



UNIVERSIDAD MICHUACANA DE SAN NICÓLAS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

CONSTRUCCIÓN DE UN AGUJERO DE GUSANO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas

PRESENTA:

Raúl Gutiérrez Zalapa

ASESOR

Dr. Joaquín Estevez Delgado



Morelia Michoacán, Enero de 2017

Indice

Agradecimientos	v
Resumen	vii
Abstract	ix
Introducción	xi
1 Qué son los agujeros de gusano	1
1.1 Surgimiento de los agujeros de gusano	3
1.2 Agujero negro de Thorne	4
1.3 Justificación de los agujero de gusano	4
2 Espacio estático y esféricamente simétrico	5
2.1 Espacio y tiempo estático	5
2.2 Solución interior de Schwarzschild	10
3 Variedades diferenciables	15
3.1 Tensor de curvatura	18
3.2 El tensor de Ricci y la curvatura escalar	20
3.3 Variedades diferenciables	21
3.4 Simetrías y vectores de Killing	22
3.5 Vectores de Killing	22
3.6 Fluido perfecto y anisotrópico	23
3.7 Ecuaciones de Einstein	27
4 Agujeros de gusanos estáticos y esféricamente simétricos	31
4.1 Características de un agujero de gusano	31
4.2 Violación de las condiciones de energía	32
4.3 Las condiciones de energía	33
4.4 Agujero de gusano de Morris-Thorne	34
5 Construcción y análisis de un agujero de gusano	39
5.1 Mapeo de Soluciones interiores en agujeros de gusano	39
5.2 Análisis de la solución de un agujero de gusano	40

5.2.1	Construcción de coordenadas especiales	44
5.3	Ecuación de estado	46
5.4	Sistema politrópico	48
6	Conclusiones	55

Indice de figuras

1.1	Vista gráfica de un agujero de gusano	2
1.2	Agujero de Morris-Thorne	4
3.1	Efecto caída de elevador	17
3.2	Contracción relativista	24
5.1	Violación de la condición de energía con radio $r=1.07$	41
5.2	Violación de la condición de energía con radio $r=1.7$	41
5.3	Violación de la condición de energía con radio $r=7.7$	42
5.4	Presión radial con $r=1.07$	42
5.5	Presión radial con $r=1.7$	43
5.6	Presión radial con $r=7.7$	43
5.7	Presión tangencial más la densidad con $r=1.07$	44
5.8	Presión tangencial más la densidad con $r=1.7$	44
5.9	Presión tangencial más la densidad con $r=7.7$	45
5.10	Garganta del agujero de gusano	45
5.11	Condiciones de energía del agujero de gusano con los valores citados . .	46
5.12	Condiciones de energía del agujero de gusano con los valores citados . .	46
5.13	Densidad con diferentes valores de n	47
5.14	Presion tangencial con diferentes valores de n	47
5.15	Gráfica de la presión radial	50
5.16	Gráfica de la densidad	50
5.17	Gráfica de la presión tangencial	51
5.18	Gráfica de la violación de condiciones de energía	51

Construcción de un Agujero de Gusano

Agradecimientos

Quiero agradecer a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo y a la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas por permitirme realizar mis estudios en estas instalaciones y por la calidad brindada, a cada uno de los profesores que me impartió algún curso, así como a cada uno de los compañeros con los que en algún momento compartí clase. A mi familia por apoyarme y propiciarme la posibilidades para realizar mis estudios, por sus consejos así como darme apoyo para superarme. A los profesores Dr. Joaquín Estévez Delgado, M.C. Gabriel Arroyo Correa, M.M.E. José Vega Cabrera, Dra. Mary Carmen y Motserrat Peña Gomar y Dr. Luis Mariano Hernández Ramírez, por fungir como mi asesor y sinodales respectivamente y también por admirarlos como personas, pues ellos tienen una meta, hacer de los alumnos de la carrera personas humildes, humanas y centradas en ayudar a los demás, no en tratar de elevar el ego, pues enfermos altaneros ya existimos muchos.

En especial quiero agradecer a mi novia Alondra por apoyarme a crecer, por soportarme, por salvarme, cuando tal vez estaba en el momento más oscuro de carrera, por tener en mente siempre un avance y una mejora en mi vida, por enseñarme nuevos horizontes y enlazar en cada uno de ellos una gran esperanza, por los momentos más grandes de risas y por nunca dejar de confiar en mi persona. en síntesis por una vida.

Resumen

En este trabajo se presentan dos soluciones que representan agujeros de gusano, la primera de estas es basada en un algoritmo mientras que la segunda es por una propuesta hecha en base a una ecuación de estado politrópica. En el primer caso encontramos una métrica que representa un agujero de gusano en donde se observa que cuando el elemento que mide la longitud propia tiende hacia las regiones asintóticas, la geometría es plana y cuando este mismo elemento es cero, encontramos la garganta, es ahí donde la densidad y la presión radial del agujero de gusano toman su valor mínimo y se viola la condición de energía nula. En el segundo caso a partir de la ecuación de estado, suponiendo una magnitud constante del vector de Killing es construida la solución. Esta solución es asintóticamente anti De-Sitter y la presión radial y densidad en infinito son constantes.

Palabras clave: Agujeros de gusano, ecuaciones de Einstein, ecuación de estado politrópica, asintóticamente anti De-Sitter, espacio-tiempo estático.

Abstract

In this report is present two solutions that represent wormholes, the first is based in an algoritmn while the second is a porpose with a polytropic state equation. The first case we find a metric that represent a wormhole and we can see when the element that measure the proper lenght tends to asimptotic regions, the geometry is flat and when this element is zero, find the troath, it is there where the density and the radial pressure wormhole taken the minimum and the null energy condition is violed. In the second case starting with the state equation, assuming a Killing vector constatnt magnitude is built the solution. This solution is asimptotical anti De-Sitter and the radial pressure and density evaluated in infinity are constants.

Keywords: Wormholes, Einstein equations, polytropic state equation, asimptotical anti De-Sitter, space-time static.

Introducción

La geometría diferencial ha sido una herramienta importante en la relatividad general que ha permitido el planteamiento y entendimiento de diferentes objetos, que previo a su planteamiento eran casi ausentes, entre los que figuran los agujeros negros y los agujeros de gusano. Los primeros, actualmente tienen un sustento observacional siendo el resultado del colapso gravitacional estelar o la acumulación de un conjunto de ellas llamados agujeros negros supermasivos, mientras que los segundos aún constituyen un modelo matemático. Sin embargo en el inicio del planteamiento de los agujeros negros, estos también parecían ser una propuesta matemática. Una de las justificaciones de su posible existencia y como consecuencia de modelarlos matemáticamente, es la expansión acelerada del universo ya que esta implica la existencia de materia exótica es decir que viola las condiciones de energía. En esta tesis siguiendo el formalismo, propuesto, en [2] para mapear soluciones interiores en agujeros de gusano, proponemos un nuevo agujero de gusano a partir de la solución interior de Schwarzschild [2] y realizamos también un análisis de esta solución mostrando que en efecto representa un agujero de gusano. Además se muestra que las presiones radial y tangencial son descritas por ecuaciones de estado de la forma $P_r = P_r(\rho)$ y $P_t = P_t(\rho)$ y como es característico de los de este tipo de objetos, estos violan las condiciones de energía.

Los agujeros de gusano han sido, desde su concepción, formas geométricas muy caprichosas y llenas de especulaciones, por su forma y relevancia tan especial, ya que mediante su garganta se permite la conexión de dos universos o dos regiones del espacio tiempo. Una manera de clasificarlos es por su continuidad o discontinuidad. Con discontinuidades, su trazado es el resultado del pegado de dos regiones asintóticas, mientras que otros son descritos por un espacio continuo y regular.

Comenzaremos definiendo que es un agujero de gusano, su surgimiento y en que consiste su modelación, se darán algunas analogías basadas en el puente de Einstein-Rosen así como la parte teórica que justifica dichos entes. Ahondaremos un poco en el espacio tiempo estático y esféricamente simétrico, para ello pues desarrollaremos sus variedades diferenciables y los vectores de Killing. Estudiaremos, con el anterior sustento, las características de los agujeros de gusano estáticos y esféricamente simétricos, violación de las condiciones de Energía, fluido anisotrópico, superficie mínima, regularidad de la geometría así como un desarrollo del agujero de Thorne, ya casi para terminar daremos una solución interior de Schwarzschild, explicaremos nuestra construcción de una solución interior de Schwarzschild en un agujero de gusano y estableceremos la construcción de coordenadas especiales. Mediante un análisis plantearemos el embe-

bimiento de su geometría, su ecuación de estado y su tiempo propio para finalizar con cuestiones relacionadas con su garganta.

Capítulo 1

Qué son los agujeros de gusano

La Teoría de la Relatividad General (TGR) es catalogada como uno de los logros más grandes de la mente humana de todos los tiempos. La idea que postula Albert Einstein en esta teoría es muy clara. La materia, por el hecho de existir es capaz de curvar al espacio tiempo. De este modo se hace a un lado el concepto de fuerza de la Gravitación Universal de Newton. Ahora la interacción gravitacional entre dos objetos cualquiera está determinada por la manera en que éstos curvan al espacio tiempo a su alrededor y las geodésicas sobre esta geometría. Einstein propone sus famosas ecuaciones como una explicación de este comportamiento de la naturaleza $G = kt$.

El lado derecho es el tensor energía-materia de cualquier sistema físico que se estudie. El lado izquierdo es el tensor de Einstein, el cual contiene la información de la geometría del espacio tiempo que ha sido curvado por la materia del sistema.

La ecuación anterior establece la equivalencia que existe entre la materia y la geometría excepto por un factor multiplicativo constante k , donde

$$k = \frac{8\pi G}{c^4}$$

G la constante de gravitación universal de Newton y c la velocidad de la luz en el vacío. Debido a la conservación de la energía-materia, la variación del tensor energía momento es cero. Estas ecuaciones también proveen la descripción de objetos extraños a nuestra experiencia tales como los hoyos negros, enanas blancas, estrellas de neutrones, etc. La TGR ha sido capaz al resolver los problemas gravitacionales más simples y medianamente complejos entonces eso da buenos indicios de su validez a cualquier escala.

Existen algunas soluciones (exactas) de las ecuaciones de Einstein, que permiten la conexión entre dos regiones de espacio-tiempo de una manera muy natural y elegante. Esto no necesariamente implica la existencia física de estos objetos, pero si da pie a la especulación con un carácter científico. Einstein mismo encontró una de las primeras soluciones de este tipo y a través de los años otras personas han contribuido con este tema que quizá raya aún en el ámbito de la ciencia ficción.[15]

El ser humano siempre ha tenido la curiosidad por explorar el espacio que lo rodea y los viajes interestelares no son la excepción, pero la inmensidad del espacio interestelar

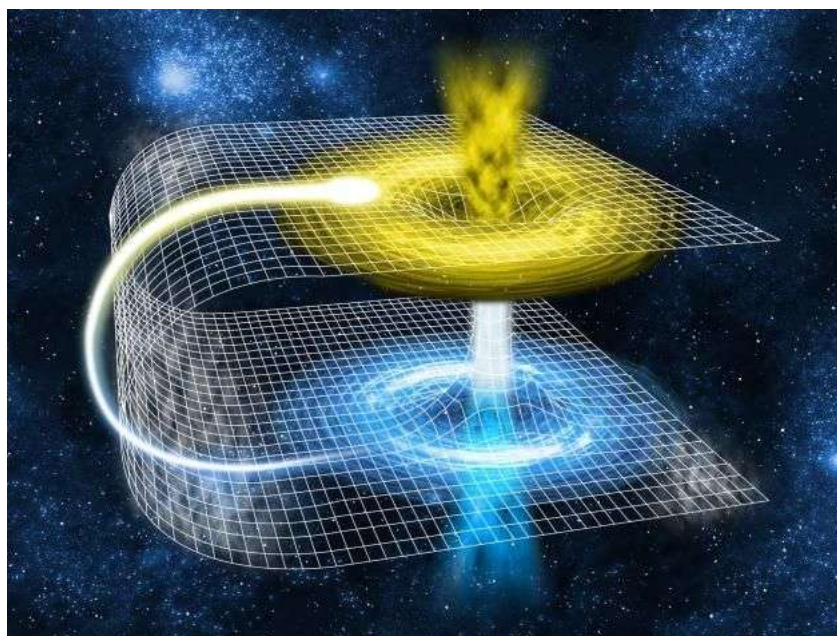


Figura 1.1: Vista gráfica de un agujero de gusano

implica que incluso si viajáramos en una nave que se acelere casi a la velocidad de la luz, la exploración de estrellas cercanas, a unos cuantos años luz de la tierra, podría tomar el tiempo de vida de un ser humano. Por ejemplo el explorar la Vía Láctea nos llevaría aproximadamente unos 100 000 años. Aunque se pudiera sobrevivir al viaje debido a la dilatación del tiempo en el marco de referencia de la nave, cuando este regresara tal vez no habría nadie para constatar su viaje.

Así nos damos cuenta que los viajes espaciales con nuestra tecnología actual, aún no nos es posible explorar el espacio, por tanto si queremos ir a su conquista debemos buscar formas más eficientes de realizar estos viajes interestelares. Existe la posibilidad que esto se pueda conseguir mediante la utilización de la Teoría de Einstein.

Una de las consecuencias de la Teoría de la Relatividad es la posible existencia de atajos para ir de un punto a otro en el espacio-tiempo, a saber estos son llamados agujeros de gusano

La teoría especial de la relatividad se basa en dos principios. El primero dice que todos los observadores inerciales son equivalentes. Esto significa que si un observador inercial investiga alguna ley física, entonces cualquier otro observador inercial realizando el mismo experimento debe observar la misma ley que el primer observador. El segundo principio dice que la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas inerciales.

Cuando una estrella supergigante roja explota, arroja materia al exterior, de modo que acaba siendo de un tamaño inferior y se convierte en una estrella de neutrones. Pero también puede suceder que se comprima tanto que absorba su propia energía en su interior y desaparezca dejando un agujero negro en el lugar que ocupaba. Este agujero

tendría una gravedad tan grande que ni siquiera la radiación electromagnética podría escapar de su interior. Estaría rodeado por una frontera esférica, llamada horizonte de sucesos.

Los agujeros de gusano, son soluciones a las ecuaciones de Einstein con gravedad que actúan como pasadizos conectando puntos en el espacio-tiempo, de tal manera que el viaje entre los puntos a través del agujero de gusano pueden tomar mucho menos tiempo que a través del espacio normal.[3]

Los expertos en la física teórica han encontrado otras soluciones de agujeros de gusano, estas soluciones conectan varios tipos de geometrías sobre las bocas de estos elementos topológicos. Una situación destacable de los agujeros de gusano es que se comportan como atajos en el espacio tiempo, y por lo que se nos puede permitir hacer viajes en el, esta propiedad retoma el hecho de que si viajamos a velocidades más rápidas que la luz, tendríamos la posibilidad de comunicarnos con otros espacios.

La geometría de un agujero de gusano tiene asociada, de facto, a una geometría inestable. La única materia que puede usarse para estabilizarlo es un material que tiene una densidad de energía negativa, en algún marco de referencia. Pues no existe materia clásica que haga esto, pero es posible que las fluctuaciones cuánticas de los campos puedan hacerlo.

1.1 Surgimiento de los agujeros de gusano

Los agujeros de gusano son predichos por la teoría de la relatividad general. En 1935, los físicos Albert Einstein y Nathan Rosen utilizaron la teoría de la relatividad general para proponer la existencia de "puentes" a través del espacio-tiempo. Estos caminos, llamados puentes Einstein-Rosen o agujeros de gusano, conectan dos puntos diferentes en el espacio-tiempo, creando un acceso directo que teóricamente podría reducir el tiempo de viaje y la distancia. Los agujeros de gusano contienen dos bocas, con una garganta conectando los dos. Las bocas serían muy probablemente esferoidales.[3]

La garganta puede ser un tramo recto, pero también podría enrollarse alrededor, tomando un camino más largo de lo que una ruta más convencional podría requerir. La teoría de la relatividad general de Einstein predice matemáticamente la existencia de estos entes, pero ninguno ha sido descubierto hasta la fecha. Un agujero de gusano de masa negativa podría ser descubierto por la forma en que su gravedad afecta a la luz que pasa, como se muestra en la siguiente figura.

Se pueden distinguir dos tipos de agujeros de gusano: transitables en intrauniversales, los tansitables son aquellos que conectan nuestro universo con otro universo o dos universos distintos y los intrauniversales, son aquellos que conectan dos regiones distantes de un mismo universo. Estos dos tipos son totalmente equivalentes si estudiamos las gargantas, ya que localmente no es posible distinguir entre uno y otro. La geometría de estos objetos es muy peculiar, ya que no poseen singularidades desnudas, no hay horizontes de eventos, la forma es siempre como el de una garganta y las homogeneidades del espacio-tiempo son pequeñas de modo que no se sienten fuerzas de marea cerca de la garganta.[16]

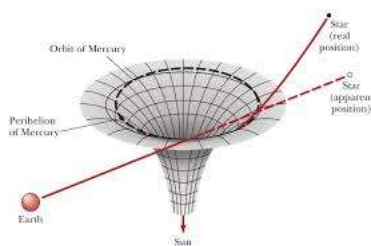


Figura 1.2: Agujero de Morris-Thorne

1.2 Agujero negro de Thorne

El trabajo publicado por Michael S. Morris y Kip S. Thorne en 1987, es el primer cimientito firme para la física de los agujeros de gusano. Inspirados en la novela de Carl Sagan, *Contacto*, ellos estudiaron las ecuaciones de Einstein y determinaron las constricciones necesarias para que una solución tipo agujero de gusano pueda ser utilizada, al menos en principio, para viajes interestelares.

En sus soluciones es esencial la geometría de una garganta en la cual no existe ningún horizonte de eventos; esta condición, junto con las impuestas por las ecuaciones de campo dan lugar a la construcción más importante en sus soluciones: la materia que puede dar lugar a este tipo de objetos es de tipo exótica. Esta característica choca con las concepciones más conservadoras acerca de la naturaleza y el universo.

Sin embargo, no hay prueba alguna para descartar la existencia de dicho tipo de materia; es más, en el estado en que se encuentra actualmente la ciencia, parece ser una buena apuesta la existencia abundante de materia con densidad negativa en el universo. Se habla de un agujero de gusano transitado para definir la idea de un objeto que permite el viaje interestelar por entes humanos o similares sin destruirlos.[16]

1.3 Justificación de los agujero de gusano

Se sabe que los agujeros de gusano de Lorentz son posibles dentro de la relatividad general, pero la posibilidad física de estas soluciones es incierta. Incluso, se desconoce si la teoría de la gravedad cuántica, que se obtiene al condensar la relatividad general con la mecánica cuántica, permitiría la existencia de estos fenómenos. La mayoría de las soluciones conocidas de la relatividad general que permiten la existencia de agujeros de gusano atravesados requieren la existencia de materia extraña, una sustancia teórica que contiene energía de densidad negativa. Sin embargo, no ha sido matemáticamente probado que este sea un requisito absoluto para este tipo agujeros de gusano atravesados ni se ha establecido que la materia exótica no pueda existir.[8]

Capítulo 2

Espacio estático y esféricamente simétrico

2.1 Espacio y tiempo estático

El entendimiento de fenómenos físicos requiere de un planteamiento adecuado de las ecuaciones que las puedan describir y en ocasiones del tipo de coordenadas que se elijan. Por ejemplo si deseamos determinar el campo eléctrico externo a un cascarón esférico conductor en el espacio euclidiano R^3 , es conveniente utilizar coordenadas esféricas. Algo similar a esto ocurre en relatividad general, aunque para este caso, el espacio-tiempo es descrito por una variedad de Lorentz M de dimensión 4, además de la adaptación de las coordenadas de acuerdo a la simetría de la geometría que desea modelar, los agujeros de gusano, gravastars, estrellas y agujeros negros son modelados en variedades C^k con $k \geq 4$ diferenciables con geometría estática y esférica. Aunque también se han modelado algunos de estos objetos para geometrías estáticas y axialsimétricas o bien con simetría estacionaria y axialsimétrica. Nuestro interés estará centrado en una variedad con geometría estática y esféricamente simétrica globalmente. La estaticidad implica la existencia de un vector de Killing temporal ortogonal, y la simetría esférica es generada por tres vectores de Killing espaciales con un álgebra de Lie asociada al grupo $SO(3)$ $[\xi_{(i)}, \xi_{(j)}] = \epsilon_{ijk}\xi_{(k)}$. Un espacio-tiempo se dice que es estacionario si existe un grupo de un parámetro de isometrías, ϕ_θ , cuyas órbitas son curvas temporales[1]. Este grupo de isometrías expresa la "simetría de traslación de tiempo" del espacio-tiempo. De manera equivalente, un espacio-tiempo estacionario es uno que posee un tipo de vector temporal de Killing, ξ^a . Un espacio-tiempo se dice estático si es estacionario y si, además, existe una hipersuperficie espacial σ que es ortogonal a las órbitas de la isometría. Por el teorema de Frobenius, esto es equivalente a la exigencia de que el género vector temporal de killing ξ^a satisfice:

$$\xi_{[a}\nabla_b\xi_{c]} \quad (2.1)$$

El significado de esta condición adicional de hipersuperficie ortogonal es mejor entendido mediante la introducción de coordenadas convenientes para espacios tiempos

estáticos como estos, si $\xi^a \neq 0$ por todas partes en σ , a continuación, en una vecindad de σ todos los puntos se encuentran en una órbita única de ξ^a que pasa a través de σ [1]. Suponiendo $\xi^a \neq 0$, elegimos arbitrariamente coordenadas x^μ en σ y en la etiqueta de cada punto p en esta vecindad de σ por el parámetro, t , de la órbita que comienza desde σ y termina en p , y las coordenadas, x^1, x^2, x^3 , de la órbita en σ . Dado que este sistema de coordenadas emplea el parámetro de Killing, t , como una de las coordenadas, los componentes métricos en esta base coordenada será independiente de t [1]. Por otra parte, dado que la superficie σ_t esta definido como el conjunto de puntos cuyo "coordenada de tiempo" tiene el valor de t es la imagen de σ bajo la isometría ϕ_t se sigue que cada σ_t , también es ortogonal a ξ^a . Por lo tanto, en estas coordenadas, las componentes de la métrica adoptan la forma:

$$ds^2 = -V^2(x^1, x^2, x^3)dt^2 + \sum_{\mu, \nu=1}^3 h_{\mu\nu}(x^1, x^2, x^3)dx^\mu dx^\nu \quad (2.2)$$

donde $V^2 = -\xi_a \xi^a$ y la ausencia de $dt dx^\mu$ en términos cruzados expresa la ortogonalidad de ξ^a con σ . Una métrica estática, no forzosamente debe tener términos $dt dx^\mu$ cruzados en cualquier sistema de coordenadas que utilice el parámetro Killing como una de ellas. De la forma explícita de una métrica estática, la ecuación, puede verse que el difeomorfismo definido por $t \rightarrow -t$ (es decir, el mapeo que toma cada punto de σ_t , y lo lleva al punto con las mismas coordenadas espaciales en σ_{-t}), es una isometría. Entonces, además de la "traslación en el tiempo" la simetría, $t \rightarrow t + \text{constante}$, que poseen todos los espacio-tiempos estacionarios, los espacio-tiempos estáticos también poseen una simetría "reflexión temporal". Físicamente, los campos que son invariantes a la traslación en tiempo pueden dejar de serlo en el momento reflexión invariable, cuando se trata de un movimiento de rotación en el tiempo, ya que la imagen cambiará la dirección de rotación y por lo tanto no lo restaurará al original de la configuración[1]. Así, por ejemplo, una bola de fluido giratorio puede tener un tiempo independiente, la materia y la distribución de la velocidad, pero no posee una simetría de reflexión temporal. Un espacio-tiempo se dice que es esféricamente simétrico si su grupo de isometría contiene un subgrupo isomorfo al grupo $SO(3)$, y las órbitas de este subgrupo (i.e., la colección de puntos resultantes de la acción del subgrupo sobre un punto dado) son esferas de dos dimensiones[1]. Las isometrías $SO(3)$ pueden entonces interpretarse físicamente como rotaciones, y por lo tanto un espacio-tiempo esféricamente simétrico es aquel cuyos componentes de la métrica son invariantes bajo rotaciones. La métrica del espacio-tiempo induce una métrica para cada órbita de la 2-esfera, la cual, debido a la simetría de rotación, debe ser un múltiplo de la métrica de una unidad de la 2-esfera, y por lo tanto puede ser completamente caracterizada por el área total, A , de la 2-esfera. En espacio-tiempos para la simetría esférica es conveniente introducir la función de r , definida por

$$r = (A/4\pi)^{1/2} \quad (2.3)$$

Entonces, en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) la métrica sobre cada orbita de la 2-esfera toma la forma:

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (2.4)$$

En el espacio euclidiano plano, tridimensional, r también sería el valor del radio de la esfera, i.e; la distancia desde la superficie de la esfera a su centro. En estas coordenadas, la métrica es esférica, estática, arbitraria, espacio-tiempo simétrica y toma la forma sencilla de:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \quad (2.5)$$

Se debe tener en cuenta, sin embargo, que, además de la ruptura bien entendida, de las coordenadas esféricas en los polos norte y sur de las esferas, este sistema de coordenadas se descompone en los puntos donde $\xi^a = 0$ o $\nabla_a r = 0$ (o, más en general, donde ξ^a y $\nabla^a r$ se convierten en colineales). La mayor parte del trabajo necesario para obtener el vacío estático, con simetría esférica de la ecuación de Einstein ha sido concluido, ya que hemos reducido el problema general de la determinación de 10 funciones desconocidas (los componentes métricas, $g_{\mu\nu}$) de cuatro variables (las cuatro coordenadas), a la determinación de dos funciones (f y h) de una variable (r)[1]. Las tareas restantes son para calcular el tensor de *Ricci*, $R_{ab} = 0$, de la métrica y resolver la ecuación $R_{ab} = 0$ para f y h . Vamos a calcular R_{ab} , una base ortonormal conveniente para la métrica de la ecuación anterior es:

$$(e_0)_a = f^{1/2}(dt)_a \quad (2.6)$$

$$(e_1)_a = h^{1/2}(dr)_a \quad (2.7)$$

$$(e_2)_a = r(d\theta)_a \quad (2.8)$$

$$(e_3)_a = r \sin(\theta)(d\phi)_a \quad (2.9)$$

usando la derivada ordinaria,

$$\partial_{[a}(e_0)_{b]} = \frac{1}{2}f^{-1/2}f'dr_{[a}dt_{b]} \quad (2.10)$$

$$\partial_{[a}(e_1)_{b]} = 0 \quad (2.11)$$

$$\partial_{[a}(e_2)_{b]} = dr_{[a}d\theta_{b]} \quad (2.12)$$

$$\partial_{[a}(e_3)_{b]} = \sin\theta dr_{[a}d\phi_{b]} + r \cos\theta d\theta_{[a}d\phi_{b]} \quad (2.13)$$

donde $f' = df/dr$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f^{-1/2}f'(dr)_{[a}dt_{b]} &= h^{1/2}(dr)_{[a}\omega_{b]01} + r(d\theta)_{[a}\omega_{b]02} + r\sin\theta(d\phi)_{[a}\omega_{b]03} \\ 0 &= f^{1/2}(dt)_{[a}\omega_{b]01} + r(d\theta)_{[a}\omega_{b]12} + r\sin\theta(d\phi)_{[a}\omega_{b]13}(dr)_{[a}(d\theta)_{b]} \\ &= -f^{1/2}(dt)_{[a}\omega_{b]20} + h^{1/2}(dr)_{[a}\omega_{b]21} + r\sin\theta(d\phi)_{[a}\omega_{b]23}\sin\theta(dr)_{[a}(d\phi)_{b]} \\ &\quad + r\cos\theta(d\theta)_{[a}\omega_{b]} = -f^{1/2}(dt)_{[a}\omega_{b]30} + h^{1/2}(dr)_{[a}\omega_{b]31}r(d\theta)_{[a}\omega_{b]32} \end{aligned}$$

una solución plausible sería:

$$\omega_{b02} = \omega_{b03} = 0 \quad (2.14)$$

$$\omega_{b01} = \frac{1}{2} \frac{f'}{(fh)^{1/2}} (dt)_b + \alpha_1 dr_b \quad (2.15)$$

donde la función de α_1 , es indeterminada. Para la resolución de esta requerimos $\alpha_1 = 0$. A partir de esto que también puede proponer que,

$$\omega_{b12} = \omega_{b13} = 0 \quad (2.16)$$

pero esto conduce a la inconsistencia, por lo que nos limitamos concluir que

$$\omega_{b12} = \alpha_2(d\theta)_b + \alpha_3(d\phi)_b \quad (2.17)$$

$$\omega_{b13} = \alpha_4(d\phi)_b + \frac{a_3}{\sin\theta}(d\theta)_b \quad (2.18)$$

sustituyendo:

$$\alpha_2 = -h^{-1/2} \quad (2.19)$$

$$\omega_{b23} = -\frac{h^{1/2}}{r\sin\theta}a_3(dr)_b + a_5(d\phi)_b \quad (2.20)$$

finalmente

$$\alpha_3 = 0 \quad (2.21)$$

$$\alpha_4 = -h^{-1/2}\sin\theta \quad (2.22)$$

$$\alpha_5 = -\cos\theta \quad (2.23)$$

Como hemos constatado que no existe incompatibilidad, esto significa que nuestra solución de prueba (generada por la conjetura inicial)

$$\omega_{b02} = \omega_{b03} = 0 \quad (2.24)$$

es, de hecho, la solución. Por lo tanto, hemos encontrado:

$$\omega_{b02} = \omega_{b03} = 0 \quad (2.25)$$

$$\omega_{b01} = \frac{f'}{2(fh)^{1/2}}(dt)_b \quad (2.26)$$

$$\omega_{b12} = -h^{-1/2}(d\theta)_b \quad (2.27)$$

$$\omega_{b13} = -h^{-1/2} \sin \theta (d\phi)_b \quad (2.28)$$

$$\omega_{b23} = -\cos \theta (d\phi)_b \quad (2.29)$$

Ahora obtendremos el tensor de Riemann:

$$R_{ab01} = -R_{ab10} = \frac{d}{dr} [(fh)^{-1/2} f'] dr_{[a} dt_{b]} \quad (2.30)$$

$$R_{ab02} = -R_{ab20} = f^{-1/2} h^{-1} f' (d\theta)_{[a} dt_{b]} \quad (2.31)$$

$$R_{ab03} = -R_{ab30} = f^{-1/2} h^{-1} f' \sin \theta (d\phi)_{[a} dt_{b]} \quad (2.32)$$

$$R_{ab12} = -R_{ab21} = h^{-3/2} h' (dr)_{[a} d\theta_{b]} \quad (2.33)$$

$$R_{ab13} = -R_{ab31} = \sin \theta h^{-3/2} h' (dr)_{[a} d\phi_{b]} \quad (2.34)$$

$$R_{ab23} = -R_{ab32} = 2(1 - h^{-1}) \sin \theta (d\theta)_{[a} d\phi_{b]} \quad (2.35)$$

El tensor de Ricci se calcula fácilmente a partir del tensor de Riemann.

$$R_{00} = R_{010}^1 + R_{020}^2 + R_{030}^3 \quad (2.36)$$

$$= \frac{1}{2} (fh)^{-1/2} \frac{d}{dr} [(fh)^{-1/2} f'] + (rfh)^{-1} f' \quad (2.37)$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2} (fh)^{-1/2} \frac{d}{dr} [(fh)^{-1/2} f'] + (rh^2)^{-1} h' \quad (2.38)$$

$$R_{22} = -\frac{1}{2} (rfh)^{-1} f' + \frac{1}{2} (rh^2)^{-1} h' r^{-2} (1 - h^{-1}) \quad (2.39)$$

donde $R_{\mu\nu} = R_{ab}(e_\mu)^a(e_\nu)^b$ encontrando finalmente que $R_{22} = R_{33}$ y que los componentes fuera de la diagonal de $R_{\mu\nu}$ desaparecen de forma idéntica [1]. Cabe resaltar que si al igualar a cero todos los anteriores componentes, obtenemos las ecuaciones de Einstein en el vacío para un espacio y tiempo estático y esféricamente simétrico.

2.2 Solución interior de Schwarzschild

Centremos nuestra atención, ahora, a las soluciones estáticas, con simetría esférica de la ecuación de Einstein con un tensor de tensión-energía de un fluido perfecto,

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(g_{ab} + u_a u_b) \quad (2.40)$$

Con el fin de ser compatible con la simetría estática del espacio-tiempo el fluido, la 4-velocidad, u^a , deben apuntar en la misma dirección que el campo vectorial estático de Killing, ξ^a es decir

$$u^a = -(e_0)^a = -f^{-1/2}(dt)^a \quad (2.41)$$

donde f es la función que aparece en la métrica general de la forma de la ecuación (2.1.5) de la Ref. [1]. Las soluciones que buscan describir las posibles fuentes de fluido interior provienen del exterior métrica de Schwarzschild, y por lo tanto nuestra investigación dará lugar a las ecuaciones de la estructura para fluidos y objetos estáticos. La ecuación de Einstein con un fluido presente se obtiene simplemente añadiendo los términos adecuados al tensor de tensión-energía a las ecuaciones (6.1.35) y (6.1.37) de la Ref.[1]. Tomaremos las tres ecuaciones independientes en la forma

$$8\pi T_{00} = 8\pi\rho = G_{00} = R_{00} + \frac{1}{2}(R_0^0 + R_1^1 + R_2^2 + R_3^3) = (rh^2)^{-1}h' + r^{-2}(1-h^{-1}) \quad (2.42)$$

$$8\pi T_{11} = 8\pi P_r = G_{11} = R_{11} - \frac{1}{2}(R_0^0 + R_1^1 + R_2^2 + R_3^3) = (rfh)^{-1}f' - r^{-2}(1-h^{-1}) \quad (2.43)$$

$$8\pi T_{22} = 8\pi P_t = G_{22} = \frac{1}{2}(fh)^{-1/2} \frac{d}{dr} [(fh)^{-1/2} f'] + \frac{1}{2}(rfh)^{-1}f' - \frac{1}{2}(rh^2)^{-1}h' \quad (2.44)$$

La ecuación (2.42) implica únicamente h . Esto se podría haber predicho a partir de la análisis general de la estructura de la ecuación de Einstein [1], que muestra que la ecuación $G_{00} = 8\pi T_{00}$ es una "condición inicial", que, en el caso estático, implica únicamente la geometría de la hipersuperficie temporal Σ ortogonal a ξ^a y por lo tanto no puede implicar f . Se puede volver a escribir en la forma

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r(1-h^{-1})] = 8\pi\rho \quad (2.45)$$

de donde se deduce inmediatamente que la solución para h es

$$h(r) = \left[1 - \frac{2m(r)}{r} \right]^{-1} \quad (2.46)$$

donde

$$m(r) = 4\pi \int_0^R \rho(r') r'^2 dr' + a \quad (2.47)$$

donde a es una constante. La suavidad de la métrica sobre Σ en $r = 0$ requiere que como $r \rightarrow 0$ el área de las esferas se haga 4π veces el cuadrado de su propio radio, es decir, que $h(r) \rightarrow 1$ como $r \rightarrow 0$. Por lo tanto, con el fin de evitar una "singularidad cónica" en la métrica en $r = 0$ debemos establecer $a = 0$. Ya que Σ debe temporal para una configuración estática, vemos que una condición necesaria para la satisfacer la estaticidad es $h \geq 0$ es decir

$$r \geq 2m(r) \quad (2.48)$$

Si $\rho = 0$ para $r > R$ nuestra solución para h , la ecuación (2.46), se une a la solución de Schwarzschild en el vacío con masa total

$$M = m(R) = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr \quad (2.49)$$

La ecuación (2.49) es formalmente idéntica a la expresión de la masa total en gravedad newtoniana. Tomemos en cuenta, sin embargo, que esta analogía formal es engañosa porque el elemento de volumen correcto en Σ es $\sqrt{g}d^3x = h^{1/2}r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$, entonces la masa total propia es [1]

$$M_p = \int_0^R \rho(r) r^2 \left[1 - \frac{2m(r)}{r} \right]^{-1/2} dr \quad (2.50)$$

La diferencia entre M y M_p puede ser interpretada como la unión de energía gravitacional, E_B de la configuración

$$E_B = M_p - M \quad (2.51)$$

que es siempre positiva con $M_p > M$. Si escribimos

$$f = e^{2\phi} \quad (2.52)$$

la ecuación (2.43) se convierte en

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 P}{r[r - 2m(r)]} \quad (2.53)$$

En el límite newtoniano, tenemos $r^3 P \ll m(r)$ y $m(r) \ll r$ por lo que la ecuación (2.53) se reduce a

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{m(r)}{r^2} \quad (2.54)$$

que es simplemente la versión con simetría esférica de la ecuación de Poisson para la potencial gravitacional newtoniano. Por lo tanto, en el caso estático y esféricamente

simétrico podemos ver $\phi = 1/2 \ln f$ como el análogo general relativista del potencial newtoniano [1]. Para las configuraciones no estacionarios, sin embargo, no hay análogo conocido en la relatividad general del potencial newtoniano. Si sustituimos nuestros resultados, las ecuaciones (2.46) y (2.53), en nuestra ecuación (2.44), es evidente que obtendremos una ecuación para dP/dr . Sin pérdida de generalidad se llega a que:

$$(e_\mu)_b 8\pi \nabla_a (8\pi T^{ab} - G^{ab}) = \nabla_a [(e_\mu)_b (8\pi T^{ab} - G^{ab})] \quad (2.55)$$

$$= \nabla_a [(e_\mu)_b (8\pi T^{ab} - G^{ab})] - \omega_{ab\mu} (8\pi T^{ab} - G^{ab}) \quad (2.56)$$

donde $\omega_{ab\mu} = \nabla_a (e_\mu)_b$. Tomando $\mu = 1$ encontramos que el primer término del lado derecho de la ecuación (2.56) se anula si la ecuación (2.43) se cumple. Por lo tanto, $\omega_{221} \neq 0$ vemos que (dado las ecuaciones. (2.42) y (2.43) la anulación de $(8\pi T^{22} - G^{22})$ es equivalente a

$$(e_1)_b \nabla_a T^{ab} = 0 \quad (2.57)$$

y por lo tanto podemos reemplazar la ecuación (2.5) por la ecuación (2.57). Ya tenemos calculado este componente de $\nabla_a T^{ab}$ para un fluido perfecto en la ecuación (capítulo 4)[1], y por lo tanto, sin más trabajo, obtenemos, usando $(e_1)_b = h^{1/2}(dr)_b = h^{-1/2}(\partial/\partial r)_b$,

$$h^{-1/2} \frac{dP}{dr} = -(P + \rho)(e_1)_b u^a \nabla_a u^b = -h^{-1/2}(P + \rho) \frac{d\phi}{dr} \quad (2.58)$$

donde se utilizaron las ecuaciones (2.41) y (2.52) para la última igualdad. Usando la ecuación (2.53), podemos eliminar $d\phi/dr$ para obtener nuestro resultado final

$$\frac{dP}{dr} = -(P + \rho) \frac{m(r) + 4\pi r^3 P}{r[r - 2m(r)]} \quad (2.59)$$

La ecuación (2.59) es conocida como la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff de equilibrio hidrostático. En el límite newtoniano ($P \ll \rho, m(r) \ll r$) se reduce a la ecuación Newtoniana de equilibrio hidrostático

$$\frac{dP}{dr} \approx -\frac{\rho m(r)}{r^2} \quad (2.60)$$

En resumen, hemos encontrado que la geometría espacio temporal dentro de una estrella con un fluido estático y esférico es

$$ds^2 = -e^{2\phi} dt^2 + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.61)$$

donde

$$m(r) = \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad (2.62)$$

y ϕ se determina a partir de la ecuación (2.53). La condición necesaria y suficiente para el equilibrio es que la ecuación (2.59) sea satisfecha. Esto, para la materia de fluido con una ecuación de estado dada por, $P = P(\rho)$ la configuración y equilibrio se pueden determinar de la siguiente manera: Arbitrariamente proponemos una densidad central $P_c = P(\rho_c)$. Luego integramos las ecuaciones (2.59) y (2.62) hacia afuera hasta que se llega a la superficie de la estrella $P = \rho = 0$ en cada punto nosotros la agregamos a la solución de Schwarzschild en el vacío, la ecuación (2.1.44) de la Ref.[1]. Por último, se resuelve para ϕ mediante la integración de la ecuación (2.53), sujeto a la condición límite $\phi \rightarrow 0$ como $r \rightarrow \infty$ (o, lo que es equivalente, al exigir ϕ para que coincidan en el valor Schwarzschild en la superficie de la estrella). Este procedimiento difiere del utilizado en la teoría newtoniana sólo en que la ecuación (2.59) se ha sustituido a la ecuación (2.60), y la ecuación (2.53) ha sustituido a la ecuación (2.60). La diferencia más importante entre las configuraciones de equilibrio en la relatividad general y la gravedad de Newton se pueden ver en el hecho de que, asumiendo $P \geq 0$. Para un perfil de densidad dado $\rho(r) \geq 0$ el lado derecho de la ecuación de la hidrostática relativista de equilibrio (2.59) es siempre mayor en magnitud que el lado derecho de la ecuación de Newton (2.60). Esto significa que para un determinado $\rho(r)$ la presión central P_c requerida para que el equilibrio sea siempre mayor en la relatividad general que en la teoría de Newton; es decir, es más difícil mantener el equilibrio en la relatividad general. Esto se ilustra dramáticamente por la consideración de las configuraciones de densidad uniforme, lo que corresponde para un fluido incompresible de densidad ρ_0 ,

$$\rho_0(r) = \begin{cases} \rho_0 & (r \leq R) \\ 0 & (r > R) \end{cases}$$

y por lo tanto (en la relatividad general y la teoría newtoniana)

$$m(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 \quad (r \leq R) \quad (2.63)$$

La ecuación de Newton de equilibrio hidrostático (2.60) se integra fácilmente (para $r \leq R$)

$$P(r) = \frac{2}{3}\pi \rho_0^2 (R^2 - r^2) \quad (2.64)$$

donde la condición de frontera $P(R) = 0$ se ha impuesto. Por lo tanto, la presión central newtoniana de una estrellas de densidad uniforme es

$$P_c = \frac{2}{3}\pi \rho_0^2 R^2 = \frac{\pi^{1/3}}{6} M^{2/3} \rho_0^{4/3} \quad (2.65)$$

que es finito para todos los valores de ρ_0 y R i.e., el equilibrio se puede lograr con presiones suficientemente grandes para todo ρ_0 y R . Por otro lado, la ecuación de equilibrio hidrostático en relatividad general (2.59) también se puede integrar exactamente, como lo relizara por primera vez por Schwarzschild en 1916, obteniéndose

$$P(r) = \rho_0 \left[\frac{(1 - 2M/R)^{1/2} - (1 - 2Mr^2/R^3)^{1/2}}{(1 - 2Mr^2/R^3)^{1/2} - 3(1 - 2M/R)^{1/2}} \right] \quad (2.66)$$

Por lo tanto, la presión central requerida para el equilibrio de una estrella de densidad uniforme en la relatividad general es

$$P_c = \rho_0 \left[\frac{1 - (1 - 2M/R)^{1/2}}{3(1 - 2M/R)^{1/2} - 1} \right] \quad (2.67)$$

Para $R \gg M$ la ecuación (2.67) se reduce a el valor newtoniano, la ecuación (2.65). Sin embargo, ahora P_c se hace infinita cuando [1]

$$3(1 - 2M/R)^{1/2} = 1 \quad (2.68)$$

es decir, cuando

$$R = \frac{9}{4}M \quad (2.69)$$

Para obtener la solución completa al problema, queda por determinar la funciones $f(r)$ y $g(r)$ en la métrica (12.1) de la Ref.[2]. A partir de (12.15) y (12.24) de la Ref.[2], entonces encontramos que:

$$g(r) = \left(1 - \frac{2\mu r^2}{R^3} \right)^{-1} \quad (2.70)$$

En particular, observamos que en la superficie de una estrella, donde $r = R$, la solución anterior coincide con la expresión correspondiente de la métrica de Schwarzschild para la solución exterior. La función $f(r)$ se obtiene a partir de (12.19), (12.24) y (12.27) de la Ref.[2]. Uno puede fijar la constante de integración que surge a partir de (12.19) de la Ref.[2] mediante la imposición de las condiciones de frontera que $f(r)$ coincide con la expresión correspondiente en la Métrica de Schwarzschild en $r = R$. Entonces encontramos que

$$f(r) = \frac{c^2}{4} \left[3 \left(1 - \frac{2\mu}{R} \right)^{1/2} - \left[3 \left(1 - \frac{2\mu r^2}{R^3} \right)^{1/2} \right]^2 \right] \quad (2.71)$$

las expresiones (2.71) y (2.70) constituyen la solución interior de Schwarzschild para un objeto de densidad constante.

Capítulo 3

Variedades diferenciables

De la formulación relativista [2] del electromagnetismo, junto con los destellos de inspiración de Einstein comenzaremos nuestra formulación de una teoría relativista de la gravedad, es decir, relatividad general. En nuestro desarrollo del electromagnetismo, comenzamos considerando la 3-fuerza electromagnética sobre una partícula cargada. Vamos a empezar por lo tanto, nuestra discusión de gravedad al considerar la descripción de la fuerza de la gravedad en la teoría clásica no relativista, la teoría de Newton. En la teoría de Newton, la fuerza de la gravedad $\vec{f}$ sobre una partícula de prueba de masa gravitacional m_G en alguna posición es

$$\vec{f} = m_G \vec{g} = -m_G \vec{\nabla} \Phi \quad (3.1)$$

dónde $\vec{g}$ es el campo gravitacional derivado del potencial gravitacional Φ en esa posición. A su vez, el potencial gravitacional se determina por la ecuación de Poisson:

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (3.2)$$

dónde ρ es la densidad de la materia gravitacional y G es la constante de la gravitación universal de Newton. Esta es la ecuación de campo de gravedad newtoniana[2]. No hay dependencia del tiempo, lo que significa que el potencial Φ , y por tanto la fuerza de la gravedad sobre una partícula, responde instantáneamente a una alteración en la densidad de la materia ρ ; esto viola el requisito de la relatividad especial de que las señales no pueden propagarse más rápido que c . Podríamos tratar de remediar esto observando que el operador laplaciano $\vec{\nabla}^2$ en (3.2) es equivalente al menos al operador de D Alembert Ξ^2 en el límite $c \rightarrow \infty$, y por lo tanto postulan la ecuación de campo modificada[2]

$$\Xi^2 \Phi = -4\pi G \rho \quad (3.3)$$

Sin embargo, esta ecuación no proporciona una teoría relativista consistente. Es todavía no covariante de Lorentz, ya que la densidad de la materia ρ no se transforma como escalar de Lorentz. Discutiremos las propiedades de transformación de la densidad de materia más tarde. Además de la incompatibilidad de la gravedad newtoniana

con la relatividad especial, hay una segunda diferencia fundamental entre las fuerzas electromagnética y gravitatoria. La ecuación del movimiento de una partícula de masa inercial m_I en un campo gravitatorio está dada por

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{m_G}{m_I}\vec{\nabla}\Phi \quad (3.4)$$

Es un hecho experimental bien establecido, sin embargo, que la relación m_G/m_I sigue apareciendo en la ecuación de movimiento, es la misma para todas las partículas. Por una elección apropiada de unidades uno puede, pues, disponer que la presente relación se tome como la unidad. En contraste, la relación q/m_I que ocurre en la ecuación del movimiento de una partícula cargada en un campo electromagnético no es el mismo para todas las partículas. A partir de (3.2), de este modo, vemos que la trayectoria a través del espacio de una partícula en un campo gravitatorio es independiente de la naturaleza de la partícula [2].

Esta equivalencia de las masas gravitatorias e inerciales (nos permite simplemente referirnos a "la masa"), es una coincidencia verdaderamente notable en la teoría newtoniana. En esta teoría, no hay ninguna razón, a priori, de por qué la cantidad que determina la magnitud de la fuerza de la gravedad sobre la partícula debe ser igual a la cantidad que determina la resistencia de una partícula a una fuerza aplicada en general.

La igualdad de las masas gravitatorias e inerciales de una partícula llevó a Einstein a su experimento clásico del ascensor. Considere pues la posibilidad de un observador en un ascensor que cae libremente. Los objetos libres de reposo relativo en la cabina del ascensor permanecen flotando 'sin peso' en la cabina [2].

Un proyectil disparado desde un lado del ascensor al otro parece que se mueve en una línea recta a velocidad constante, en lugar de la trayectoria curva usual. Todo esto se sigue del hecho de que la aceleración de cualquier partícula en relación con el ascensor es cero: la partícula y la cabina del ascensor tienen la misma aceleración relativa a la Tierra como resultado de la equivalencia de las masas gravitacional e inercial. Todas estas observaciones se mantendrían con exactitud si el campo gravitacional de la Tierra fuera verdaderamente uniforme. Por supuesto, el campo gravitacional de la Tierra no es uniforme sino que actúa radialmente hacia dentro, hacia su centro de masa, con una magnitud proporcional a $1/r^2$ [6]. Por lo tanto, si el ascensor no experimentara caída libre durante mucho tiempo o si fuera muy grande (es decir, una fracción significativa de radio de la Tierra), dos partículas libres cerca de las paredes del ascensor se desplazarían gradualmente hacia el interior, ya iría cayendo a lo largo de las líneas radiales hacia el centro de la Tierra (véase la figura 3.1). Además, como resultado de la variación del campo gravitacional, las partículas libres cerca del suelo del ascensor se moverían gradualmente hacia abajo mientras que los que están cerca del techo se moverían gradualmente hacia arriba. Lo que el observador en el ascensor estaría experimentando serían las fuerzas de marea resultantes de la inhomogeneidad en la magnitud y la dirección del campo gravitacional. Siempre hay que recordar que estas fuerzas de marea nunca pueden ser completamente eliminadas en un ascensor de

tamaño finito, es decir, distinto de cero. Sin embargo, siempre y cuando consideramos la cabina del ascensor durante un breve periodo de tiempo y que este sea espacialmente pequeño, entonces un ascensor en caída libre (que puede tener coordenadas (x, y, z) marcado en sus paredes y un reloj de elevador marcando el tiempo t) se asemeja a un sistema inercial de referencia cartesiano, de ahí que las leyes de la relatividad especial se mantengan dentro del elevador [2].

Estas observaciones conducen al principio de equivalencia: "En un laboratorio (no giratorio) en caída libre que ocupa una pequeña región del espacio-tiempo, las leyes de la física son las de la relatividad especial" [2].

Estas observaciones llevaron a Einstein a hacer una propuesta profunda que simultáneamente proporciona, una descripción relativista de la gravedad e incorpora de forma natural el principio de equivalencia (y en consecuencia la equivalencia de la gravedad y masa inercial). La propuesta de Einstein fue que la gravedad ya no debe considerarse como una fuerza en el sentido convencional, sino más bien como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, esta curvatura se induce por la presencia de la materia. Esto es la idea central que sustenta la teoría de la relatividad general.

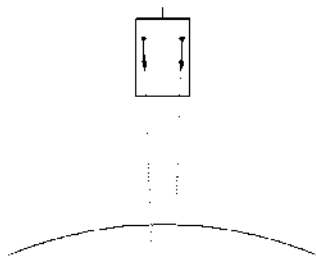


Figura 3.1: Efecto caída de elevador

Si la gravedad es considerada una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo en sí, y no como la acción de alguna 4-fuerza f definidas sobre las variedades, entonces la ecuación de movimiento de una partícula que se mueve sólo bajo la influencia de la gravedad debe ser el de una partícula "libre" en el espacio-tiempo curvo, es decir,

$$\frac{dp}{d\tau} = 0 \quad (3.5)$$

donde p es un 4-impulso de la partícula y τ es el tiempo propio medido a lo largo de la línea temporal de las partículas. Por lo tanto, la línea temporal de una partícula que cae libremente por gravedad es una geodésica en el espacio-tiempo curvado. El principio

de equivalencia restringe la posible geometría del espacio-tiempo curvado a pseudo-Riemann. El significado matemático del principio de equivalencia es que requiere que en cualquier caso o evento " P " en las variedades de espacio-tiempo debemos ser capaces de definir un sistema de coordenadas x^μ de tal manera que, en una vecindad local de P , el elemento de la línea del espacio-tiempo toma la forma [13]

$$ds^2 \approx \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.6)$$

donde la igualdad exacta se mantiene en un caso P . De la ecuación geodésica, en un sistema cordenado la trayectoria de una partícula "libre", es decir, una moviendose sólo bajo la influencia de la gravedad, en la vecindad del evento P es dada por

$$\frac{d^2 x^i}{dT^2} \approx 0 \quad (3.7)$$

donde $i = 1, 2, 3$ y hemos denotado x^0 por cT (una vez más la igualdad en el ecuaciones anteriores se mantienen exactamente en P). Por lo tanto, en las proximidades de las coordenadas x^μ se define un sistema de referencia inercial cartesiano local (como nuestro pequeño ascensor, consideradas durante un intervalo de tiempo pequeño), en el que las leyes de la relatividad especial se mantienen localmente. En este orden podemos construir un sistema espacio-temporal que debe ser una variedad pseudo-riemanniana [2] (que es curva y de cuatro dimensiones). Para una variedades de este tipo, en algún sistema de coordenadas arbitrarias x^μ el elemento de línea toma la forma general

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.8)$$

3.1 Tensor de curvatura

Podemos encontrar una solución al problema de la medición de la curvatura de una variedad en cualquier punto teniendo en cuenta el cambio del orden de la diferenciación covariante. La diferenciación covariante es claramente una generalización de la diferenciación parcial. Hay un importante aspecto en el que se diferencia, sin embargo: importa en qué orden la diferenciación covariante se realice, y si se cambia el orden (en general) cambia el resultado. Dado que para un campo escalar la derivada covariante es simplemente la derivada parcial, el orden de diferenciación no importa [2]. Sin embargo, consideremos algunos campos vectoriales arbitrarios definidos en una variedad, con componentes covariantes v_a . La derivada covariante de v_a está dada por

$$\nabla_b v_a = \partial_b v_a - \Gamma_{ab}^d v_d \quad (3.9)$$

Una segunda diferenciación covariante proporciona entonces

$$\nabla_c \nabla_b v_a = \partial_c (\nabla_b v_a) - \Gamma_{ac}^e \nabla_b v_e - \Gamma_{bc}^e \nabla_e v_a \quad (3.10)$$

$$= \partial_c \partial_b v_a - (\partial_c \Gamma_{ab}^d) v_d - \Gamma_{ab}^d \partial_c v_d \quad (3.11)$$

$$-\Gamma_{ac}^e(\partial_b v_e - \Gamma_{ed}^d v_d) - \Gamma_{bc}^e(\partial_e v_a - \Gamma_{ae}^d v_d) \quad (3.12)$$

lo que sigue entonces $\nabla_b v_a$ es en sí mismo un tensor de rango 2. Alternando los índices b y c obtenemos una expresión correspondiente para $\nabla_b \nabla_c v_a$ y luego restando da:

$$\nabla_c \nabla_b v_a - \nabla_b \nabla_c v_a = R_{abc}^d v_d \quad (3.13)$$

donde

$$R_{abc}^d \equiv \partial_b \Gamma_{ac}^d - \partial_c \Gamma_{ab}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d \quad (3.14)$$

Para determinar directamente si las cantidades N^4 y R_{abc}^d se transforman como los componentes de un tensor de acuerdo con una transformación de coordenadas sería una ardua tarea algebraica. Afortunadamente el teorema cociente (Sección 4.11 de la Ref[2]) proporciona una ruta mucho más corta. El lado izquierdo de (3.13) es un tensor, para los vectores arbitrarios v_a , por lo que la contracción del R_{abc}^d con v_d es también un tensor. Si R_{abc}^d no depende de v_a , llegamos a la conclusión del teorema de que el cociente R_{abc}^d son de hecho los componentes de algún tensor de 4-rango R . Este tensor se llama el tensor de curvatura o tensor de Riemann, y la ecuación (3.14) muestra que se define en términos del tensor métrico g_{ab} y sus derivadas primera y segunda. Ahora hay que establecer cómo el tensor (3.14) está relacionado con la curvatura de la variedad [2]. En una región plana de una variedad, podemos elegir una de tal manera que las coordenadas el elemento de línea toma la forma de una métrica en toda la región. En estas coordenadas Γ_{cb}^a y sus derivados son cero, y por lo tanto

$$R_{abc}^d = 0 \quad (3.15)$$

en cada punto en la región. Esta es una relación tensorial, sin embargo, esto debe mantenerse en cualquier sistema de coordenadas. A la inversa, si $R_{abc}^d = 0$ en todos los puntos en alguna región de una variedad, a continuación, se puede demostrar que es posible introducir un sistema de coordenadas en el que el elemento de línea toma la forma (7.10) [2], y por lo tanto esta región es plana. La desaparición del tensor de curvatura es una condición necesaria y suficiente para que una región de una variedades sea plana.

El tensor de curvatura también satisface una identidad diferencial, que se puede derivar como sigue. Tomemos un sistema de coordenadas geodésicas sobre algún punto arbitrario P . En este sistema de coordenadas, la diferenciación y la evaluación del resultado en P da

$$(\nabla_e R_{abcd})_P = (\partial_e R_{abcd})_P = (\partial_e \partial_c \Gamma_{abd} - \partial_e \partial_d \Gamma_{abc})_P \quad (3.16)$$

permutando cíclicamente c , d y e para obtener dos relaciones análogas y agregando la encontrada en P

$$\nabla_e R_{abcd} + \nabla_c R_{abde} + \nabla_d R_{abec} = 0 \quad (3.17)$$

Esto, sin embargo, es una relación tensorial por lo tanto se lleva a cabo en todos los sistemas de coordenadas; por otra parte, puesto que P es arbitrario la relación se mantiene en todas partes. Este resultado es conocido como la identidad de Bianchi y, utilizando la relación de antisimetría (7.14)[2], puede escribirse de forma más digerible como

$$\nabla_{[e} R_{ab]cd} = 0$$

3.2 El tensor de Ricci y la curvatura escalar

De las propiedades de simetría (3.14-3.16) del tensor de curvatura se desprende que sólo poseen dos contracciones independientes. Podemos encontrar estas por la contracción, ya sean en los dos primeros índices o en los primeros y últimos índices respectivamente. De (3.14), elevando el índice de contracción y luego en los dos primeros índices da

$$R^a_{acd} = 0 \quad (3.18)$$

Contrayendo los primeros y últimos índices, sin embargo, da, en general, un resultado no cer y esto conduce a un nuevo tensor, el tensor de Ricci. Es tradicional utilizar el misma letra base para el tensor de Ricci como para el tensor de curvatura, por lo que denotamos sus componentes por

$$R_{ab} \equiv R^c_{abc} \quad (3.19)$$

Al elevar el índice a en la identidad cíclica (7.17) de la Ref.[2] y la contrayendo con d , uno puede demostrar fácilmente que el tensor de Ricci es simétrico. Así tenemos $R^a_b = R^b_a$ y podemos designar a ambos por R^b_a . Una nueva contracción da la curvatura escalar o escalar de Ricci

$$R \equiv g^{ab} R_{ab} = R^a_a \quad (3.20)$$

donde de nuevo se utiliza la misma letra base (R). Esta es una cantidad escalar definida en cada punto de la variedad. Las derivadas covariantes del tensor de Ricci y la curvatura escalar obedecen a una relación particularmente importante, que será fundamental para nuestro desarrollo de la ecuaciones de campo de la relatividad general. Elevando a de la identidad de Bianchi (7.18) de la Ref.[2] y contraendo d tenemos que

$$\nabla_e R_{bc} + \nabla_c R^a_{bae} + \nabla_a R^a_{bec} = 0 \quad (3.21)$$

el cual, usando la propiedad antisimétrica (7.16) en el segundo término, da

$$\nabla_e R_{bc} - \nabla_c R_{be} + \nabla_a R^a_{bec} = 0 \quad (3.22)$$

Si ahora elevamos b y contraemos con c , encontramos

$$\nabla_b R_c^b - \nabla_c R + \nabla_a R_{ab}^{bc} = 0 \quad (3.23)$$

Usando las propiedades de antisimetría (7.14 y 7.15)[2] que puede escribir el tercer término

$$\nabla_a R_{bc}^{ba} = \nabla_a R_{cb}^{ba} = \nabla_a R_c^a = \nabla_b R_c^b \quad (3.24)$$

como los primeros y últimos términos de (3.23) son idénticos y obtenemos

$$2\nabla_b R_c^b - \nabla_c R = \nabla_b (2R_c^b - \delta_c^b R) = 0 \quad (3.25)$$

Finalmente, elevando el índice c , se obtiene el resultado importante

$$\nabla_b (R^{bc} - \frac{1}{2}g^{bc}R) = 0 \quad (3.26)$$

El término entre paréntesis es llamado el tensor de Einstein

$$G^{ab} \equiv (R^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}R) \quad (3.27)$$

Está claro que es simétrica y por lo tanto posee sólo una divergencia independiente $\nabla_a G^{ab}$ que se anula (por construcción). Como veremos, es este el tensor que describe la curvatura del espacio-tiempo en las ecuaciones de campo de la relatividad general.

3.3 Variedades diferenciables

Comencemos con una serie de definiciones que nos conduzcan al concepto de variedad diferenciable.

Definición 1. Todo espacio topológico M Hausdorff y segundo numerable que sea localmente homeomorfo al espacio euclidiano se llama variedad topológica de dimensión n .

La noción de variedad topológica nos permite definir a las cartas de una variedad topológica. Se puede pensar cada carta como una imagen local de la variedad, como una foto satelital de nuestro vecindario.

Definición 2. Una carta en una variedad M es una pareja de la forma (ϕ, U) donde $U \subset M$ es abierto y $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo.

Consideremos ahora dos cartas (U_1, ϕ_1) y (U_2, ϕ_2) para las cuales $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Por simplicidad pensemos que los abiertos $V_i = \phi_i(U_i)$ están en diferentes copias de $\mathbb{R}^n$. Entonces $\phi_{12} := \phi_1 \circ (\phi_2)^{-1} := \phi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_1(U_1 \cap U_2)$ y $\phi_{21} := \phi_2 \circ (\phi_1)^{-1} := \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$ son ambas biyecciones y $\phi_{12} \circ \phi_{21} = Id|_{U_1 \cap U_2}$.

Definición 3. Llamaremos atlas topológico o de clase C^0 de la variedad M a toda colección de cartas $A = (\phi_i, U_i) | i \in I$ que cubra a M . Es decir, tal que $M = \cup_I U_i$. Un atlas topológico A es de clase $C^k, k \in \mathbb{N} \cup \infty$ o analítico cuando toda función de transición definida por dos cartas del atlas sea de clase $C^k, k \in \mathbb{N} \cup \infty$ o analítica.

Cuando M admite un atlas de clase C^∞ , diremos que M es una variedad suave o diferenciable.

Definición 4. Diremos que dos cartas $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ en una variedad topológica M son suavemente (o C^k analíticamente) equivalentes si las funciones de transición $\phi_{1,2}\phi_{2,1}$ que estas definen son suaves (respectivamente C^k o analíticamente). Diremos que un atlas A de una variedad M es maximal si cada carta de (U, ϕ) que sea compatible con todas las cartas de A está contenida en A . En la definición anterior, convenimos que dos cartas en una variedad topológica que no se intersecten serán equivalentes.

Definición 5. Llamaremos variedad diferenciable a una variedad topológica M junto con un atlas maximal diferenciable A .

Ejemplo. El cubriente universal del círculo de radio a puede visualizarse como la traza de la curva $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, t), t \in \mathbb{R}$ [18].

3.4 Simetrías y vectores de Killing

Sea M^N una variedad N -dimensional, equipada con una métrica $g_{\mu\nu}$ y la correspondiente conexión de Levi-Civita $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, entonces se define la derivada de Lie:

Sea V_μ un campo vectorial en M^N , que define una congruencia de curvas $\gamma^\mu(\lambda)$ a través de la ecuación diferencial $V_\mu(\gamma(\lambda)) = d\gamma^\mu(\lambda)/d\lambda$.

En otras palabras, $\gamma^\mu(\lambda)$ son las curvas integrales (o las líneas de campo) de V_μ , y viceversa, V_μ es el campo vectorial tangente a las curvas $\gamma^\mu(\lambda)$. Nótese que los teoremas de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales del tipo anterior garantizan una relación uno a uno entre un campo vectorial y su congruencia de curvas.

La derivada de Lie LV es un operador diferencial que represente la derivada direccional en la dirección del campo V_μ , o equivalentemente, la derivada a lo largo de las curvas integrales $\gamma^\mu(\lambda)$. La gran ventaja es que nos proporciona una derivada direccional en una formulación covariante, puesto que la información sobre la dirección está codificada en el campo vectorial V_μ . Sean p y q dos puntos infinitesimalmente cercanos, con coordenadas $x_\mu y x'_\mu$ respectivamente, tal que $x'_\mu = x_\mu + \epsilon V_\mu(x)$, donde V_μ es dirección en la que queremos hacer la derivada direccional y ϵ es una cantidad infinitesimal. Definimos por lo tanto la derivada de Lie de un campo $\psi(x)$ en la dirección de un campo vectorial V_μ como $L_V\psi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\psi'(x) - \psi(x))/\epsilon$ [15].

3.5 Vectores de Killing

Se dice que una métrica $g_{\mu\nu}$ tiene una isometría si su expresión no cambia bajo una transformación $x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \epsilon k_\mu$, para un campo vectorial k_μ concreto. En el apartado anterior hemos visto que pedir que la métrica sea invariante bajo la transformación es lo mismo que pedir que la derivada de Lie de la métrica con respecto a k_μ sea cero, $L_k g_{\mu\nu} = k^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + \delta_\nu^\rho \partial_\mu k_\rho + \delta_\mu^\rho \partial_\nu k_\rho = 0$.

Lo que para variedades equipadas con la conexión de Levi-Civita es equivalente a la ecuación de Killing, $\nabla_\mu k_\nu + \nabla_\nu k_\mu = 0$. Los vectores que satisfacen la ecuación (o

equivalentemente) se llaman vectores de Killing. Estará claro a base de la propiedad que el conmutador de dos vectores de Killing da otro vector de Killing y que estos conmutadores forman el álgebra de isometrías de la métrica $g_{\mu\nu}$. [15]

3.6 Fluido perfecto y anisotrópico

Vamos ahora a seguir la sugerencia de Einstein de que la gravedad es una manifestación de curvatura del espacio-tiempo inducida por la presencia de la materia. Por tanto, debemos obtener un conjunto de ecuaciones que describen cualitativamente cómo la curvatura del espacio-tiempo en cualquier evento está relacionada con la distribución de la materia en ese evento. Estos serán las ecuaciones de campo gravitacionales, o las ecuaciones de Einstein, de la misma manera que las ecuaciones de Maxwell son las ecuaciones de campo del electromagnetismo. Las ecuaciones de Maxwell relacionan el campo electromagnético F en todo caso, su fuente, la 4-densidad de corriente j en ese evento. Del mismo modo, las ecuaciones de Einstein se relacionan la curvatura del espacio-tiempo a su fuente [2], la energía-momento de la materia. Como veremos, la analogía va más allá. En cualquier sistema dado de coordenadas, las ecuaciones de Maxwell son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden de los componentes $F_{\mu\nu}$ del tensor de campo electromagnético (o de manera equivalente para los componentes $A_{\mu\nu}$ del potencial electromagnético). Nos encontraremos con que las ecuaciones de Einstein son también un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, pero en lugar de los coeficientes de métricas $g_{\mu\nu}$ del espacio-tiempo. Para construir las ecuaciones del campo gravitatorio, primero tenemos que encontrar una adecuada forma relativista de expresar el término (o covariante). En otras palabras, debemos identificar un tensor que describe la distribución de la materia en cada evento en el espacio-tiempo. Así, consideremos alguna distribución general dependiente del tiempo (eléctricamente neutra) de partículas, cada una de masa en reposo m_0 que no interactúan. En cada evento de P en el espacio-tiempo que podamos caracterizar la distribución por completo dando a la densidad de la materia ρ y a la 3-velocidad $\vec{u}$ medido en algún sistema inercial. Por simplicidad, consideremos el fluido en su descanso instantáneo de un sistema S en uno P , en la que $\vec{u} = 0$.

En este marco, la propia densidad está dada por $\rho_0 = m_0 n_0$, donde m_0 es la masa en reposo de cada partícula y n_0 es el número de partículas en una unidad de volumen. En algún otro sistema S' , se mueve con velocidad v relativa a S , el volumen que contiene un número fijo de partículas es Lorentz- contraído a lo largo de la dirección del movimiento. Por lo tanto, en S' la densidad numérica de las partículas es $n' = \gamma_\nu n_0$. Ahora tenemos un efecto adicional, sin embargo, ya que la masa de cada partícula en S' es $m' = \gamma_\nu m_0$. Por lo tanto, la densidad de la materia en S' es:

$$\rho' = \gamma_\nu^2 \rho_0$$

Podemos concluir que la densidad de la materia no es un escalar pero podemos transformar los 00-componentes de un tensor de rango 2. Esto sugiere que el término

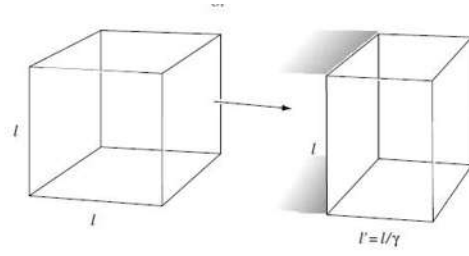


Figura 3.2: Contracción relativista

base en las ecuaciones del campo gravitatorio debe ser un tensor de rango 2. En cada punto en el espacio-tiempo, la opción obvia es

$$T(x) = \rho(x)u(x) \otimes u(x) \quad (3.28)$$

dónde $\rho(x)$ es la densidad adecuada del fluido, es decir, que se mide por un observador comóvil con el flujo local, y $u(x)$ es su 4-velocidad. El tensor $T(x)$ es llamado el tensor de energía-momento (o el tensor de tensión-energía) de la distribución de materia. Tenga en cuenta que a partir de ahora en adelante vamos a denotar la densidad apropiada simplemente ρ , es decir, sin el subíndice cero. En algunos sistemas arbitrarios de coordenadas x^μ en la que el 4-velocidad del fluido es u^μ , los componentes contravariantes (8.1) se dan simplemente por:

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu \quad (3.29)$$

Para dar una interpretación física de los componentes del tensor energía-momento, es conveniente considerar un sistema inercial cartesiano local en P en el cual el conjunto de componentes de la 4-velocidad del fluido es $[u^\mu] = \gamma_u(c, \vec{u})$. En esto marco, escribiendo los componentes en su totalidad tenemos:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho u^0 u^0 = \gamma_u^2 \rho c^2 \\ T^{0i} &= T^{i0} = \rho u^0 u^i = \gamma_u^2 \rho c^i \\ T^{ij} &= \rho u^i u^j = \gamma_u^2 \rho u^i u^j \end{aligned}$$

El significado físico de dichos componentes es: T^{00} es la energía de densidad de las partículas T^{0i} es la energía de flujo $\times c^{-1}$ en la i -dirección T^{i0} es la densidad de momento $\times c$ en la i -dirección T^{ij} es la razón de fluido de la i componente de momento por unidad de área en la j -dirección Es a causa de estas identificaciones que la tensión

T se conoce como el tensor tensión-energía.

Para generalizar nuestra discusión a los fluidos reales, tenemos que tener en cuenta los hechos que además del movimiento mayor del fluido, cada partícula tiene algunas velocidades térmicas aleatorias y que puede haber varias fuerzas entre las partículas que contribuyen con el total de las energías potenciales. Los significados físicos de los componentes de la tensor de energía-momento T nos da una idea de cómo generalizar su forma de incluir estas propiedades de los fluidos reales. Consideremos T en algún caso P y trabajemos en un sistema inercial cartesiano local S . Para el polvo, el único componente que no sea cero es T^{00} . Sin embargo, vamos a considerar los componentes de T para un fluido real. T^{00} es la densidad de energía total, incluidas las contribuciones de energía potencial de las fuerzas entre las partículas y la energía cinética de su movimiento térmico aleatorio. T^{0i} : aunque no hay movimiento mayor, la energía podría ser transmitido por conducción de calor, por lo que este es básicamente un término de conducción del calor. T^{i0} : de nuevo, aunque las partículas no tienen movimiento mayor, si el calor se comienza a conducir la energía va a llevar a impulso. T^{ij} : los movimientos térmicos al azar de las partículas darán lugar a un flujo de momento, de manera que T^{ii} es la presión isotrópica en la i -dirección y T^{ij} (con $i \neq j$) es la tensión viscosa en el fluido. Estas identificaciones son válidos para un fluido en general. Un fluido perfecto se define como uno para el que no existen fuerzas entre las partículas, y sin la conducción de calor o la viscosidad. Así, los componentes de T para un fluido perfecto están dados por:

$$[T^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

No es difícil demostrar que:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} \quad (3.30)$$

Sin embargo, debido a la forma en la que hemos escrito esta ecuación, se debe validar en cualquier marco de un sistema inercial cartesiano local en P . Por otra parte, podemos obtener una expresión que es válida en un sistema de coordenadas arbitrario simplemente reemplazando $\eta^{\mu\nu}$ con la métrica $g^{\mu\nu}$ de la función en el sistema arbitrario [2]. Por lo tanto, llegamos a una expresión totalmente covariante para las componentes del tensor de energía-momento de un fluido perfecto:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} \quad (3.31)$$

Vemos que $T^{\mu\nu}$ es simétrico y se compone de los dos campos escalares ρ y p y del vector de campo u que caracterizan el fluido perfecto. También vemos que en el límite de $p \rightarrow 0$ se convierte en un polvo de fluido perfecto [2]. Por último, observamos que es posible dar expresiones más complicadas que representan los tensores de energía-momento para fluidos imperfectos, para fluidos cargados e incluso para el campo

electromagnético. Estos tensores son todos simétricos.

Vamos a investigar cómo proponer la energía y la conservación del momento en unas coordenadas cartesianas locales en algún caso P , que está representada por las coordenadas inerciales x^μ . En estas coordenadas, el tensor de energía-momento de la toma forma [2].

Por analogía con la ecuación $\partial_\mu j^\mu = 0$ para la conservación de la carga, la conservación de la energía y el impulso está representado por la ecuación

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (3.32)$$

En lugar de llegar a este resultado a partir de principios iniciales, que nos llevaría a una larga discusión de la mecánica de fluidos relativistas, vamos a invertir la manera de procesar y justificar nuestra afirmación con el argumento, de que produce las ecuaciones correctas de movimiento y continuidad para un fluido en el límite newtoniano. La sustitución de la ecuación (3.31) en (3.32) se obtiene

$$\partial_\mu(\rho + p/c^2)u^\mu u^\nu + (\rho + p/c^2)[(\partial_\mu u^\mu)u^\nu + u^\mu(\partial_\mu u^\nu)] - (\partial_\mu p)\eta^{\mu\nu} = 0 \quad (3.33)$$

Ahora, la 4-velocidad satisface la condición de normalización $u^\nu u_\nu = C^2$ y diferenciación de esto da:

$$(\partial_\mu u^\nu)u_\nu + u^\nu(\partial_\mu u_\nu) = 2(\partial_\mu u^\nu u_\nu = 0 \quad (3.34)$$

Por lo tanto, la contratación (8.7) con u_ν , dividiendo por c^2 da:

$$\partial_\mu(\rho u^\mu) + (p/c^2)\partial_\mu u^\mu \quad (3.35)$$

De ahí que, simplificando:

$$(\rho + p/c^2)(\partial_\mu u^\nu)u^\mu = (\eta^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu/c^2)\partial_\mu p \quad (3.36)$$

Las ecuaciones (3.35) y (3.36) son, de hecho, respectivamente la ecuación relativista de la continuidad y la ecuación relativista de la propuesta de fluido perfecto en coordenadas inercias locales de algún caso P [2]. Ahora vamos a demostrar que los fluidos se desplazan lentamente y que con pequeñas presiones se reducen a las ecuaciones clásicas de la teoría newtoniana. Por un fluido que se mueve lentamente, nos referimos a aquella para el que podemos despreciar u/c . Tomar $\gamma_\nu \approx 1$ y $[u^\mu] \approx (c, \vec{u})$; tome en cuenta que la diferencia entre la densidad apropiada y la densidad desaparece en este límite. Por presiones pequeñas queremos decir que p/c^2 es insignificante en comparación con ρ . En estos límites, la ecuación (8.8) se reduce entonces a

$$\partial_\mu(\rho u^\mu) = 0 \quad (3.37)$$

o en notación 3-vector:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \bullet (\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.38)$$

que es la ecuación clásica de continuidad para un fluido. En el límite de las pequeñas presiones, la ecuación (3.36) se reduce a

$$\rho(\partial_\mu u^\nu)u^\mu = (\eta^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu / c^2)\partial_\mu p \quad (3.39)$$

Además, aproximando poco a poco de movimiento, los componentes de movimiento de orden cero de los lados izquierdo y derecho son ambos cero. Así, los componentes espaciales $i = 1, 2, 3$ satisfacen

$$\rho(\partial_\mu u^i)u^\mu = -\delta^{ji}\partial_j p \quad (3.40)$$

En notación de 3-vector se ve como:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \bullet \vec{\nabla} \right) \vec{u} = -\nabla p \quad (3.41)$$

la cual es la ecuación clásica de Euler del movimiento de un fluido perfecto. Por lo tanto tenemos que la ecuación relativista de la continuidad (3.35) y la ecuación de movimiento (3.36) para un fluido perfecto se reducen a las ecuaciones de Newton apropiadas. Si aceptáramos que un fluido relativista están descritas por (3.35) y (3.36), entonces podríamos revertir nuestro argumento general y obtener el resultado $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Hasta ahora hemos trabajado en coordenadas inerciales locales con el fin de hacer contacto con la teoría newtoniana [2]. Sin embargo, podemos obtener trivialmente la condición para la conservación de la energía y el momento en coordenadas arbitrarias mediante la sustitución ∂_μ por ∇_μ en (3.32), que después da

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} \quad (3.42)$$

En nuestra discusión hasta ahora, no hemos sido explícitos sobre si nuestro espacio-tiempo de Minkowski es curvo. Aunque la forma (3.42) es válida (en coordenadas arbitrarias) en ambos casos, su interpretación es diferente en los dos casos. Si descuidamos la gravedad y asumimos una relación espacio temporal de Minkowski (3.42) en efecto, representa la conservación de energía y momento. En presencia de un campo gravitatorio (y por tanto un espacio-tiempo curvo), sin embargo, la energía y el momento de la materia sola no se conservan. En este caso, (3.42) representa la ecuación de movimiento de la cuestión bajo la influencia del campo gravitacional. Como veremos a continuación, la condición (3.42) impone una restricción "apretada" sobre las posibles formas que las ecuaciones del campo gravitatorio pueden tomar [2].

3.7 Ecuaciones de Einstein

Ahora estamos en condiciones de deducir la forma de las ecuaciones del campo gravitatorio. *la ecuación de campo de la gravedad Newtoniana es

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = 4\pi G\rho$$

Si la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio tiempo, que para el rompimiento del campo gravitacional tenemos que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ con $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ y como la métrica es estática entonces

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \quad (3.43)$$

La descripción correcta relativística de la materia está dada por el tensor de momento-energía y para un fluido perfecto tenemos que:

$$T_{00} = \rho c^2$$

La combinación de estas observaciones establece que, para un campo gravitatorio estático débil en el límite de baja velocidad

$$\vec{\nabla}^2 g_{00} = \frac{8\pi G}{C^4} T_{00}$$

La intuición fundamental de Einstein fue que la curvatura del espacio-tiempo en cualquier evento está relacionado con el contenido de materia [2] en ese evento. Las consideraciones anteriores por lo tanto, sugieren que las ecuaciones del campo gravitatorio deben ser de la forma

$$K_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \quad (3.44)$$

donde $K_{\mu\nu}$ es un tensor de rango 2 relacionado con la curvatura del espacio-tiempo y tenemos establecer $k = 8\pi G/c^4$. Dado que la curvatura del espacio-tiempo se expresa por la curvatura tensor $R_{\mu\nu\sigma\rho}$, el tensor $K_{\mu\nu}$ debe ser construido a partir de $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ y el tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Por otra parte, $K_{\mu\nu}$ debe tener las siguientes propiedades: (i) el límite newtoniano sugiere que $K_{\mu\nu}$ debe contener términos que no superen el lineal ni el segundo orden de derivadas del tensor métrico; y (ii) si $T_{\mu\nu}$ es simétrico entonces $K_{\mu\nu}$ debería también ser simétrico. El tensor de curvatura $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ ya es lineal en las segunda derivadas de la métrica, y así la forma más general para $K_{\mu\nu}$ que satisface (i) y (ii) es

$$K_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bRg_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} \quad (3.45)$$

Donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es el escalar de curvatura y a, b, λ son constantes.

Consideremos ahora las constantes a, b, λ . En primer lugar, si se requiere que cada término en $K_{\mu\nu}$ sea lineal en las segundas derivadas de $g_{\mu\nu}$ entonces vemos inmediatamente que $\lambda = 0$. Vamos a tomar esta condición después, pero por el momento, por tanto, tenemos

$$K_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bRg_{\mu\nu}$$

Para encontrar las constantes a, b recordamos que las satisface el tensor de energía-momento $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$; por lo tanto, a partir de (8.10), también requerimos

$$\nabla_\mu K^{\mu\nu} = \nabla_\mu (aR^{\mu\nu} + bRg^{\mu\nu}) = 0$$

De donde

$$\nabla_\mu (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R) = 0$$

Y si renombramos $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$, entonces obtenemos:

$$\nabla_\mu K^{\mu\nu} = (\frac{1}{2}a + b)g^{\mu\nu}\nabla_\mu R = 0$$

La cantidad $\nabla_\mu R$ será, en general, distinta de cero a lo largo de una región del espacio-tiempo a menos que sea plana y por lo tanto no haya ningún campo gravitacional [2]. Así encontramos que $b = -a/2$, por lo que las ecuaciones del campo gravitatorio deben adoptar la forma

$$a(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) = kT_{\mu\nu}$$

Para solucionar la constante a , debemos comparar el límite de campo débil de estas ecuaciones con la ecuación de Poisson en la gravedad newtoniana. La comparación, muestra que, para mantener la coherencia con la teoría newtoniana, requerimos que $a = -1$ y así

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -kT_{\mu\nu} \quad (3.46)$$

donde $k = 8\pi G/c^4$. La ecuación (3.46) constituye el campo gravitatorio de las ecuaciones de Einstein, que forman la base matemática de la teoría de la relatividad general. Observamos que el lado izquierdo de (3.46) es simplemente el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$. Podemos obtener una forma alternativa de las ecuaciones de Einstein por escrito (3.46) en términos de componentes mezclados,

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R = -kT^\mu_\nu$$

y mediante la contratación estableciendo $\mu = \nu$. Así encontramos que $R = -kT$, donde $T \equiv T^\mu_\mu$. Por lo tanto, podemos escribir las ecuaciones de Einstein (8.14) como

$$R_{\mu\nu} = -k(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) \quad (3.47)$$

En el espacio-tiempo de cuatro dimensiones $g_{\mu\nu}$ tiene 10 componentes independientes y por ello en la relatividad general tenemos 10 ecuaciones de campo independientes. Podemos comparar esto con la gravedad newtoniana, en la que sólo hay una ecuación de campo gravitacional. Por otra parte, las ecuaciones de campo de Einstein son no lineales en el $g_{\mu\nu}$ mientras que la gravedad newtoniana es lineal en el campo Φ . La teoría de Einstein implica numerosas ecuaciones diferenciales no lineales, y por lo que no debería ser una sorpresa que el teoría sea complicada [6].

Capítulo 4

Agujeros de gusanos estáticos y esféricamente simétricos

4.1 Características de un agujero de gusano

Los agujeros de gusanos pueden ser encontrados de diferentes maneras algunas de estas son resolviendo las ecuaciones de Einstein a partir de una forma explícita del tensor de momento energía, mediante la propuesta de una métrica con condiciones a priori asignadas o bien puede ser que el análisis de alguna métrica, que en principio fue encontrada en algún contexto de geometría, nos conduzca alguna métrica que represente un agujero de gusano [12]. Cualquiera que sea la manera de llegar a este, las características que debe satisfacer para el caso estático y esféricamente simétricos son:

- a) La geometría debe ser regular y tener una región conocida como garganta que conecta dos regiones asintóticamente planas del espacio-tiempo.
- b) Debe estar ausente de horizonte de eventos, puesto que no se podrá tener el viaje en el tiempo a través del agujero de gusano.

Las características anteriores son conocidas como los criterios básicos, aunque también se puede pedir propiedades adicionales como que las fuerzas de marea deban ser considerablemente pequeña y que el tiempo en el que este es transitable debe ser finito y considerablemente pequeño, además de la estabilidad ante pequeñas perturbaciones. Para describir de una forma más precisa la geometría de un agujero negro consideremos un espacio tiempo estático y esféricamente simétrico en coordenadas de Schwarzschild:

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + \left(1 - \frac{b(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)$$

,

Para que la longitud propia dada por

$$\int \frac{dr}{\sqrt{1 - b(r)/r}}$$

Esté bien definida se requiere que $0 \leq 1 - b(r)/r \leq 1$, el valor de la igualdad de la izquierda corresponde a la garganta mientras que el valor de la igualdad del lado derecho es asociado a las regiones asintóticas. La garganta es la región de menor área, es decir corresponde a un mínimo de la función área. Identificando con r_0 el valor del radio mínimo correspondiente a la garganta tenemos que sobre la garganta $b(r_0) = r_0(b - rb')/2b^2 > 0$ y esta condición está relacionada con la violación de las condiciones de energía en la garganta, y en base a esto se generan ciertas condiciones como $b'(r_0) \leq 1$.

Por otro lado las ecuaciones de Einstein $G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$, donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de momento energía, implican que la densidad y presiones asociadas al tensor de momento energía con respecto a un sistema ortonormal estan dadas por $\rho = -T_t^t$, $P_r = T_r^r$, $P_t = T_\theta^\theta$.

4.2 Violación de las condiciones de energía

Es bien sabido ahora que la existencia "teórica" de los agujeros de gusano lorentzianos desplazables está sustentada por la violación de las condiciones de energía de la relatividad general. Los investigadores han llegado con una variedad de propuestas, la mayoría de las cuales obtienen el apoyo del hecho de que los valores cuánticos esperados del tensor de energía a menudo pueden llegar a ser negativos [8]. El efecto Casimir, se cita a menudo como una "prueba" de la existencia de "materia" con "densidad de energía negativa", aunque en los experimentos en el efecto Casimir la cantidad medida es la fuerza (y por tanto la presión) del "vacío fluctuante entre las placas metálicas paralelas."

Dejando de lado la cuestión de si existen agujeros de gusano o si la energía negativa es justificable preferimos adoptar una actitud algo más valiente sobre la base de algunos resultados recientes en otras áreas de la física. Por ejemplo, antes de que fuera realmente visto en el laboratorio, uno nunca creía que "velocidad negativa" o "índice de refracción negativo" pudiera ser real. En teoría, sin embargo, estos conceptos esotéricos se esbozaron hace décadas. Lo mismo vale para el efecto Casimir. Es cierto que hoy en día, la energía negativa o agujeros de gusano son las ideas esotéricas. Pero, después de la realización anteriormente mencionada de v_g negativa y n , puede que no sea demasiado extravagante decir que las cosas exóticas de hoy podrían ser la realidad (en alguna forma ahora inconcebible) mañana. Otro ejemplo en el caso de la "energía oscura", lo que parece dominar el 70 por ciento de la materia en el universo; la energía oscura tiene la presión "negativa" que de hecho es contrario a la intuición, pero en gran medida es moda hoy entre los cosmólogos. Por otra parte, los teóricos de partículas parecen estar contentos con una constante cosmológica negativa, que les ayuda a resolver el llamado problema de la jerarquía. Así que, por qué no habría agujeros de gusano con energía negativa? Por supuesto, la energía negativa o densidad de energía negativa es problemática. Pero entonces, uno debe hacer la pregunta "cuánta energía negativa debería de haber?- o hay una manera de cuantificar la cantidad de violación? Han habido intentos de esa cuantificación a través de las llamadas "desigualdades cuánticas", que

son esencialmente similares a las relaciones de incertidumbre energía-tiempo. Aquí se propone un cuantificador en términos de una integral espacial de volumen. Con el uso de esto podemos mostrar que ciertas construcciones denominadas "cortar-pegar" nos permiten reducir esta "cantidad de violación" a valores arbitrariamente pequeños. Proporcionamos pues, un ejemplo de tal construcción.

4.3 Las condiciones de energía

Vamos a empezar por discutir algunas de las condiciones de energía en la literatura. Podemos clasificarlas como condiciones "globales" y "locales". Entre las condiciones locales tenemos la condición de energía débil (WEC) y la condición de energía nula (NEC) que se indica como una diagonal del tensor del momento de la densidad de energía ρ y las presiones p_i ($i = 1, 2, 3$):

$$\rho \geq 0 \quad \rho + p_i \geq 0(WEC); \quad \rho + p_i \geq 0(NEC) \quad (4.1)$$

Es esta última la asociada con la existencia de agujeros de gusano. Otras condiciones locales incluyen la condición de energía fuerte (SEC) y la energía de estado dominante (DEC). Por otro lado, las condiciones globales implican integrales de línea a lo largo de una curva físicamente aceptable.

La construcción de un agujero de gusano depende fundamentalmente de la existencia de materia exótica. En esta sección, se examinará la viabilidad de un tensor negativo de tensión-energía, considerando las diversas condiciones de energía que se aplicarán a la relatividad general. Usando el tipo I del tensor de tensión-energía de Hawking-Ellis en un marco ortonormal como:

$$T^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$$

La condición de energía nula (NEC) especifica que para cualquier vector:

$$T_{\alpha\beta}k^{\alpha}k^{\beta} \geq 0 \iff \forall j, \rho + p_j \geq 0$$

La condición de energía débil implica que para todo vector temporal (donde las V 's son los vectores velocidad):

$$T_{\alpha\beta}V^{\alpha}V^{\beta} \geq 0 \iff \rho \geq 0 \wedge \forall j, \rho + p_j \geq 0$$

mientras, que la condición de energía fuerte dice, que para cualquier vector temporal:

$$\left(T_{\alpha\beta} - \frac{T}{2}g_{\alpha\beta}\right)V^{\alpha}V^{\beta} \geq 0 \iff \forall \rho + p_j \geq 0 \wedge \rho + \sum_{kj} p_j \geq 0$$

donde T es la traza de del tensor de tensión-energía, $T = T_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$. La condición de energía dominante propone que para un vector temporal se cumple que:

$$T_{\alpha\beta}V^{\alpha}V^{\beta} \geq 0 \iff \rho \geq 0 \wedge \forall j, p_j \in [-\rho, +\rho]$$

Esto se traduce en la afirmación de que la densidad de energía medida a nivel local es siempre positiva, y el flujo de energía es de tipo temporal o nulo.

4.4 Agujero de gusano de Morris-Thorne

Anteriormente hemos dicho que un agujero de gusano transitable debe ser seguro para que un viajero se mueva a través de él. Pero parece muy incómodo para alguien ir a través de una garganta y experimentar una presión equivalente a la del núcleo de una estrella de neutrones. Se sugieren dos soluciones. (1) Construir un largo tubo de vacío (diámetro $\ll b_0$) a través de la garganta y tener la tensión de la pared del tubo para mantener la materia exótica fuera. Esto rompe la simetría esférica de nuestra solución. (2) Tener la esperanza de que los materiales exóticos sean muy débiles (como los neutrinos). Entonces, incluso con la alta tensión y la densidad, el viajero puede ir a través de la garganta sin notar mucho efecto. No podemos hablar demasiado acerca de la estabilidad del agujero de gusano, ya que esto depende en gran medida del comportamiento del material exótico. Ya sea de forma natural estable o inestable, podría haber más formas de estabilizar el agujero de gusano, pero de nuevo sin conocer el comportamiento del material exótico, es difícil de analizar. Por último, la propuesta real se basa en el cambio de topología. Esto probablemente necesitará abordarse después de que gravedad se ha cuantificado adecuadamente. Esto puede ser entendido como tomar la foto de la mecánica cuántica del espacio-tiempo, como la de la espuma espacio-tiempo introducida por Wheeler [3].

El análisis de Morris-Thorne se ha convertido en un renovado interés para la investigación de los agujeros de gusano transitables o de Lorentz. Morris y Thorne fueron capaces de demostrar que los agujeros de gusano transitables eran compatibles con nuestra comprensión actual de la relatividad general y semiclásica de la gravedad cuántica, pero que había un precio a pagar, para ser más exactos, uno tenía que admitir la existencia de la violación de la condición de energía nula. De manera más precisa, lo que Morris y Thorne mostraron era equivalente a la declaración que por agujeros de gusano transitables y de simetría esférica, tiene que haber una región abierta que rodea la garganta durante el cual se viola la condición de energía nula. La naturaleza sorprendente de este resultado ha llevado a numerosos autores a tratar de encontrar formas de eludir o reducir al mínimo dicha violación de condición de energía, y por lo tanto ha llevado a una serie de teoremas generales para garantizar la existencia de estas violaciones. Por ejemplo, los agujeros de gusano estáticos pero no esféricamente simétricos y sus variantes le permiten mover las violaciones de condición de energía en el espacio, por lo que hay algunas rutas a través del agujero de gusano que no lo hacen. Esto se ve más fácilmente con el término de "cortar y pegar" agujeros de

gusano contruidos utilizando el formalismo de cáscara fina. Los agujeros de gusano, dependientes de simetría esférica y del tiempo le permiten mover las violaciones de condición de energía; desafortunadamente existen geodésicas nulas radiales a través del agujero de gusano que todavía presentan violación de las condiciones de energía. El teorema topológico de Friedman-Schleich-Witt, en virtud de adecuar condiciones técnicas, garantiza que existen agujeros de gusano transitables en el espacio-tiempo, esto debe incluir algunas geodésicas nulas que violan el promedio de la condición de energía nula. Los intentos de eliminar las violaciones de condición de energía por completo, típicamente se centran en teorías de gravedad alternativa (Brans-Dicke, dilatón gravedad, la gravedad con torsión). Se argumenta que estos intentos son en el mejor de los esbozo que a la postre tal vez podría resolver este problema. Los agujeros de gusano practicables de Lorentz, también llamados atravesables, permitirían viajar no solo de una parte del universo a otra, sino incluso de un universo a otro. Los agujeros de gusano conectan dos puntos del espacio-tiempo, por lo que permitirían el viaje tanto en el espacio como en el tiempo. En la teoría de la relatividad general, la posibilidad de atravesar agujeros de gusano fue demostrada por primera vez por Kip S. Thorne y su graduado Mike Morris en un artículo publicado en 1988. El tipo de agujero de gusano atravesable que ellos descubrieron se mantendría abierto por una especie de concha esférica de materia exótica denominada agujero de gusano de Morris-Thorne. Posteriormente se han descubierto otros tipos de agujeros de gusano atravesables, como uno que se mantiene abierto por cuerdas cósmicas, ya hipotetizado antes por Matt Visser en un artículo publicado en 1989.

Si se toma cualquier geometría del espacio-tiempo estático esféricamente simétrico y se utiliza la distancia radial adecuada como la coordenada radial, la métrica puede entonces, sin pérdida de generalidad escribirse como:

$$ds^2 = -e^{2\phi(l)}dt^2 + dl^2 + r^2(l)[d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2]$$

Si deseamos esta geometría para representar un agujero de gusano de Morris-Thorne entonces debemos imponer condiciones tanto en la garganta como en el infinito. Las condiciones en la garganta: - La ausencia de horizontes de eventos implica que $\phi(l)$ sea finito en todas partes. - El radio de la garganta agujero de gusano se define por:

$$r_0 = \min r(l)$$

- Por razones de simplicidad se puede suponer que sólo hay un mínimo de tales y que es un mínimo aislado. Generalizar este punto es sencillo. - Sin pérdida de generalidad, podemos aprovechar esta garganta y que se produzca en $l = 0$. - Las componentes métricas deben ser al menos dos veces diferenciables como funciones de l .

Las condiciones asintóticas en el infinito: - La coordenada l cubre toda la gama $(-\infty, +\infty)$. - Hay dos regiones asintóticamente planas, en $l \approx \pm\infty$. - Para que la geometría espacial tienda a un límite asintótico plano apropiado imponemos lo siguiente:

$$\lim_{l \rightarrow \pm\infty} r(l)/|l| = 1$$

- Para que la geometría del espacio-tiempo tiendan a un límite asintótico plano imponemos lo siguiente:

$$\lim_{l \rightarrow \pm\infty} \phi(l) = \phi(l) \pm 1$$

Estos no son más que los requisitos mínimos para la obtención de un agujero de gusano que es "transitable en principio". Para los modelos realistas, y desplazables en la práctica", uno debe abordar los aspectos de ingeniería adicionales, tales como los efectos de marea. Vamos a discutir, más adelante esta propuesta, que las condiciones impuestas asintóticas en el infinito puede hacerse más flexibles (y para ciertas preguntas, el infinito asintótico se puede ignorar por completo), y que es la garganta del agujero de gusano la que es más a menudo de interés directo. Para esto, es un ejercicio fácil de demostrar que el tensor de Einstein es:

$$\begin{aligned} G_{\hat{t}\hat{t}} &= -\frac{2r''}{r} + \frac{1 - (r')^2}{r^2} \\ G_{\hat{r}\hat{r}} &= -\frac{2\phi'r'}{r} - \frac{1 - (r')^2}{r^2} \\ G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} &= G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \phi'' + (\phi')^2 + \frac{\phi'r' + r''}{r} \end{aligned}$$

en particular

$$G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G_{\hat{r}\hat{r}} = -\frac{2r''}{r} + \frac{-2\phi'r'}{r}$$

Pero, por definición, $r' = 0$ en la garganta. También sabemos que $r'' = 0$ en la garganta. La posibilidad de que $r'' = 0$ en la garganta nos obliga a recurrir a algunas complicaciones técnicas. Por definición, la garganta es un mínimo local de $r(l)$. Así, hay que existir un $l \in$ región abierta $(0, l_*^+)$ tal que $r''(l) > 0$, y en el otro lado en la garganta una $l \in$ región abierta $(-l_*^-, 0)$ de tal manera que $R''(l) > 0$. Esto es la condición de "llamarada" de Morris-Thorne. Así que para el tensor de Einstein tenemos:

$$\exists l_*^-, l_*^+ > 0 : \quad \forall l \in (-l_*^-, 0) \cup (0, l_*^+), \quad G_{\hat{t}\hat{t}} + G_{\hat{r}\hat{r}} < 0$$

Esta limitación en los componentes del tensor de Einstein, que se sigue directamente de la definición de un agujero de gusano transitable y de la definición del tensor de Einstein, no hace referencia a la dinámica de la relatividad general y de forma automática declara, por definición, independientemente de si uno está tratando con la gravedad de Einstein, la gravedad Brans-Dicke, o cualquier otra forma exótica de la gravedad. Siempre podemos definir la energía total de tensión mediante la aplicación de las ecuaciones de Einstein:

$$G^{\mu\nu} = 8\pi G T_{total}^{\mu\nu}$$

Y en términos de la energía total de tensión:

$$\exists l_*^-, l_*^+ > 0 : \quad \forall l \in (-l_*^-, 0) \cup (0, l_*^+), \quad G_{\hat{t}\hat{t}}^{total} + G_{\hat{r}\hat{r}}^{total} < 0$$

Por lo tanto se debe violar la condición de energía nula para la energía total de tensión en alguna región abierta que rodea la garganta. Los únicos requisitos para este resultado son esencialmente cuestiones de definición: utilizar la misma métrica para definir el agujero de gusano y para calcular el tensor de Einstein, y utilizar ese mismo tensor de Einstein para identificar la tensión-energía total.

Capítulo 5

Construcción y análisis de un agujero de gusano

5.1 Mapeo de Soluciones interiores en agujeros de gusano

La idea se basa en poder emplear algunas de las características de una solución interior referentes a la masa y la función de corrimiento al rojo gravitacional para apartir de la solución interior generar un modelo que nos represente un agujero de gusano. Emplearemos el método propuesto por [17]. Consideremos la solución interior de Schwarzschild [17]

$$ds^2 = (A \pm B \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2} r^2})^2 dt^2 + (1 - \frac{2GM}{c^2} r^2)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

y realizamos el cambio en la funciones de masa y de corrimiento (no es un cambio de coordenadas) $\frac{2GM}{c^2} r^2 = \frac{R_0^2}{R^2}$

$$ds^2 = (A - B \sqrt{1 - \frac{R_0^2}{R^2}})^2 dt^2 + (1 - \frac{R_0^2}{R^2})^{-1} dR^2 + R^2 d\Omega^2$$

esta nueva métrica tiene la estructura de un agujero de gusano redefiniendo A, B

$$A = 3\alpha\sqrt{1 - n^2} \quad B = \alpha$$

obtenemos

$$ds^2 = -\alpha \left(3\sqrt{1 - n^2} - \sqrt{1 - \frac{R_0^2}{R^2}} \right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{R_0^2}{R^2} \right)^{-1} dR^2 + R^2 d\Omega^2 \quad (5.1)$$

La forma de las constantes fueron elegidas de manera que se satisface la existencia de la garganta y facilitará el análisis de la región de validez de la solución para que no exista algún horizonte de Killing. Renombrando la variable R como r . Para la métrica (5.1) calculamos la densidad, la presión radial y la presión tangencial.

Con este análisis de las ecuaciones de Einstein se establece que la densidad está dada por:

$$k\rho = -\frac{r_0^2}{r^4} \quad (5.2)$$

Con esta misma analogía decimos que la presión radial y tangencial son:

$$kP_r = -\frac{\sqrt{1-\frac{r_0^2}{r^2}}r_0^2}{r^4\left(3\sqrt{1-n^2}-\sqrt{1-\frac{r_0^2}{r^2}}\right)} - \frac{r_0^2}{r^4} \quad (5.3)$$

$$P_t = \frac{r}{2} \frac{3r_0^2\sqrt{-n^2+1}\left(3r_0^2-4r^2+12\sqrt{\frac{r^2-r_0^2}{r^2}}r^2\sqrt{-n^2+1}\right)}{\sqrt{\frac{r^2-r_0^2}{r^2}}r^7\left(3\sqrt{-n^2+1}-\sqrt{\frac{r^2-r_0^2}{r^2}}\right)^2} \\ + c^2 \left(-\frac{r_0^2}{r^4} - \frac{\sqrt{1-\frac{r_0^2}{r^2}}r_0^2}{r^4\left(3\sqrt{1-n^2}-\sqrt{1-\frac{r_0^2}{r^2}}\right)} - \frac{r_0^2}{r^4} - \frac{\ln(r_0^2)}{\sqrt{1-\frac{r_0^2}{r^2}}r_0^3} \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{1-\frac{r_0^2}{r^2}}r_0^2}{r^4\left(3\sqrt{1-n^2}-\sqrt{1-\frac{r_0^2}{r^2}}\right)} - \frac{r_0^2}{r^4} \right) \quad (5.4)$$

Las gráficas siguientes representan la violación de la condición de energía nula con radio 1.07

ahora este mismo modelo con un radio de 1.7

y ahora con radio de 7.7

Las gráficas de la presión radial con estos mismos valores del radio respectivamente son

Con la misma analogía las graficas de la presión tangencial más la densidad es:

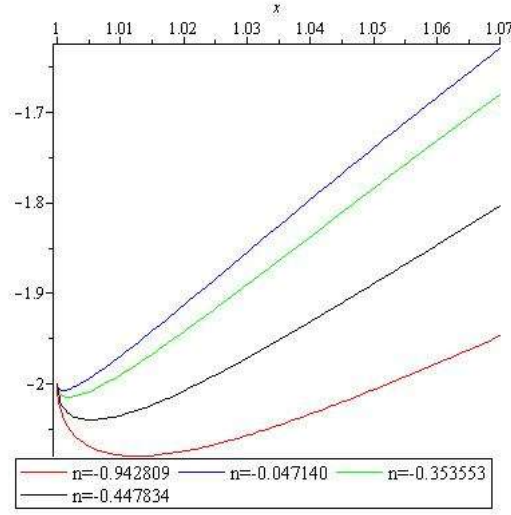
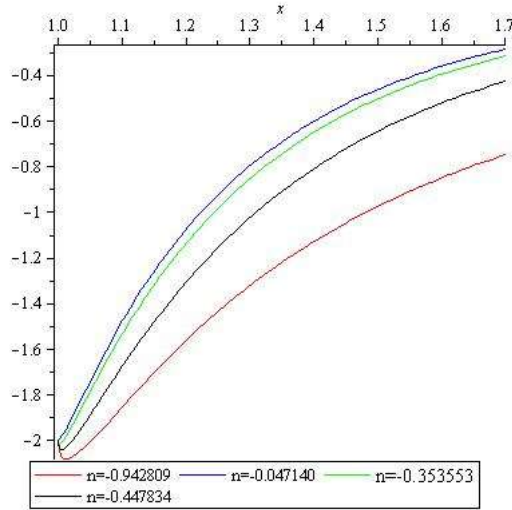
5.2 Análisis de la solución de un agujero de gusano

En un trabajo reciente se han obtenido algunos espacios tiempos estáticos y esféricamente simétricos, en coordenadas de Schwarzschild, aquí analizamos la solución construida en la sección anterior, cuya métrica está dada por:

$$ds^2 = -\alpha y(r)dt^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{r_0^2}{r^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

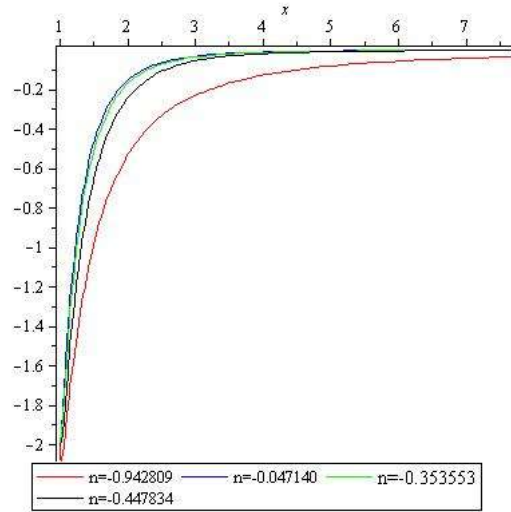
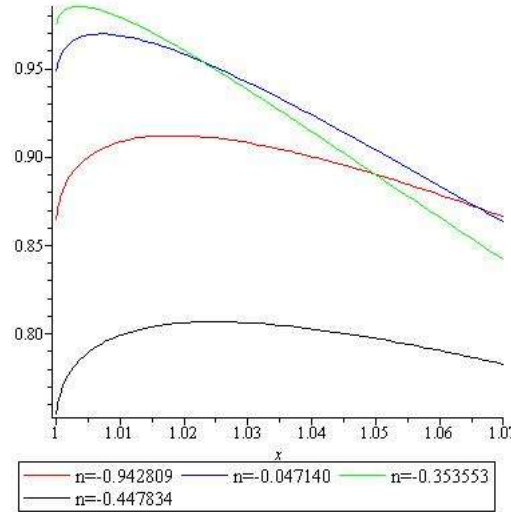
donde α es una cosntante y

$$y(r) = 3\sqrt{1-n^2} - \sqrt{1-\frac{r_0^2}{r^2}}$$

Figura 5.1: Violación de la condición de energía con radio $r=1.07$ Figura 5.2: Violación de la condición de energía con radio $r=1.7$

Observando la métrica notamos la posibilidad de que esta podría describir un agujero de gusano, notamos que la componente radial; satisface $b(r_0) = r$ y $(b - rb')/2b^2 > 0$. Esto indica la existencia de una garganta. Para mostrar que existe una región asintóticamente plana tenemos que para grandes valores de $r \rightarrow \mp\infty$, la geometría es asintóticamente plana si

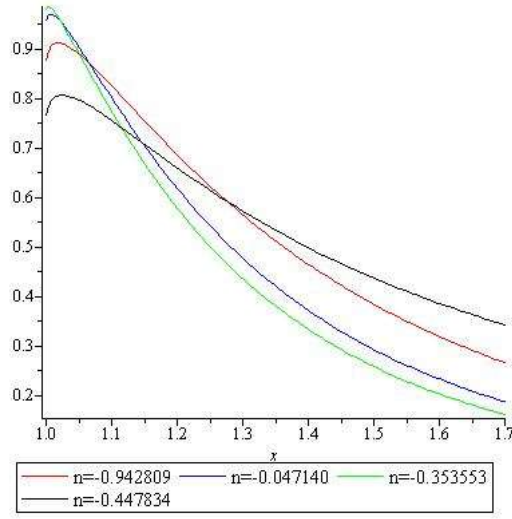
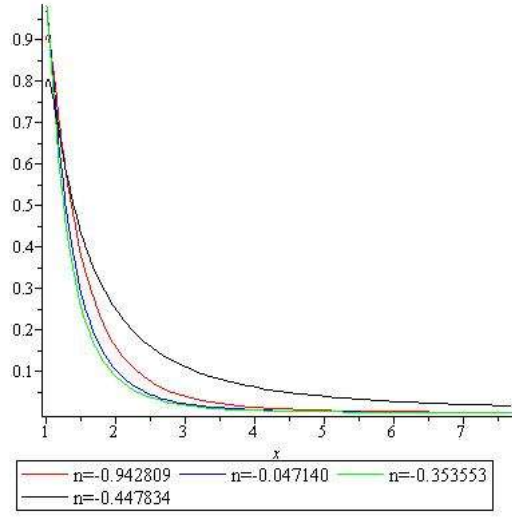
$$\alpha = 1/(3\sqrt{1-n^2} - 1)$$


 Figura 5.3: Violación de la condición de energía con radio $r=7.7$

 Figura 5.4: Presión radial con $r=1.07$

aunque esto no es determinante, si nos da un indicio. Como se menciona en la sección anterior la geometría debe estar ausente de horizontes de eventos, es decir $y(r) > 0$ para $r > r_0$, esto implica que

$$-2\sqrt{2}/3 < n < 2\sqrt{2}/3$$

La geometría será regular si los escalares de curvatura son regulares, en particular al aproximarnos a cero la curvatura escalar es cero. El cálculo del escalar de curvatura

Figura 5.5: Presión radial con $r=1.7$ Figura 5.6: Presión radial con $r=7.7$

nos lleva a la siguiente relación:

$$R = \left(\frac{3r_0^2}{2r^2} + 8 - 9n^2 - 9\sqrt{1 - n^2}y \right) \frac{n^2 r_0^2}{r^4 y^2}$$

de esta ecuación se observa que para $r > r_0$ la curvatura escalar es regular. Un comportamiento similar se tiene para el escalar de Kretschmann y además tienden a cero para grandes valores.

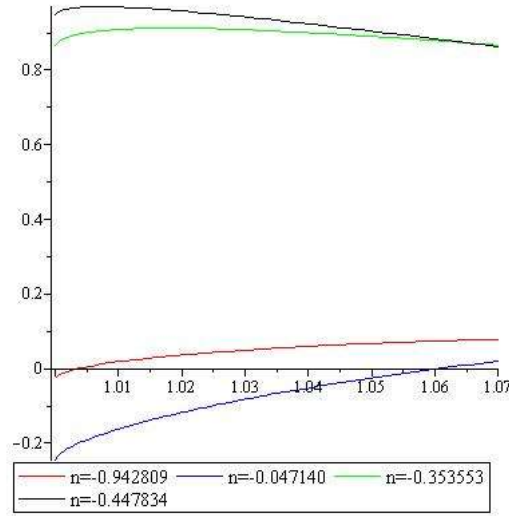


Figura 5.7: Presión tangencial más la densidad con $r=1.07$

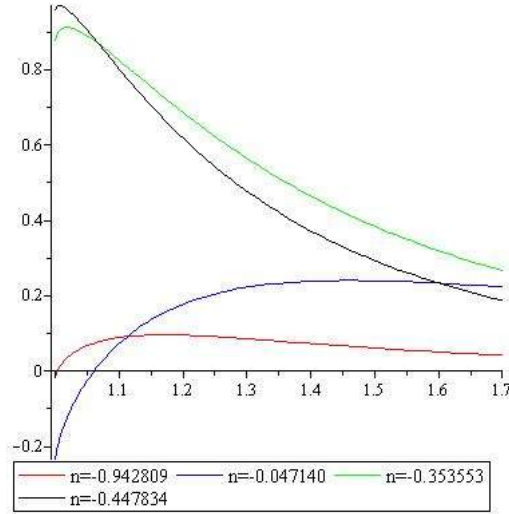


Figura 5.8: Presión tangencial más la densidad con $r=1.7$

5.2.1 Construcción de coordenadas especiales

En las coordenadas anteriores notamos la existencia de una región asintótica, y aunque esto es suficiente para garantizar la existencia del agujero de gusano con una garganta ubicada en r_0 , es conveniente mostrar la existencia de las dos regiones. Realizando una transformación de coordenadas que nos permita mostrar las regiones asintóticas

$$(t, r, \theta, \phi) = (t, \sqrt{l^2 + r_0^2}, \theta, \phi)$$

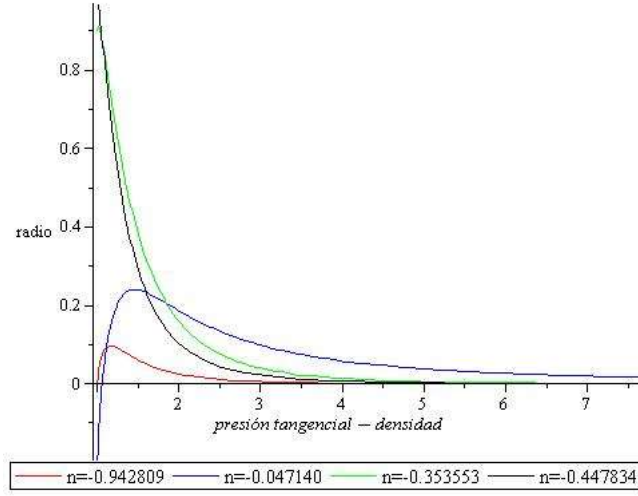
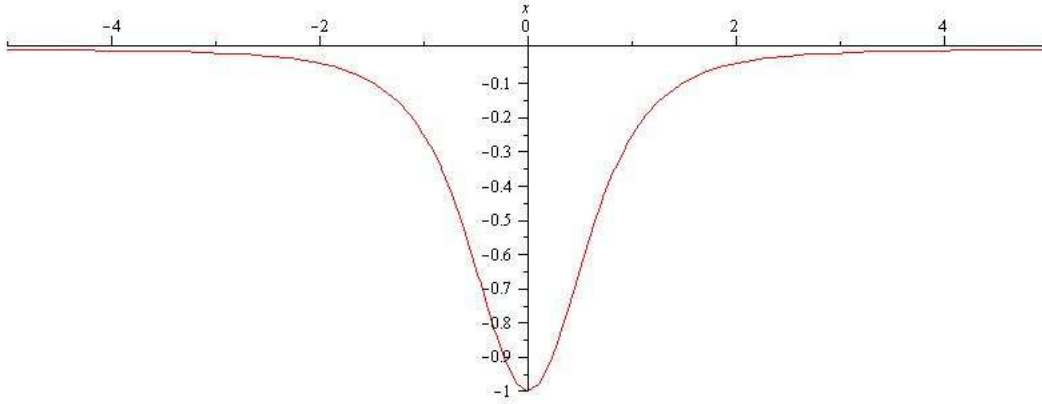
Figura 5.9: Presión tangencial más la densidad con $r=7.7$ 

Figura 5.10: Garganta del agujero de gusano

obtenemos:

$$ds^2 = \frac{3\sqrt{1-n^2} - \sqrt{\frac{l^2}{l^2+r_0^2}}}{(3\sqrt{1-n^2}-1)} dt^2 + dl^2 + (l^2 + r_0^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

El rango de la coordenada es todos los reales, y las hipersuperficies $t = \text{constante}$ son idénticas a las hipersuperficies espaciales del agujero de gusano de Thorne. En estas coordenadas las dos regiones asintóticamente planas están ubicadas en $l = \infty$ y en $l = -\infty$, con $l = 0$, el valor que identifica la garganta, para ningún valor de l las esferas se reducen a un punto, permitiendo así, el paso de una región a otra a través de la garganta.

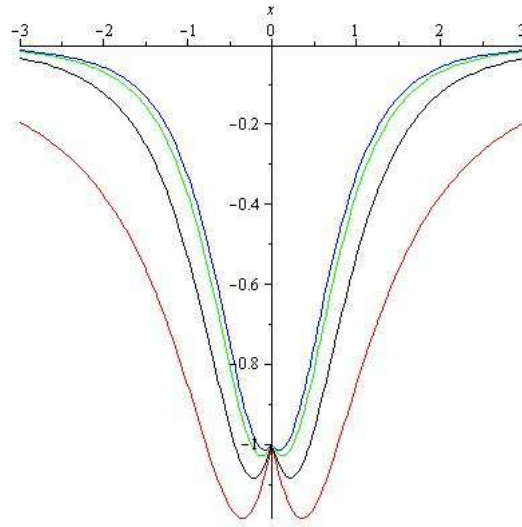


Figura 5.11: Condiciones de energía del agujero de gusano con los valores citados

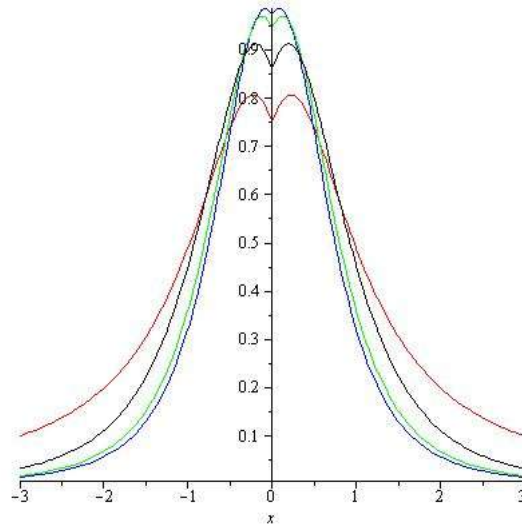


Figura 5.12: Condiciones de energía del agujero de gusano con los valores citados

5.3 Ecuación de estado

La forma de la densidad en las nuevas coordenadas es dada por

$$\rho(l) = -\frac{r_0^2}{(l^2 + r_0^2)^2}$$

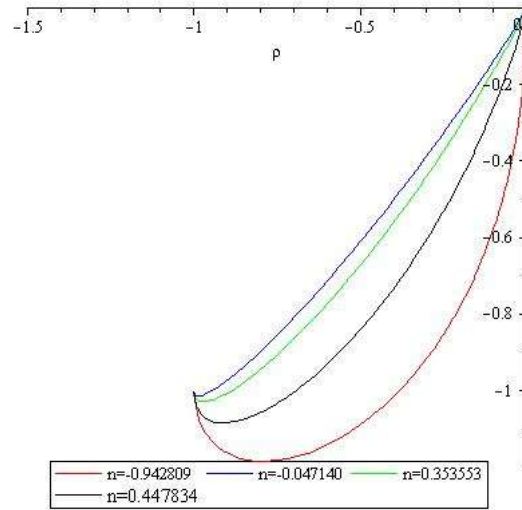


Figura 5.13: Densidad con diferentes valores de n

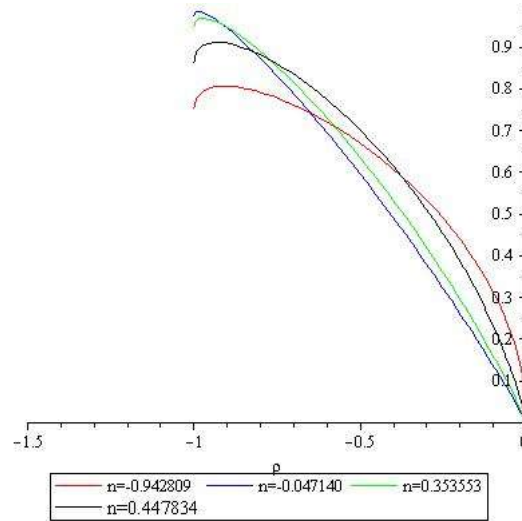


Figura 5.14: Presion tangencial con diferentes valores de n

Mientras que la presión tangencial y la presión radial satisfacen las ecuaciones de estado:

$$P_l(\rho) = \frac{3\sqrt{1-n^2}\rho}{3\sqrt{1-n^2} - \sqrt{1-\sqrt{-r_0^2\rho}}}$$

$$P_t(\rho) = \frac{1 - \left(6\sqrt{1-n^2} - \sqrt{1 - \sqrt{-r_0^2\rho}}\right)^2}{4 \left[3\sqrt{1-n^2} - \sqrt{1 - \sqrt{-r_0^2\rho}}\right]^2} \rho$$

La densidad y la presión radial son negativa para todos los valores de l , tienden a cero para de $l \rightarrow \mp\infty$, toman su valor mínimo en la garganta. Mientras que la presión tangencial es positiva tiende a cero en las regiones asintóticas y es máxima en la garganta, de esto se concluye la violación de las condiciones de energía [8]. La presión radial cerca de la garganta satisface una ecuación de estado lineal dada por

$$P_l(\rho) = \rho$$

$$P_t(\rho) = \left[\frac{1}{36(1-n^2)} - 1 \right] \rho$$

La garganta del agujero de gusano en las nuevas coordenadas se encuentra en $l = 0$. El comportamiento asintótico de la métrica para grandes valores de $l \rightarrow \mp\infty$ esta dado por:

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r_0^2}{2(3\sqrt{1-n^2}-1)} + O\left(\frac{1}{l^2}\right) \right) dt^2 + dl^2 + l^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Lo que muestra que las dos regiones conectadas por la garganta ($l = 0$) son asintóticamente planas.

5.4 Sistema politrópico

Comenzamos definiendo una ecuación de estado, en la cual sólo está presente una relación entre la presión radial y la densidad, a saber relacionadas de la siguiente manera.

$$p_r(r) = \mu \rho^{1+\frac{1}{n}} \quad (5.5)$$

Esta ecuación es conocida como ecuación politrópica

de la pasada ecuación, sustituyendo sus respectivas expresiones de las ecuaciones de Einstein y resolviendo la ecuación diferencial para $m(r)$ podemos encontrar la siguiente relación:

$$m(r) := \left(\frac{1}{3} r^{\frac{3}{n+1}} k^{\frac{1}{n+1}} c^2 \mu^{\frac{-n}{n+1}} + C \right)^{n+1} \quad (5.6)$$

Y dado que $b(r) := 2m(r)$

$$b(r) := 2 \left(\frac{1}{3} r^{\frac{3}{n+1}} k^{\frac{1}{n+1}} c^2 \mu^{\frac{-n}{n+1}} + C \right)^{n+1} \quad (5.7)$$

Para obtener la constante de integración utilizamos la condición de existencia de garganta $\frac{b(r_0)}{r_0} = 1$ De donde obtenemos que $C = \left(\frac{1}{2}r_0\right)^{\frac{1}{n+1}} + \frac{1}{3}r_0^{\frac{3}{n+1}}k^{\frac{1}{n+1}}c^2\mu^{\frac{-n}{n+1}}$, ahora integramos este valor de C a la ecuación $b(r)$ creándose así $B(r)$ y redefinimos el factor μ , quedando todo de la siguiente manera

$$\mu = \nu^{\frac{n+1}{n}} c^{\frac{2(n+1)}{n}} r_0^{\frac{2}{n}} 2^{\frac{1}{n}} k^{\frac{1}{n}} \quad (5.8)$$

$$B(r) = \frac{\left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{3} \frac{r_0^{\frac{3}{n+1}}(1+3\nu)}{r^{\frac{3}{n+1}}}\right)^{n+1} r^3 \nu^{-n-1}}{r_0^2} \quad (5.9)$$

ahora, escribimos las ecuaciones relacionadas con la presión radial, densidad y de la presión tangencial

$$p_r(r) := \frac{1}{2} \frac{B(r)}{kr^3} \quad (5.10)$$

$$\rho(r) := \frac{\frac{dB(r)}{2}}{\frac{dr}{kc^2 r^2}} \quad (5.11)$$

$$p_t(r) := -\frac{\frac{B(r)}{dr}}{r^2} + \frac{B(r)}{r^3} \quad (5.12)$$

donde sustituyendo el valor de $B(r)$ obtenemos:

$$p_r(r) = 1/2 \left(-1/3 + 1/3 r_0^{3(n+1)^{-1}} (1+3\nu) \left(r^{3(n+1)^{-1}}\right)^{-1}\right)^{n+1} \nu^{-n-1} r_0^{-2} k^{-1} \quad (5.13)$$

$$\rho(r) = -1/2 \nu^{-n-1} \left(-1/3 + 1/3 r_0^{3(n+1)^{-1}} (1+3\nu) \left((xr_0)^{3(n+1)^{-1}}\right)^{-1}\right)^n k^{-1} c^{-2} r_0^{-2} \quad (5.14)$$

$$p_t(r) = 1/2 \left(1/3 \left(-r^{3(n+1)^{-1}} + r_0^{3(n+1)^{-1}} + 3 r_0^{3(n+1)^{-1}} \nu\right) \left(r^{3(n+1)^{-1}}\right)^{-1}\right)^{n+1} \nu^{-n-1}$$

$$\left(2 r^{3(n+1)^{-1}} + r_0^{3(n+1)^{-1}} + 3 r_0^{3(n+1)^{-1}} \nu\right) \left(-r^{3(n+1)^{-1}} + r_0^{3(n+1)^{-1}} + 3 r_0^{3(n+1)^{-1}} \nu\right)^{-1} r_0^{-2} k^{-1}$$

con lo anteriormente planteado, ahora, analizaremos la garganta del agujero de gusano, esto se hace con la expresión $p(r) + c^2 \rho(r) < 0$ de donde obtenemos:

$$\frac{1}{2} \frac{\nu - 1}{\nu r_0^2 k} < 0 \quad (5.15)$$

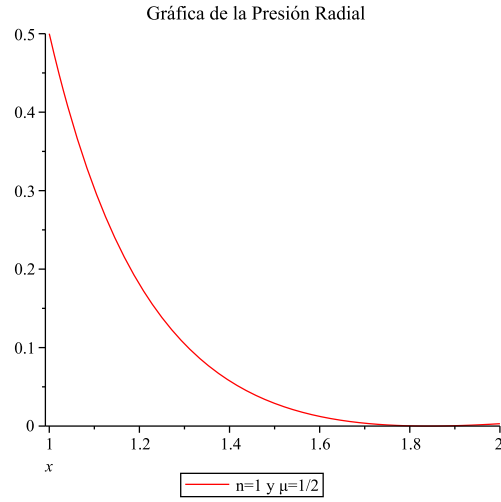


Figura 5.15: Gráfica de la presión radial

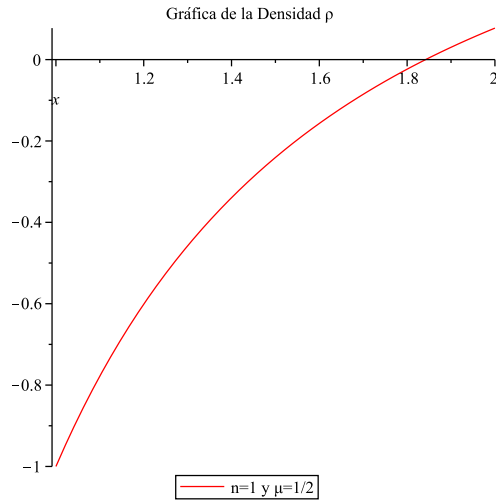


Figura 5.16: Gráfica de la densidad

de la desigualdad anterior obtenmos una condición para ν , este debe estar en el intervalo de $(0, 1)$. Lo cual garantiza la existencia de la garganta.

Ahora para satisfacer la condición de la violación de energía, se establece, $rB'(r) - B(r) < 0$, para esta parte aremos un cambio de variable, a saber $r = xr_0$, o sea:

$$rB'(r) - B(r) = \frac{1}{6}\nu^{-n-1}x^{\frac{-3}{n+1}}\left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{3}(1 + 3\nu)x^{\frac{-3}{n+1}}\right)^n\left(1 + 3\nu - 4x^{\frac{3}{n+1}}\right) \quad (5.16)$$

Su gráfica es:

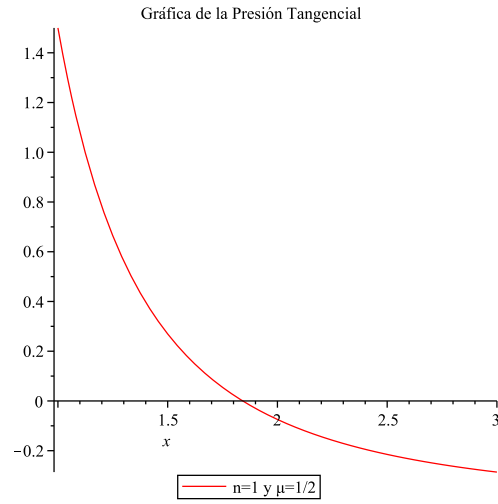


Figura 5.17: Gráfica de la presión tangencial

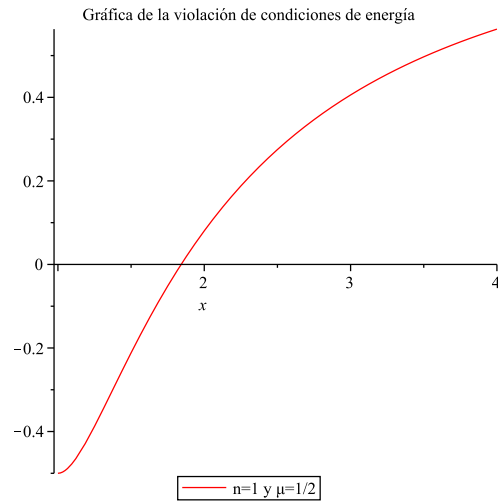


Figura 5.18: Gráfica de la violación de condiciones de energía

De donde, cuando tomamos el límite $x \rightarrow \infty$ encontramos la siguiente restricción

$$\frac{2(-1)^{n+1}}{3\nu^{n+1}3^n}$$

Comenzaremos analizando la ecuación anterior por casos, a saber, $n + 1 = 2p$, $n + 1 = 2p + 1$, $n + 1 = \frac{1}{2p+1}$ y $n + 1 = \frac{1}{2p}$

Para el primer caso $n + 1 = 2k$ tenemos que

$$\frac{2}{3} \frac{(-1)^{n+1}}{\nu^{n+1} 3^n}$$

tiende a

$$\frac{2}{3^{2p-1} \nu^{2p}}$$

Para el caso en que $n + 1 = 2k + 1$, haciendo un análisis como el anterior:

$$\frac{2}{3} \frac{(-1)^{n+1}}{\nu^{n+1} 3^n}$$

tiende a

$$\frac{-2}{3^{2p} \nu^{2p+1}}$$

Para el caso en que $n + 1 = \frac{1}{2p}$, se puede observar que:

$$\frac{2}{3} \frac{(-1)^{n+1}}{\nu^{n+1} 3^n}$$

tiende a

$$i \frac{2}{3^{\frac{1}{2p}-1} \nu^{\frac{1}{2p}}}$$

Por último para $n + 1 = \frac{1}{2p+1}$, haciendo un análisis como el anterior:

$$\frac{2}{3} \frac{(-1)^{n+1}}{\nu^{n+1} 3^n}$$

tiende a

$$\frac{-2}{3^{\frac{1}{2p-1}-1} \nu^{\frac{1}{2p-1}}}$$

Para terminar con este análisis, se debe de cumplir con la condición de existencia única de garganta, utilizaremos la ecuación $1 - \frac{B(r)}{r} > 0$, o sea se debe probar que la derivada de la función antes mencionada tiene que ser positiva, de donde obtenemos que:

$$\frac{3^{-n-1} \nu^{-n-1} r^{\frac{-2+n}{n+1}} \left(2r^{\frac{3}{n+1}} + r_0^{\frac{3}{n+1}} (1+3\nu) \right) \left(-1 + \frac{r_0^{\frac{3}{n+1}} (1+3\nu)}{r^{\frac{3}{n+1}}} \right)^n}{r_0^2} > 0 \quad (5.17)$$

en la anterior desigualdad el único factor que influye es $\left(-1 + \frac{r_0^{\frac{3}{n+1}} (1+3\nu)}{r^{\frac{3}{n+1}}} \right)^n$, pues todos los demás términos son positivos. No es difícil deducir que sólo cuando n sea par, entonces si tendremos una sólo solución.

De la parte inmediatamente anterior se puede saber el mínimo que la función puede tomar, este se obtiene igualando la condición de violación de energía a cero y encontrando sus raíces, de donde obtenemos que la raíz es

$$r_a = (1 + 3\nu)^{\frac{n+1}{3}} r_0$$

pues es hasta este valor que se violan las condiciones de energía.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo analizamos a partir de la aplicación de un método desarrollado en [17], para la solución interior de Schwarzschild construimos una métrica y el espacio tiempo resultante, a través de los escalares de curvatura mostramos la regularidad del espacio tiempo y mediante una transformación de coordenadas mostramos la existencia de las dos regiones asintóticas y de la garganta de un agujero de gusano. Además mostramos la existencia de ecuaciones de estado para éste agujero de gusano, lo que regularmente no ocurre cuando se construye alguno de estos entes, esto muestra una forma de la ecuación de estado que puede representar la materia que daría origen a un agujero de gusano.

Bibliografía

- [1] Wald R., General Relativity. The University of Chicago Press
- [2] Hobson M.P., G. P. Efstathiou, A. N. Lasenby. General Relativity An Introduction for Physicists (2006)
- [3] Wheler A., Thorne K. Gravitation
- [4] G. D Birkhoff, Relativity and Modern Physics. Advanced University Press, Cambridge (1923)
- [5] Bronnikov K.A., Kim S, W. (2003) Possible wormholes in a brane world Phys.Rev. D67 (2003) 064027 DOI: 10.1103/PhysRevD.67.064027
- [6] Lobo F. S.N. (2005), Phantom energy traversable wormholes, Phys.Rev. D71 (2005) 084011 DOI: 10.1103/PhysRevD.71.084011.
- [7] Morris M. S. y Thorne K. S. (1988), Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity Am. J. Phys. 56, pp:395
- [8] Morris M. S., Thorne K. S. y Yertserver U (1988), Wormhole, Time Machines, and the Weak Energy Condition. Phys Rev Lett 61, 1446- 1449
- [9] Poisson E, Visser M (1995). Thin shell wormholes: Linearization stability, Phys.Rev. D52 7318-7321, DOI: 10.1103/PhysRevD.52.7318
- [10] Rahaman F, Kalam M, Sarker M, Gayen K, (2006), A theoretical construction of wormhole supported by phantom energy, Physics Letters B 633 161163.
- [11] Thorne K. S. (2014), The Science of Interstellar, W. W. Norton and Company, Visser M (1989), Traversable wormholes from surgically modified Schwarzschild space-times, Nucl.Phys. B328, 203-212, DOI: 10.1016/0550-3213(89)90100-4
- [12] Visser M, Kar S, Dadhich N (2003), Traversable wormholes with arbitrarily small energy condition violations, Phys.Rev.Lett. 90 (2003) 201102 DOI: 10.1103/PhysRevLett.90.201102
- [13] Visser M., Lorentzian Wormholes from Einstein to Hawking.

- [14] Bronnikov K.A., Kim S, W (2003) Possible wormholes in a brane world Phys.Rev. D67 (2003) 064027 DOI: 10.1103/PhysRevD.67.064027
- [15] Rahaman F, Kalam M, Sarker M, Gayen K, (2006), A theoretical construction of wormhole supported by phantom energy, Physics Letters B 633 161163.
- [16] Visser, Matt. Traversable wormholes: Some simple examples. Physical Review D 39, 31823184 (1989).
- [17] Esteves Delgado, Joaquin, Esteves Delgado Gabino. Agujeros de gusano
- [18] Golderberg, James. An Introduction to Tensorial Analisis on Manifolds