UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

“Matrices, correspondencia RSK y representaciones del grupo simétrico”

TESIS

Que para obtener el título de:
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:
José Rubén Maldonado Herrera

ASESOR:

Dr. Ernesto Vallejo Ruiz

Morelia, Michoacán, Agosto del 2016

A la memoria de mi abuelo Rubén.

Y a mis padres, quienes han sido

mi gran apoyo.

Agradecimientos

Muchas personas han sido parte importante de mi vida y me han acompañado durante mi formación académica y personal, todas merecen ser mencionadas, pues su acompañamiento me ha hecho crecer y disfrutar de este viaje a través del conocimiento.

Primero que nada agradezco a mis padres, mi gran inspiración y fuente de motivación. Muchas gracias por apoyar mis decisiones, por estar al pendiente de mis estudios y bienestar, por dedicar tanto tiempo para que mis hermanos y yo tengamos buenas oportunidades, por enfocarse en nuestra felicidad. Gracias por darme su confianza, ustedes son alguien con quien puedo contar, gracias por todo. A mí abue, grande persona y ejemplo a seguir, gracias por preocuparte por el futuro de tu nieto. A mis hermanos Dani y Richar, a mis tíos y a mis primos, porque en ellos he encontrado apoyo, cariño y palabras de aliento. Sé que todos ustedes se sentirán orgullosos de este trabajo.

Quiero agradecer a mi asesor de tesis Ernesto Vallejo, una gran persona a quien admiro, por siempre estar dispuesto a compartir sus conocimientos y guiarme de una manera muy amena y provechosa. Él siempre se mantuvo al pendiente de este trabajo y me brindó su asesoria profesional aconsejandome de la mejor manera. Gracias por ser paciente y tener esa gran disposición de ayudar.

Mi más profundo agradecimiento a todos mis profesores. En ellos no sólo encontré una fuente de conocimientos, sino a grandes seres humanos que estaban al pendiente de sus alumnos. Gracias a Malú por preocuparse por sus alumnos de una manera casi maternal, por hacerme sentir esa gran confianza, y sobre todo por mostrarme las matemáticas como algo hermoso, por despertar mi intuición y razonamiento; gracias a ti he conocido grandes áreas de las matemáticas que me apasionan. Gracias a Fer y a David por su amistad, por el apoyo brindado, por compartir esa motivación en sus clases y fuera del aula, y por estar siempre dispuestos a recibir a sus alumnos, incluso ayudandonos en ámbitos fuera de lo académico. Por último gracias al profesor Ángel, mi profesor de matemáticas de la preparatoria que me encamino en esta dirección y siempre confió en mí.

También quiero dar mis más sinceras gracias a todos mis amigos, a quienes considero mi segunda familia. A las princesas: Eve, Pablo, Gil, Uziel, Sofi, Ada, Eva y Atziri; gracias por hacer de mi estancia en fismat un gozo, por permitirme compartir con ustedes grandes alegrías, gracias por estar dispuestos a tener charlas de todo tipo y mostrar una amistad tan unida, gracias por estar ahí cuando alguna cuestión me agobiaba, por compartir sus pensamientos y su forma de ser tan maravillosa. Gracias a mis vecinos: mi compa Zaruk, el Gordo, Alan y Dani, por esos momentos de desestrés y distracción, por todas las tonterías y buenos ratos de convivencia, gracias por su confianza y por estar ahí en los buenos y malos momentos. A mi entrañable amiga Daniela por esos pequeños pero reconfortantes ratos de plática, gracias por todo tu apoyo y la atención que tienes conmigo, gracias por permitirme encontrar en ti una valiosa amiga. A mis grandes amistades de escuela: Felipe, Heber, Laura y Eduardo, por su sincera amistad y confidencia, gracias por el apoyo que me brindan en todos los aspectos, y sobre todo gracias por nuestra amistad que a pesar de los años y la distancia aun conservamos. A Viry por creer en lo que hacía e impulsarme a hacer lo que me apasiona, gracias por acompañarme en momentos fundamentales de mi carrera y por todo el apoyo que me brindaste. A Tero, Cesar, Jean, el Prima y toda la banda de fismat, porque ustedes hacen de nuestra facultad un lugar de convivencia plena, donde puedes expresarte y convivir sin aprensión, agradezco profundamente su amistad, todo lo que he aprendido de ustedes y las vivencias ocurridas durante mi estancia en la facultad.

Por último quiero agradecer a aquello que me ha abierto las puertas al entendimiento, a la duda y a la intriga, al cuestionamiento y al goce por el conocimiento; gracias por hacerme visualizar la vida desde un punto de vista más amplio y sin ataduras, agradezco por todos los corajes, frustraciones, alegrías y experiencias, gracias por permitirme disfrutar de ti. A eso tan intangible pero a la vez tan practico...las matemáticas, ¡gracias!

Contenido

Resumen **vii**
Palabras clave vii

Abstract **viii**

Introducción **ix**

1. Tablas de Young **1**
1.1. Operaciones en tablas 3
1.1.1. Inserción por fila 3
1.1.2. Deslizamiento 6
1.2. Palabras 7
1.3. La correspondencia de Robinson-Schensted-Knuth 11
1.4. La regla de Littlewood-Richardson 15
1.4.1. Anillo de monoide 18

2. Teoría de Representaciones **20**
2.1. Representaciones y G-módulos 20
2.1.1. Reducibilidad y G-submódulos 23
2.1.2. Homomorfismos 24
2.1.3. El álgebra de grupo 24
2.2. Teorema de Maschke 26
2.2.1. El álgebra de grupo y los submódulos irreducibles 27
2.3. Caracteres 28
2.3.1. Producto interno 31
2.4. Restricción y módulos inducidos 32
2.4.1. Producto tensorial 33
2.4.2. Restricción a un subgrupo 36
2.4.3. Módulos inducidos 36

3. Polinomios simétricos homogéneos **38**
3.1. Dos órdenes importantes 38
3.2. Polinomios de Schur 39
3.3. Números de Kostka 42

4. Representaciones del grupo simétrico **44**
4.1. Representaciones de S_n 44
4.2. Módulos de Specht 46
4.3. El anillo de representaciones 48
4.4. Anillo de caracteres 49

5. Coeficientes de Kronecker **51**
5.1. El Lema de Cauchy-Frobenius 52
5.2. Matrices 54
5.2.1. Matrices 2-dimensionales 55
5.3. Teorema de Snapper 58
5.3.1. Aplicaciones a matrices 62
5.4. Multitablas, coeficientes de Kronecker, y matrices 64

Bibliografía **71**

Índice y lista de símbolos **72**

Resumen

Existe una función biyecctiva entre parejas de tablas de Young semiestándar y matrices 2-dimensionales con entradas enteras no negativas. El resultado principal de esta tesis muestra una generalización de esa biyección a matrices 3-dimensionales, dada por Ernesto Vallejo y Diana Avella en el 2012; para llegar a ella es necesario conocer la combinatoria de las tablas de Young y la relación que estas tienen con las representaciones del grupo simétrico. Esta relación es muy amplia, ya que gracias a las tablas es posible conocer los módulos irreducibles de S_n. Además, la multiplicidad de la descomposición en módulos irreducibles puede ser calculada usando tablas en ciertos casos. Algunas de estas multiplicidades son conocidas como números de Kostka y coeficientes de Littlewood-Richardson (en honor a los matemáticos que las estudiaron), estas últimas sirven de motivación para tratar de encontar un cálculo combinatorio de los coeficientes de Kronecker. Para poder relacionar los coeficientes de Littlewood-Richardson y los números de Kostka con las representaciones de S_n, es necesario crear un puente entre el anillo de tablas y un anillo graduado de dichas representaciones pasando por el anillo de polinomios simétricos homogéneos.

En la teoría de representaciones exiten unas funciones asociadas a los G-módulos llamadas caracteres, y un producto interno en las mismas. Dichas funciones junto con un teorema llamado teorema de Snapper nos permiten relacionar al conjunto de matrcies 3-dimensionales con 1-margenes fijos con el conjunto de ternas cuyas entradas son dos tablas semiestandar y una pareja de multitablas LR; llegando así a la generalización antes mencionada. Más aún, como aplicación de este resultado, se obtiene una aproximación combinatoria de los coeficientes de Kronecker.

Palabras clave: Tablas de Young, Correspondencia RSK, Representaciones de grupos, Polinomios de Schur, Grupo simétrico, Coeficientes de Kronecker, Matrices.

Abstract

There is a biyective map between pairs of semistandard Young tableaux and 2-dimensional matrices with nonnegative integer entries. The main result of this thesis shows a generalization of that biyection to 3-dimensional matrices which was given by Ernesto Vallejo and Diana Avilla in 2012; to reach it is necessary to know the combinatorics of Young tableaux and the relation they have with the representations of the symmetric group. This relationship is far-reaching, because by means of the tableaux it is posible to know the irreducible modules of S_n. Furthermore, the multiplicity of the descomposition in irreducible modules can be calculated using tableaux in some cases. Some of these multiplicities are known as Kostka numbers and Littlewood-Richardson numbers (in honor of mathematicians that studied them), the latter serve as motivation to try to locate a combinational calculation of Kronecker coefficients. To relate the Littlewood-Richardson numbers and Kostka numbers with the representations of S_n, it is necessary to create a link between the tebleau ring and a graduated ring of those represenations using the symmetric homogeneous polynomial ring.

In the representation theory there are functions associated to the G-modules called characters, and a inner product of characters. These functions together with a theorem from Snapper allow us to relate the set of 3-dimensional matrices with fixed 1-margins with the set of triples whose coordinates are two semistandard tableaux and one pair of LR multitableaux; thus reaching the above generalization. Even more, as an application of this result, we obtain a combinatorial approximation of Kronecker coefficients.

Introducción

En la teoría de representaciones de grupos existen G-módulos los cuales carecen de submódulos propios. Estos G-módulos son llamados irreducibles y son de suma importancia dentro de la teoría puesto que gracias al teorema de Mashke ([JL, C. 8]) todo G-módulo se escribe como suma directa de módulos irreducibles cuando G es un grupo finito. En este ámbito existen preguntas interesantes como: Dado un grupo finito G ¿cuáles son todas sus representaciones irreducibles? ¿Cómo descomponer el producto tensorial de dos G-módulos como suma directa de irreducibles?. El resultado principal de esta tesis nos permitirá conocer parcialmente la respuesta de la segunda pregunta para el caso del producto tensorias de módulos irreducibles del grupo simétrico S_n. En el camino encontraremos todos los módulos irreducibles de S_n resolviendo así la primera pregunta. A estos módulos se les conoce como módulos de Specht y su construcción requiere de unos objetos combinatorios llamados tablas de Young, las cuales, han sido estudiadas por diversos matemáticos a lo largo del siglo XX. Algunos resultados interesantes sobre ellas nos servirán como herramienta; en particular nos enfocaremos en un resultado conocido como la correspondencia de Robinson-Schensted-Knuth (RSK) la cual habla de una biyección entre parejas de tablas y matrices con entradas enteras no negativas. Está biyección será generalizada como resultado final de esta tesis y eso nos permitirá dar una aproximación a la pregunta planteada anteriormente.

Un coeficiente de Kronecker es la multiplicidad de una representación irreducible de S_n en el producto tensorial de otras dos. Estos coeficientes se empezarón a investigar desde 1938 y se han encontrado en áreas como física, y más recientemente en teoría de complejidad geométrica, por lo que el interés en ellos ha aumentado. Desde entonces se ha buscado una manera combinatoria de calcularlos, pero no se ha obtenido una respuesta concreta.

En el capítulo 1 estudiaremos las propiedades combinatorias de las tablas de Young ([Fult]) y usando las relaciones de Knuth demostraremos que el conjunto de tablas es un monoide. Daremos la correspondencia RSK y hablaremos de los coeficientes de Littlewood-Richardson (LR); coeficientes que aparecen como la multiplicidad de módulos irreducibles en el producto de otros dos, dentro del anillo graduado Gr, el cual, consta de la suma directa de los anillos de Grothendieck de S_n. Dichos coeficientes pueden ser calculados de manera combinatoria utilizando tablas. Esto posteriormente motiva a buscar un cálculo combinatorio de los coeficientes de Kronecker.

El capítulo 2 está dedicado a estudiar de manera general la teoría de representaciones de grupos finitos ([JL]). Aquí enunciaremos el teorema de Maschke e introduciremos el concepto de carácter el cual será de gran ayuda. Al final del capitulo hablaremos de la restricción y la inducción de representaciones, un concepto que posteriormente aparecerá en el caso particular del grupo simétrico.

En el capítulo 3 mencionaremos a los polinomios simétricos y como estos estan relacionados con el monoide de tablas . Los polinomios conocidos como polinomios de Schur serán relevantes, ya que el conjunto de éstos, junto con las operaciones suma y multiplicación de polinomios, forma una estructura de anillo graduado la cual resulta isomorfa al anillo de Grothendieck de los S_n-módulos. Estudiaremos los coeficientes de Kostka y daremos un homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos entre el anillo de monoide de tablas y el anillo de polinomios ([Fult, C. 2 y 6]).

En el capítulo 4, usando tablas de Young mostraremos una construcción para conocer todos los módulos irreducibles de S_n. Daremos el isomorfismo entre el anillo de Grothendieck de S_n y el anillo de polinomios de Schur, el cual servirá de puente para conocer mejor algunas representaciones del grupo ([Fult, C. 7]).

Finalmente en el capítulo 5, hablaremos del problema principal de esta tesis. Como primer paso definiremos los 1-márgenes de una matriz n-dimensional. De forma intermedia enunciaremos y probaremos el Teorema de Snapper ([Sn]). Éste nos dará una fórmula para calcular el número de matrices con 1-márgenes fijos en términos de caracteres del grupo simétrico. Por último haciendo uso de los resultados anteriores y en base a sospechas que generan aplicaciones del teorema de Snapper, daremos un teorema de Ernesto Vallejo y Diana Avella que generaliza RSK a matrices 3-dimensionales ([AV]). Éste teorema nos dará una aproximación combinatoria de los coeficientes de Kronecker.

Los primeros dos capítulos nos servirán como nociones preliminares. Éstos y los capítulos 3 y 4 son de preparación para el último capítulo; los resultados mostrados ahí aparecen en varios libros de texto, es por ello que hemos omitido algunas demostraciones, esperando que las que aparecen sirvan de ilustración y den una idea de las técnicas que se utilizan para probar los resultados. El capítulo 5 está basado en diversos artículos. Por eso y por ser este el capítulo principal, hemos realizado todos los resultados a detalle.

Capítulo 1

Tablas de Young

En este capítulo estudiaremos las tablas de Young y qué operaciones se pueden realizar con éstas. Asociaremos a ellas la noción de palabra, y después de varios resultados llegaremos a una importante correspondencia conocida como la correspondencia de Robinson-Schensted-Knuth (RSK). También hay una regla conocida como regla de Littlewood-Richardson (LR) la cual nos será de gran ayuda para conocer más acerca de las representaciones del grupo S_n. Gran parte de este capítulo esta basado en [Fult] y algunas propiedades o demostraciones que fueron omitidas pueden encontrarse ahí con más detalle. Para empezar es necesario introducir nuestra notación y conocer algunos conceptos.

Definición 1.1. Una **partición** de un número natural n es una tupla de naturales $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ que cumple:

1. $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_m$
2. $\sum_i \lambda_i = n$

Nota: Nosotros consideraremos a los números naturales como el conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

A veces conviene escribir a λ como $\left(1^{b_1}, 2^{b_2}, \ldots, n^{b_n}\right)$ donde b_i es el número de veces que aparece i en la partición, aunque nosotros usaremos más frecuentemente la forma de la Definición 1.1 . Otras notaciones útiles son $\lambda \vdash n$ que quiere decir que λ es partición de n, $|\lambda|$ que es el valor n del cual λ es partición, y la **longitud** de una partición $l(\lambda)$, que es el número de partes. También establecemos la **partición vacía** $\emptyset$ o partición 0 que se puede pensar como la partición cuyas λ_i's son todas cero o como la partición () la cual es la única de longitud cero. Estas definiciones son meramente algebraicas, pero pueden ser analizadas desde un punto más visual.

Definición 1.2. Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, y sea $I \subseteq P$, decimos que I es un **ideal** de P si para todo $a \in I$ y para todo $p \in P$ que cumpla que $p \leq a$ se tiene que $p \in I$.

Definición 1.3. En $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ decimo

s que $(a, b) \preccurlyeq (c, d)$ si y sólo si $a \leq c$ y $b \leq d$.

Observación 1.4. La relación $\preccurlyeq$ define un orden parcial en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Definición 1.5. Llamamos **diagrama de Young** a cualquier ideal finito D de $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \preccurlyeq)$.

Young introdujo la noción de diagrama, el cual le da una geometría a las particiones, no es difícil ver que a cualquier partición se le puede asociar un diagrama de Young y que todo diagrama de Young define una partición, es por ello que cuando hablemos de λ nos podremos referir tanto al diagrama que tiene asociado como a la partición. El diagrama consiste en colocar $l(\lambda)$ filas de cuadros, donde la fila i-ésima tiene λ_i cuadros, por ejemplo a la partición (4,4,3,1) le corresponde el diagrama de la Figura 1.1. Cabe hacer notar que el dibujo lo estamos pensando en coordenadas matriciales, es decir, los renglones los numeramos de arriba hacia abajo y las columnas de izquierda a derecha, así si la pareja (i,j) pertenece al diagrama, en el dibujo habra un cuadro en la fila i y columna j.

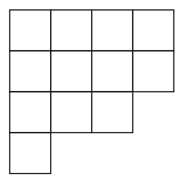

Figura 1.1: Diagrama de Young de la partición (4,4,3,1).

Con esto entonces podemos hablar de cuando una partición está contenida en otra (en el sentido del diagrama), y así definir lo que es un diagrama sesgado.

Definición 1.6. Si λ y μ son particiones tales que $\mu\subseteq\lambda$, llamamos **diagrama sesgado** al conjunto $\lambda\setminus\mu$ y lo denotamos como λ/μ. Un ejemplo es el de la Figura 1.2

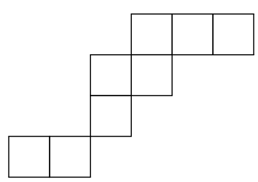

Figura 1.2: Diagrama sesgada de (6,4,3,2)/(3,2,2).

Definición 1.7. Una **tabla de Young** es una función $T:\lambda/\mu\to\mathbb{N}$, donde λ/μ es un diagrama sesgado; en este caso decimos que T es de **forma** λ/μ, en caso de que $\mu=\emptyset$ decimos que T es **regular** o de **forma regular**.

Las tablas de interés son aquellas que son crecientes de izquierda a derecha por filas y estrictamente crecientes de arriba hacia abajo por columnas. A las cuales llamaremos **tablas semiestándar**, si además se pide que la tabla sea una biyección entre λ/μ y $\{1, 2, \ldots, |\lambda/\mu|\}$ diremos que es **estándar**. Un ejemplo de cómo se ven dichas tablas se muestra en la Figura 1.3.

1	1	2	2
2	3	3	3
4	4	6	
7			

1	3	4	10
2	7	8	12
5	9	11	
6			

Figura 1.3: Tabla semiestándar y tabla estándar, de forma (4,4,3,1).

Antes de empezar con nuestro análisis hay que introducir una última noción básica, observemos que si tenemos un diagrama de Young λ e intercambiamos filas por columnas, es decir, reflejamos respecto a la diagonal, volvemos a obtener un diagrama de Young, al cual llamamos **conjugado** de λ y lo denotamos por λ'. Si hacemos esto con una tabla T obtenemos otra tabla a la cual llamamos **tabla transpuesta** y denotamos por T^τ.

Observación 1.8. Si T es semiestándar no necesariamente T^τ es semiestándar, pero si T es estándar entonces su transpuesta también lo es.

Nota: De aquí en adelante, para ahorrarnos vocabulario, nos referiremos a las tablas regulares semiestándar simplemente como tablas, a menos de que hagamos explícito lo contrario.

1.1. Operaciones en tablas

Hay dos operaciones binarias que son de suma importancia en el estudio de las tablas, estas se pueden efectuar entre cualesquiera dos tablas sin importar su forma. En esta sección nos enfocaremos en el estudio de dichas operaciones.

1.1.1. Inserción por fila

Dado un entero x y una tabla T definimos la operación **insertar $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{T}$** denotada como $T \leftarrow x$, de la siguiente manera: nos fijamos en la primera fila de T, si x es mayor o igual que el último número de la fila (contando de izquierda a derecha) colocamos un nuevo cuadro al final de la fila junto con el número x en él, si no, entonces buscamos el menor número más grande que x que este más a la izquierda, digamos x_1, y lo cambiamos por x, ahora con x_1 repetimos el mismo procedimiento pero en la segunda fila, y así nos seguimos, si se da el caso que llegamos a la última fila y extraemos un número entonces colocamos un nuevo cuadro al final de la primera columna con el último número extraído en él (ver [Kn]).

Formalmente el algoritmo de inserción es el siguiente:

Sea T una tabla de forma $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ y sean $a_{i,j} = T(i, j)$
Defínase $x_0 = x$, $i = 1$, $l = l(\lambda)$

Mientras $i \leq l$
  Si $x_{i-1} \geq a_{i,\lambda_i}$
    Haga $\lambda_i = \lambda_i + 1$
    $a_{i,\lambda_i+1} = x_{i-1}$
    Regresar $T \leftarrow x$ tal que $(T \leftarrow x)(s,r) = a_{s,r}$ y finalizar algotimo
  Si no, escogemos j tal que $a_{i,j-1} \leq x_{i-1} < a_{i,j}$
    Defina $x_i = a_{i,j}$
    Defina $a_{i,j} = x_{i-1}$
    $i = i + 1$
Haga $\lambda_{l+1} = 1$
$a_{l+1,1} = x_l$
Regresar $T \leftarrow x$ tal que $(T \leftarrow x)(s,r) = a_{s,r}$

Uno puede preguntarse si después de realizar una inserción la tabla resultante vuelve a ser semiestándar, pero precisamente así fue diseñado el algoritmo, sólo basta ver que si un número b fue reemplazado por a, las desigualdades se mantienen, por ejemplo si los «vecinos» por fila de b fueran b_1y b_2 entonces tendríamos que $b_1 < b \leq b_2$ (la primera desigualdad es estricta pues de lo contrario a hubiera remplazado a b_1o a un número que este más a la izquierda de b), como $a < b$ tenemos que $a < b_2$, además $b_1 \leq a$ pues de lo contrario b_1 hubiese sido reemplazado. Gracias a las desigualdades también se puede ver rápidamente que el número que ahora está debajo de a es mayor estricto y el que está arriba (si es que lo hay) es menor estricto, sólo nos falta ver que realmente la nueva tabla es una tabla, es decir, su dominio es una partición, para ello sólo hay que verificar que el nuevo cuadro que se agregó no haya hecho un renglón más largo que uno anterior, pero esto no pasa, pues de ser así justo un renglón anterior sería de la misma longitud que el renglón al que se le va a agregar el nuevo cuadro, lo que quiere decir que el entero que salió de este renglón es mayor o igual que todas las entradas del renglón donde se agregará el nuevo cuadro, lo cual no se puede pues la tabla es estrictamente creciente por columnas.

Para dejar más claras las ideas vea el ejemplo de la Figura 1.4.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|l}\cline{1-4} 1&3&3&5&\leftarrow 1\\\cline{1-4} 2&4&\multicolumn{3}{l}{}\\\cline{1-2} 5&5&\multicolumn{3}{l}{}\\\cline{1-2}\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&1&3&5\\\hline 2&4&\multicolumn{2}{l}{\leftarrow 3}\\\cline{1-2} 5&5&\multicolumn{2}{l}{}\\\cline{1-2}\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&1&3&5\\\hline 2&3&\multicolumn{2}{l}{}\\\cline{1-2} 5&5&\multicolumn{2}{l}{\leftarrow 4}\\\cline{1-2}\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&1&3&5\\\hline 2&3&\multicolumn{2}{l}{}\\\cline{1-2} 4&5&\multicolumn{2}{l}{}\\\cline{1-2} 5&\multicolumn{3}{l}{}\\\cline{1-1}\end{array}$$

Figura 1.4: Ejemplo de inserción del entero 1 en una tabla.

Esta operación tiene un proceso inverso, es decir, dada una tabla T se quiere saber a qué entero x y a que tabla T' se le aplicó la inserción tal que $T = T' \leftarrow x$, es claro que tal entero y tal tabla no son únicos, pero éstos se vuelven únicos cuando además de dar T damos una **esquina** distinguida (una esquina es un cuadro de T que no tiene «vecino» derecho ni «vecino» inferior) y el proceso a seguir para encontrar x y T' no es más que realizar el algoritmo de inserción en sentido inverso.

Definición 1.9. La **ruta** R al realizar una inserción de un natural x en una tabla T de forma λ, es el subconjunto de λ que consta de todos los cuadros a los cuales se les hizo un intercambio de número, junto con el último cuadro que se agregó.

Observación 1.10. Las rutas tienen a lo más un cuadro por renglón, y si tienen un cuadro en el renglón i, entonces tienen un cuadro en cada renglón anterior.

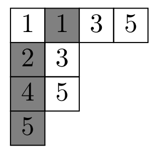

Figura 1.5: Ruta de la inserción de la Figura 1.4

Esta definición es importante pues con ella podemos tener un lema que será relevante en futuras propiedades. Antes de enunciar dicho lema necesitamos algunas maneras de comparar una ruta R con una ruta R', por ejemplo decimos que R está estrictamente a la izquierda de R' si para toda $(i, j') \in R'$ se cumple que si R tiene un cuadro en la fila i, digamos (i, j), entonces $j < j'$; podemos decir que R está débilmente a la izquierda si la desigualdad entre las $j\acute{}s$ no es estricta. De igual manera podemos comparar posiciones entre dos cuadros no solo hablando de izquierda o derecha sino también de arriba y abajo, por ejemplo el cuadro (1,4) está estrictamente a la derecha y débilmente abajo (o débilmente arriba) del cuadro (1,3).

Lema 1.11 (de Inserción)**.** *Considere R y R' recorridos de las inserciones $T \leftarrow x$ y $(T \leftarrow x) \leftarrow x'$ respectivamente, y sean C y C' los cuadros que se agregaron con esas inserciones, entonces se tiene que*

1. *Si $x \leq x'$ entonces R está estrictamente a la izquierda de R', y C está débilmente abajo de C'.*

2. *Si $x > x'$ entonces R' está débilmente a la izquierda de R, y C' está estrictamente abajo de C.*

Demostración. (1) Es claro que en el primer renglón R queda estrictamente a la izquierda de R' pues $x \leq x'$, ahora suponiendo que hasta cierto renglón i se tiene que R está estrictamente a la izquierda de R', y suponiendo que R' tiene una cuadro en el renglón siguiente, a saber el $i+1$, entonces R también, pues el que R' tenga una cuadro en este renglón implica que en el renglón i el cuadro de R' tiene un cuadro vecino a su derecha y por hipótesis el cuadro de R también tiene un vecino derecho por lo que la inserción no pudo haber terminado en este renglón, ahora veamos que R quedara estrictamente a la izquierda de R' en ese renglón. Llamémosle x_i y x_i' a los enteros que botó la inserción de x y x' en i-ésima fila respectivamente, nuevamente por hipótesis tenemos que $x_i \leq x_i'$, en el proceso de inserción x_i botó al menor número mayor estricto que el o quedo hasta el final de la fila, sin importar cuál fue el caso, dada la desigualdad anterior tenemos que x'_i quedara a la derecha de x_i. De esto se concluye que C está débilmente abajo de C'. (2) Este análisis es parecido pero por ser mayor x que x', al momento de la inserción x' puede botar a x. $\square$

La operación de inserción también es conocida como la operación de Schensted, y es muy útil para definir una operación entre tablas de la cual hablaremos más adelante.

1.1.2. Deslizamiento

Definición 1.12. En un diagrama sesgado de forma λ/μ llamamos **esquina interna** a un cuadro C si $C \in \mu$ y sus vecinos derecho e inferior (de tenerlos) no pertenecen a μ, llamamos **esquina externa** a cualquier cuadro de λ que no tienga vecinos derecho e inferior.

Hay una operación que se realiza en una tabla sesgada S de forma λ/μ que consiste en tomar una esquina interna y «desplazarla» a través de λ/μ hasta lograrla «sacar» del diagrama siguiendo ciertas reglas, a esta operación la llamamos **deslizamiento** [1] y consiste en lo siguiente: elegimos una esquina interior cualquiera, la cual se va a desplazar hacia la derecha o hacia abajo. Para elegir en qué dirección se realiza el movimiento elegimos el menor número entre ambos vecinos, en caso de ser iguales elegimos el cuadro de abajo; ahora nuestra esquina interior se convirtió en un cuadro vacío que está rodeado de algunos cuadros con un número asignado, esto no importa pues seguimos realizando el mismo proceso hasta que el cuadro sea una esquina externa, en este caso simplemente sacamos el cuadro del diagrama. Ver Figura 1.6.

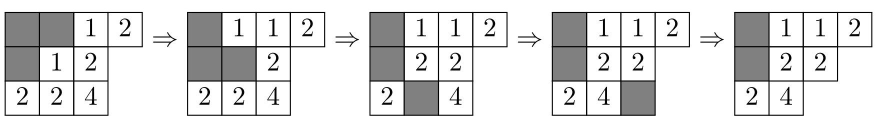

Figura 1.6: Ejemplo de deslizamiento del cuadro (1,2).

Observación 1.13. Gracias al algoritmo que hay que seguir para realizar un deslizamientotenemos que la figura obtenida después de la operación resulta ser de nuevo una tabla sesgada. Además, podemos aplicar esta operación tantas veces como sea necesario para obtener una tabla.

Esta operación en tablas sesgadas es importante pues nos ayudará a demostrar que el conjunto Γ de todas las tablas tiene estructura de monoide. Para llegar al resultado es necesario introducir otro concepto el cual nos sirve de puente para relacionar la inserción y el deslizamiento, además nos ayudará a

[1]Para describir el algoritmo y que las palabras desplazar y sacar tengan sentido hay que pensar que los cuadros se pueden mover intercambiándolos por algun cuadro vecino como si fueran algún tipo de tablero

aclarar la pregunta ¿si realizo la operación de deslizamiento en una tabla sesgada S hasta obtener una tabla, cuantas tablas distintas puedo obtener si hago las elecciones de las esquinas internas en distinto orden?

Antes, necesitamos una operación $*$ entre dos tablas T y U la cual consiste en juntar la esquina superior derecha del último cuadro del primer renglón de T con la esquina inferior izquierda del último cuadro de la primera columna de U (ver Figura 1.7).

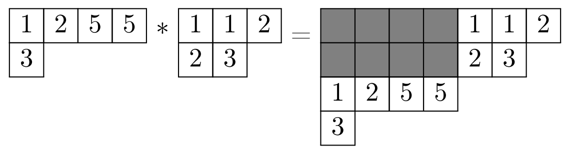

Figura 1.7: Operación * de dos tablas.

1.2. Palabras

Definición 1.14. Un **alfabeto** es un conjunto bien ordenado con cardinalidad a lo más numerable.

Definición 1.15. Sea A un alfabeto, definimos **palabra** como una sucesión finita $w_1 \dots w_m$ de elementos de A.

Definición 1.16. Para cualesquiera dos palabras $w = w_1 \dots w_m$ y $u = u_1 \dots u_k$ definimos la **concatenación** $w \cdot u \coloneqq w_1 \dots w_m u_1 \dots u_k$.

Observación 1.17. El conjunto de palabras P_A en un alfabeto A con la operación de concatenación es un monoide.

Dos ejemplo muy claros de alfabeto son el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales y el conjunto $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, los cuales serán los que utilicemos aquí.

Definición 1.18. Dada una tabla sesgada T de forma λ/μ donde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ con algunas entradas posiblemente cero, y $\mu \subseteq \lambda$, definimos la palabra del renglón $i-$ésimo como $w(T_i) \coloneqq T(i, \mu_i + 1)T(i, \mu_i + 2) \dots T(i, \lambda_i)$.

Definición 1.19. Dada una tabla sesgada T con r renglones definimos la palabra de T como $w(T) \coloneqq w(T_r) \cdot w(T_{r-1}) \cdot \dots \cdot w(T_1)$.

Por ejemplo la palabra de la Figura 1.3 lado izquierdo sería 744623331122 y la de la Figura 1.7 sería 3125523112. Además, si sabemos que una palabra proviene de alguna tabla, es posible recuperar dicha tabla agrupando términos que vayan siempre en orden creciente por ejemplo la palabra 545231135 la agrupamos como 5|45|23|1135 y así recuperamos la tabla que es justo la de la Figura 1.5. A toda tabla le corresponde una palabra pero no toda palabra proviene de una tabla, lo que sí es verdad es que cada palabra proviene de alguna tabla sesgada, de hecho dos tablas sesgadas pueden tener la misma palabra.

Estas palabras son de interés pues nos permiten analizar la operación de inserción pero ahora trabajando con palabras, y más aún nos dan resultados interesantes.

Definición 1.20. Sea T una tabla y $w = w_1 w_2 \dots w_m$ una palabra definimos la operación **insertar $\boldsymbol{w}$ en $\boldsymbol{T}$** como sigue

$$T \leftarrow w \coloneqq (\dots((T \leftarrow w_1) \leftarrow w_2) \leftarrow \dots) \leftarrow w_m$$

Definición 1.21. Sean T y U tablas, donde U es de forma $(\mu_1, .., \mu_m)$ y $U(i,j) = u_{i,j}$, definimos $T \cdot U$ como sigue

$$T \cdot U \coloneqq T \leftarrow w(U)$$

Observación 1.22. Esta operación nos regresa una tabla ya que la inserción así lo hace.

Proposición 1.23. *Para toda $T \in \mathit{\Gamma}$ se cumple que $\emptyset \cdot T = T = T \cdot \emptyset$*

Demostración. Que $T = T \cdot \emptyset$ es inmediato. Para ver que $\emptyset \cdot T = T$ definamos $u_{i,j} = T(i,j)$ y supongamos que T es de forma $(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$. Procedamos por inducción sobre el número de renglones. El caso base es cuando T tiene un solo renglón, dado que $u_{1,k} \leqslant u_{1,k+1}$ para todo k, se tiene que

$$T = (\dots(\emptyset \leftarrow u_{1,1}) \leftarrow \dots) \leftarrow u_{\lambda_1}$$

Supongamos que $l > 1$ y que para cualquier tabla con un número de renglones menor a l se cumple la proposición, fijémonos en T restringido a $(\lambda_2 \dots \lambda_l)$ y llamemosle T', entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\emptyset \cdot T &= (\dots(\emptyset \leftarrow u_{l,1}) \leftarrow \dots \leftarrow u_{l,\lambda_l}) \leftarrow \dots) \leftarrow u_{i,j}) \leftarrow \dots \leftarrow u_{11}) \leftarrow \dots) \leftarrow u_{1,\lambda_1} \\ &= (\dots(\emptyset \cdot T') \leftarrow u_{1,1}) \leftarrow \dots) \leftarrow u_{1,\lambda_1}\end{aligned}$$

Aplicando hipotesis de inducción en T' se sigue que

$$\emptyset \cdot T = (\dots(T' \leftarrow u_{1,1} \leftarrow \dots) \leftarrow u_{1,\lambda_1}$$

Ahora sólo basta ver que $(\dots(T' \leftarrow u_{1,1} \leftarrow \dots) \leftarrow u_{1,\lambda_1} = T$, pero esto se da gracias a que $u_{i,j} < u_{i+1,j}$ y $u_{i,j} \leqslant u_{i,j+1}$ para toda i y j. $\square$

Una pregunta natural que surge es ¿cuándo dos palabras w y u cumplen que $\emptyset \leftarrow w = \emptyset \leftarrow u$? Knuth observó que existen dos reglas fundamentales para que lo anterior suceda, esta observación la hizo para el caso de tres letras, pero sorprendentemente las reglas que encontró funcionan para todas la palabras. Los casos relevantes resultan ser los de las palabras yzx y yxz cuando $x < y \leq z$ que nos dan la misma tabla, y las palabras yxz y xyz cuando $y \leq z < x$ que también dan la igualdad $\emptyset \leftarrow yxz = \emptyset \leftarrow xyz$. Esto se puede ver como sigue:

$$(1) \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline y & z \\ \hline \end{array} \leftarrow x \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|}\hline x & z \\ \hline y \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \text{cuando} \qquad x < y \leq z$$

$$(2) \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline y & x \\ \hline \end{array} \leftarrow z \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|}\hline y & z \\ \hline x \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \text{cuando} \qquad y \leq z < x$$

Es decir, las relaciones que se usan son:

$$(1) \quad si \;\; x < y \leq z \;\; entonces \;\; yzx \rightarrow yxz$$
$$(2) \quad si \;\; y \leq z < x \;\; entonces \;\; yxz \rightarrow xyz$$

A estas reglas y sus inversas se le conocen como **transformaciones de Knuth**, y gracias a ellas podemos definir una relación de equivalencia entre palabras de cualquier longitud.

Definición 1.24. Decimos que dos palabras w y w' son **Knuth equivalentes** si se puede pasar de una a otra mediante transformaciones de Knuth y lo denotamos como $w \equiv_k w'$.

Proposición 1.25. *Si T es una tabla y x un natural se tiene que*

$$w(T \leftarrow x) \equiv_k w(T)x.$$

Demostración. Fijémonos en la forma de T digamos $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, y sea r tal que el proceso de insertar x en T termina en la r-ésima fila, si $r = 1$ el resultado es trivial. En otro caso por la Definición 1.19 tenemos $w(T) = w(T_m) \ldots w(T_1)$, escribamos $w(T_i) = u_i^1 u_i^2 ... u_i^{\lambda_r}$donde u_i^j es el número en la fila i y columna j, y supongamos que x botó a u_1^k; siguiendo la regla (1) de las transformaciones de Knuth tenemos la siguiente sucesión de pasos:
Como $x < u_1^{\lambda_1 - 1} \leq u_1^{\lambda_1}$ entonces tenemos

$$\ldots u_1^1 u_1^2 \ldots u_1^{\lambda_1-2} u_1^{\lambda_1-1} u_1^{\lambda_1} x \rightarrow \ldots u_1^1 u_1^2 \ldots u_1^{\lambda_1-2} u_1^{\lambda_1-1} x u_1^{\lambda_1}$$

como $x < u_1^{\lambda_1 - 2} \leq u_1^{\lambda_1 - 1}$ entonces tenemos

$$\ldots u_1^1 u_1^2 \ldots u_1^{\lambda_1-2} u_1^{\lambda_1-1} x u_1^{\lambda_1} \rightarrow \ldots u_1^1 u_1^2 \ldots u_1^{\lambda_1-2} x u_1^{\lambda_1-1} u_1^{\lambda_1}$$

$$\vdots$$

como $x < u_1^k \leq u_1^{k+1}$ entonces tenemos

$$\ldots u_1^1 \ldots u_1^{k-1} u_1^k u_1^{k+1} x \ldots u_1^{n_1} \rightarrow \ldots u_1^1 \ldots u_1^{k-1} u_1^k x u_1^{k+1} \ldots u_1^{\lambda_1}.$$

Tomemos $x' = u_1^k$, si $k = 1$ repetimos lo mismo que antes pero ahora con x' y la palabra del segundo renglón, si no entonces por la regla (2) de las transformaciones de Knuth se sigue:
Como $u_1^{k-1} \leq x < x'$entonces tenemos

$$\ldots u_1^1 u_1^2 \ldots u_1^{k-1} x' x u_1^{k+1} \ldots u_1^{\lambda_1} \rightarrow \ldots u_1^1 u_1^2 \ldots x' u_1^{k-1} x u_1^{k+1} \ldots u_1^{\lambda_1}$$

como $u_1^{k-2} \leq u_1^{k-1} < x'$entonces tenemos

$$\dots u_1^1 \dots u_1^{k-2} x' u_1^{k-1} x u_1^{k+1} \dots u_1^{\lambda_1} \twoheadrightarrow \dots u_1^1 ... u_1^{k-2} x' u_1^{k-1} x u_1^{k+1} \dots u_1^{\lambda_1}$$

$$\vdots$$

como $u_1^1 \leq u_1^2 < x'$entonces tenemos

$$\dots u_1^1 x' u_1^2 \dots u_1^{k-1} u_1^{k+1} \dots u_1^{\lambda_1} \twoheadrightarrow \dots w(T_2) x' u_1^1 u_1^2 \dots u_1^{k-1} x u_1^{k+1} \dots u_1^{\lambda_1}.$$

Volvemos a repetir las dos secuencias con x' y asi nos seguimos hasta llegar al r-ésimo renglón, así obteniendo el resultado. □

Proposición 1.26. *Si T y U son tablas entonces $w(T \cdot U) \equiv_k w(T)w(U)$.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de la de Proposición 1.25 y la Definición 1.21. □

La relación de Knuth funciona bien en la inserción, pero ahora podemos preguntarnos ¿qué sucede con las palabras que corresponden a tablas sesgadas? la respuesta es elegante ya que la relación de Knuth también respeta desplazamientos.

Proposición 1.27. *Si V es una tabla sesgada y W es la tabla sesgada obtenida después de realizar un deslizamiento en V entonces se tiene que $w(V) \equiv_k w(W)$.*

Este resultado es más general ya que en cada paso del deslizamiento las palabras de las «tablas sesgadas con un hueco» que se van obteniendo son Knuth equivalentes. Esta demostración es algo técnica y no la daremos aquí, para entrar en detalle ver [Fult, p. 20].

Teorema 1.28. *Toda palabra es Knuth equivalente a la palabra de alguna tabla, más aún, no hay dos tablas distintas con palabras equivalentes.*

La idea de la demostración es que por la Proposición 1.25 dada una palabra $x = x_1 x_2 x_3 ... x_m$ tenemos que $x \equiv_k w(...((\emptyset \leftarrow x_1) \leftarrow x_2) ... \leftarrow x_m)$. Para demostrar la unicidad se necesitan comprender y analizar nociones de unas constantes denotadas por $L(w, k)$ que son la cantidad máxima de elementos de k sucesiones crecientes en la palabra w, esta técnica se sale de contexto por lo que tomaremos por hecho la unicidad, para ver un argumento completo véase [Fult, Cap. 3].

Denotamos como $\mathcal{T}(w)$ a la tabla cuya palabra es equivalente a w. Una manera de obtener dicha tabla es como la mencionada antes a la cual llamaremos **procedimiento canónico**.

Proposición 1.29. *Si tenemos una tabla sesgada S y realizamos la operación de desplazamiento tantas veces como sea necesario para obtener una tabla, no importa en qué orden se elijan las esquinas internas siempre se obtendrá la misma tabla.*

Demostración. Es consecuencia de la Proposición 1.27 y del Teorema 1.28, pues la palabra de una tabla sesgada es equivalente a la palabra que se obtiene después de cualquier deslizamiento. □

Definición 1.30. Llamamos **rectificación** de S a la tabla cuya palabra es Knuth equivalente a $w(S)$ y la denotamos como $\mathrm{Rec}(S)$.

Proposición 1.31. *Sean T y U tablas entonces* $\mathrm{Rec}(T * U) = T \cdot U$.

Demostración. Por la Proposición 1.26 sabemos que $w(T \cdot U) \equiv_k w(T)w(U)$ pero esta última es la palabra de la tabla sesgada $T * U$. Por el resultado de la Proposición 1.27 $w(T)w(U) \equiv_k w(\mathrm{Rec}(T * U))$, ahora por transitividad tenemos que $w(T \cdot U) \equiv_k w(\mathrm{Rec}(T * U))$, de aquí sólo basta utilizar la unicidad del Teorema 1.28 para verificar la igualdad deseada. □

Definición 1.32. Denotamos por Γ al conjunto de todas las tablas.

Corolario 1.33. $(\Gamma, \cdot)$ *es un monoide.*

Demostración. Sabemos que la operación es cerrada, además por la Proposición 1.23 el vacío funciona como neutro. Para ver la asociatividad, gracias a las Proposiciones 1.29 y 1.31 si $T, U, V \in \Gamma$ se tiene que

$$(T \cdot U) \cdot V = \mathrm{Rec}((T \cdot U) * V)$$

$$= \mathrm{Rec}(\mathrm{Rec}(T * U) * V) = \mathrm{Rec}(T * U * V) = \mathrm{Rec}(T * \mathrm{Rec}(U * V))$$

$$= \mathrm{Rec}(T * (U \cdot V)) = T \cdot (U \cdot V).$$

□

A este monoide se le conoce como **monoide pláctico**.

Observación 1.34. Gracias a la Proposición 1.26 y al Teorema 1.28 podemos dar un homomorfismo de monoides $\mathcal{T} : P_{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathit{\Gamma}$ donde $P_{\mathbb{N}}$ es el conjunto de palabras en $\mathbb{N}$ y Γ el conjunto de tablas, haciendo $\mathcal{T}(w) = \emptyset \leftarrow w$. Notemos que esta es la única tabla cuya palabra es Knuth equivalente a w mencionada antes.

1.3. La correspondencia de Robinson-Schensted-Knuth

Hasta aquí hemos logrado asignar una tabla a cada palabra ¿pero qué sucede con el proceso inverso? es decir, dada una tabla P la cual provino de una palabra w realizando el procedimiento canónico ¿cómo puedo recuperar dicha w?, esto no puede ser posible sólo mirando a P, para ello es necesario tener más información. Veamos como recuperarla; lo que se hace para obtener una tabla a partir de una palabra $x = x_1 x_2 \ldots x_m$ es lo siguiente $(\ldots((\emptyset \leftarrow x_1) \leftarrow x_2) \ldots \leftarrow x_m)$, por lo que para registrar cada inserción podemos utilizar una segunda tabla, lo que haremos es colocar un cuadro con el número uno para representar que x_1 fue insertado y llamamos Q_1 a esa tabla y P_1 a la tabla cuya entrada es x_1, en el k-ésimo paso definimos $P_k = P_{k-1} \leftarrow x_k$ y Q_k como la tabla Q_{k-1} junto con un nuevo cuadro con entrada k que colocaremos en la misma posición donde fue colocado el nuevo cuadro en $P_{k-1} \leftarrow x_k$. A Q_m simplemente la escribimos como Q o $Q(w)$, y $P_k = P$ la podemos denotar como $P(w)$. Con esto habremos llevado un registro y precisamente si tenemos el par $(P(w), Q(w))$ podemos recuperar w siguiendo el proceso inverso, es decir, eligiendo el número más grande de Q, quitándolo, y realizando el algoritmo de inserción a la inversa en la tabla P con el cuadro correspondiente al que está en la misma posición que la que quitamos de Q, el número obtenido será entonces x_m, y ahora con las tablas resultantes podemos repetir lo mismo, así hasta recuperar toda la palabra.

Observación 1.35. Del proceso descrito antes tenemos que Q es una tabla estándar y tiene la misma forma que P.

$$\left(\begin{array}{|c|}\hline 5\\\hline\end{array}\ ,\ \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline\end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 5\\\hline\end{array}\ ,\ \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 3\\\hline 5\\\hline\end{array}\ ,\ \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ll} 2 & 2\\ 3 & \\ 5 & \end{array}\ ,\ \begin{array}{ll} 1 & 4\\ 2 & \\ 3 & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ll} 1 & 2\\ 2 & \\ 3 & \\ 5 & \end{array}\ ,\ \begin{array}{ll} 1 & 4\\ 2 & \\ 3 & \\ 5 & \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{lll} 1 & 2 & 2\\ 2 & & \\ 3 & & \\ 5 & & \end{array}\ ,\ \begin{array}{lll} 1 & 4 & 6\\ 2 & & \\ 3 & & \\ 5 & & \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{lll} 1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & \\ 3 & & \\ 5 & & \end{array}\ ,\ \begin{array}{lll} 1 & 4 & 6\\ 2 & 7 & \\ 3 & & \\ 5 & & \end{array}\right)$$

Figura 1.8: Parejas de tablas correspondientes a la palabra 5322121 que se obtienen paso a paso según el algoritmo descrito antes.

La correspondencia que acabamos de mencionar nos da una biyección entre palabras de longitud m y parejas de tablas de la misma forma con m cuadros y la segunda tabla estándar. Realmente lo que importaba al realizar el proceso inverso para recuperar la palabra eran justo esas dos restricciones, que las tablas tuvieran la misma forma y la segunda fuera estándar. Esta correspondencia se puede ver aún más general si no restringimos que la segunda tabla sea estándar.

Definición 1.36. Llamamos **arreglos** a las matrices de números naturales de la forma $\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_m \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{pmatrix}$.

Definición 1.37. Decimos que un arreglo $\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_m \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{pmatrix}$ esta ordenado lexicográficamente si cumple que $q_1 \leq q_2 \leq ... \leq q_m$ y si para algún i y j con $i < j$ ocurre que $q_i = q_j$ entonces $p_i \leq p_j$.

Notemos que esta noción generaliza a las permutaciones (arreglos de dos filas donde las entradas del primer renglón son los números del 1 al n en ese orden y las entradas del segundo renglón son cualquier revoltura de los números del 1 al n).

Teorema 1.38 (R-S-K)**.** *Las parejas de tablas de la misma forma están en correspondencia biyectiva con los arreglos ordenados lexicográficamente.*

Demostración. Dado un arreglo en orden lexicografico $\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}$ tomamos las tablas $\boxed{p_1}$ y $\boxed{q_1}$, insertamos p_2 en la primera tabla, y colocamos un cuadro en la segunda tabla en la misma coordenada que donde se agregó el cuadro al insertar p_2, en ese cuadro ponemos q_2, y así nos seguimos con los siguientes números del arreglo, a la tabla donde insertamos las p's la llamamos P, y a la otra tabla la llamamos Q, esta última es una tabla debido al Lema 1.11 y a que el arreglo esta en orden lexicografico, además P y Q tienen la misma forma.

Ahora si P y Q son tablas de la misma forma con m cuadros entonces a la pareja (P, Q) la pondremos en correspondencia con un arreglo lexicográfico de la siguiente manera: de Q elegimos el cuadro con la entrada más grande y la quitamos, en caso de haber dos iguales elegimos la que este más a la derecha, de P tomamos el mismo cuadro y realizamos la inserción inversa, esto nos devuelve dos naturales q_m y p_m, estos serán las entradas de la última columna del arreglo, con las dos nuevas tablas hacemos lo mismo, obteniendo entonces dos naturales q_{m-1} y p_{m-1}, estos serán las entradas del arreglo en la penúltima columna, y así nos seguimos hasta terminar con los cuadros de las tablas. Por como fuimos eligiendo las p_i's se tiene que el primer renglón del arreglo esta en forma creciente. Supongamos que hay $q_{i-1} = q_i$, por el Lema 1.11 se sigue que $p_{i-1} \leq p_i$, así el arreglo obtenido esta en orden lexicográfico. Estas dos relaciones son inversas una de la otra por lo tanto tenemos la biyección. $\square$

A esta correspondencia se le conoce como la **correspondencia de Robinson-Schensted-Knuth**. Por ejemplo al arreglo $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ le corresponde la pareja de la Figura 1.9 bajo esta función.

$$\left(\begin{array}{|c|}\hline 4 \\ \hline\end{array} , \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline\end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 4 \\ \hline\end{array} , \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 4 & 4 \\ \hline\end{array} , \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 4 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array} , \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 4 \\ \cline{1-2}\end{array} , \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2}\end{array} \right)$$

Figura 1.9: Parejas de tablas correspondientes al arreglo a que se obtienen paso a paso según el algoritmo descrito antes.

Definición 1.39. A las tablas P y Q correspondientes a un arreglo lexicográfico a se les denomina **tabla de inserción** y **tabla de registro** respectivamente.

Observación 1.40. Una palabra $w_1 w_2 \dots w_m$ está relacionada de manera natural con el arreglo $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ w_1 & w_2 & \dots & w_m \end{pmatrix}$. Ahora si P y Q son tablas de la misma forma, con Q estándar entonces el segundo renglón del arreglo correspondiente bajo Robinson-Schensted-Knuth es justo la palabra que se obtendría en la relación descrita al inicio de este capítulo, y las entradas del primer renglón son los números del 1 hasta m en ese orden, donde m es el tamaño de la forma de las tablas. Más aún si P es estándar, el arreglo correspondiente a la pareja, es una permutación.

Todo lo anterior queda resumido de la siguiente manera:

Observación 1.41. Sean P y Q tablas de la misma forma, y sea a el arreglo en orden lexicográfico que le corresponde a (P, Q) bajo la correspondencia de Robinson-Schensted-Knuth entonces[2]:

1. a tiene m entradas en cada renglón si y sólo si tanto P como Q tienen m cuadros. Además las entradas de Q son las mismas que las del primer renglón de a, y las entradas de P son las mismas que las del segundo renglón.

2. a es una «palabra» si y sólo si Q es estándar.

3. a es una permutación si y sólo si tanto P como Q son estándar.

Los arreglos lexicográficos son de importancia puesto que así y solamente así la tabla de registro correspondinete resulta ser semiestántar. Teniendo esto en mente notemos que es posible asignarle una pareja de tablas a cualquier arreglo a, simplemente ordenándolo lexicográficamente y luego correspondiéndolo mediante R-S-K. Lo relevante para poder asignar una pareja de tablas a cualquier arreglo es que tantas veces aparece $\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$ como columna en el arreglo.

Es sabido que a cualquier permutación se le puede asociar una matriz llamada matriz de permutación. Basándonos en lo mencinado antes esta asociación se puede generalizar a cualquier arreglo a, lo que hacemos es tomar la matriz A tal que la entrada $a_{i,j} = r$ donde r es la cantidad de veces que $\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$ aparece como columna en a. Observemos que el número de columnas de la matriz será el número más grande que aparece en el segundo renglón del arreglo, y el número de renglones de la matriz sera el número más grande que aparece en el primer renglón del arreglo.

Con esto hemos codificado a los arreglos, y entonces podemos pensar tanto en ellos, como en matices con entradas en los enteros no negativos, como en parejas de tablas. Por ejemplo el arreglo $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ordenado lexicográficamente sería $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y le corresponde la pareja de la Figura

[2] Robinson primero estudió sólo el caso 3., posteriormente junto con Schensted generalizaron al caso 2., y finalmente Knuth logro algo más general obteniendo la correspondencia que dimos en este capítulo.

1.9 y la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Observación 1.42. Las matrices correspondientes a parejas donde la segunda tabla es estándar son aquellas que tienen un uno por renglón y el resto ceros. Si la primer tabla también es estándar entonces se tiene que la matriz es una matriz de permutación.

Definición 1.43. Si una tabla sesgada S tiene μ_1 1's, μ_2 2's, ..., y μ_m m's en su imagen, decimos que S tiene **contenido** $(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m)$.

Una aplicación de la correspondencia R-S-K que será útil es la siguiente proposición, para verla a detalle ir a [Fult, pag. 50].

Proposición 1.44. *Sean λ y $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m)$ particiones de n y σ una permutación en S_m. Hay tantas tablas de forma λ con contenido μ como tablas de forma λ con contenido $(\mu_{\sigma(1)}, \mu_{\sigma(2)}, ..., \mu_{\sigma(m)})$.*

1.4. La regla de Littlewood-Richardson

En esta sección nos concierne estudiar unos coeficientes llamados coeficientes de Littlewood-Richarson, los cuales son de importancia puesto que éstos aparecen al hacer productos en el monoide pláctico. La pregunta con la que empezamos es: dada una tabla V ¿de cuántas maneras se puede factorizar como producto de dos tablas T y U?, veremos que esto realmente no depende de las tablas en sí, sino de su forma; además existen unas tablas sesgadas especiales que nos ayudarán a calcular estos números. Hay muchas técnicas para calcular estos coeficientes (ver [PV]). Pero aquí sólo nos enfocaremos en dos.

Definición 1.45. Sean λ, μ, ν, particiones tales que $|\lambda| + |\mu| = |\nu|$, y sean W y V tablas de forma μ y ν respectivamente, definimos los siguientes conjuntos:
1) $I(\lambda, \mu, V) := \{(T, U) \,|\, T \,\text{tabla de forma}\, \lambda \,\text{y}\, U \,\text{tabla de forma}\, \mu,\ T \cdot U = V\}$
2) $R(\nu/\lambda, W) := \{S \,|\, S \,\text{es de forma}\, \nu/\lambda, \text{ y } Rec(S) = W\}$

Lema 1.46. *Si λ, μ, ν son particiones, y W y V son tablas de forma μ y ν, se tiene que $|I(\lambda, \mu, V)| = |R(\nu/\lambda, W)|$.*

Para demostrar el lema es necesario utilizar otro resultado el cual sólo enunciaremos, para ver en detalle la demostración recurrir a [Fult, p. 58].

Proposición 1.47. *Sean U y W tablas de la misma forma y sea T una tabla cualquiera, consideremos el arreglo $a = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_m \\ u_1 & u_2 & \dots & u_m \end{pmatrix}$ correspondiente a (U, W) bajo RSK, y $R = (\dots((T \leftarrow u_1) \leftarrow u_2) \leftarrow \dots) \leftarrow u_m$. Si tomamos la tabla sesgada S cuya forma es la forma de R menos la forma de T, con entradas w_i en el cuadro que aparece en el i-ésimo paso de la inserción, entonces se tiene que* $\mathrm{Rec}(S) = W$.

Por ejemplo si tomamos el par de tablas de la Figura 1.9, su arreglo correspondiente, y la tabla $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$ y realizamos lo mencionado en la proposición, entonces se obtienen las tablas de la Figura 1.10, de donde si rectificamos la tabla sesgada de la derecha nos queda la tabla de la segunda entrada del par con el que iniciamos.

Figura 1.10: Par de tablas obtenidas usando la Proposicion 1.47

Demostración. Lema 1.46. Daremos una función biyectiva entre ambos conjuntos. Sea $(T,U) \in I(\lambda,\mu,V)$, tomemos el arreglo lexicográfico $\begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_m \\ u_1 & \dots & u_m \end{pmatrix}$ que bajo RSK corresponde a la pareja (U,W). Primero veamos que $T \cdot U = (...(T \leftarrow u_1) \leftarrow ...) \leftarrow u_m$, por la unicidad del Teorema 1.28 y el procedimiento canónico tenemos que $w(U) \equiv_k u_1 \dots u_m$, de dónde se sigue que $w(T)w(U) \equiv_k w(T)u_1 \dots u_m \equiv_k w((\dots(T \leftarrow u_1) \leftarrow \dots) \leftarrow u_m)$, ahora por la Proposición 1.26 y de nuevo por la unicidad se tiene lo deseado. Aplicándole al arreglo y a U, W y T la Proposición 1.47 tenemos una tabla sesgada S de forma ν/λ cuya rectificación es W, por lo tanto $S \in R(\nu/\lambda, W)$ que es el que asociamos a (T,U).

Daremos ahora la inversa de la función, sea $S \in R(\nu/\lambda, W)$, consideraremos una tabla X de forma λ con entradas menores a las de S (posiblemente negativas), y consideramos la tabla X' de forma ν cuyas entradas son las mismas que las de X en λ y las mismas que S en ν/λ, ahora tomemos el par (V, X') y su arreglo correspondiente bajo RSK $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_r & w_1 & \dots & w_m \\ t_1 & \dots & t_r & u_1 & \dots & u_m \end{pmatrix}$. Del arreglo $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \\ t_1 & \dots & t_m \end{pmatrix}$ tenemos el par (T,X) de donde T es de forma λ; tomando ahora $\begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_m \\ u_1 & \dots & u_m \end{pmatrix}$ y su correspondiente par (U, W'), de la proposición anterior se sigue que como $T \cdot U = (...(T \leftarrow u_1) \leftarrow ...) \leftarrow u_m) = V$ entonces $W' = \mathrm{Rec}(S) = W$ por lo que U es de forma μ, así $(T,U) \in I(\lambda,\mu,V)$. Este es el par que le asignamos a S. $\square$

Corolario 1.48. *La cardinalidad de* $I(\lambda,\mu,V)$ y de $R(\nu/\lambda,W)$ *no dependen de la elección de* V *y* W*, sólo de su forma.*

Definición 1.49. Denotamos por $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ a la cardinalidad de los conjuntos anteriores. A dichos números se les conoce como **coeficientes de Littlewood-Richardson**.

Observación 1.50. Si λ, μ, y ν son particiones tales que $|\lambda|+|\mu| \neq |\nu|$ entonces se tiene que $c^{\nu}_{\lambda,\mu} = 0$.

De la igualdad entre cardinales de los conjuntos $I(\lambda,\mu,V)$ y $R(\nu/\lambda,W)$ se pueden encontrar otras relaciones como por ejemplo, estos son del mismo tamaño que los conjuntos $R(\tilde{\nu}/\tilde{\lambda},W\,')$ y $I(\mu,\lambda,V)$ donde $W\,'$ es una tabla de forma el conjugado de la forma de W. Así entonces se obtienen las igualdades $c^{\nu}_{\lambda,\mu} = c^{\nu'}_{\lambda',\mu'} = c^{\nu}_{\mu,\lambda}$.

Definición 1.51. Decimos que una palabra $x = x_1x_2\ldots x_m$ es de **Yamanouchi** si para cualesquiera $i,j \in [m]$ se cumple que $x_i\ldots x_m$ tiene mayor o igual número de j's que de $j+1$'s. Por ejemplo la palabra 13423211 es de Yamanouchi pero 22433211 no lo es.

Esta deficinición es importante pues de ella partimos para dar una forma alternativa de calcular $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$.

Lema 1.52. *Si una palabra x es de Yamanouchi entonces cualquier palabra Knuth equivalente a x también es de Yamanouchi.*

Demostración. Basta ver que la propiedad de ser Yamanouchi se conserva bajo transformaciones de Knuth.

Caso 1. Se tiene la palabra $x_1...yzw...x_m$ con $w < y \leq z$ entonces se realiza la transformación $x_1...ywz...x_m$; si $y = z$ tenemos que, si hasta a w había k w's entonces había a lo más $k-2$ z's por lo que al realizar la transformación la palabra sigue siendo Yamanouchi. Si tomamos ahora $y < z$ tenemos que, si hasta y había k w's entonces a lo más hay k y's por lo tanto hay a lo más $k-1$ z's por lo que de nuevo la propiedad de ser Yamanouchi se conserva después de la transformación.

Caso 2. La palabra es de la forma $x_1...ywz...x_m$ y se realiza la transformación $x_1...wyz...x_m$ puesto que $y \leq z < w$; si $y = z$ es inmediato, y si $y < z$ tenemos que, si hasta y hay k w's entonces al menos hay k y's y k z's por lo que al hacer la transformación la propiedad de ser Yamanuchi se conserva. □

Observación 1.53. Si T es una tabla de forma λ cuya palabra es de Yamanouchi entonces T es de contenido λ, y viceversa si T es de forma y contenido λ entonces su palabra es de Yamanouchi. Hay una única tabla cuyo contenido es igual a su forma la cual es llamada **tabala canonica** y se denota como T_λ .

Por ejemplo la tabla cuyo contenido es (5,3,2,1,1) es la tabla de la Figura 1.11, además su palabra es 543322211111 la cual claramente es Yamanouchi.

1	1	1	1	1
2	2	2		
3	3			
4				
5				

Figura 1.11: $T_{(5,3,2,1,1)}$.

Definición 1.54. Una tabla sesgada se llama **tabla de Littlewood-Richarson** o simplemente **tabla LR**, si su palabra es de Yamanouchi.

Corolario 1.55. *Una tabla sesgada S de contenido λ es de Littlewood-Richarson si y sólo si* $\mathrm{Rec}(S) = T_\lambda$.

Demostración. Por la Proposición 1.27 tenemos $w(S) \equiv w(\mathrm{Rec}(S))$, ahora por el Lema 1.52 $w(\mathrm{Rec}(S))$ es de Yamanouchi, , y por la Observación 1.53 se tiene la igualdad. □

Corolario 1.56. *Para cualesquiera particiones λ, μ, ν se tiene que hay $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ tablas sesgadas LR de forma ν/λ y contenido μ.*

Demostración. Gracias al Corolario 1.55 se tiene que $S \in R(\nu/\lambda, T_\mu)$ si y sólo si S es LR. □

1.4.1. Anillo de monoide

En general dado un monoide $(M, \cdot)$ y un anillo A, es posible extender a M a una estructura de anillo $(A[M], +, \cdot)$, de la siguiente forma, definimos

$$A[M] := \{f : M \to A \mid f \,\text{es función y}\, |f^{-1}(A/\{0\})| \in \mathbb{N}\}$$

así la operación $+$ es la suma de funciones, y si $f, g \in A[M]$ y $m \in M$ definimos

$$(f \cdot g)(m) := \sum_{\substack{(k,l)\in M\times M\\ k\cdot l=m}} f(k)g(l)$$

A $(A[M], +, \cdot)$ se le conoce como **anillo de monoide** y a sus elementos los podemos ver como sumas formales. Es decir, a una función f la podemos pensar como la suma formal $\sum_{m\in M} f(m)m$, así la suma de dos funciones $f + g$ sería

$$\sum_{m\in M} (f(m) + g(m))\, m.$$

Y el producto $f \cdot g$ quedaría como

$$\sum_{m\in M} \Big(\sum_{\substack{(k,l)\in M\times M\\ k\cdot l=m}} f(k)g(l) \Big) m.$$

Un caso particular es tomar a $(\Gamma, \cdot)$ y a $\mathbb{Z}$, y fijarnos en su anillo de monoide $\mathbb{Z}[(\mathit{\Gamma}, \cdot)]$; gracias a la regla de Littelwood-Richarson nos es posible conocer más el producto en este anillo.

Definición 1.57. Al elemento $\sum T$ de $\mathbb{Z}[(\mathit{\Gamma}, \cdot)]$ donde la suma corre en las tablas T de forma λ y entradas en $[m]$ lo denotamos como S^m_λ.

Teorema 1.58. *Para cuales quiera particiones λ y μ y cualquier natural m se tiene la siguiente igualdad:*

$$S_\lambda^m \cdot S_\mu^m = \sum_\nu c_{\lambda,\mu}^\nu S_\nu^m.$$

Este teorema es debido a la Definición 1.49 y al Corolario 1.48.

Este capítulo ha sido dedicado al estudio de las tablas, y al análisis de las técnicas que nos permiten conocer más sobre Γ. Este monoide junto con $\mathbb{Z}[(\Gamma, \cdot)]$ son de suma importancia pues posteriormente mostraremos un homomorfismo con el anillo de polinomios con numerables variables $\mathbb{Z}[x_1, x_2, ...]$ el cual nos ayudará a entender más el comportamiento de las representaciones del grupo simétrico S_n.

Capítulo 2

Teoría de Representaciones

En este capítulo se presenta un panorama general de G-módulos, empezaremos viendo como éstos se relacionan con las representaciones de grupos, definiremos homomorfismo, así como submódulos y reducibilidad. Estudiaremos qué importancia tienen éstos en la teoría y llegaremos a un resultado importante el cual es conocido como teorema de Maschke. Posteriormente trataremos unas funciones llamadas caracteres que nos dan resultados en el comportamiento de los G-módulos. Finalmente hablaremos de la relación que tienen los G-módulos y los H-módulos cuando H es subgrupo de G. Este capítulo esta basado en notas tomadas en un seminario impartido por Ernesto Vallejo, así como en [JL] por lo que gran parte de las demostraciones omitidas pueden encontrarse en este último.

2.1. Representaciones y G-módulos

Definición 2.1. Sea V un espacio vectorial sobre un campo K, al conjunto $GL(V) = \{T : V \longrightarrow V \mid T \, \text{es un isomorfismo lineal}\}$ se le conoce como **grupo lineal general**.

Definición 2.2. Dado K-espacio vectorial V, una **representación** de un grupo G es un homomorfismo de grupos $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$.

Recordemos que el conjunto denotado como $GL_n(K)$ es el grupo de matrices invertibles de $n \times n$ con entradas en K.

Observación 2.3. Toda matriz $M \in GL_n(K)$ define una transformación lineal $T : K^n \longrightarrow K^n$ y toda transformación lineal de ese estilo tiene asociada una matriz invertible, así que podemos pensar a una representación $\varphi : G \longrightarrow GL(K^n)$ como un homomorfismo $\psi : G \longrightarrow GL_n(K)$ al cuál también llamaremos representación.

Algunos resultados de la teoría sólo son validos cuando los espacios vectoriales son finitamente generados. Aunque algunas definiciones valen en general, apartir de aquí cuando hablemos de un espacio vectorial V sólo nos referiremos a los de dimensión finita.

Un ejemplo de una representación para cualquier n es el homomorfismo trivial. Esta representación parece ser muy simple pero resulta ser útil, además así todo grupo tiene al menos una representación.

Definición 2.4. Decimos que un grupo G **actúa** en un conjunto X si se tiene una operación $* : G \times X \longrightarrow X$ que cumple lo siguiente:
i) Para toda $x \in X$ y el neutro e_G de G se tiene que $e_G * x = x$
ii) Para toda $g, h \in G$ y toda $x \in X$ se tiene que $(gh) * x = g * (h * x)$

Definición 2.5. Recordemos que el **estabilizador** de un elemento $x \in X$ es el subgrupo $G_x = \{g \in G \mid g * x = x\}$.

Proposición 2.6. *Para todo $g \in G$ y todo $x \in X$*

$$G_{g*x} = gG_xg^{-1}.$$

Demostración. $\supseteq]$. Sea $ghg^{-1} \in gG_xg^{-1}$, tenemos que $(ghg^{-1})(g * x) = gh * x$, y como $h * x = x$ se sigue $(ghg^{-1})(g * x) = g * x$, por lo tanto $ghg^{-1} \in G_{g*x}$.

$\subseteq]$. Sea $h \in G_{g*x}$, se tiene que $g^{-1}hg * x = g^{-1}g * x = x$, por lo tanto $g^{-1}hg \in G_x$, así $h = g(g^{-1}hg)g^{-1} \in gG_xg^{-1}$. □

Recordemos que una actuación $* : G \times X \longrightarrow X$ nos define un homomorfismo $\phi : G \longrightarrow S_X$ del grupo G al grupo S_X (el grupo de permutaciones de X) de la siguiente manera $\phi(g)(x) = g*x$. Y viceversa dado homomorfismo $\phi : G \longrightarrow S_X$ podemos obtener una actuación $* : G \times X \longrightarrow X$ definiendo $g * x = \phi(g)(x)$.

Esta idea es de ayuda ya que si pensamos en un representación $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$, está induce una actuación particular, la cuál le da a V una estructura interesante llamada G-módulo.

Definición 2.7. Sea K campo, V un K-espacio vectorial, y G un grupo, decimos que V es un ***G*-módulo** si existe una actuación $* : G \times V \longrightarrow V$ que es lineal, es decir, para cualesquiera $v, w \in V$, cualquier $g \in G$, y cualquier $k \in K$ cumple lo siguiente:

1. $g * (v + w) = (g * v) + (g * w)$,
2. $g * (kv) = k(g * v)$.

Observación 2.8. Todo G-módulo V con la operación $* : G \times V \longrightarrow V$ nos define un homomorfismo $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ tomando $\phi(g)(v) = g * v$ para toda $v \in V$ y $g \in G$. Y viceversa dada una representación $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ podemos obtener una actuación lineal $* : G \times V \longrightarrow V$ que nos definie un G-módulo haciendo $g * v = \varphi(g)(v)$ para toda $v \in V$ y $g \in G$.

Definición 2.9. Sea V un G-módulo finito con base $\mathcal{B}$, y $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ su representación asociada. Si $g \in G$ denotaremos a la transformación $\varphi(g)$ como $m_g : V \longrightarrow V$, que por la Obsevación 2.8 $m_g(v) = g * v$ para toda $v \in V$. A la matriz asociada a m_g en la base $\mathcal{B}$ la denotaremos como $[g]_{\mathcal{B}}^{\varphi}$ o simplemente $[g]_{\mathcal{B}}$ si se sobrentiende a la representación que nos referimos.

Definición 2.10. Notemos que G actúa trivialmente sobre el campo K, es decir, $m_g(k) = k$ para toda $k \in K$ y toda $g \in G$. Con esto K es un G-módulo al que se le conoce como **módulo trivial** y se le denota como $\mathbb{I}$. La representación asociada a este módulo es la representación trivial tomando $n = 1$.

Nuestros fines son más concretos, por lo que más adelante tomaremos como campo a $\mathbb{C}$ y cuando no sea necesario seguiremos con la generalización, también por simplicidad en lugar de escribir $g * v$ escribiremos gv.

Proposición 2.11. *Si V es un G-módulo se tiene que para todo $g \in G$, $g0 = 0$.*

Demostración. Utilizando la Definición 2.7 se tiene la igualdad

$$g0 = g(0 + 0) = (g0) + (g0) = 2(g0)$$

por lo tanto $g0 = 0$. $\square$

Ahora analizaremos dos nociones desde ambos puntos de vista, es decir, tanto de representaciones como de módulos.

Definición 2.12. Decimos que una representación $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ es **fiel** si es un monomorfismo.

Definición 2.13. Dos representaciones $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ y $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ son **equivalentes** si existe un isomomorfismo lineal $f : V \longrightarrow W$ tal que la función $C_f : GL(V) \longrightarrow GL(W)$ que asocia $T \longmapsto f \circ T \circ f^{-1}$ cumpla que $\varphi \circ C_f = \psi$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & GL(V) \arrow[d, "C_f"] \\ & GL(W) \end{tikzcd}$$

Observación 2.14. Todo espacio vectorial de dimensión finita V en el campo K es isomorfo como espacio vectorial a K^n donde $n = \dim(V)$, por lo que existe función lineal biyectiva $f : V \longrightarrow K^n$. Con esto toda representación $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ es equivalente a la representación $C_f \circ \varphi : G \longrightarrow GL(K^n)$.

Observación 2.15. En las representaciones la relación de ser equivalentes es de equivalencia.

Observación 2.16. Notemos que si V y W espacios vectoriales con bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ respectivamente y $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$, y $\psi : G \longrightarrow GL(W)$ son representaciones entonces φ y ψ son equivalentes si y solamente si existe una matriz invertible M tal que para todo $g \in G$ se tiene que $[g]^{\varphi}_{B_1} = M[g]^{\psi}_{\mathcal{B}_2} M^{-1}$. Esta matriz M es justo la matriz asociada a la función lineal f de la Definición 2.13.

Observación 2.17. Si consideramos el caso particular $V = W$ en la Observación 2.16 entonces M es la matriz de cambio de base.

Estas definiciones tienen su análogo en el lenguaje de módulos, por ejemplo un G-módulo V es fiel si para todo $g \neq e_G \in G$ existe $v \in V$ tal que $gv \neq v$. La noción de equivalencia se ve reflejada en isomorfismos de G-módulos los cuales estudiaremos más adelante.

2.1.1. Reducibilidad y G-submódulos

Definición 2.18. Sean V un espacio vectorial, W un subespacio vectorial de V, y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal, decimos que W es **invariante** bajo T si $T(W) \subseteq W$.

Definición 2.19. Decimos que W es un G-submódulo de un G-módulo V si W es subespacio vectorial de V y para todo $g \in G$ W es invariante bajo m_g.

Definición 2.20. Si un G-módulo $V \neq \{0\}$ tiene un submódulo propio no trivial, diremos que V es un módulo **reducible**, de lo contrario diremos que es un módulo **irreducible**. Por convención diremos que el módulo tivial $\{0\}$ es reducible.

Como antes esta definición también tiene interpretación en el lenguaje de representaciones. Una representación $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$ es reducible si existe una matriz M tal que para todo $g \in G$ la matriz $M[g]^{\varphi}M^{-1}$ es de la forma $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$; observemos que esto es así puesto que si W es un submódulo propio de V, tomamos una base $\{w_1, ..., w_k\}$ de W y la extendemos a una base para V. Nos fijamos en el G-módulo V con esta nueva base y justo la matriz de la función multiplicar por g es de la forma antes mencionada.

Definición 2.21. Un G-módulo V es **completamente reducible** si existen dos submódulos propios no triviales U y W de V tales que $V = U \oplus W$. Por convención consideraremos al módulo trivial $\{0\}$ como módulo completamente reducible pensando que es igual a la suma vacía.

En el caso que V sea completamente reducible existe una base $\mathcal{B}$ con la cual la matriz asociada a la función multiplicar por g para todo $g \in G$ es de la forma $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, donde A y C son la matrices asociadas a la función multiplicar restringida en U y W respectivamente.

Lema 2.22. *Si un G-módulo V es completamente reducible entonces existen submódulos irreducibles $V_1, \ldots, V_m$ de V tales que $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$.*

En este caso V tiene una base $\mathcal{B}$ tal que para toda g la matriz

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_{g,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{g,2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & A_{g,m} \end{pmatrix},$$

donde para toda i, $A_{g,i}$ es la matriz de la función m_g restringida a V_i.

2.1.2. Homomorfismos

Definiremos ahora la idea de homomorfismo de G-módulos, la cual debe cumplir ser una función lineal y respetar la actuación.

Definición 2.23. Si V y U son G-módulos sobre un campo K, decimos que una función $\xi : V \longrightarrow U$ es un **homomorfismo de módulos** si para cualesquiera $v, w \in V$, $k \in K$, y $g \in G$ se cumple lo siguiente:
1) $\xi(v + w) = \xi(v) + \xi(w)$,
2) $\xi(kv) = k\xi(v)$, y
3) $\xi(gv) = g\xi(v)$.

Como siempre diremos que ξ es **monomorfismo** si es inyectiva, **epimorfismo** si es suprayectiva, e **isomorfismo** si es biyectiva.

Definición 2.24. Diremos que dos G-módulos V y U son **isomorfos** si existe un isomorfismo entre ellos y denotaremos este hecho como $V \cong U$. Esta idea es muy general y lo que nos refleja es un cambio de nombre en los módulos, los cuales tienen las mismas propiedades.

Teorema 2.25. *Sean V y U G-módulos, entonces $V \cong U$ si y sólo si las representaciones asociadas a cada módulo son equivalentes.*

Para encontrar más detalle sobre este teorema ver [JL, p. 64].

Definición 2.26. Para cualquier homomorfismo de G-módulos $\xi : V \longrightarrow U$, llamamos **núcleo** de ξ al conjunto $\ker(\xi) = \{v \in V \,|\, \xi(v) = 0\}$. Al conjunto $\mathrm{im}(\xi) = \{\mathrm{u \in U \,|\, existe\, v \in V\, t.q.}\, \xi(\mathrm{v}) = \mathrm{u}\}$ lo llamamos **imagen** de ξ.

Proposición 2.27. *Si V y U son G-módulos, y $\xi : V \longrightarrow U$ es un homomorfismo de G-módulos, entonces* $\mathrm{im}(\xi)$ *y* $\ker(\xi)$ *son G-submódulos de U y V respectivamente.*

Demostración. Por ser ξ una función lineal se tiene que $\ker(\xi)$ es un subespacio de V y $\mathrm{im}(\xi)$ es subespacio de U, veamos que son invariante bajo la multiplicación en G, tomemos $g \in G$ y $v \in \ker(\xi)$, de la Definición 2.23 3) y la Proposición 2.11 se sigue que $\xi(gv) = g\xi(v) = g0 = 0$ por lo tanto $gv \in \ker(\xi)$; ahora tomemos $u \in \mathrm{im}(\xi)$, por estar en la imagen existe $y \in V$ tal que $\xi(y) = u$, además de la Definición 2.23 3) se sigue que $gu = g\xi(y) = \xi(gy)$ por lo tanto $gu \in \mathrm{im}(\xi)$ como se quería. $\square$

Corolario 2.28. *Si para un G-módulo V existe un homomorfismo no inyectivo y no trivial cuyo dominio sea V entonces V es reducible.*

2.1.3. El álgebra de grupo

En general dado un conjunto X es posible extenderlo a un K-espacio vectorial el cual denotamos por $K[X]$. Formalmente podemos pensarlo de la siguiente manera: tomamos el conjunto

$$\{f : X \longrightarrow K \,|\, f\, \text{es función y}\, |f^{-1}(K\backslash\{0\})| \in \mathbb{N}\}$$

con la suma de funciones usual (la cual vuelve a caer dentro del conjunto pues su soporte resulta finito) y $(kf)(x) = k(f(x))$ para toda $k \in K$ y toda $x \in X$. Ahora podemos escribir los elementos de dicho conjunto como sumas formales, es decir, $\sum_{x\in X} f(x)x$ corresponde a la función f. Con esta notación la suma se convierte en una suma «coordenada a coordenada» es decir

$$\sum_{x\in X} f(x)x + \sum_{x\in X} g(x)x = \sum_{x\in X} (f(x) + g(x))x,$$

y el producto por un escalar k sería de la forma

$$k \sum_{x\in X} f(x)x = \sum_{x\in X} (kf(x))x.$$

Observación 2.29. El conjunto X es una base para $K[X]$.

Proposición 2.30. *Sea V un espacio vectorial con base $\mathcal{B} = \{v_1, .., v_n\}$; V tiene estructura de G-módulo si y solamente si existe una función $* : G \times \mathcal{B} \longrightarrow V$ que para cuales quiera $v_i \in \mathcal{B}$, y cualquier $g, h \in G$ cumple que:*
1) $e_G * v_i = v_i$
2) $(gh) * v_i = g * (h * v_i)$

Demostración. Si V tiene estructura de G-modulo el resultado es inmediato de la definición, por otra parte si tenemos una función $* : G \times B \longrightarrow V$ que cumpla 1) y 2) sólo basta extenderla linealmente a todo V. □

Observación 2.31. Si X es un G-conjunto, gracias a la Observación 2.29 y a la Proposición 2.30 podemos dar estructura de G-módulo a $K[X]$. Más aún gracias a la operación que tiene G podemos darle estructura de álgebra a $K[G]$ definiendo un producto para cualesquiera dos elementos digamos $\sum_{g\in G} k_g g$ y $\sum_{h\in G} r_h h$ de la siguiente manera:

$$\left(\sum_{g\in G} k_g g\right)\left(\sum_{h\in G} r_h h\right) = \sum_{l\in G}\left(\left(\sum_{g,h\in G \text{ y } gh=l} k_g r_h\right) l\right).$$

A esta álgebra se le conoce como **álgebra de grupo**; notemos que con esta estructura se tiene de manera natural que $K[G]$ es un G-módulo. A este G-módulo se le conoce como **módulo regular**, el cual tiene la propiedad de ser fiel, además opera sobre cualquier otro G-módulo V.

Definición 2.32. Sea V un G-módulo en el campo K y sea $v \in V$, para cualquier elemento $k = \sum_{g\in G} k_g g \in K[G]$ definimos la operación:

$$kv = \sum_{g\in G} k_g(gv).$$

Observación 2.33. Si X y Y son G-conjuntos finitos entonces

$$K[X \cup Y] \cong K[X] \oplus K[Y].$$

El módulo regular es de interés ya que más adelante nos permitirá conocer un conjunto de módulos irreducibles para los grupos finitos.

2.2. Teorema de Maschke

Existe un teorema muy importante para la teoría, el cual nos ayuda a conocer mejor los módulos, pues gracias a él nos basta con echar un vistazo a los módulos irreducibles para conocer el resto de los módulos, antes de enunciar dicho teorema es necesario un resultado preliminar.

Definición 2.34. Sea V un espacio vectorial, una **proyección** es una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ tal que $T^2 = T$.

Lema 2.35. *Si V es un espacio vectorial y T una proyección entonces se tiene que $V = \ker(T) \oplus \operatorname{im}(T)$.*

Demostración. Por ser T una transformación, la $\operatorname{im}(T)$ es un subespacio de V, veamos que $\ker(T) \cap \operatorname{im}(T) = \{0\}$; sea $w \in \ker(T) \cap \operatorname{im}(T)$, por estar w en la imagen se tiene que existe un $w' \in V$ tal que $T(w') = w$. Ahora por ser T una proyección y como $w\in$ ker(T), se cumple que $T(w') = T(T(w')) = T(w) = 0$, por lo tanto $w = 0$. Con esto sólo basta ver que $V = \ker(T) + \operatorname{im}(T)$, sea $v \in V$, tenemos que $v = (v - T(v)) + T(v)$, es claro que $T(v) \in \operatorname{im}(T)$, además tenemos que $T(v - T(v)) = T(v) - T(T(v)) = T(V) - T(v) = 0$ por lo tanto $v - T(v) \in \ker(T)$. □

Hasta este punto estamos aptos para enunciar uno de los teoremas mas importantes dentro de la teoría y que nos será útil para continuar con nuestro estudio.

Teorema 2.36 (de Maschke)**.** *Sea G un grupo finito, V un K-espacio vectorial de dimensión finita, si V es un G-módulo reducible y la característica de K no divide a $|G|$ entonces V es completamente reducible.*

Demostración. Sea W un G-submódulo de V con base $\{w_1, \ldots, w_k\}$, extendemos dicha base a una base para V, digamos $\{w_1, \ldots, w_k, w_{m+1}, \ldots, w_n\}$,y definimos el subespacio W' como el subespacio generado por $\{w_{m+1}, \ldots, w_n\}$, con esto tenemos que $V = W \oplus W'$, ahora tomamos la proyección $\pi : V \longrightarrow W$ la cual a cada vector $v = w+w'$ le asigna w. A partir de esta proyección crearemos un homomorfismo ξ de G-módulos entre V y W de la siguiente manera

$$\xi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1}\pi(gv).$$

La ξ es una función lineal ya que π y la función multiplicar por g lo son, sólo nos hace falta ver que cumple la Definición 2.23 3). Sea $h \in G$, tenemos que

$$\xi(hv) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1}\pi(ghv) = \frac{1}{|G|} \sum_{l \in G} hl^{-1}\pi(lv) = h\frac{1}{|G|} \sum_{l \in G} l^{-1}\pi(lv) = h\xi(v).$$

Por lo tanto ξ es homomorfismo de módulos. Ahora probaremos que ξ es una proyección cuya imagen es W. Como W es G-módulo, y para todo $w \in W$ se tiene que $\pi(w) = w$, entonces

$$\xi(w) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}\pi(gw) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}gw = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} w = w.$$

Ahora dado que para toda $v \in V$ se tiene que $\xi(v) \in W$ entonces $\xi(\xi(v)) = \xi(v)$, además $\mathrm{im}(\xi) = \mathrm{W}$. Ahora por Lema 2.35 y la Proposición 2.27 $V = \ker(\xi) \oplus \mathrm{W}$ con $\ker(\xi)$ y W submódulos de V. □

2.2.1. El álgebra de grupo y los submódulos irreducibles

Como mencionábamos en la Sección 2.1.3, el álgebra de grupo resulta interesante pues de ella se pueden obtener submódulos irreducibles tales que para cualquier otro módulo irreducible se tiene un isomorfismo con alguno de ellos. Estos resultados salen a partir del Teorema de Maschke y el Lema de Schur el cual enunciaremos.

En lo que concierne a partir de aquí tomaremos G como un grupo finito y a $\mathbb{C}$ como el campo.

Lema 2.37 (de Schur)**.** *Sean V y U G-módulos irreducibles. Se cumple que:*

1. *Si $\xi : V \longrightarrow U$ es un homomorfismo, entonces $\xi \equiv 0$ ó ξ es un isomorfismo de módulos.*
2. *Si $\xi : V \longrightarrow V$ es isomorfismo de módulos, entonces es un múltiplo escalar de la identidad* id_V.

Demostración. 1. Supongamos que $\xi \neq 0$, como ξ es homomorfismo se tiene que $\ker(\xi)$ es un submódulo de V, por lo tanto $\ker(\xi) = 0$. De la misma manera por ser W irreducible se tiene que $\mathrm{im}(\xi) = W$. Así ξ es un isomorfismo.

2. De la teoría del álgebra lineal sabemos que ξ tiene un valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$, por lo tanto existe $v \neq 0 \in V$ tal que $\xi(v) = \lambda v$, es decir, $\ker(\xi - \lambda\mathrm{id_V}) \neq \{0\}$. Como V es irreducible y $\ker(\xi - \lambda\mathrm{id_V})$ es un submódulo de V se concluye que $\ker(\xi - \lambda\mathrm{id_V}) = V$. Por lo tanto para toda $v \in V$ se tiene que $(\xi - \lambda\mathrm{id_V})(v) = 0$, es decir, para toda $v \in V$ $\xi(v) = \lambda\mathrm{id}_V(v)$. □

Definición 2.38. Un **conjunto completo de G-módulos irreducibles** $\mathcal{I}$, es un conjunto tal que:

1. Para cualquier G-módulo irreducible V existe $I \in \mathcal{I}$ tal que $V \cong I$.
2. Si I, $I' \in \mathcal{I}$ y $I \neq I'$ entonces $I \ncong I'$.

Proposición 2.39. *Sean V y U G-módulos y sea $\xi : V \longrightarrow U$ un homomorfismo, entonces existe un submódulo W de V que cumple que $V = \ker(\xi) \oplus W$ y $W \cong \mathrm{im}(\xi)$.*

Demostración. Como $\ker(\xi)$ es un submódulo de V por consecuencia del Teorema de Maschke existe W tal que $V = \ker(\xi) \oplus W$. Si restringimos ξ a W se sigue que ξ es un monomorfismo por lo tanto $W \cong \mathrm{im}(\xi)$. $\square$

Proposición 2.40. *Sea V un G-módulo de la forma $V = V_1 \oplus ... \oplus V_k$ donde los V_i's son irreducibles, entonces para cualquier submódulo irreducible W de V se tiene que $W \cong V_j$ para algún $j \in [k]$.*

Demostración. Tomamos $j \in [k]$ para la cual la restricción a W de la proyección $\pi_j : V \longrightarrow V_j$ no es la trivial. Es inmediato ver que $\pi_j|W$ es un homomorfismo, la cual por el Lema de Schur es biyectiva por lo tanto $W \cong V_j$. $\square$

Teorema 2.41. *Sea $\mathbb{C}[G]$ el módulo regular con $\mathbb{C}[G] = C_1 \oplus ... \oplus C_l$ donde cada C_i es irreducible, entonces para cualquier G-módulo irreducible U se tiene que $U \cong C_j$ para alguna $j \in [l]$.*

Demostración. Sea U un G-módulo irreducible, para cualquier vector $u \neq 0 \in U$ no es difícil ver que el conjunto $\{cu \,|\, c \in \mathbb{C}[G]\}$ es un submódulo de U, pero por ser U irreducible se tiene que $U = \{cu \,|\, c \in \mathbb{C}[G]\}$. Si definimos $\xi : \mathbb{C}[G] \longrightarrow U$ tal que $\xi(c) = cu$, tenemos un epimorfismo. Por la Proposición 2.39 existe W submódulo de $\mathbb{C}[G]$ tal que $W \cong U$, ahora por la Proposición 2.40 $W \cong C_j$ para algún j, por lo tanto $U \cong C_j$. $\square$

Teorema 2.42. *Sea $\mathbb{C}[G] = C_1 \oplus ... \oplus C_l$ el módulo regular como en el teorema anterior, y sea U un G-módulo irreducible entonces U es isomorfo a exactamente* $\dim(U)$ *sumandos de* $\mathbb{C}[G]$.

Teorema 2.43. *Sea $\mathcal{I}$ un conjunto completo de G-módulos irreducibles entonces se tiene la igualdad*

$$\sum_{I \in \mathcal{I}} \dim(I)^2 = |G|$$

Las demostraciones de estos teoremas implican definiciones que para el próposito de esta tesis no son necesarias (ver [JL, Cap. 11]).

2.3. Caracteres

Definición 2.44. Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ con entradas en $\mathbb{C}$, definimos la **traza** de la matriz $\mathrm{tr}(A)$ como la suma de los elementos de la diagonal, es decir

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Observación 2.45. Para cuales quiera dos matrices A y B de tamaño $n \times n$, se cumple lo siguiente:

1. $\mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A + B)$;
2. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$;

3. Si C es una matriz invertible de $n \times n$ entonces $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(CAC^{-1})$.

Definición 2.46. Sea V un G-módulo con base $\mathcal{B}_1$, decimos que la función $\chi_V : G \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\chi_V(g) = \mathrm{tr}([g]_{\mathcal{B}_1})$, es un **carácter** de V. Al carácter $\chi_{\mathbb{I}}$ del módulo trivial lo llamaremos **carácter trivial** y lo denotaremos como *1*.

Observación 2.47. Gracias a la Observación 2.45.3 se tiene que el carácter no depende de la base elegida puesto que dadas dos bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ y la matriz de cambio de base M se tiene que $\chi_V(g) = \mathrm{tr}([g]_{\mathcal{B}_1}) = \mathrm{tr}(M[g]_{\mathcal{B}_2}M^{-1}) = \mathrm{tr}([g]_{\mathcal{B}_2})$.

Diremos que χ_V es un carácter de G. Si V es reducible entonces diremos que χ_V es **reducible**, y si V es irreducible entonces diremos que χ_V es **irreducible**.

Proposición 2.48. *Sea V un G-módulo y χ_V su carácter, etonces para toda $g, h \in G$ se cumple que:*
1) $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$;
2) $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi(g)$.

Demostración. Para todo $g \in G$ existe una base $\mathcal{B}$ en la cual

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

(ver [JL, Cap. 9]) por lo tanto $\chi_V(g) = e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} + \ldots + e^{i\theta_n}$, además se tiene que $[g]_{\mathcal{B}}[g^{-1}]_{\mathcal{B}} = I_n$ por lo que

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\theta_n} \end{pmatrix}$$

de esa igualdad y de la igualdad $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$ se concluye que

$$\begin{aligned} \chi_V(g^{-1}) &= e^{-i\theta_1} + e^{-i\theta_2} + \ldots + e^{-i\theta_n} \\ &= \overline{e^{i\theta_1}} + \overline{e^{i\theta_2}} + \ldots + \overline{e^{i\theta_n}} \\ &= \overline{e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} + \ldots + e^{i\theta_n}} \\ &= \overline{\chi_V(g)}. \end{aligned}$$

La parte 2) es inmediata puesto que $\mathrm{tr}([hgh^{-1}]) = \mathrm{tr}([h][g][h]^{-1})$ y por la Observación 2.45 3. se tiene que $\mathrm{tr}([hgh^{-1}]) = \mathrm{tr}([g])$. □

Observación 2.49. Si V es un G-módulo, χ_V su carácter y e_G el neutro de G, entonces se tiene que $\chi_V(e_G) = \dim(V)$.

Definición 2.50. Diremos que $\chi_V(e_G)$ es el **grado** de χ_V.

Proposición 2.51. *Sean V y U dos G-módulos isomorfos entonces $\chi_V = \chi_U$.*

Demostración. Del Teorema 2.25 se tiene que como V y U son isomorfos entonces sus representaciones asociadas φ y ψ son equivalentes. Por lo tanto existe una transformación lineal biyectiva $f : V \longrightarrow U$ tal que para toda $g \in G$ $[g]^\varphi = [f][g]^\psi[f]^{-1}$, donde $[f]$ denota la matriz asociada a f con respecto a dos bases de V y U respectivamente. Así por la Obsevación 2.47 $\chi_V(g) = \chi_U(g)$. □

Definición 2.52. Al carácter del módulo regular lo llamamos **carácter regular** y lo denotamos como χ_{reg}.

Observación 2.53. El carácter regular de un grupo finito G esta dado de la siguiente manera

$$\chi_{\text{reg}}(g) = \begin{cases} |G| & \text{si} \quad g = e_G \\ 0 & \text{si} \quad g \neq e_G \end{cases}$$

Esta observación es inmediata ya que $\chi_{\text{reg}}(e_G) = \dim(\mathbb{C}[G]) = |G|$, además tomando a G como base se tiene que para toda g la matriz $[g]$ es una matriz de permutación. Supongamos que para cierto g_0 la matriz $[g_0]$ tiene algún uno en la diagonal etnonces existe $h \in G$ tal que $g_0 h = h$ por lo tanto $g_0 = hh^{-1} = e_G$, por lo tanto si $g \neq e_G$ entonces $\chi_{reg}(g) = 0$.

Proposición 2.54. *Sea V un G-módulo tal que $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$ donde los V_i's son submódulos de V, entonces se tiene que $\chi_V = \sum_{i=1}^k \chi_{V_i}$.*

Demostración. Esxiste una base $\mathcal{B}$ de V tal que para todo $g \in G$ se tiene que

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_{g,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{g,2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & A_{g,k} \end{pmatrix},$$

donde las $A_{g,i}$'s son las matrices de la transformación m_g restringida a cada V_i respectivamente. Por lo tanto para toda $g \in G$ se da la igualdad $\text{tr}([g]_{\mathcal{B}}) = \sum_{i=1}^k \text{tr}(A_{g,i})$, es decir, $\chi_V(g) = \sum_{i=1}^k \chi_{V_i}(g)$. □

Definición 2.55. Sea $\mathcal{I} = \{I_1, \ldots I_l\}$ un conjunto completo de G-módulos irreducibles, llamamos **conjunto completo de caracteres irreducibles** de G al conjunto $\mathcal{C}(G) = \{\chi_{I_1}, \ldots \chi_{I_l}\}$.

Observación 2.56. Gracias a la Proposición 2.51 tenemos que $\mathcal{C}(G)$ no depende de la elección de $\mathcal{I}$.

Corolario 2.57. *Para todo carácter χ de G existen naturales $n_1, \ldots, n_r$ tal que $\chi = n_1\chi_1 + \ldots + n_r\chi_r$ donde los χ_i's son los elementos de $\mathcal{C}(G)$. Y viceversa toda función de la forma $\chi = n_1\chi_1 + \ldots + n_r\chi_r$ es un carácter.*

Este corolario es debido al Teorema de Maschke y a la Proposición 2.54.

2.3.1. Producto interno

Existe un producto interno en el espacio de funciones que van de un grupo G al campo $\mathbb{C}$. Este producto interno resulta relevante pues aplicarlo a caracteres del grupo nos da información de importacia. Además nos permitirá dar una caracterización para los módulos isomorfos.

Definición 2.58. Diremos que una función $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ es una **función de clase** si para cualesquiera $g, h \in G$ se cumple que $f(g) = f(hgh^{-1})$. Por la Proposición 2.48 tenemos que los caracteres de G son funciones de clase.

Definición 2.59. Dado un grupo G definimos $Cl(G)$ como el conjunto de funciones de clase.

Observación 2.60. Para cualquier grupo G se tiene que $Cl(G)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Una base para este espacio consta de las funciones que hacen uno a algún elemento de G y a la clase de conjugación de éste, y cero en el resto. Así $\dim(Cl(G))$ es igual al número de clases de conjugación.

Definición 2.61. Recordemos que en un $\mathbb{C}$-espacio vectorial V, a una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ se le conoce como **producto interno** si cumple que para toda $u, v, w \in V$ y $c \in \mathbb{C}$

1. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$;
2. $\langle kv + u, w \rangle = k \langle v, w \rangle + \langle u, w \rangle$;
3. si $u \neq 0$ entonces $\langle u, u \rangle > 0$.

Definición 2.62. Definimos la función $\langle \cdot, \cdot \rangle : Cl(G) \times Cl(G) \longrightarrow \mathbb{C}$ donde a cada par (ρ, ϱ) lo manda como sigue

$$\langle \rho, \varrho \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)\overline{\varrho(g)}.$$

Observación 2.63. La función $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en $Cl(G)$.

Proposición 2.64. *Para cualesquiera φ,ψ caracteres de G se cumple que*

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle .$$

Demostración. De la Proposición 2.48 tenemos que $\overline{\varphi(g)} = \varphi(g^{-1})$ y $\overline{\psi(g)} = \psi(g^{-1})$, gracias a esto y a la conmutatividad en $\mathbb{C}$ se cumple que

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g)\psi(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g^{-1})\varphi(g)$$

como $G = \{g^{-1} \mid g \in G\}$ se sigue que

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g^{-1})\varphi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi(g)\varphi(g^{-1}) = \langle \psi, \varphi \rangle .$$

□

Teorema 2.65. *Sean V y U G-módulos irreducibles con caracteres χ_V y χ_U respectivamente, entonces*

$$\langle \chi_V, \chi_U \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad V \cong U \\ 0 & \text{si} \quad V \ncong U \end{cases}$$

Para la prueba de éste teorema es necesario conocer varios resultados, los cuales no aparecen en su totalidad en esta tesis. Para profundizar más se puede recurrir a [JL, C. 14]

Proposición 2.66. *Sean V y U G-módulos irreducibles tales que $\chi_V = \chi_U$ entonces se tiene que $V \cong U$.*

Demostración. Por el Teorema 2.65 tenemos que $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$, y como $\chi_V = \chi_U$ entonces se tiene que $1 = \langle \chi_V, \chi_V \rangle = \langle \chi_V, \chi_U \rangle$, de nuevo por el Teorema 2.65 concluimos que $V \cong U$. □

Gracias al Teorema de Maschke, a la Proposición 2.54, y al Teorema 2.65 tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.67. *Para todo G-módulo V, si $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$ con los V_i's sunmódulos irreducibles, entonces $\langle \chi_V, \chi_{V_i} \rangle$ es el número de veces que V_i aparece en la suma directa, más aún se tiene que*

$$\chi_V = \sum_{\chi \in \mathcal{C}(G)} \langle \chi_V, \chi \rangle \, \chi$$

Corolario 2.68. *El subconjunto $\mathcal{C}(G)$ es linealmente independiente. Por lo tanto es una base de $Cl(G)$.*

Corolario 2.69. *Sea V un G-módulo, entonces V es ireducible si y sólo si $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$.*

Corolario 2.70. *Para cualesquiera dos G-módulos V y U se tiene que $V \cong U$ si y sólo si $\chi_V = \chi_U$.*

Para terminar esta sección cabe comentar que el conjunto de caracteres de un grupo G es un $\mathbb{Z}$-módulo (en el sentido de módulo sobre un anillo) el cual gracias al Corolario 2.68 tiene como base a $\mathcal{C}_G = \{\chi_1, \ldots, \chi_l\}$. A tal conjunto lo denotaremos como $\mathcal{R}(G)$ el cúal es igual a la suma directa $\mathbb{Z}\chi_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\chi_l$.

Otro detalle importante es que gracias al Corolario 2.68 y a la Observación 2.60 $|\mathcal{C}_G|$ es igual al número de clases de conjugación de G.

2.4. Restricción y módulos inducidos

Resulta natural definir un H-módulo a partir de un G-módulo cuando H es subrgrupo de G, pero ¿esto es posible al revés? es decir, dado un H-módulo ¿es posible darle estructura de G-módulo si tenemos que H es subgrupo de G? Esta sección esta dedicada a comprender esta pregunta.

2.4.1. Producto tensorial

Existe un espacio importante relacionado con el conjunto $V \times W$ cuando V y W son dos espacios vectoriales sobre un campo K. Este espacio es conocido como el producto tensorial el cual puede adquirir estructura de G-modulo si V y W lo son. Además hay cocientes en el producto tensorial que nos dan otros módulos de importancia.

Definición 2.71. Para dos espacios vectoriales V y W sobre un campo K, fijémonos en el subconjunto S de $K[V \times W]$ (ver Subsección 2.1.3.) cuyos elementos son de la forma:

1. $(v_1 + v_2, w_1) - (v_1, w_1) - (v_2, w_1)$;
2. $(v_1, w_1 + w_2) - (v_1, w_1) - (v_1, w_2)$;
3. $(kv_1, w_1) - k(v_1, w_1)$;
4. $(v_1, kw_1) - k(v_1, w_1)$.

donde $v_1, v_2 \in V$, $w_1, w_2 \in W$, $k \in K$. Ahora tomemos el subespacio $\mathcal{S} = \langle S \rangle$ (el generado por S). Definimos el **producto tensorial de V y W sobre K** como el espacio cociente $K[V \times W]/\mathcal{S}$ al cual denotaremos como $V \otimes_K W$ o como $V \otimes W$ en caso de que se sobrentienda el campo del que estamos hablando. A cada clase de la forma $(v, w) + \mathcal{S}$ la denotaremos como $v \otimes w$.

Observación 2.72. Para toda $v_1, v_2 \in V$, $w_1, w_2 \in W$, y $k \in K$ se tiene que:

1. $(v_1 + v_2) \otimes w_1 = v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_1$;
2. $v_1 \otimes (w_1 + w_2) = v_1 \otimes w_1 + v_1 \otimes w_2$;
3. $(kv_1) \otimes w_1 = k(v_1 \otimes w_1)$;
4. $v_1 \otimes (kw_1) = k(v_1 \otimes w_1)$.

Esta construcción esta hecha de esa manera, pues de ella se sigue una propiedad universal de relevancia.

Proposición 2.73 (Propiedad Universal del Producto Tensorial)**.** *Sean V,W, y Z espacios vectoriales sobre un campo K, sea $p : V \times W \longrightarrow V \otimes W$ la proyección natural. Para toda función bilineal $\beta : V \times W \longrightarrow Z$ existe una única función lineal $\overline{\beta} : V \otimes W \longrightarrow Z$ tal que $\overline{\beta} \circ p = \beta$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "p"'] & Z \\ V \otimes W \arrow[ur, "\exists!\, \overline{\beta}"'] & \end{tikzcd}$$

Proposición 2.74. *Si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son bases de los espacios V y W respectivamente entonces el conjunto $\{v_i \otimes w_j \mid v_i \in \mathcal{B}_1 \text{ y } w_j \in \mathcal{B}_2\}$ es una base para $V \otimes W$.*

Seguiremos con la convención de usar a $\mathbb{C}$ como el campo.

Proposición 2.75. *Sean X y Y G-conjuntos finitos, entonces*

$$\mathbb{C}[X \times Y] \cong \mathbb{C}[X] \otimes \mathbb{C}[Y].$$

Demostración. Es rutinario verificar que $f : \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[Y] \longrightarrow \mathbb{C}[X \times Y]$ tal que $f(\sum_{x \in X} c_x x, \sum_{y \in Y} c_y y) = \sum_{(x,y) \in X \times Y} c_x c_y (x, y)$ es una función bilineal. Además, esta función es suprayectiva ya que en la imagen estan todos los elementos de la base. De la propiedad universal del producto tensorial tenemos que existe una función $\overline{f} : \mathbb{C}[X] \otimes \mathbb{C}[Y] \longrightarrow \mathbb{C}[X \times Y]$ tal que $\overline{f} \circ p = f$ por lo que $\overline{f}$ es debe ser suprayectiva. Ahora de la Observación 2.29 y de la proposición anterior se sigue que $\dim(\mathbb{C}[X \times Y]) = \dim(\mathbb{C}[X] \otimes \mathbb{C}[Y])$ por lo tanto $\mathbb{C}[X \times Y] \cong \mathbb{C}[X] \otimes \mathbb{C}[Y]$. $\square$

Definición 2.76. Dados V y W G-módulos y dos bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ de V y W respectivamente. Para cualquier $g \in G$ y calesquiera $v \in V$ y $w \in W$ definimos el producto

$$g(v \otimes w) = (gv) \otimes (gw).$$

Éste está bien definido gracias a la propiedad universal del producto tensorial. Con esta definición y checando para la base $\mathcal{B} = \{v_i \otimes w_j \mid v_i \in \mathcal{B}_1 \text{ y } w_j \in \mathcal{B}_2\}$ las hipótesis de la Proposición 2.30, tenemos que $V \otimes W$ es un G-módulo.

Definición 2.77. Al carácter de $V \otimes W$ lo denotamos como $\chi_V \otimes \chi_W$.

Proposición 2.78. *Si V y W son G-módulos y χ_V, χ_W sus caracteres, entonces $\chi_V \otimes \chi_W = \chi_V \chi_W$. Así el producto de cualesquiera dos caracteres de un grupo G es también un carácter de G.*

Esta idea se puede generalizar. Recordemos que dados dos grupos G y H es posible conseguir un tercer grupo tomando $G \times H$ con la operación coordenada a coordenada.

Definición 2.79. Sean G y H dos grupos cualesquiera, sea V un G-módulo con base $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_l\}$ y W un H-módulo con base $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \ldots w_r\}$. Para culaquier $(g, h) \in G \times H$ y cualesquiera $v \in V$ y $w \in W$ definimos la operación

$$(g, h)(v \otimes w) = (gv) \otimes (hw).$$

De nueva cuenta se puede verificar que esta operación está bien definida gracias a la propiedad universal del producto tensorial. Las hipótesis de la Proposición 2.30 se cumplen para la base $\mathcal{B} = \{v_i \otimes w_j \mid v_i \in \mathcal{B}_1 \text{ y } w_j \in \mathcal{B}_2\}$, por lo que el espacio $V \otimes W$ adquiere estructura de $G \times H$-módulo.

Definición 2.80. Al carácter de $V \otimes W$ como $G \times H$-módulo lo denotamos como $\chi_V \times \chi_W$.

Proposición 2.81. *Sea V un G-módulo y W un H-módulo con caracteres χ_V y χ_W respectivamente entonces el carácter $\chi_V \times \chi_W$ de $V \otimes W$ como $G \times H$-módulo cumple que para todo $(g, h) \in G \times H$, $\chi_V \times \chi_W(g, h) = \chi_V(g)\chi_W(h)$.*

Proposición 2.82. *Si G y H son dos grupos, $\mathcal{C}(G)$ y $\mathcal{C}(H)$ son sus conjuntos completos de caracteres irreducibles respectivamente, entonces se tiene una biyección entre $\mathcal{C}(G\times H)$ y $\mathcal{C}(G)\times\mathcal{C}(H)$, es decir, $|\mathcal{C}(G\times H)| = |C(G)\times\mathcal{C}(H)|$.*

Finalmente definiremos en el espacio $V\otimes W$ un subespacio, el cual nos ayudará a «extender» módulos de un subgrupo de G a todo el grupo G. Para eso hagamos notar que hasta ahora sólo nos hemos referido a G-módulos izquierdos, es decir, G actua por la izquierda, pero toda la teoría pudo haber sido desarrollada pensando en módulos derechos.

Definición 2.83. Sea V un G-módulo derecho y sea W un G-módulo, fijémonos en el subconjunto M de $V\otimes W$ cuyos elementos son de la forma

$$vg\otimes w - v\otimes gw,$$

con $g\in G$. Tomamos el subespacio $\mathcal{M} = \langle M\rangle$ y definimos el **producto tensorial de V y W sobre G** como el subespacio cociente $V\otimes W/\mathcal{M}$ y lo denotamos como $V\otimes_G W$. A cada clase de la forma $(v\otimes w)+V\otimes W$ la denotamos como $v\otimes_G w$.

Lema 2.84. *Si es V un G-módulo derecho y W un G-módulo entonces para toda $g\in G$ se cumple que*

$$vg\otimes_G w = v\otimes_G gw.$$

Proposición 2.85. *Sean V un G-módulo derecho y W un G-módulo, entonces*

$$V\otimes_G W = \langle\{v\otimes_G w\,|\,v\in V \text{ y } w\in W\}\rangle\,.$$

Definición 2.86. Sean G y H grupos. A un espacio V que sea G-módulo y H-módulo derecho, y que para toda $g\in G$, $h\in H$, y $v\in V$ cumpla

$$g(vh) = (gv)h$$

lo llamaremos **(G,H)-bimódulo**.

Observación 2.87. Sean G y H dos grupos cualesquiera, si V es un (G,H)-bimódulo, y W es un H-módulo. Es posible darle estructura de G-módulo a $V\otimes_H W$ extendiendo linealmente la actuación definida por

$$g(v\otimes_H w) = (gv)\otimes_H w.$$

Éste producto tensioral cumple una propied universal similar a la de la Proposición 2.73. Con ella se puede verificar que la actuación que estamos definiendo no depende de los representantes.

2.4.2. Restricción a un subgrupo

Por definición si tenemos un G-módulo V es porque existe una actuación lineal de G en V. Por lo que si restringimos dicha actuación a un subgrupo H de G, tendremos que H actúa linealmente en V. Así V también es un H-módulo.

Definición 2.88. Sea V un G-módulo y H un subgrupo de G, denotamos como $\mathrm{Res}_H^G(V)$ al H-módulo obtenido al restringir la actuación de G en V a H. A dicho módulo lo llamamos **restricción** de G a H del módulo V.

Observación 2.89. Cabe hacer notar que como conjunto $\mathrm{Res}_H^G(V) = V$. Más aún esta igualdad es verdadera también como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

Definición 2.90. Si χ_V es el carácter de V como G-módulo, por comodidad al carácter $\chi_{\mathrm{Res}_H^G(V)}$ lo denotaremos como $\mathrm{Res}_H^G(\chi_V)$ y lo llamaremos la **restricción del carácter** de V de G a H o el **carácter restringido** de V de G a H.

Para hacer diferencia entre el producto interno de las funciones con dominio G y el de las funciones con dominio H indexaremos al producto con la letra que representa al grupo, es decir, $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ será el producto interno en $Cl(G)$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ será el producto interno en $Cl(H)$.

Proposición 2.91. *Sean V y W dos G-módulos y H un subgrupo de G entonces*

$$\mathrm{Res}_H^G(V \otimes W) \cong \mathrm{Res}_H^G(V) \otimes \mathrm{Res}_H^G(W).$$

Proposición 2.92. *Sean L subgrupo de H y H subgrupo de G, y sea V un G-módulo entonces*

$$\mathrm{Res}_L^H(\mathrm{Res}_H^G(V)) = \mathrm{Res}_L^G(V).$$

2.4.3. Módulos inducidos

En esta última subsección del capítulo hemos omitido casi todas las demostraciones y sólo nos enfocaremos en los resultados, que posteriormente nos serán útiles. Como mencionabamos al principio del capítulo, algunos detalles se pueden encontrar en [JL], otros fueron tomados de un seminario impartido por Ernesto Vallejo.

Notemos que si H es un subgrupo de G entonces H actúa en $\mathbb{C}[G]$ por el lado derecho de la siguiente manera: para cualquier elemento $c = \sum_{g\in G} c_g g \in \mathbb{C}[G]$ y $h \in H$ tenemos que

$$\left(\sum_{g\in G} c_g g \right) h = \sum_{g\in G} c_g (gh)$$

Con esta operacion $\mathbb{C}[G]$ adquiere estructura de H-módulo derecho.

Definición 2.93. Sea H un subgrupo de G y V un H-módulo, al G-módulo $\mathbb{C}[G] \otimes_H V$ con la actuación dada como en la Observación 2.87 lo denotamos como $\mathrm{Ind}_H^G(V)$ y lo llamamos **módulo inducido** de H a G de V.

Definición 2.94. Al carácter $\chi_{\mathrm{Ind}_H^G(V)}$ lo denotamos como $\mathrm{Ind}_H^G(\chi_V)$ y lo llamamos **carácter inducido** de H a G de V.

Recordemos que para un grupo G y un subgrupo H de G la notación $[G : H]$ representa el índice de H, es decir, el número de clases de laterales en el cociente G/H.

Proposición 2.95. *Sea H subgrupo de G, y V un H-módulo con base $\mathcal{B}$, si L es un conjunto de representantes de las clases laterales izquierdas de H en G entonces el conjunto $\{g \otimes_H v \,|\, g \in L \,\mathrm{y}\, v \in \mathcal{B}\}$ es una base de $\mathrm{Ind}_H^G(V)$. Y por lo tanto*

$$\dim(\mathrm{Ind}_H^G(V)) = [G : H] \dim(V).$$

Notemos que para cualquier subgrupo H de G, G actúa de manera natural en el conjunto G/H de clases laterales izquierdas, así por la Observación 2.29 y la Proposición 2.30 tenemos que $\mathbb{C}[G/H]$ es un G-módulo.

Observación 2.96. Si H es un subgrupo de G y $\mathbb{I}$ el H-módulo trivial entonces se tiene que

$$\mathrm{Ind}_H^G(\mathbb{I}) \cong \mathbb{C}[G/H].$$

Observación 2.97. Si V es un G-módulo entonces $\mathrm{Ind}_G^G(V) \cong V$.

Proposición 2.98. *Sea H subgrupo de G, sean V y W H-módulos, si $V \cong W$ entonces*

$$\mathrm{Ind}_H^G(V) \cong \mathrm{Ind}_H^G(W)$$

Lema 2.99. *Sea H subgrupo de G, y $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ un H-módulo donde los V_i's son submodulos de V, se cumple que*

$$\mathrm{Ind}_H^G(V) = \mathrm{Ind}_H^G(V_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ind}_H^G(V_k).$$

Lema 2.100 (Transitividad)**.** *Sean L subgrupo de H y H subgrupo de G, y sea V un L-módulo, se sigue que*

$$\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Ind}_L^H(V)) \cong \mathrm{Ind}_L^G(V).$$

Las siguientes dos proposiciones relacionan a la restricción y a la inducción. Estas nos serán de utilidad en el capítulo cinco.

Proposición 2.101. *Sea H un subgrupo de G, y sean V un G-módulo y W un H-módulo entonces se da el isomorfismo*

$$\mathrm{Ind}_H^G(W \otimes \mathrm{Res}_H^G(V)) \cong \mathrm{Ind}_H^G(W) \otimes V.$$

Teorema 2.102 (Reciprocidad de Frobenius)**.** *Sean V un G-módulo y W un H-módulo con H subgrupo de G entonces se tiene la igualdad*

$$\left\langle \mathrm{Res}_H^G(\chi_V), \chi_W \right\rangle_H = \left\langle \chi_V, \mathrm{Ind}_H^G(\chi_W) \right\rangle_G.$$

Capítulo 3

Polinomios simétricos homogéneos

3.1. Dos órdenes importantes

Definición 3.1. Una **composición débil** de un número natural n, es una tupla $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ tal que para toda i, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n$. Si para todo i, $\alpha_i > 0$, entoces a α simplemente la llamamos **composición**.

Hay dos órdenes de importancia, que nos ayudarán dentro de la teoría.

Para nuestras definiciones a cualquier composición débil $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ la consideraremo como $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, 0, 0, \ldots)$.

Definición 3.2. Dadas dos composiciones débiles $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ y $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_l)$ decimos que $\alpha \geq \beta$ si y solamente si para toda i se tiene $\alpha_i = \beta_i$ o, si $\alpha_j \neq \beta_j$ para algún j entonces $\alpha_{\tilde{n}} > \beta_{\tilde{n}}$ donde $\tilde{n} = \text{mín}\{j \,|\, \alpha_j \neq \beta_j\}$. A este orden se le conoce como **orden lexicográfico**.

Observación 3.3. El orden lexicográfico es un orden total en el conjunto de composiciones débiles.

Definición 3.4. Dadas dos particiones de un número natural n, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ y $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l)$, diremos que $\lambda \trianglerighteq \mu$ si y solamente si para toda i

$$\sum_{j=1}^{i} \lambda_j \geq \sum_{j=1}^{i} \mu_j.$$

A este orden se le conoce como **orden de dominación**.

Proposición 3.5. *Para cualesquiera dos particones de n, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ y $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l)$ se tiene que si $\mu \trianglelefteq \lambda$ entonces $\mu \leq \lambda$.*

Demostración. Supongamos que $\mu \trianglelefteq \lambda$. *Caso 1.* Para toda i, $\sum_{j=1}^{i} \lambda_j = \sum_{j=1}^{i} \mu_j$ entonces $\lambda_i = \mu_i$ para toda i, por lo tanto $\mu \leq \lambda$. *Caso 2.* Existe j tal que $\mu_j \neq \lambda_j$, tomemos $\tilde{n} = \text{mín}\{j \mid \lambda_j \neq \mu_j\}$, así entonces $\sum_{i=1}^{\tilde{n}-1} \mu_i = \sum_{i=1}^{\tilde{n}-1} \lambda_i$, además sabemos que $\sum_{i=1}^{\tilde{n}} \mu_i \leq \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \lambda_i$ por lo tanto $\mu_{\tilde{n}} \leq \lambda_{\tilde{n}}$ con lo que se comcluye la prueba. □

Lema 3.6. *Sean λ y μ dos particiones. Existe una tabla T de forma λ con contenido μ si y sólo si $\mu \trianglelefteq \lambda$.*

Observación 3.7. Sean λ y μ particiones tales que $\lambda \trianglerighteq \mu$ entonces $l(\lambda) \leq l(\mu)$.

3.2. Polinomios de Schur

Definición 3.8. Al conjunto de polinomios con m variables y coeficientes enteros lo denotamos como $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$. Al conjunto $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$ lo denotamos como $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots]$. Los elementos de éste último son los polinomios con un número finito de variables y coeficientes enteros.

Para las siguiente dos definiciones las tablas T serán consideradas con entradas en $[m]$.

Definición 3.9. Sea T una tabla de forma λ. Asociamos a T el monomio con m variables $x^T \coloneqq \prod_{k\in[m]} x_k^{\alpha_k}$ donde para toda k, $\alpha_k = |\{(i,j) \mid T(i,j) = k\}|$.

Proposición 3.10. *Si T y U son tablas entonces*

$$x^{T\cdot U} = x^T \cdot x^U$$

Demostración. Por definición sabemos que $x^T = x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m}$ con las α_i's el número de veces que aparece i en T, así también $x^U = x_1^{\beta_1} \ldots x_m^{\beta_m}$ con los β_j's el número de veces que aparece j en U. Entonces multiplicando tenemos que $x^T x^U = x_1^{\alpha_1+\beta_1} \ldots x_m^{\alpha_m+\beta_m}$, pero $\alpha_k + \beta_k$ es el número de veces que k aparece en $T \cdot U$ de donde se sigue la igualdad. □

Definición 3.11. Para cada partición λ definimos el **polinomio de Schur**

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) \coloneqq \sum_{T \text{ de forma } \lambda} x^T$$

En caso de que no existan tablas de forma λ con entradas en $[m]$ consideraremos a $s_\lambda(x_1, \ldots, x_m)$ como 0.

Observación 3.12. Debido a la Proposición 1.44 los polinomios de Schur son simétricos.

Definición 3.13. Al polinomio $s_{(1^n)}$ lo denotaremos como $e_n(x_1, \ldots, x_m)$ y lo llamaremos **polinomio simétrico elemental**. Al polinomio $s_{(n)}$ lo denotaremos como $h_n(x_1, \ldots, x_m)$ y lo llamaremos **polinomio simétrico completo**.

Observación 3.14.
1.- Se tiene que $e_n(x_1,\dots,x_m) = \sum x_{i_1}\dots x_{i_n}$donde las i_k's pertenecen a $[m]$ y si $k<t$ entonces $i_k<i_t$.

2.- El polinomio completo $h_n(x_1,\dots,x_m)$ es igual a la suma de de los monomios de grado n con m variables .

Observación 3.15. A la función que manda $T\mapsto x^T$ la podemos extender de manera canónica para obtener una función $\Delta:\mathbb{Z}[(\Gamma,\cdot)]\longrightarrow\mathbb{Z}[x_1,x_2,\dots]$ que por la Proposición 3.10 resulta ser un homomorfismo de anillos.

Corolario 3.16. *Si λ y μ son particiones entonces*

$$s_\lambda(x_1,\dots,x_m)\cdot s_\mu(x_1,\dots,x_m)=\sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu}s_\nu(x_1,\dots,x_m)$$

Demostración. Es debido al homomorfismo Δ y al Teorema 1.58 □

Definición 3.17. Defininimos el siguiente subconjunto de $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_m]$

$$\Lambda^n_m\coloneqq\{p(x_1,\dots,x_m)\,|\,p(x_1,\dots,x_m)\,\text{es simétrico y homogéneo de grado}\,n\}\cup\{0\}$$

Este conjunto es un grupo abeliano con la suma de polinomios, por lo tanto es un $\mathbb{Z}$-módulo.

Definición 3.18. Dada una partición $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$, llamamos **polinomio simétrico monomial** al polinomio que tiene como términos a $x_1^{\lambda_1}\dots x_m^{\lambda_m}$ y a todos los diferentes monomios que se optienen de revolver los exponentes. A este polinomio lo denotamos como $m_\lambda(x_1\dots x_m)$. Por ejemplo si tomamos $\lambda=(3,1,1)$, entonces $m_\lambda(x_1,x_2,x_3)=x_1^3x_2x_3+x_1x_2^3x_3+x_1x_2x_3^3$.

Definición 3.19. Dada una partición $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_r)$ definimos

$$\begin{aligned}h_\lambda(x_1,\dots,x_m)&\coloneqq h_{\lambda_1}(x_1,\dots,x_m)\cdot\ldots\cdot h_{\lambda_r}(x_1,\dots,x_m),\\ e_\lambda(x_1,\dots,x_m)&\coloneqq e_{\lambda_1}(x_1,\dots,x_m)\cdot\ldots\cdot e_{\lambda_r}(x_1,\dots,x_m).\end{aligned}$$

A cualquier monomio $x_1^{\alpha_1}\dots x_m^{\alpha_m}$ lo denotaremos como x^α donde α es la composición débil $(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$. Así a un polinomio lo podemos escribir de manera única escribiendo cada sumando de izquierda a derecha según el orden lexicográfico inverso, es decir, el exponente de un sumando es mayor que el de los que están a su derecha.

Proposición 3.20. *Los siguientes conjuntos son bases el $\mathbb{Z}$-módulo Λ_m^n*

1. $\{m_\lambda(x_1, \ldots, x_m) \,|\, \lambda \vdash n \,\mathrm{y}\, l(\lambda) \leq m\}$;
2. $\{s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) \,|\, \lambda \vdash n \,\mathrm{y}\, l(\lambda) \leq m\}$;
3. $\{e_\lambda(x_1, \ldots, x_m) \,|\, \lambda \vdash n \,\mathrm{y}\, l(\lambda') \leq m\}$; *y*
4. $\{h_\lambda(x_1, \ldots, x_m) \,|\, \lambda \vdash n \,\mathrm{y}\, l(\lambda') \leq m\}$.

Demostración. Primero veamos el primer conjunto. Sea $p(x_1, \ldots, x_m) \neq 0 \in \Lambda_m^n$ escrito según el orden lexicográfico, fijémonos en el primer sumando x^λ que aparece en $p(x_1, \ldots, x_m)$, por la forma de escritura se tiene que λ es una partición. Fijémonos en su coeficiente a. Por ser $p(x_1, \ldots, x_m)$ simétrico tenemos que para toda $\sigma \in S_m$el monomio $x_1^{\lambda_{\sigma(1)}} \ldots x_m^{\lambda_{\sigma(m)}}$ también es un sumando con el mismo coeficiente a, por lo tanto $p(x_1, \ldots, x_m) = am_\lambda(x_1, \ldots, x_m) + p_1(x_1, \ldots, x_m)$ con $p_1(x_1, \ldots, x_m) \in \Lambda_m^n$, además $p_1(x_1, \ldots, x_m)$ tiene una cantidad menor de sumandos que $p(x_1, \ldots, x_m)$. Aplicamos el mismo razonamiento a $p_1(x_1, \ldots, x_m)$ y así nos seguimos hasta que llega un momento en que $p(x_1, \ldots, x_m)$ queda escrito como combinación de algunos m_μ's. Para ver la independencia basta observar que si μ y ν son dos particiones distintas entonces $m_\mu(x_1, \ldots, x_m)$ y $m_\nu(x_1, \ldots, x_m)$ no tienen sumandos en común por lo tanto se sigue que si $\sum_{\mu \vdash n} a_\mu m_\mu(x_1, \ldots, x_m) = 0$ entonces $a_\mu = 0$ para toda $\mu \vdash n$.

Como el segundo conjunto tiene la misma cardinalidad que el primero sólo basta ver que genera. Sea $p(x_1, \ldots, x_m) \neq 0 \in \Lambda_m^n$ escrito según el orden lexicográfico, igual que antes tomamos el primer sumando ax^λ. Gracias a la Observación 1.53 y por la simetría tenemos que $s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) = m_\lambda(x_1, \ldots, x_m) + q(x_1, \ldots, x_m)$. Notemos que el exponente de cualquier sumando de $q(x_1, \ldots, x_m)$ es menor que λ en el orden lexicográfico, esto debido al Lema 3.6 y a la Proposición 3.5. Entonces $p(x_1, \ldots, x_m) = as_\lambda(x_1, \ldots, x_m) + q_1(x_1, \ldots, x_m)$, como el primer término de q_1 tiene exponente menor λ, podemos aplicarle el mismo razonamiento y así seguirnos hasta obetener lo deseado.

Para ver el tercer conjunto notemos que el primer término de $e_\lambda(x_1, \ldots, x_m)$ es $x^{\lambda'}$, así entonces si $p(x_1, \ldots, x_m) \neq 0 \in \Lambda_m^n$ con su primer término ax^λ, tenemos que $p(x_1, \ldots, x_m) = ae_{\lambda'}(x_1, \ldots, x_m) + t_1(x_1, \ldots, x_m)$, y procedemos como en las bases anteriores.

Para demostrar que el últmo conjunto también es base necesitamos probar que genera lo mismo que las e_λ's, para esto son necesarias técnicas que no mencionaremos aquí (ver [Fult, p. 73]). $\square$

Observación 3.21. Para cualquier natural m existe un homomorfismo

$$\rho_m : \Lambda_{m+1}^n \longrightarrow \Lambda_m^n$$

que manda $p(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1})$ en $p(x_1, \ldots, x_m, 0)$. Además dado que el rango de Λ_m^n es $|\{\lambda \vdash n \,|\, l(\lambda) \leq m\}|$, tenemos que $\Lambda_{k+1}^n \cong \Lambda_k^n$ para toda $k \geq n$. De hecho estas funciones ρ_k's nos dan isomorfismos para estas k's, ya que si $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1})$ es partición de n entonces

$$\rho_k(m_\lambda(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})) = m_\lambda(x_1, \ldots, x_k, 0) = m_{\widetilde{\lambda}}(x_1, \ldots, x_k),$$

donde $\widetilde{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Con esto tenemos que el siguiente sistema inverso se estabiliza

$$\Lambda_m^n \xleftarrow{\rho_m} \Lambda_{m+1}^n \xleftarrow{\rho_{m+1}} \Lambda_{m+2}^n \xleftarrow{\rho_{m+1}} \ldots \xleftarrow{\rho_{n-1}} \Lambda_n^n \xleftarrow[\cong]{\rho_n} \Lambda_{n+1}^n \xleftarrow[\cong]{\rho_{n+1}} \ldots$$

Definición 3.22. Al limite inverso lo definimos como sigue

$$\Lambda^n = \lim_{\substack{\leftarrow \\ m}} \Lambda_m^n := \{(p_k)_{k=1}^{\infty} \mid \forall k\, \rho_k(p_{k+1}) = p_k\}$$

Definición 3.23. Denotaremos como h_n al elemnto $(h_n(x_1, \ldots, x_k))_{k=1}^{\infty}$ de Λ^n.

Definición 3.24. Definimos el **anillo graduado de polinomios simetricos**

$$\varLambda = \oplus_{n=0}^{\infty} \Lambda^n.$$

Observación 3.25. Gracias a la Proposición 3.20 se tiene que $\varLambda = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \ldots]$.

3.3. Números de Kostka

Definición 3.26. Sea λ una partición, al número de tablas de forma λ y contenido μ se le conoce como **número de Kostka**, y se le denota como $K_{\lambda\mu}$.

Proposición 3.27. *Sea λ una partición, si $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ entonces para toda $\sigma \in S_m$ se tiene que $K_{\lambda\mu} = K_{\lambda(\mu_{\sigma(1)}, \ldots, \mu_{\sigma(m)})}$.*

Demostración. Es consecuencia de la Proposición 1.44. □

Observación 3.28. El número de sucesiones de particiones de la forma

$$\emptyset = \lambda(0) \subseteq \lambda(1) \subseteq \ldots \subseteq \lambda(k) = \lambda$$

tales que para toda $i \in [k]$ $\lambda(i)/\lambda(i-1)$ no tiene dos cuadros en la misma columna y $|\lambda(i)/\lambda(i-1)| = \mu_i$ es $K_{\lambda(\mu_1, \ldots, \mu_k)}$.

La siguiente proposición es consecuencia inmediata del Lema 3.6.

Proposición 3.29. *Si λ y μ son particiones de n, se tiene que $K_{\lambda\mu} > 0$ si y sólo si $\lambda \trianglerighteq \mu$.*

Observación 3.30. Debido a la Observación 1.53 tenemos que para cualquier particion λ, $K_{\lambda\lambda} = 1$.

Para el siguiente lema recordemos que S_λ^m denota la suma de las tablas semiestándar de forma λ con entradas en $[m]$ (verificar la Definición 1.57 del Capítulo).

Lema 3.31 (Fórmula de Pieri)**.** *Sea λ partición de n, para cualquier m se tiene*

$$\begin{array}{lrcl} 1) & S_\lambda^m \cdot S_{(n)}^m & = & \sum_\mu S_\mu^m \\ 2) & S_\lambda^m \cdot S_{(1^n)}^m & = & \sum_\nu S_\nu^m \end{array}$$

la primera suma corre en las particiones μ que son iguales a λ añadiéndole n cuadros en distintas columnas, y la segunda suma corre en los ν que son iguales a λ añadiéndole n cuadros en distintos renglones.

Demostración. Es debido al Lema 1.11 de Inserción . □

De esta proposición y del homomorfismo Δ, podemos concluir que

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) \cdot h_n(x, \ldots, x_m) = \sum_\mu s_\mu(x_1, \ldots, x_m),$$

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) \cdot e_n(x, \ldots, x_m) = \sum_\nu s_\nu(x_1, \ldots, x_m)$$

con μ y ν como en el lema.

Debido a este hecho, a la Observación 3.28, a la Proposición 3.29 y a la Observación 3.30 se siguen:

Corolario 3.32. *Para toda partición μ se tiene la igualdad*

$$h_\lambda(x_1, \ldots, x_m) = s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) + \sum_{\lambda \lhd \mu} K_{\mu\lambda} s_\mu(x_1, \ldots, x_m).$$

Corolario 3.33. *Para toda partición μ se tiene la igualdad*

$$e_\lambda(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\lambda \unlhd \mu} K_{\mu'\lambda} s_\mu(x_1, \ldots, x_m).$$

Capítulo 4

Representaciones del grupo simétrico

4.1. Representaciones de S_n

El grupo simétrico S_n es de suma importancia pues actúa de manera natural en cualquier espacio vectorial finito de dimensión n permutando «coordenadas». Es por eso que resulta relevante estudiar las representaciones de éste.

Observación 4.1. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n con base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces la función $p : S_n \times V \longrightarrow V$ definida como

$$\sigma v = \sigma(\sum_{i \in [n]} k_i v_i) = \sum_{i \in [n]} k_i v_{\sigma(i)}$$

es una actuación lineal. Por lo tanto V es un S_n-módulo.

Definición 4.2. En este capítulo consideraremos tablas regulares biyectivas $T : \lambda \longrightarrow [n]$, es decir $\lambda \vdash n$, y no nos importará que cumpla algún orden. A dichas tablas las llamaremos **llenados**. Cuando requiramos que algún llenado sea estándar lo especificaremos.

Definición 4.3. Al conjunto de llenados de forma λ lo denotaremos por $\mathcal{T}(\lambda)$. Así el conjunto de todos los llenados será el conjunto $\mathcal{T} = \bigcup_\lambda \mathcal{T}(\lambda)$.

Observación 4.4. Sea λ un partición de n, sea $\sigma \in S_n$, y sea $T \in \mathcal{T}(\lambda)$. Con la operación $(\sigma T)(i,j) = \sigma(T(i,j))$ tenemos que S_n actúa transitivamente en $\mathcal{T}(\lambda)$.

Como ejemplo de esta actuación tenemos la siguiente figura

$$(24)(135)(76)\ \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 4 & 2 & 6 & 1 \\ \hline 7 & 3 \\ \cline{1-2} 5 \\ \cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 4 & 7 & 3 \\ \hline 6 & 5 \\ \cline{1-2} 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Figura 4.1: Producto de la permutación (24)(135)(76) con un llenado de forma (4,2,1).

Definición 4.5. Sean $P_1, \ldots, P_m \subseteq [n]$, decimos que $P = (P_1, \ldots, P_m)$ es una **partición** de $[n]$ si $\bigsqcup_{i=1}^{m} P_i = [n]$ y para toda $i \in [m]$ se tiene $P_i \neq \emptyset$. Cabe aclarar que como notación, usamos el simbolo «$\bigsqcup$» para representar una unión agena. Por ejemplo, en este caso representa que $P_i \cap P_j = \emptyset$ para toda $i, j \in [m]$ distintas.

Si $\{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq [n]$ y $\sigma \in S_n$, definimos $\sigma\{u_1, \ldots, u_k\} = \{\sigma(u_1), \ldots, \sigma(u_k)\}$.

Observación 4.6. S_n actúa en el conjunto de particiones de $[n]$, es decir, si $P = (P_1, \ldots, P_m)$ es una partición y $\sigma \in S_n$ entonces

$$\sigma(P_1, \ldots, P_m) = (\sigma P_1, \ldots, \sigma P_m).$$

Definición 4.7. Al estabilizador de una partición P lo denotamos como S_P. Recordemos que éste es un subgrupo de S_n.

Definición 4.8. Dada una composición de n, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, definimos el **grupo de Young** $S_\alpha = S_{\alpha_1} \times \ldots \times S_{\alpha_m}$. Entonces S_α puede verse como el estabilizador de la partición $(P_1, \ldots, P_m)$ donde para toda i

$$P_i = \{(\sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j) + 1, (\sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j) + 2, \ldots, (\sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j) + \alpha_i\}.$$

Por ejemplo $S_3 \times S_5 \times S_2$ es subgrupo de S_{10} el cual es estabilizador de la partición $(\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6, 7, 8\}, \{9, 10\})$. Es decir, permuta los primeros 3 números, luego los siguientes cinco, y los últimos dos.

Observación 4.9. Si tomamos una composición $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ de n y la ordenamos en forma decreciente entonces obtendremos una partición λ. Así $S_\alpha \cong S_\lambda$, es decir, los grupos de Young los podemos clasificar bajo isomorfia usando sólo particiones.

Observación 4.10. Si $P = (P_1, \ldots, P_m)$ es una partición de $[n]$ tal que $|P_1| = \alpha_1, \ldots, |P_m| = \alpha_m$ entonces $S_P \cong S_\alpha$ donde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Por lo tanto S_n/S_α es un S_n-conjunto, así $\mathbb{C}[S_n/S_\alpha]$ es un S_n-módulo.

Definición 4.11. Al carácter de $\mathbb{C}[S_n/S_\alpha]$ lo denotaremos como ϕ^α.

Corolario 4.12. *Sean P y Q dos particiones de $[n]$. Si existe $\sigma \in S_m$ tal que $Q = \sigma P$ entonces*

$$S_Q = \sigma S_P \sigma^{-1}.$$

Demostración. Es debido a la Proposición 2.6. $\square$

4.2. Módulos de Specht

Definición 4.13. Diremos que dos llenados $T, U \in \mathcal{T}(\lambda)$ son equivalentes si y sólo si para cada i las entradas del renglon i-ésimo de T son las mismas que las de U (posiblemente en otro orden). Esta relación es de equivalencia, así a la clase de quivalencia de T la denotaremos como $[T]$ y la llamaremos **tabloide**.

Definición 4.14. Al conjunto de tabloides de forma λ lo denotamos como $\mathcal{RT}(\lambda)$.

Observación 4.15. Si $\lambda \vdash n$ entonces S_n actúa transitivamente en $\mathcal{RT}(\lambda)$ de la siguiente manera

$$\sigma[T] = [\sigma T].$$

Habría que verificar que esta operación está bien definida, pero efectivamente así es. Además por la Proposición 2.30 se tiene que el espacio vectorial $\mathbb{C}[\mathcal{RT}(\lambda)]$ (ver Subsección 2.1.3) es un S_n- módulo, más aún es un módulo en el cual la actuación es revolver la base. A este módulo lo denotaremos como M^λ.

Definición 4.16. Dado un llenado T, hay dos grupos importantes, uno de ellos es el estabilizador de $[T]$ en la actuación anterior al cual denotaremos como $R(T)$, y el otro es el grupo $C(T)$ que revuelve las entradas dejándolas invariantes por columnas. A estos grupos se les conoce como **grupo por renglones** y **grupo por columnas** de T. Es claro que $R(T)$ no depende del representante, es decir, dos tabloides $T, U \in \mathcal{T}(\lambda)$ son equivalentes si y sólo si $R(T) = R(U)$.

Por ejemplo los llenados

$$\mathrm{T} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 3 \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad\qquad \mathrm{U} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

son equivalentes, así $R(T) = R(U) = \langle (35), (124), (12) \rangle$. Los grupos por columnas son $C(T) = \{(45)(23), (45), (23), (1)\}$ y $C(U) = \{(23)(15), (23), (15), (1)\}$.

Lema 4.17. *Para todo $T \in \mathcal{T}(\lambda)$ se tiene que $R(T) \cong S_\lambda$ y $C(T) \cong S_{\lambda'}$.*

Proposición 4.18. *Sea $T \in \mathcal{T}(\lambda)$, y sea $\sigma \in S_{|\lambda|}$ entonces $R(\sigma T) = \sigma R(T)\sigma^{-1}$ y $C(\sigma T) = \sigma C(T)\sigma^{-1}$.*

Demostración. La primera igualdad es debido a la Proposición 2.6. Para la segunda igualdad notemos que las clases las pudimos haber pensando en columnas en lugar de renglones y entonces $C(T)$ sería un estabilizador, así que por la misma proposición que antes se tiene la segunda igualdad. $\square$

Observación 4.19. Por ser esta operación una actuación se tiene que para cualquier $T \in \mathcal{T}(\lambda)$, $O([T]) \cong S_n/R(T)$ como S_n-conjuntos. Del Lema 4.17 y del hecho que la actuación es transitiva se sigue que $\mathcal{RT}(\lambda)$ y S_n/S_λ son S_n-conjuntos isomorfos, por esto y de la Observación 2.96 se tiene

$$M^\lambda = \mathbb{C}[\mathcal{RT}(\lambda)] \cong \mathbb{C}[S_n/S_\lambda] \cong \mathrm{Ind}_{S_\lambda}^{S_n}(\mathbb{I}).$$

Definición 4.20. Para cada llenado T de forma una partición de n, definimos los siguientes vectores pertenecientes al módulo regular $\mathbb{C}[S_n]$

$$a_T = \sum_{\sigma \in R(T)} \sigma \qquad b_T = \sum_{\tau \in C(T)} \operatorname{sgn}(\tau)\tau$$

A estos elementos se les conoce como **simetrizadores de Young**.

Recordando la Definición 2.32, podemos introducir el siguiente vector:

Definición 4.21. Para cada llenado T de forma λ, definimos el vector perteneciente a M^λ

$$v_T = b_T \cdot [T] = \sum_{\sigma \in C(T)} \operatorname{sgn}(\sigma)[\sigma T].$$

Definición 4.22. Definimos el **módulo de Specht** como el subespacio de M^λ

$$S^\lambda = \langle \{ v_T \mid T \in \mathcal{T}(\lambda) \} \rangle$$

Proposición 4.23. *S^λ es un $S_{|\lambda|}$-submódulo de M^λ.*

Demostración. Sólo hay que ver que S^λ es cerrado bajo la acción de S_n, para ello basta ver que lo es en los generadores. Sea $\gamma \in S_{|\lambda|}$, y T un tabloide de forma λ, se tiene que

$$\begin{aligned}
\gamma v_T &= \sum_{\sigma \in C(T)} \operatorname{sgn}(\sigma)\gamma[\sigma T] \\
&= \sum_{\sigma \in C(T)} \operatorname{sgn}(\sigma)[\gamma\sigma T] \\
&= \sum_{\sigma \in C(T)} \operatorname{sgn}(\gamma\sigma\gamma^{-1})[\gamma\sigma\gamma^{-1}\gamma T] \\
&= \sum_{\tau \in \gamma C(T)\gamma^{-1}} \operatorname{sgn}(\tau)[\tau\gamma T]
\end{aligned}$$

Por la Proposición 4.18 se sigue que

$$\gamma v_T = \sum_{\tau \in C(\gamma T)} \operatorname{sgn}(\tau)[\tau(\gamma T)] = v_{\gamma T}.$$

□

Proposición 4.24. *El conjunto $\{v_T \mid T \,\text{estándar de forma}\, \lambda\}$ es una base para S^λ. (ver [Fult, p. 88])*

Proposición 4.25. *El número de clases de conjugación de S_n es igual al número de particiones de n.*

Teorema 4.26. *El conjunto $\{S^\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ es un conjunto completo de S_n-módulos irreducibles.*

Recordando que el cardinal de un conjunto completo de irreducibles es igual al número de clases de conjugación y por la Proposición 4.25, sólo basta verificar que los S^λ son irreducibles y no isomorfos entre sí. Más adelante daremos una prueba de que no son isomorfos entre sí usando caracteres. Para desmotrar que son irreducibles se necesitan otros resultados previos que se pueden encontrar en [Fult, p. 86,87].

4.3. El anillo de representaciones

Dentro de las representaciones podemos referirnos al conjunto de las clases de isomorfía de los G-módulos finitamente generados.

Definición 4.27. Diremos que dos S_n-módulos V y U están relacionados si y sólo si $V \cong U$. Esta relación es de equivalencia, entonces podemos hablar de las clases de equivalencia, así $[V]$ denota la clase a la que pertenece V.

Definición 4.28. Al conjunto de clases de los S_n-módulos se le denota

$$E(S_n) = \{[V] \,|\, V \,\mathrm{es}\, S_n - \mathrm{módulo\,y}\dim(V) < \infty\}.$$

Definición 4.29. Definimos

$$F(S_n) = \{[V \oplus W] - [V] - [W] \,|\, V, W \,\mathrm{son}\, \mathrm{S_n}{-}\mathrm{módulos\,y}\dim(V), \dim(\mathrm{W}) < \infty\}$$

Definición 4.30. Al grupo $\langle E(S_n)\rangle \,/\, \langle F(S_n)\rangle$ se le conoce como **grupo de Grothendieck de** S_n y se le denota $Gr(S_n)$. Si consideramos al conjunto completo de irreducibles $\mathcal{I} = \{S^\lambda \,|\, \lambda \vdash n\}$ entonces lo podemos ver como el $\mathbb{Z}$-módulo libre $Gr(S_n) = \oplus_{\lambda \vdash n}\mathbb{Z}[S^\lambda]$.

Definición 4.31. Definimos el anillo graduado $Gr = \oplus_{n=0}^{\infty} Gr(S_n)$ con la operación

$$[V] \cdot [W] = \left[\mathrm{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}}(V \otimes W)\right]$$

donde V es un S_n-módulo y W un S_m-módulo.

Observación 4.32. Esta operación esta bien definida, es asociativa, y conmutativa. Además el módulo trivial de $S_0 = \emptyset$ funciona como neutro.

Proposición 4.33. *Para toda partición* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ *se tiene que*

$$[M^{(\lambda_1)}] \cdot \ldots \cdot [M^{(\lambda_k)}] = [M^\lambda].$$

La prueba de esta proposición se raliza bajo un argumento indutivo, usando algunas propiedades de los modulos iducidos del grupo de permutaciones y la Observación 4.19.

Por la Observación 3.25 tenemos que las h_n's forman una base de Λ. Así si definimos la función $\overline{\varphi} : \{h_n \,|\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \longrightarrow Gr$ tal que $\overline{\varphi}(h_n) = [M^{(n)}]$ y la extendemos a toda Λ tendremos entonces una función $\varphi : \Lambda \longrightarrow Gr$ la cual por la Proposición 4.33 resulta ser un homomorfismo de anillos.

Teorema 4.34. *El homomorfismo φ es biyectivo. Además para toda partición λ $\varphi(s_\lambda) = [S^\lambda]$. (Para entrar en detalle ver [Fult, p. 91])*

Gracias a este Teorema y a los Corolarios 3.32 y 3.16 tenemos lo siguiente:

Corolario 4.35 (Regla de Young)**.** *Para cualquier partición λ tenemos la igualdad*

$$M^\lambda \cong S^\lambda \oplus_{\lambda \lhd \mu} (S^\mu)^{\oplus K\mu\lambda}.$$

Corolario 4.36 (Regla de Littlewood-Richardson)**.** *Para cualesquiera particiones $\lambda \vdash n$ y $\mu \vdash m$ se da*

$$[S^\lambda] \cdot [S^\mu] = \sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu}[(S^\nu)],$$

es decir

$$\mathrm{Ind}^{S_{n+m}}_{S_n \times S_m} \left(S^\lambda \otimes S^\mu\right) \cong \oplus_{\nu \vdash n+m} \left(S^\nu\right)^{\oplus c^\nu_{\lambda,\mu}}.$$

4.4. Anillo de caracteres

En la Sección 2.3.1 vimos que el conjunto de funciones de clase $Cl(G)$ de un grupo G, es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, con una base $\mathcal{C}(G) = \{\chi_1, \ldots, \chi_l\}$ (los caracteres irreducibles de G). Podemos restringir los coeficientes a $\mathbb{Z}$ y así tomar el conjunto

$$R(G) = \{\sum_i z_i\chi_i \mid z_1, \ldots, z_l \in \mathbb{Z}\}$$

Con esto tenemos entonces que $R(G)$ es un grupo abeliano libre generado por $\mathcal{C}(G)$, es decir, $R(G) = \mathbb{Z}\chi_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}\chi_l$. Así $Gr\,(S_n) \cong R\,(S_n)$ como grupo abeliano.

Definición 4.37. A los caracteres de los módulos S^λ y M^λ los denotaremos como χ^λ y ϕ^λ respectivamente. Cabe recalcar que esta notación coincide con la Definición 4.11 gracias a la Observación 4.19

Observación 4.38. De la Proposición 2.54 y de la regla de Young se sigue que

$$\phi^\lambda = \chi^\lambda + \sum_{\lambda \lhd \mu} K_{\mu\lambda}\chi^\mu.$$

Observación 4.39. Ahora tomemos $\mathcal{C}(S_n) = \{\chi^\lambda \mid \lambda \vdash n\}$, y el conjunto $R(S_n)$. Del Corolario 2.57 tenemos que todo carácter de S_n pertenece a $R(S_n)$. Con esto todo elemento en $R(S_n)$ es de la forma φ, $-\varphi$, o $\varphi - \psi$, donde φ y ψ son caracteres de S_n. Los que son de la segunda o tercera forma son llamados **caracteres virtuales**.

Definición 4.40. Definimos el **anillo de caracteres** como el anillo graduado $R = \oplus_{n=0}^\infty R(S_n)$ con la operación

$$\chi^\lambda \bullet \chi^\mu = \sum_{\nu \vdash |\lambda|+|\mu|} c^\nu_{\lambda,\mu}\chi^\nu$$

extendida a cualesquiera elementos.

Observación 4.41. R y Gr son anillos isomorfos. Y enn cierto sentido resulta más cómodo trabajar con R ya que no depende de representantes. Además, en R tenemos definido un producto interno para cada sumando $R(S_n)$.

Capítulo 5

Coeficientes de Kronecker

Un problema fundamental en la teoría de representaciones de grupos es obtener la descomposición en módulos irreducibles del producto tensorial de dos módulos. Este problema ha sido estudiado para diversos grupos y diversos módulos. Nuestro propósito será estudiarlo para los modulos irreducibles del grupo S_n.

Definición 5.1. Sean χ^λ y χ^μ dos caracteres irreducibles de S_n. Lo que nos interesa conocer son los coeficientes que aparecen en la suma

$$\chi^\lambda \otimes \chi^\mu = \sum_{\nu \vdash n} g(\lambda, \mu, \nu) \chi^\nu .$$

A dichos coeficientes se les conoce como **coeficientes de Kronecker**.

Definición 5.2. Sea $\lambda = (1^{b_1}, 2^{b_2}, \ldots, n^{b_n})$ partición de n, definimos:

1.- La clase de conjugación $c_\lambda \subseteq S_n$ como el conjunto de todas las permutaciones con estructura cíclica según λ, es decir, con b_1 uniciclos, b_2 biciclos, ..., b_n n-ciclos.

2.- El número $z_\lambda = \prod_{i \in [n]} i^{b_i} b_i!$.

Usando técnicas básicas de combinatoria es posible deducir que $|c_\lambda| = n!/z_\lambda$.

Gracias al Lema 2.67 se tiene la igualdad

$$g(\lambda, \mu, \nu) = \left\langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \chi^\nu \right\rangle . \tag{5.1}$$

Recordemos que toda permutación $\sigma \in S_n$ es conjugada a σ^{-1}; por lo tanto $\chi^\nu(\sigma) = \chi^\nu(\sigma^{-1})$. De esto y de la ecuación 5.1 obtenemos la siguiente fórmula para calcular $g(\lambda,\mu,\nu)$.

$$\begin{aligned}
g(\lambda,\mu,\nu) &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\chi^\lambda\otimes\chi^\mu(\sigma)\chi^\nu(\sigma^{-1})\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}\chi^\lambda(\sigma)\chi^\mu(\sigma)\chi^\nu(\sigma)\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{\lambda\vdash n}|c_\lambda|\chi^\lambda(\sigma)\chi^\mu(\sigma)\chi^\nu(\sigma)\\
&= \sum_{\lambda\vdash n}\frac{1}{z_\lambda}\chi^\lambda(\sigma)\chi^\mu(\sigma)\chi^\nu(\sigma)
\end{aligned}$$

Esta fórmula no es funcional ya que para valores que no son muy grandes de n el cálculo resulta bastante extenso, incluso para algunas computadoras. Es por eso que se ha tratado de buscar una manera distinta de calcularlos. Además, estos coeficientes aparecen en otras áreas como Química y Física, por lo cuál han sido objeto de estudio durante mucho tiempo.

Como primer comentario cabe mencionar que los coeficientes de Kronecker generalizan a los coeficientes de Littlewood-Richardson, los cuales a su vez generalizan a los números de Kostka. Para esto último hay una construcción combinatoria, es decir, usando tablas de Young es posible obtener los números de de Kostka a apartir de los coeficientes de Littlewood-Richardson.

Hasta la fecha de impresión de esta tesis no se ha conocido manera combinatoria de calcular los coeficientes de Kronecker, por lo que la manera de mostrar que estos generalizan a los de LR es laboriosa y extensa, sólo enunciaremos el procedimiento a seguir sin demostrar por qué funciona.

Lema 5.3. *Sean $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_r)$, $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_p)$, y $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_q)$ particiónes tales que $c^\nu_{\lambda,\mu}>0$. Definimos $n=\nu_1+|\nu|$ y definimos $\overline{\lambda}=(n-|\lambda|,\lambda_1,\dots,\lambda_r)$, $\overline{\mu}=(n-|\mu|,\mu_1,\dots,\mu_p)$, y $\overline{\nu}=(n-|\nu|,\nu_1,\dots,\nu_q)$. Entonces $c^\nu_{\lambda,\mu}=g(\overline{\lambda},\overline{\mu},\overline{\nu})$.*

5.1. El Lema de Cauchy-Frobenius

Proposición 5.4. *Sea α una composición entonces $\langle\phi^\alpha,1\rangle=1$.*

Antes de demostrar este hecho necesitamos otros resultados. Consideremos a G un grupo finito, y a X un G-conjunto finito.

Definición 5.5. Dado $g\in G$ denotamos $X^g=\{x\in X\mid gx=x\}$, y $\#\mathcal{O}(X)$ al número de órbitas de X.

Lema 5.6 (Fórmula de Cauchy Frobenius)**.** *Si X es un G-conjunto finito entonces*

$$\#\mathcal{O}(X)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|.$$

Este resultado también es conocido como el Lema de Burnside y puede encontrarse en [Br] y diversos libros de combinatoria.

Definición 5.7. Sea X es un G-conjunto. Denotamos por ϕ^X al carácter del G-módulo $\mathbb{C}[X]$.

Proposición 5.8. *Sea $g \in G$, y X un G-conjunto, entonces $\phi^X(g) = |X^g|$.*

Demostración. Por definición $\phi^X(g) = \operatorname{tr}([g]_X)$. Notemos que $[g]_X$ es una matriz de permutación, así que los unos que aparecen en la diagonal son justo los elementos de X que deja fijos g bajo la actuación. □

Proposición 5.9. *Sea X un G-conjunto y $\mathit{1}$ es el carácter trivial de G, entonces $\left\langle \phi^X, \mathit{1} \right\rangle = \#\mathcal{O}(X)$.*

Demostración. Por definición del producto interno y de la Proposición 5.8 tenemos

$$\begin{aligned} \left\langle \phi^X, \mathit{1} \right\rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi^X(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|. \end{aligned}$$

Ahora de la fórmula de Cauchy Frobenius tenemos que $\left\langle \phi^X, \mathit{1} \right\rangle = \#\mathcal{O}(X)$, que es lo que queríamos. □

Corolario 5.10. *Sea X un S_n-conjunto transitivo entonces $\left\langle \phi^X, \mathit{1} \right\rangle = 1$.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de la proposición anterior y del hecho que la actuación es transitiva. □

Como consecuencia de este corolario tenemos la Proposición 5.4.

Definición 5.11. Notemos para toda $\sigma \in S_n$ y $c \in \mathbb{C}$ podemos definir el producto $\sigma c = \operatorname{sgn}(\sigma)$c. Es facil ver que esta operación es una actuación lineal de S_n en $\mathbb{C}$; por lo tanto $\mathbb{C}$ es un S_n-módulo con esa actuación. A este módulo se le conoce como **módulo alternante** y juega un papel importante en la teoría. Al carácter del módulo alternante lo llamaremos **carácter alternante** y lo denotaremos como ε.

Antes del siguiente resultado recordemos que el grupo alternante A_n es el subgrupo de S_n que consta de todas la permutaciones pares.

Proposición 5.12. *Consideremos X un S_n-conjunto transitivo entonces*

$$\left\langle \phi^X, \varepsilon \right\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si existe}\, \sigma \,\text{impar en}\, S_n \,\text{tal que}\, X^\sigma \neq \emptyset \\ 1 & \text{si para todo}\, \sigma \,\text{impar en}\, S_n \,\text{se tiene}\, X^\sigma = \emptyset \end{cases}$$

Demostración. Sabemos que $\langle \phi^X, \varepsilon \rangle$ es un entero no negativo, además de la definición de este producto interno y del Corolario 5.10 tenemos

$$\begin{aligned} \langle \phi^X, \varepsilon \rangle &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in A_n} |X^\sigma| - \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n/A_n} |X^\sigma| \\ &\leq \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} |X^\sigma| = 1. \end{aligned}$$

Ahora, si existe un σ impar tal que $X^\sigma \neq \emptyset$ la desigualdad es estricta, en otro caso se tiene la igualdad. □

Observación 5.13. Ahora tomemos $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ una composición débil de n. De la actuación en la Observación 4.6 tenemos que

$$S_n/S_\alpha \cong \{P = (P_1, \ldots, P_m) \,|\, [n] = \bigsqcup_{j=1}^{m} P_j \text{ y } |P_i| = \alpha_i\}.$$

Queremos ver que pasa con $\langle \phi^\alpha, \varepsilon \rangle$. Notemos que si α tiene una entrada mayor o igual que 2 entonces existe $P = (P_1, \ldots, P_m)$ tal que algún P_i tiene más de un elemento, digamos k y r. Por lo tanto $(S_n/S_\alpha)^{(k\,r)} \neq \emptyset$, así por la proposición anterior $\langle \phi^\alpha, \varepsilon \rangle = 0$. Con esto tenemos también que $\langle \phi^\alpha, \varepsilon \rangle = 1$ sólo cuando α tiene puros unos y ceros en sus entradas.

5.2. Matrices

Nuestro objetivo en las siguientes dos secciones será estudiar cierto tipo de matrices, la relación que estas tienen con las tablas de Young y los caracteres del grupo simétrico. Empezaremos con una definición general y ejemplificaremos con matrices de dos dimensiones. Finalmente en la sección del Teorema de Snapper daremos aplicaciones de éste para relacionar las matrices de nuestro interés con el producto interno de ciertos caracteres.

Para nuestros fines consideraremos solamente matrices con entradas en los enteros no negativos.

Definición 5.14. Sea A una matriz de tamaño $n_1 \times \ldots \times n_k$ con entradas $a_{j_1 \ldots j_k}$, y sea $X = [n_1] \times \ldots \times [n_k]$. Para toda $i \in [k]$ definimos el i-ésimo **1-márgen** de A como la composición débil

$$\alpha_i = \left(\sum_{(j_1,\ldots,j_k) \in X \ t.q. \ j_i = 1} a_{j_1 \ldots j_k}, \ldots, \sum_{(j_1,\ldots,j_k) \in X \ t.q. \ j_i = n_i} a_{j_1 \ldots j_k} \right).$$

Notemos que aquí α_i denota una composición débil. También observemos que los 1-márgenes de una matriz nos dan la sumas de las entradas dejando una coordenada fija. Esto lo podemos pensar como la suma que nos dan todos los «hiperplanos de la matriz». Por ejemplo si tomamos una matriz de tamaño

$n_1 \times n_2 \times n_3$ sus 1-márgenes serían las composiciones débiles cuyas entradas son las sumas de los planos o rebanas que se generan dejando una coordenada fija. Ver Figura 5.1.

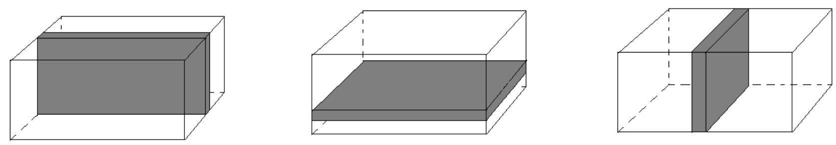

Figura 5.1: Rebanadas de una matriz 3-dimensional para la obtención de las entradas de sus 1-márgenes.

Definición 5.15. Al conjunto de matrices k-dimensionales con entradas en los enteros no negativos y 1-márgenes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ lo denotamos como $M(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$

Definición 5.16. Al número $|M(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)|$ lo denotamos como $m(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Observación 5.17. Si A es una matriz con 1-márgenes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ entonces la suma de las entradas de A es igual a la suma de las entradas de α_i para toda i.

Definición 5.18. Sea $X = [n_1] \times \ldots \times [n_k]$, definimos $M^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ como el conjunto

$$\{A \in M(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \mid a_{j_1 \ldots j_k} = 0, 1 \text{ para todo } (j_1, \ldots, j_k) \in X\},$$

es decir, las matrices con 1-márgenes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ y entradas unos y ceros. Al tamaño de este conjunto lo denotamos como $m^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

5.2.1. Matrices 2-dimensionales

Un caso interesante y muy visual es el de las matrices 2-dimensionales. Notemos que si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ y $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_c)$ son composiciones débiles de n (aquí α_i y β_i denotan números), los elementos de $M(\alpha, \beta)$ son la matrices cuya suma en el i-ésimo renglón es α_i, y cuya suma en la j-ésima columna es β_j. Por ejemplo si tomamos $\alpha = (5, 1, 2)$ y $\beta = (4, 2, 1, 1)$ entonces las matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pertenecen a $M((5, 1, 2), (4, 2, 1, 1))$.

Observación 5.19. Recordando la correspondencias RSK tenemos que $m(\alpha, \beta)$ es igual al número de parejas de tablas de la misma forma con contenido α y β. Por lo tanto

$$m(\alpha, \beta) = \sum_{\lambda \vdash n} K_{\lambda\alpha} K_{\lambda\beta}.$$

Definición 5.20. Definimos la **matriz de Kostka** K_n como la matriz cuadrada cuya entrada en $a_{i,j} = K_{\lambda\mu}$ donde λ es el i-ésimo término en el orden lexicográfico inverso de particiones, y μ es el j-ésimo término. Por ejemplo:

$$K_4 = \begin{array}{cccccc} & (4) & (3,1) & (2,2) & (2,1,1) & (1^4) \\ (4) & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ (3,1) & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ (2,2) & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ (2,1,1) & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ (1^4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Observación 5.21. Dado que $K_{\lambda\lambda} = 1$, las entradas de la diagonal de la matriz K_n son 1's. Además $K_{(n)\mu}$ es siempre 1 por lo que las entradas del primer renglón también son puros unos. Por último notemos que las entradas de la última columna corresponden a los $K_{\lambda(1^n)}$'s, es decir, al número de tablas estándar para cada partición λ.

Observación 5.22. Notemo que si α y β son composiciones de n, y λ y μ son particiones que tienen las mismas entradas que α y β ordenadas en forma decreciente respectivamente, entonces existe una biyección entre $M(\alpha,\beta)$ y $M(\lambda,\mu)$ la cual esta dada permutando columas y renglones. Por lo tanto $m(\alpha,\beta) = m(\lambda,\mu)$.

De esta última observación y de la Observación 5.19 tenemos que las entradas de la matriz $K_n^\tau K_n$ (K_n^τ denota la matriz transpuesta) son los números $m(\alpha,\beta)$'s.
Ahora analicemos que ocurre con $m^*(\alpha,\beta)$.

Definición 5.23. Sean α y β composiciones de n tal que $l(\alpha) = r$ y $l(\beta) = c$, y sea $A \in M^*(\alpha,\beta)$. Diremos que (i,j) es un **hueco** de A si $0 < i \leq r$, $0 < j < c$, y existe $j < h \leq c$ tal que la entrada $a_{i,j} = 0$ y $a_{i,h} = 1$.

De igual manera que con $m(\alpha,\beta)$, basta analizar sólo el caso cuando α y β son particiones.

Definición 5.24. Sea λ una partición de n, y sea μ una partición de n posiblemente con algunas entradas 0. Una **matriz de Young** es una matriz $A \in M^*(\lambda,\mu)$ que no tiene huecos. Notemos estas matrices se ven como «diagramas de Young». Un ejemplo de dichas matrices son las siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observación 5.25. Notemos que si λ es una partición de n entonces la única matriz en $M^*(\lambda,\lambda')$ es una matriz de Young. Por lo tanto $m^*(\lambda,\lambda') = 1$. Además, si μ es partición de n tal que $\mu \neq \lambda'$ y $m^*(\lambda,\mu) > 0$ entonces $m^*(\lambda,\mu) \geq 2$. Esto debido a que si $A \in M^*(\lambda,\mu)$ entonces tiene un hueco, digamos (i,j), por lo tanto existe $h > j$ tal que $a_{i,h} = 1$. Por ser μ partición, debe existir $i' \neq i$ tal que $a_{i',j} = 1$ y $a_{i',h} = 0$. Si consideramos la matriz A' como la matriz A intercambiando $a_{i',j}$ con $a_{i',h}$, y $a_{i,j}$ con $a_{i,h}$, tenemos que $A' \neq A$ y $A' \in M^*(\lambda, \mu)$.

$$A = \begin{array}{cccccc} & & \vdots & & \vdots & \\ i & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ & & \vdots & & \vdots & \\ i' & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ & & \vdots & & \vdots & \\ & & j & & h & \end{array} \qquad A' = \begin{array}{cccccc} & & \vdots & & \vdots & \\ i & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ & & \vdots & & \vdots & \\ i' & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ & & \vdots & & \vdots & \\ & & j & & h & \end{array}$$

Esto prueba el siguiente lema:

Lema 5.26. *Sean λ y μ particiones, se tiene que $m^*(\lambda, \mu) = 1$ si y sólo si $\mu = \lambda'$.*

Definición 5.27. A la única matriz en $M^*(\lambda, \lambda')$ la denotamos como $X(\lambda)$.

Definición 5.28. Sea $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ una partición, un **cambio** de λ es una partición $T_{ij}\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_i - 1, \ldots, \lambda_j + 1, \ldots, \lambda_l)$.

El siguiente resultado puede encontrarse en [MO, C. 2B]; la prueba que damos esta basada en la demostración que aparece en dicho libro.

Proposición 5.29. *Sean λ y μ particiones de n, entonces $\lambda \trianglerighteq \mu$ si y sólo si existe una sucesión finita de particiones $\lambda = \overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \ldots, \overline{\lambda_s} = \mu$ tal que para toda $i \in [s-1]$ $\overline{\lambda_{i+1}}$ es un cambio de $\overline{\lambda_i}$.*

Demostración. $\Leftarrow]$ Para el si. Es claro de la definición que en general si tenemos $T_{ij}\lambda$ un cambio de λ entonces $\lambda \trianglerighteq T_{ij}\lambda$. Por lo tanto $\overline{\lambda_i} \trianglerighteq \overline{\lambda_{i+1}}$ para toda $i \in [s-1]$.

$\Rightarrow]$Veamos el sólo si. Supongamos que $\lambda \neq \mu$ pues de lo contrario el resultado es trivial. Por la Observación 3.7 tenemos que $r = l(\lambda) \leq l(\mu) = c$. Consideremos $\lambda = (\lambda_1 \ldots, \lambda_r, \ldots, \lambda_c)$ donde $\lambda_k = 0$ para $k > r$. Sea $i = \max\{t \mid \lambda_t > \mu_t\}$, notemos que $i < c$ puesto que $\sum_{l=1}^{i} \lambda_l > \sum_{l=1}^{i} \mu_l$, y consideremos $j = \min\{t \mid i < t \,\mathrm{y}\, \lambda_t < \mu_t\}$ el cual debe existir ya que $\sum_{l=1}^{c} \lambda_l = \sum_{l=1}^{c} \mu_l = n$. Por la elección que hicimos de i y j se tiene que $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ y $\lambda_{j-1} > \lambda_j$ por lo tanto $T_{ij}\lambda$ es un cambio de λ al cual llamaremos $\overline{\lambda_2}$. Por la primera implicación que demostramos tenemos que $\lambda \trianglerighteq \overline{\lambda_2}$. Ahora como para toda $i < k < j$ $\lambda_k = \mu_k$, se sigue que $\overline{\lambda_2} \trianglerighteq \mu$. Si $\overline{\lambda_2} = \mu$ hemos terminado, en otro caso aplicamos el mismo método a $\overline{\lambda_2}$ para obtener $\overline{\lambda_3}$. Este proceso en algún momento termina obteniendo así el resultado. ∎

Teorema 5.30 (Gale-Ryser)**.** *Sean λ y μ particiones de n, entonces*

$$m^*(\lambda, \mu) > 0 \,\text{si y sólo si}\, \lambda' \trianglerighteq \mu.$$

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que $m^*(\lambda,\mu)>0$, entonces existe $A\in M^*(\lambda,\mu)$. Intercambiemos todos los huecos de A hasta obtener una matriz de Young, a saber $X(\lambda)$. Debido al cambio que hicimos en los huecos se tiene que para toda j, el número de unos en $X(\lambda)$ que hay hasta la columna j es mayor o igual al número de unos que hay en A hasta la columna j. Por lo tanto para toda j $\sum_{i=1}^{j}\lambda'_i \geq \sum_{i=i}^{j}\mu_i$.

$\Leftarrow\rfloor$Sabemos que $m^*(\lambda,\lambda')=1$, además por la Observación 3.7 tenemos que $l(\lambda')\leq l(\mu)$ por lo que podemos tomar la matriz de Yong $X(\lambda)$ y agregarle $l(\mu)-l(\lambda')$ columnas de ceros obteniendo una matiz de tamaño $l(\lambda)\times l(\mu)$, llamemos a esta nueva matriz A_1. Por la Proposición 5.29 se tiene que existe una sucesión de cambios $\lambda'=\overline{\lambda_1},\overline{\lambda_2},\ldots,\overline{\lambda_s}=\mu$. Ahora recursivamente para toda $l(\mu)\geq k\geq 2$ definimos A_k como sigue: Sabemos que $\overline{\lambda_k}=T_{pq}\overline{\lambda_{k-1}}$, entonces tomemos algún i tal que en A_{k-1} las entradas $a_{ip}=1$ y $a_{iq}=0$ he intercambiémoslas. A la matriz obtenida es a la que llamaremos A_k. Al final del proceso habremos obtenido una matriz $A_s\in M^*(\lambda,\mu)$. $\square$

Este teorema fue dado por H. J. Ryser en [Ry]. Aunque con anterioridad el profesor David Gale había encontrado un resultado más general de forma independiente [Ga].

Observación 5.31. Notemos que si tomamos una matriz $A\in M(\lambda,\mu)$ y la transponemos entonces $A^\tau\in M(\mu,\lambda)$. Como la función que a cada matriz le asocia su transpuesta es una función biyectiva, podemos concluir que para cualesquiera dos particiones λ y μ de n se dan las igualdad $m(\lambda,\mu)=m(\mu,\lambda)$ y $m^*(\lambda,\mu)=m^*(\mu,\lambda)$. Por lo tanto el Teorema de Gael-Ryser queda simétrico, es decir, $m^*(\lambda,\mu)>0$ si y sólo si $\mu'\trianglerighteq\lambda$.

5.3. Teorema de Snapper

Esta sección esta basada en [Sn] y en notas tomadas de un seminario impartido por Ernesto Vallejo.

En el Capítulo 4 vimos que S_n actúa sobre cualquier espacio vectorial de dimensión finita permutando coordenadas. Esto puede verse aún más general.

Definición 5.32. Para cualquier conjunto X y cualquier $n\in\mathbb{N}$ definimos

$$X^n := \{(x_1,\ldots,x_n)\,|\,\forall i\, x_i\in X\}$$

Observación 5.33. Sea X un conjunto, S_n actúa en X^n de la siguiente manera

$$\sigma(x_1,\ldots,x_n)=(x_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,x_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Definición 5.34. Sea X un conjunto, definimos el **peso** de $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)\in X^n$ como la función $w_X(\mathbf{a}):X\longrightarrow\mathbb{N}$ tal que

$$w_X(\mathbf{a})(x)=|\{i\,|\,\pi_i(\mathbf{a})=x\}|.$$

Aquí π_i es la proyección en la i-ésima coordenada. El peso cuenta cuantas veces aparece cada x como entrada en $\mathbf{a}$.

A partir de aquí sólo nos enfocaremos en conjuntos finitos.

Observación 5.35. Sea X un conjunto finito. Dos elementos $\mathbf{a}$,$\mathbf{b} \in X^n$ pertenecen a la misma órbita si y sólo si $w_X(\mathbf{a}) = w_X(\mathbf{b})$.

Definición 5.36. Sea $X = \{x_1, \dots, x_l\}$, para cualquier $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ composición débil de n de longitud l, definimos la **órbita de tipo** α:

$$\mathcal{O}_X(\alpha) = \{\mathbf{a} \in X^n \mid w_X(\mathbf{a})(x_i) = \alpha_i\}.$$

Observación 5.37. Notemos que si α es una composición entonces para cualquier $\mathbf{a} \in \mathcal{O}_X(\alpha)$, el estabilizador $(S_n)_{\mathbf{a}}$ es isomorfo a S_α como S_n-conjunto. Por lo tanto $S_n/S_\alpha \cong \mathcal{O}_X(\alpha)$.

Gracias a la Observación 4.9 tenemos que existe una única partición λ tal que $S_\alpha \cong S_\lambda$, por lo tanto $\mathbb{C}[S_n/S_\alpha] \cong \mathbb{C}[S_n/S_\lambda]$. Así ϕ^α es igual al carácter ϕ^λ de M^λ.

Hay dos funtores en la categoría de conjuntos finitos que están relacionados y nos llevarán a la demostración del teorema de esta sección.

Definición 5.38. Para cualquier conjunto finito X y cualquier $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$A^n(X) \coloneqq \{f : X \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \sum_{x \in X} f(x) = n\}$$

Este nuevo conjunto también puede pensarse como el conjunto de multiconjuntos con elementos en X de tamaño n donde $f(x)$ nos indica cuantas veces aparece x en el multiconjunto. En caso de que X tenga una numeración, es decir, $X = \{x_1, \dots, x_l\}$, es posible pensar a $A^n(X)$ como el conjunto de composiciones débiles de n donde a cada función f la asociamos con $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_l))$. Por ejemplo si tomamos $X = \{a, b, c, d\}$, $n = 9$, y la función f tal que $f(a) = 3$, $f(b) = 0$, $f(c) = 2$, y $f(d) = 4$, entonces $f \in A^9[X]$ y esta puede ser vista como el multiconjunto $\{a, a, a, c, c, d, d, d, d\}$ y como la composición $(3, 0, 2, 4)$.

Definición 5.39. Sean X y Y conjuntos finitos y sea $g : X \longrightarrow Y$ una función, definimos

- $A^n(g) : A^n(X) \longrightarrow A^n(Y)$ tal que $A^n(g)(f)(y) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} f(x)$.
- $g^n : X^n \longrightarrow Y^n$ tal que $g^n(x_1, \dots, x_n) = (g(x_1), \dots, g(x_n))$.

Proposición 5.40. *$A^n()$ y $()^n$ son funtores de la categoría de conjuntos finitos en ella misma.*

Demostración. Hay que probar que respetan la composición e identidades. Primero veámoslo para $A^n()$. Sea $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ la función identidad de un conjunto finito X, por definición se tiene que para toda $x \in X$, $A^n(\mathrm{id})(f)(x) =$

$\sum_{x' \in \mathrm{id}^{-1}(x)} f(x')$, por lo tanto $A^n(\mathrm{id}) = \mathrm{id}_{A^n(X)}$. Ahora, sean $g : X \longrightarrow Y$ y $h : Y \longrightarrow Z$ funciones, se tiene que

$$\begin{aligned} A^n(h \circ g)(f)(z) &= \sum_{x \in (h \circ g)^{-1}(z)} f(x) \\ &= \sum_{y \in h^{-1}(z)} \sum_{x \in g^{-1}(y)} f(x) \\ &= A^n(h)(A^n(g)(f))(z) \end{aligned}$$

por lo tanto $A^n(h \circ g) = A^n(h) \circ A^n(g)$.

Ahora veamos qeu $()^n$ es funtor. Tomemos la función identidad id_X, entonces para cualquier $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$, $\mathrm{id}_X^n(x_1, \ldots, x_n) = (\mathrm{id}_X(x_1), \ldots, \mathrm{id}_X(x_n)) = (x_1, \ldots, x_n)$ por lo que $\mathrm{id}_X^n = \mathrm{id}_{X^n}$. Ahora sean g y h funciones como antes; tenemos que

$$\begin{aligned} (h \circ g)^n(x_1, \ldots, x_n) &= (h \circ g(x_1), \ldots, h \circ g(x_n)) \\ &= (h(g(x_1)), \ldots, h(g(x_n))) \\ &= h^n(g(x_1), \ldots, g(x_n)) \\ &= h^n(g^n(x_1, \ldots, x_n)). \end{aligned}$$

por lo que $(h \circ g)^n = h^n \circ g^n$. $\square$

Observación 5.41. Para toda $\mathbf{a} \in X^n$, $w_X(\mathbf{a}) \in A^n(X)$. Es decir, w_X es una función que va de X^n a $A^n(X)$.

Lo que w_X hace es olvidar el orden de los elementos de $\mathbf{a}$. Con el ejemplo de antes $X = \{a, b, c, d\}$, $n = 9$ y $\mathbf{a} = (a, c, a, d, d, a, d, c, d) \in X^9$, tenemos que $w_X(\mathbf{a})$ es igual a f del mismo ejemplo, a la cual le podemos asosiar el multiconjunto $\{a, c, a, d, d, a, d, c, d\}$ que es igual a $\{a, a, a, c, c, d, d, d, d\}$.

Si tenemos que X es un conjunto numerado, es decir, $X = \{x_1, \ldots, x_l\}$, podemos identificar a $A^n(X)$ con las órbitas de X^n usando la Definición 5.36.

Proposición 5.42. *La función $w_{()}$ es una transformación natural de los funtores $()^n$ y $A^n()$. O sea que para cualesquiera X y Y conjuntos finitos, y toda función $g : X \longrightarrow Y$*

$$A^n(g) \circ w_X = w_Y \circ g^n.$$

Demostración. Sean $\mathbf{a} \in X^n$ y $y \in Y$; por una parte tenemos

$$[A^n(g) \circ w_X(\mathbf{a})](y) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} w_X(\mathbf{a})(x) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} |\{i \mid \pi_i(\mathbf{a}) = x\}|.$$

Por otro lado

$$[w_Y \circ g^n(\mathbf{a})](y) = w_Y(g^n(\mathbf{a}))(y) = |\{i \mid \pi_i(g^n(\mathbf{a})) = y\}|.$$

Notemos que $\pi_i(g^n(\mathbf{a})) = y$ si y sólo si $g(\pi_i(\mathbf{a})) = y$ por lo tanto los términos del lado derecho de las igualdades son iguales. $\square$

Observación 5.43. Sea $X = X_1 \times \ldots \times X_k$, y sea $\alpha_i \in A^n(X_i)$, podemos pensar al conjunto

$$\{\alpha \in A^n(X) \,|\, \forall i\, A^n(\pi_i)(\alpha) = \alpha_i\}$$

como el conjunto de matrices enteras $M(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

Por ejemplo si tomamos $k = 2$, $X_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ y $X_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ y consideramos $X = X_1 \times X_2$ y las funciones $\alpha_1 : X_1 \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\alpha_2 : X_2 \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $\alpha_1(x_1) = 5$, $\alpha_1(x_2) = 1$, $\alpha_1(x_3) = 2$, $\alpha_2(y_1) = 4$, $\alpha_2(y_2) = 2$, $\alpha_2(y_3) = 1$ y $\alpha_2(y_4) = 1$, entonces las funciones $\alpha : X_1 \times X_2 \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ que están en el conjunto son aquellas que cumplen:

1. $\sum_{j=1}^{4} \alpha(x_i, y_j) = \alpha_1(x_i)$ para toda $i \in [3]$,
2. $\sum_{i=1}^{3} \alpha(x_i, y_j) = \alpha_2(x_j)$ para toda $j \in [4]$.

Con esto podemos pensar a α como una matriz de 3×4 tal que su entrada $a_{ij} = \alpha(x_i, x_j)$ para toda $i \in [3]$ y toda $j \in [4]$.

Esto mismo puede hacerse para cualquier k por lo que la frase inicial de la observación cobra sentido. Por lo tanto al conjunto $M(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ lo podemos considerar tanto como un conjunto de matrices, como uno de funciones, de composiciones o de multiconjuntos.

Observación 5.44. Sea $X = X_1 \times \ldots \times X_k$ un conjunto finito. La función $f : X^n \longrightarrow X_1^n \times \ldots \times X_k^n$ tal que $f(\mathbf{a}) = (\pi_1^n(\mathbf{a}), \ldots, \pi_k^n(\mathbf{a}))$, es un homomorfismo de S_n-conjuntos ya que cada π_i^n lo es. Además esta función es claramente biyectiva pues sólo reacomoda las coordenadas.

Proposición 5.45. *Sea $X = X_1 \times \ldots \times X_k$ un conjunto finito, y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ composiciones de n. Tomemos $\cup_\alpha \mathcal{O}(\alpha) \subseteq X^n$ donde la unión corre en los $\alpha \in M(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ y tomemos $\mathcal{O}(\alpha_1) \times \ldots \times \mathcal{O}(\alpha_k) \subseteq X_1^n \times \ldots \times X_k^n$. La siguiente función es un isomorfismo de S_n-conjuntos*

$$\bigcup\nolimits_{\alpha \in M(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)} \mathcal{O}(\alpha) \longrightarrow \mathcal{O}(\alpha_1) \times \ldots \times \mathcal{O}(\alpha_k)$$
$$\mathbf{a} \mapsto (\pi_1^n(\mathbf{a}), \ldots, \pi_k^n(\mathbf{a}))$$

Demostración. Hay que verificar varias cosas. Primero veamos que esta bien definida. Sea $\alpha \in M(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ y sea $\mathbf{a} \in \mathcal{O}(\alpha)$, entonces $w_X(\mathbf{a}) = \alpha$, luego de la Proposición 5.42 se sigue que $w_{X_i} \circ \pi_i^n(\mathbf{a}) = A^n(\pi_i) \circ w_X(\mathbf{a}) = A^n(\pi_i)(\alpha) = \alpha_i$, así $\pi_i^n(\mathbf{a}) \in \mathcal{O}(\alpha_i)$, esto para toda $i \in [k]$.

Observemos que la función en órbitas no es más que la función f de la Observación 5.44 restringida a $\bigcup_{\alpha \in M(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)} \mathcal{O}(\alpha)$, por lo que hereda ser monomorfismo. Sólo nos queda ver que es suprayectiva. Sean $\mathbf{a_i} \in \mathcal{O}(\alpha_i)$ para cada $i \in [k]$, fijémonos en $\mathbf{a}$ tal que $f(\mathbf{a}) = (\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_k})$, queremos ver que $\mathbf{a} \in \bigcup_{\alpha \in M(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)} \mathcal{O}(\alpha)$, es decir, $w_X(\mathbf{a}) \in M(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Esto es así ya que por la Proposición 5.42 $A^n(\pi_i) \circ w_X(\mathbf{a}) = w_{X_i} \circ \pi_i^n(\mathbf{a}) = w_{X_i}(\mathbf{a_i}) = \alpha_i$ para toda $i \in [k]$. Lo cual concluye la demostración. $\square$

Corolario 5.46 (Teorema de Snapper)**.** *Sea* $X = X_1 \times \ldots \times X_k$ *un conjunto finito, y para cada* $i \in [k]$ *sea* $\alpha_i \in A^n(X_i)$*. Entonces*

$$\sum_{\alpha \in M(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} \phi^{\alpha} = \phi^{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \phi^{\alpha_k}.$$

Demostración. Notemos que $\mathbb{C}[\cup_{\alpha \in M(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} S_n/S_\alpha] \cong \mathbb{C}[\Pi_{i=1}^k S_n/S_{\alpha_i}]$, esto debido a la Obsevación 5.37 y al Lema anterior. Ahora la Observación 2.33 y la Proposición 2.75 nos da que

$$\mathbb{C}[\cup_{\alpha \in M(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} S_n/S_\alpha] \cong \oplus_{\alpha \in M(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} \mathbb{C}[S_n/S_\alpha]$$
$$\mathbb{C}[\Pi_{i=1}^k S_n/S_{\alpha_i}] \cong \mathbb{C}[S_n/S_{\alpha_1}] \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}[S_n/S_{\alpha_k}]$$

de donde se sigue el resultado. □

5.3.1. Aplicaciones a matrices

Corolario 5.47. *Sean* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *composiciones de* n*, entonces*

$$m(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \langle \phi^{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \phi^{\alpha_k}, \mathit{1} \rangle .$$

Demostración. Gracias al Teorema de Snapper y a la Proposición 5.4 tenemos

$$\begin{aligned} \langle \phi^{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \phi^{\alpha_k}, \mathit{1} \rangle &= \left\langle \sum_{\alpha \in M(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} \phi^{\alpha}, \mathit{1} \right\rangle \\ &= \sum_{\alpha \in M(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} \langle \phi^{\alpha}, \mathit{1} \rangle \\ &= \sum_{\alpha \in M(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} 1 \\ &= m(\alpha_1, \ldots, \alpha_k). \end{aligned}$$

□

Corolario 5.48. *Sean* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *composiciones de* n*, entonces*

$$m^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \langle \phi^{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \phi^{\alpha_k}, \varepsilon \rangle .$$

Demostración. Del Teorema de Snaper y de la Observación 5.13 se sigue que

$$\begin{aligned} \langle \phi^{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \phi^{\alpha_k}, \varepsilon \rangle &= \left\langle \sum_{\alpha \in M(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} \phi^{\alpha}, \varepsilon \right\rangle \\ &= \sum_{\alpha \in M(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} \langle \phi^{\alpha}, \varepsilon \rangle \\ &= \sum_{\alpha \in M^*(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} 1 \\ &= m^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_k). \end{aligned}$$

□

Si nos restringimos al caso de matrices 2-dimensionales el Corolario 5.47 nos dice que si α y β son composiciones débiles de n entonces

$$m(\alpha,\beta) = \left\langle \phi^\alpha \otimes \phi^\beta, \mathit{1} \right\rangle = \left\langle \phi^\alpha, \phi^\beta \right\rangle.$$

Definición 5.49. Denotemos por ψ^λ al carácter $\phi^\lambda \otimes \varepsilon$.

Del Corolario 5.48 tenemos que $m^*(\lambda,\mu) = \left\langle \phi^\lambda \otimes \phi^\mu, \varepsilon \right\rangle$ el cual es igual a $\left\langle \phi^\lambda, \phi^\mu \otimes \varepsilon \right\rangle$. Ahora si tomamos $\mu = \lambda'$, del Lema 5.26 tenemos que

$$1 = \left\langle \phi^\lambda, \phi^{\lambda'} \otimes \varepsilon \right\rangle = \left\langle \phi^\lambda, \psi^{\lambda'} \right\rangle.$$

Por lo tanto ϕ^λ y $\psi^{\lambda'}$ sólo tienen una componente en común.

Proposición 5.50. *La componente común entre ϕ^λ y $\psi^{\lambda'}$ es χ^λ. Además*

$$\left\langle \phi^\lambda, \chi^\lambda \right\rangle = 1 = \left\langle \psi^{\lambda'}, \chi^\lambda \right\rangle.$$

Esta proposición es importante pues en ella se basan los siguientes dos resultados. No daremos la demostración ya que se requiere seguir un camino largo y nos desviaríamos del objetivo. La idea se apoya en el uso de matrices de Kostka y otras técnicas como resolución de ecuaciones matriciales.

Proposición 5.51. *Sean λ y μ particiones de n tales que $\left\langle \phi^\lambda, \chi^\mu \right\rangle > 0$ entonces $\lambda \trianglelefteq \mu$.*

Demostración. De la proposición anterior tenemos $\left\langle \psi^{\mu'}, \chi^\mu \right\rangle = 1$, por lo que de la hipótesis y del Corolario 5.48 se sigue

$$m^*(\lambda,\mu') = \left\langle \phi^\lambda \otimes \phi^{\mu'}, \varepsilon \right\rangle = \left\langle \phi^\lambda, \phi^{\mu'} \otimes \varepsilon \right\rangle = \left\langle \phi^\lambda, \psi^{\mu'} \right\rangle > 0.$$

Usando el Teorema de Gale-Ryser y la simetría observada en 5.31 concluimos que $\mu = (\mu')' \trianglerighteq \lambda$. □

Teorema 5.52. *Sean λ y μ particiones de n tales que $\chi^\lambda = \chi^\mu$, entonces $\lambda = \mu$.*

Demostración. Por la Proposición 5.50 obtenemos lo siguiente

$$1 = \left\langle \phi^\lambda, \chi^\lambda \right\rangle = \left\langle \phi^\lambda, \chi^\mu \right\rangle > 0 \tag{5.2}$$

$$1 = \left\langle \phi^\mu, \chi^\mu \right\rangle = \left\langle \phi^\mu, \chi^\lambda \right\rangle > 0 \tag{5.3}$$

Ahora de la Proposición 5.51 concluimos que $\mu \trianglerighteq \lambda$ y $\lambda \trianglerighteq \mu$, por lo tanto $\lambda = \mu$. □

Observemos que la Proposición 5.51 y el Teorema 5.52 dan una versión alternativa la demostración de la Regla de Young y a una parte de la demostración del Teorema 4.26 respectivamente, usando solamente caracteres.

5.4. Multitablas, coeficientes de Kronecker, y matrices

En esta última sección daremos dos resultados importantes. Generalizaremos la correspondencia RSK, y daresmo una aproximación combinatoria a los coeficientes de Kronecker. Para culminar con los resultados de esta tesis me he basado en el artículo [AV].

Observación 5.53. Sean λ, μ y ν particines de n, del Crorolario 5.47 tenemos que

$$m(\lambda,\mu,\nu) = \left\langle \phi^{\lambda} \otimes \phi^{\mu} \otimes \phi^{\nu}, 1 \right\rangle.$$

Ahora de la regla de Young se sigue

$$m(\lambda,\mu,\nu) = \left\langle (\sum_{\alpha \trianglerighteq \lambda} K_{\alpha\lambda}\chi^{\alpha}) \otimes (\sum_{\beta \trianglerighteq \mu} K_{\beta\mu}\chi^{\beta}) \otimes (\sum_{\gamma \trianglerighteq \nu} K_{\gamma\nu}\chi^{\gamma}), 1 \right\rangle$$

Por la linealidad del producto tensorial mencionada en la Observación 2.72 concluimos que

$$\begin{aligned} m(\lambda,\mu,\nu) &= \sum_{\alpha \trianglerighteq \lambda} K_{\alpha\lambda} \sum_{\beta \trianglerighteq \mu} K_{\beta\mu} \sum_{\gamma \trianglerighteq \nu} K_{\gamma\nu} \left\langle \chi^{\alpha} \otimes \chi^{\beta} \otimes \chi^{\gamma}, 1 \right\rangle \\ &= \sum_{\alpha \trianglerighteq \lambda, \beta \trianglerighteq \mu, \gamma \trianglerighteq \nu} K_{\alpha\lambda} K_{\beta\mu} K_{\gamma\nu} \left\langle \chi^{\alpha} \otimes \chi^{\beta}, \chi^{\gamma} \right\rangle \\ &= \sum_{\alpha \trianglerighteq \lambda, \beta \trianglerighteq \mu, \gamma \trianglerighteq \nu} K_{\alpha\lambda} K_{\beta\mu} K_{\gamma\nu} g(\alpha,\beta,\gamma). \end{aligned}$$

Esta igualdad es parecida a la iguladad de la Observación 5.19 la cual fue obtenida apartir de RSK. Uno puede preguntarse si esa biyección puede extenderse a ternas de tablas y matrices 3-dimensionales, pero debido a que los coeficientes de Kronecker aparecen en la fórmula anterior la respuesta es que no. Pero existe otra manera de relacionar al conjunto $M(\lambda,\mu,\nu)$ con tablas.

Notemos que si tenemos una matriz 3- dimensional de tamaño $k \times l \times m$, podemos «partirla» en m matrices de tamaño $k \times l$, es decir, podemos tomarnos las rebanadas fijando la tercera coordenada. Con esto se tiene la siguiente propiedad.

Lema 5.54. *Sean λ, μ, y $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$ particiones del mismo número natural n. Existe una biyección entre el conjunto $M(\lambda,\mu,\nu)$ y las m-tuplas de matrices 2-dimensionales con entradas enteras no negativas $(A^{(1)}, \ldots, A^{(m)})$ cuyos 1-margenes $((\lambda(1),\mu(1)), \ldots, (\lambda(m),\mu(m)))$ cumplen que*

$$\sum_{b=1}^{m} \lambda(i) = \lambda \qquad \sum_{b=1}^{m} \mu(i) = \mu$$

y tales que la suma de las entradas de $A^{(m)}$ es igual a ν_d para toda $d \in [m]$.

Demostración. La biyección esta dada por la siguiente construcción: sea $A \in M(\lambda, \mu, \nu)$, si $A = (a_{ijk})$, para toda $d \in [m]$ definimos la matriz 2-dimensional de tamaño $l(\lambda) \times l(\mu)$, $A^{(d)} = (a^{(d)}_{ij})$ tal que $a^{(d)}_{ij} = a_{ijd}$ para toda i y toda j. Y viceversa dada la tupla de matrices $(A^{(1)}, \ldots, A^{(m)})$ que cumplan las condiciones de la proposicion podemos considerar la matriz $A = (a_{ijd})$ donde $a_{ijk} = a^{(d)}_{ij}$. $\square$

Observación 5.55. Usando la correspondencia RSK tenemos que las m- tupla de matrices 2-dimencionales con entradas enteras no negativas $(A^{(1)}, \ldots, A^{(m)})$ estan en relación biyectiva con parejas de m-tuplas de tablas semiestandar $((P_1, \ldots, P_m), (Q_1, \ldots, Q_m))$ tales que para toda $i \in [m]$, P_i y Q_i tienen la misma forma. Además si usamos la biyección anterior con $(A^{(1)}, \ldots, A^{(m)})$ y obtenemos $A \in M(\lambda, \mu, \nu)$ entonces la suma del contenido de las P_i's es igual a μ y la suma del contenido de las Q_j's es igual a λ, más aún el tamaño de la forma de P_i es igual a ν_i para cualquier i.

Definición 5.56. Si $\lambda(1), \lambda(2), \ldots, \lambda(p)$ son particiones tales que $\emptyset = \lambda(0) \subset \lambda(1) \subset \lambda(2) \subset \ldots \subset \lambda(p) = \lambda$, y para toda $i \in [p]$, T_i es una tabla semiestándar LR (recordar Definición 1.54) de forma $\lambda(i)/\lambda(i-1)$. Entonces diremos que $T = (T_1, T_2, \ldots, T_p)$ es una **multitabla LR**. Con esto podemos pensar que T es una tabla de forma λ (no necesariamente semiestándar) tal que la restrición a $\lambda(i)/\lambda(i-1)$ es igual a T_i para toda $i \in [p]$. Así entonces diremos que la multitabla T tiene **forma** λ.

Definición 5.57. Diremos que una multitabla $T = (T_1, T_2, \ldots, T_q)$ es de **tipo** $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_q)$ si para toda $i \in [q]$ se cumple que $|\lambda(i)/\lambda(i-1)| = \nu_i$. Y si T_i tiene contenido $\rho(i)$ diremos que T tiene **contenido** $(\rho(1), \rho(2), \ldots, \rho(q))$. Notemos que ν es una composición de $|\lambda|$.

Por ejemplo tomemos la tabla T como sigue

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	2	2	2	1	2	2	
3	3	2	1	3	3					
1	2	3	2	2	3					
2	1	4	4	3						
1	1	1	3	4						
2	2									

Esta tabla T se divide en cuatro tablas LR , la tabla T_1 (tabla blanca), la tabla T_2 (tabla café), la tabla T_3 (tabla verde), y la tabla T_4 (tabla amarilla).

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	2	2	2	1	2	2	
3	3	2	1	3	3					
1	2	3	2	2	3					
2	1	4	4	3						
1	1	1	3	4						
2	2									

Aquí T tiene contenido $((3,2,2),(4,4,1),(5,4,2,2),(7,5,3,1))$ y es de tipo (5,8,12,16).

Observación 5.58. Sea $T = (T_1, \ldots, T_p)$ una multitabla LR. Si $\lambda(1)$ es la forma de T_1 es claro que $\lambda(1)$ es una partición, más aún $T_1 = T_{\lambda(1)}$.

Definición 5.59. Al número de multitablas con contenido $(\rho(1), \ldots, \rho(q))$ y de forma λ lo denotamos como $c^{\lambda}_{(\rho(1),\ldots,\rho(q))}$.

Observación 5.60. Notemos que del Corolario 1.56 se sigue que si ν es partición entonces

$$\sum_{\delta,\gamma,\alpha,\beta} c^{\lambda}_{\delta,\gamma} c^{\delta}_{\alpha,\beta} = \sum_{\beta,\alpha,\gamma} c^{\lambda}_{(\beta,\alpha,\gamma)}. \tag{5.4}$$

Por ejemplo si dejamos fija $\lambda = (9,8,7,6,5,4,3)$ y variamos el resto de los parametros obtenemos varias tablas pero todas ellas partidas en tres tablas LR. Una de ellas podria ser la siguiente

1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	2	1	2	2	
3	1	2	3	1	3	3		
1	2	3	1	2	4			
3	4	1	3	4				
4	1	2	5					
2	2	3						

donde la parte blanca es de forma y contenido $\alpha = (3,2,1)$; la parte anaranjada y blanca es de forma $\delta = (6,5,4,3,2,1)$ y la parte anaranjada es una tabla sesgada LR de contenido $\beta = (6,4,3,2)$; toda la tabla es de forma λ y la parte roja es LR de contenido $\gamma = (8,6,4,2,1)$.

Esto se puede generalizar a cualquier número de particiones como sigue

$$\sum c^{\lambda}_{(\rho(1),\ldots,\rho(q))} = \sum c^{\lambda}_{\mu(q-1)\rho(q)} c^{\mu(q-1)}_{\mu(q-2)\rho(q-1)} \cdots c^{\mu(3)}_{\mu(2)\rho(3)} c^{\mu(2)}_{\rho(1)\rho(2)} \tag{5.5}$$

donde la primera suma corre sobre las particiones $\rho(i)$'s , y la segunda suma corre sobre las particiones $\rho(i)$'s y $\mu(j)$'s.

Observación 5.61. Recordemos que si χ^{α} y χ^{β} son caracteres irreducibles de S_m y S_n respectivamente entonces $\chi^{\alpha} \times \chi^{\beta}$ es un carácter irreducible de $S_m \times S_n$. Ahora del Corolario 4.36 tenemos que

$$\mathrm{Ind}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}} \left(\chi^{\alpha} \times \chi^{\beta}\right) = \chi^{\alpha} \bullet \chi^{\beta} = \sum_{\lambda \vdash m+n} c^{\lambda}_{\alpha,\beta} \chi^{\lambda}$$

Por lo tanto

$$\left\langle \mathrm{Ind}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}} \left(\chi^{\alpha} \times \chi^{\beta}\right), \chi^{\lambda} \right\rangle_{S_{m+n}} = c^{\lambda}_{\alpha,\beta};$$

de esta igualdad y usando el Teorema de reciprocidad de Frobenius 2.102 se obtiene

$$\left\langle \chi^{\alpha} \times \chi^{\beta}, \mathrm{Res}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}} \left(\chi^{\lambda}\right) \right\rangle_{S_m \times S_n} = c^{\lambda}_{\alpha,\beta},$$

lo cual nos dice que

$$\operatorname{Res}^{S_{m+n}}_{S_m\times S_n}(\chi^\lambda) = \sum_{\alpha\vdash m,\, \beta\vdash n} c^\lambda_{\alpha,\beta}(\chi^\alpha\times\chi^\beta) \tag{5.6}$$

Proposición 5.62. *Sean $n_1,\ldots,n_q$ números naturales y sea $\lambda\vdash\sum_{i=1}^q n_i$ entonces*

$$\operatorname{Res}^{S_{n_1+\ldots+n_q}}_{S_{n_1}\times\ldots\times S_{n_q}}(\chi^\lambda)=\sum c^\lambda_{(\rho(1),\ldots,\rho(q))}\left(\chi^{\rho(1)}\times\ldots\times\chi^{\rho(q)}\right)$$

donde la suma corre en los $\rho(1)\vdash n_1,\ldots,\rho(q)\vdash n_q$.

Demostración. Si $q=2$ el resultado es precisamente la ecuación (5.6) de la observación anterior. Ahora el resultado se sigue indcutivamente tomando $q>2$. Para simplificar la notación haremos el paso inductivo para $q=3$, aunque este funciona de manera análoga para cualquier q arbitrario.

De la Proposición 2.92 obtenemos que

$$\operatorname{Res}^{S_{a+b+c}}_{S_a\times S_b\times S_c}(\chi^\lambda) = \operatorname{Res}^{S_{a+b}\times S_c}_{S_a\times S_b\times S_c}(\operatorname{Res}^{S_{a+b+c}}_{S_{a+b}\times S_c}(\chi^\lambda)).$$

Recurriendo de nuevo a la ecuación (5.6)

$$\operatorname{Res}^{S_{a+b+c}}_{S_{a+b}\times S_c}(\chi^\lambda) = \sum_{\substack{\delta\vdash a+b\\ \gamma\vdash c}} c^\lambda_{\delta,\gamma}(\chi^\delta\times\chi^\gamma).$$

Sustituyendo tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}^{S_{a+b+c}}_{S_a\times S_b\times S_c}(\chi^\lambda) &= \operatorname{Res}^{S_{a+b}\times S_c}_{S_a\times S_b\times S_c}\Big(\sum_{\delta\vdash a+b,\,\gamma\vdash c} c^\lambda_{\delta,\gamma}(\chi^\delta\times\chi^\gamma)\Big)\\
&= \sum_{\substack{\delta\vdash a+b\\ \gamma\vdash c}} c^\lambda_{\delta,\gamma}\operatorname{Res}^{S_{a+b}\times S_c}_{S_a\times S_b\times S_c}(\chi^\delta\times\chi^\gamma)\\
&= \sum_{\substack{\delta\vdash a+b\\ \gamma\vdash c}} c^\lambda_{\delta,\gamma}\operatorname{Res}^{S_{a+b}}_{S_a\times S_b}(\chi^\delta)\times\chi^\gamma.
\end{aligned}$$

Finalmente por hipótesis de inducción lo anterior quedaría como

$$\sum_{\substack{\delta\vdash a+b\\ \gamma\vdash c}} c^\lambda_{\delta,\gamma}\sum c^\delta_{\alpha,\beta}(\chi^\alpha\times\chi^\beta)\times\chi^\gamma = \sum_{\substack{\delta\vdash a+b\\ \gamma\vdash c}} c^\lambda_{\delta,\gamma}\sum c^\delta_{\alpha,\beta}(\chi^\alpha\times\chi^\beta\times\chi^\gamma)$$

y usando la ecuación (5.4) de la Observación 5.60 se tiene el resultado. Como ya dijimos este proceso es análogo para cualquier q, la única diferencia es que hay que usar la ecuación (5.5) de la Observación 5.60 en lugar de la ecuación (5.4). $\square$

Definición 5.63. Sean λ y μ particiones de n y sea ν una composición de n. Llamaremos $\mathrm{LR}(\lambda, \mu; \nu)$ al conjunto de todas las parejas (T, U) de multitablas LR tales que T es de forma λ, U de forma μ, y ambas de tipo ν. Al número de elementos de este conjunto lo denotaremos como $\mathrm{lr}(\lambda, \mu; \nu)$.

Teorema 5.64. *Existe una función biyectiva entre el conjunto de m-tuplas de tablas semiestándar $(P_1, \dots, P_m)$, y las parejas de tablas (P, T) que cumple lo siguiente:*

1. *P y T son de la misma forma, P es semiestándar y T es una multitabla LR.*

2. *Si $\mu(1), \dots, \mu(m)$ son los contenidos de $P_1, \dots, P_m$ respectivamente, y μ es el contenido de P. Entonces $\sum_{i=1}^{m} \mu(i) = \mu$.*

3. *Si $P_1, \dots, P_m$ son de forma $\rho(1), \dots, \rho(m)$ respectivamente, entonces el contenido de T es igual a $(\rho(1), \dots, \rho(m))$.*

Demostración. Primero definamos $P^{(1)} = P_1$ y $T^{(1)} = T_{\rho(1)}$. Para $k \in [m] \backslash \{1\}$ definimos recursivamente $P^{(k)}$ y $T^{(k)}$ como sigue: Usando la correspondecia RSK tomamos el arreglo $\begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_j \\ v_1 & \dots & v_j \end{pmatrix}$ correspondiente a la pareja $(P_k, T_{\rho(k)})$, entonces $P^{(k)} := (\dots(P^{(k-1)} \leftarrow v_1) \leftarrow \dots) \leftarrow v_j$; en un diagrama sesgado cuya forma sea misma que la de $P^{(k)} \backslash P^{(k-1)}$ colocamos las $\underline{u_i}$'s; u_1 va en el primer cuadro que se agrego en la inserción, u_2 va en el segundo cuadro que se agrego en la inserción, en general u_t va en el cuadro que se agrego en la t-ésima inserción. Al final tomamos $P = P^{(m)}$ y $T = (T^{(1)}, \dots, T^{(m)})$. Por construcción P y T son de la misma forma, P tiene contenido $\sum_{i=1}^{m} \mu(i)$, cada $T^{(i)}$ tiene contenido $\rho(i)$, y por la Proposición 1.47 cada $T^{(i)}$ es una tabla sesgada LR por lo tanto T es una multitabla LR. Esta función es biyectiva pues realizar el proceso inverso nos da la función inversa. $\square$

Definición 5.65. Sean δ una partición, y γ una composición débil de $|\delta|$. Denotamos por $\mathsf{K}_{\delta\gamma}$ al conjunto de tablas semiestándar de forma δ y contenido γ.

Observación 5.66. Esxiste una función biyectiva entre el conjunto de las parejas de m-tuplas $((P_1, \dots, P_m), (Q_1, \dots, Q_m))$ que satisfacen las condiciones de la Observación 5.55 y el conjunto

$$\bigsqcup_{\alpha \trianglerighteq \lambda, \beta \trianglerighteq \mu} \mathsf{K}_{\alpha\lambda} \times \mathsf{K}_{\beta\mu} \times LR(\lambda, \mu; \nu).$$

Este esta dado por el teorema anterior. Tomamos las parejas (P, T) y (Q, S) que le corresponde a cada tupla y así entonces

$$((P_1, \dots, P_m), (Q_1, \dots, Q_m)) \mapsto (Q, P, (S, T)).$$

Teorema 5.67 (Vallejo-Avella)**.** *Sean λ,μ, y ν particiones de n. Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto $M(\lambda,\mu,\nu)$ y el conjunto*

$$\bigsqcup_{\alpha \trianglerighteq \lambda, \beta \trianglerighteq \mu} \mathsf{K}_{\alpha\lambda} \times \mathsf{K}_{\beta\mu} \times LR(\lambda,\mu;\nu).$$

Demostración. Componemos la biyección del Lema 5.54 con la biyección de la Observación 5.55, y estas a su vez con la biyección de la Observación 5.66. □

Como ejemplo podemos tomar la matriz que bajo la primera biyección nos da

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora si mandamos cada una de estas matrices bajo RSK obtenemos

$$(P_1,Q_1) = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}, \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

$$(P_2,Q_2) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & & \end{array}, \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & & \end{array} \right)$$

$$(P_3,Q_3) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & & & \end{array}, \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & & & \end{array} \right)$$

Entonces usando la segunda biyección tenemos que

$$(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}) \mapsto ((P_1,P_2,P_3),(Q_1,Q_2,Q_3)).$$

Finalmente bajo el Teorema 5.64 tenemos que (P_1,P_2,P_3) y (Q_1,Q_2,Q_3) van a las siguientes parejas respectivamente

$$(P,T) = \left(\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & & & & & & & & \end{array}, \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & & & & & & & & \end{array} \right)$$

$$(Q,S) = \left(\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & & & & & \\ 3 & & & & & & & & & \end{array}, \begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & & & & & \\ 2 & & & & & & & & & \end{array} \right)$$

Por lo tanto la biyección final manda la a matriz a la terna $(Q,P,(S,T))$.
Como consecuencia de este último teorema se tiene lo siguiente:

Corolario 5.68. *Sean* $\lambda,\mu,$ y ν *particiones de n, entonces*

$$m(\lambda,\mu,\nu) = \sum_{\alpha \trianglerighteq \lambda, \beta \trianglerighteq \mu} K_{\alpha\lambda} K_{\beta\mu} \mathrm{lr}(\alpha,\beta;\nu).$$

Si comparamos esta igualdad con la de la Observación 5.53 podremos notar que son muy parecidas. Esto no es coincidencia como veremos a continuación.

Lema 5.69. *Sean* $\lambda,\mu,$ y $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_q)$ *particiones de n entonces*

$$\mathrm{lr}(\lambda,\mu;\nu) = \left\langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \phi^\nu \right\rangle.$$

Demostración. De la Observación 4.19 se tiene la igualdad

$$\left\langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \phi^\nu \right\rangle = \left\langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \mathrm{Ind}_{S_\nu}^{S_n}(\mathit{1}) \right\rangle_{S_n};$$

ahora por el Teorema de reciprocidad de Frobenius 2.102 se sigue que

$$\left\langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \phi^\nu \right\rangle = \left\langle \mathrm{Res}_{S_\nu}^{S_n}(\chi^\lambda \otimes \chi^\mu), \mathit{1} \right\rangle_{S_\nu},$$

y de la Proposición 2.91 obtenemos

$$\begin{aligned} \left\langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \phi^\nu \right\rangle &= \left\langle \mathrm{Res}_{S_\nu}^{S_n}(\chi^\lambda) \otimes \mathrm{Res}_{S_\nu}^{S_n}(\chi^\mu), \mathit{1} \right\rangle_{S_\nu} \\ &= \left\langle \mathrm{Res}_{S_\nu}^{S_n}(\chi^\lambda), \mathrm{Res}_{S_\nu}^{S_n}(\chi^\mu) \right\rangle_{S_\nu}. \end{aligned}$$

Para finalizar, utilizando la Proposición 5.62 y la última igualdad concluimos que

$$\left\langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \phi^\nu \right\rangle = \sum c^\lambda_{(\rho(1),\ldots,\rho(q))} c^\mu_{(\rho(1),\ldots,\rho(q))}$$

donde la suma corre en las tuplas $(\rho(1), \ldots, \rho(q))$ tales que $\rho(i) \vdash \nu_i$ para toda $i \in [q]$. Que es lo que queríamos. □

Teorema 5.70. *Sean λ, μ, y ν particiones de n, entonces*

$$\mathrm{lr}(\lambda, \mu; \nu) = \sum_{\gamma \trianglerighteq \nu} K_{\gamma\nu} g(\lambda, \mu, \gamma).$$

Demostración. Debido al Lema 5.69 y a la regla de Young obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \mathrm{lr}(\lambda, \mu; \nu) &= \left\langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu \otimes \phi^\nu, \mathit{1} \right\rangle \\ &= \left\langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \phi^\nu \right\rangle \\ &= \left\langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \sum_{\gamma \trianglerighteq \nu} K_{\gamma\nu} \chi^\gamma \right\rangle \\ &= \sum_{\gamma \trianglerighteq \nu} K_{\gamma\nu} \left\langle \chi^\lambda \otimes \chi^\mu, \chi^\gamma \right\rangle \\ &= \sum_{\gamma \trianglerighteq \nu} K_{\gamma\nu} g(\lambda, \mu, \gamma). \end{aligned}$$

□

Con este último teorema se ha logrado una aproximación combinatoria para el cálculo de los coeficientes de Kronecker.

Bibliografía

[AV] D. Avella-Alaminos, E. Vallejo, Kronecker products and the RSK correspondence, Discrete Mathematics **312** (2012) 1476-1486.

[Br] R. A. Brualdi, Introductory Combinatorics, Upper Saddle River, New Jersey : Pearson/Prentice Hall 2010.

[Fult] W. Fulton, Young Tableaux With Applications to Representation Theory and Geometry, London Mathematical Society studen text : 35.

[Ga] D. Gale, A theorem of floes in networks, Pacific J. of Math. **7** (1957) 1073-1082.

[JL] G. James, M. Liebeck, Representations and Characters of Groups, Cambridge University Press 1993, 2001.

[Kn] D. E. Knuth, Permutations, Matrices, And Generalized Young Tableaux, Pacific Journal of Mathematics **3** (1970) 709-727.

[MO] A. W. Marshall, I. Olkin, Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications, Academic Press, New York, NY (1979).

[PV] I. Pak, E. Vallejo, Combinatorics and geometry of Littlewood-Richardson cones, European Journal of Combinatorics **26** (2005) 995-1008.

[Ry] H. J. Ryser, Combinatorial properties of matrices of zeros and ones, Canad. J. Math. **9** (1957) 371-377.

[Sn] E. Snapper, Group Characters and Nonnegative Integral Matrices, Journal of Algebra **19** (1971) 520-535.

Índice y lista de símbolos

(G, H)-bimódulo 35
$*$ 7,21
1-márgen 54
$I(\lambda, \mu, \nu)$ 15
$K[X]$ 24
M^λ 46
$R(\lambda, \mu, \nu)$ 15
S_λ^m 18
X^g 52
$[n]$ 7
v_T 47
z_λ 51
$\mu \subseteq \lambda$ 2
$\bigsqcup$ 45

actuación 21
alfabeto A 7
álgebra de grup $K[G]$ 25
algoritmo de inserción 3
anillo
  de caracteres R 49
  de monoide $A[M]$ 18
    de tablas $\mathbb{Z}[(\Gamma, \cdot)]$ 18
  graduado de
    polinomios simétricos homogéneos Λ 42
    S_n-módulos Gr 48
arreglo 12
  lexicográfico 12

base $\mathcal{B}$ 21

cambio $T_{ij}\lambda$ 57
campo K 20
carácter χ_V 29
  alternante ε 53
  del
    módulo
      $\mathbb{C}[S_n/S_\alpha]$ ϕ^α 45
      $\mathbb{C}[X]$ ϕ^X 53
      de Specht χ^λ 49
      M^λ ϕ^λ 49
    producto rensorial $\chi_V \otimes \chi_W$,$\chi_V \times \chi_W$ 34
  inducido $\mathrm{Ind}_H^G(\chi_v)$ 36
  irreducible 29
  reducible 29
  regular χ_{reg} 30
  restringido $\mathrm{Res}_H^G(\chi_V)$ 36
  trivial *1* 29
caracteres virtuales 49
coeficiente de
  Kronecker $g(\lambda, \mu, \nu)$ 51
  Littlewwod-Richardson $c_{\lambda,\mu}^\nu$ 16
completamente reducible 23
composición α,β 38
  débil α, β,γ 38,55,68
concatenación $w \cdot u$ 7
conjugado λ' 3
conjunto
  completo de
    caracteres irreducibles $\mathcal{C}(G)$ 30
    módulos irreducibles $\mathcal{I}$ 27
  de
    funciones de clase $Cl(G)$ 31
    llenados $\mathcal{T}$ 44
      de forma λ $\mathcal{T}(\lambda)$ 44
    órbitas $\mathcal{O}(X)$ 52
    palabras P_A 7
    parejas de multitablas $\mathrm{LR}(\lambda, \mu; \nu)$ 68
    tablas Γ 6,11
      semiestándar $\mathsf{K}_{\delta\gamma}$ 68
  de tabloides $\mathcal{RT}(\lambda)$ 46
  parcialmente ordenado $(P, \leq)$ 1

contenido μ,$(\rho(1), \rho(2), \ldots, \rho(q))$ 15,65
correspondencia R-S-K 13
cuadro C 5

deslizamiento 6
diagrama
de Young D, λ 2
sesgado λ/μ 2

epimorfismo 24
espacio vectorial V 20,21
esquina 4
externa 6
interna 6
estabilizador G_x 21

forma λ/μ 2
fórmula de
Cauchy-Frobenius 52
Pieri 43
regular λ 2
función
de clase 31
multiplicar m_g 21
funtor X^n,g^n ,$A^n(X)$,$A^n(g)$ 58, 59

G-módulo 21
grado 29
grupo G 20
alternante A_n 53
de
caracteres $R(G)$ 49
Grothendieck $Gr(S_n)$ 48
Young S_p,S_α 45
general lineal $GL(V)$ 20
por
columnas $C(T)$ 46
renglones $R(T)$ 46
simétrico S_n 19,44

homomorfismo de módulos ξ 24
hueco 56

ideal I 1
imagen $\mathrm{im}(\xi)$ 24
inserción $T \leftarrow x$,$T \leftarrow w$ 4,8
isomorfismo 24

Knuth 9
equivalente $w \equiv_k w'$ 9

lema de
Burnside 53
inserción 5
transitividad 37
Schur 27
límite inverso Λ^n 42
llenado T 44
longitud $l(\lambda)$ 1

matrices con 1-márgenes fijos $M(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ 55
de unos y ceros $M^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ 55
matriz A 14,54
de
Kostka K_n 56
la función multiplicar $[g]_{\mathcal{B}}$ 21
permutación 14,15
Young $X(\lambda)$ 56,57
módulo
alternante 53
de Specht S^λ 47
derecho 35
inducido $\mathrm{Ind}_H^G(V)$ 36
irreducible I 23,27
izquierdo 35
reducible 23
regular $K[G]$ 25
trivial $\mathbb{I}$ 22
módulos isomorfos $V \cong U$ 24
monoide 6
pláctico $(\Gamma, \cdot)$ 11
monomio asociado a T x^T,x^α 39,40
monomorfismo 24
multitabla LR $T = (T_1, T_2, \ldots, T_p)$ 65

neutro e_G 21,29
notación del carácter$\phi^\lambda \otimes \varepsilon$ ψ^λ 63
núcleo $\ker(\xi)$ 24
número de
Kostka $K_{\lambda\mu}$ 42
matrices con 1-márgenes fijos $m(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ 55
de unos y ceros $m^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ 55

multitablas con contenido fijo $c^{\lambda}_{(\rho(1),\ldots,\rho(q))}$ 66
parejas de multitablas $\mathrm{lr}(\lambda,\mu;\nu)$ 68
números naturales $\mathbb{N}$ 1

operación de Schensted $T \leftarrow x$ 6
órbita de tipo α $\mathcal{O}_X(\alpha)$ 59
órden
de dominación $\mu \trianglelefteq \lambda$ 38
lexicográfico $\beta \leq \alpha$ 38

palabra w,u 7
de
una tabla $w(T)$ 7
Yamanouchi 17
del i-ésimo renglón $w(T_i)$ 7
partición λ,μ,ν,γ,$\lambda(i)$,δ 1,2,15,64,65,66
de
$[n]$ P 45
n $\lambda \vdash n$ 1
vacía $\emptyset$ 1
permutación σ 12,44
peso $w_X(\boldsymbol{a})$ 58
polinomio
de Schur $s_\lambda(x_1,\ldots,x_m)$ 39
simétrico
elemental $e_n(x_1,\ldots,x_m)$,$e_\lambda(x_1,\ldots,x_m)$ 39,40
completo $h_n(x_1,\ldots,x_m)$,$h_\lambda(x_1,\ldots,x_m)$ 39,40
monomial $m_\lambda(x_1,\ldots,x_m)$ 40
polinomios
enteros $\mathbb{Z}[x_1,x_2,\ldots]$ 19,39
con m variables $\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_m]$ 39
simétricos homogeneos Λ^n_m 40
proccedimiento canonico 10
producto
de
carácteres irreducibles $\chi^\lambda \bullet \chi^\mu$ 49,66
tablas $T \cdot U$ 8
tensorial de V y W sobre
G $V \otimes_G W$,$v \otimes_g w$ 35
K $V \otimes W$ 33
interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$,$\langle\cdot,\cdot\rangle_G$ 31
propiedad universal del producto tensorial 33
proyección π,π_j,π_i 26,28,58

rectificación $\mathrm{Rec}(S)$ 11
regla de
Littlewood-Richardson 49
Young 49
representación 20
fiel C_f 22
restricción de un módulo $\mathrm{Res}^G_H(V)$ 36
ruta R 5

simetrizadores de Young a_T,b_T 47

tabla T,U,P,Q 2,7,12,13
canonica T_λ 17
con palabra equivalente a w $\mathcal{T}(w)$ 10
de
inserción $P(w)$ 12
Littlewood-Richardson 18
registro $Q(w)$ 12
Young T 2
estándar 3
sesgada S, V, W 7,10
semiestándar 3
transpuesta T^τ 3
tabloide $[T]$ 46
tamaño de la partición $|\lambda|$ 1
teorema de
Gale-Ryser 57
Mascke 26
Snapper 62
reciprocidad de Frobenius 37
tipo ν 65
transformación
lineal T 20
natural $w_X()$ 60
transformaciones de Knuth 9
traza $\mathrm{tr}(A)$ 28

Yamanouchi 17