés y Guerrero, 2013, p.106), es necesario considerar que el ambiente tecnológico interactivo para el aprendizaje de las matemáticas (ATIAM) se genera en el entorno donde profesor, alumno y conocimiento, quienes fungen como actores de los procesos de enseñanza y de aprendizaje interactúan de forma organizada a través de la inclusión de actividades de aprendizaje apoyadas en el uso de la tecnología (Cortés y Núñez, 2007). Por lo que es relevante destacar que sería un error eliminar por completo las actividades que son empleadas en el medio tradicional, no obstante, hacer uso de la tecnología para el aprendizaje de las matemáticas genera cambios imprescindibles en la estructura de trabajo del maestro.

Pues *“Las nuevas tecnologías requieren otro tipo de acercamiento a la enseñanza, por lo que el papel del maestro cambia radicalmente cuando la clase de matemáticas se desarrolla con tecnología apoyada en hojas de trabajo”* (Mochón, Rojano y Ursini, 2000, p.11)

Considerando como lo señala Michel Saint-Onge en su libro *yo explico pero ellos... ¿aprenden?*, la enseñanza es la organización de métodos de apoyo, partiendo del modelo de las distintas disciplinas escolares del alumno que le permitan construir su propio saber, en donde cita una síntesis tomada de estudios realizados sobre la enseñanza directa de Barak Rosenshine (1986) donde destaca una estructura básica de la enseñanza, destacando varios puntos en el siguiente orden:

- Recordar los conocimientos anteriores que son de interés con relación a los nuevos aprendizajes.
- Fijar a los alumnos objetivos en el aprendizaje.
- Presentar los nuevos elementos de conocimiento.
- Organizar pruebas de evaluación.
- Corregir los errores en el aprendizaje.
- Fomentar ejercicios de iniciativa personal (trabajos, estudio).
- Hacer periódicamente síntesis de contenidos ya aprendidos.

Lo cual, deja claro que la enseñanza es mucho más que una simple transmisión de conocimientos en donde *“las necesidades educativas de nuestro tiempo y el conocimiento que ahora tenemos sobre el aprendizaje y desarrollo humano, nos exigen y posibilitan el desarrollo de nuevas formas de educación que atiendan esta diversidad, conflictividad, incertidumbre, pero también posibilidades humanas.”* (Díaz, 2013, p.64)

Por lo que se considera el diseño y empleo de hojas de trabajo como herramienta didáctica importante en relación con el uso de la tecnología, lo que conlleva a su vez un cambio en la forma de evaluación. Dado que ahora es el alumno quien construye de forma guiada su propio

aprendizaje a través de la reflexión inevitable al dar respuesta a las hojas de trabajo, puesto que *“por un lado obliga a los alumnos a reflexionar sobre el procedimiento y el resultado que obtuvieron empleando la máquina y a sintetizar su experiencia para comunicarla; por otro lado, proporciona información al maestro acerca de la comprensión que los alumnos han alcanzado de los conceptos matemáticos en la tarea”*. (Mochón, Rojano y Ursini, 2000, p.13)

Experiencia que sin duda conduce a un proceso de retroalimentación en el que a su vez el maestro tiene la posibilidad de visualizar y decidir sobre las acciones a implementar o modificar con la finalidad de conducir al alumno a la adquisición (apropiación) del conocimiento, ya que *“El conocimiento no se percibe pasivamente, ni a través de los sentidos, ni por medio de la comunicación, sino que es construido activamente por el sujeto cognoscente”*. (Saavedra, 2014, p.16)

Con lo cual, el maestro tiene la oportunidad de observar los avances y dificultades que presenta el alumno al realizar las construcciones haciendo uso del software, para posteriormente relacionar los datos y responder las hojas de trabajo. Haciendo posible la tarea de trabajar en puntos clave de la actividad, dado que una respuesta correcta no implica necesariamente que el estudiante haya entendido lo que realizó, como tampoco una respuesta incorrecta implica que haya aprendido de manera errónea, lo importante es pues, observar el trabajo del alumno en clase. Tarea que se facilita aún más para el docente a través de las discusiones grupales que permitan al alumno externar sus opiniones y compartir ideas con los demás, puesto que es importante que el alumno trate de extraer algunas conclusiones de la actividad y que las exponga ante el grupo para su discusión. Puesto que:

... es importante que el estudiante discuta sus ideas con sus compañeros, que presente conjeturas acerca del comportamiento de ciertas ideas matemáticas, que utilice ejemplos y contraejemplos para convencerse a sí mismo y a otros de los resultados, y que plantee sus propios problemas (Santos, 2007, p.47).

Por lo que uno de los objetivos primordiales de este proyecto de enseñanza que aborda actividades de aprendizaje con tecnología mediante el uso de GeoGebra para la enseñanza de la recta y la circunferencia es que, el alumno adquiera conocimientos y desarrolle habilidades que le sean de utilidad tanto en las áreas del álgebra y la geometría como en su vida cotidiana. Al mismo tiempo que facilite en el profesor la ardua tarea de que la asignatura llegue a interesar en los alumnos e influir en su dedicación al estudio, la cual depende en gran medida de la calidad de enseñanza, pues *“en definitiva, la enseñanza despierta mayor interés que las mismas materias. Por lo demás, un mismo curso interesará con un determinado profesor y con otro será irrelevante” (Saint-Onge, 2000, p.38).*

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

Diseño de las hojas de trabajo

De acuerdo al objetivo planteado se consideró seguir una metodología experimental y cualitativa, de la que se obtuvo información a partir de la aplicación de un par de actividades diseñadas de manera tal que, abordaron el caso específico de la circunferencia considerando para su estudio el planteamiento de problemas de aplicación en el entorno.

Para lo cual, como punto de partida se plantearon dos versiones distintas de problemas de aplicación de la circunferencia, la primera de ellas abordando una situación problema en la que se pretendía establecer un banco de abastecimiento de productos básicos alimenticios a personas localizadas en zonas marginadas, considerando la ubicación de éste a igual distancia de tres pueblos cercanos. Brindando para la construcción geométrica del problema una serie de pasos a seguir mediante el uso de GeoGebra. Mientras la segunda versión, consideraba tres casos particulares de los que debían ubicarse las coordenadas y construir la circunferencia representativa del problema en base a la información descrita; un sismo y el radio de sus ondas expansivas, la erupción de un volcán y la distancia de su efecto desde el punto de origen y finalmente, la explosión de una gasera con un denso humo visible a determinados kilómetros a la redonda.

Una vez establecida la redacción de los problemas de aplicación sobre la circunferencia, se prosiguió a realizar con ayuda de GeoGebra, la construcción de los pasos a seguir para su

representación geométrica, lo cual, sirvió como parteaguas para la elaboración de la tabla que permitiría rescatar información valiosa sobre las coordenadas de los puntos localizados, ecuaciones de las circunferencias, radios, etc. Así como las preguntas de reflexión sobre el análisis de la información rescatada en la tabla.

Obteniendo como producto “final” dos actividades, la primera de ellas con un contenido de 3 hojas de trabajo en su totalidad, y la segunda conformada por 4. Muestra de éstas se presentan en el Anexo (1).

Cabe destacar que una vez diseñadas las actividades, se prosiguió a resolverlas de manera personal, a fin de corroborar que el diseño y la redacción de éstas fuera clara y guiara realmente al objetivo planteado.

Diseño de la experimentación

Una vez elaboradas las hojas de trabajo (correspondientes a las actividades I y II), se procedió a la aplicación de la prueba piloto de éstas, en un grupo de estudiantes del tercer semestre del nivel bachillerato, pertenecientes al Instituto Mahatma Gandhi en Uruapan Michoacán. Quienes cursaban por primera vez la materia de Matemáticas III durante el ciclo escolar 2014-2015. En donde además se tuvo facilidad de acceso al laboratorio de cómputo, permitiendo ocupar horas clase de la materia en cuestión. El grupo constó de 33 alumnos, sin embargo debido a la naturalidad de las actividades se consideró seleccionar un subgrupo de 20 de ellos para la realización de las pruebas a fin de tener resultados sumamente fidedignos de éstas, tomando la

participación de 10 de ellos para la prueba piloto y los 10 restantes para la aplicación de la prueba definitiva.

Inicialmente, se les presentó a todos el software en el salón de clase, mostrando el uso de algunas de sus herramientas con ayuda de un proyector tomando una sesión de 50 minutos para ello.

Posteriormente en otra sesión de 50 minutos, se les permitió manipular el software haciendo uso de una máquina por cada alumno proporcionándoles una versión sintetizada de un manual que mostraba las herramientas de GeoGebra acompañadas de una breve descripción al lado de cada ícono que las representaba, con la indicación de que buscaran cada una de los íconos mostrados en el breve manual y descubrieran su función. Obteniendo resultados muy favorables dado que los estudiantes se encuentran actualmente bastante familiarizados con el uso de la tecnología.

Continuando con la actividad; dado que se tenían previamente elaboradas las hojas de trabajo, se continuó con una prueba piloto de éstas aplicándola a 10 estudiantes del grupo en cuestión (conformados en parejas) a fin de realizar las actividades indicadas en las hojas de trabajo, es decir, se les proporcionó una actividad de las hojas de trabajo por pareja (debiendo responder ambos) y por consiguiente, también se les facilitó el acceso a una computadora por bina. Ésta prueba dio la pauta a la corrección en las actividades, puesto que mostraron dificultad para responder a la pregunta: ¿Qué relación existe entre la ecuación de la circunferencia y su centro? misma que se solucionó al sugerirles auxiliarse de un ejemplo para responderla. A la vez, fue posible percatarse de que en la Actividad II, la pregunta: ¿Por qué razón la ecuación de la circunferencia que representa el sismo no tiene valores numéricos antes del signo de igualdad?,

debía cambiarse de posición a una ubicación posterior (ya que respondieran algunas preguntas previas), siendo la segunda sugerencia realizada, puesto que mostraron dificultad para responderla, con lo que debieron dejarla en penúltimo lugar para dar respuesta. Además, entre otras preguntas que surgieron en los estudiantes al momento de responder la actividad, una que más llamó la atención fue que una de las parejas realizó todos los pasos indicados del a) hasta el o) sin llenar la tabla y acto seguido, comenzaron a responder las preguntas, lo cual imposibilitó el razonamiento para su respuesta en las hojas de trabajo. Vislumbrando con ésta prueba las correcciones a realizar enseguida.

Luego, posterior y coincidentemente, en el colegio donde serían aplicadas las actividades se solicitó mostrar a los estudiantes del tercer grado de secundaria como sería pasar un día en el nivel preparatoria, denominado así: “Mi día en prepa”. Con lo cual, se presentó la oportunidad idónea para aplicar una versión sintetizada de la actividad I. Para ello, se tomó a un grupo de 20 estudiantes quienes desconocían completamente el tema a tratar, y se les presentó de manera expositiva y tridimensional un cono intersecado por un plano, mostrando así el tipo de corte a realizar para obtener las cónicas, acto seguido se les indicó que con la actividad que realizarían posteriormente indagarían brevemente acerca del estudio de la circunferencia. A su vez, se les mostró con ayuda de un proyector el icono que representa el programa de GeoGebra y algunas funciones básicas como la localización de puntos y el uso de herramientas para trazar un segmento, mediatriz, circunferencia, así como el cálculo de distancias. Posteriormente, se les llevó al laboratorio de cómputo donde se les proporcionó una hoja de trabajo por cada dos alumnos.

Dicha actividad fue adaptada de manera tal que, en la tabla de datos que debían llenar, únicamente se presentaban 3 filas y se les realizó una sola pregunta en base a la tabla: ¿Por qué razón las distancias FA, FB y FC se mantienen igual en cada fila?

Con lo cual, se pretendía descubrir si existía alguna ambigüedad en la redacción de las instrucciones de las actividades puesto que únicamente uno de los equipos no había seguido la instrucción de manera adecuada y podía a la vez, interpretarse como falta de atención al leer. Lo que satisfactoriamente vislumbró de inmediato la corrección que se debía realizar en éstas, puesto que su pregunta frecuente fue: ¿Por qué aparecen estos datos en la tabla?

Por otro lado, se obtuvieron respuestas muy satisfactorias en la resolución de las hojas de trabajo dado que algunas de sus respuestas a la pregunta realizada fueron:

“Porque representa el radio”, “Porque todas las distancias empezaron en el punto F. Porque es el radio de la circunferencia”, “Porque es el radio”, “Porque representa el radio del círculo”, “Porque es el punto medio (radio)”

Cabe mencionar que para todo lo anteriormente descrito en la actividad aplicada “Mi día en prepa” se tomó un tiempo de 50 minutos, y se presenta ésta en el Anexo (2).

Tras ello, se consideró conveniente modificar la segunda de las instrucciones de la actividad, haciéndose necesario el cambio de la instrucción:

- I. En base a los datos obtenidos de la construcción, completa la tabla siguiendo las instrucciones que se presentan a continuación

Por la siguiente instrucción (en donde se resaltó una parte de ésta):

- II. En base a los datos obtenidos de la construcción, se llenó la primera fila de la tabla que a continuación se presenta. **Completa los espacios en blanco** siguiendo las instrucciones

Una vez realizada la corrección en las instrucciones de ambas actividades (el producto final y definitivo en la redacción de las hojas de trabajo se presenta en el Anexo (3)), se procedió a aplicar la prueba de manera definitiva. Tomando al otro subgrupo de 10 estudiantes que pertenecían al mismo grupo de jóvenes que cursaban Matemáticas III, tomando en consideración alumnos de bajo, mediano y alto desempeño, quienes trabajaron en parejas asociadas según se les indicó, con la finalidad de que los equipos fueran un tanto homogéneos.

Básicamente la actividad se dividió en dos partes importantes para su posterior análisis:

- I. Trabajo en parejas
- II. Trabajo colaborativo

El primero de ellos consistió en seguir (en parejas previamente establecidas) las instrucciones guiadas presentadas en las hojas de trabajo, haciendo uso de GeoGebra, posteriormente se presentó una tabla de datos conformada por cuatro filas en donde la primera de ellas contenía información sobre la construcción realizada, enseguida la solicitud fue que en base a las instrucciones posteriores completaran los datos visibles a través de la construcción. Finalmente se les solicitó responder una serie de preguntas en base a los datos de la tabla que previamente habían completado, todo ello de manera escrita a través de las instrucciones de las hojas de trabajo.

Ambas actividades que correspondían a las hojas de trabajo, fueron resueltas en un tiempo de 50 minutos cada una, pertenecientes a una sesión de clase.

Posteriormente, en lo que se refiere a la segunda parte de la actividad, se requirió una sesión de 50 minutos, en la que se llevó a cabo el análisis de las actividades de manera conjunta, donde participó el mismo grupo de 10 estudiantes que realizó la prueba definitiva. Siendo necesario para ello, la colaboración de una tercera persona que grabara la sesión con ayuda de una videocámara de mano. Además, se utilizaron dos computadoras portátiles y dos proyectores, que permitieron mostrar tanto las actividades con su problema de aplicación y las instrucciones a seguir, como el software GeoGebra. Lo anteriormente descrito era entonces visible para todos los estudiantes.

En ésta sesión se trabajó de manera conjunta con ayuda de un modulador (profesor) y el subgrupo de alumnos, de entre los cuales se requirió a uno de ellos para realizar la manipulación del software según las instrucciones, el razonamiento y la participación consensuada. Mismos que se tomaron de igual forma para llenar la tabla en las hojas de trabajo.

Posteriormente, una vez que se tuvo acceso a la sesión grabada, se extrajo el verbatim concerniente al trabajo colaborativo de ésta sesión. Para finalmente realizar el enriquecedor análisis de la información recabada.

En lo que respecta al análisis de la información, ésta se desglosó de tal manera que se tomaron por fragmentos cada una de las preguntas realizadas correspondientes a las hojas de trabajo, es decir, de la Actividad I se obtuvieron 6 fragmentos (por ser 6 el número de preguntas), mientras en la Actividad II se extrajeron 10 fragmentos (siendo 9 las preguntas correspondientes a ésta actividad) considerando una pregunta que surgió de manera adicional en el punto cúspide de la sesión.

Finalmente, se realizó un análisis comparativo y relacional de las respuestas obtenidas por los estudiantes en cada uno de los fragmentos a través del trabajo en binas con respecto a las respuestas obtenidas a través de su participación durante el trabajo colaborativo.

Objetivos de las actividades

En lo que respecta a la Actividad I, se considera el siguiente problema de aplicación:



Se desea abastecer con productos básicos alimenticios a personas que viven en zonas marginadas, sin embargo, para brindar el recurso, estratégicamente se desea construir un banco de abastecimiento que se encuentre a igual distancia de dos pueblos situados en las coordenadas $A(2,5)$, $B(-3,2)$ y de una tercer localidad situada en $C(-4,1)$.

En donde la finalidad de éste, es proveer al estudiante de un ejercicio que implícitamente involucra la ecuación de la circunferencia y se relaciona con una situación de índole cotidiana.

Posteriormente, se le solicita como primera instrucción:

En base a los datos proporcionados realizar los siguientes pasos de construcción con ayuda de GeoGebra.

- a) Localiza los puntos A, B y C
- b) Traza el segmento AB
- c) Traza el segmento BC
- d) Localiza el punto medio del segmento AB

- e) Localiza el punto medio del segmento BC
- f) Traza la mediatriz del segmento AB que pasa por D
- g) Traza la mediatriz del segmento BC que pasa por E
- h) Localiza el punto de intersección F de las mediatrices
- i) Calcula la distancia del punto de intersección F al punto A
- j) Calcula la distancia del punto de intersección F al punto B
- k) Calcula la distancia del punto de intersección F al punto C
- l) Dibuja la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C

Siendo el objetivo de tal instrucción, que el estudiante represente de manera geométrica con ayuda del software la situación problema que se le ha presentado inicialmente, además de brindarle a través de los pasos de construcción, los elementos necesarios para cubrir las necesidades del problema proporcionado.

La segunda instrucción se muestra a continuación.

En base a los datos obtenidos de la construcción, se llenó la primera fila de la tabla que a continuación se presenta. **Completa los espacios en blanco** siguiendo las instrucciones:

Fila	A	B	C	Mediatriz AB	Mediatriz BC	F	Dist. FA	Dist. FB	Dist. FC	Ecuación de la Circunferencia
1	(2,5)	(-3,2)	(-4,1)	$5x + 3y = 8$	$x + y = -2$	(7, -9)	14.87	14.87	14.87	$(x - 7)^2 + (y + 9)^2 = 221$
2										
3										
4										

Tabla 1

- m) Mueve el punto A , a la posición $(2,4)$ y llena la segunda fila de la Tabla 1 con los datos que se te solicitan.
- n) Deja el punto A en la posición $(2,4)$ mueve el punto B a la posición $(4,3)$ y llena la tercera fila de la Tabla 1 con los nuevos datos.
- o) Con el punto A en la posición $(2,4)$ y B en $(4,3)$ mueve el punto C a las coordenadas $(1,3)$ y completa la Tabla 1

Siendo la finalidad de tal instrucción que el estudiante pueda identificar los elementos que intervienen en la construcción, así como los cambios visibles tanto geométricos como algebraicos al modificar la ubicación de los puntos iniciales.

Posteriormente, como última instrucción se le solicita responder las siguientes preguntas:

1. ¿Qué cambio ocurre en la circunferencia al mover el punto B ?
2. ¿Por qué razón las distancias FA, FB y FC se mantienen con el mismo valor en cada fila?
3. ¿Qué relación existe entre las coordenadas del punto F y la ecuación de la circunferencia?
4. Geométricamente, ¿qué modificación sufrió la circunferencia al cambiar las coordenadas de los tres puntos? ¿Por qué?
5. ¿Qué relación existe entre las distancias FA, FB, FC y la ecuación de la circunferencia?
6. ¿Cómo escribirías la ecuación de una circunferencia con centro en las coordenadas $F(2,1)$ y radio $r = 9$?

En donde cada una de las preguntas de forma secuencial llevan al estudiante a través de su respuesta a identificar los elementos que intervienen, al escribir la ecuación de una circunferencia a manera de ejemplo y deducir su representación algebraica dadas las coordenadas del centro de ésta y su radio.

De igual forma, la Actividad II se constituye de tres instrucciones generales a partir del siguiente problema de aplicación:



El Servicio Sismológico Nacional detecta un sismo con origen en las costas de Colima en las coordenadas $A(0,0)$ cuyas ondas se extienden en una zona delimitada a $1km$ a la redonda. Simultáneamente, una sacudida de gran intensidad en el volcán Popocatépetl, situado en las coordenadas $B(3,1)$, hace sentir su efecto en un radio de $2km$ a la redonda, mientras que, en el parque industrial de Manzanillo ubicado en las coordenadas $C(-1,1)$, se genera la explosión de una gasera que propaga un denso humo visible a $3 km$ a la redonda.

Donde nuevamente se le provee al estudiante de un ejercicio que implica la ecuación de la circunferencia y se relaciona con una situación de carácter cotidiano.

Considerándose como primera instrucción:

En base a los datos proporcionados, realizar los siguientes pasos de construcción con ayuda de GeoGebra.

- a) Localiza los puntos A, B y C
- b) Dibuja la circunferencia con centro en el punto A , considerando el radio indicado
- c) Dibuja la circunferencia con centro es el punto B , considerando el radio indicado
- d) Dibuja la circunferencia cuyo centro es el punto C , considerando el radio indicado

Fila	A	B	C	Ecuación de la Circunferencia del Sismo	radio	Ecuación de la Circunferencia del Volcán	radio	Ecuación de la Circunferencia de la Gasera	radio
1	(0,0)	(3,1)	(-1,1)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$	2	$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$	3
2									
3									
4									

Tabla 2

En donde el estudiante (por sí sólo), sin instrucciones tan detalladas construye de manera geométrica con ayuda del software la representación del problema.

Posteriormente, como segunda instrucción:

En base a los datos obtenidos de la construcción se llenó la primer fila de la tabla que a continuación se presenta. **Completa los espacios en blanco** siguiendo las instrucciones.

- e) Mueve el punto B , a la posición $(3, -1)$ y llena la segunda fila de la Tabla con los datos que se te solicitan.
- f) Deja el punto B en la posición $(3, -1)$ mueve el punto C a la posición $(4,3)$ y llena la tercera fila de la Tabla con los nuevos datos.
- g) Con el punto A en la posición $(0,0)$ y B en $(3, -1)$ mueve el punto C a las coordenadas $(3,0)$ y completa la cuarta fila de la Tabla

En donde a diferencia de la tabla correspondiente a la actividad anterior, ésta únicamente contiene las coordenadas de los puntos indicados en el problema (considerados como el centro de cada una de las circunferencias), el radio y su respectiva

ecuación. Pues los elementos de las circunferencias son determinados de manera directa en base a la descripción del problema.

Finalmente, como tercera instrucción:

Analiza la Tabla y responde las siguientes preguntas.

1. ¿Qué modificación observas en la ecuación de la circunferencia al cambiar de posición el punto B a las coordenadas $(3, -1)$?
2. ¿Qué cambio ocurre en la ecuación de la circunferencia al mover el punto C a la posición $(4,3)$?
3. ¿Qué cambio ocurre en la ecuación de la circunferencia al mover el punto C a la posición $(3,0)$?
4. ¿Qué relación existe entre la ecuación de la circunferencia y su centro? (Puedes responder auxiliándote de un ejemplo ilustrativo)
5. ¿Cómo escribirías la ecuación de una circunferencia con centro en las coordenadas $(5,3)$ y radio $r = 4$?
6. ¿Cómo escribirías la ecuación de una circunferencia con centro en las coordenadas $(0,2)$ y radio $r = 5$?
7. ¿Cómo escribirías la ecuación de una circunferencia con centro en las coordenadas $(0,0)$ y radio $r = 9$?
8. ¿Por qué razón la ecuación de la circunferencia que representa el sismo no tiene valores numéricos antes del signo de igualdad?
9. ¿Qué relación existe entre la ecuación de la circunferencia y su radio? (Puedes responder auxiliándote de un ejemplo ilustrativo)

Cabe destacar que aunque, las preguntas fueron presentadas de forma secuencial, llevan al estudiante a través de su respuesta a identificar la relación existente entre la ecuación de la circunferencia y su centro, así como la relación entre la ecuación de la circunferencia y su radio. Y finalmente, la representación algebraica de la circunferencia bajo distintos valores en sus coordenadas como centro, llegando a considerar el caso en que el centro de ésta se encuentra en el origen. Todo ello, con el objetivo de que el estudiante logre identificar la relación existente entre las coordenadas del centro de la circunferencia, su radio y su ecuación. Y por ende, sea capaz de identificar el radio y las coordenadas del centro de una circunferencia cuando se le proporciona la ecuación de ésta.

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS VERBATIM

ACTIVIDAD I

PARTICIPANTES

A1: Andrea

A2: Claudia

A3: Cristina

A4: Daniel

A5: Grecia

A6: Janeth

A7: Karla

A8: Lili

A9: Ricardo

A10: Salma

M: Maestra

Fragmento 1

Una vez determinada la circunferencia formada por las coordenadas de los puntos A, B y C, así como los elementos que la conforman, se pidió cambiar de posición el punto B e identificar la modificación que ocurre en la circunferencia. Obteniéndose así el verbatim del siguiente fragmento:

Fragmento 1:

¿Qué cambio ocurre en la circunferencia al mover el punto B?

- A3: Se hace más grande de tamaño
- A4: Se hace más grande
- A8: Se hace más chica
- A3: Se hace más pequeña
- A4: ¿Sí?
- A4: ¡Ah! Si es cierto ¡Sí!
- M: ¿Dónde cambia de coordenadas el punto B? ¿En qué fila?

(Refiriéndose a la tabla)

- A10, A3: En la...
- A8, A10, A5: ...3
- M: ¿En la tercer fila? ¿Aquí? (Señalado la tabla el renglón correspondiente)

- **A8:** Ajá...
- **A3, A7:** ¡Sí!
- **M:** ¿Qué cambio ocurre en la ecuación de la circunferencia?
- **A8:** Cambian los datos de X y Y
- **M:** ¿Cambia X y Y? (Realizando la pregunta de manera general)
- **A3:** ¡Sí!
- **A10:** Cambia el valor de X y Y
- **M:** ¿Qué valores toman ahora?
- **A5:** 0.75 y 1
- **A8:** Y menos 1... (corrigiendo a A5 y refiriéndose únicamente a las coordenadas del centro de la circunferencia)
- **A5:** No
- **A2:** Es más (refiriéndose al signo positivo)
- **A1:** Sí, es positivo
- **A10:** Sí, es 1
- **A2:** Por el signo se hace positivo
- **M:** Y la circunferencia geométricamente... ¿quedaba igual?
- **A3:** Se hacía más chica
- **A8, A7:** Es más chica
- **A3:** Es más chiquita
- **A10:** ¡Sí!

a) Deje el punto A en la posición (1,5) y mueva el punto B a la posición (4,3) y llene la tercera fila de la Tabla 1 con los nuevos datos.
 c) Con el punto A en la posición (2,4) y B en (4,3) mueve el punto C a las coordenadas (1,3) y completa la Tabla 1

Fila	A	B	C	Mediatriz AB	Mediatriz BC	F	Dist. FA	Dist. FB	Dist. FC	Ecuación de la Circunferencia
1	(1,5)	(-1,2)	(-4,1)	$5x + 3y = 8$	$x + y = -2$	(7, -8)	14.87	14.87	14.87	$(x - 7)^2 + (y + 8)^2 = 221$
2	(2,9)	(-3,1)	(-4,1)	$5x + 2y = 3$	$x + y = -2$	(25, 45)	8.51	8.51	8.51	$(x - 25)^2 + (y + 45)^2 = 72$
3	(1,5)	(4,3)	(-4,1)	$-2x + y = -2.5$	$4x + y = 2$	(0.75, -1)	5.15	5.15	5.15	$(x - 0.75)^2 + (y + 1)^2 =$
4	(2,4)	(4,3)	(1,3)	$-2x + y = -2.5$	$x = 2.5$	(2.5, 2.5)	1.58	1.58	1.58	$(x - 2.5)^2 + (y - 2.5)^2 = 2.5$

Tabla 1

Ilustración 1

Análisis:

Al principio, al realizar la pregunta de manera general, algunos alumnos respondieron sin analizar la fila de la tabla que representaba la pregunta en cuestión, pues en realidad al realizar cada uno de los pasos de la actividad, la circunferencia se vio aumentada o disminuida en tamaño según la posición de las coordenadas.

Situación que prontamente pudo corregirse gracias a la participación de sus compañeros, con lo cual, posteriormente se dieron cuenta de que la circunferencia se vio reducida en tamaño y cambiaron los valores que representan las coordenadas del centro de ésta.

Sin embargo, cuando realizaron la actividad trabajando en parejas, dos de los equipos fueron más analíticos en su respuesta, relacionando la modificación geométrica y algebraica, o en otros casos destacando detalles adicionales.

Pregunta:

1. ¿Qué cambio ocurre en la circunferencia al mover el punto B ?

Respuestas:

A4 y A6:

Cambia la ecuación de la circunferencia, las distancias de F a los puntos A, B, C y Coordenadas en F .

A8 y A9:

Cambia las mediatrices, el punto F , las distancias con el punto F y la Ec. de la Circunferencia

A5 y A7:

Cambia la ecuación, y el tamaño

A2 y A10

disminuye el valor de x y el valor de y

A1 y A3

Reducir su tamaño

Conclusión:

Se hizo necesario distinguir la modificación geométrica de la algebraica, sufrida por la circunferencia al cambiar las coordenadas del punto B. De modo que les fue posible identificar fácilmente el cambio en sus coordenadas.

Sin embargo, en ese momento únicamente A8 detectó que los valores de la ecuación correspondían al centro de la circunferencia y que para escribir dicha ecuación debía cambiarse el signo, pues al externar su idea únicamente A2 sabía a lo que A8 se refería, respondiendo que, por el signo de la ecuación el valor cambiaba de signo, mientras los demás “corrigieron”, indicando que el signo visualizado en la ecuación no era el que ella expresaba.

Fragmento 2

Una vez que se completaron todos los datos solicitados en la Tabla 1 y haciendo un análisis sobre ésta, se les solicitó responder la siguiente pregunta, que hace referencia a la relación existente entre las coordenadas del punto F (centro de la circunferencia) y la ecuación de la circunferencia. Extrayéndose así el verbatim del siguiente fragmento:

n) Deje el punto A en la posición (2,4) y llene la tercera fila de la Tabla 1 con los nuevos datos.
o) Con el punto A en la posición (2,4) y B en (4,3) mueva el punto C a las coordenadas (1,3) y completa la Tabla 1

Fila	A	B	C	Mediatriz AB	Mediatriz BC	F	Dist. FA	Dist. FB	Dist. FC	Ecuación de la Circunferencia
1	(2,5)	(-3,2)	(-4,1)	$5x+3y=8$	$x+y=-2$	(7,-9)	14.87	14.87	14.87	$(x-7)^2+(y+9)^2=231$
2	(2,4)	(-3,1)	(-4,1)	$5x+2y=3$	$x+y=-2$	(25,4)	8.5	8.5	8.5	$(x-25)^2+(y+4)^2=725$
3	(2,4)	(4,3)	(4,1)	$-2x+y=2.5$	$x+y=2$	(0.75,-1.5)	5.5	5.5	5.5	$(x-0.75)^2+(y+1.5)^2=26.56$
4	(2,4)	(4,3)	(1,3)	$-2x+y=2.5$	$x=2.5$	(2.5,2.5)	1.58	1.58	1.58	$(x-2.5)^2+(y-2.5)^2=2.5$

Tabla 1

Ilustración 2

Fragmento 2:

¿Qué relación existe entre las coordenadas del punto F y la ecuación de la circunferencia?

- **M:** ... Ahora, ¿qué relación existe entre las coordenadas de éste punto F y la ecuación de la circunferencia? (preguntando de manera general en el encabezado de las columnas de la tabla)
- **A10:** Son los valores...
- **A8:** Son los valores de X y Y
- **A6:** El 0.75 en X y el... 1 en Y
- **A8:** El -1 en Y (Lilí señala el signo negativo indicando que el valor corresponde a las coordenadas del punto F)
- **M:** ¿De cuál Y? ¿De cuál X?
- **A10:** De F...
- **A1:** En el de...
- **A6:** En la ecuación de la circunferencia.
- **M:** ¿De la ecuación de la circunferencia?
- **A3:** ¡Ah! ¡Ya! (comenta para sí Cristina a mitad de la pregunta de M, expresando que ha entendido la relación existente).
- **A3, A4, A7, A10:** Sí (respondiendo a la pregunta de M).
- **M:** ¿Son éstos mismos valores? (Señalando en la Tabla la columna correspondiente a las coordenadas del punto F)
- **A7:** Los de... los de... los del punto de intersección.
- **A10:** El punto de intersección.

las coordenadas (1,3) y completa la Tabla 1

B	C	Mediatriz AB	Mediatriz BC	F	Dist. FA	Dist. FB	Dist. FC	Ecuación de la Circunferencia
(-3,2)	(-4,1)	$5x+3y=8$	$x+y=-2$	(7,-9)	14.87	14.87	14.87	$(x-7)^2+(y+9)^2=2$
(-3,1)	(-4,1)	$5x+2y=3$	$x+y=-2$	(25,45)	8.51	8.51	8.51	$(x-25)^2+(y+45)^2=7$
				(0.75,-1)	5.15	5.15	5.15	$(x-0.75)^2+(y+1)^2$
				(2,2)	1.58	1.58	1.58	$(x-2.5)^2+(y-2.5)^2=2.5$

Tabla 1

Ilustración 3

Análisis:

A8 Logra detectar la relación existente entre las coordenadas del punto F y la ecuación de la circunferencia manifestando que son las coordenadas X y Y (de la ecuación). Sin embargo, tras la participación de A6, quien señala a manera de ejemplo las coordenadas del punto F (0.75, -1) (ubicadas en el tercer renglón de la Tabla) mencionando que “0.75 corresponde al valor en X y 1 al de Y”, y en cuya su intervención resalta únicamente los valores y su relación con la ecuación, omitiendo los signos. A8 corrige indicando que la coordenada Y del punto F es -1.

Aunque entre A6 y A8 han relacionado lo solicitado, M pregunta de manera general a qué X y Y se refieren de modo que logre detectarse si ha quedado claro en los demás alumnos. Con lo cual A3 manifiesta para sí que ha logrado visualizar dicha relación. Y tras preguntar M si se refieren a los valores de la columna en los que se observan las

coordenadas del punto F , A7 y A10 aportan una observación más, indicando que las coordenadas corresponden al punto de intersección de las mediatrices.

En los que respecta al trabajo en parejas, lograron detectar una relación existente entre las coordenadas del centro de la circunferencia y su ecuación, sin embargo, uno de los equipos expresó de manera más detallada tal relación al escribir su respuesta, y algunos como A7 quienes fueron menos explícitos en su respuesta de manera escrita, lograron tener una mejor deducción en el análisis grupal. No obstante, aunque la respuesta de A1 y A3 fue muy detallada y clara, A3 manifestaba haber observado la relación existente hasta que se encontraba analizando la tabla de manera grupal.

Algunas respuestas a continuación:

Pregunta:

3. ¿Qué relación existe entre las coordenadas del punto F y la ecuación de la circunferencia?

Respuestas:

A1 y A3:

¿Qué relación existe entre las coordenadas del punto F y la ecuación de la circunferencia?

$F(-9, -9)$ $(x+9)^2 + (y+9)^2 = 20$
 De las coordenadas del punto F se puede deducir que el centro de la circunferencia es el punto F .
 La ecuación de la circunferencia es $(x+9)^2 + (y+9)^2 = 20$.

A8 y A9:

Cambiar las mediatrices, el punto F, las distancias con el punto F y la Ec. de la Circunferencia

A2 y A10:

Que los valores del punto F se ponen en la Ec. de la circunferencia

A4 y A6:

Que son los valores que se presentan dentro de la ecuación segundo de x y y .

A5 y A7:

son el valor de la x e y

Conclusión:

En el trabajo en parejas A1 y A3 formaban una pareja de equilibrio y su respuesta en las hojas de trabajo fue muy clara y correcta. Contrario a A8 y A9 quienes formaron una pareja de dos alumnos sobresalientes y en su respuesta detectaron varios cambios en la tabla sin expresar claramente la relación directa entre el punto F que representa las coordenadas del centro de la circunferencia y su ecuación.

No obstante, una vez que se trabajó de manera grupal fue posible detectar que A3 no tenía clara la relación existente. Mientras A8, a través de su participación mostraba poder notar una relación más allá de la pregunta realizada, al mencionar el cambio de signo en las coordenadas que representan el centro de la circunferencia al momento de escribir la ecuación.

Fragmento 3

Inicialmente la circunferencia pasaba por tres puntos, cuyas coordenadas se fueron modificando una a una al momento de realizar cada una de las instrucciones señaladas en las hojas de trabajo, llegando a un punto en el cual ya se habían modificado los tres puntos que se tomaron como datos iniciales del problema, surgiendo así la siguiente pregunta y su respectivo fragmento.

Fragmento 3:

Geométricamente, ¿qué modificación sufrió la circunferencia al cambiar las coordenadas de los tres puntos? ¿Por qué?

- **M:** Bueno, geométricamente ¿Que otro cambio observaron al cambiar las coordenadas de los tres puntos?
- **A3:** Cambió... como desde...
- **M:** Primero, ¿Dónde cambian los tres puntos de posición?
- **A5, A10:** En la...
- **M:** ¿En qué fila?
- **A4, A5, A10:** En la 4
- **M:** ¿Y ya tienen distintos puntos? (señalando la fila 4)
- **A3, A4:** Sí

- **A3:** Los 3 (refiriéndose a los puntos)
- **M:** Geométricamente ¿Qué les pasó?
- **A1:** Se hizo bien chiquita.
- **A3:** ¿Se ve cuando pasa del otro lado no?
- **M:** Modificamos puntos y... ¿la circunferencia qué?
- **A1, A4:** Se...
- **A3:** Se redujo.
- **A4:** Se hizo más pequeña
- **M:** ¿Por qué?
- **A9:** Porque se fueron acercando al otro punto, poco a poco.
- **A8:** Ajá...
- **A10:** Sí

a) Deje el punto A en la posición (2,4) mueva el punto B a la posición (4,3) y llena la tercera fila de la Tabla 1 con los nuevos datos.

b) Con el punto A en la posición (2,4) y B en (4,3) mueva el punto C a las coordenadas (1,3) y completa la Tabla 1

Fila	A	B	C	Mediatriz AB	Mediatriz BC	F	Dist. FA	Dist. FB	Dist. FC	Ecuación Circunferencia
1	(2,4)	(-3,2)	(-4,3)	$5x+3y+8$	$x+y-2$	$(1,-6)$	14.87	14.87	14.87	$(x-7)^2 + (y+1)^2 = 25$
2	(2,4)	(-3,2)	(-4,3)	$5x+3y+8$	$x+y-2$	(2,5)	8.5	8.5	8.5	$(x-2.5)^2 + (y-5)^2 = 1$
3	(2,4)	(4,3)	(4)	$-2x+y-2$	$4x+1$	(2,2.5)	1.5	1.5	1.5	$(x-2)^2 + (y-2.5)^2 = 0.5$
4	(2,4)	(4,3)	(1,3)	$-2x+y-2$	$x-2.5$	(2,2.7)	1.58	1.58	1.58	$(x-2)^2 + (y-2.7)^2 = 0.5$

Tabla 1

Ilustración 4

Análisis:

Fue necesario reformular la pregunta agregando dos anteriores, dado que se hizo muy notoria la pausa entre el grupo intentando identificar primeramente el cambio de coordenadas, introduciéndose la pregunta previa que cuestionaba dónde cambiaron de coordenadas los tres puntos, y posteriormente una segunda pregunta que solicitaba identificar el número de fila donde cambiaron las coordenadas de los tres puntos, logrando entonces que el grupo identificara posteriormente una reducción en el tamaño de la circunferencia, sin embargo únicamente A9 pudo responder que la causa de la reducción era un acercamiento entre las coordenadas de los tres puntos.

En lo que respecta al análisis de las hojas de trabajo, mostraron respuesta limitadas concluyendo únicamente que la circunferencia reducía su tamaño por el cambio de coordenadas sin manifestar específicamente un acercamiento de puntos como lo expresó A9 en su participación en la actividad grupal. Muestra de ello a continuación:

Pregunta:

4. Geométricamente, ¿qué modificación sufrió la circunferencia al cambiar las coordenadas de los tres puntos?

¿Por qué?

Respuestas:

A8 y A9:

Cambio el tamaño

¿Por qué?

Porque los puntos A, B y C cambiaron su ubicación

A4 y A6:

Cambiaron tamaños, distancias entre puntos a excepción del punto E.

¿Por qué?

Las coordenadas se modificaron y por lo tanto hay una alteración de valores que llegan a cambiar los datos y la figura.

A2 y A10:

la circunferencia se redujo y se formaron 4 triángulos, gracias a los segmentos y las mediatrices

¿Por qué?

porque las coordenadas se modificaron y
debido a esto todos los demás valores
cambiaron

A1 y A3:

se hizo mas pequeña y cambio

A5 y A7:

se hizo mas pequeña de
acuerdo alos punto

Conclusión:

Los estudiantes en cuestión lograron identificar la modificación geométrica que sufrió la circunferencia al cambiar las coordenadas de los tres puntos, sin embargo se les dificultó expresar el porqué de manera verbal, pues de manera escrita fueron un poco más explícitos en su respuesta. Sin embargo, en el caso particular de A9 logró ser más reflexivo en su participación grupal al externar que la circunferencia se veía reducida en tamaño debido a que los puntos A, B y C se acercaron considerablemente.

Fragmento 4

Una vez realizado un análisis en cuanto a las modificaciones geométricas que sufrió la circunferencia al cambiar algunos de sus puntos, se prestó atención a su relación con la ecuación de la circunferencia de acuerdo a los datos que la constituyen.

Fragmento 4:

¿Qué relación existe entre las distancias FA, FB, FC y la ecuación de la circunferencia?

- **M:** ¿Qué relación existe ahora entre las distancias FA, FB, FC , y la ecuación de la circunferencia?
- **A8:** Que cuando las elevas al cuadrado...
- **A9:** Su radio...
- **A8:** Da el resultado...
- **A5:** Queda el resultado
- **A10:** Su radio
- **M:** ¿Este es el resultado? (señalando la columna de las distancias FA, FB y FC)
- **A2, A9:** Sí
- **M:** ¿Y la ecuación como... par...? (Señalando la columna que corresponde a la ecuación de la circunferencia)

Análisis:

De manera grupal lograron concretar una respuesta más enriquecida al participar complementando uno a otro lo que intentaban expresar, logrando identificar que se trataba del radio elevado al cuadrado e incluso A10 mencionó que las coordenadas del centro participaban en la ecuación, aunque no se preguntaba sobre dicha relación.

Sin embargo, en lo que a las hojas de trabajo se refiere A2 y A10 no mostraron una clara relación entre las distancias FA, FB, FC y la ecuación de la circunferencia. Contrario a la pareja formada por A1 y A3 quienes a pesar de no haber participado en el análisis grupal, en el trabajo en parejas fueron muy explícitas en su respuesta, auxiliándose de un ejemplo a fin de expresarse de manera clara.

Prueba de la actividad en parejas a continuación:

Pregunta:

5. ¿Qué relación existe entre las distancias FA, FB, FC y la ecuación de la circunferencia?

Respuestas:

A1 y A3:

La relación es que son el radio

Ejemplo: $FA = 14.87$ $FB = 14.87$ $FC = 14.87$

$$r = (14.87)(14.87) = 221$$

$$(x-7)^2 + (y+9)^2 = 221$$

A8 y A9:

Es el radio

A5 y A7:

es el radio de la circunferencia

A4 y A6:

Que tienen el mismo valor en distancia y
que son iguales con los que están a la
misma.

A2 y A10

porque es el centro de la circunferencia

Conclusión:

Para ésta pregunta el análisis grupal mostró una respuesta más nutrida con la participación de varios comentarios que claramente complementaban la respuesta de algún otro compañero que intentaba expresarla. De manera que identificaron el resultado de la ecuación como producto de elevar al cuadrado el radio de la misma.

Fragmento 5

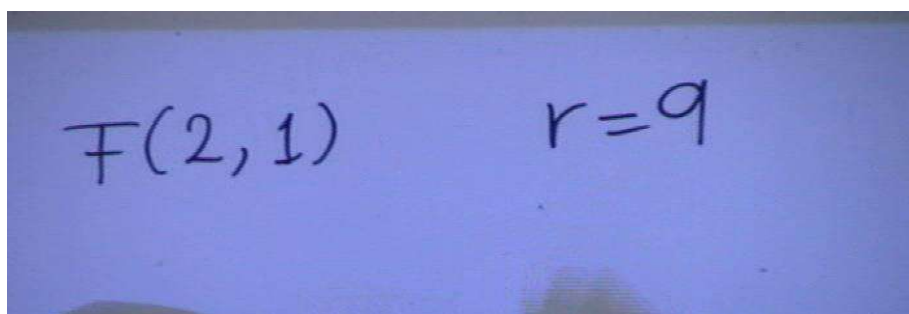
Analizada la relación geométrica y algebraica de la circunferencia con respecto a su ecuación, se dio paso a escribir la ecuación de una circunferencia de acuerdo a los datos proporcionados. Obteniéndose el fragmento a continuación:

Fragmento 5:

¿Cómo escribirías la ecuación de una circunferencia con centro en las coordenadas $F(2, 1)$ y radio $r = 9$?

- **M:** Muy bien, ¿Cómo escribiríamos entonces la ecuación de una circunferencia que tenga coordenadas $F(2,1)$ y radio $r = 9$? (Escribe la ecuación en el pintarrón)
- **A5, A8, A10:** x menos dos al cuadrado más y
- **A7, A8, A10:** ... y menos uno al cuadrado igual a ochenta y uno
- **M:** ¿Nos ayudas? (Pregunta a Cristina, proporcionando el plumón de modo que pase al pintarrón a escribir la ecuación de la circunferencia).
- **A8:** x menos dos al cuadrado... (indicando a Cristina lo que debe comenzar a escribir)
- **A6:** Entre paréntesis
- **A4:** Paréntesis (Señalando a Cristina que comenzó a escribir la ecuación sin poner paréntesis)
- **A9:** Paréntesis

- **A2:** Paréntesis
- **A2, A8:** Al cuadrado
- **A7, A8:** Más...
- **A2, A8:** y...
- **A2, A8, A10:** Menos uno al cuadrado
- **A3:** ¿Menos qué? (pregunta A3 a sus compañeros sin ver las coordenadas del centro de la circunferencia y el radio)
- **A2, A8, A10:** Uno
- **A10:** Menos uno
- **A6** Entre paréntesis
- **A2, A6:** Al cuadrado
- **A4, A10:** Es igual... a ochenta y uno
- **A9** Ahí sí, no lleva paréntesis (Indicando a A3 que el resultado de la ecuación no se eleva al cuadrado)
- **A3:** ¡Ay...!
- **M:** Están haciendo algo más... aparte de tomar estos valores (señala las coordenadas de F) ¿Qué están haciendo?
- **A2, A4, A8, A10:** Cambiando el signo



$$F(2, 1) \quad r=9$$

Ilustración 7

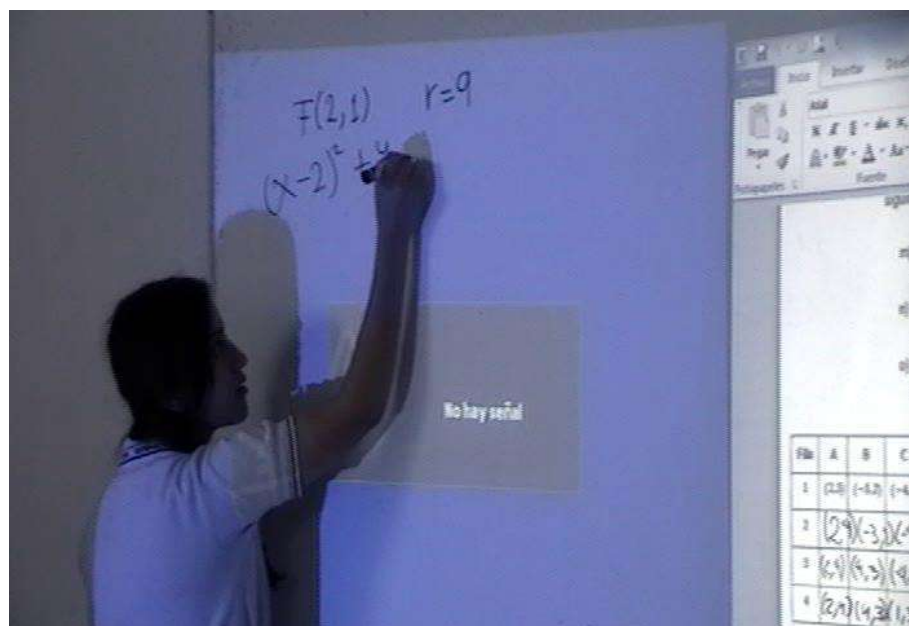


Ilustración 8

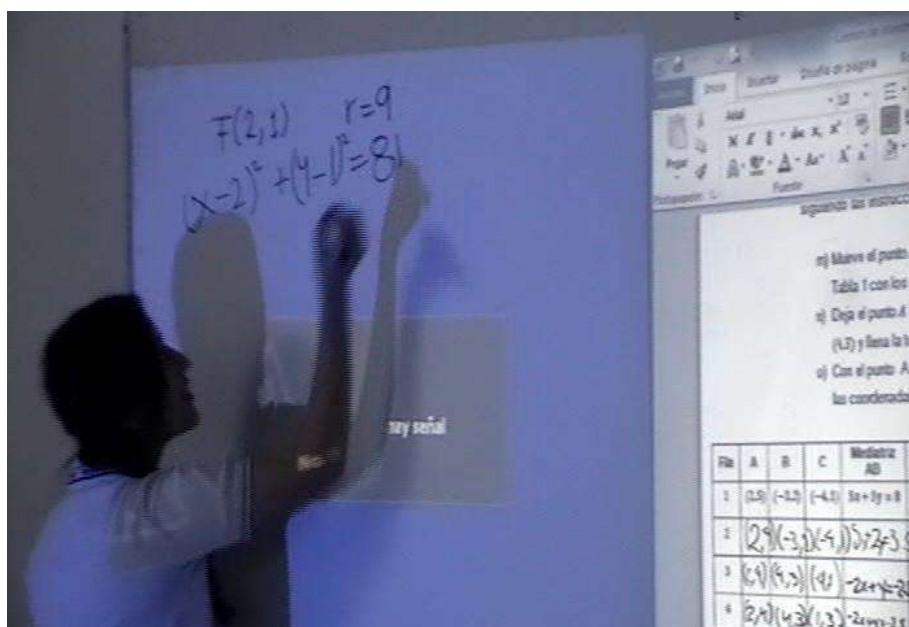


Ilustración 9

Análisis:

Al momento de pasar A3 al pintarrón, con la finalidad de escribir la ecuación de la circunferencia (dadas las coordenadas de su centro y el radio), el grupo en cuestión se mostró sumamente participativo al dictarle lo que debía escribir, sin embargo, puesto que participaban varios al mismo tiempo tuvo la necesidad de preguntar de nuevo la ecuación de la circunferencia que debía escribir, indicándole A6 que debía usar paréntesis al momento de escribir la ecuación, pese a ello, fue necesario que A6, A4, A9 y A2 hicieran hincapié en la observación dado que A3 seguía sin usar paréntesis.

En lo que al trabajo en parejas se refiere, cuatro de los equipos escribieron de manera correcta la ecuación según los datos proporcionados, y el equipo restante no elevó al cuadrado el radio de la circunferencia

Pregunta:

6. ¿Cómo escribirías la ecuación de una circunferencia con centro en las coordenadas $F(2,1)$ y radio $r = 9$?

Respuestas:

A2 y A10:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 81$$

A8 y A9:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 31$$

A4 y A6:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 81 //$$

A1 y A3:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 81$$

A5 y A7:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

Conclusión:

Hasta éste momento A3 se mostraba muy participativa en el análisis grupal, sin embargo, una vez que se le solicitó pasar al frente a escribir la ecuación en el pintarrón, en base a los datos proporcionados, mostró claramente que aún no había descubierto la relación entre las coordenadas del centro de la circunferencia, su radio y la ecuación. Puesto que, tenía en el pintarrón los datos que requería para escribir por si sola la ecuación sin el apoyo de sus compañeros, y en lugar de ello, volteaba a solicitar que le repitieran lo que le estaban dictando, dado que le sucedían dos cosas, por un lado le

costaba un poco de trabajo escuchar la ecuación, debido a la participación de varios compañeros al unísono, y por otro lado ella olvidaba lo que le mencionaban escribiera.

Cabe mencionar que en varias de sus participaciones anteriores A3 repetía lo que otros compañeros decían, y específicamente en el fragmento 3 que se extrajo al solicitarles mencionar la relación entre las coordenadas del punto F y la ecuación de la circunferencia, A3 mencionó para sí la expresión ¡Ah ya! como si en realidad le hubiese quedado clara la relación existente.

Por otro lado en las hojas de la actividad en parejas, la respuesta de A1 y A3 a la pregunta solicitada fue correctamente escrita. Con lo cual se puede deducir que de esa pareja, únicamente A1 tenía clara la relación existente.

ACTIVIDAD II

PARTICIPANTES

A1: Andrea

A2: Claudia

A3: Cristina

A4: Daniel

A5: Grecia

A6: Janeth

A7: Karla

A8: Lili

A9: Ricardo

A10: Salma

M: Maestra

Fragmento 1

Instrucción

El siguiente fragmento corresponde al análisis del verbatim de la instrucción a continuación, con su respectivo cuestionamiento:

- f) Deja el punto B en la posición $(3, -1)$ mueve el punto C a la posición $(4,3)$ y llena la tercera fila de la Tabla 1 con los nuevos datos.

Pregunta:

¿Qué modificación observas en la ecuación de la circunferencia al cambiar de posición el punto B a las coordenadas $F(3, -1)$?

Verbatim:

- **M:** En base a ésta tabla que hicimos, ¿Qué cambio ocurre en la segunda fila?
- **A3:** El pun...
- **A3, A4:** El punto
- **A3:** El círculo, cambió a -1
- **A4:** Pasó a negativo (refiriéndose al cambio de signo en la coordenada y)
- **A10:** Y cambió la ecuación del punto B

- **A8:** La ecuación de la circunferencia del volcán
- **A5:** Es nega...
- **A7:** El signo del volcán (refiriéndose al signo en la ecuación)
- **A4:** Se bajó de ahí el signo (indicando que el punto cambió de coordenada en y)
- **A10:** Cambió el valor de y ... El signo (corrigiéndose a sí misma)
- **A5, A8:** El signo.
- **A9:** El signo de y
- **A10:** El signo de y
- **M:** ¿En qué cambió aquí? (señalando la segunda fila de la tabla)
- **A7:** El signo.
- **A4:** El signo.
- **A9:** La ecuación del volcán.
- **M:** De modo que... ¿modificó la ecuación del volcán?
- **A2:** ¡Sí!
- **A4, A8:** Ajá...

Tabla 1 con los datos que se le solicitan.

f) Con el punto B en la posición (3, -1) mueve el punto C a la posición (4,3) y llena la tercera fila de la Tabla 1 con los nuevos datos

g) Con el punto A en la posición (0,0) y B en (3, -1) mueve el punto C a las coordenadas (3,0) y completa la cuarta fila de la Tabla 1

Fila	A	B	C	Ecuación de la Circunferencia del Sismo	radio	Ecuación de la Circunferencia del Volcán	radio	Ecuación de la Circunferencia de la Gasera	radio
1	(0,0)	(3,0)	(-1,0)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y-0)^2 = 4$	2	$(x+1)^2 + (y-0)^2 = 1$	1
2	(0,0)	(3,-1)	(-1,1)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2	$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$	1
3	(0,0)	(3,-1)	(4,3)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2	$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$	3
4	(0,0)	(3,-1)	(3,0)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2	$(x-3)^2 + y^2 = 9$	3

Tabla 1

Ilustración 10

(4,3) y llena la tercera fila de la Tabla 1 con los nuevos datos

g) Con el punto A en la posición (0,0) y B en (3, -1) mueve el punto C a las coordenadas (3,0) y completa la cuarta fila de la Tabla 1

Fila	A	B	C	Ecuación de la Circunferencia del Sismo	radio	Ecuación de la Circunferencia del Volcán	radio	Ecuación de la Circunferencia de la Gasera	radio
1	(0,0)	(3,0)	(-1,0)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y-0)^2 = 4$	2	$(x+1)^2 + (y-0)^2 = 1$	1
2	(0,0)	(3,-1)	(-1,1)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2	$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$	1
3	(0,0)	(3,-1)	(4,3)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2	$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$	3
4	(0,0)	(3,-1)	(3,0)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2	$(x-3)^2 + y^2 = 9$	3

Tabla 1

Ilustración 11

a las coordenadas (3,0) y completa la cuarta

Fila	A	B	C	Ecuación de la Circunferencia del Sismo	radio	Ecuación de la Circunferencia del Volcán
1	(0,0)	(3,1)	(-1,1)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$
2	(0,0)	(3,-1)	(-1,1)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$
3	(0,0)	(3,-1)	(4,3)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$
4	(0,0)	(3,0)	(3,0)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$

Ilustración 12

Análisis:

La pregunta general fue reformulada, con la finalidad de que los alumnos identificaran la modificación que había sufrido la tabla en su segunda fila, de modo que lograron señalar el cambio en la coordenada y del punto B, es decir, de la ubicación (3,1) a la (3,-1), así como la modificación en la ecuación de la circunferencia que representa el volcán tras éste cambio de coordenadas.

En cuanto a las hojas de trabajo en parejas, todos respondieron a la pregunta planteada señalando el cambio en la coordenada y de la ecuación que representa la circunferencia del volcán.

Pregunta:

1. ¿Qué modificación observas en la ecuación de la circunferencia al cambiar de posición el punto B a las coordenadas $(3, -1)$?

Respuestas:

A8 y A9:

Cambia el signo de la Y

A4 y A6:

El signo del volcán pasa de positivo a
negativo

A1 y A3:

Cambia el signo de la ecuación de
la circ. del volcán

A5 y A7:

cambio el signo en la ecuación

Conclusión:

En cuanto a éste fragmento se refiere es notable la correcta relación que visualizaron en el cambio de signo de la ecuación de la circunferencia al modificar la coordenada y del punto B , tanto en el análisis grupal como en parejas, lográndose una adecuada interpretación de la interrogante así como una relación entre las coordenadas de los puntos y la ecuación de la circunferencia.

Fragmento 2

¿Qué cambio ocurre en la ecuación de la circunferencia al mover el punto C a la posición $(4, 3)$?

- **M:** Y luego, ¿qué cambio ocurrió al mover el punto C ? Primero, ¿en qué fila cambia de coordenadas el punto C ?
- **A3:** En la última
- **A8:** En la 3
- **A2:** En la 3
- **M:** ¿Aquí? (señalando la fila 4 a propósito)
- **A8, A10:** En la 3 y en la 4
- **M:** ¿Cambió en la 3 de coordenadas?
- **A4:** ¡Sí!
- **M:** ¿Qué cambió ocurre en la ecuación de la circunferencia?
- **A8:** Cambia la ecuación de la circunferencia de la gasera

Fila	A	B	C	Circunferencia del Sismo	radio	Circunferencia del Volcán	radio
1	(0,0)	(3,1)	(-1,1)	$x^2+y^2=1$	1	$(x-3)^2+(y-1)^2=4$	2
2	(0,0)	(3,-1)	(-1,1)	$x^2+y^2=1$	1	$(x-3)^2+(y+1)^2=4$	2
3	(0,0)	(3,-1)	(4,3)	$x^2+y^2=1$	1	$(x-3)^2+(y+1)^2=4$	2
4	(0,0)	(3,-1)	(3,3)	$x^2+y^2=1$	1	$(x-3)^2+(y+1)^2=4$	2

Página: 2 de 3 Palabras: 510 Español (México)

Ilustración 13

g) Con el punto A en la posición (0,0) y B en (3,-1) mueve el punto C a las coordenadas (3,0) y completa la cuarta fila de la Tabla 1

Fila	A	B	C	Ecuación de la Circunferencia del Sismo	radio	Ecuación de la Circunferencia del Volcán	radio	Ecuación de la Circunferencia de la Gasera	radio
1	(0,0)	(3,1)	(-1,1)	$x^2+y^2=1$	1	$(x-3)^2+(y-1)^2=4$	2	$(x+1)^2+(y-1)^2=9$	3
2	(0,0)	(3,-1)	(-1,1)	$x^2+y^2=1$	1	$(x-3)^2+(y+1)^2=4$	2	$(x+1)^2+(y-1)^2=9$	3
3	(0,0)	(3,-1)	(4,3)	$x^2+y^2=1$	1	$(x-3)^2+(y+1)^2=4$	2	$(x+1)^2+(y-3)^2=9$	3
4	(0,0)	(3,-1)	(3,0)	$x^2+y^2=1$	1	$(x-3)^2+(y+1)^2=4$	2	$(x-3)^2+y^2=9$	3

Tabla 1

Página: 2 de 3 Palabras: 510 Español (México)

Ilustración 14

Análisis:

De manera general, la pregunta en cuestión solicita indicar el cambio en la ecuación de la circunferencia al mover el punto C a la posición (4,3) sin embargo, de manera inmediata se consideró realizar una pregunta previa de modo que antes de responderla indicaran en qué fila ocurrió el cambio de coordenadas del punto C. Obteniéndose como respuesta que el cambio ocurrió en la fila 3 de la tabla, no obstante, acción seguida, se les preguntó si se referían a la fila 4, con la intención de que los alumnos dieran muestra de estar atentos al número de fila que indicaban. Sin embargo, la respuesta obtenida fue: *cambió en la 3 y en la 4*. Señalando que en ambas filas se visualizaba un cambio de coordenadas en el punto C, motivo por el cual se consideró de manera inmediata la necesidad de volver a preguntar sobre la fila anteriormente señalada por los alumnos, la tercera. Preguntando enseguida de su respuesta, qué cambio ocurrió, a lo que A8 respondió de manera general que había cambiado la ecuación de la circunferencia que representa la gasera.

En cuanto a la actividad en parejas se refiere fueron mucho más específicos en su respuesta. Los ejemplos que dan muestra de ello se presentan a continuación:

Pregunta:

2. ¿Qué cambio ocurre en la ecuación de la circunferencia al mover el punto C a la posición (4,3)?

Respuestas:

A8 y A9:

Cambia el valor de X y Y y el signo
de X

A4 y A6:

Cambian los valores de x y el orden de
de y por x y y de x a y
por x

A2 y A10:

cambian los valores de x y los valores de y
debido a que las coordenadas cambian

A1 y A3:

cambia la ec. de la circ. de la
grasera de -1 a -3 en Y

A5 y A7:

los valores y los signos por los
que se van a restar x, y .

Conclusión:

En éste fragmento los alumnos mostraron mayor capacidad de análisis de manera escrita que verbal, pues en su participación grupal aunque mostraban observar el cambio en la fila 3, únicamente A8 expresó de manera general que la ecuación respectiva a esas coordenadas cambió. No obstante, cabe señalar que también influyó la pregunta previa, dado que no los orientó con el grado que se esperaba de modo que les fuera más fácil responder a la pregunta en cuestión, a su vez, otro factor influyente se debió al preguntar si el cambio de coordenadas que señalaban se encontraba en la fila 4, puesto que ellos ya habían señalado la 3 como respuesta, con lo cual, no se obtuvo la reacción esperada que era, la corrección de la fila señalada. Motivos por los cuales no se logró obtener en el análisis grupal de éste fragmento una respuesta más específica y detallada.

Sin embargo, las observaciones anteriormente señaladas dieron la pauta para abordar la siguiente pregunta de modo distinto, con la intención de encauzar el análisis de ésta de la manera deseada. Lo cual es visible en el siguiente fragmento.

Fragmento 3

¿Qué cambio ocurre en la ecuación de la circunferencia al mover el punto C a la posición $(3, 0)$?

- **M:** Cuando modificamos por éstas coordenadas $(3,0)$ el punto C , ¿qué cambio ocurre en la ecuación de la circunferencia?
- **A3:** Cambió la ecuación
- **A9:** El valor de la x
- **A10:** y ...
- **A1, A5:** El número del valor de la y se queda al cuadrado
- **M:** ¿Por qué?
- **A1, A6, A9:** Porque es cero
- **M:** ¿Cero es su valor?
- **A4:** ¡Sí!

g) Con el punto A en la posición (0,0) y B en (3,-1) mueve el punto C a las coordenadas (3,0) y completa la cuarta fila de la Tabla 1

Fila	A	B	C	Ecuación de la Circunferencia del Sano	radio	Ecuación de la Circunferencia del Volcán	radio	Ecuación de la Circunferencia de la Gasera	radio
1	(0,0)	(3,0)	(-1,1)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$	2	$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$	3
2	(0,0)	(3,-1)	(-1,1)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2	$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$	3
3	(0,0)	(3,-1)	(4,3)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2	$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$	3
4	(0,0)	(3,-1)	(3,0)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2	$(x-3)^2 + y^2 = 9$	3

Tabla 1

Ilustración 15

2	(0,0)	(3,-1)	(-1,1)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2	$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$	3
3	(0,0)	(3,-1)	(4,3)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2	$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$	3
4	(0,0)	(3,-1)	(3,0)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2	$(x-3)^2 + y^2 = 9$	3

2 de 3 Palabras: 510 Español (México)

Ilustración 16

A	B	C	Ecuación de la Circunferencia del Somo	radio	Ecuación de la Circunferencia del Volcán	radio	Ecuación de la Circunferencia de la Gaseosa	radio
(0,0)	(3,1)	(-1,1)	$x^2+y^2=1$	1	$(x-3)^2+(y-1)^2=4$	2	$(x+1)^2+(y-1)^2=9$	3
(0,0)	(3,1)	(-1,1)	$x^2+y^2=1$	1	$(x-3)^2+(y+1)^2=4$	2	$(x+1)^2+(y-1)^2=9$	3
(0,0)	(3,-1)	(4,3)	$x^2+y^2=1$	1	$(x-3)^2+(y+1)^2=4$	2	$(x-4)^2+(y-3)^2=9$	3
(0,0)	(3,-1)	(3,0)	$x^2+y^2=1$	1	$(x-3)^2+(y+1)^2=4$	2	$(x-3)^2+y^2=9$	3

Tabla 1

Ilustración 17

Análisis:

Al preguntarles qué cambió ocurrió en la ecuación de la circunferencia al mover el punto C a las coordenadas (3,0) la respuesta fue muy detallada y se fue complementando con la participación grupal.

Como primer observación A3 mencionó un cambio en la ecuación de la circunferencia y posteriormente A9 señaló la modificación en la coordenada x de la ecuación a lo que A10 complementa mencionando la modificación sufrida en el valor de y ; finalmente, indican que algebraicamente aparece únicamente el valor de y elevado al cuadrado dado que la coordenada y del punto C es cero. En cuanto a las hojas de trabajo, la mitad de ellos fueron menos explícitos en su respuesta y únicamente las parejas A1-A3 y A4-A6 dieron muestra de haber realizado la misma observación de manera independiente.

Pregunta:

3. ¿Qué cambio ocurre en la ecuación de la circunferencia al mover el punto C a la posición $(3,0)$?

Respuestas:

A8 y A9

El valor de X y Y

A1 y A3

cambia la ec. de la cir. de la glosa
de -4 a -3 en X y la Y
se queda sola.

A4 y A6

Cambian los valores de x y y
pasan a ser $(x-3)^2 + y^2 = 9$ y se quedan
los valores y los signos.

A5 y A7

los valores y los signos

Conclusión:

Al realizarse ésta pregunta de manera general (y sin preguntas previas), se obtuvo una respuesta más satisfactoria en lo que respecta al análisis grupal, comparado con la respuesta obtenida en la pregunta anterior. Así mismo A5 pudo notar y expresar de manera inmediata que en la ecuación de la circunferencia únicamente aparecía y elevada al cuadrado, cuando en las hojas de trabajo de no había sido más explícita. Por otro lado, A1, A6 y A9 justificaron inclusive la aportación realizada por A5.

Fragmento 4

Relación entre la ecuación de la circunferencia y su centro

- **M:** ¿Qué relación existe entre la ecuación de la circunferencia y su centro?
- **A9:** Son los valores de x y y
- **M:** ¿Cuáles?
- **A10:** De las coordenadas
- **A2:** De las coordenadas
- **A8:** Que están en la misma ecuación de la circunferencia
- **A2:** Ajá... son las mismas
- **A9:** Por ejemplo 3
- **M:** A ver, ¿cuál tomo?, explíquenme como...
- **A9:** Eee... $(3, -1)$ está...
- **M:** Está... ¿aquí? (Indicando las coordenadas en el punto B de la segunda fila)
- **A8:** Ajá...
- **M:** ¡Este! (Resalta con una flecha azul las coordenadas indicadas)
- -¿Qué relación hay entre este punto...?
- **A8:** (Interrumpe y concluye a pregunta) Y la ecuación
- **M:** La voy a señalar (y marca a propósito con una flecha, otra de las ecuaciones que no corresponde con las coordenadas del punto que utilizaron a manera de ejemplo).
¿qué relación encuentran?
- **A9:** Relaciona...

- **A8:** ¡No! Es con el segundo
- **A10:** Es con la segunda ecuación (señalando que esa ecuación no corresponde a las coordenadas que tomaron de ejemplo)
- **M:** ¿Con ésta? (Señalando la ecuación correcta)
- **A7, A8, A9, A10:** ¡Sí!
- **M:** ¿Qué relación hay? (borra la flecha anterior y dibuja de nuevo resaltado la ecuación correcta)
- **A8:** Que va a ser... $(x - 3)$ y $(y + 1)$ Nada más se le cambia el signo
- **M:** ¿A qué?
- **A1, A5, A8:** A las coordenadas
- **M:** Muy bien (Indicando que ha quedado claro su ejemplo)
- **M:** Esas coordenadas ¿que representan en la circunferencia?
- **A2, A4, A7, A8, A9:** El centro



	B	C	Ecuación de la Circunferencia del Sismo	radio	Ecuación de la Circunferencia del Volcán	radio
1	(0,0)	(3,1)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$	2
2	(0,0)	(3,-1)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2
3	(0,0)	(3,1)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2
4	(0,0)	(3,-1)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2

Ilustración 18

Fila	A	B	C	Ecuación de la Circunferencia del Sismo	radio	Ecuación de la Circunferencia del Volcán	radio
1	(0,1)	(-1,1)		$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$	2
	(0,1)	(-1,1)		$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2
	(3,1)	(4,3)		$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2
	(0,0)	(3,1)	(3,0)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2

2 de 3 Palabras: 510 Español (México)

Ilustración 19

g) Con el punto A en la posición (3,0) y completa la cuarta fila de la Tabla 1

C	Ecuación de la Circunferencia del Sismo	radio	Ecuación de la Circunferencia del Volcán	radio	Ecuación de la Circunferencia de la Gasera
(1,1)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$	2	$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$
(1,1)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2	$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$
(3)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2	$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$
(3,0)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2	$(x-3)^2 + y^2 = 9$

Tabla 1

Ilustración 20

a las coordenadas (3,0) y completa la cuarta fila de la tabla 1

	C	Ecuación de la Circunferencia del Sismo	radio	Ecuación de la Circunferencia del Volcán	radio	Ecuación de la Circunferencia de la Gasera
1	(-1,1)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$	2	$(x+1)^2 + (y-1)^2 =$
2	(0,0)(3,1)(-1,1)	$x^2 + y^2 =$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2	$(x+1)^2 + (y-1)^2 =$
3	(0,0)(3,1)(4,3)	$x^2 + y^2 =$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2	$(x-4)^2 + (y-3)^2 =$
4	(0,0)(2,0)(3,0)	$x^2 + y^2 =$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2	$(x-3)^2 + y^2 =$

Tabla 1

Ilustración 21

g) Con el punto A en la posición (0,0) y el punto B en la posición (3,1) y el punto C en la posición (-1,1) a las coordenadas (3,0) y completa la cuarta fila de la Tabla 1

Fila	A	B	C	Ecuación de la Circunferencia del Sismo	radio	Ecuación de la Circunferencia del Volcán	radio
1	(0,0)	(3,1)	(-1,1)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$	2
2	(0,0)	(3,1)	(-1,1)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2
3	(0,0)	(3,1)	(4,3)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2
4	(0,0)	(3,1)	(3,0)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2

Ilustración 22

Análisis:

En éste fragmento se puede notar que ya se adquirió previamente la información suficiente para preguntar directamente sobre la relación existente entre la ecuación de la circunferencia y su centro, obteniéndose satisfactoriamente la descripción detallada de lo que ocurre. En su participación grupal mencionan que en la ecuación de la circunferencia intervienen los valores de x y y , que pertenecen a las coordenadas del punto B . Y, aunque la pregunta ha sido respondida, A9 intenta dar un ejemplo de dicha relación, lo cual brinda el ambiente propicio para encauzar la participación grupal a la descripción de un ejemplo que permita ver de manera específica la relación entre las coordenadas y la ecuación de la circunferencia. A9 menciona las coordenadas $(3, -1)$ a manera de ejemplo y posteriormente, al momento de realizar al grupo la pregunta en cuestión sobre la relación existente entre ese punto que acaba de mencionar A9 como ejemplo ni siquiera es necesario terminar de formular la pregunta cuando A8 participa mencionando *y la ecuación*. Posteriormente, con la finalidad de que esa relación fuera correctamente visualizada, se resaltaron las coordenadas mencionadas por A9 y una ecuación distinta como relación con esas coordenadas, acción tras la cual se generó de manera inmediata la participación de A8 y A10 señalando que esa relación era incorrecta (tal y como se esperaba) y que debía relacionarse con la segunda ecuación visible en esa misma fila. Posteriormente A8 indica que la ecuación debe escribirse considerando esas coordenadas y menciona: $(x - 3)$ y $(y + 1)$ señalando a la vez un cambio de signo, mientras A1, A5 y A8 hacen hincapié en el cambio de signo en las coordenadas del punto $(3, -1)$.

Finalmente, A2, A4, A7, A8 y A9 mencionan que esas coordenadas corresponden al centro de la circunferencia.

En cuanto a la actividad en parejas, dos de los equipos hicieron uso de un ejemplo ilustrativo para mostrar la relación existente, mientras los demás expresaron de manera verbal dicha relación, siendo uno de ellos claro en su respuesta mientras los restantes dejaron un tanto de ambigüedad en la relación que indicaron.

Pregunta:

4. ¿Qué relación existe entre la ecuación de la circunferencia y su centro? (Puedes responder auxiliándote de un ejemplo ilustrativo)

Respuestas:

A8 y A9

$$\begin{array}{l} \text{Centro } (4,5) \quad r=5 \\ \hline (x-4)^2 + (y-5)^2 = 25 \end{array}$$

A1 y A3

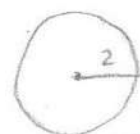
$$\begin{array}{l} \text{C.C. } (3,-1) \quad r=2 \\ \hline (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4 \end{array}$$

A2 y A10

Las datos de la ecuación son las mismas
valores que las coordenadas del centro

A4 y A6

Que el centro delimitara su radio y
este se elevara al cuadrado para
estar presente en la ecuación.



$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2^2 = 4 //$$

A5 y A7

Depende de la ecuación cambia la
circunferencia.

Conclusión:

Al llegar a ésta pregunta, los estudiantes ya habían establecido la relación existente entre las coordenadas del punto que representa el centro de la circunferencia y su ecuación, tanto así que A9 intentó describir un ejemplo. Por lo cual, al encauzar el grupo hacia ésta descripción, se obtuvieron resultados muy satisfactorios en el análisis grupal. Lo cual reforzó lo que algunos de ellos ya habían escrito en sus hojas de trabajo, mientras condujo hacia el establecimiento adecuado de la relación a quienes no habían sido claros en su respuesta escrita.

Fragmento 5

¿Cómo escribirías la ecuación de una circunferencia con centro en las coordenadas $(5, 3)$ y radio $r = 4$?

- **M:** ¿Cómo escribirían entonces la ecuación de una circunferencia que tenga coordenadas cinco coma tres en el centro y un radio igual a cuatro?
- **A1, A2, A4, A5, A7, A8, A10:** x menos cinco al cuadrado más y menos tres al cuadrado igual a dieciséis
- **M:** Cristina, ¿nos ayudas por favor? (indicando pase a escribir la ecuación)
- **A3:** (Pasa al pintarrón)
- **A9:** x menos cinco al cuadrado... (dictando la ecuación)
- **A3:** ¿ x menos cinco?
- **A9:** Ajá...al cuadrado
- **A2:** Más... (indicando la continuación de la ecuación)
- **A4:** y
- **A3:** ¿Menos qué?
- **A2, A4:** y menos tres
- **A4:** Al cuadrado igual a
- **A2:** Dieciséis, igual a dieciséis
- **A3:** (Escribe en el pintarrón la ecuación que le dictaron)
- **M:** A ver, hasta ahí... Espérame Cristina (indicando permanezca cerca del pintarrón).
Cristina todavía no...

- **A10:** No lo entendió
- **M:** ¿Qué paso ahí? A ver si...
- **A4:** Pues x toma el valor de cinco y y toma el valor de tres y cuatro (indicando éste último valor como el radio)
- **A10:** x toma... Es que, has de cuenta que, eso es una coordenada... y, ¿qué es cinco? x (respondiendo ella misma su pregunta), tres es y ...
- **A4:** Ajá... y sustituyes...
- **A10:** Entonces, eso lo vas a colocar en una ecuación, entonces x ... ¿Cuál es la x ahí? (A3 no responde y A10 continúa)... el cinco
- **A3:** El cinco (repitiendo lo mencionado por A10)
- **A10:** Y y es tres
- **A8:** Pero nada más les cambias el signo
- **A10:** Nada más les cambias el signo, reafirmando el comentario de A8
- **A8:** Y luego el radio, lo elevas al cuadrado
- **A10:** Ajá...
- **A8:** Y cuatro por cuatro da dieciséis
- **A3:** ¡Ah! Ya entendí
- **M:** ¿Sí? (preguntando a A3)
- **A3:** Ya
- **M:** Vamos a ver si ya
- **A3:** Ya me siento. Mejor... (dirigiéndose a su lugar)
- **M:** ¡Ven! A3
- **Todos:** (Risas)

- **A10:** Te va a poner otra
- **M:** A ver... es que luego... A10 no es buena maestra...quién sabe
- **A3:** Si es buena...
- **M:** Si, si es buena (escribe en el pintarrón $C(2,4)$ $r = 5$ como otros datos de una circunferencia)
- **A3:** Comienza a escribir la ecuación $(x - 2)^2 + (y - 3)^2$ (y escribe mal el término en y puesto que se guía en la ecuación anterior para escribir la correspondiente a los nuevos datos y repitiendo el valor en y de la ecuación anterior)
- **A1, A8:** ¡No!
- **A5:** Cuatro
- **A3:** ¿No? (extrañada ve de nuevo los datos de la circunferencia), ¿cuál cuatro? ¡Ah!
¡Ya! Estaba viendo el de arriba
- **Todos:** (Risas)
- **A3:** Corrige el término en y de la ecuación y continúa
- **A5:** Es igual a veinti... (inmediatamente guarda silencio tras la indicación de una señal emitida por M)
- **A3:** Era cinco por cinco ¿verdad? (refiriéndose al resultado de la ecuación)
- **A5, A8, A10:** ¡Sí!
- **A4, A5, A8:** ¡Oh!
- **A10:** Ya le entendiste...
- **A3:** ¡Ay!
- **M:** ¡Gracias! ¡Muy bien!

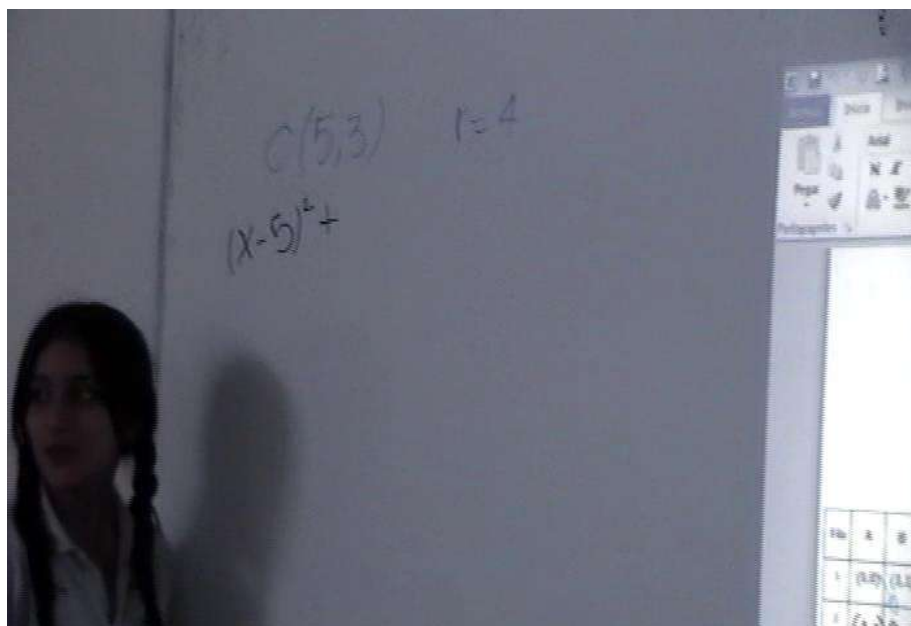


Ilustración 23

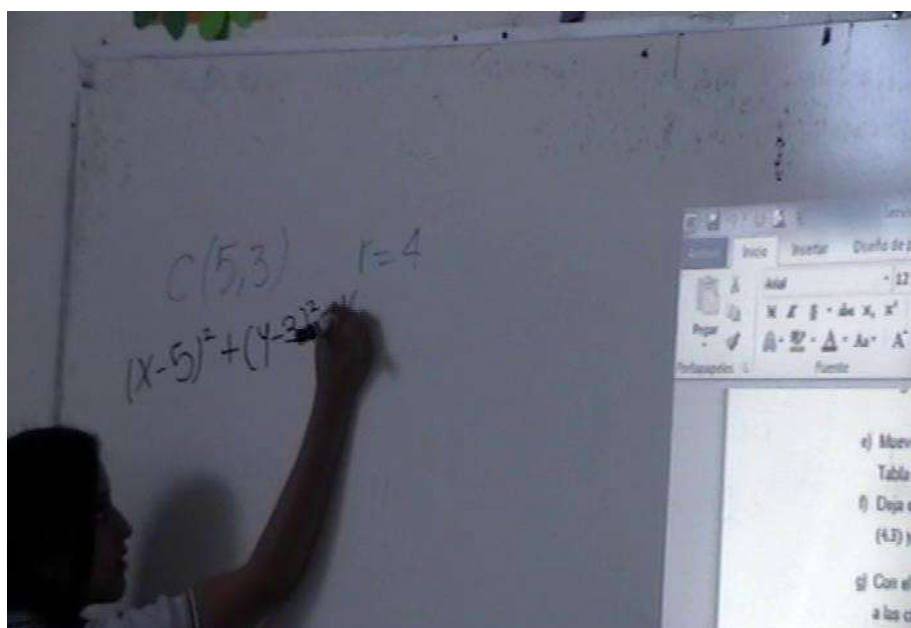


Ilustración 24

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 16$$

$C(2,4) \quad r=5$

Ilustración 25

$C(2,4) \quad r=5$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2$$

Ilustración 26

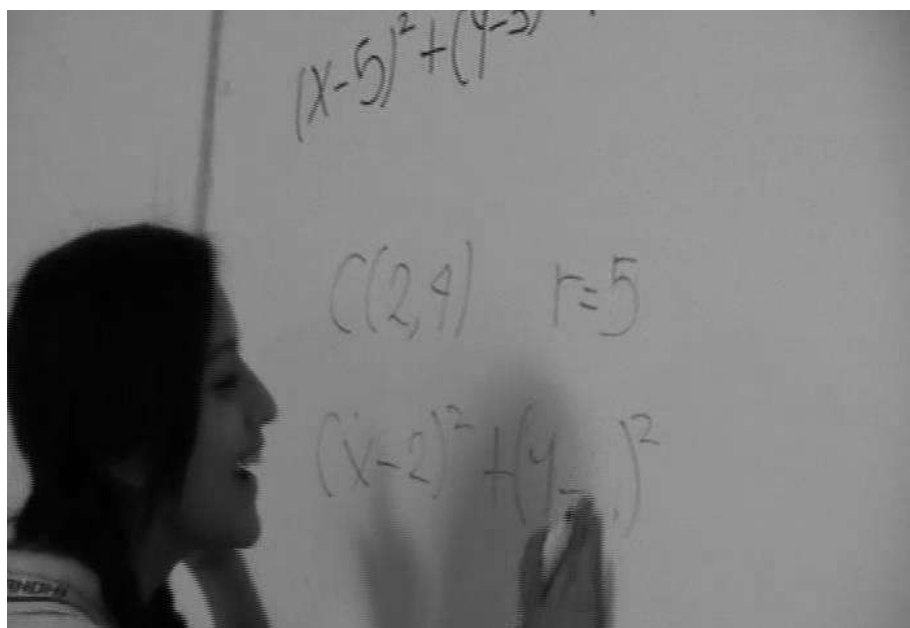


Ilustración 27

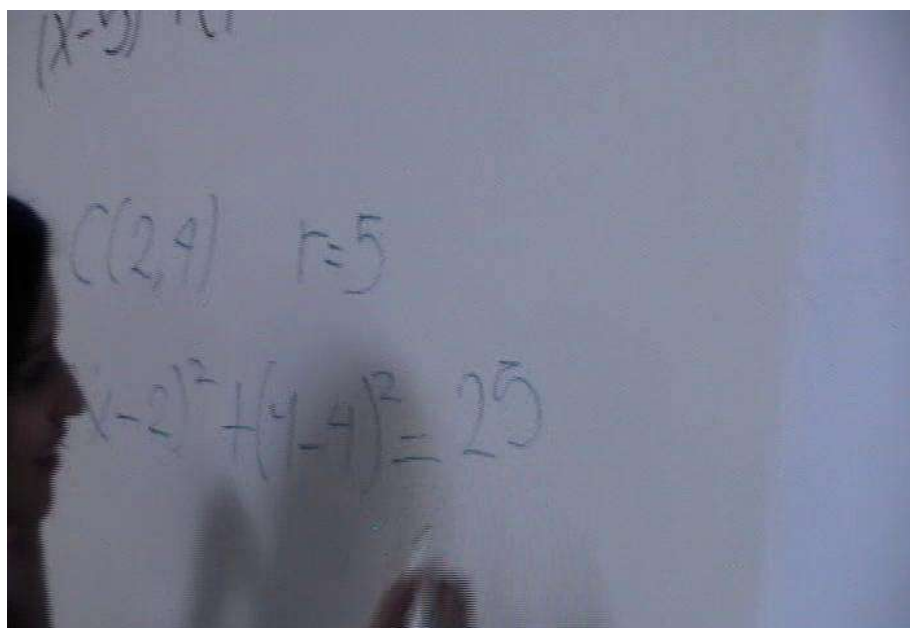
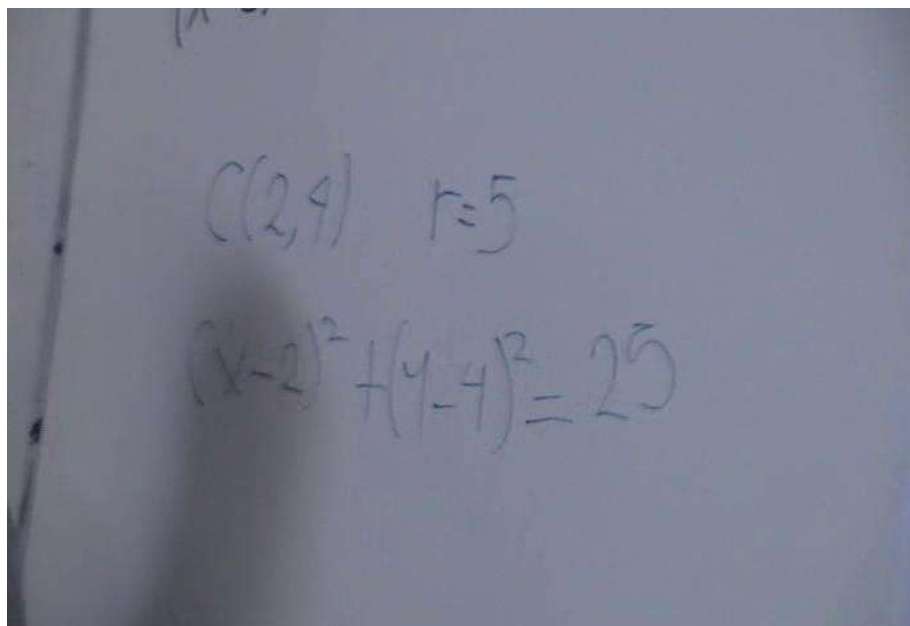


Ilustración 28



$$C(2,4) \quad r=5$$

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$$

Ilustración 29

Análisis:

Una vez que los estudiantes lograron expresar la relación existente entre la ecuación de la circunferencia y su centro, se les solicitó mencionar cuál era la ecuación de una circunferencia dadas las coordenadas (5,3) como centro y $r = 4$ como su radio, con lo cual se obtuvo la respuesta esperada *x menos cinco al cuadrado más y menos tres al cuadrado igual a dieciséis*. Posteriormente se le pidió a A3 pasar al pintarrón a escribir la ecuación mencionada, sin embargo, tras la iniciativa de A9 de comenzarle a dictar lo que debía escribir, los demás compañeros hicieron lo mismo, al mismo tiempo que A3 solicitaba le repitieran lo que estaban dictando puesto que olvidaba lo que debía escribir en el pintarrón, con lo cual finalmente escribió la ecuación correspondiente.

Se le solicitó a A3 permanecer al frente del pintarrón dado que mostraba a todas luces lo que A10 mencionó posteriormente; *No lo entendió*.

Motivo por el cual, tras preguntarles qué había sucedido en ese caso, tanto A8 como A10 intentan explicarle a A3 la relación que debe identificar. Una vez que concluyen con la explicación, A3 menciona haber entendido la relación, con lo cual, se le escriben nuevos datos en el pintarrón $C(2,4) \quad r = 5$ con la finalidad de que escriba por sí sola, la ecuación de la circunferencia correspondiente.

A3 comienza a escribir la ecuación y redacta: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2$ evidentemente había cometido un error que inmediatamente que A1 y A8 detectaron haciéndoselo saber con un ¡No! Mientras A5 le dice: 4

A3 pregunta extrañada ¿No? ¿Cuál 4? Y al ver los datos que tiene para escribir la ecuación detecta el error, pues había tomado la coordenada y del punto escrito anteriormente (5,3). Corrige entonces inmediatamente, y para finalizar pregunta ¿era cinco por cinco verdad? refiriéndose al resultado de la ecuación tras elevar el radio al cuadrado, y con la confirmación de sus compañeros A5, A8 y A10, A3 concluye la ecuación de la circunferencia.

En las hojas de trabajo los cinco equipos escribieron de manera correcta la ecuación de la circunferencia:

Pregunta:

5. ¿Cómo escribirías la ecuación de una circunferencia con centro en las coordenadas (5,3) y radio $r = 4$?

Respuestas:

A1 y A3

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 16$$

A2 y A10

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 16$$

A4 y A6

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 16$$

A5 y A7

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 16$$

A8 y A9

$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 16$$

Conclusión:

En esta pregunta se generó una dinámica muy participativa tanto al momento de relacionar los datos proporcionados con la ecuación de la circunferencia como en el momento en que apoyaron a A3, pues pese a que en la hojas de trabajo todos escribieron de manera correcta la ecuación de la circunferencia no fue sino hasta el análisis grupal que fue notable el que A3 no había logrado identificar la relación existente, no obstante sus compañeros dieron muestras de apoyo explicándole sobre esa relación, de modo que le fue posible escribir por sí sola la ecuación correspondiente a los nuevos datos que le fueron proporcionados.

Fragmento 6

¿Cómo escribirías la ecuación de una circunferencia con centro en las coordenadas $(0, 2)$ y radio $r = 5$?

- **M:** Otra ecuación, por favor Daniel, ¿nos ayudas?
- **A8:** ¡No!, A5
- **A4:** A5 no ha pasado
- **A3:** A5
- **M:** A ver A5...
- **A5:** Pasa al pintarrón
- **A8:** Que tal si no entendió nada del tema...
- **A4:** ¡Ah! ¡sí!
- **A5:** Ni que fuera tu...
- **M:** (Borra el pintarrón) Antes de que A5 escriba... ¿cómo quedaría esa ecuación?
(escribe en el pintarrón los siguientes datos $C(0,2) \ r = 5$)
- **A1, A2, A3, A4, A10:** x al cuadrado más y menos dos al cuadrado igual a veinticinco
- **A5:** (Comienza a escribir la ecuación y) gira a hacia sus compañeros para preguntar
¿la x no lleva nada verdad?
- **A8, A10:** No
- **A2, A4:** No

- **A5:** (Escribe la ecuación de manera correcta en el pintarrón, y posteriormente se gira para dirigirse a su lugar)
- **M:** A ver Grecia, espérame tantito... una más (escribe en el pintarrón nuevos datos par otra ecuación) $C(3,0) \quad r = 8$
- **A5:** (Comienza a escribir la ecuación)
- **A4:** x menos tres al cuadrado más...(dictando la ecuación a A5)
- **A5:** (Escribe rápidamente $(x - 3)^2 + y^2 = \dots$ y voltea hacia sus compañeros para preguntar ¿es sesenta y cuatro verdad? (refiriéndose al cuadrado del radio) y escribe en el pintarrón 64
- **A7:** ¡Sí!
- **A8:** ¡Las tablas A5!
- **A5:** ¡Ay! Si me las sé, nada más que se me olvidan...

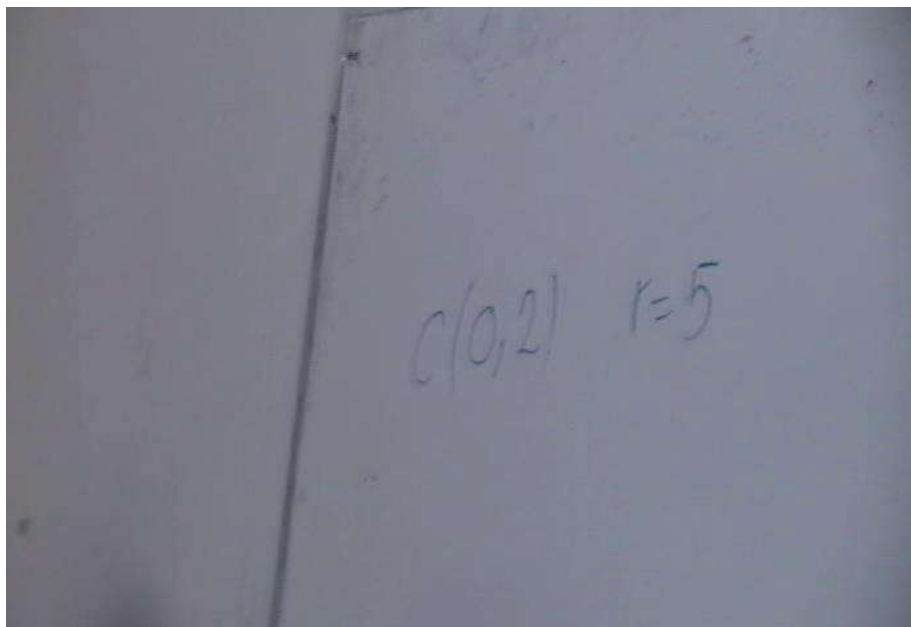


Ilustración 30

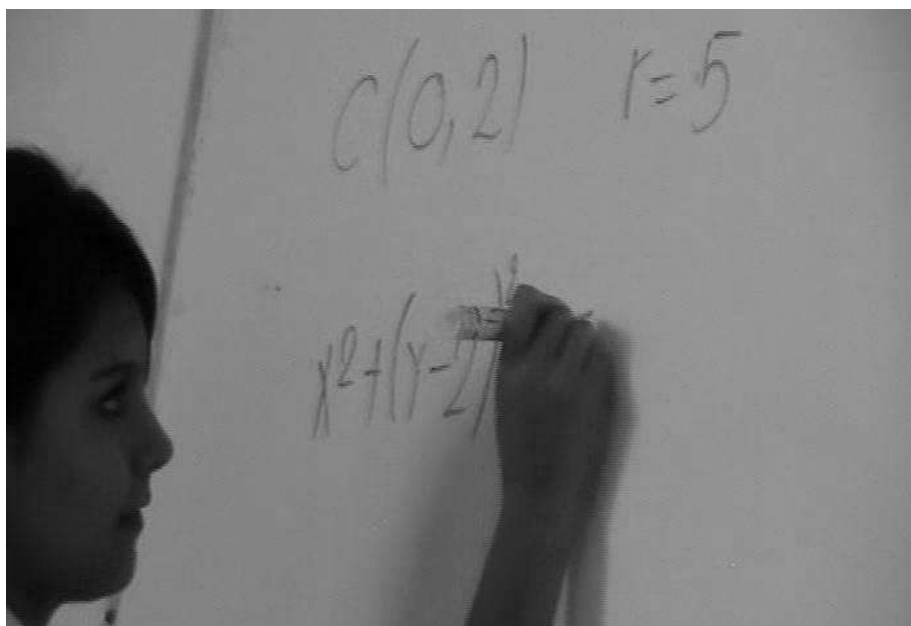


Ilustración 31

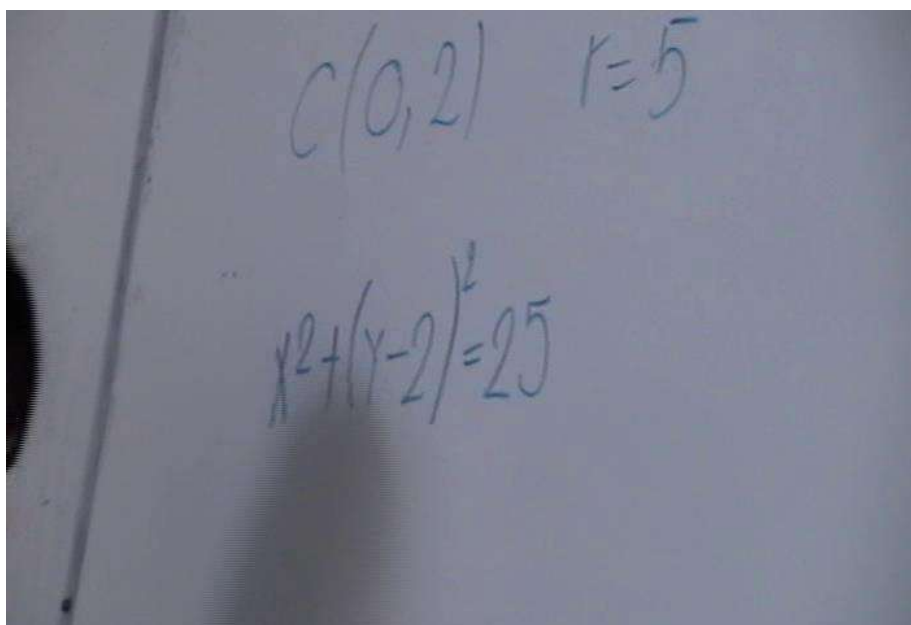
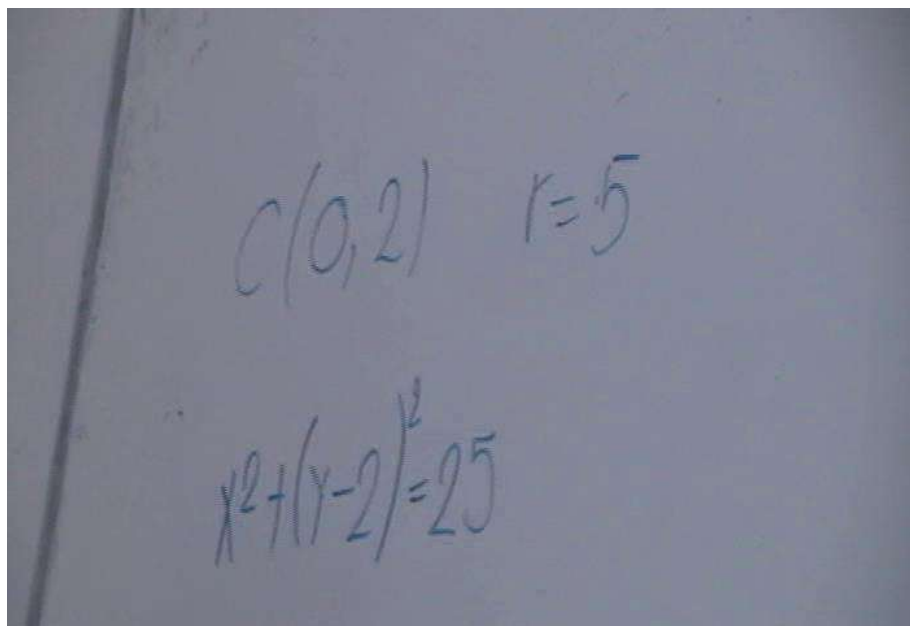


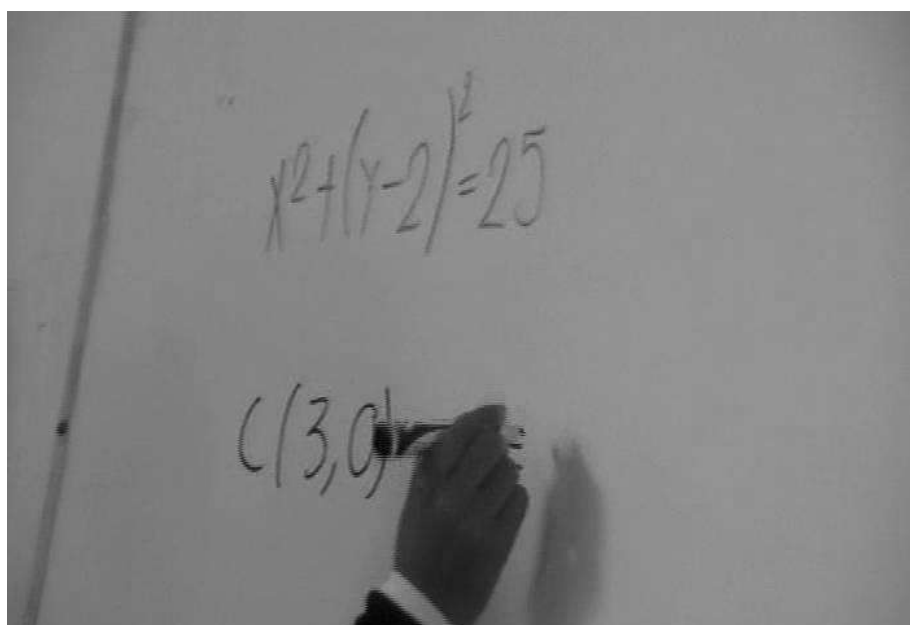
Ilustración 32



A photograph of a whiteboard with handwritten mathematical expressions. The top line shows the center point $C(0, 2)$ and the radius $r = 5$. The bottom line shows the equation of the circle $x^2 + (y - 2)^2 = 25$.

$$C(0, 2) \quad r = 5$$
$$x^2 + (y - 2)^2 = 25$$

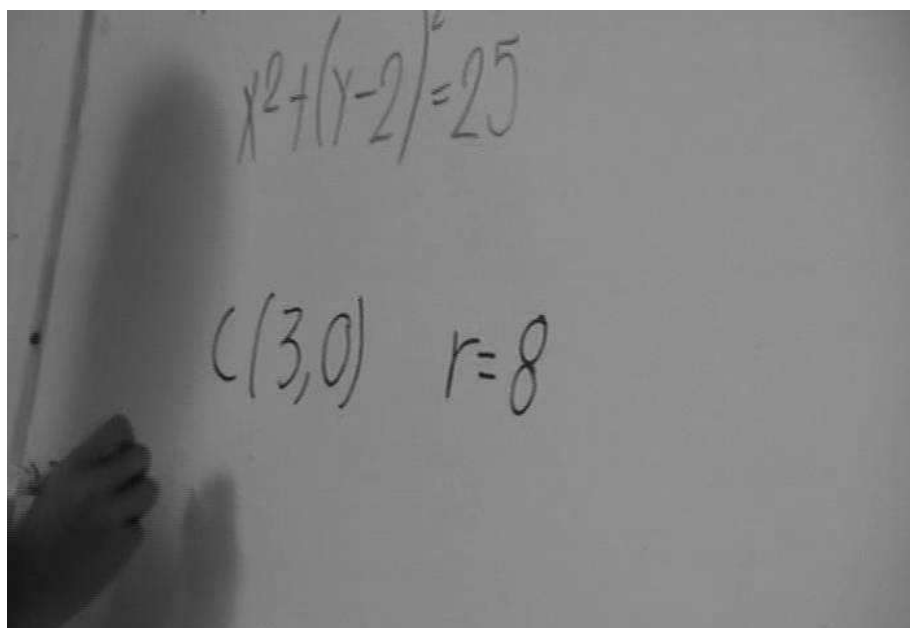
Ilustración 33



A photograph of a whiteboard with handwritten mathematical expressions. The top line shows the equation of the circle $x^2 + (y - 2)^2 = 25$. The bottom line shows the center point $C(3, 0)$, with a hand pointing to it.

$$x^2 + (y - 2)^2 = 25$$
$$C(3, 0)$$

Ilustración 34

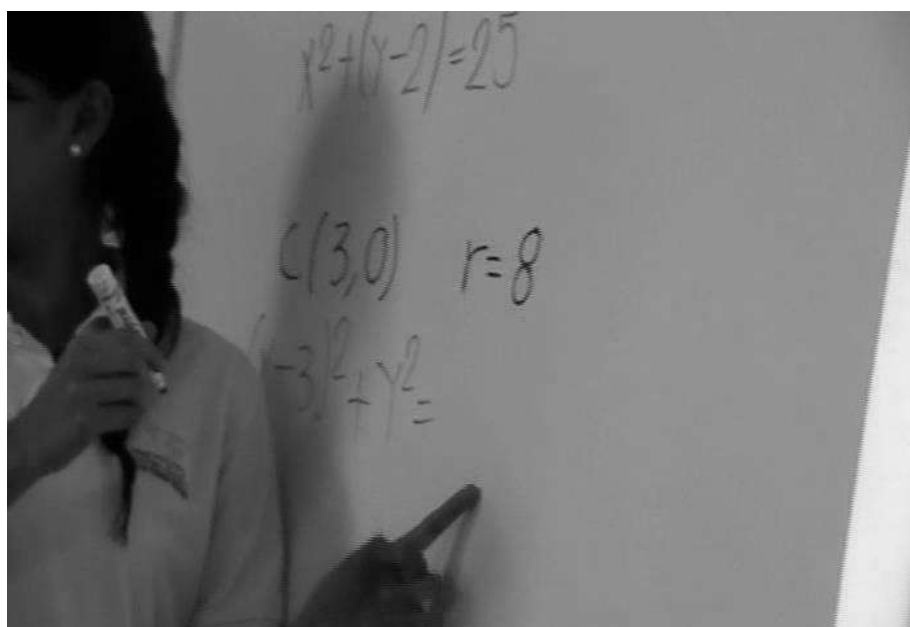


A black and white photograph of a whiteboard. The top equation is $x^2 + (y-2)^2 = 25$. Below it, the center is given as $C(3,0)$ and the radius as $r=8$. A person's hand is visible on the left side of the board.

$$x^2 + (y-2)^2 = 25$$

$$C(3,0) \quad r=8$$

Ilustración 35



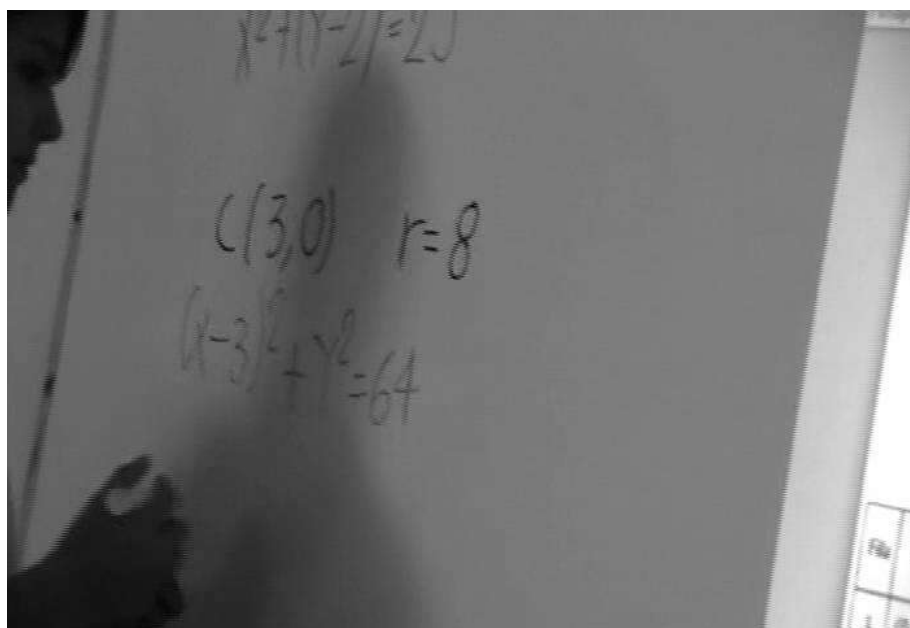
A black and white photograph of a whiteboard. The top equation is $x^2 + (y-2)^2 = 25$. Below it, the center is given as $C(3,0)$ and the radius as $r=8$. Further down, the equation $(x-3)^2 + y^2 =$ is written. A person is on the left, holding a marker and pointing at the bottom of the board.

$$x^2 + (y-2)^2 = 25$$

$$C(3,0) \quad r=8$$

$$(x-3)^2 + y^2 =$$

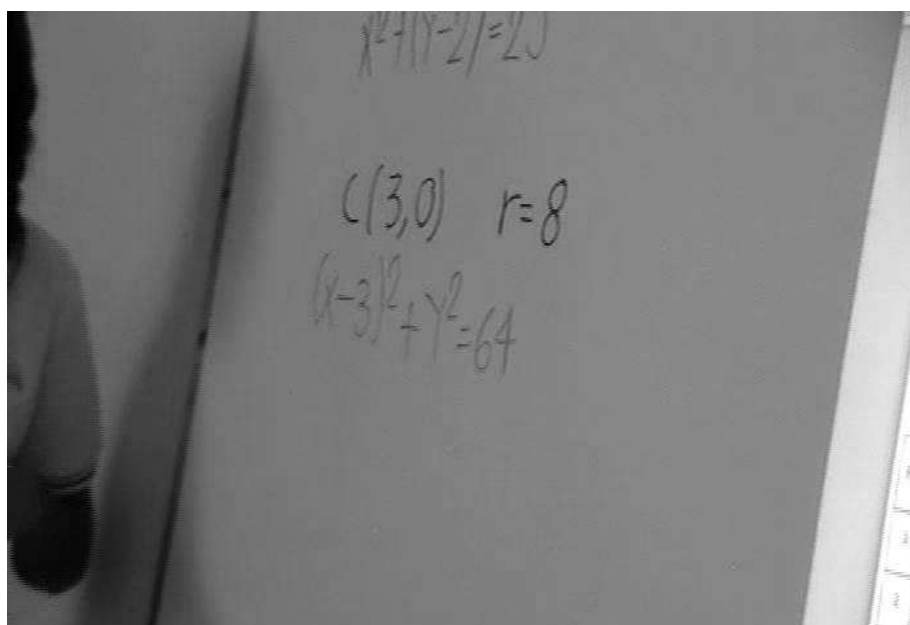
Ilustración 36



A photograph of a whiteboard with handwritten mathematical equations. The equations are written in black marker. The top equation is $x^2 + (y-2)^2 = 25$. Below it is $C(3,0) \quad r=8$. The bottom equation is $(x-3)^2 + y^2 = 64$. A person's hand is visible on the left side of the board, and a portion of a keyboard is visible on the right.

$$x^2 + (y-2)^2 = 25$$
$$C(3,0) \quad r=8$$
$$(x-3)^2 + y^2 = 64$$

Ilustración 37



A photograph of a whiteboard with handwritten mathematical equations, identical to the one in Illustración 37. The equations are written in black marker. The top equation is $x^2 + (y-2)^2 = 25$. Below it is $C(3,0) \quad r=8$. The bottom equation is $(x-3)^2 + y^2 = 64$. A person's hand is visible on the left side of the board, and a portion of a keyboard is visible on the right.

$$x^2 + (y-2)^2 = 25$$
$$C(3,0) \quad r=8$$
$$(x-3)^2 + y^2 = 64$$

Ilustración 38

Análisis:

En esta pregunta se le pidió a A4 pasar a escribir la ecuación en el pintarrón, sin embargo A8 argumentaba que A5 aún no había pasado al pintarrón tras lo cual A4 y A3 apoyaron el argumento de A8, motivo por el que se le solicitó a A5 pasar al pintarrón y se les preguntó a los estudiantes cómo escribirían la ecuación de una circunferencia con centro en las coordenadas $(0,2)$ y radio $r = 5$, obteniéndose una respuesta exitosa por parte de A1, A2, A3, A4 y A10. Y una vez que coincidieron al mencionar la ecuación correspondiente a los valores dados, se le solicitó a A5 escribir la ecuación correspondiente en el pintarrón. Sin embargo A5 duda momentáneamente y pregunta a sus compañeros a manera de confirmación *¿la x no lleva nada verdad?*, dado que la coordenada x es cero en el punto proporcionado como centro. Y tras la confirmación de sus compañeros continúa escribiendo la ecuación.

En ese momento, se le solicita a A5 escribir una ecuación más, de acuerdo a los siguientes datos $C(3,0)$ $r = 8$ y, aunque A4 toma participación dictando parte de la ecuación, A5 escribe rápidamente en el pintarrón $(x - 3)^2 + y^2 = \dots$ instante tras el cual, gira hacia a sus compañeros a fin de corroborar que $8 \times 8 = 64$ para finalmente escribir 64 como resultado de la ecuación, argumentando tras el comentario de A8 sobre las tablas que sí las sabe, pero se le olvidan...

En lo que se refiere a las hojas de trabajo, a excepción de la pareja A5 y A7, los demás escribieron de manera correcta la ecuación. Mostrando en el caso de A5 y A7 como relacionaron de manera incorrecta los valores de las coordenadas del centro.

Pregunta:

6. ¿Cómo escribirías la ecuación de una circunferencia con centro en las coordenadas (0,2) y radio $r = 5$?

Respuestas:

A1 y A3

$$x^2 + (y-2)^2 = 25$$

A2 y A10

$$x^2 + (y-2)^2 = 25$$

A4 y A6

$$x^2 + (y-2)^2 = 25$$

A5 y A7

$$(x-2)^2 + y^2 = 25$$

A8 y A9

$$x^2 + (y-2)^2 = 25$$

Conclusión:

Al analizar éste fragmento y compararlo con la participación del grupo en lo que respecta al fragmento anterior, se observa que se obtuvo una respuesta exitosa a la pregunta en cuestión por parte de A1, A2, A3, A4 y A10, de tal manera que al compararla con los participantes del fragmento anterior (A1, A2, A4, A5, A7, A8, A10) nos muestra ahora una participación activa de A3 al relacionar los datos proporcionados con la ecuación de la circunferencia. También es posible darse cuenta que A5 se encontraba reestructurando la relación expresada en sus hojas de trabajo dado que su respuesta fue incorrecta, de modo que se auxilió de sus compañeros, a fin de esclarecer que, si la coordenada en x tenía valor cero entonces no participaría en la ecuación de la circunferencia, para finalmente, escribir de modo correcto no sólo esa ecuación, sino también la que se le pidió escribir en base a los datos: $C(3,0) \quad r = 8$ en donde ahora, el valor de la coordenada y es cero. Cabe destacarse también, la inseguridad mostrada sobre el resultado de elevar al cuadrado el radio, producto de olvidar las tablas de multiplicar.

Fragmento 7

¿Cómo escribirías la ecuación de una circunferencia con centro en las coordenadas $(0,0)$ y radio $r = 9$?

- **M:** ¿Cómo escribiríamos la ecuación de una circunferencia que tenga las coordenadas de su centro en cero coma cero y radio igual a nueve? (escribe el pintarrón $(0,0)$ $r = 9$)
- **A2, A7, A9, A10:** x cuadrada mas y cuadrada igual a ochenta y uno
- **M:** A4... (indicando haga favor de pasar a escribir la ecuación)
- **A4:** (Pasa al pintarrón y escribe la ecuación) $x^2 + y^2 = 81$
- **M:** ¡Muchas gracias! ¿Está bien? (pregunta en general)
- **Todos:** ¡Sí!

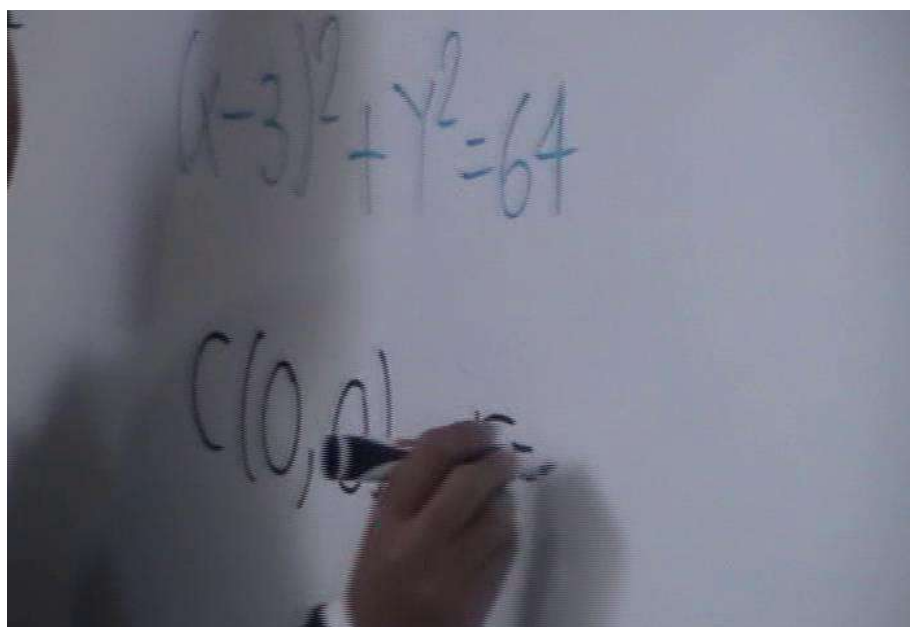


Ilustración 39

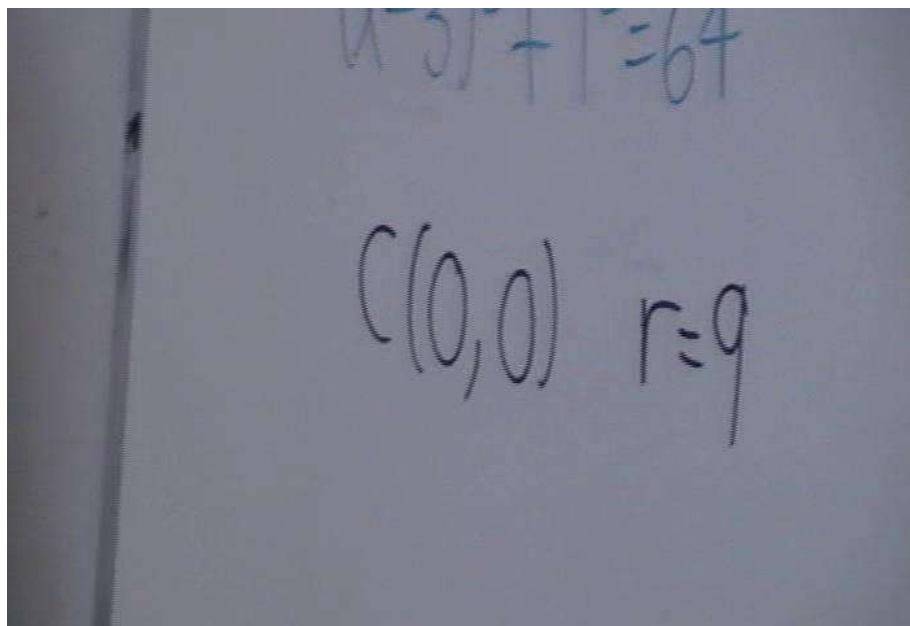


Ilustración 40

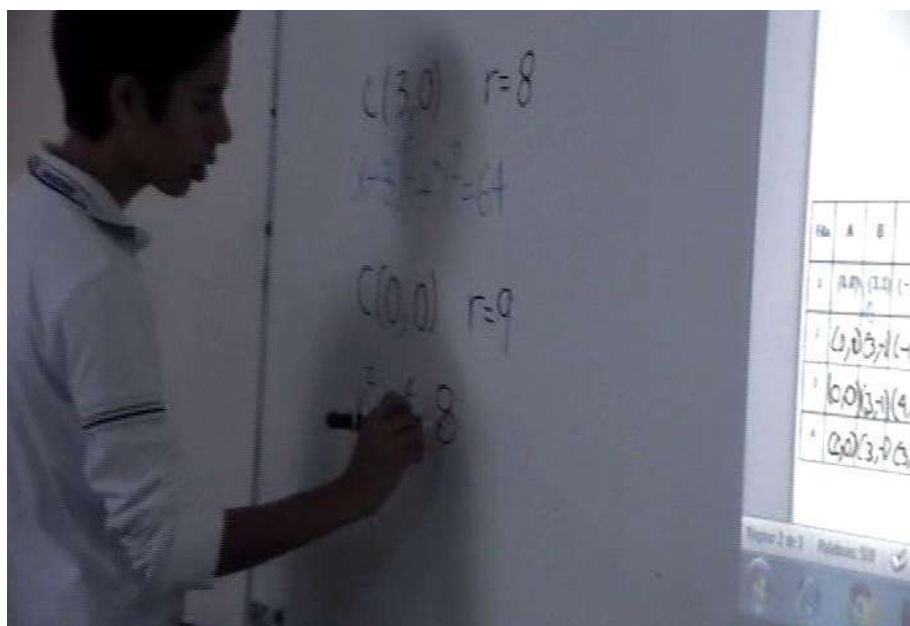
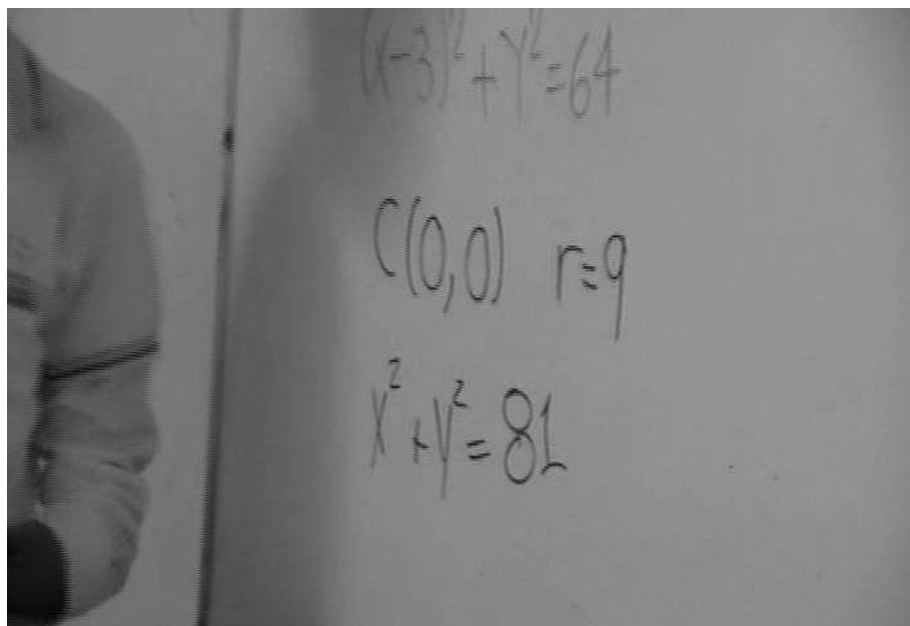


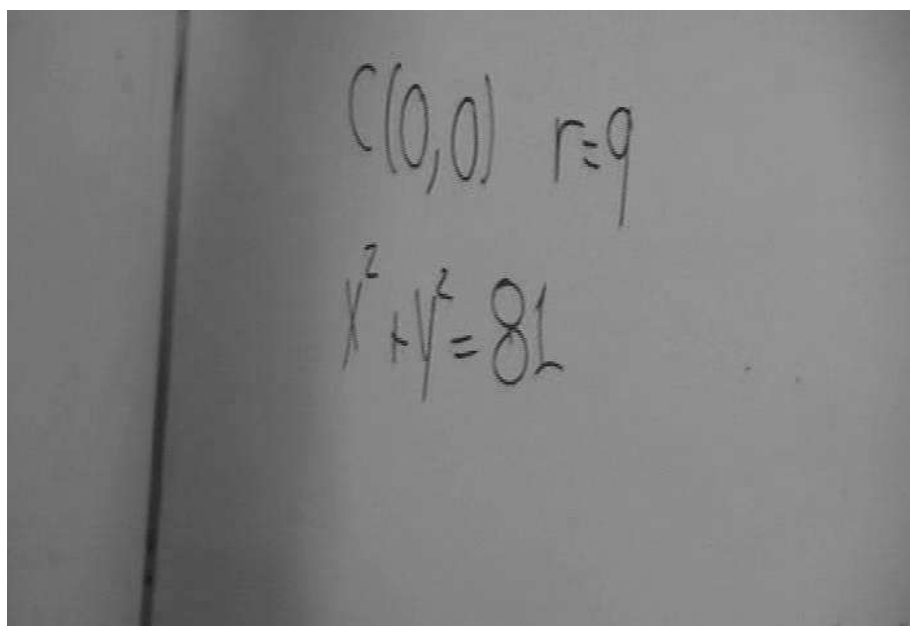
Ilustración 41



A photograph of a whiteboard with handwritten mathematical equations. The equations are arranged vertically: $(x-3)^2 + y^2 = 64$, $C(0,0) \quad r=9$, and $x^2 + y^2 = 81$. A person's arm is visible on the left side of the frame.

$$(x-3)^2 + y^2 = 64$$
$$C(0,0) \quad r=9$$
$$x^2 + y^2 = 81$$

Ilustración 42



A photograph of a whiteboard with handwritten mathematical equations. The equations are arranged vertically: $C(0,0) \quad r=9$ and $x^2 + y^2 = 81$.

$$C(0,0) \quad r=9$$
$$x^2 + y^2 = 81$$

Ilustración 43

Análisis:

Esta vez se les preguntó cuál sería la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio $r = 9$, de tal manera que, con la información previa correspondiente a las respuestas de las preguntas anteriores les fuese posible deducir el resultado. Y satisfactoriamente se obtuvo la respuesta correcta con la participación inmediata de A2, A7, A9 y A10, solicitándole finalmente a A4 escribir la ecuación en el pintarrón, quien escribió adecuadamente el resultado sin titubeo alguno.

En cuanto a las hojas de trabajo se refiere los cinco equipos escribieron de manera correcta la ecuación de la circunferencia en base a los datos proporcionados.

Pregunta:

7. ¿Cómo escribirías la ecuación de una circunferencia con centro en las coordenadas (0,0) y radio $r = 9$?

Respuestas:

A1 y A3

$$x^2 + y^2 = 81$$

A2 y A10

$$x^2 + y^2 = 81$$

A4 y A6

$$x^2 + y^2 = 81$$

A5 y A7

$$x^2 + y^2 = 81$$

A8 y A9

$$x^2 + y^2 = 81$$

Conclusión:

Al llegar a éste punto, los estudiantes ya habían logrado además de la deducción de la relación entre los datos proporcionados y la ecuación de la circunferencia, escribir la ecuación de la circunferencia cuando alguno de los dos valores de las coordenadas era cero, así que fácilmente lograron identificar de manera correcta la ecuación de ésta cuando tiene su centro en el origen, tanto en el análisis grupal como en las hojas de trabajo.

Fragmento 8

¿Por qué razón la ecuación de la circunferencia que representa el sismo no tiene valores numéricos antes del signo de igualdad?

- **M:** Otra pregunta, ¿por qué tanto aquí... (señala la ecuación escrita por Daniel) como aquí (señalando con una flecha en la tabla) la ecuación de la circunferencia (que representa el sismo) no tiene valores numéricos antes del signo de igualdad?
- **A1, A5:** Porque...
- **A8:** Las coordenadas
- **A3, A4, A8:** cero
- **A10:** Porque su centro es el cero
- **M:** Su centro está en cero coma cero, entonces no tiene...
- **A9:** Valor

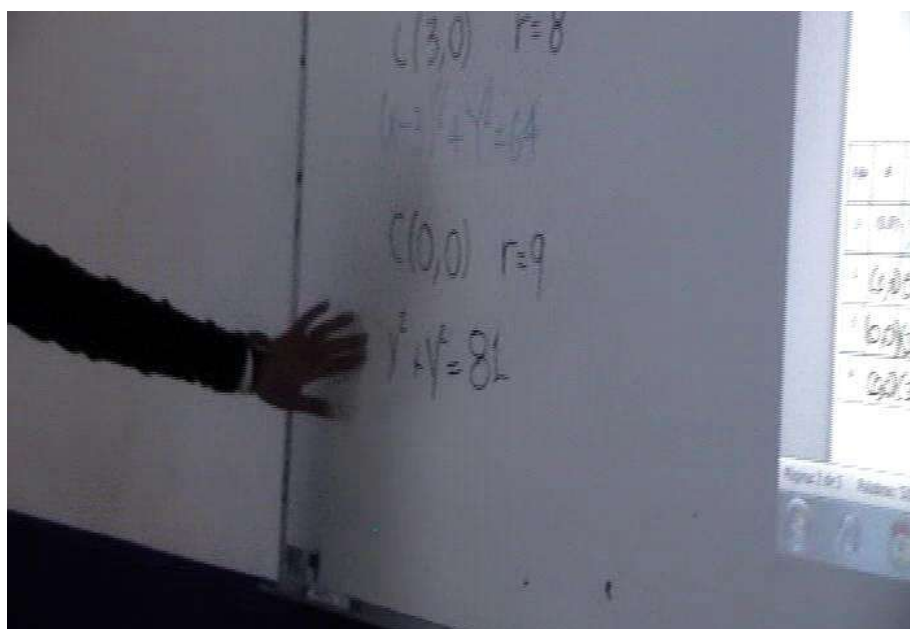


Ilustración 44

2	(0,0)(3,-1)(-1,1)	$x^2+y^2=1$	1	$(x-3)^2+(y+1)^2=$
3	(0,0)(3,-1)(4,3)	$x^2+y^2=1$	1	$(x-3)^2+(y+1)^2=$
4	(0,0)(3,-1)(3,0)	$x^2+y^2=1$	1	$(x-3)^2+(y+1)^2=$

Página: 2 de 3 Palabras: 510

Ilustración 45

gi) Con el punto A m
a las coordenadas

No.	A	B	C	Ecuación de la Circunferencia del Sano	radio
1	(0,0)	(1,1)	(-1,1)	$x^2+y^2=1$	1
2	(0,0)	(3,-1)	(-1,1)	$x^2+y^2=1$	1
3	(0,0)	(3,-1)	(4,3)	$x^2+y^2=1$	1
4	(0,0)	(3,-1)	(3,0)	$x^2+y^2=1$	1

Página: 2 de 3 Palabras: 510 Español (México)

Ilustración 46

Análisis:

Se les preguntó cuál era el motivo de que tanto en la ecuación que escribió A4, como en la ecuación de la circunferencia que representa el sismo, ésta no tuviese valores numéricos antes del signo de igualdad. Y fue notable que únicamente en tres participaciones, cinco estudiantes (complementando unos con otros), llegaron a la respuesta. Al mencionar que:

- **A8:** Las coordenadas
- **A3, A4, A8:** cero
- **A10:** Porque su centro es el cero

Guardando notable relación con lo que escribieron en las hojas de trabajo.

Pregunta:

8. ¿Por qué razón la ecuación de la circunferencia que representa el sismo no tiene valores numéricos antes del signo de igualdad?

Respuestas:

A1 y A3

Porque sus coordenadas son (0,0)
y el 0 es neutro.

A2 y A10

por que la coordenada es $(0,0)$

A4 y A6

Porque las coordenadas son $(0,0)$.

A5 y A7

Porque el punto A esta
Ubicado en $(0,0)$

A8 y A9

Porque su centro es $(0,0)$

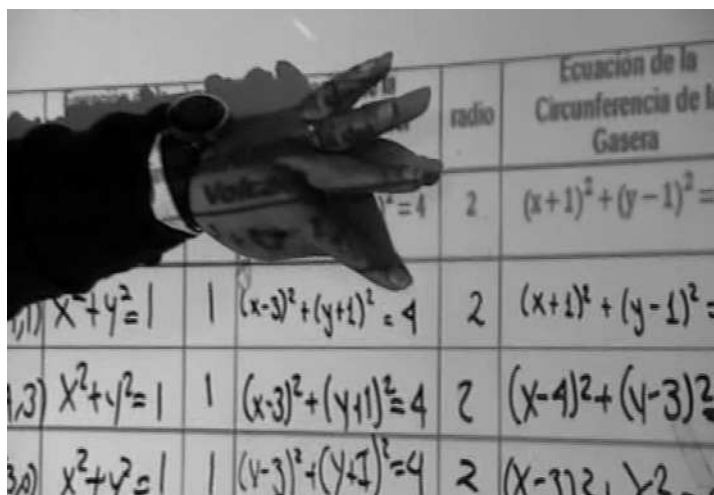
Conclusión:

Una vez que lograron escribir con éxito (por sí solos) la ecuación de la circunferencia con centro en el origen, les fue apreciablemente más sencillo dar una explicación del porqué la ecuación de la circunferencia que representa el sismo no tiene valores numéricos antes del signo de igualdad, revelando notable relación con lo escrito en sus hojas de trabajo.

Fragmento 9

¿Qué relación existe entre la ecuación de la circunferencia y su radio?

- **M:** Por último, ¿qué relación encontraron entre la ecuación de la circunferencia y el radio?
- **A1, A9:** Es el que se eleva al cuadrado
- **M:** Y ¿dónde lo coloco en la...?
- **A8:** En el resultado de la ecuación
- **A10:** En el resultado de la ecuación
- **M:** En el resultado de la ecuación... ¿aquí? (señalando en la tabla el radio de la ecuación que representa la ecuación de la circunferencia de la gasera)
- **A5:** Tres por tres nueve (indicando la operación a realizarse y a manera de ejemplo)
- **Todos:** Dos por dos cuatro... (repiten una vez que M señala el radio de la ecuación de la circunferencia que representa el volcán)



	radio	Ecuación de la Circunferencia de la Gasera
$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$	2	$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$
$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$
$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$
$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	2	$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$

Ilustración 47

Análisis:

Como una última relación entre los datos que determinan una circunferencia y su ecuación, se les interrogó sobre la relación existente entre la circunferencia y su radio, respondiendo A1 y A9 acertadamente que: *el radio se eleva al cuadrado*, y posteriormente con ayuda de M quién da continuidad a la aportación de A1 y A9, cuestiona al grupo en general sobre el lugar que ocupa dicho valor en la ecuación de la circunferencia, obteniendo como respuesta de A8 y A10 que es el resultado de la ecuación. Posteriormente, tras señalar M en la tabla como ejemplo la ecuación de la circunferencia que representa la gasera, inmediatamente A5 indica la operación a realizarse mencionando que: *tres por tres es igual a nueve* en dicha ecuación.

Finalmente, cuando M señala el resultado de la ecuación de la circunferencia que representa el volcán el grupo al unísono responde: *dos por dos cuatro*, indicando el valor del radio y la operación realizada para determinar el resultado de esa ecuación.

Analizando las hojas de trabajo, tres los equipos respondieron de manera correcta a la pregunta e hicieron uso de un ejemplo a modo de ilustrar con mayor facilidad la respuesta, mientras los otros dos equipos presentaron confusión al responder que para obtener el resultado de la ecuación de la circunferencia debía duplicarse el radio. Muestra de ello a continuación.

Pregunta:

9. ¿Qué relación existe entre la ecuación de la circunferencia y su radio? (Puedes responder auxiliándote de un ejemplo ilustrativo)

Respuestas:

A1 y A3

ec. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$ $y=2$
 el radio al cuadrado es el resultado
 de la ecuación.

A4 y A6

Qué el radio cuadrado es 4, por lo tanto
 el radio es 2.
 $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 2^2$
 $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$ Se eleva al cuadrado

A8 y A9

Centro $(3,1)$ $r=4$
 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 16$

A2 y A10

el resultado de la ecuación de la circunferencia
 es el doble del radio

A5 y A7

que es el doble el resultado de la
circunferencia que el radio

Conclusión:

La información obtenida en el análisis de la participación grupal fue bastante motivadora y enriquecedora dado que, los equipos de A5 y A10 escribieron de manera incorrecta la relación existente entre el radio y la ecuación de la circunferencia, sin embargo, en el análisis grupal tanto A5 como A10 aportaron al igual que A8 y A9 información muy valiosa al mencionar que el radio elevado al cuadrado se coloca en el resultado y expresar a manera de ejemplo que, tres por tres es igual a nueve como radio y resultado de la ecuación respectivamente.

Fragmento 10

- **M:** Si ustedes tienen una ecuación, ¿pueden saber entonces... pueden saber que radio tiene y qué centro?
- **A8:** Ajá...
- **Todos:** ¡Sí!
- **M:** Vamos a ver...
- **A9:** ¡Ya se puso bueno! (acto seguido se frota las manos)
- **A8:** ¡Si Ricky! Calienta las manos
- **Todos:** (Risas)
- **M:** (Escribe en el pintarrón la siguiente ecuación) $x^2 + (y - 3)^2 = 49$ A ver, yo quiero las coordenadas del centro y del radio (y escribe en el pintarrón)

$$C(\quad , \quad) \quad r =$$

- **A10:** Cero
- **A9:** y tres
- **M:** Las coordenadas del centro, ¿cuáles?
- **Todos:** cero coma tres
- **M:** (Escribe en el pintarrón las coordenadas que le indicaron) $C(0, 3)$
- **Todos:** Y siete
- **M:** (Escribe el dato restante) $r = 7$ (y pregunta en general) ¿cómo le hacen para encontrar las coordenadas del centro?
- **A4:** Porque... x no tiene ningún valor
- **M:** No tienen valor...

- **A4:** Ajá...
- **M:** Entonces colocan el cero...
- **A4:** Y y tiene el valor de tres
- **A8:** Pero se le cambia el signo
- **M:** ¡Le cambian el signo! ¡Ok! (señalando con flechas la relación de las coordenadas con la ecuación de la circunferencia)
- **A8:** Y se saca la raíz cuadrada de cuarenta y nueve

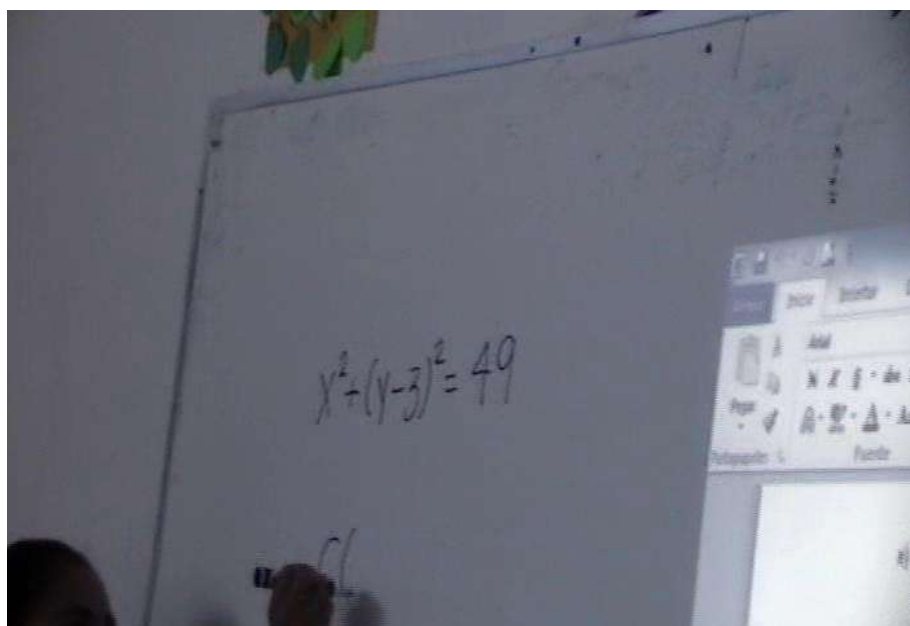


Ilustración 48

Handwritten equation: $x^2 + (y-3)^2 = 49$

Handwritten center point: $C(,)$

Handwritten radius: $r =$

Ilustración 49

Handwritten equation: $x^2 + (y-3)^2 = 49$

Handwritten center point: $C(0, 3)$

Handwritten radius: $r = 7$

Ilustración 50

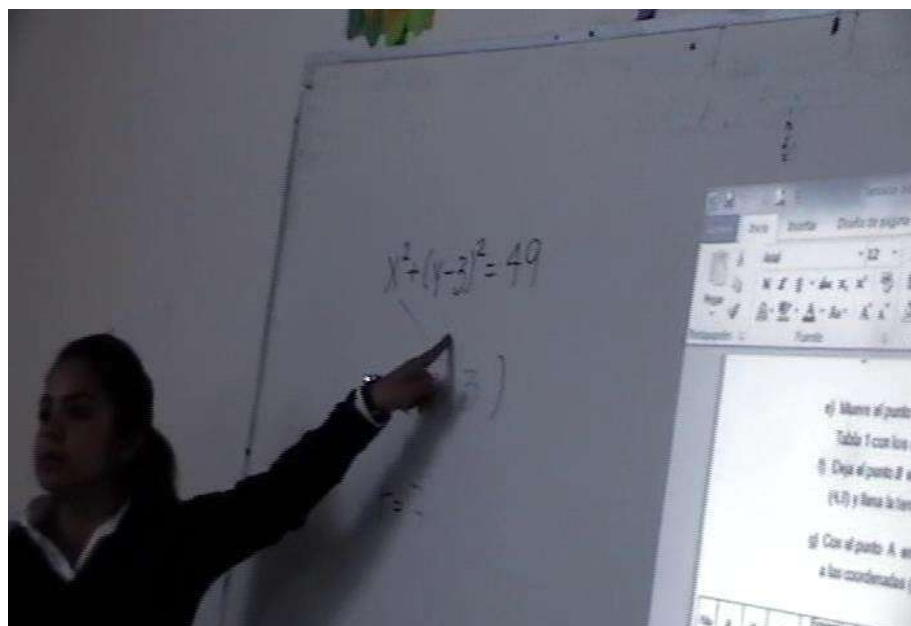


Ilustración 51

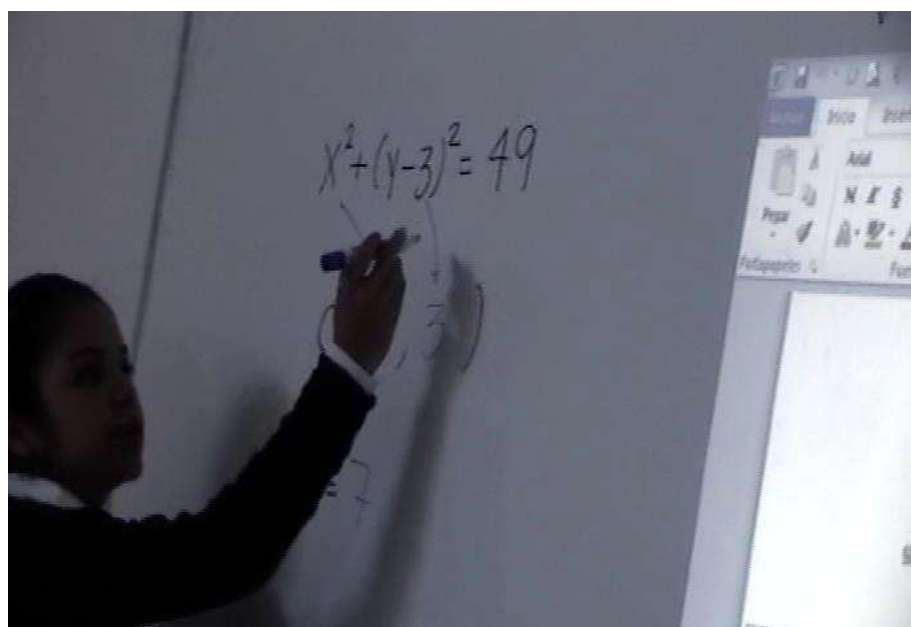


Ilustración 52

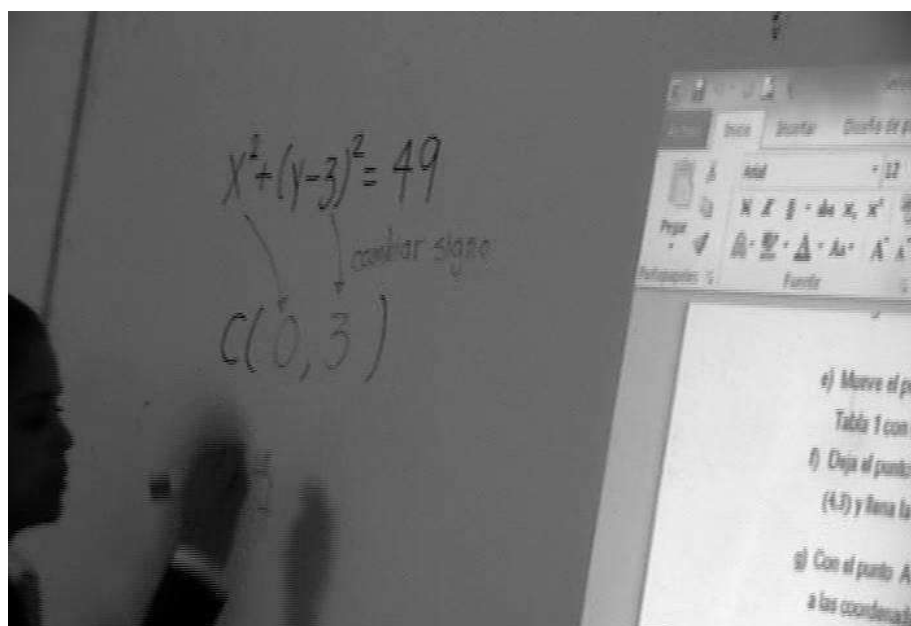


Ilustración 53

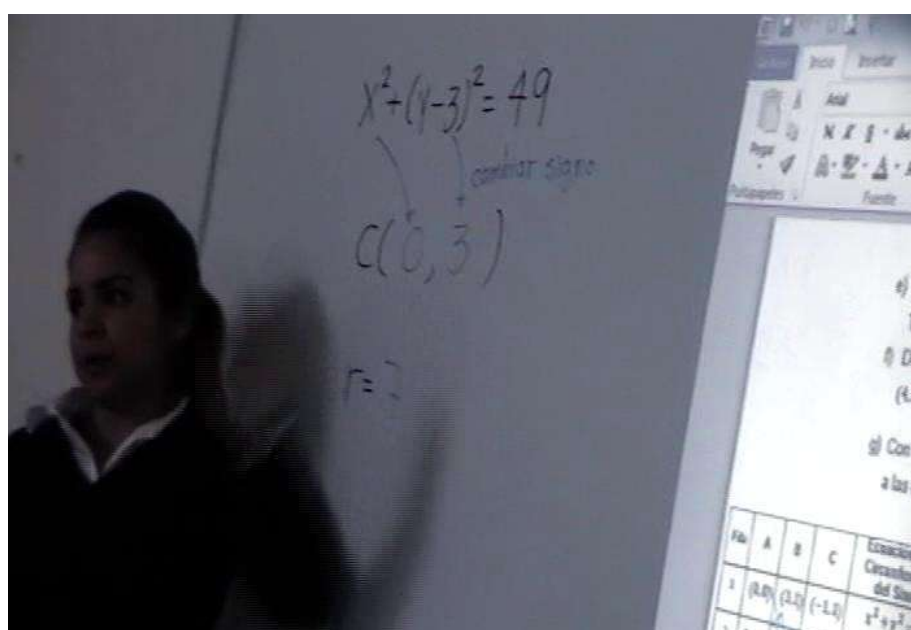


Ilustración 54



Ilustración 55

Análisis:

Una vez concluidas las preguntas que correspondían a las hojas de trabajo, adicionalmente se les cuestionó si al observar la ecuación de una circunferencia podían obtener el radio y las coordenadas del centro de ésta, obteniéndose una respuesta afirmativa por parte de los alumnos, al momento que A9 expresaba emoción al decir ¡ya se puso bueno! mientras frotaba sus manos. Acto seguido, se les solicitaron las coordenadas del centro y el radio tras escribir en el pintarrón la ecuación:

$$x^2 + (y - 3)^2 = 49 \quad C(\quad , \quad) r =$$

Obteniéndose como respuestas cero y tres por parte de A10 y A9 respectivamente, sin embargo, cuando se les preguntó cómo escribir las coordenadas, todos respondieron cero coma tres y siete (como radio).

Finalmente, se les interrogó cómo hacer para encontrar las coordenadas del centro, a lo que respondieron que la coordenada x no tiene valor, que la coordenada y tiene valor de tres dado que se le cambia el signo y que por último se debe extraer la raíz cuadrada de cuarenta y nueve.

Conclusión:

Llegado a éste punto, los alumnos han establecido una adecuada y clara relación entre las coordenadas que determinan el centro de una circunferencia, su radio, y la ecuación de ésta. Cabe destacar también, la emoción de A9 al ponerse a prueba el conocimiento adquirido, de manera que se despertó el interés por enfrentar el reto.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

Con respecto a las hojas de trabajo

Es necesario que una vez diseñadas las hojas de trabajo el docente responda éstas por sí mismo, dado que permite a través de la empatía con el alumno, detectar y corregir errores tanto de diseño como de redacción, siendo éstos bastante significativos al tratar de comprender lo que pasa por la mente del alumno cuando responde las actividades.

El diseño de las hojas de trabajo permite guiar al alumno evitando así que éste se disponga a realizar cálculos o construcciones sin haber comprendido el problema.

Es necesario dirigirse poco a poco hacia preguntas cada vez más precisas, de tal modo que, a través de la movilización de los conocimientos anteriormente adquiridos le permitan al alumno apropiarse del aprendizaje esperado.

El enunciado verbal del problema es comprendido al presentarlo de modo sencillo, natural e interesante, puesto que comprender claramente la naturaleza del problema constituye un progreso. Y por ende, los alumnos se aventuran en la resolución de éste, estableciendo una clara relación entre los datos proporcionados por el problema y su representación gráfica.

Hubo un mejor aprovechamiento de las clases dado que el tiempo de realización de las actividades se ajustó adecuadamente a los 50 minutos de duración de ésta.

Es necesario mostrar a los alumnos mediante un ejemplo, cómo deben completar la tabla de registro de datos a fin de reducir al máximo la posibilidad de errores al extraer la información de la representación gráfica.

Con respecto a la actividad en binas

El trabajo en equipo propicia el intercambio, confrontación e integración de ideas entre los estudiantes, reflejando un gran interés y compromiso en la resolución de las hojas de trabajo. Al tiempo que se dividieron las tareas para dar respuesta; así, mientras uno leyó las instrucciones, el otro realizó las indicaciones en el software, lo cual les ayudó a detectar y disminuir posibles errores puesto que ambos debían coincidir para registrar su respuesta.

Con respecto a la actividad grupal

Las actividades implementadas se vieron enriquecidas al vincular la resolución de las hojas de trabajo (producto del trabajo en binas), con el análisis grupal sobre las mismas, dado que, a través del análisis grupal fue posible detectar y resolver dudas concisas mostradas por los estudiantes.

Cabe señalar que entre ellos mismos aclararon las dudas vislumbradas por algunos de sus compañeros, explicándoles el razonamiento a seguir, al mismo tiempo que aclaraban las dudas mostradas indirectamente. Mientras en otros casos, el mismo estudiante de manera personal

resolvía sus propias dudas al escuchar la participación de sus compañeros y observar los registros de la tabla de datos realizados por ellos. Puesto que en el trabajo grupal (gracias a su participación), algunos dieron muestras de haber detectado la relación que no les fue posible establecer de manera clara en el trabajo en binas.

Los estudiantes se muestran bastante participativos al resolver la actividad de manera grupal haciendo más sencilla la tarea de involucrar a quienes se muestran un tanto temerosos o tímidos, puesto que el total de los alumnos involucrados en la actividad grupal participaron en la resolución de las hojas de trabajo. Logrando con ello, concretar una respuesta íntegra, al participar complementando uno a otro lo que intentaban expresar, siendo perceptible en consecuencia de manera inconsciente entre ellos una atmósfera de agradable compañerismo.

Si algún alumno no tiene participación activa en el trabajo en binas se puede detectar de manera más precisa en el trabajo grupal a través de su participación directa, y mediante el apoyo de sus compañeros dirigirlo hacia el aprendizaje esperado.

En ocasiones el alumno presenta dificultad para expresar de manera verbal la respuesta a una pregunta formulada (aunque de manera escrita le haya sido fácil responderla), siendo necesario modificar el método de interrogación por parte del docente hacia otra pregunta más particular, que de manera sutil le vislumbre una perspectiva más encauzada, teniendo cuidado de que al alumno le sea fácilmente detectable ésta, pues de otro modo se corre el riesgo de que la pregunta no aporte la ayuda deseada.

Con respecto al análisis de las actividades implementadas

El diseñar las actividades de tal forma que el alumno construya su propio aprendizaje y presentar los problemas matemáticos mediante un ejemplo clarificador de su entorno, seleccionando semejanzas sencillas de interpretar, evidencia en éste; mayor interés, motivación y valoración por el trabajo realizado, obteniéndose su total entrega en la clase.

Por otro lado, el estudiante encuentra atractivo el trabajo matemático mediante el apoyo del software, dado que elimina la labor rutinaria y potencia la parte activa y creativa. Además, el uso del software evita errores que pudieran ser cometidos en la representación geométrica del problema, y disminuye significativamente los errores cometidos en la extracción y registro del álgebra que éste implica, puesto que, en la actividad en binas y registro en las hojas de trabajo, dieron claras muestras de que pueden extraer el álgebra contenida en un problema cuya descripción verbal ha sido representada geométricamente haciendo uso del software, dado que todos llenaron las tablas de registro de datos en base a la geometría del problema. No obstante, al registrar los datos en la tabla llegaron a cometer errores al transcribir la información, sobre todo en lo que a signos se refiere. Aun así, lo anteriormente descrito repercute en valioso tiempo aprovechable para el análisis del álgebra que implica y su relación con la geometría, evidenciando un reconocimiento claro de dicha relación, puesto que lograron determinar la ecuación de una circunferencia dadas las coordenadas del centro y su radio inclusive con información ajena a la tabla de registro de datos.

En el aspecto instructivo de las hojas de trabajo, los estudiantes dieron evidencias contundentes de seguir claramente los pasos señalados por las mismas, para lo cual, en algunas

de las preguntas se les permitió expresar su respuesta a través o con ayuda de un ejemplo, de manera que les fuera más fácil plasmar sus ideas. Lo cual arrojó (una vez analizadas las hojas del trabajo en binas) que dos de los equipos fueron más analíticos en su respuesta, relacionando la modificación geométrica y algebraica, o en otros casos, destacando detalles adicionales. Sin embargo, se observó que otras dos parejas de alumnos fueron muy breves en su respuesta escrita mientras que en su participación oral establecieron y expresaron una clara relación entre las coordenadas del centro de la circunferencia y su ecuación, destacando inclusive un cambio en los signos. Por lo que se considera el análisis grupal como una parte complementaria y fundamental del aprendizaje así como de la evaluación de conocimientos adquiridos.

Al término de la implementación de las actividades en forma grupal, los estudiantes mostraron poder determinar las coordenadas del centro y el radio de una circunferencia dada su ecuación, es decir, el proceso inverso a lo que realizaron en las hojas de trabajo. Sólo que ésta vez, producto de relacionar el conocimiento adquirido con la información dada, para finalmente expresar de manera verbal la respuesta a la interrogante.

Con respecto a la pertinencia del software

Al permitirle al estudiante ahondar en las características del software por sí solo (como parte del reconocimiento de éste), se obtienen resultados muy favorables dado que se encuentra plenamente familiarizado con el uso de la tecnología y ello le permite descubrir aspectos generales del funcionamiento de éste. Lo cual reduce enormemente el tiempo de explicación sobre las bondades del mismo, puesto que en una segunda sesión se le mostró con la ayuda de un

proyector el uso de las herramientas que serían requeridas para la realización de las actividades. Cabe señalar que ésta segunda sesión se llevó a cabo en el salón de clase, y por ende los estudiantes dieron muestras de la ubicación de las herramientas solicitadas a través de su participación oral. Por consiguiente, se considera un software fácilmente manipulable para el estudiante. Destacando también que en caso de surgir alguna duda sobre las herramientas del software es posible dar respuesta de manera inmediata sin que ello reste tiempo significativo en la realización de las actividades en binas.

El uso del software ofrece al estudiante un ambiente de trabajo que estimula la reflexión convirtiéndolo en un ser activo y responsable de su propio aprendizaje. Además, en la primera actividad fue posible observar que se redujo significativamente el temor del estudiante a cometer errores, puesto que en el trabajo en binas se aventuró por sí solo a explorar sus ideas. Mientras que en la actividad grupal fue posible experimentar un enriquecedor soporte de retroalimentación.

La implementación de las hojas de trabajo y su vinculación con uso de la tecnología conlleva grandes cambios en la estructura del trabajo docente así como del rol que experimenta, sin embargo, asumir el reto brinda inigualables satisfacciones, mismas que inevitablemente reflejan un cambio de actitud en el alumno (atención, interés, compromiso, valoración) y eso aunque ya es bastante (y no por ello suficiente), brinda un ambiente propicio para el aprendizaje, que encauzado adecuadamente a través de las actividades permite al alumno apropiarse del conocimiento al construir su propio aprendizaje en forma activa.

BIBLIOGRAFÍA

Barrón, J. Luna, J. Estrada, J. Flores, S. Estrada F, Ramos M. *La Ecuación de la Línea Recta en la Modelación de Fenómenos Físicos* [en línea]. 2009 año. 6, no. 31 [fecha de consulta: Febrero 2016]. Recuperado de: <<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3238578>>.

Basurto, E. Gallardo, A. (2013). Las nuevas tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas. *Los parámetros en las funciones polinomiales: una experiencia con GeoGebra en el bachillerato*. México, D.F: Trillas.

Carminati, Waipan. *Integrando la neuroeducación al aula*. Argentina: Bonum

Carmona, J. *La circunferencia. Una propuesta didáctica usando modelo de van hiele y geometría dinámica* [tesis de pregrado en línea]. 2011, [fecha de consulta: Febrero 2016]. Recuperado de: <<http://www.bdigital.unal.edu.co/8855/1/01186517.2011.pdf>>.

Cortés, J. Guerrero, L. (2013). Las nuevas tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas. *Ambientes tecnológico-interactivos para el aprendizaje de las matemáticas: investigaciones y experiencias en geometría y cálculo*. México, D.F: Trillas.

Defas, V. *Elaboración y aplicación de recursos didácticos y material concreto para optimizar el aprendizaje de la línea recta y la circunferencia en el tercer año de bachillerato de la especialidad de mecanizado y construcciones metálicas del instituto técnico Andrés F. Córdova* [tesis de pregrado en línea]. 2013, [fecha de consulta: Febrero 2016]. Recuperado de:

<<http://dspace.ucuenca.edu.ec/bitstream/123456789/20848/1/TESIS.pdf>>.

Díaz, C. (2013). *A refundar la escuela*. Santiago de Chile: Barandal.

García, Martínez, Miñano (1995). *Nuevas tecnologías y enseñanza de las matemáticas*. España: Síntesis.

Gómez, Pedro. (1995) *Profesor: no entiendo*. México: Iberoamericana

Mochón, S. Rojano T. Ursini, S. (2000). *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo*. México, D.F: Ultra.

Núñez, G. Uso de tecnología en matemática educativa investigaciones y propuestas. *Desarrollo de ambientes tecnológico interactivos en el aprendizaje de las matemáticas: tres casos con ACODESA*. [en línea]. Septiembre 2014, vol. 8, no. 1. [fecha de consulta: febrero 2016]. Recuperado de: ILI<<http://www.amiutem.edu.mx/pdfs/IPUTEM2014.pdf>>.

Pérez, Y. Ramírez, R. *Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos* [en línea]. 2011, vol. 35, no. 73 [fecha de consulta: Febrero 2016]. Recuperado de: <<http://www.scielo.org.ve/pdf/ri/v35n73/art09.pdf>>.

Polya, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas*. México, D.F: Trillas

Saavedra M. (2014). *Formación docente eficaz. Estrategia de investigación dialéctica interdisciplinaria*. México: Pax.

Saint, M. (2000). *Yo explico pero ellos...¿aprenden?* México, D.F: Enlace.

Salazar, L. Vega, F. Bahena, H. *Geometría analítica* [en línea]. S.f., [fecha de consulta: Febrero 2016]. Recuperado de:

<<http://bibliotecadigital.conevyt.org.mx/colecciones/documentos/somece2002/Grupo2/salazar5.pdf>>.

Sanes, C. *La construcción de lugares geométricos en entornos de significatividad para el alumno: el caso de la mediatriz* [en línea]. 2014 vol. 16, no. 14 [fecha de consulta: Febrero 2016]. Recuperado de: <http://www.soarem.org.ar/Documentos/60_Sanes.pdf>.

Santos L. (2007) *La resolución de problemas matemáticos*. México, D.F: Trillas

Santos, M. Moreno, L. (2013). *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas. Sobre la construcción de un marco conceptual en la resolución de problemas que incorpore el uso de herramientas computacionales*. México, D.F: Trillas.

Segura, S. *Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica* [en línea]. 2004 vol. 7, no. 1[fecha de consulta: Febrero 2016]. Recuperado de: <<http://www.redalyc.org/pdf/335/33570103.pdf>>.

Sepúlveda, A. Medina, C. Sepúlveda, D. *La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas* [en línea]. 2009, vol. 21, no. 2 [fecha de consulta: Febrero 2016]. Recuperado de: <<http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v21n2/v21n2a4.pdf>>.

Soto, A. *El papel de la geometría analítica en la enseñanza de las matemáticas en la educación básica y media* [tesis de pregrado en línea]. 2013, [fecha de consulta: Febrero 2016]. Recuperado de: <<http://www.bdigital.unal.edu.co/11823/1/43737863.2014.pdf>>.

Villareal, J. Carmona, J. Arango, C. *La enseñanza aprendizaje de la geometría analítica. Una propuesta de desarrollo del pensamiento a partir del modelo de van hiele y la metodología de*

aula taller [en línea]. 2013, [fecha de consulta: Febrero 2016]. Recuperado de: <
<http://cibem.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/462.pdf>>.

Whimbey, A. Lochhead, J. (1999). *Problem Solving & Comprehension*. United States of America: IEA.

ANEXOS

ANEXO1

Actividad I (prueba piloto)



Se desea abastecer con productos básicos alimenticios a personas que viven en zonas marginadas, sin embargo, para brindar el recurso, estratégicamente se desea construir un banco de abastecimiento que se encuentre a igual distancia de dos pueblos situados en las coordenadas $A(2,5)$, $B(-3,2)$ y de una tercer localidad situada en $C(-4,1)$.

En base a los datos proporcionados:

I. Realiza los siguientes pasos de construcción con ayuda de GeoGebra.

- a) Localiza los puntos A , B y C
- b) Traza el segmento AB
- c) Traza el segmento BC
- d) Localiza el punto medio del segmento AB
- e) Localiza el punto medio del segmento BC
- f) Traza la mediatriz del segmento AB que pasa por D
- g) Traza la mediatriz del segmento BC que pasa por E
- h) Localiza el punto de intersección F de las mediatrices
- i) Calcula la distancia del punto de intersección F al punto A
- j) Calcula la distancia del punto de intersección F al punto B
- k) Calcula la distancia del punto de intersección F al punto C
- l) Dibuja la circunferencia que pasa por los puntos A , B y C

II. En base a los datos obtenidos de la construcción, completa la tabla 1.1 siguiendo las instrucciones que se presentan a continuación.

m) Mueve el punto A , a la posición $(2,4)$ y llena la segunda fila de la tabla 1.1 con los datos que se te solicitan.

n) Deja el punto A en la posición $(2,4)$ mueve el punto B a la posición $(4,3)$ y llena la tercera fila de la tabla 1.1 con los nuevos datos.

o) Con el punto A en la posición $(2,4)$ y B en $(4,3)$ mueve el punto C a las coordenadas $(1,3)$ y completa la Tabla 1

Fila	A	B	C	Mediatriz AB	Mediatriz BC	F	Dist. FA	Dist. FB	Dist. FC	Ecuación de la Circunferencia
1	$(2,5)$	$(-3,2)$	$(-4,1)$	$5x + 3y = 8$	$x + y = -2$	$(7, -9)$	14.87	14.87	14.87	$(x - 7)^2 + (y + 9)^2 = 221$
2										
3										
4										

Tabla 1

III. Responde las siguientes preguntas.

1. ¿Qué cambio ocurre en la circunferencia al mover el punto B ?

2. ¿Por qué razón las distancias FA , FB y FC se mantienen con el mismo valor en cada fila?

3. ¿Qué relación existe entre las coordenadas del punto F y la ecuación de la circunferencia?

4. Geométricamente, ¿qué modificación sufrió la circunferencia al cambiar las coordenadas de los tres puntos?

¿Por qué?

5. ¿Qué relación existe entre las distancias FA, FB, FC y la ecuación de la circunferencia?

6. ¿Cómo escribirías la ecuación de una circunferencia con centro en las coordenadas $F(2,1)$ y radio $r = 9$?

Actividad II (prueba piloto)



El Servicio Sismológico Nacional detecta un sismo con origen en las costas de Colima en las coordenadas $A(0,0)$ cuyas ondas se extienden en una zona delimitada a $1km$ a la redonda. Simultáneamente, una sacudida de gran intensidad en el volcán Popocatepetl, situado en las coordenadas $B(3,1)$, hace sentir su efecto en un radio de $2km$ a la redonda, mientras que, en el parque industrial de Manzanillo ubicado en las coordenadas $C(-1,1)$, se genera la explosión de una gasera que propaga un denso humo visible a $3 km$ a la redonda.

En base a los datos proporcionados:

- I. Realiza los siguientes pasos de construcción con ayuda de GeoGebra.
 - a) Localiza los puntos A, B y C
 - b) Dibuja la circunferencia con centro en el punto A , considerando el radio indicado
 - c) Dibuja la circunferencia con centro es el punto B , considerando el radio indicado
 - d) Dibuja la circunferencia cuyo centro es el punto C , considerando el radio indicado

II. En base a los datos obtenidos de la construcción se llenó la primer fila de la tabla que a continuación se presenta. **Completa los espacios en blanco** siguiendo las instrucciones:

- e) Mueve el punto B , a la posición $(3, -1)$ y llena la segunda fila de la Tabla 1 con los datos que se te solicitan.
- f) Deja el punto B en la posición $(3, -1)$ mueve el punto C a la posición $(4,3)$ y llena la tercera fila de la Tabla 1 con los nuevos datos.
- g) Con el punto A en la posición $(0,0)$ y B en $(3, -1)$ mueve el punto C a las coordenadas $(3,0)$ y completa la cuarta fila de la Tabla 1

Fila	A	B	C	Ecuación de la Circunferencia del Sismo	radio	Ecuación de la Circunferencia del Volcán	radio	Ecuación de la Circunferencia de la Gasera	radio
1	(0,0)	(3,1)	(-1,1)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$	2	$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$	3
2									
3									
4									

Tabla 1

III. Responde las siguientes preguntas.

- ¿Qué cambio ocurre en la ecuación de la circunferencia al mover el punto B ?

- ¿Qué cambio ocurre en la ecuación de la circunferencia al mover el punto C a la posición $(4,3)$?

3. ¿Qué cambio ocurre en la ecuación de la circunferencia al mover el punto C a la posición $(3,0)$?

4. ¿En qué se diferencia la ecuación que representa el sismo de la ecuación que representa el volcán?

5. ¿Por qué razón la ecuación de la circunferencia que representa el sismo no tiene valores numéricos antes de la igualdad?

6. ¿Qué relación existe entre la ecuación de la circunferencia y su centro?

7. ¿Qué relación existe entre la ecuación de la circunferencia y su radio?

8. ¿Cómo escribirías la ecuación de una circunferencia con centro en las coordenadas $(0,0)$ y radio $r = 9$?

9. ¿Cómo escribirías la ecuación de una circunferencia con centro en las coordenadas $(5,3)$ y radio $r = 4$?

10. ¿Cómo escribirías la ecuación de una circunferencia con centro en las coordenadas $(0,2)$ y radio $r = 5$?

ANEXO 2 (MI DÍA EN PREPA)

ANEXO 3

Actividad I (definitiva)



Se desea abastecer con productos básicos alimenticios a personas que viven en zonas marginadas, sin embargo, para brindar el recurso, estratégicamente se desea construir un banco de abastecimiento que se encuentre a igual distancia de dos pueblos situados en las coordenadas $A(2,5)$, $B(-3,2)$ y de una tercer localidad situada en $C(-4,1)$.

En base a los datos proporcionados:

I. Realiza los siguientes pasos de construcción con ayuda de GeoGebra.

- a) Localiza los puntos A , B y C
- b) Traza el segmento AB
- c) Traza el segmento BC
- d) Localiza el punto medio del segmento AB
- e) Localiza el punto medio del segmento BC
- f) Traza la mediatriz del segmento AB que pasa por D
- g) Traza la mediatriz del segmento BC que pasa por E
- h) Localiza el punto de intersección F de las mediatrices
- i) Calcula la distancia del punto de intersección F al punto A
- j) Calcula la distancia del punto de intersección F al punto B
- k) Calcula la distancia del punto de intersección F al punto C
- l) Dibuja la circunferencia que pasa por los puntos A , B y C

II. En base a los datos obtenidos de la construcción, se llenó la primera fila de la tabla que a continuación se presenta. **Completa los espacios en blanco** siguiendo las instrucciones:

- m) Mueve el punto A , a la posición $(2,4)$ y llena la segunda fila de la Tabla 1 con los datos que se te solicitan.
- n) Deja el punto A en la posición $(2,4)$ mueve el punto B a la posición $(4,3)$ y llena la tercera fila de la Tabla 1 con los nuevos datos.
- o) Con el punto A en la posición $(2,4)$ y B en $(4,3)$ mueve el punto C a las coordenadas $(1,3)$ y completa la Tabla 1

Tabla 1

Fila	A	B	C	Mediatriz AB	Mediatriz BC	F	Dist. FA	Dist. FB	Dist. FC	Ecuación de la Circunferencia
1	$(2,5)$	$(-3,2)$	$(-4,1)$	$5x + 3y = 8$	$x + y = -2$	$(7, -9)$	14.87	14.87	14.87	$(x - 7)^2 + (y + 9)^2 = 221$
2										
3										
4										

III. Responde las siguientes preguntas.

1. ¿Qué cambio ocurre en la circunferencia al mover el punto B ?

2. ¿Por qué razón las distancias FA , FB y FC se mantienen con el mismo valor en cada fila?

3. ¿Qué relación existe entre las coordenadas del punto F y la ecuación de la circunferencia?

4. Geométricamente, ¿qué modificación sufrió la circunferencia al cambiar las coordenadas de los tres puntos?

¿Por qué?

5. ¿Qué relación existe entre las distancias FA, FB, FC y la ecuación de la circunferencia?

6. ¿Cómo escribirías la ecuación de una circunferencia con centro en las coordenadas $F(2,1)$ y radio $r = 9$?

Actividad II (definitiva)



El Servicio Sismológico Nacional detecta un sismo con origen en las costas de Colima en las coordenadas $A(0,0)$ cuyas ondas se extienden en una zona delimitada a $1km$ a la redonda. Simultáneamente, una sacudida de gran intensidad en el volcán Popocatepetl, situado en las coordenadas $B(3,1)$, hace sentir su efecto en un radio de $2km$ a la redonda, mientras que, en el parque industrial de Manzanillo ubicado en las coordenadas $C(-1,1)$, se genera la explosión de una gasera que propaga un denso humo visible a $3 km$ a la redonda.

En base a los datos proporcionados:

I. Realiza los siguientes pasos de construcción con ayuda de GeoGebra.

- a) Localiza los puntos A, B y C
- b) Dibuja la circunferencia con centro en el punto A , considerando el radio indicado
- c) Dibuja la circunferencia con centro es el punto B , considerando el radio indicado
- d) Dibuja la circunferencia cuyo centro es el punto C , considerando el radio indicado

II. En base a los datos obtenidos de la construcción se llenó la primer fila de la tabla que a continuación de se presenta. **Completa los espacios en blanco** siguiendo las instrucciones:

- e) Mueve el punto B , a la posición $(3, -1)$ y llena la segunda fila de la Tabla 1 con los datos que se te solicitan.
- f) Deja el punto B en la posición $(3, -1)$ mueve el punto C a la posición $(4,3)$ y llena la tercera fila de la Tabla 1 con los nuevos datos.
- g) Con el punto A en la posición $(0,0)$ y B en $(3, -1)$ mueve el punto C a las coordenadas $(3,0)$ y completa la cuarta fila de la Tabla 1

Tabla 1

Fila	A	B	C	Ecuación de la Circunferencia del Sismo	radio	Ecuación de la Circunferencia del Volcán	radio	Ecuación de la Circunferencia de la Gasera	radio
1	(0,0)	(3,1)	(-1,1)	$x^2 + y^2 = 1$	1	$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$	2	$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$	3
2									
3									
4									

III. Analiza la Tabla 1 y responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué modificación observas en la ecuación de la circunferencia al cambiar de posición el punto B a las coordenadas $(3, -1)$?

2. ¿Qué cambio ocurre en la ecuación de la circunferencia al mover el punto C a la posición $(4,3)$?

3. ¿Qué cambio ocurre en la ecuación de la circunferencia al mover el punto C a la posición $(3,0)$?

4. ¿Qué relación existe entre la ecuación de la circunferencia y su centro? (Puedes responder auxiliándote de un ejemplo ilustrativo)

5. ¿Cómo escribirías la ecuación de una circunferencia con centro en las coordenadas $(5,3)$ y radio $r = 4$?

6. ¿Cómo escribirías la ecuación de una circunferencia con centro en las coordenadas $(0,2)$ y radio $r = 5$?

7. ¿Cómo escribirías la ecuación de una circunferencia con centro en las coordenadas $(0,0)$ y radio $r = 9$?

8. ¿Por qué razón la ecuación de la circunferencia que representa el sismo no tiene valores numéricos antes del signo de igualdad?

9. ¿Qué relación existe entre la ecuación de la circunferencia y su radio? (Puedes responder auxiliándote de un ejemplo ilustrativo)
