



**UNIVERSIDAD MICHOCANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS "MAT.
LUIS MANUEL RIVERA GUTIERREZ"**

Modelos estelares estacionarios en gravedad newtoniana

Tesis que para obtener el título de licenciada en Ciencias Físico
Matemáticas presenta:

Aixa Mirena De La Torre Gálvez

Supervisado por:

Doctor Ulises Nucamendi Gómez
Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH

Morelia, Michoacán
Agosto, 2016

*Dedicado a las estrellas,
en especial a la que siempre está conmigo.*

Agradecimientos

Quiero agradecer a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, por permitirme concluir mis estudios de licenciatura. Al Dr. Ulises Nucamendi, por la paciencia, las herramientas y el tiempo dedicado a la elaboración de este trabajo. A los Drs. Mariano Hernández, Fernando Ramírez, José Antonio Gonzalez y Francisco Astorga, por su disposición y la revisión de este documento.

A mi madre Sonia, por tantos cuidados, por dedicar su tiempo a mi educación y enseñarme a siempre luchar. A mi padre Agustín, por los consejos y la paciencia, por ser un modelo a seguir. A ambos, gracias por todo su cariño y apoyo, por nunca rendirse y permitirme llegar hasta aquí. Gracias a Jesús, a mi Nana y a toda mi familia.

Gracias al personal administrativo y docente de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, al Instituto de Física y Matemáticas y a la Coordinación de la Investigación Científica de la UMSNH, por las facilidades y la amabilidad. También quiero agradecer a mis formadores, porque todos y cada uno de ellos ha dejado una huella en mí.

Dedico a Perla, Paco, Alo, Montse y Josué, este pequeño párrafo para agradecerles por su amistad durante tantos y tantos años. Porque el paso del tiempo no ha logrado derrumbar nuestra amistad y porque esta siga.

Agradezco también a mis compañeros de la facultad y amigos, en especial a Karen, por las oportunidades y los buenos momentos, a Iza, Juan, Misha y Chamo por tantos cursos compartidos y las tardes de pláticas. A Ale, Armando y Angie por preocuparse. A los *hawaiianus*.

Gracias a René, parte fundamental de este logro. Gracias por el apoyo, por tantas enseñanzas, por la comprensión y por tu brillo. Por último, gracias a la vida por permitirme concluir una más de mis metas.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	VI
Abstract	1
Tabla de símbolos	2
1. Introducción	3
2. Fundamentos	6
2.1. Teoría Newtoniana	6
2.2. Ecuaciones de hidrodinámica	8
2.3. Termodinámica clásica.	10
2.4. Ecuación de estado	11
2.5. Cantidades conservadas	12
2.5.1. Conservación de masa	12
2.5.2. Conservación de momento lineal y centro de masa	13
2.5.3. Conservación de Energía	15
2.5.4. Conservación del momento angular.	17
2.6. Ecuación de transporte radiativo	18
3. Modelos estelares con simetría esférica.	20
3.1. Potencial gravitacional	20
3.2. Ecuaciones en equilibrio hidrostático.	21
3.3. Fluido incompresible.	22
3.4. Polítropos	24
3.4.1. Energía potencial gravitacional	26
3.4.2. Solución analítica de la ecuación de Lane-Emden	27
3.5. Esferas isotérmicas	29
3.6. Enanas blancas	30

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	IV
3.7. Ecuación de estado para enanas blancas	32
3.8. Ecuaciones de estructura	35
3.9. Masa de Chandrasekhar	37
4. Solución numérica de las ecuaciones de la hidrostática con simetría esférica	40
4.1. Solución numérica de la ecuación de Lane-Emden	40
4.2. Solución numérica de las ecuaciones para esferas isotérmicas	42
4.3. Enanas blancas	44
5. Conclusiones	47
6. Anexo	49

Índice de figuras

1.1.	Diagrama HR que muestra la cercanía y la luminosidad de las estrellas vistas desde la Tierra. La imagen se puede encontrar en el libro [7] . . .	5
4.1.	Se pueden observar resultados obtenidos para distintos valores de n , aquí se muestra la masa contra el densidad sin dimensiones	41
4.2.	Gráfica que muestra la relación entre la densidad normalizada y el radio normalizado.	41
4.3.	Gráfica que muestra como la densidad sin dimensiones $e^{-\psi}$, decae mientras el radio sin dimensiones aumenta; y la masa reescalada incrementa como función del radio adimensional	43
4.4.	Gráfica que muestra las oscilaciones logarítmicas con amplitud constante. Se grafica $(\frac{1}{2}\xi^2 e^{-\Psi} - 1)\xi^{\frac{1}{2}}$ como función del logaritmo de ξ	43
4.5.	En esta gráfica se muestra la masa de una enana blanca en unidades de masa solar como función del parámetro de densidad central f_c , la masa incrementa con f_c y cuando $f_c \rightarrow \infty$ se observa que la masa se acerca al límite de Chandrasekhar.	45
4.6.	Se puede observar que el radio decrece con el incremento de la masa, y va a cero cuando la masa se acerca al límite de Chandrasekhar.	46

Resumen

En el presente trabajo, analizamos los modelos estelares y resolvemos las ecuaciones de la hidrodinámica con diferentes ecuaciones de estado bajo las condiciones de estaticidad y simetría esférica.

En el capítulo I, se da una breve introducción sobre las estrellas, el porqué es importante su estudio y la utilidad que tienen estos modelos, que aunque son muy sencillos sirven como base para describir modelos más complejos en la evolución estelar.

En el capítulo II, presentamos la deducción de las ecuaciones importantes de la teoría de la gravedad newtoniana y las de la hidrodinámica newtoniana.

En el capítulo III, se estudian los modelos estelares estáticos con simetría esférica, se dan las ecuaciones de estado y algunas soluciones analíticas de las ecuaciones de equilibrio hidrostático y de su respectivo potencial gravitacional.

En el capítulo IV, se presentan los resultados numéricos junto con las gráficas más importantes de las soluciones para las ecuaciones de equilibrio hidrostático.

Finalmente, en la última parte de la tesis se presentan las conclusiones de ésta y el trabajo a realizar en un futuro.

Palabras clave: Astrofísica, ecuaciones de la hidrostática, gravedad newtoniana, enanas blancas, evolución estelar.

Abstract

In the current work we analyse the stellar models and resolve the hydrodynamics equations with different equations of state.

In the first chapter, there is a quick introduction about the stars, we also concern why their study is important and the utility of them, although they're really easy they work as a basis to describe harder models in the stellar evolution.

In the chapter two we introduce the deduction of the most important equations about the newtonian gravity and the ones of hydrostatics equilibrium.

We care about studying stellar models in the third chapter and we give the equations of state and some analytic solutions to the hydrostatic equilibrium equation and the gravitational potential.

In the chapter four we present the numerical results whit the most important graphics which give the solutions to the hydrostatic equilibrium equations.

In the last part of the thesis there are the conclusions.

In the future we are intending to use these stellar models as a basis to build other more complex, and if possible we will move on newtonian theory to the most interesting relativistic case.

Tabla de símbolos

Nombre	Símbolo	Valor ¹	Unidades
Constante gravitacional	G	$6.673(10) \times 10^{-11}$	Nm^2kg^{-2}
Velocidad de la luz	c	$2,99792458 \times 10^8$	ms^{-1}
Constante de Planck	h	$6,62606875(52) \times 10^{-34}$	Js
		$4,13566727(16) \times 10^{-15}$	eVs
Constante de Planck reducida	\hbar	$h(2\pi)^{-1}$	
		$1,054571596(82) \times 10^{-34}$	Js
		$6,58211889(26) \times 10^{-16}$	eVs
Constante de Boltzmann	k	$1,3806503(24) \times 10^{-23}$	JK^{-1}
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$2\pi^5k^4(15c^2h^3)^{-1}$	
		$5,670400(40) \times 10^{-8}$	$Wm^{-2}K^{-4}$
Constante de radiación	a	$4\sigma c^{-1}$	
		$7,565767(54) \times 10^{-16}$	$Jm^{-3}K^{-4}$
Unidad de masa atómica	m_H	$931,494013(37)$	$MeVc^{-2}$
Masa del electrón	m_e	$5,485799110(12) \times 10^{-4}$	m_H
Masa solar	M_\odot	$1,9891 \times 10^{30}$	kg
Radio solar	R_\odot	$6,95508(26) \times 10^8$	m

¹La cantidad entre paréntesis indica la incertidumbre del valor en las dos últimas cifras.

Capítulo 1

Introducción

Una estrella es una esfera de gas en un estado de equilibrio entre la gravedad, que tiende a comprimirla, y la presión del gas, que tiende a expandirla. La atracción gravitacional hace que la nube de gas se contraiga ocupando un volumen cada vez menor. La colisión de las moléculas de esta nube la calientan hasta que se dan las condiciones que permiten la fusión termonuclear. En los procesos de fusión nuclear se libera una cantidad enorme de energía que provoca que el gas se caliente más, que aumenten la presión y temperatura, que haya mayores velocidades en las partículas y que por consiguiente se tenga un mayor índice de reacciones nucleares. La radiación es originada en el núcleo de la estrella y se transporta hacia las capas exteriores, sufriendo en su viaje numerosas absorciones y reemisiones por parte del material estelar. Las estrellas se condensan a partir de gas y de polvo interestelares, los cuales se componen principalmente de hidrógeno [1].

En un contexto apropiado, la teoría de la gravedad de Newton puede ser utilizada para describir modelos estelares simples. Newton creía en la idea de un Universo eterno y estacionario. Esta teoría newtoniana es muy útil para modelar a estrellas que caen en la clasificación de enanas blancas y otras estrellas como el Sol.

El estudio de los politropos se desarrolló a principios del estudio de la estructura estelar, ya que estos nos proporcionan información valiosa sobre la evolución de las estrellas. La motivación proviene de la observación de los gases ideales. Una generalización de este comportamiento se caracteriza por la ecuación de estado politrópica. La naturaleza simple de una estructura politrópica y su correspondencia con algunas estrellas, suministra bases para la incorporación de efectos adicionales (como la rotación). Por lo anterior es que los politropos son una excelente base para la construcción de modelos estelares complejos.

De acuerdo con el diagrama Hertzsprung- Russell, las estrellas se clasifican según

su magnitud luminosa y su color o espectro; la relación entre el color y la temperatura superficial de los astros, está dada por la clase espectral de la estrella.

En el DHR se pueden apreciar cuatro agrupaciones, la primera es la llamada secuencia principal. La secuencia principal se encuentra en el centro del diagrama, esta sección contiene a estrellas frías poco luminosas y estrellas calientes muy luminosas. Las estrellas de esta secuencia son las que utilizan la fusión del hidrógeno en helio como fuente de energía. En las dos zonas de la parte superior derecha, con luminosidades más fuertes se presenta el grupo de las gigantes y las supergigantes. Cuando el Helio del núcleo se ha gastado completamente, la temperatura interior crece, por lo que el Hidrógeno se fusiona alrededor del núcleo, entonces existe expansión de las capas externas, que crecen y se enfrían, este proceso describe a una estrella Gigante. Cuanto más elevada es la masa de una estrella, más grande es la presión de sus capas externas, y más se comprime el núcleo. La temperatura de este último puede entonces alcanzar valores más grandes, permitiendo ponerse en marcha nuevas reacciones. Esta nueva fase de combustión dura todavía mucho menos tiempo que la precedente, y la estrella debe encontrar muy rápidamente una nueva fuente de energía. Así es como va a establecerse una serie de diferentes reacciones nucleares poniendo en marcha elementos cada vez más pesados, esto forma a una supergigante.

El cuarto grupo está situado bajo la secuencia principal, en luminosidades más bajas, esta es la sección que caracteriza a las enanas blancas. Las enanas blancas son estrellas muy pequeñas y de temperatura alta, pero su masa es comparable con la del Sol. Usualmente su radio es del orden de una centésima parte del radio solar, su temperatura de unos 10 000 K y su masa la mitad del Sol; al ser tan pequeñas, su brillo total es también escaso, por lo que son difíciles de observar. Las enanas blancas representan la fase última de la vida de las estrellas similares al Sol. Su densidad llega a ser enorme y por esto se producen efectos físicos complejos. La presión soportada por este tipo de estrellas no viene de ningún proceso de fusión en su centro, sino que proviene de la presión de degeneración, esta presión se debe a la naturaleza cuántica de los fermiones. Por esto, las enanas blancas se encuentran en la parte baja del diagrama HR ya que son excepcionalmente débiles en brillo incluso a pesar de ser muy calientes, y su tamaño es pequeño, como se puede observar en la Figura 1.1.

Es interesante estudiar a las enanas blancas debido a que constituyen el destino de muchas estrellas, incluido nuestro Sol. Por otra parte, las enanas blancas son consideradas laboratorios cósmicos, ya que son propicios para estudiar procesos físicos que no podrían ser estudiados en laboratorios terrestres. Dichas estrellas son objetos extremadamente densos y como consecuencia, los electrones están altamente degenerados, y por ende la mecánica cuántica domina su ecuación de estado.

La hidrodinámica astrofísica típicamente involucra la interacción entre gas y campos de radiación. También en astrofísica los campos magnéticos tienen un rol crucial ya que el

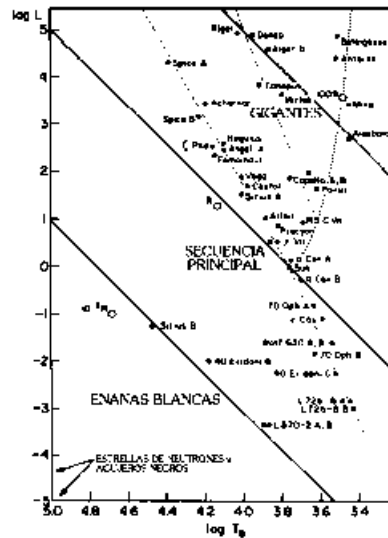


Figura 1.1: Diagrama HR que muestra la cercanía y la luminosidad de las estrellas vistas desde la Tierra. La imagen se puede encontrar en el libro [7]

movimiento del gas puede generar, o al menos, amplificar los campos magnéticos.

En este trabajo, nos enfocaremos en resolver las ecuaciones de equilibrio hidrostático en las que no están involucrados efectos electromagnéticos. Para poder comprender mejor el modelo de las enanas blancas, primero desarrollaremos la teoría del equilibrio hidrostático la cual se aplicará para ecuaciones de estado más simples, que como bien se verá en los siguientes capítulos, son modelos que describen estrellas idealizadas. A partir del desarrollo de estas ecuaciones de equilibrio será más fácil construir el modelo de una enana blanca con gravedad newtoniana.

Capítulo 2

Fundamentos

La estructura de una estrella depende de muchas variables, para un desarrollo detallado se introducen supuestos y aproximaciones. A continuación, se desarrollan las teorías que serán la base para construir las ecuaciones que describan a nuestros modelos estelares en estados de equilibrio gravitacional estacionarios desde el punto de vista de la mecánica clásica newtoniana.

Como sabemos, la teoría Newtoniana no hace una descripción exacta de las leyes de gravitación. Sin embargo, es una teoría que se ajusta de manera apropiada a la descripción de la mayoría de las estrellas, sobre todo en las que estamos interesados.

2.1. Teoría Newtoniana

El objetivo de la gravitación desde el punto de vista de Newton, es calcular la fuerza $\vec{F}(\vec{x})$ sobre una partícula de masa m_s en la posición \vec{x} , que es generada por la atracción gravitacional de una distribución de masa en la posición \vec{x}' , $\rho(\vec{x}')$. La fuerza se dirige de m_s a m , donde m es la masa del cuerpo. El concepto de campo gravitacional es simplemente la forma de describir la región circundante a un centro de fuerza, o fuente del campo gravitacional, dentro de la cual esa fuerza actúa. Dicha zona es un conjunto de valores vectoriales que están ligados a cada punto en el espacio en cada instante en el tiempo; si una partícula de prueba hipotética fuera colocada en algún punto dado en un instante de tiempo específico, esta sentiría una fuerza, cuya magnitud y dirección puedan ser deducidas del valor del campo gravitacional asociado con esa posición y tiempo. Esto es

$$\vec{F}(\vec{x}) = \frac{Gmm_s(\vec{x}' - \vec{x})}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \quad (2.1)$$

Siendo G la constante de gravitación universal, note que la fuerza gravitacional solo depende de la posición, esto es debido a que Newton consideraba un universo estacionario, es decir que no dependía del tiempo, además si consideramos una distribución de masa

continua tenemos

$$d\vec{F}(\vec{x}) = \frac{Gm_s(\vec{x}' - \vec{x})dm}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \quad (2.2)$$

El diferencial de masa, está relacionado con el diferencial de volumen mediante $dm = \rho(\vec{x})dV$, utilizando esto último

$$d\vec{F}(\vec{x}) = \frac{G\rho(\vec{x})dVm_s(\vec{x}' - \vec{x})}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \quad (2.3)$$

$$\vec{F}(\vec{x}) = -m_s\vec{g}(\vec{x}) \quad (2.4)$$

Con $\vec{g}(\vec{x}) \equiv -G \int_{Vol} \frac{(\vec{x}' - \vec{x})}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \rho(\vec{x}') d^3 \vec{x}'$ llamado el campo gravitacional por unidad de masa y \vec{F} es la fuerza por unidad de masa. Definimos ahora el potencial gravitacional $\Phi(\vec{x})$ como

$$\Phi(\vec{x}) = -G \int_V d^3 x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|} \quad (2.5)$$

Esta cantidad nos indica el trabajo por unidad de masa que una fuerza debe realizar para transportar un cuerpo a velocidad constante, desde el infinito, hasta un punto considerado del campo gravitatorio. Usamos que

$$\vec{\nabla}_x \left[\frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|} \right] = \frac{(\vec{x}' - \vec{x})}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \quad (2.6)$$

podemos escribir el campo gravitacional en función del potencial de la siguiente manera,

$$\vec{g}(\vec{x}) = \vec{\nabla}_x \Phi. \quad (2.7)$$

Consideremos la divergencia del campo gravitacional, entonces tenemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{x}) = -G \vec{\nabla}_x \cdot \left[\int_V d^3 \vec{x}' \frac{(\vec{x}' - \vec{x})}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \rho(\vec{x}') \right] \quad (2.8)$$

Y tenemos dos casos, si $\vec{x} \neq \vec{x}'$ la relación se vuelve cero, esto se puede observar de $\vec{\nabla}_x \left[\frac{(\vec{x}' - \vec{x})}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \right] = \frac{-3}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} + \frac{3(\vec{x}' - \vec{x})(\vec{x}' - \vec{x})}{|\vec{x}' - \vec{x}|^5} = 0$. Ahora, cualquier contribución a la integral de la relación proviene de $\vec{x} = \vec{x}'$ y si consideramos el volumen de integración como una esfera pequeña de radio h centrada en ese punto, al ser h muy pequeña la densidad se vuelve constante es decir $\rho(\vec{x}') = \rho(\vec{x})$ por lo que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{x}) = -G\rho(\vec{x})\vec{\nabla}_x \cdot \left[\int_{|\vec{x}' - \vec{x}| \leq h} d^3 \vec{x}' \frac{(\vec{x}' - \vec{x})}{|\vec{x}' - \vec{x}|^3} \right] \quad (2.9)$$

Y usando el teorema de Gauss para la integración obtenemos finalmente que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{x}) = 4\pi G\rho(\vec{x}) \quad (2.10)$$

O bien reemplazando el campo gravitacional en la ecuación (2.10) se puede llegar a la siguiente ecuación

$$\nabla^2 \Phi(\vec{x}) = 4\pi G \rho(\vec{x}) \quad (2.11)$$

Esta relación es conocida como la ecuación de Poisson, la ecuación anterior representa la forma usual de calcular el potencial gravitacional en la región dentro de la cual se encuentra la fuente, o la densidad de materia. De aquí se desprende otra relación importante aplicando el teorema de la divergencia

$$\oint_S d\vec{s} \cdot \vec{\nabla} \Phi = 4\pi G m \quad (2.12)$$

Que es llamada la *Ley de Gauss gravitacional*, en la cual se puede observar que la integral de la componente normal de $\vec{\nabla} \Phi$ sobre cualquier superficie cerrada es igual a $4\pi G$ veces la masa contenida dentro de dicha superficie.[6]

2.2. Ecuaciones de hidrodinámica

En nuestro caso consideraremos que una estrella newtoniana puede modelarse mediante un fluido perfecto de presión $p(\vec{x}, t)$, densidad $\rho(\vec{x}, t)$ y campo de velocidades denotado por $\vec{v}(\vec{x}, t)$. Las ecuaciones que necesitamos para poder describir a la estrella son las ecuaciones de la hidrodinámica, mejor conocidas como las ecuaciones de Navier-Stokes.

La masa de un fluido que está contenido en un volumen arbitrario V acotado por una superficie S está definida por

$$M(t) \equiv \int_V \rho(\vec{x}, t) d^3 x \quad (2.13)$$

Si derivamos la masa con respecto al tiempo

$$\frac{dM(t)}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x}, t) d^3 x \quad (2.14)$$

La masa que fluye hacia afuera a través de un elemento de área $d\vec{s}$ por unidad de tiempo es llamada el flujo de masa y lo denotaremos por $\vec{J} \equiv \rho \vec{v}$, por convención diremos que el elemento de área tiene el sentido normal hacia fuera. Entonces $\rho \vec{v} \cdot d\vec{s}$ es positivo si el fluido está saliendo del volumen y negativo si el flujo es hacia el interior del mismo. La masa total de fluido que sale del volumen por unidad de tiempo es por consiguiente,

$$\int_S \rho(\vec{x}, t) \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad (2.15)$$

Igualando las expresiones tenemos (2.14) y (2.15)

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x}, t) d^3x = - \int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad (2.16)$$

Utilizando el teorema de Stokes podemos convertir una integral de superficie a una integral de volumen, por lo que $\int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) d^3x$, de aquí que podamos escribir (2.16) como,

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x}, t) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right] d^3x = 0. \quad (2.17)$$

Esta expresión debe ser válida para cualquier volumen por lo que de (2.4ref0.5) se deduce que

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x}, t) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.18)$$

Esta relación es conocida como la **ecuación de continuidad**. Por otro lado, en el fluido la fuerza asociada a la presión $p(\vec{x}, t)$ actuando sobre un volumen V acotado por la superficie S es $d\vec{F} = -Pd\vec{s}$ o bien

$$\vec{F} = - \int Pd\vec{s} \quad (2.19)$$

Además consideramos que existen fuerzas externas, tal como la fuerza asociada a un potencial gravitacional $\Phi(\vec{x}, t)$, entonces el diferencial asociado a la fuerza gravitacional se escribe como $d\vec{F}_g = \vec{\nabla}\Phi dm$, según (2.4).

Ahora escribimos la segunda ley de Newton para el fluido

$$dm \frac{d\vec{v}}{dt} = -Pd\vec{s} + dm(\vec{\nabla}\Phi) \quad (2.20)$$

Dividiendo y multiplicando por el diferencial de volumen dV e integrando tenemos

$$\int_V \rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) dV = - \int_S Pd\vec{s} + \int_V \rho \vec{\nabla}\Phi dV \quad (2.21)$$

Usamos ahora el teorema integral de Stokes para que nuestra integral de superficie sea escrita en términos de una integral de volumen, con esta consideración tenemos ahora

$$\int_V \rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) dV = - \int_V \vec{\nabla} P dV + \int_V \rho \vec{\nabla}\Phi dV \quad (2.22)$$

Como esto debe ser válido para cualquier volumen arbitrario, obtenemos

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{\nabla}\Phi \quad (2.23)$$

Esta ecuación es conocida como la **ecuación de Euler**. El análisis realizado es válido sólo en el caso de movimientos de fluidos ideales, es decir para aquellos fluidos cuya viscosidad y conductividad térmica son nulas. Para introducir el intercambio de energía en el fluido, consideremos a continuación las leyes de la termodinámica.

2.3. Termodinámica clásica.

Para un elemento de fluido la primera ley se escribe

$$d\mathcal{E} = \delta Q + \delta W \quad (2.24)$$

En donde \mathcal{E} es la energía interna del fluido, δW es el trabajo realizado en el elemento de fluido y δQ el calor absorbido. Podemos escribir el trabajo como $\delta W = -pd\mathcal{V}$, el signo menos nos indica que el sistema está realizando trabajo sobre el elemento de fluido.

Para la absorción de calor necesitamos considerar el vector de flujo de calor \vec{H} ; el calor que cruza a través de una superficie $d\vec{S}$ por unidad de tiempo se define por $\vec{H} \cdot d\vec{S}$, también consideramos a la energía generada por unidad de masa dentro del elemento de fluido por unidad de tiempo y la definimos con la letra q , además del calor que es transferido por los elementos vecinos de fluido que se escribe como $\vec{\nabla} \cdot \vec{H}$.

Analicemos ahora el calor que es absorbido en la dirección x , si suponemos que el elemento de volumen es cúbico, el calor absorbido en un tiempo dt , está dado por el flujo $H_x(x)$ entrando en la cara x , menos el flujo $H_x(x + dx)$ que sale a $x + dx$ veces en el área A , esto se puede escribir como $-\frac{\partial H_x}{\partial x} A dx$. Si se considera esto mismo para las direcciones y y z tenemos $-\mathcal{V} \vec{\nabla} \cdot \vec{H} dt$, es decir el calor transferido por unidad de volumen por unidad de tiempo. Tomando todos los elementos anteriores podemos escribir el calor absorbido como

$$\delta Q = \rho \mathcal{V} q dt - \mathcal{V} \vec{\nabla} \cdot \vec{H} dt \quad (2.25)$$

En general ρq representa el calor generado internamente, por ejemplo el producido por las reacciones químicas o nucleares, de aquí que la primera ley de la termodinámica la podemos escribir como

$$d\epsilon - \frac{\epsilon + p}{\rho} d\rho = (\rho q - \vec{\nabla} \cdot \vec{H}) dt \quad (2.26)$$

Donde $\epsilon = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{V}}$ es la densidad de energía. Si además usamos que la energía por unidad de masa es $\Pi = \frac{\epsilon}{\rho}$, la ecuación queda

$$d\Pi + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \left(q - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{H}\right) dt \quad (2.27)$$

Para la segunda ley de la termodinámica pensemos en un proceso reversible, este consiste en que al finalizar este proceso tanto el sistema como el entorno inmediato pueden recuperar sus estados iniciales sin ocasionar ningún cambio en el resto del universo. En cuyo caso la ecuación es $\delta Q = T dS$ con S la entropía del elemento de fluido. Definimos ahora la entropía por unidad de masa $s = \frac{S}{\rho \mathcal{V}}$, por lo que podemos escribir

$$T ds = \left(q - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{H}\right) dt \quad (2.28)$$

Con esto, la primera ley de termodinámica puede ser expresada por

$$d\Pi + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = Tds \quad (2.29)$$

Cuando además consideramos que el elemento de fluido no solo está en equilibrio térmico local sino que también lo está con los elementos vecinos, la transferencia neta de calor es nula, el elemento evoluciona adiabáticamente, o sea $ds = 0$. Para que ésta relación sea válida, debe cumplirse entonces que $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \rho p$ y bajo estas restricciones la primera ley quedará expresada por

$$d\Pi = -pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (2.30)$$

Si bien, hasta ahora hemos analizado las primeras dos leyes de la termodinámica, nuestro análisis no estará completo hasta proporcionar una ecuación de estado. En un sistema existe una relación entre la presión con la temperatura y su densidad.

2.4. Ecuación de estado

La ecuación de estado es necesaria para cualquier aplicación de las leyes de la termodinámica, analizaremos algunas de las ecuaciones de estado que son relevantes para la descripción de las configuraciones estelares. Comenzaremos suponiendo que nuestros sistemas pueden describirse mediante la ecuación del gas ideal, esto debido a que las estrellas en la secuencia principal del diagrama HR tienen una temperatura extremadamente alta y la energía cinética de los átomos es muy grande en comparación con la energía de interacción, por lo que puede considerarse que la materia estelar no interactúa. Consideramos también que la mayoría de las estrellas en su interior están completamente ionizadas, por lo que los electrones libres también pueden ser tratados como un gas ideal. La ecuación con la que identificamos un gas ideal está dada por

$$p = n_I kT \quad (2.31)$$

Siendo k la constante de Boltzmann y n el número de densidad de los iones, $n_I = \frac{N}{V}$. Ahora bien como dijimos la presión la podemos expresar como $p = p(\rho, T)$ y la presión total del sistema es la suma de las presiones parciales, es decir

$$p_I = n_I kT = \frac{\rho}{\mu_I m_H kT} \quad (2.32)$$

Siendo m_H la unidad de masa atómica y el número atómico medio de iones es por definición $\frac{1}{\mu_I} = \sum \frac{X_i}{A_i}$, tomando a N como el número de iones y V el volumen contenido.

La densidad de masa de los iones puede expresarse mediante el cociente de la masa total de iones entre el volumen de estos. Es muy importante recalcar que existen diferentes especies de átomos, por lo que X_i es la fracción de masa por especie. Para encontrar esta cantidad debemos encontrar la masa de cada especie y sumarlas para encontrar la total. A_i es el número de protones y neutrones que tiene el átomo en el núcleo. Por ejemplo el A_i de Hidrógeno es uno, el Helio tiene dos electrones y dos protones por lo tanto su $A_i = 4$.

Para los electrones tendremos que

$$p_e = n_e kT = \frac{\rho}{\mu_e m_H} kT, \quad (2.33)$$

esta ecuación de estado se utilizará mas adelante.

2.5. Cantidades conservadas

De las ecuaciones de hidrodinámica se derivan algunas leyes de conservación, las cuales veremos a continuación. Si consideramos un fluido sometido a fuerzas de presión y gravedad (newtoniana) las cantidades conservadas son, la masa total, la cantidad de momento, la energía y el momento angular. Estas se refieren a cantidades globales, definidos como integrales sobre todo el sistema de fluido, y son constantes en el tiempo cada vez que se aísla el sistema, es decir, siempre que el sistema no se ve afectado por fuerzas externas a ella. Verifiquemos que estas cantidades se conservan.

2.5.1. Conservación de masa

Podemos escribir la masa total de un fluido como

$$M = \int \rho(\vec{x}, t) d^3 x. \quad (2.34)$$

Para verificar que es una cantidad conservada, veamos que sucede cuando hacemos variar la masa en el tiempo. Como se mencionó anteriormente, al ser constantes en el tiempo solo se consideran las derivadas respecto a la posición.

Supongamos que $f(\vec{x}, t)$ es una función que involucra las variables típicas de un fluido. Queremos probar la siguiente ecuación, que nos será útil para demostrar la conservación de la masa.

$$\frac{d}{dt} \int \rho(\vec{x}, t) f(\vec{x}, t) d^3 x = \int \rho(\vec{x}, t) \frac{df}{dt} d^3 x \quad (2.35)$$

Desarrollamos el lado izquierdo de (2.35)

$$\frac{d}{dt} \int \rho(\vec{x}, t) f(\vec{x}, t) d^3 x = \int \left(\rho(\vec{x}, t) \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} \right) d^3 x \quad (2.36)$$

Si utilizamos la ecuación de continuidad, podemos escribir la ecuación anterior como

$$\frac{d}{dt} \int \rho(\vec{x}, t) f(\vec{x}, t) d^3 x = \int \left(\rho(\vec{x}, t) \frac{\partial f}{\partial t} - f \vec{\nabla} \cdot (\rho(\vec{x}, t) \vec{v}) \right) d^3 x \quad (2.37)$$

Considerando que la divergencia total es $\vec{\nabla} \cdot (f \rho(\vec{x}, t) \vec{v})$ y pasando de una integral de volumen a una de superficie

$$\frac{d}{dt} \int \rho(\vec{x}, t) f(\vec{x}, t) d^3 x = \int \left(\rho(\vec{x}, t) \frac{\partial f}{\partial t} \rho(\vec{x}, t) \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f \right) d^3 x - \oint f \rho(\vec{x}, t) \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad (2.38)$$

Sin embargo, la integral de superficie se anula, debido a que la densidad en la superficie es cero. Usando la regla de la cadena obtenemos que $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f$, por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \int \rho(\vec{x}, t) f(\vec{x}, t) d^3 x = \int \rho(\vec{x}, t) \frac{df}{dt} d^3 x \quad (2.39)$$

Cuando $f = 1$ tenemos del lado izquierdo la definición de masa total del fluido, por lo que usando (2.35), obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int \rho(\vec{x}, t) d^3 x = \int \rho(\vec{x}, t) \frac{d1}{dt} d^3 x = 0. \quad (2.40)$$

La masa total del sistema es una cantidad conservada, ya que no cambia con el tiempo. Es decir toda la masa se queda dentro de cada elemento de fluido.

2.5.2. Conservación de momento lineal y centro de masa

El momento es definido por

$$\vec{P} = \int \rho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t) d^3 x \quad (2.41)$$

A continuación verificaremos que el momento es una cantidad conservada. Para esto derivaremos el momento con respecto al tiempo, usamos la ecuación (2.35), tomando $f = \vec{v}(\vec{x}, t)$, es decir

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \int \rho \frac{d\vec{v}(\vec{x}, t)}{dt} d^3 x \quad (2.42)$$

Usando la ecuación de Euler para la hidrodinámica en la ecuación anterior se convierte en

$$\int \rho \frac{d\vec{v}(\vec{x}, t)}{dt} d^3 x = \int \rho \vec{\nabla}(\Phi) d^3 x - \int \vec{\nabla} p d^3 x \quad (2.43)$$

Note ahora que $\int \vec{\nabla} p d^3x$ se puede escribir como $\oint p dS$ mediante el teorema de Gauss, ésta integral desaparecerá ya que la presión en la superficie de integración es cero. La integral

$$\int \rho \vec{\nabla} \Phi d^3x, \quad (2.44)$$

también deberá ser cero y a continuación lo verificaremos. Recordemos que el potencial gravitacional está descrito por $\Phi(t, \vec{x}) = -G \int \frac{\rho'}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d^3x'$. Calcularemos primeramente la parte del operador gradiente aplicado al potencial. Centremos nuestra atención en el componente x^j de $\vec{\nabla} \Phi$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^j} = -G \int \rho' \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d^3x' \quad (2.45)$$

Donde ρ' es una función de \vec{x}' y de t , recordamos que

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|} \right) = |\vec{x}' - \vec{x}|^{-3} (x'_j - x_j) \quad (2.46)$$

Si insertamos esto en (2.44)

$$\int \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} d^3x = -G \int \rho \rho' \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d^3x' d^3x \quad (2.47)$$

Entonces si hacemos un cambio de variable $\vec{x} \leftrightarrow \vec{x}'$ la integral se convierte en

$$= -G \int \rho' \rho \frac{\partial}{\partial x'^j} \frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d^3x d^3x' \quad (2.48)$$

Note que si hacemos de nuevo la derivada, solo que ahora con respecto a las coordenadas primadas lo que nos da $\frac{\partial}{\partial x'^j} \frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|} = -|\vec{x}' - \vec{x}|^{-3} (x^j - x'^j)$, este resultado es similar al obtenido con la derivada con respecto de las coordenadas no primadas, solo se diferencian en el signo que acompaña al resultado. Esto nos indica el factor que $\frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|}$ depende de la diferencia entre \vec{x} y \vec{x}' . Es decir que

$$\int \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} d^3x = G \int \rho \rho' \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}|} d^3x' d^3x \quad (2.49)$$

Usando este hecho, se verifica que al comparar con (2.47) y (2.49), se verifica que

$$\int \rho(\vec{x}, t) \frac{d\Phi}{dx^j} d^3x = 0 \quad (2.50)$$

Como se requería, para verificar que el momento es una cantidad conservada. Para demostrar que el centro de masa es una cantidad conservada, consideremos primeramente el centro de masa de un elemento de fluido definido por

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int \rho(\vec{x}, t) \vec{x} d^3x \quad (2.51)$$

Como la masa es una cantidad conservada, la velocidad del centro de masa $\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}$ o bien

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{M} \int \rho(\vec{x}, t) \vec{x} d^3x \right) \quad (2.52)$$

Como la masa no depende del tiempo

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} \left(\int \rho(\vec{x}, t) \vec{x} d^3x \right) \quad (2.53)$$

Y usando la ecuación (2.35) de momento, por lo que el centro de masa también es una cantidad conservada.

2.5.3. Conservación de Energía

Para un sistema formado por un fluido, la energía total del sistema, será la suma de las energías. En nuestro caso, el sistema está conformado por tres distintos tipos de energía que mencionaremos y definiremos a continuación.

Energía cinética.

$$\tau(t) = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}, t) v^2 d^3x \quad (2.54)$$

Energía potencial gravitacional

$$\Omega(t) = -\frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}, t) \Phi d^3x \quad (2.55)$$

Energía termodinámica interna

$$\Psi(t) = \int \epsilon d^3x \quad (2.56)$$

En donde $v^2 = \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t)$. Ya que hemos definido todas estas cantidades, podemos decir que la energía total $E_T = \tau(t) + \Omega(t) + \Psi(t)$.

Veamos que la energía total se conserva, aunque las energías que la componen no son cantidades conservadas, como mostraremos a continuación. Encontramos la variación de la energía cinética con respecto del tiempo.

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int \rho v^2 d^3x = \int \rho \vec{v}(\vec{x}, t) \frac{d\vec{v}(\vec{x}, t)}{dt} d^3x \quad (2.57)$$

Utilizando la ecuación de Euler la ecuación anterior se puede escribir como

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = \int \rho \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla} \Phi d^3x - \int \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla} p(\vec{x}, t) d^3x \quad (2.58)$$

Utilizando la definición del potencial, la primera integral puede expresarse como

$$\int \rho \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla} \Phi d^3 x = \int \rho \rho' \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla} |x - x'|^{-1} d^3 x' d^3 x \quad (2.59)$$

Ahora haremos un intercambio, todas las cantidades primadas serán reemplazadas por las no primadas e inversamente, es decir $\vec{x}' \leftrightarrow \vec{x}$

$$\int \rho \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla} \Phi d^3 x = \int \rho' \rho \vec{v}(\vec{x}', t) \cdot \vec{\nabla} |x' - x|^{-1} d^3 x' d^3 x \quad (2.60)$$

Si sumamos las expresiones anteriores y dividimos por dos, consideramos también que $|x - x'|^{-1}$ no depende del tiempo obtenemos

$$= \frac{1}{2} \int \rho \rho' \frac{d}{dt} |x - x'|^{-1} d^3 x' d^3 x \quad (2.61)$$

De aquí obtenemos que

$$\int \rho \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla} \Phi d^3 x = -\frac{d\Omega}{dt} \quad (2.62)$$

Para la segunda integral, $\int \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla} p(\vec{x}, t) d^3 x$ podemos expresar a $\vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla} p(\vec{x}, t)$ como $\vec{\nabla} \cdot (p(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t)) - p(\vec{x}, t) \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{x}, t)$ y como la presión desaparecerá en la frontera solo tendremos una contribución $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$ entonces

$$\int \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \vec{\nabla} p(\vec{x}, t) d^3 x = \int \frac{p(\vec{x}, t)}{\rho} \frac{d\rho}{dt} d^3 x \quad (2.63)$$

Pero si usamos esto en la ecuación (2.62) tenemos que la variación de la energía cinética en el tiempo

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{d\Omega}{dt} - \int \frac{p(\vec{x}, t)}{\rho} \frac{d\rho}{dt} d^3 x \quad (2.64)$$

Procedamos a calcular ahora la variación de la energía interna con respecto del tiempo.

$$\frac{d\Psi}{dt} = \int \rho \frac{d\Pi}{dt} d^3 x \quad (2.65)$$

Si asumimos que el fluido está en todo momento en equilibrio térmico, procederemos a usar la primera ley de la termodinámica

$$d\Pi = -p(\vec{x}, t) d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{p(\vec{x}, t)}{\rho^2} d\rho \quad (2.66)$$

Por lo que

$$\frac{d\tau}{dt} = \int \frac{p(\vec{x}, t)}{\rho} \frac{d\rho}{dt} d^3 x \quad (2.67)$$

De aquí podemos ver que

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{d\tau(t)}{dt} + \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{d\Psi(t)}{dt} = 0, \quad (2.68)$$

lo cual nos indica que la energía total del sistema es una cantidad conservada, como queríamos probar.

2.5.4. Conservación del momento angular.

El momento angular de un fluido está definido por

$$\vec{J} \equiv \int \rho(\vec{x}, t) \vec{x} \times \vec{v}(\vec{x}, t) d^3x. \quad (2.69)$$

Para ver que el momento se conserva, veremos cómo es la variación del momento angular con respecto del tiempo. Entonces

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt} \int \rho(\vec{x}, t) (\vec{x} \times \vec{v}(\vec{x}, t)) d^3x \quad (2.70)$$

Usando la ecuación de Euler

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \int \rho(\vec{x}, t) \vec{x} \times \vec{\nabla} \Phi d^3x - \int \vec{x} \times \vec{\nabla} p d^3x \quad (2.71)$$

La primera integral podemos escribirla como

$$\int \rho(\vec{x}, t) \vec{x} \times \vec{\nabla} \Phi d^3x = -G \int \rho(\vec{x}, t) \rho(\vec{x}', t) \frac{\vec{x} \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d^3x d^3x' \quad (2.72)$$

Utilizaremos el mismo procedimiento que utilizamos para mostrar que la energía total se conserva, hacemos el intercambio de $\vec{x} \leftrightarrow \vec{x}'$ sumando y las expresiones resultantes del intercambio y dividiendo por dos obtenemos que

$$\int \rho(\vec{x}, t) \vec{x} \times \vec{\nabla} \Phi d^3x = 0 \quad (2.73)$$

Para la segunda integral $\int \vec{x} \times \vec{\nabla} p d^3x$ usaremos la identidad $\vec{x} \times \vec{\nabla} p = -\vec{\nabla} \times (p\vec{v}) + p\vec{\nabla} \times \vec{x}$, donde el segundo factor de la identidad es idénticamente cero, y ya que la presión es nula sobre la superficie de integración, ambos son cero, por lo que tenemos la integral

$$\int \vec{x} \times \vec{\nabla} p d^3x = 0 \quad (2.74)$$

Ahora bien, como ambas integrales se anulan, se puede concluir que el momento se conserva. Es decir $\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{0}$

2.6. Ecuación de transporte radiativo

La radiación es el transporte o la propagación de energía en forma de partícula u ondas. Para describir el transporte de energía por medio de la radiación construiremos la ecuación del transporte radiativo.

Consideremos un flujo de energía $v_\lambda d\lambda$ pasando a través de un elemento de área dA , este flujo será de la energía neta en una dirección normal a la superficie, entonces

$$v_\lambda d\lambda = \int I_\lambda \cos(\theta) d\Omega \quad (2.75)$$

En donde la cantidad $I_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^n(\theta) \frac{\partial B_\lambda}{\partial \tau^n}$, es conocida como la intensidad específica, que nos indica la energía emitida en la longitud de onda λ por unidad de tiempo por unidad de área. $d\tau_\lambda$ es la profundidad óptica, y se describe el número de veces que es absorbido o reemitido el fotón, es decir, nos mide la transparencia de un gas. El factor $B_\lambda = cu(\lambda) / 4\pi$ es la intensidad específica para la radiación de un cuerpo negro. Si el cambio de radiación es isotrópico, entonces la intensidad específica será cero, ya que no dependerá del ángulo. Pero queremos encontrar un flujo distinto de cero de la energía a través de una superficie, entonces I_λ debe ser función de un ángulo. Utilizando lo anterior podemos escribir

$$v_\lambda = 2\pi \int_0^\pi \sum_{n=0}^{\infty} \cos^{n+1}(\theta) \frac{\partial^n B_\lambda}{\partial \tau^n} \sin(\theta) d\theta \quad (2.76)$$

Si desarrollamos la expresión anterior podemos observar que solo los valores impares de n sobreviven y el término principal de la serie es

$$v_\lambda = \frac{4\pi}{3} \frac{\partial B_\lambda}{\partial \tau} = \frac{4\pi}{3} \frac{\partial B_\lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad (2.77)$$

escribiendo esto como función de ds y de la opacidad del gas κ multiplicado por la densidad, $\kappa \rho ds = d\tau$, tenemos:

$$v_\lambda = -\frac{4\pi}{3\rho\kappa} \frac{\partial B_\lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial s}. \quad (2.78)$$

El flujo de calor está descrito por

$$\vec{H} = \int_0^\infty v_\lambda d\lambda = -\frac{4\pi}{3\rho\kappa} \frac{\partial B_\lambda}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial s} d\lambda \quad (2.79)$$

Escribiendo a B_λ como la intensidad específica de un cuerpo negro, en función de la energía específica de un gas. Por lo que el flujo de calor por radiación quedará escrito como:

$$\vec{H} = -\frac{c}{3\rho\kappa} \frac{\partial T}{\partial s} \frac{\partial}{\partial T} \int_0^\infty u(\lambda) d\lambda. \quad (2.80)$$

Para la energía específica de un gas tenemos que $\int_0^\infty u(\lambda)d\lambda = aT^4$, en donde a es la constante de radiación. De la ecuación de flujo de calor obtenemos la ecuación de transporte radiativo.

$$\frac{\partial T}{\partial s} = -\frac{3\rho\kappa\vec{H}}{ca4T^3} \quad (2.81)$$

Hemos construido la base para el desarrollo de los modelos estelares simples, las ecuaciones de la hidrodinámica y la de el potencial gravitacional serán estudiadas para algunos casos particulares en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Modelos estelares con simetría esférica.

En el capítulo anterior, nos hemos dedicado a definir y demostrar las ecuaciones con las cuales podemos modelar los movimientos de los fluidos internos en un cuerpo. Ahora usaremos esas ecuaciones para simular algunos casos de estrellas con gravedad newtoniana mediante suposiciones de composición. Para un sistema esférico o casi esférico en equilibrio hidrostático, con densidad $\rho(\vec{x}, t)$, presión $p(\vec{x}, t)$ y campo de velocidades $\vec{v}(\vec{x}, t)$ tenemos cinco ecuaciones importantes, la **ecuación de Euler**, la **ecuación de continuidad**, la **ecuación de Poisson**, la **ecuación de transporte radiativo** y una **ecuación de estado** que completa la descripción de un modelo.

El equilibrio hidrostático conecta el gradiente de potencial, la densidad y el gradiente de presión, mientras que la ecuación de Poisson conecta el potencial con la densidad. Si sabemos de el gas su presión y cómo la densidad varía con respecto a ésta se puede, en principio, encontrar una solución.

3.1. Potencial gravitacional

Si la densidad de masa ρ y el potencial gravitacional Φ de un cuerpo esférico dependiente solo de el tiempo y el radio de la esfera de la ecuación 2.11 se reduce a

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = -4\pi G \rho(t, r) \quad (3.1)$$

Integrando una vez se obtiene

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(t, r') r'^2 dr' \quad (3.2)$$

Los límites de integración se escogen para que la fuerza de gravedad en $r=0$ desaparece como se supondría por simetría. Para esto exigimos que la densidad debe ser finita en $r=0$, por lo que la integral se comportaría como $\frac{1}{3}\rho(t, 0)r^3$ cerca de $r=0$ y $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ desaparece

ahí. La integral del lado derecho de la ecuación 3.2 junto con el factor de 4π nos define la masa contenida en una esfera de radio r denotada como $m(t, r)$, la densidad de masa cae a cero en la superficie del cuerpo y la masa total del cuerpo está dada por

$$M = m(t, r = R) = \int_0^R 4\pi\rho(t, r')r'^2 dr' \quad (3.3)$$

Siendo R el radio del cuerpo, como habíamos supuesto, M no depende del tiempo a pesar de que $m(t, r)$ sí puede depender del tiempo. Por lo que la fuerza gravitacional que actúa sobre un elemento de fluido por unidad de masa situado en el radio r está dada por

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\frac{Gm(r, t)}{r^2} \quad (3.4)$$

De aquí podemos observar que en simetría esférica, la fuerza está únicamente determinada por la masa contenido dentro de la esfera de radio r y cualquier otra distribución fuera de esta no contribuye en nada a la fuerza. Fuera del cuerpo esférico, $m(t, r) = M$ y la ecuación 3.4 se transforma en

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\frac{GM}{r^2} \quad (3.5)$$

Por lo que la fuerza gravitacional es independiente del tiempo y queda solo determinada por la masa total del cuerpo. Así pues el potencial gravitacional fuera de un cuerpo esférico es constante en el tiempo. El potencial entonces se determina mediante la integración de las ecuaciones 3.4 y 3.2. Imponiendo continuidad para el potencial gravitacional en $r = R$ y la condición de frontera de que Φ debe desaparecer cuando $r = \infty$ se obtiene

$$\Phi(t, r) = \frac{GM}{R} + G \int_r^R \frac{m(t, r')}{r'^2} dr' \quad (3.6)$$

para $r < R$, es decir dentro de la esfera, fuera de la materia

$$\Phi(r) = \frac{GM}{r} \quad (3.7)$$

O bien, si se integra por partes, la ecuación para el potencial interno está dada por

$$\Phi(t, r) = \frac{Gm(t, r)}{r} + 4\pi G \int_r^R \rho(t, r')r' dr' \quad (3.8)$$

3.2. Ecuaciones en equilibrio hidrostático.

Para el equilibrio hidrostático la ecuación de Euler es $\rho\nabla\Phi = \nabla p$ ya que $\vec{v} = 0$. Ahora consideremos simetría esférica, es decir que el potencial, la densidad y la masa dependen solo de una variable radial r .

Con esto la ecuación de Euler para el equilibrio hidrostático con simetría esférica es

$$\rho \frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{dp}{dr}. \quad (3.9)$$

De la misma forma procedemos a encontrar la ecuación de Poisson para las condiciones mencionadas,

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi(r)}{dr} \right) = -4\pi G r^2 \rho(r). \quad (3.10)$$

Si integramos ambos lados de la ecuación tenemos,

$$r^2 \frac{d\Phi(r)}{dr} = -Gm(r) \quad (3.11)$$

Siendo $m(r) = \int_0^R 4\pi\rho(r)r^2 dr$ la masa total del sistema contenida en una esfera de radio R . Entonces la ecuación de continuidad para este sistema

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi\rho(r)r^2 \quad (3.12)$$

Por último, la ecuación de transporte radiativo en coordenadas esféricas estará dada por

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{3\rho\kappa H(r)}{ca4T^3} \quad (3.13)$$

Ahora solo nos falta una ecuación de estado para completar nuestro sistema. Sea la ecuación de estado determinada por $p = p(\rho, T; X)$ la que nos relaciona la densidad ρ , temperatura T y composición química X de la materia que compone al cuerpo.

El flujo de calor y la producción de energía se relacionan mediante $\nabla \cdot \vec{H} = \rho q$ que en coordenadas esféricas se reduce a

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 H(r)) = \rho q \quad (3.14)$$

Sin embargo, estas ecuaciones nos generan un modelo poco realista, pues las estrellas no son completamente simétricas ni mucho menos estáticas. Aún así, como primer caso veamos qué sucede cuando la presión solo depende de la densidad y no de la temperatura.

3.3. Fluido incompresible.

Comencemos con la estructura más simple, cuando suponemos que el fluido es incompresible.

Un fluido se considera incompresible si la densidad puede suponerse invariante, ya que no existe ninguna compresión o dilatación observable. Matemáticamente puede escribirse como

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

ρ_0 es una constante y R el radio de la esfera. La presión de un fluido incompresible no está relacionada con la densidad, pero podemos determinarla mediante la integración de la ecuación 3.12, de donde obtenemos

$$m(r) = M \frac{r^3}{R^3} \quad (3.15)$$

Siendo $M = \frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3$ la masa total del sistema. Continuando con el análisis ahora podemos utilizar esto y de la ecuación de Euler para el equilibrio hidrostático con simetría esférica podemos obtener la presión mediante la solución de la ecuación utilizando la separación de variables.

$$\frac{dp}{\rho_0} = \frac{Gm(r)}{r^2} dr \quad (3.16)$$

$$p(r) = \rho_0 G \frac{4\pi}{3} \int_r^R \frac{r'^3 \rho_0}{r'^2} dr' = \frac{2\pi}{3} G \rho_0^2 R^2 - \frac{2\pi}{3} G \rho_0^2 r^2 \quad (3.17)$$

Si denotamos la presión central como $p_c = \frac{2\pi}{3} G \rho_0^2 R^2$ entonces la presión será

$$p(r) = p_c \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (3.18)$$

Por último encontremos el potencial del cuerpo, iniciaremos calculando el potencial interno

$$\Phi_{int}(r) = \frac{Gm(r)}{r} + 4\pi G \int_r^R \rho(r') r' dr' = \frac{GM r^2}{R^3} + \frac{G3M}{R^3} \int_r^R r dr \quad (3.19)$$

De donde obtenemos

$$\Phi_{int}(r) = \frac{GM}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (3.20)$$

Para el potencial externo está dado por

$$\Phi_{ext}(r) = \frac{GM}{r} \quad (3.21)$$

Notemos que el potencial es continuo pero no diferenciable en $r=R$ y la energía potencial gravitacional del cuerpo es

$$\Omega(r) = -4\pi G \int_0^R \rho(r) m(r) r dr = \frac{3GM^2}{R^6} \int_0^R r^4 dr \quad (3.22)$$

De aquí claramente se puede observar que la energía potencial del cuerpo es

$$\Omega(r) = \frac{-3GM^2}{5R} \quad (3.23)$$

Con esto concluimos el análisis para la ecuación de estado de un modelo estelar mediante un fluido incompresible, ya que hemos encontrado las ecuaciones que describen el comportamiento de la materia dentro de el cuerpo en función de la masa, la densidad y el radio de dicha estrella.

3.4. Polítropos

Como bien mencionamos anteriormente, si consideramos la ecuación de estado para un fluido en el cual la presión solo depende de la densidad, construiremos un modelo muy poco apegado a la realidad, sin embargo es una primera buena aproximación. Ahora analizaremos las ecuaciones de un cuerpo cuya ecuación de estado nos describa un modelo para un gas degenerado.

Un polítropo es un cuerpo en equilibrio hidrostático para el cual la materia satisface la ecuación politrópica de estado

$$p = K\rho^\Gamma \quad (3.24)$$

En donde K y Γ son constantes. $\Gamma = 1 + \frac{1}{n}$ con n el índice politrópico, se considera $n = 3$ para un gas de fotones y $n = \frac{3}{2}$ para un gas ideal. El estudio de la estructura estelar basado en la ecuación de estado politrópica es lo que analizaremos a continuación. Nuestro objetivo es integrar las ecuaciones de equilibrio hidrostático.

Antes que todo, haremos un escalamiento de unidades, esto con la finalidad de introducir un número de cantidades que son relevantes para este problema. Tenemos distintas cantidades

$\rho_c \rightarrow$ densidad central,

$p_c \rightarrow$ presión central,

$r_0 \rightarrow$ distancia escalada,

$m_0 \rightarrow$ masa escalada.

Sustituiremos estas cantidades en la ecuación de estado, la cual se reescribe como $p_c = K\rho_c^{1+\frac{1}{n}}$. La masa escalada estará definida como $m_0 = 4\pi\rho_c r_0^3$, esto se puede ver de la ecuación de equilibrio hidrostático (3.11) que es multiplicada por un factor numérico. Definimos ahora la distancia escalada como

$$r_0^2 = \frac{(n+1)p_c}{4\pi G\rho_c^2} = \frac{(n+1)K}{4\pi G} \rho_c^{\frac{(1-n)}{n}}. \quad (3.25)$$

De aquí podemos observar que $r^3 = \left(\frac{(n+1)K}{4\pi G} \rho_c^{\frac{1-n}{n}} \right)^{\frac{3}{2}}$. Usando lo anterior en la definición de masa escalada, podemos ver que m_0 también es escrita como:

$$m_0 = \frac{(n+1)^{\frac{3}{2}} K^{\frac{3}{2}}}{(4\pi)^{\frac{1}{2}} G^{\frac{3}{2}}} \rho_c^{\frac{3-n}{2n}}. \quad (3.26)$$

Con estas cantidades podemos ahora construir las ecuaciones de equilibrio hidrostático en forma adimensional y libre de escalas. Consideremos a la variable adimensional radial definida como:

$$\xi = \frac{r}{r_0}. \quad (3.27)$$

Y la variable de masa adimensional se define por :

$$\mu = \frac{m}{m_0}. \quad (3.28)$$

Además escribiremos la densidad en función de una densidad sin dimensiones denotada por θ por lo que

$$\rho = \rho_c \theta^n \quad (3.29)$$

Para la presión tenemos la ecuación proveniente de la ecuación de estado $p = p_c \theta^{n+1}$. Una vez definido esto podemos reescribir las ecuaciones de la hidrostática para el caso polirópico, las cuales son

$$\frac{d\mu}{d\xi} = \xi^2 \theta^n \quad (3.30)$$

$$\frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{\mu}{\xi^2} \quad (3.31)$$

Cuyas condiciones de frontera $\theta(\xi = 0) = 1$ y $\mu(\xi = 0) = 0$ ya que integraremos hacia la superficie desde $\xi = 0$. La integración continúa hasta que la presión y la densidad desaparezcan en la superficie, es decir cuando $\theta = 0$ y $\xi = \xi_1$. De este modo la masa total del cuerpo estará dada por

$$M = m_0 \mu_1$$

Siendo $\mu_1 = \mu(\xi = \xi_1)$ y el radio del cuerpo es $R = r_0 \xi_1$. Además de la masa escalada, de la masa total y del radio total del cuerpo podemos encontrar la densidad promedio para los politropos

$$\widehat{\rho} = \frac{3\mu_1 \rho_c}{\xi_1^3} \quad (3.32)$$

Note que las ecuaciones (3.30) y (3.31) no dependen de K ni de la densidad central. La masa escalada y la masa total del sistema se incrementan con la densidad central si $n < 3$ pero si la densidad central aumenta y $n > 3$ la masa total disminuirá. Si ahora $n < 1$ el radio total incrementará al igual que ρ_c , pero si $n > 1$ disminuirá a la vez que

la densidad se incrementa. En otras palabras, la masa se incrementa con el radio cuando $n < 1$ y $n > 3$, mientras que la masa decrece si el radio se incrementa cuando $1 < n < 3$. Por último note que si $n = 3$ la masa no depende de la densidad central y el radio se vuelve independiente de esta cuando $n = 1$. Que bien, las ecuaciones de hidrostática combinadas se pueden escribir en una ecuación diferencial de orden dos

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n \quad (3.33)$$

Esta ecuación es conocida como **la ecuación de Lane-Emden**. Si resolvemos esta ecuación con n y K dados tendremos una familia de estrellas parametrizadas en función de la densidad central ρ_c .

Para algunos valores de n , la ecuación 3.33 tiene solución exacta.

3.4.1. Energía potencial gravitacional

Queremos encontrar la forma de la energía potencial gravitacional para los polítropos. Sabemos de (2.62) que la energía potencial se escribe como

$$\Omega = -4\pi G \int_0^R \rho(r)m(r)rdr \quad (3.34)$$

Recordando que $r = r_0\xi$ y $m_0 = 4\pi\rho_c r_0^3$. Además utilizando las ecuaciones (3.29), (3.28) la energía es escrita ahora como

$$\Omega = -\frac{Gm_0^2}{r_0} \int_0^{\xi_1} \theta^n \mu \xi d\xi \quad (3.35)$$

usamos $-\theta' \xi^2 = \mu$ y lo utilizamos en la ecuación anterior.

$$\Omega = \frac{Gm_0^2}{r_0} \int_0^{\xi_1} \xi^3 \theta' \theta^n d\xi \quad (3.36)$$

Integrando por partes y aplicando las condiciones de frontera, la energía potencial gravitacional puede ser escrita

$$\Omega = \frac{-3Gm_0^2}{(n+1)r_0} \int_0^{\xi_1} \theta^{n+1} \xi^2 d\xi \quad (3.37)$$

Por otro lado, si sustituimos $\theta^n = \frac{\mu'}{\xi^2}$ en la ecuación (3.35) y se integra de nuevo, esta quedará como

$$\Omega = -\frac{3Gm_0^2}{r_0(n+1)} \int_0^{\xi_1} \theta \xi^2 \frac{\mu'}{\xi^2} d\xi \quad (3.38)$$

integrando por partes la ecuación anterior y aplicando las condiciones de frontera la expresión final será

$$\Omega = -\frac{3Gm_0^2}{r_0(n+1)} \int_0^{\xi_1} \frac{\mu^2}{\xi^2} d\xi \quad (3.39)$$

Desde otro punto de vista (3.35), puede ser escrita mediante la sustitución de θ^n

$$\Omega = -\frac{Gm_0^2}{r_0} \int_0^{\xi_1} \frac{\mu'}{\xi^2} \mu \xi d\xi \quad (3.40)$$

Al hacerla integración la ecuación anterior queda como

$$\Omega = \frac{-Gm_0^2}{r_0} \left[\frac{\mu^2}{2\xi} \right]_0^{\xi_1} - \int_0^{\xi_1} \frac{-\mu^2}{2\xi^2} d\xi \quad (3.41)$$

Note que en (3.41) el segundo término, es el mismo que el que aparece en (3.39) despejando y sustituyendo la ecuación para Ω estará dada por

$$\Omega = -\frac{3}{5-n} \frac{Gm_0^2 \mu_1^2}{r_0 \xi_1} \quad (3.42)$$

O bien, $\Omega = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R}$

3.4.2. Solución analítica de la ecuación de Lane-Emden

A continuación procederemos a resolver los casos analíticos de la ecuación de Lane-Emden. Comenzaremos con el caso $n=0$. Entonces la ecuación de Lane-Emden se escribe

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -1 \quad (3.43)$$

De donde obtenemos

$$\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{1}{3} \xi^3 + c \quad (3.44)$$

Utilizando la condición de frontera $\theta'(0) = 0$ obtenemos que $c = 0$, por lo que

$$\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{1}{3} \xi^3 \longrightarrow \theta(\xi) = -\frac{1}{6} \xi^2 + c_1 \quad (3.45)$$

La segunda condición de frontera es $\theta(0) = 1$, entonces la constante de integración $c_1 = 1$, esto nos indica que $\theta(\xi) = 1 - \frac{1}{6} \xi^2$. Como bien podemos observar, la masa sin dimensiones es $\mu = -\xi^2 \frac{d\xi}{d\theta}$ y como $\theta = 0$ cuando $\xi = \xi_1$ entonces ξ_1 es la raíz, por lo tanto $\xi_1 = \sqrt{6}$

$$\theta'(\xi_1) = -\frac{1}{3} \xi \quad (3.46)$$

Luego $\mu_1 = \mu(\xi_1)$ por lo que $\mu_1 = -6\left(\frac{-1}{3}\right)\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$. Regresando a las cantidades escaladas obtenemos

$$R = r_0 \sqrt{6} \quad (3.47)$$

$$M = m_0 2 \sqrt{6} \quad (3.48)$$

Si escribimos primeramente a la masa escalada en función del radio, de acuerdo con las relaciones anteriores $m_0 = 4\pi\rho_c r_0^3 = 4\pi\rho_c \left(\frac{R}{\sqrt{6}}\right)^3$, obtenemos la expresión para la masa total en función del radio de la estrella

$$M = 4\pi\rho_c \left(\frac{R}{\sqrt{6}}\right)^3 (2\sqrt{6}) = \frac{4\pi}{3}\rho_c R^3. \quad (3.49)$$

Si bien, tomar $n = 0$ no es un caso interesante, pero sí es un caso límite, ya que podemos observar que la presión de la estrella no dependerá de la densidad, debido a que en la ecuación de estado politrópica Γ es indefinida.

Otro caso que también tiene solución exacta es cuando tomamos $n=1$. Escribimos la ecuación (3.33) como

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta \quad (3.50)$$

Para resolver la ecuación, proponemos un cambio de variable $y(\xi) = \xi\theta(\xi)$ o bien $\theta = \frac{y}{\xi}$ entonces la ecuación a resolver será

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{y}{\xi} \right) = \frac{\xi y' - y}{\xi^2} \quad (3.51)$$

La ecuación de Lane-Emden se transforma en

$$\frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{\xi y' - y}{\xi^2} \right) \quad (3.52)$$

De aquí en adelante usaremos la notación primada, esta denota la derivada con respecto a ξ . Ahora la ecuación a resolver es

$$y'' + y = 0 \quad (3.53)$$

La cual es conocida como ecuación del oscilador armónico simple, cuya solución general es

$$Y(\xi) = A \sin(\xi) + B \cos(\xi) \quad (3.54)$$

O en términos de θ

$$\theta(\xi) = A \frac{\sin(\xi)}{\xi} + B \frac{\cos(\xi)}{\xi} \quad (3.55)$$

Aplicando las condición de frontera $\theta(0) = 1$ tenemos $B = 0$ ya que $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\cos \xi}{\xi} = \infty$, además $A = 1$ debido a que $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\sin \xi}{\xi} = 1$, finalmente tenemos

$$\theta(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi}. \quad (3.56)$$

Por la segunda condición de frontera, $\theta'(\xi) = 0$, obtenemos:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\xi \cos \xi - \sin \xi}{\xi^2} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{-\xi \sin \xi + \cos \xi - \cos \xi}{2\xi} = \frac{-1}{2} \lim_{\xi \rightarrow 0} \sin \xi = 0 \quad (3.57)$$

Entonces de aquí obtenemos que $\xi_1 = \pi$. Calculemos ahora $\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{\xi \cos \xi - \sin \xi}{\xi^2}$. Entonces para encontrar la masa μ_1 tenemos

$$\mu_1 = \frac{\pi \cos \pi - \sin \pi}{\pi^2} = \pi \quad (3.58)$$

Volviendo a las cantidades escaladas obtenemos la masa y el radio de una estrella cuya ecuación de estado es politrópica con un índice $n=1$, recordando que $R = r_0 \xi_1$ y con $r_0 = \sqrt{\frac{k}{2\pi G}}$ el radio de la estrella finalmente se puede escribir como $R = \sqrt{\frac{k\pi}{2G}}$, de aquí se puede observar que R es independiente de la densidad central. De igual forma encontramos que la masa es descrita mediante $M = \sqrt{\frac{8k^3}{4\pi G^3}} \rho_c \pi$, es decir, la masa total de la estrella es lineal con la densidad.

En el siguiente capítulo mostraremos las soluciones numéricas para algunos otros casos de n .

3.5. Esferas isotérmicas

Una ecuación de estado que lleva a una configuración de equilibrio es la llamada ecuación politrópica, en donde la temperatura es uniforme y en la cual se involucra la constante de radiación.

$$p = \frac{\rho K T}{\mu m_H} + \frac{1}{3} a T^4 \quad (3.59)$$

Siendo μ el número atómico medio y m_H la unidad de masa atómica. Hagamos notar que el primer término de (3.59) es la presión ejercida por un gas ideal, mientras que el segundo término nos indica la presión de radiación. Esta ecuación de estado es útil cuando hay una gran porción del cuerpo en equilibrio térmico a una temperatura constante, esto está en contraste con el equilibrio radiativo donde la temperatura varía debido al transporte radiativo. La ecuación sin el término de radiación se ha adoptado en varios

modelos, por ejemplo para la descripción de cúmulos de estrellas. Como la temperatura es constante, no hay gradiente de presión por lo que la ecuación de estado es

$$p = k\rho \quad (3.60)$$

en donde $k = \frac{KT}{\mu m_H}$, lo cual es un caso especial de los politropos con $\Gamma = 1$ y $n \rightarrow \infty$, es tratado como un caso aparte de la ecuación de Lane-Emden.

Por conveniencia introducimos las cantidades escaladas:

$$p_c = k\rho_c \quad (3.61)$$

$$r_0^2 = \frac{P_c}{4\pi G\rho_0^2} \quad (3.62)$$

$$m_0 = 4\pi\rho_c r_0^3 \quad (3.63)$$

$$e^{-\psi} = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{P}{P_0} \quad (3.64)$$

Utilizando estas nuevas cantidades, las ecuaciones de equilibrio hidrostático pueden escribirse como

$$\frac{d\psi}{d\xi} = \frac{\mu}{\xi^2} \quad (3.65)$$

$$\frac{d\mu}{d\xi} = \xi^2 e^{-\psi} \quad (3.66)$$

Que bien estas dos ecuaciones se pueden combinar en una sola ecuación diferencial

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right) = e^{-\psi} \quad (3.67)$$

integraremos desde $\xi = 0$ con las condiciones de frontera $\psi(0) = 0$ de forma que $e^{-\psi} = 1$ en el centro y $\mu(0) = 0$ integrando hasta $e^{-\psi} = 0$.

Las ecuaciones pueden ser integradas para cualquier k y ρ_c . La solución describirá una familia de estructuras parametrizadas. Mientras que la densidad decae monotonamente con el incremento del radio, se da lugar a una superficie bien definida y una masa finita.

3.6. Enanas blancas

Una enana blanca es una estrella de masa baja que comienza su formación justo cuando la vida estelar llega a su fin. Cuando la mayor parte de su combustible nuclear se ha agotado, una estrella ya no es capaz de sostenerse con la presión de radiación producida por las reacciones termonucleares en el interior de la estrella. Las enanas blancas son apoyadas por la presión de los electrones degenerados. Estos objetos son

esencialmente estáticos durante la vida del universo y representan la etapa final de la evolución estelar.

En general, las enanas blancas tienen un radio más pequeño que las estrellas de la secuencia principal y por lo tanto un campo gravitacional más fuerte. La gravitación newtoniana describe adecuadamente la estructura de equilibrio, sin embargo, la relatividad general es importante para una comprensión adecuada de su estabilidad.

Además estas estrellas se caracterizan, por tener temperaturas más altas que las estrellas normales a pesar de que tienen luminosidades más bajas. En otras palabras son más “*blancas*” que las demás, de ahí su nombre.

Las enanas blancas pueden ser observadas directamente en un telescopio en su periodo de enfriamiento. El estudio de estas estrellas es importante ya que representan estados de la materia con características extremas tales como densidades altas y temperaturas bajas.

Estas estrellas se consideran hechas de un gas de fermiones. Los fermiones son partículas con espín semientero y obedecen la estadística de Fermi-Dirac.

Para densidades lo suficientemente altas, como las que caracterizan a estrellas “*muertas*”, la materia se vuelve degenerada y la ecuación de estado cambia drásticamente. Este cambio se produce cuando la temperatura T y el número de densidad n son tales que la incertidumbre en el momento de una partícula de masa m satisface la relación:

$$\Delta p = \sqrt{mkT}, \quad (3.68)$$

que multiplicada por la distancia usual entre partículas $\Delta x \sim n^{-\frac{1}{3}}$, comienza a entrar en conflicto con el principio de incertidumbre de Heisenberg, dicho principio requiere que $\Delta x \Delta p \leq \hbar$ y esta condición solo sucede cuando $mkT \geq \hbar^2 n^{\frac{2}{3}}$, esta también puede escribirse como

$$T \geq \frac{\hbar^2}{2mk} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}} = T_F, \quad (3.69)$$

donde T_F la temperatura de Fermi. Esta temperatura es por lo general extremadamente baja para la materia usual, por lo que raramente la materia puede ser degenerada en el laboratorio. Sin embargo, en una enana blanca las altas densidades implican que la temperatura de Fermi es del orden de $10^9 K$ mientras que la temperatura de una estrella normal, tal como el Sol, está en el rango entre $10^6 K$ y $10^7 K$.

Para un gas de electrones m_e y n_e son específicos para la temperatura de Fermi. A continuación veremos cuáles son las condiciones para la degeneración del gas de electrones. Consideramos la ecuación de un gas ideal, por lo que tenemos $kT \sim \frac{p}{n_e}$ donde p es la presión dentro de la estrella.

Como la materia, por sí misma es eléctricamente neutra y la mayoría de la masa está contenida en los iones, escribimos

$$n_e \sim \frac{\rho}{m_H}, \quad (3.70)$$

siendo ρ la densidad total. Además, $p \sim \frac{GM^2}{R^4}$ y $\rho \sim \frac{M}{R^3}$, de aquí se puede concluir que

$$kT \sim \frac{GMm_H}{R}. \quad (3.71)$$

Por otro lado, la temperatura de Fermi es,

$$kT_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n_e)^{\frac{2}{3}} = \frac{\hbar^2 M^{\frac{2}{3}}}{m_e R^2 m_H^{\frac{2}{3}}} \frac{(3\pi^2)^{\frac{2}{3}}}{2}. \quad (3.72)$$

La desigualdad $T < T_F$ implica que:

$$\frac{GMm_H}{R} < \frac{\hbar^2 M^{\frac{2}{3}}}{m_e R^2 m_H^{\frac{2}{3}}}. \quad (3.73)$$

Insertando los valores de las constantes, \hbar , G , m_H y m_e que se pueden encontrar en la tabla de símbolos, encontramos que la condición para que la masa sea degenerada es

$$\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{R}{R_\odot}\right) < 10^{-2} \quad (3.74)$$

Para la enana blanca típica, el lado izquierdo de la condición consideramos radios entre $0,5M_\odot$ y $0,7M_\odot$ y el radio típico de una estrella de este tipo es del orden de 9×10^{-3} el criterio se satisface. Es importante destacar que los electrones no solo son degenerados, sino que estos también pueden ser relativistas. Esto implica que se debe poner un factor de corrección para estimar el tamaño relativista. En el caso de un electrón nos relaciona el momento de la partícula, con su masa y la velocidad de la luz

$$x = \frac{|\vec{p}|}{m_e c} \quad (3.75)$$

Como hemos visto, el gas de electrones para una enana blanca se encuentra degenerado por lo que el momento será considerado como el momento de Fermi, el cual se encuentra relacionado con la densidad. Para encontrar la relación entre la densidad y el momento se introduce la longitud de onda de Compton para un electrón, ésta cantidad nos mide el aumento de la longitud de onda de la radiación electromagnética dispersada, dependiendo de solamente una constante y el ángulo de dispersión. $\lambda_e \frac{\hbar}{m_e c}$.

3.7. Ecuación de estado para enanas blancas

Consideremos ahora los electrones degenerados relativistas. Tomaremos técnicas de la teoría cinética de los gases, esta teoría cuenta con una función de distribución

$f(\vec{x}, p(\vec{x}, t))$, y la tomaremos como punto de partida para la mayoría de los cálculos. El número de partículas en una celda del espacio fase con volumen $d^3 x d^3 p$ en la posición \vec{x} , y en el momento \vec{p} , está definido por

$$\int \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} f(\vec{x}, \vec{p}) d^3 x d^3 p. \quad (3.76)$$

El factor g es el número de estados internos asociados con una partícula de momento dado para un electrón de espín $\frac{1}{2}$, lo que nos indica que $g = 2$. Consideramos que la función de distribución es un invariante relativista, es decir, que se preserva bajo cualquier transformación de Lorentz. Para la densidad de número, tenemos

$$n_e = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int f(\vec{x}, \vec{p}) d^3 p \quad (3.77)$$

Para la densidad de energía

$$\epsilon = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int E f(\vec{x}, \vec{p}) d^3 p \quad (3.78)$$

Y por último, para la presión

$$p = \frac{2}{3(2\pi\hbar)^3} \int |\vec{p}| v f(\vec{x}, \vec{p}) d^3 p \quad (3.79)$$

En donde La energía E es la relativista definida como $E^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m_e^2 c^4$ y la velocidad relativista $v = \frac{|\vec{p}| c^2}{E}$ de una partícula con momento \vec{p} . La ecuación para la presión nos indica que la presión es un flujo de momento. Estamos interesados en la relación entre la presión y el número de densidad n_e . Encontramos la función de distribución f , que en nuestro caso esta obedece la estadística de Fermi-Dirac. Suponemos que $T \ll T_F$ y adopta la forma límite que se aplica a la temperatura cero. De modo que $f = 1$ cuando $|\vec{p}|$ es más pequeño que el momento de fermi $|p_F|$ y $f = 0$ cuando $|\vec{p}| > p_F$, esta expresión para el número de densidad es

$$n_e = 2(2\pi\hbar)^{-3} \int_0^{p_F} 4\pi |\vec{p}|^2 d|\vec{p}| = \frac{8\pi}{8\pi^3 \hbar^3} \left(\frac{1}{3} |\vec{p}|^3 \right) = \frac{1}{3} \frac{p_F^3}{\pi^2 \hbar^3} = \frac{x^3}{3\pi^2 \lambda_e^3}. \quad (3.80)$$

La ecuación 3.80 nos indica que el promedio de las distancias interpartículas $n_e^{-1/3}$ es más pequeño que la longitud de onda de Compton. Ahora de la integral de la presión (3.79) obtenemos la relación

$$p = \frac{m_e c^2}{3\pi^2 \lambda_e^3} \phi(x). \quad (3.81)$$

Siendo $\phi(x) = \int_0^x \frac{y^4}{\sqrt{1+y^2}}$. El resultado de esta integral se puede encontrar en el anexo . Para obtener la ecuación de estado, combinamos el número de densidad para los electrones junto con la presión obtenida de la función de distribución, la ecuación de estado

que se obtiene es de la forma paramétrica. Sin embargo aún nos hace falta relacionar la densidad de masa ρ con el número de densidad. Introducimos la unidad de masa atómica m_H y el peso molecular promedio definido por

$$\mu_e^{-1} = \sum_i \frac{Z_i X_i}{A_i}. \quad (3.82)$$

Con Z_i el número atómico de un ion de etiqueta i , X_i es la función de masa de ese ion y A_i es el número de masa atómica. En términos de esas cantidades, la densidad de masa

$$\rho = m_H n_e \mu_e \quad (3.83)$$

Combinando esto con los resultados anteriores

$$\rho = \frac{m_H x^3 \mu_e}{3\pi^2 \lambda_e^3} \quad (3.84)$$

Esta última relación junto con 3.81 nos dan las ecuaciones importantes para las enanas blanca. Para una típica enana blanca compuesta de ^{16}O con los valores $A = 16$ y $Z = 8$ y ^{12}C con las cantidades $A = 12$ y $Z = 6$, por lo que el peso molecular medio $\mu_e = 2$ para el régimen no relativista, $x \ll 1$ la función $\phi(x)$ admite una aproximación en serie

$$\phi(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{14} + O(x^9) \quad (3.85)$$

usando esta aproximación con el primer término del desarrollo en serie podemos construir la relación para la presión

$$p = \frac{m_e c^2}{15\pi^2 \lambda_e^5} x^5 \quad (3.86)$$

Entonces la ecuación de estado se puede simplificar introduciendo una constante $Q = \frac{(3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \hbar^2}{5(\mu_e m_H)^{\frac{5}{3}} m_e}$, por lo que la ecuación de estado es

$$p = Q \rho^{\frac{4}{3}} \quad (3.87)$$

Tomando el otro límite, es decir cuando los electrones son relativistas, la expansión de la función $\phi(x)$ cuando $x \gg 1$

$$\phi(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{4} + O(1) \quad (3.88)$$

Por lo que la presión a primer orden es

$$p = \frac{x^4 m_e c^2}{12\pi^2 \lambda_e^3} \quad (3.89)$$

Definimos $Q' = \frac{(3\pi^2)^{\frac{1}{3}} \hbar c}{4(\mu_e m_H)^{\frac{4}{3}}}$ así, la ecuación de estado para el límite relativista la ecuación de estado es

$$p = Q' \rho^{\frac{4}{3}} \quad (3.90)$$

Ambas ecuaciones de estado son ecuaciones politrópicas con $\Gamma = \frac{5}{3}$ y $\Gamma = \frac{4}{3}$ y estos casos ya los analizamos en el apartado anterior.

3.8. Ecuaciones de estructura

Las cantidades escaladas relevantes para una enana blanca en equilibrio hidrostático son

$$p_0 = \frac{m_e c^2}{3\pi^2 \lambda_e^3} \quad (3.91)$$

$$\rho_0 = \frac{\mu_e m_H}{3\pi^2 \lambda_e^3} \quad (3.92)$$

$$r_0^2 = \frac{1}{f_c} \frac{p_0}{4\pi G \rho_0^2} \quad (3.93)$$

$$m_0 = 4\pi f_c^3 \rho_0 r_0^3 \quad (3.94)$$

f_c es introducido por conveniencia, para relacionar por ejemplo estas cantidades

$$\frac{g m_0}{r_0} = f_c \frac{p_0}{\rho_0} \quad (3.95)$$

La escala de longitud puede ser expresada

$$r_0 = \frac{\sqrt{3\pi}}{2f_c \mu_e} \frac{m_{PL}}{m_H} \lambda_e \quad (3.96)$$

Que es la masa de Planck, la cual está definida mediante $m_{PL} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$, como todos estos valores son constantes conocidas, se puede llegar a la expresión

$$r_0 = 3,88466 \times 10^4 \left(\frac{2}{\mu_e} \right)^2 m \quad (3.97)$$

de igual forma para la masa escalada se obtiene el valor de

$$m_0 = \frac{\sqrt{3\pi} m_{PL}^3}{2\mu_e^2 m_H^2} = 0,721459 \left(\frac{2}{\mu_e} \right)^2 M_{\odot} \quad (3.98)$$

El valor de la densidad escalada es entonces

$$\rho_0 = 1,94787x10^9 \left(\frac{\mu_e}{2}\right) \left(\frac{kg}{m^3}\right) \quad (3.99)$$

Por lo que las variables ahora libres de escalas se pueden escribir

$$\xi = \frac{r}{r_0} \quad (3.100)$$

$$x^3 = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (3.101)$$

$$\phi = \frac{p}{p_0} \quad (3.102)$$

$$\mu = \frac{m}{m_0} \quad (3.103)$$

En términos de estas variables las ecuaciones de equilibrio hidrostático son

$$\frac{dx}{d\xi} = -f_c \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \frac{\mu}{\xi^2} \quad (3.104)$$

$$\frac{d\mu}{d\xi} = \frac{1}{f_c^3} \xi^2 x^3 \quad (3.105)$$

Las ecuaciones son integradas desde $\xi = 0$ con las condiciones de frontera en $x(0) = x_c$ relacionada con la densidad central y $\mu(0) = 0$. La integración procede hasta que $x = 0$ en el límite estelar $\xi = \xi_1$. Convenientemente adoptamos la variable θ en lugar de x . Definimos θ mediante

$$1 + f_c \theta = \sqrt{1+x^2} \quad (3.106)$$

Con la densidad central $f_c = \sqrt{1+x_c^2} - 1$. La nueva variable de densidad θ va a 1 cuando $\xi = 0$ y $x = x_c$, se reduce a 0 cuando $\xi = \xi_1$ y $x = 0$. Con la sustitución de la nueva variable las ecuaciones de estructura se transforman

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{-\mu}{\xi^2} \quad (3.107)$$

$$\frac{d\mu}{d\xi} = \xi^2 \theta^{\frac{3}{2}} \left(\theta + \frac{2}{f_c}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (3.108)$$

Que bien se pueden combinar en una ecuación diferencial de segundo orden para θ

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^{\frac{3}{2}} \left(\theta + \frac{2}{f_c} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (3.109)$$

Esta ecuación es muy parecido a la ecuación politrópica, sin embargo para el caso de los politrópos las ecuaciones eran independientes de la densidad central ρ_c ; aquí las ecuaciones presentan una dependencia directa de f_c que está ligado a la densidad central. Para un valor seleccionado de f_c una solución a las ecuaciones 3.107 y 3.108 se obtiene de un modelo de una enana blanca con radio y masa dado por

$$R = \xi_1 r_0. \quad (3.110)$$

$$M = \mu_1 m_0. \quad (3.111)$$

con $\mu_1 = \mu(\xi_1)$ que es la función de masa sin dimensiones evaluada en la frontera estelar.

3.9. Masa de Chandrasekhar

Se ha visto que en regímenes relativistas extremos, la masa de una enana blanca es igual a un factor universal multiplicando a la masa escalada m_0 , que, de acuerdo con la ecuación 4.12 es a su vez proporcional a $\frac{m_{PL}^3}{m_H^2}$, así podemos decir que

$$M_{Chandra} \propto \frac{m_{PL}^3}{m_H^2} \quad (3.112)$$

Y esta dependencia se puede entender mejor mediante el siguiente argumento; este es válido para cualquier sistema de fermiones degenerados, por lo que se puede aplicar a estrellas de neutrones o enanas blancas.

En el extremo relativista la energía de Fermi de un fermión, está dada por p_{FC} que por el principio de incertidumbre es comparable con

$$\frac{\hbar c}{\Delta x} \sim \hbar c n^{\frac{1}{3}} \sim \frac{\hbar c N^{\frac{1}{3}}}{R} \quad (3.113)$$

Donde N es el número total de fermiones en el cuerpo. Por otro lado, la energía gravitacional por fermión es aproximadamente $\frac{-GMm_H}{R}$ con $M \sim Nm_H$.

Cuando el argumento se aplica a los neutrones, la energía gravitacional está dominada por los neutrones y m_H es aproximadamente la masa de los neutrones.

Cuando el argumento se aplica a los electrones, la energía gravitacional se encuentra dominada por los iones, y un factor μ_e deberá ser incertado para relacionar el número de fermiones con la masa. En ambos casos la masa relevante es la unidad de masa atómica m_H ,

$$E \sim \frac{\hbar c N^{\frac{4}{3}}}{R} - \frac{-GN^2 m_H^2}{R} \quad (3.114)$$

El punto clave es que cada término es inversamente proporcional a R . La estabilidad de la ecuación es dictada por el signo de la energía total. Cuando $E > 0$ una disminución

del radio produce un aumento de energía y este comportamiento indica estabilidad con respecto al colapso gravitacional. Cuando $E < 0$ la disminución del radio produce una distribución de energía y esto nos indica inestabilidad.

La estabilidad en el colapso gravitacional, pone un límite superior en el número de fermiones que pueden ser degenerados relativistamente. El límite está dado por $\hbar c N^{\frac{4}{3}} > GN^2 m_H^2$, o bien $N^{\frac{2}{3}} < \frac{\hbar c}{Gm_H^2}$, utilizando la masa de Plack, resulta

$$N^{\frac{2}{3}} < \frac{m_{PL}^2}{m_H^2} \quad (3.115)$$

Entonces la masa máxima del cuerpo está dada por

$$M_{max} \sim N_{max} m_H \sim \frac{m_{PL}^3}{m_H^2} \quad (3.116)$$

que es la misma escala, como m_0 . El valor de la masa máxima no depende de la identidad de la degeneración del fermión; aparte de los factores numéricos, el resultado debe ser el mismo para los electrones y los neutrones. Por lo tanto, si las estrellas de neutrones fueran sometidas a la gravedad newtoniana y si su ecuación de estado está hecha por un gas ideal de fermiones degenerados, entonces ellos tienen una masa máxima determinada por la masa de Chandrasekhar, pero μ_e reemplazada con $\mu_N^{\frac{2}{3}} n$ cuyo valor depende de la relación de neutrones libres a los neutrones aún unidos en los núcleos.

El truco es que las estrellas de neutrones no son sometidas a la gravedad newtoniana porque

$$\epsilon \sim \frac{GN}{c^2 R} \sim 0,2. \quad (3.117)$$

Por lo tanto, los campos gravitacionales son demasiado fuertes para un tratamiento newtoniano y deben ser descritas por la relatividad general.

El otro problema es que las estrellas de neutrones no son en realidad formadas por un gas de neutrones degenerados. Las densidades son altas (del orden de $10^{17} \frac{kg}{m^3}$), los neutrones son sometidos a corto alcance a interacciones fuertes, la desintegración beta y la desintegración beta inversa, y la posible conversión de partículas exóticas tales como condensados de piones y hadrones extraños. Los neutrones no son libres y sus interacciones en densidades tan altas son poco conocidas; como consecuencia, la masa máxima de las estrellas de neutrones es algo incierta, se encuentra entre aproximadamente 2 y 3 masas solares.

Con esto concluye la parte analítica de este trabajo, en la cual obtuvimos diferentes formas de comportamiento en el potencial de una estrella, suponiendo la ecuación de estado politrópica y de un fluido incompresible. Además se construyeron las relaciones de equilibrio hidrostático sin unidades y libres de escala, las cuales se resuelven numéricamente en el siguiente capítulo. Por último construimos la ecuación de estado de

una enana blanca, se hicieron suposiciones relativistas debido a que son necesarias para describirlas, sin embargo al resolver las ecuaciones tomaremos el límite newtoniano.

Capítulo 4

Solución numérica de las ecuaciones de la hidrostática con simetría esférica

En este capítulo retomaremos las ecuaciones que obtuvimos en el capítulo anterior para resolverlas numéricamente. Comenzaremos con el caso de las ecuaciones politrópicas.

4.1. Solución numérica de la ecuación de Lane-Emden

Para resolver las ecuaciones usaremos la integración numérica, ya que la solución analítica existe solo para algunos casos. Primeramente necesitamos las condiciones iniciales $\theta(0) = 1$ y $\mu(0) = 0$, sin embargo tenemos un serio problema, ya que en la ecuación hay una singularidad cuando $\xi = 0$. Para resolver esto hicimos una expansión en serie de potencias al rededor de la singularidad mediante el uso de la herramienta *Mathematica*.

La serie nos da una aproximación muy cercana a la condición de frontera que necesitamos, con estas condiciones ahora bien definidas la ecuación puede ser resuelta mediante la integración numérica.

A continuación se muestra una gráfica con los resultados de la integración numérica de la ecuación de Lane-Emden

La Figura (4.2) muestra que a medida que n aumenta y Γ disminuye, la ecuación de estado es cada vez más suave, los politropos se vuelven densos en el centro, con un perfil de densidad que se cae cada vez más rápidamente lejos de $r = 0$. Además se puede observar que la densidad es uniforme para $n = 0$, como ya lo habíamos predicho al resolver la ecuación analíticamente.

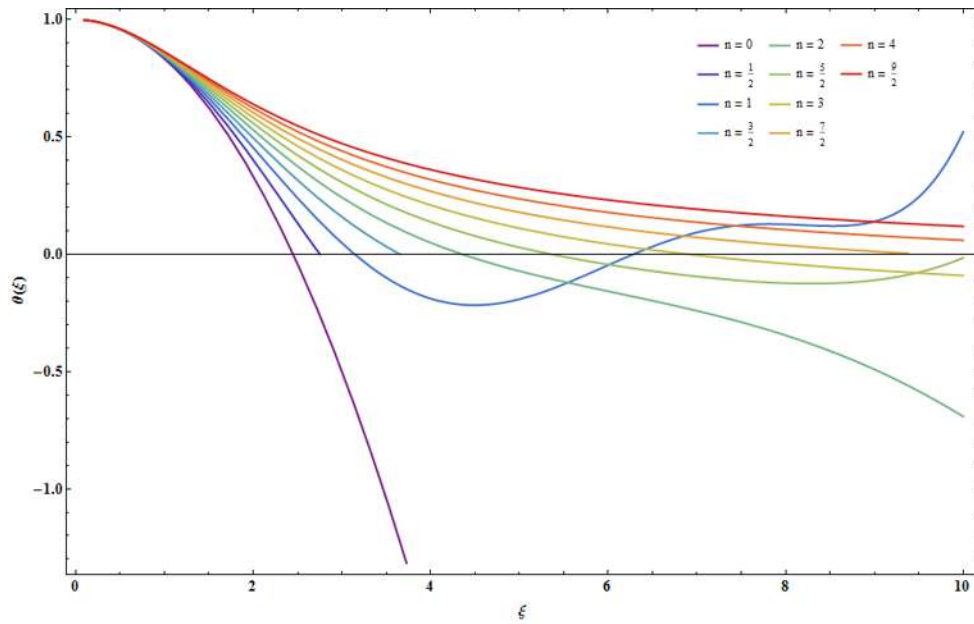


Figura 4.1: Se pueden observar resultados obtenidos para distintos valores de n , aquí se muestra la masa contra el densidad sin dimensiones

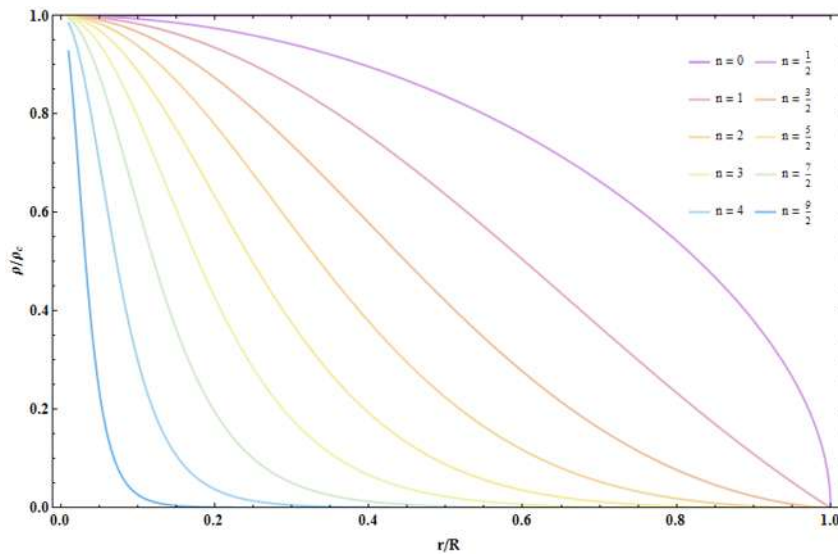


Figura 4.2: Gráfica que muestra la relación entre la densidad normalizada y el radio normalizado.

4.2. Solución numérica de las ecuaciones para esferas isotérmicas

En la Figura (4.3) se pueden observar los resultados numéricos de la integración de las esferas isotérmicas. El comportamiento asintótico de la densidad implica que la masa incrementa como $\mu \sim 2\xi$. De esta misma figura, podemos observar que la densidad decae monotonamente cuando el radio incrementa. La gráfica (4.4) nos muestra las oscilaciones logarítmicas de de amplitud constante, este resultado muestra que la ecuación de estado para una esfera isotérmica no modela una estrella completa. Sin embargo, a menudo se adopta para modelar el núcleo de una estrella, donde las condiciones son aproximadamente isotérmicas. El modelo se corta en algún radio apropiado, y la solución se pone en correspondencia con otra solución para la región exterior del cuerpo, donde una ecuación diferente de estado se hace cargo.

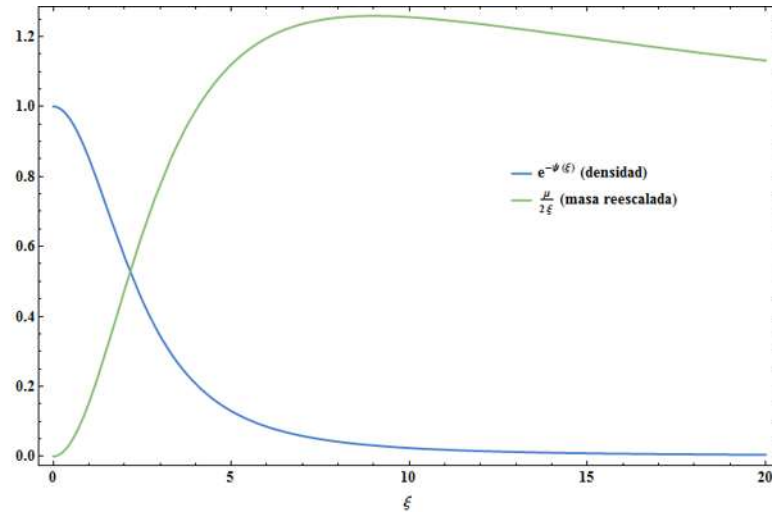


Figura 4.3: Gráfica que muestra como la densidad sin dimensiones $e^{-\psi}$, decae mientras el radio sin dimensiones aumenta; y la masa reescalada incrementa como función del radio adimensional

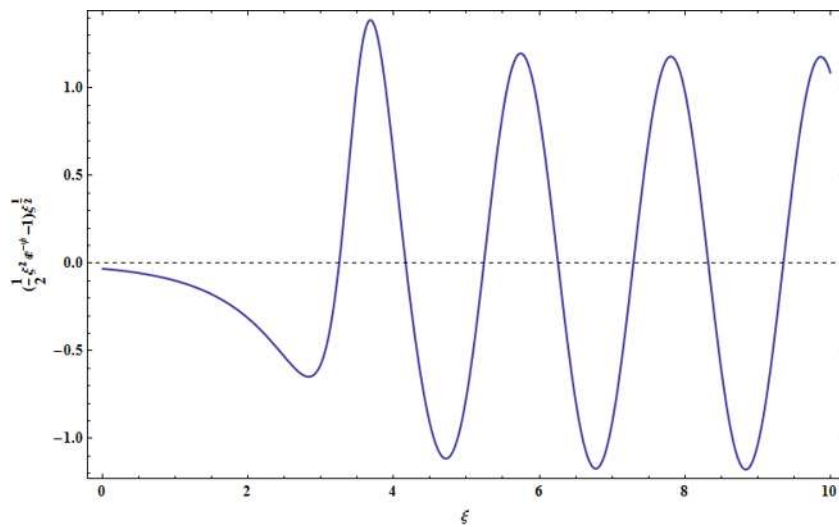


Figura 4.4: Gráfica que muestra las oscilaciones logarítmicas con amplitud constante. Se grafica $(\frac{1}{2}\xi^2 e^{-\psi} - 1)\xi^{\frac{1}{2}}$ como función del logaritmo de ξ

4.3. Enanas blancas

Consideremos el régimen no relativista, tomando este límite se pueden simplificar las ecuaciones de equilibrio hidrostático, las cuales se escriben como:

$$\frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{\mu}{\xi^2}, \quad (4.1)$$

$$\frac{d\mu}{d\xi} = \left(\frac{2}{f_c}\right)^{\frac{3}{2}} \xi^2 \theta^{\frac{3}{2}}. \quad (4.2)$$

Mediante un conveniente reescalamiento de las siguientes cantidades $\xi = \left(\frac{1}{2}f_c\right)^{\frac{3}{4}} \bar{\xi}$, $\theta = \bar{\theta}$ y $\mu = \left(\frac{1}{2}f_c\right)^{\frac{3}{4}} \bar{\mu}$ las ecuaciones (4.1) y (4.2) se transforman en:

$$\frac{d\bar{\mu}}{d\bar{\xi}} = -\frac{\bar{\mu}}{\bar{\xi}^2}, \quad (4.3)$$

$$\frac{d\bar{\mu}}{d\bar{\xi}} = \bar{\xi}^2 \bar{\theta}^{\frac{3}{2}}. \quad (4.4)$$

Que son la ecuaciones politrópicas para $n = \frac{3}{2}$ en los cuales los valores para la masa y el radio se encuentran sin dimensiones. Para este caso tenemos los valores numéricos de $\bar{\xi}_1 = 3,65375374$ y $\bar{\mu} = 2,71405512$, estos resultados junto con la aproximación $f_c = \frac{1}{2}x_c^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_c}{\rho_0}\right)^{\frac{2}{3}}$, implica que la masa y el radio para una enana blanca está dado por

$$f_c = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_c}{1,94787 \times 10^9 \left(\frac{\mu_e}{2}\right) \frac{kg}{m^3}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.5)$$

La masa se encuentra dada por $M = \mu_1 m_0$. Sustituyendo las cantidades importantes

$$M = (2,71405512) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} \left(0,721459 \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2\right) M_{\odot} \quad (4.6)$$

Sustituyendo las cantidades que ya conocemos.

$$M = 0,4960270276 \left(\frac{\rho_c}{x10^9 \frac{kg}{m^3}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^{\frac{5}{2}} M_{\odot}. \quad (4.7)$$

Para el radio hacemos un análisis similar al de la masa, recordando que $R = \xi_1 r_0$

$$R = 3,88466 \times 10^6 \frac{1}{f_c} \left(\frac{2}{\mu_e}\right) (3,3,65375374) \left(\frac{1}{2}f_c\right)^{\frac{3}{4}} m. \quad (4.8)$$

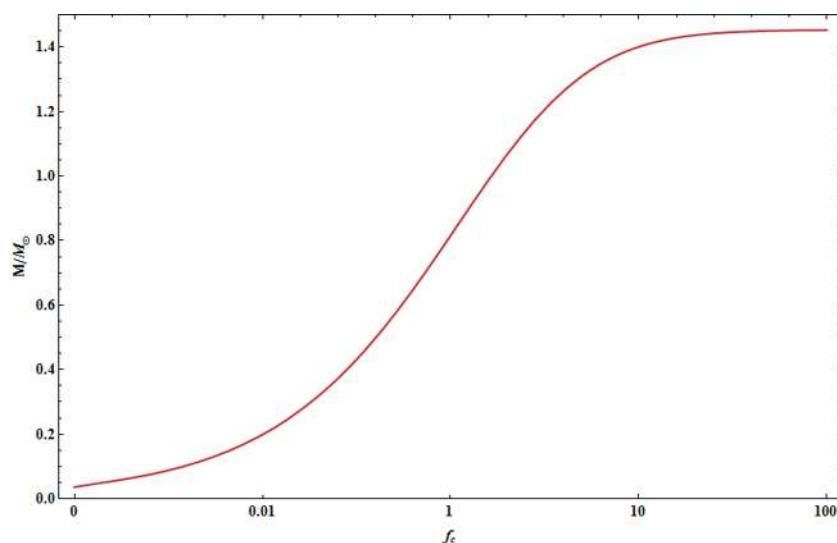


Figura 4.5: En esta gráfica se muestra la masa de una enana blanca en unidades de masa solar como función del parámetro de densidad central f_c , la masa incrementa con f_c y cuando $f_c \rightarrow \infty$ se observa que la masa se acerca al límite de Chandrasekhar.

De esta relación se encuentra que

$$R = 1,121598 \times 10^7 \left(\frac{\times 10^9 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)}{\rho_c} \right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{2}{\mu_e} \right)^{\frac{5}{6}} m. \quad (4.9)$$

En el régimen no relativista nos indica que la masa crece con la densidad central como $\rho_c^{\frac{1}{2}}$, mientras R decrece como $\rho_c^{-\frac{1}{6}}$.

Para el régimen relativista cuando $f_c \gg 1$ las ecuaciones de hidrodinámica para equilibrio se simplifican a

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{-\mu}{\xi^2} \quad (4.10)$$

$$\frac{d\mu}{d\xi} = \xi^2 \theta^3 \quad (4.11)$$

en este límite la enana blanca es un plitropo con $n = 3$, de acuerdo con esto $\xi_1 = 6,89684862$ $\mu_1 = 2,02823595$ tomando la aproximación de $f_c = x_c = \frac{\rho_c}{\rho_0}^{\frac{1}{3}}$ por lo que la masa

$$M = 0,721459 \left(\frac{2}{\mu_e} \right)^2 (2,02823595) M_{\odot} = 1,45607449025 \left(\frac{2}{\mu_e} \right)^2 M_{\odot} \quad (4.12)$$

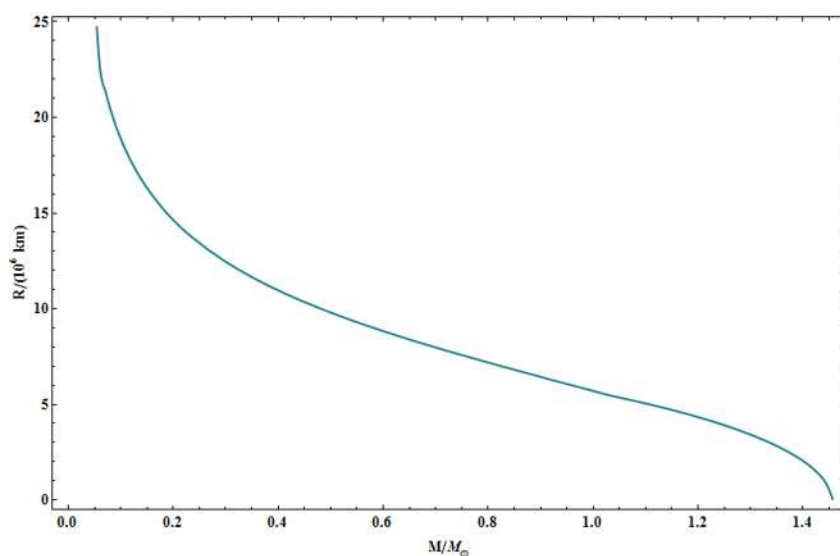


Figura 4.6: Se puede observar que el radio decrece con el incremento de la masa, y va a cero cuando la masa se acerca al límite de Chandrasekhar.

El radio de acuerdo con los valores obtenidos para el politropo es

$$R = \frac{3,88466 \times 10^6}{f_c} \left(\frac{2}{\mu_e} \right) (6,89684862)m \quad (4.13)$$

$$= 3,3459827 \times 10^7 \left(\frac{10^9 \left(\frac{kg}{m^3} \right)}{\rho_c} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{\mu_e} \right)^{\frac{2}{3}} m \quad (4.14)$$

De aquí se puede observar que R decrece como $\rho_c^{-\frac{1}{3}}$ con el incremento de la densidad central, pero la masa es independiente de ρ_c . Los resultados numéricos muestran que 4.12 es la masa máxima para los modelos de enanas blancas, esto es bien conocido como el límite de Chandrasekhar, descubierto en 1830.

Para una típica enana blanca la masa es de $M = 0,6M_\odot$ lo que numéricamente implica que $f_c = 0,546$, por lo que se deben tomar en cuenta las correcciones relativistas. La densidad central es $\rho_c = 3,19 \times 10^9 \frac{kg}{m^3}$, y el radio de tal enana blanca es $R = 8,85 \times 10^6 km$, con estos valores la densidad promedio es de $\bar{\rho}_c = \frac{3M}{4\pi R^3}$ o equivalentemente 0.129 veces la densidad central.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo, se estudiaron algunos modelos estelares estacionarios mediante la solución de las ecuaciones de la hidrodinámica para los casos de simetría esférica, partiendo de una ecuación de estado y de suposiciones de composición.

Las ecuaciones de la hidrodinámica fueron resueltas analíticamente en los casos en que la estrella tenía una ecuación de estado para un fluido incompresible y para modelos politrópicos. Se encontró que el potencial externo depende inversamente de la distancia al centro de la esfera y de la masa total de esta, mientras que el potencial interno depende de la distancia al centro de la esfera y el radio. Además la presión se escribe en función de la presión central del modelo. Por último, se encontró que la energía potencial gravitacional del cuerpo dependía de la distancia inversa del radio de la estrella. Adicionalmente se encontró el potencial gravitacional externo e interno para el modelo en que se considera un fluido incompresible, y el potencial gravitacional de la estrella fue encontrado para el caso de la ecuación de estado politrópica.

Sin embargo para los modelos politrópicos la energía potencial gravitacional dependerá del índice politrópico n , pero al igual que en el fluido incompresible depende de la masa total y el inverso del radio de la estrella. Para el caso en que $n = 0$ y $n = 1$ se encontró solución exacta y se pudo observar que cuando $n = 0$ la densidad es uniforme, para el caso de $n = 1$ el radio es independiente de la densidad central, mientras que la masa de la estrella es lineal con respecto a la densidad.

Para los casos cuyas ecuaciones de estado modelan a los polítrpos, a las esferas isotérmicas y a las enanas blancas se resolvieron únicamente las ecuaciones de equilibrio hidrostático con simetría esférica mediante el uso de los métodos numéricos, obteniendo relaciones entre la masa, el radio y la densidad de la estrella.

En el caso de las esferas isotérmicas se encontró que la densidad decae con el radio, mientras que la masa incrementa con el mismo.

Para las enanas blancas pudimos verificar que existe un límite en la masa y esta se ob-

tiene con el incremento en el parámetro de densidad. En el régimen no relativista crece con la densidad central como $\rho_c^{\frac{1}{2}}$, mientras que el radio decrece como $\rho_c^{-\frac{1}{6}}$. También se encontraron relaciones de la masa, el radio y la densidad para el caso relativista.

Se pretende en un futuro utilizar estos modelos estelares como base para construir otros más complejos, en donde se deja de considerar estrellas estáticas. También se aspira pasar de la teoría newtoniana a la descripción relativista de modelos estelares.

Capítulo 6

Anexo

En el presente anexo se muestran los códigos mediante los cuales se resuelven las ecuaciones de hidrostáticas.

A continuación se muestra el código mediante el cual se resolvió la ecuación de equilibrio hidrostático para la ecuación de Lane-Emden.

```
(* Limpiamos todas las variables *)

ClearAll["Global`*"]

(* Encontramos una aproximación en serie de la función *)

LES[x_, de_Integer] := Module[{series, var, coef, exp, sol, t, a},
  series = Plus@@Table[a_i x^i, {i, 2, de}] + O[x]^(de+1);
  var = Table[a_i, {i, 2, de}];
  exp = (1/x^2) * D[(x^2) * D[t[x], x], x] - Exp[-t[x]] /.
    {t[x] -> series, t'[x] -> D[series, x], t''[x] -> D[series, {x, 2}]};
  coef = CoefficientList[Normal[exp], x];
  sol = Solve[Thread[coef == 0], var];
  (series /. sol)[[1]]
]

(* Definimos una nueva función que
muestra la simplificación de la aproximación *)

LESS = Simplify[Normal[LES[x, 6]]]

(* Encontramos el que usaremos como valor
inicial para la función y la integración numérica *)

valini = Expand[LESS] /. x -> 1/1000
```

```

ClearAll["Global`*"]

(* Haciendo uso de nuestras aproximaciones para los valores iniciales,
definimos la función LE[n0] la cual resolverá la ecuación de Lane -
Emden para el "n" dado *)

LE[n0_, k_] := Module[{n = n0, ini, res, t, fin = k},
  ini = 1/100;
  NDSolve[{{(1/x^2)*βx((x^2)*βxt[x]) + t[x]^n = 0,
    t[ini] = valini,
    t'[ini] = valinid},
  t, {x, ini, fin}, WorkingPrecision -> 20][[1, 1, 2]]
];

(* Creamos una lista con las funciones desde n = 0 hasta n = 4.5,
hacemos uso de la lista auxiliar rango para evitar cálculos de más *)

res = {};
rango = {5, 3, 5, 5, 5, 5.3, 7, 11, 15, 32};
For[{i = 0, l = 1}, i ≤ 4.5, {i += 0.5, l++},
  res = AppendTo[res, LE[i, rango[[l]]]];
]

(* Ahora, encontramos las raíces de las mismas funciones,
cada una depende de una "semilla inicial" la cual escogemos de manera
apropiada [en este caso 3]; tomamos la parte real por falta de precisión *)

Raiz = Re[Map[FindRoot[res[[#]] [x] = 0, {x, 3}][[1, 2]] &, Range[10]]]

```

Código para resolver la ecuación de equilibrio hidrostático para esferas isotérmicas.

```
(* Limpiamos todas las variables *)

ClearAll["Global`*"]

(* Encontramos una aproximación en serie de la función *)

LES[x_, de_Integer] := Module[{series, var, coef, exp, sol, t, a},
  series = Plus@@Table[a_i x^i, {i, 2, de}] + O[x]^(de + 1);
  var = Table[a_i, {i, 2, de}];
  exp = (1 / x^2) * D[(x^2) * D[t[x], x], x] - Exp[-t[x]] /.
    {t[x] → series, t'[x] → D[series, x], t''[x] → D[series, {x, 2}]};
  coef = CoefficientList[Normal[exp], x];
  sol = Solve[Thread[coef == 0], var];
  (series /. sol)[[1]]
]

(* Definimos una nueva función que
muestra la simplificación de la aproximación *)

LESS = Simplify[Normal[LES[x, 6]]]

(* Encontramos el que usaremos como valor
inicial para la función y la integración numérica *)

valini = Expand[LESS] /. x → 1 / 1000
```

Código en el que se resuelve la ecuación de equilibrio hidrostático para enanas blancas.

```

(* Limpiamos todas las variables *)
ClearAll["Global`*"]

(* Resolvemos numéricamente la ecuación mediante el
módulo que nos devuelve una interpolación de la función *)

res[f0_] := Module[{ini, res, t, f},
  f = f0;
  ini = 1 / 100;
  NDSolve[{{(1 / x^2) * D[(x^2) * D[t[x], x]), x] + (t[x] * (t[x] + 2 / f))^(3 / 2) == 0,
    t[ini] == 0.9999999999999999999,
    t'[ini] == 0.00000000000000001}, t,
  {x, ini, 20}, WorkingPrecision -> MachinePrecision][[1, 1, 2]]
];

(* Encontramos el valor de la masa entre la masa
solar dados valores de  $f_c$  y lo almacenamos en una lista *)

res1 = {};
For[i = 0.01, i ≤ 101, i += 0.01,
  thi = res[i];
  xii = Re[FindRoot[thi[x] == 0, {x, If[i ≤ 0.1, 0.1, 0.5]}][[1, 2]]];
  h[z_] = D[thi[z], z];
  MMSi = 0.72 * (-xii^2) * Re[h[xii]];
  res1 = AppendTo[res1, {Log10[i] + 2, MMSi}];
];

(* Ahora creamos una lista con los valores de  $M/M_\odot$  vs  $R/10^6$ ,
hacemos uso de los valores de  $f_c$  como si se tratara de una función inversa;
notamos que mientras la masa se acerca
al límite de Chandrasekar el radio decrece a 0 *)

res2 = {};
For[i = 0, i ≤ 1.45, i += 0.01,
  FC = 10^(FindRoot[f[y] - i == 0, {y, 0, 4}][[1]][[2]] - 2);
  theta = res[FC];
  raiz = Re[FindRoot[theta[x] == 0,
    {x, If[FC ≥ 0.26, 0.5, If[FC ≥ 0.0735, 0.3, 0.1]}][[1, 2]]];
  r0 := 3.88466 * 10^6 * (1 / FC);
  Ri = r0 * raiz / 10^6;
  res2 = AppendTo[res2, {i, Ri}];
];

```

Bibliografía

- [1] ALFONSO, J., GALADÍ, D., AND MORALES, C. *100 Conceptos básicos de Astronomía*. Sociedad Española de astronomía, 2009.
- [2] BATTANER, E. *Introducción a la Astrofísica*. Alianza Editorial, 1999.
- [3] BINNEY, J., AND TREMAINE, S. *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, 1994.
- [4] CARROLL, B., AND OSTLIE, D. *An introduction to Modern Astrophysics*. Pearson, 2007.
- [5] CHANDRASEKHAR, S. *An introduction to the study of stellar structure*. Dover Publications, INC, 1967.
- [6] FORTIN, S. *Un modelo termodinámico para describir las estrellas mediante la aplicación de mecánica estadística*. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Universidad de Buenos Aires, 2010. <http://casanchi.com/ast/mestrellas01.pdf>.
- [7] HANSEN, C., KAWALER, S., AND TRIMBLE, V. *Stellar interiors: Physical principles structure and evolution*. Springer, 2004.
- [8] LANDAU, L., AND LIFSHITZ, E. *Mecánica de fluidos*, vol. 6. Editorial Reverté, S. A., 2001.
- [9] PADMANABHAN, T. *Theoretical Astrophysics*, vol. II: Stars and Stellar Systems. Cambridge University Press, 2001.
- [10] POISSON, E., AND WILL, C. *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*. Cambridge University Press, 2014.
- [11] REINA, J. Potencial gravitacional, densidad superficial y velocidad circular para modelos planos de galaxias, 2004.
- [12] ROY, N. R. *Sobre las interacciones fundamentales, las partículas elementales y las teorías de campos*. Departamento de Matemática Aplicada y Telemática U.P.C. <http://www-ma4.upc.edu/~nrr/docs/buran1.pdf>.

- [13] ZEMANSKY, M., AND DITTMAN, R. *Calor y Termodinámica*. McGraw-Hill, 1985.