UNIVERSIDAD MICHOACANA
DE SAN NICOLAS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICO-MATEMÁTICAS “MAT. LUIS MANUEL
RIVERA GUTIÉRREZ“

SUBGRUPOS NILPOTENTES EN TABLAS DE MARCAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

PRESENTA:

Jesús Alberto Silva González

ASESOR DE TESIS:
Luis Valero Elizondo

Morelia Michoacán, febrero de 2017

Dedicatoria

Dedicado a
mi familia en especial a mi mamá

Agradecimientos

Les doy las gracias a mi mismo, a mi familia en especial a mi mamá y a mi asesor de tesis. A mi mismo por lograr desarrollar un trabajo que en principio pensé que no podía pero que nunca me rendí y lo he logrado. A mi familia por darme el apoyo y animarme a terminar mi tesis y porque siempre creyeron en mi, en especial a mi mamá que me ayudó mucho. A mi asesor de tesis que me ayudó con toda su paciencia para lograr este proyecto.

Índice

Resumen

En esta tesis se explora las propiedades de la tabla de marcas de un grupo finito, especialmente los relacionados con los subgrupos nilpotentes. En primer lugar están las definiciones básicas y teoremas que utilizaremos más adelante, y que a continuación definimos la tabla de marcas de un grupo finito, que proporciona abundantes ejemplos. También se menciona GAP (Grupos, Algoritmos y Programación), un paquete de software que nos permite realizar cálculos complejos con los grupos finitos, incluyendo tablas de marcas, cuyas propiedades pueden ser fácilmente estudiadas de esta manera. Mostramos cómo encontrar los subgrupos cíclicos de un grupo mediante su tabla de marcas. A continuación, definimos grupos nilpotentes, y el subgrupo de Fitting de un grupo. Se demuestra que el subgrupo de Fitting se puede encontrar en la tabla de marcas, pero su tipo de isomorfismo se no se puede determinar a partir de ella.

Palabras Clave: Grupo, Nilpotente, Tabla de marcas, Subgrupo, Isomorfismo.

Abstract

In this paper we explore properties of the table of marks of a finite group, especially those dealing with nilpotent subgroups. First we give basic definitions and theorems which we shall later use, and we then define the table of marks of a finite group, providing abundant examples. We also mention GAP (Groups, Algorithms and Programming), a software package which allows us to perform sophisticated computations with finite groups, including tables of marks, whose properties can be easily studied in this manner. We show how to find the cyclic subgroups of a group using its table of marks. We then define nilpotent groups, and the Fitting subgroup of a group. We show that the Fitting subgroup can be found in the table of marks, but its isomorphism type is cannot be determined from it.

Introducción

Primero se dan las definiciones de grupos y subgrupos, en este caso se definirán los grupos cíclicos y simétricos que son más importantes para entender el desarrollo de esta tesis.

Se muestran las principales propiedades de los grupos cíclicos y simétricos, ya que estas propiedades se usarán en casi toda la tesis. Una de las definiciones más importantes de esta tesis es la de subgrupo normal, en especial en grupos abelianos, que da como resultado equivalente la definición de normalizador de un subgrupo en un grupo que también protagoniza en esta tesis. La definición de acción matemática es de vital importancia para la definición de tabla de marcas ya que de esto se deriva las clases de conjugación de elementos y de subgrupos que también son importantes en esta tesis. Se muestran los teoremas de p-grupos, en especial los teorema de Sylow que se usarán como objetivo final de esta tesis. Algo que se utilizara es el producto directo y semidirecto de grupos para poder analizar grupos muy complejos. El tema de isomorfismo de grupos y subgrupos se utilizará para grupos finitos que tengan tablas de marcas isomorfas o iguales, para esto se usa un poco de programación en software computacional llamado GAP, que permite realizar cálculos muy complejos en poco tiempo.

Antes de usar GAP se muestra como calcular la tabla de marcas de grupos sencillos sin usar computadora. Posteriormente se usan comandos en GAP para calcular tablas de marcas sin hacer cuentas a mano. Luego a partir esto usando GAP calculo la tabla de marcas de un grupo simétrico, se determina un método para ver cuáles subgrupos son cíclicos a partir de las propiedades de la tabla de marcas y de una consecuencia del teorema de Euler en grupos cíclicos. Esto nos prepara para el objetivo principal que son los grupos nilpotentes y el subgrupo de Fitting de un grupo.

Para comprobar si un grupo es cíclico, basta ver si todos sus subgrupos son cíclicos, esto se deduce viendo que para cada divisor del orden del grupo haya un solo subgrupo conjugado al representante de las clases de conjugación del mismo orden y que este contenido en el grupo que queremos verificar, esto se verifica para todas las clases de conjugación del mismo orden, la suma de estos subgrupos debe ser uno para ser cíclico, se descarta el caso si no hay clase de conjugación de subgrupos de algún orden divisor del grupo que queramos verificar. Esto se puede ver por medio de la tabla de marcas calculando por medio de una formula que se deduce en la sección 2 y se dan ejemplos de esto en la sección 4.

Por ultimo en la sección 5 se definen los grupos nilpotentes y a partir de varios teoremas y proposiciones se deduce que los grupos nilpotentes son los que tienen todos sus p-subgrupos de Sylow normales y por lo tanto son únicos. Se definen el subgrupo de Fitting como el más grande subgrupo normal y nilpotente, se verificara que el subgrupo de Fitting no se preserva hasta isomorfismo en tablas de marcas isomorfas, esto se verificará usando dos grupos de orden 96 con tablas de marcas isomorfas y se utilizará el producto semidirecto para definir estos grupos, lo cual facilitará los cálculos para demostrar que no se preserva hasta isomorfismo el subgrupo de Fitting. Se determina el método para ver cuáles subgrupos son nilpotentes y también para encontrar el subgrupo de Fitting , para eso uso que un grupo nilpotente tiene sus p-subgrupos de Sylow únicos y usando los resultados de la sección 2 puedo calcular el número de subgrupos conjugados a una clase de conjugación de subgrupos contenidos en un subgrupo particular, esto me sirve pues viendo la descomposición de potencias de primos del orden del grupo y debe haber un solo subgrupo conjugado de potencia prima máxima para cada primo en la factorización del orden y debe estar contenido en el grupo a verificar. Esto es equivalente a la definición de subgrupo nilpotente, y se calculan de manera similar que los subgrupos cíclicos. Esto se logra por medio de las entradas de la tabla de marcas. Se determina un método para encontrar el subgrupo de Fitting y es buscando los grupo normales mas grandes, usando el normalizador del subgrupo o viendo si el índice del subgrupo es 2 y posteriormente se verifica si son nilpotentes, el más grande normal y nilpotente de estos es el subgrupo de Fitting.

1 Temas previos

1.1 Definiciones de Grupos

Un *grupo* es un conjunto, G, conjuntamente con una operación binaria $\cdot$ que compone dos elementos cualesquiera a y b de G para formar otro elemento denotado como $a \cdot b$ o ab. Para poder calificar como un grupo a $(G, \cdot)$, debe satisfacer cuatro axiomas:

Cerradura o Clausura:

Para todo a,b de G, el resultado de la operación $a \cdot b$ también pertenece a $G.\forall a, b \in G \quad : \quad a \cdot b \in G$

Asociatividad:

Para todos a, b y c de G, se cumple la ecuación $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Elemento neutro:

Existe un elemento e de G, tal que para todos los elementos a de G, se cumpla la ecuación $ea = ae = a$.

Elemento inverso:

Para todo a de G, existe un elemento b de G tal que $ab = ba = e$.

Sean $(G, \cdot)$ un grupo y $H \subset G : H \neq \emptyset$. El grupo H se llama *Subgrupo* de G y solo si:

H contiene al elemento identidad de $G : e \in H$. la operación binaria es cerrada en $H : \forall a, b \in H \Rightarrow a \cdot b \in H$.
H contiene los elementos inversos: $\forall a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$. Las dos últimas condiciones pueden expresarse de forma equivalente en una sola:

$\forall a, b \in H \Rightarrow a \cdot b^{-1} \in H$. En el caso que H sea finito, es suficiente que H sea cerrado bajo producto, puesto que la existencia de los inversos se sigue automáticamente en ese caso.

1.2 Acción (matemática)

Una acción de un grupo (G,*) sobre un conjunto X es una aplicación $\phi : G \times X \to X$ que cumple:
1.$\forall x \in X,\ e \cdot x = x$ donde e es el elemento neutro del grupo.
2.$\forall x \in X,\ g, h \in G,\ (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.

Estas dos condiciones implican que, para cada elemento g de G, la aplicación $\phi(g, \cdot) : X \to X$ es una función biyectiva.

Un $punto\ fijo$ de X bajo la acción de un grupo G es un elemento x de X tal que para cualquier g de G se tiene que $g \cdot x = x$.

1.3 Grupos normales

Las *clases laterales izquierdas* son un conjunto $G/K = \{gK : g \in G\}$ donde K es subgrupo de G.

El *normalizador* de H en G es $N_G(H) = \{g \in G\ : gHg^{-1} = H\}$

Supongamos que G es un grupo. Dos elementos a y b de G se llaman *conjugados* si existe un elemento g de G tal que $gag^{-1} = b$.

Se puede demostrar fácilmente que la conjugación es una relación de equivalencia y, por tanto, esto parte a G en clases de equivalencia . (Esto significa que cada elemento del grupo pertenece a una clase de conjugación con precisión, y las clases $cl(a)$ y $cl(b)$ son iguales si y sólo si a y b son conjugado, y disjuntos de otro modo). La clase de equivalencia que contiene el elemento a de G es $cl(a) = \{b \in G \mid \exists g \in G : b = gag^{-1}\}$ y se llama la *clase de conjugación de a*.
El número de clases de G es el número de distintas (no equivalentes) clases de conjugación. Todos los elementos que pertenecen a la misma clase de conjugación tienen el mismo orden.

Las *clases de conjugación de subgrupos* se denota $Cls(H)$ donde H es un subgrupo que pertenece a esta clase.
Los subgrupos H y K de G pertenecen a una clase de conjugación si son conjugados es decir existe $g \in G$ tal que $gHg^{-1} = K$.

El cardinal de las clases de conjugación de subgrupos esta dada por índice del normalizador de subgrupo que pertenece a una clases de conjugación respecto al grupo G.

$|Cls(H)| = [G : N_G(H)]$

Esto porque si g y $n \in G$ son tales que $gHg^{-1} = nHn^{-1}$ entonces si se multiplica por g^{-1} y g por la izquierda y derecha respectivamente queda que $H = (g^{-1}n)H(g^{-1}n)^{-1}$ por lo que esto implica que $g^{-1}n$ pertenece al normalizador de H en G , entonces tomando que el normalizador es un subgrupo de G solo los elementos de G que no pertenecen al normalizador generan clases laterales diferentes $gN_G(H)$, si no generan la misma clase lateral como en el caso de g y n anteriormente y por lo tanto demostrado.

El *estabilizador* de h se llama centralizador de h en G y lo representaremos por

$C_G(h) = \{g \in G \mid ghg^{-1} = h\} = \{g \in G \mid gh = hg\}.$

El *centralizador* $C_G(h)$ es, pues, el conjunto de todos los elementos de G que conmutan con h.

El *centro* de G es $\{h \in G \mid ghg^{-1} = h \text{ para todo } g \in G\}$, y se denota $Z(G)$. El *centro* de G no es más que el subgrupo de G formado por los elementos de G que conmutan con cualquier elemento de G.

Un *subgrupo normal* N de un grupo G es un subgrupo invariante por conjugación; es decir, para cada elemento n de N y cada g en G, el elemento gng^{-1} está en N.
N es un subgrupo normal de G se escribe $N \triangleleft G$.

Otra manera de poner esto es diciendo que coinciden las clases derechas e izquierdas de N en G:
$Ng = gN$ o análogamente $g^{-1}Ng = N$ para todo g en G.

Todos los subgrupos N de un grupo abeliano G son normales, porque $gNg^{-1} = Ngg^{-1} = N$.

1.4 Grupos Cíclicos

Un *grupo cíclico* es el generado por un elemento, es decir, existe a tal que $G = \{a^n \,|n \in Z\}$. Los grupos cíclicos son abelianos, lo que quiere decir que todos los elementos conmutan.

Todo grupo cíclico es abeliano, pues dos elementos de un grupo $\langle a \rangle$ son de la forma a^r y a^s , y $a^r \cdot a^s = a^{r+s} = a^{s+r} = a^s \cdot a^r$.

Todo subgrupo de un grupo cíclico es cíclico.

Demostración: Sea $G = \langle a \rangle$ un grupo cíclico. Si $H \leq G$, entonces existen dos posibilidades: que H sea trivial, en cuyo caso $H = \langle 1 \rangle$, o que exista un entero positivo mínimo n tal que $a^n \in H$. En este último caso, claramente $\langle a^n \rangle \subseteq H$. Ahora bien, si $h \in H$, entonces h es de la forma a^m pues H es un subgrupo de G , y por el algoritmo de la división tenemos que $a^m = a^{nq+r} = a^{nq}a^r$, con $q, r \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq r < n$, o sea que $a^r = a^{-mq}a^n \in H$, por lo que sólo puede ser $r = 0$ ya que hemos supuesto que n es el menor entero positivo para el cual $a^n \in H$, así que todo elemento h de H es de la forma a^{qn} , luego $H \subseteq \langle a^n \rangle$, y así concluimos que $H = \langle a^n \rangle$ y queda demostrado que todo subgrupo de grupo cíclico es cíclico.

1.5 Grupo Simétrico

El *grupo simétrico* sobre un conjunto X, denotado por S_X es el grupo formado por las funciones biyectivas (permutaciones) de X en sí mismo. En este caso usare los naturales y esto forma un grupo de permutaciones si usa un conjunto finito de ellos.
El grupo de permutaciones de $1, ..., n$ se denota S_n. Sus elementos se pueden representar como productos de ciclos ajenos, que describiremos a continuación.

Hay diversas formas de representar una permutación. Podemos escribir una permutación en forma de matriz, situando en primera fila los elementos del dominio 1, 2, 3..., y en la segunda las imágenes correspondientes (1), (2), (3),....

Dada dos permutaciones, su composición se realiza siguiendo las reglas usuales de composición de funciones:

Si $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ y $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$
su composición es: $\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

El cálculo de la composición puede seguirse de un modo visual, recordando que al componer funciones se opera de derecha a izquierda.

Esto se puede representar por ciclos donde no aparecen los que están fijos:

Como $\tau = (14532)$ y $\sigma = (1346)$ sería en forma de ciclos

$\tau \circ \sigma = (14532)(1346) = (12)(35)(46)$
Esto permite utilizar una notación mas simple para hacer composición de elementos del grupo simétrico.
Esto lo aplicaré para la tabla de marcas de un grupo simétrico en la sección próxima.

1.6 p-Grupos y Teoremas de Sylow

Sea p un numero primo.Un $p-grupo$ es un grupo en el que cada elemento tiene como orden una potencia de p. Esto es, para cada elemento g del grupo, existe un entero no negativo n tal que g elevado a la p^n es el elemento identidad del grupo. Para grupos finitos, es equivalente ser un p-grupo con ser un grupo de orden una potencia del primo p.

Primer teorema de Sylow

Para cualquier factor primo p con multiplicidad máxima n, es decir, p^n divide a $|G|$ y p^{n+1} no lo divide, existe un subgrupo de G de orden p^n. Estos subgrupos son llamados los $p-subgrupos\ de\ Sylow$ de G.

Segundo teorema de Sylow

Dado un grupo finito G, y un número primo p que divide al orden de G, entonces todos los p-subgrupos de Sylow son conjugados entre sí. Es decir, si H y K son p-subgrupos de Sylow entonces existe un elemento g en G tal que $g^{-1}Hg = K$.

Tercer teorema de Sylow

Sea G un grupo talque el orden del grupo $|G| = p^n m$ donde p no divide a m. Entonces el número de p-subgrupos de Sylow es congruente con 1 módulo p y también divide a m.

Proposición:

Sea p un número primo y sea G un p-grupo no trivial. Entonces $Z(G)$ no es trivial.
Demostración:

Si $x \in G$ es tal que $|cl(x)| > 1$, entonces, como $|cl(x)| = [G : C(x)]$ es un divisor de $|G|$, vemos que p divide a $|cl(x)|$. Ahora, como

$$|G| = \sum_{\substack{c \in Cl(G) \\ |c|>1}} |c| + |Z(G)|$$

y p divide al miembro izquierdo y al primer término del derecho, concluimos que p divide a $|Z(G)|$.

1.7 Homomorfismos

Sea dos grupos$(G, *)$, $(F, \cdot)$, según la definición una función $f : G \to F$ es un *homomorfismo de grupos* si:

$f(a * b) = f(a) \cdot f(b)$ para todo par de elementos $a, b \in G$.

Si esto pasa, entonces también se tiene que
$f(e_G) = e_F$, siendo e_G, e_F los neutros de G y F,y que
$f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ para todo $a \in G$.

Si ambos tienen notación aditiva, entonces la condición anterior se escribe como $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

Por ejemplo:

1) Sea $G = R$ el grupo aditivo de los números reales, y sea $F = R^*$ el grupo multiplicativo de los números reales no nulos. La función $f : R \to R^*$ definida por $f(x) =: e^x$ es un homomorfismo de R en R^*.

2) Sean G, F grupos cualesquiera.La función de G en F que manda todos los elementos de G en el neutro de F es un homomorfismo de grupos, llamado el homomorfismo trivial de G en F.

3) Homomorfismo idéntico: sea $\langle G, \cdot \rangle$ un grupo. La función $\imath : G \to G$ de G en si mismo definida por $\imath_G(x) = x$ es un homomorfismo.

Definición Sea $\varphi : G \to F$ un homomorfismo de grupos.

1) Sea 1 el elemento identidad del grupo F. El conjunto de elementos de G cuya imagen es el elemento identidad 1 de F se denomina el núcleo de φ y se denota por $N(\varphi)$ o también por $ker(\varphi)$:

$Ker(\varphi) = \{g \in G \mid \varphi(g) = 1\}$.

2) Sea $A \subseteq G$. El conjunto de las imágenes de los elementos del conjunto A se denomina imagen del conjunto A mediante φ y se denota por $\varphi(A)$:

$\varphi(A) = \{\varphi(a) \mid a \in A\}$

En particular el conjunto $\varphi(G)$ se denomina la imagen del homomorfismo φ y se simboliza también por $Im(\varphi)$.

3) Sea $B \subseteq F$. El conjunto de elementos de G cuyas imágenes pertenecen al conjunto B se denomina *imagen inversa* de B mediante φ y se simboliza por $\varphi^{-1}(B) = \{g \in G \mid \varphi(g) \in B\}$

4) Se dice que φ es un homomorfismo inyectivo si φ es una función inyectiva, es decir, para cualesquiera elementos $x, y \in G$ se cumple la implicación:

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Longrightarrow x = y$$

5) Se dice que φ es un homomorfismo suprayectivo si $Im(\varphi) = F$

6) Se dice que φ es un isomorfismo o también que G y F son isomorfos, lo cual simbolizamos por $G \cong F$ si φ es inyectivo y suprayectivo simultáneamente.

1.8 Automorfismos

Un $automorfismo$ es un isomorfismo en si mismo , es decir :
$f : W \to W$ tal que f es un homomorfismo biyectivo y W es un grupo.
En particular, dado c un elemento fijo del grupo W podemos definir un automorfismo f de W por medio de :
$f(w) = cwc^{-1}$
Este automorfismo es llamado conjugación por elemento c.

1.9 Producto directo

El *producto directo* de grupos G y H esta definido como el producto cartesiano $G \times H$ de estos dos grupos, con las operaciones de coordenada a coordenada :

Este producto cartesiano de grupos tiene elemento neutro denotado :
(e_G, e_H)

Como operación entre estos elementos, donde $g, g', g'' \in G$ y $h, h'h'', \in H$

$(g, h) \times (g', h') = (g * g', h \cdot h')$.
Donde esto prueba la cerradura de grupo y ademas es asociativo porque

$(g, h) \times ((g', h') \times (g'', h'')) = (g * (g' * g''), h \cdot (h' \cdot h'')) =$
$((g * g') * g'', (h \cdot h') \cdot h'') = ((g, h) \times (g' \cdot h')) \times (g'', h'')$. Por ultimo tiene inverso :
$(g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$

Por lo tanto producto directo de grupos es un grupo.

1.10 Producto semidirecto

Un *producto semidirecto* describe una forma particular en la cual un grupo puede ser compuesto de dos subgrupos.

Sea G un grupo tal que tiene como subgrupos W y H donde W es normal en G tal que $G = WH$ y ademas $W \cap H = \{e_G\}$. Entonces decimos que G es producto semidirecto interno de W y H.

También tenemos un producto semidirecto externo. Sean W y H subgrupos cualesquiera y f un homomorfismo de H en los automorfismos de W, o sea:

$f : H \rightarrow Aut(W)$

Sean w_1, $w_2 \in W$ y sea h entonces defino $f(h)(w_1) = f_h(w_1)$

Entonces se crea el grupo $W \rtimes_{f_h} H$ llamado *producto semidirecto* de W con H respecto a f.

Este grupo como conjunto es un producto cartesiano $W \times H$ pero con operación determinada por el homomorfismo escogido f:

$W \rtimes_f H \times W \rtimes_f H \rightarrow W \rtimes_f H$

$(w_1, h_1) \cdot (w_2, h_2) = (w_1 f(h_1)(w_2), h_1 h_2) = (w_1 f_{h_1}(w_2), h_1 h_2)$

para $w_1, w_2 \in W$ y $h_1, h_2 \in H$

Donde (e_W, e_H) es el neutro de este grupo y el inverso de un elemento de este grupo es :

$(w, h)^{-1} = (f_{h^{-1}}(w^{-1}), h^{-1})$

Con esto puedo definir producto semidirecto de dos grupos para entender grupos mas difíciles de entender.

2 Tabla de marcas

2.1 Definición de Tabla de Marcas

Sea un grupo finito G tal que tomamos las clases de conjugación de subgrupos de orden creciente las denoto $Cls(H_i)$ donde los H_i son los subgrupos de G, de estas clases tomamos representantes de las clases conjugación de subgrupos.

Sea la *tabla de marcas* la matriz de tamaño de la cantidad de clases de conjugación donde cada entrada denota el número de clases laterales del conjunto G/H_i que quedan fijas bajo la acción del subgrupo H_j.

$[(G/H_i)^{H_j}]$

Esto genera la tabla de marcas variando sobre las clases de conjugación.

La siguiente ecuación tiene varias igualdades:
$|(G/K)^H| = \#\{gK \in G/K \mid hgK = gK \forall h \in H\} =$

$\#\{\mathrm{g} \in G \mid hgK = gK \forall h \in H\}/|K| =$

Ahora si multiplico por g^{-1} por la izquierda queda
$\#\{\mathrm{g} \in G \mid g^{-1}hgK = K \forall h \in H\}/|K| =$

De aquí se deduce que $g^{-1}hg \in K$ entonces este conjunto forma un subgrupo de K.

$\#\{g \in G \mid g^{-1}Hg \leq K\}/|K| =$

La siguiente ecuación se deduce de que para cada subgrupo conjugado T con H $g^{-1}Hg = T \leq K$ pero como cada subgrupo que cumple esta condición el número de elementos $g \in G$ que generan el mismo subgrupo es la cardinalidad del normalizador de H en G, para cada subgrupo T que cumple esto los elementos $g \in G$ son tantos como el normalizador de H en G.

$$\#\{T \leq G \mid T_G = H, T \leq K\}|N_G(H)|/|K| = \beta(H,K)|N_G(H)|/|K|$$

Donde $T_G = H$ denota que T es conjugado a H bajo elementos de G, y $\beta(H,K)$ es el número de subgrupos conjugados a H y que estén contenidos en K.

Análogamente se tiene que :

$|(G/K)^H| = \#\{gK \in G/K \mid hgK = gK \forall h \in H\} =$

$\#\{g \in G \mid hgK = gK \forall h \in H\}/|K| =$

$\#\{g \in G \mid g^{-1}hgK = K \forall h \in H\}/|K| =$

$\#\{g \in G \mid g^{-1}Hg \leq K\}/|K| =$

$\#\{g \in G \mid H \leq gKg^{-1}\}/|K| =$

$\#\{T \leq G \mid H \leq T, T_G = K\}|N_G(K)|K| =$

$\alpha(H,K)|N_G(K)|/|K|$

Donde $T_G = K$ es el subgrupo conjugado a K y $\alpha(H,K)$ son el número de subgrupos de G que son conjugados a K por elementos de G pero que H está contenido en T.

Ahora se puede deducir que el primer renglón es el índice de los subgrupos de aquí se se calcula el orden de los subgrupos ya que bajo la identidad todos los puntos quedan fijos y esto es la cardinalidad de G/K como el orden del grupo es la primera entrada de la tabla de marcas de aquí se calcula los ordenes de los subgrupos, por ejemplo si un subgrupo tiene índice 2 y el grupo es de orden 40 entonces el subgrupo es de orden 20.

Ahora cuando $H = K$ la $\beta(H,H)$ es 1 por lo que la diagonal de la matriz de tabla de marcas permite calcular el normalizador de cada subgrupo o sea $|(G/H)^H| = |N_G(H)|/|H|$, por lo tanto el normalizador $|N_G(H)| = |(G/H)^H||H|$ y esto permite saber si subgrupo en normal en G. Si es normal la cardinalidad del normalizador del subgrupo H en G es de orden G.
El normalizador y el orden de los subgrupos nos permite calcular la $\beta(H,K) = |(G/K)^H||K|/|N_G(H)|$.

2.2 Tabla de marcas de un grupo simétrico

Grupo simétrico S_3 es un grupo de permutaciones con 6 elementos siguientes:

$$S_3 = \{id, \rho, \rho^2, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma\} \tag{1}$$

Cada elemento se puede ver como ciclos o transposiciones en este caso se tiene que.

$id = ()$
$\rho = (1, 2, 3)$
$\rho^2 = (1, 3, 2)$
$\sigma = (1, 2)$
$\rho\sigma = (1, 3)$
$\rho^2\sigma = (2, 3)$

Los subgrupos son

$H_1 =< (id) >$
$H_2 =< (1, 2) >$
$H_3 =< (1, 2, 3) >$
$H_4 = S_3$

Construyendo las clases laterales izquierdas

$S_3/H_1 = \{id, \rho, \rho^2, \sigma, \rho\sigma,^2 \sigma\}$
$S_3/H_2 = \{\{id, \sigma\}, \{\rho^2, \rho^2\sigma\}, \{\rho, \rho\sigma\}\}$
$S_3/H_3 = \{\{id, \rho, \rho^2\}, \{\sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma\}\}$
$S_3/H_4 = \{\{id, \rho, \rho^2, \rho\sigma, \rho^2\sigma\}\}$

Bajo la identidad las clases laterales quedan fijas por lo que el primer renglón son los índices de los subgrupos en G o sea la cardinalidad de G/H.

Así que omito hacer el primer renglón ya que son el número de clases laterales ya calculadas anteriormente.

$\varphi_{H_1}(S_3/H_1) = 6$
$\varphi_{H_1}(S_3/H_2) = 3$
$\varphi_{H_1}(S_3/H_3) = 2$
$\varphi_{H_1}(S_3/H_4) = 1$

$\sigma id = \sigma, \sigma\rho = \rho^2\sigma, \sigma\rho^2 = \rho\sigma, \sigma\rho\sigma = \rho, \sigma\sigma = id, \sigma\rho^2\sigma = \rho$

$\varphi_{H_2}(S_3/H_1) = 0$

$\sigma\{id, \sigma\} = \{\sigma, id\}, \sigma\{\rho^2, \rho^2\sigma\} = \{id, \rho\}, \sigma\{\rho, \rho\sigma\} = \{\rho\sigma, \rho\}$

$\varphi_{H_2}(S_3/H_2) = 1$

$\sigma\{id, \rho, \rho^2\} = \{id, \rho^2, \rho\}, \sigma\{\sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma\} = \{id, \rho^2, \rho\}$

$\varphi_{H_2}(S_3/H_3) = 0$

En la que sigue lo hay una clase lateral por lo tanto queda fija por las definición de grupo. $\varphi_{H_2}(S_3/H_4) = 1$

Las demás entradas se calculan de forma parecida:

$\varphi_{H_3}(S_3/H_1) = 0$
$\varphi_{H_3}(S_3/H_2) = 0$
$\varphi_{H_3}(S_3/H_3) = 2$
$\varphi_{H_3}(S_3/H_4) = 1$

$\varphi_{H_4}(S_3/H_1) = 0$
$\varphi_{H_4}(S_3/H_2) = 0$
$\varphi_{H_4}(S_3/H_3) = 0$
$\varphi_{H_4}(S_3/H_4) = 1$

La tabla de marcas es:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3 Grupos cíclicos

La tabla de marcas de C_6, de un grupo cíclico de orden 6.

$\mathrm{C}_6 = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5 a^6 = id\}$ Los subgrupos de C_6 son:

$H_1 = \{id\}$

$\mathrm{H}_2 = \{a^3, a^6 = id\} = C_2$

$\mathrm{H}_3 = \{a^2, a^4, a^6 = id\} = C_3$

$\mathrm{H}_4 = C_6$

Calculando las clases laterales:

$C_6/H_1 = \{a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, id\}$

$\mathrm{C}_6/H_2 = \{\{id, a^3\}, \{a^4, a\}, \{a^2, a^5\}\}$

$\mathrm{C}_6/H_3 = \{\{id, a^2, a^4\}, \{a, a^3, a^5\}\}$

$\mathrm{C}_6/H_4 = \{\{a, a^2, a^3, a^4, a^5, id\}\}$

Ahora calculo el número de clases laterales que quedan fijos bajo la acción de los representantes de las clases de conjugación.

$\varphi_{H_1}(C_6/H_1) = 6$
$\varphi_{H_1}(C_6/H_2) = 3$
$\varphi_{H_1}(C_6/H_3) = 2$
$\varphi_{H_1}(C_6/H_4) = 1$

Bajo la acción de H_2 se tiene lo siguiente:

$\varphi_{H_2}(C_6/H_1) = 0$
$idC_2 = C_2, a^3C_2 = C_2$
$idaC_2 = aC_2, a^3aC_2 = aC_2$
$ida^2C_2 = a^2C_2, a^3a^2C_2 = a^2C_2$

$\varphi_{H_2}(C_6/H_2) = 3$
$\varphi_{H_2}(C_6/H_3) = 0$
$\varphi_{H_2}(C_6/H_4) = 1$

$\varphi_{H_3}(C_6/H_1) = 0$
$\varphi_{H_3}(C_6/H_2) = 0$

$\varphi_{H_3}(C_6/H_3) = 2$
$\varphi_{H_3}(C_6/H_4) = 1$

$\varphi_{H_4}(C_6/H_1) = 0$
$\varphi_{H_4}(C_6/H_2) = 0$
$\varphi_{H_4}(C_6/H_3) = 0$
$\varphi_{H_4}(C_6/H_4) = 1$

Entonces la tabla de marcas es

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.1 Tabla de marcas de un grupo cíclico de orden primo

Los únicos subgrupos de C_p son:
$C_1 = id$
$C_p = G$

Las clases laterales son:
$C_p/C_1 = \{a, a^2, ..., a^p = id\}$
$C_p/C_p = \{\{a, a^2, ..., a^p = id\}\}$
Las clases laterales quedan fijas bajo la identidad y ultima columna solo hay una clases lateral por lo que queda fija y la tabla de marcas es una matriz de 2x2.

$$\begin{bmatrix} p & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.2 Tabla de marcas de un grupo cíclico de orden p^2,con p primo

Los únicos subgrupos son grupos cíclicos de orden que divide al orden del grupo. En este caso son de orden 1 , p , p^2 , los subgrupos son los siguientes:
$H_1 = id$
$H_2 = C_p$
$H_3 = C_{p^2}$
Las clases laterales izquierdas son:
$C_{p^2}/H_1 = \{a, a^2, ..., a^{p^2} = id\}$

$C_{p^2}/C_p = \{aC_p, a^2C_p, a^3C_p, ..., a^{p-1}C_p, a^pC_p = C_p\}$
$C_{p^2}/C_{p^2} = \{C_{p^2}\}$

El primer renglón es fácil de calcular pues bajo la identidad todos los elementos quedan fijos.

La ultima columna es de unos siempre.
Ademas la matriz es triangular superior por lo que las entradas abajo de la diagonal son cero.

Lo que nos lleva a calcular solamente la entrada (2,2) por medio de :

$\varphi_{C_p} = (C_{p^2}/C_p) = p$ pues
$a^i(C_{p^2}/C_p) = \{aC_p, a^2C_p, a^3C_p, ..., a^{p-1}C_p, a^pC_p = C_p\}$
donde a^i es un elemento cualesquiera de C_p

La tabla de marcas de un grupo C_{p^2} es de tamaño 3×3

$$\begin{bmatrix} p^2 & p & 1 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.3 Tabla de marcas de un grupo cíclico de orden p^n con n natural finito,p primo

Los subgrupos son los grupos cíclicos de orden divisores del orden del grupo, en este caso hay $n+1$ subgrupos . Sean los subgrupos del tipo:
$H_1 = C_1$
$H_2 = C_p$
$H_3 = C_{p^2}$
$H_4 = C_{p^3}$
.
.
.
$H_n = C_{p^{n-1}}$
$H_n = C_{p^n}$

Las clases laterales izquierdas son:

C$_{p^n}/C_1 = \{a, a^2, ..., a^{p^n}\}$
$C_{p^n}/C_p = \{aC_p, a^2C_p, a^3C_p, ..., a^{p^{n-1}}C_p\}$
$C_{p^n}/C_{p^2} = \{aC_{p^2}, a^2C_{p^2}, a^3C_{p^2}, ..., a^{p^{n-2}}C_{p^2}\}$
$C_{p^n}/C_{p^3} = \{aC_{p^3}, a^2C_{p^3}, a^3C_{p^3}, ..., a^{p^{n-3}}C_{p^3}\}$
.
.
.
$C_{p^n}/C_{p^{n-1}} = \{aC_{p^{n-1}}, a^2C_{p^{n-1}}, a^3C_{p^{n-1}}, ..., a^{p^{n-1-n}}C_{p^{n-1}}\}$
$C_{p^n}/C_{p^n} = \{C_{p^n}\}$

El primer renglón, la ultima columna se deducen directamente y los elementos bajo la diagonal también. Los elementos de la diagonal se pueden calcular fácilmente pues basta ver que los representantes de la clase lateral y el que los elementos con los que se está actuando multiplicándolos son elementos del conjunto de subgrupos cíclicos, esto porque si multiplico un elemento en un grupo cuyo elemento esta contenido da como resultado el mismo conjunto. En este caso los conjuntos son los subgrupos cíclicos que están recibiendo las acción y quedan fijos pues esta actuando el mismo grupo sobre las clases laterales de este mismo.
Las demás entradas se calculan viendo que solo quedan fijas las clases laterales que después de multiplicar el representante y un elemento cualesquiera del subgrupo del con el que está actuando da como resultado un elemento del subgrupo que es representado por la clase lateral izquierda, por lo que se pude calcular su tabla de marcas. La tabla de marcas de un grupo C_{p^n} de tamaño $(n+1) \times (n+1)$ se ve así:

$$\begin{bmatrix} p^n & p^{n-1} & p^{n-2} & p^{n-3} & p^{n-4} & p^{n-5} & \dots & p & 1 \\ 0 & p^{n-1} & p^{n-2} & p^{n-3} & p^{n-4} & p^{n-5} & \dots & p & 1 \\ 0 & 0 & p^{n-2} & p^{n-3} & p^{n-4} & p^{n-5} & \dots & p & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p^{n-3} & p^{n-4} & p^{n-5} & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p^{n-4} & \dots & \dots & p & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^{n-5} & \dots & p & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 GAP

3.1 Tabla de marcas de grupos en GAP

El cálculo de la tabla de marcas desde un sistema computacional llamado GAP por ejemplo se calcula por lo siguiente comando $TableOfMarks(G)$ donde G es el Grupo.Por ejemplo para el grupo cíclico de orden 6 se obtiene la siguiente tabla, donde los ceros se representan por un punto, la matriz es la transpuesta de la que nosotros definimos, los ceros arriba de la diagonal se omiten:

```
gap> tom:= TableOfMarksCyclic( 6 );;  Display( tom );
1:  6
2:  3 3
3:  2 . 2
4:  1 1 1 1
```

Por ejemplo para grupos simétricos, diedrales y grupo de Frobenius existen comandos especiales que se pueden usar para calcular sus tabla de marcas. $TableOfMarksDihedral$ devuelve la tabla de marcas del grupo diédrico de orden m.

```
gap> Display( TableOfMarksDihedral( 12 ) );
 1:  12
 2:   6 6
 3:   6 . 2
 4:   6 . . 2
 5:   4 . . . 4
 6:   3 3 1 1 . 1
 7:   2 2 . . 2 . 2
 8:   2 . 2 . 2 . . 2
 9:   2 . . 2 2 . . . 2
10:   1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

$TableOfMarksFrobenius(p, q)$ $TableOfMarksFrobenius$ calcula la tabla de marcas de un grupo de Frobenius de orden pq, donde p es un primo y q divide $p-1$.

```
gap> Display( TableOfMarksFrobenius( 5, 4 ) );
1:  20
2:  10 2
3:   5 1 1
4:   4 . . 4
5:   2 2 . 2 2
6:   1 1 1 1 1 1
```

$TableOfMarks(SymmetricGroup(n))$ calcula la tabla de marcas de un grupo de un grupo simétrico de orden n factorial, por ejemplo:

```
gap> s3:=TableOfMarks( SymmetricGroup( 3 ) );
gap> Display( s3 );
1:  6
2:  3 1
3:  2 . 2
4:  1 1 1 1
```

3.2 Propiedades de la tabla de marcas en GAP

Se puede usar el comando "*classes*" con una lista de números de la clase para seleccionar sólo las filas y las columnas de la matriz que corresponde a esta lista para la impresión.

Se puede usar el comando "*form*" con una de las cadenas "*subgroups*", "*supergroups*"; en el caso anterior, en la posición (i, j) de la matriz se imprime el número de conjugados de H_j contenida en H_i, en este último caso en la posición (i, j) el número de conjugados de H_i que contienen H_j se imprime.

```
gap> tom:= TableOfMarks( "A5" );;
gap> Display( tom );
1:  60
```

```
2:  30 2
3:  20 . 2
4:  15 3 . 3
5:  12 . . . 2
6:  10 2 1 . . 1
7:   6 2 . . 1 . 1
8:   5 1 2 1 . . . 1
9:   1 1 1 1 1 1 1 1 1

gap> Display( tom, rec( classes:= [ 1, 2, 3, 4, 8 ] ) );
1:  60
2:  30 2
3:  20 . 2
4:  15 3 . 3
8:   5 1 2 1 1

gap> Display( tom, rec( form:= "subgroups" ) );
1:  1
2:  1  1
3:  1  .  1
4:  1  3  . 1
5:  1  .  . . 1
6:  1  3  1 . .  1
7:  1  5  . . 1  . 1
8:  1  3  4 1 .  . . 1
9:  1 15 10 5 6 10 6 5 1

gap> Display( tom, rec( form:= "supergroups" ) );
1:   1
2:  15 1
3:  10 . 1
4:   5 1 . 1
5:   6 . . . 1
6:  10 2 1 . . 1
7:   6 2 . . 1 . 1
8:   5 1 2 1 . . . 1
9:   1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

OrdersTom devuelve una lista que contiene a la posición la orden de un representante de la i-ésima clase de conjugación subgrupos de tom.

```
gap> OrdersTom( a5 );
[ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 60 ]
```

LengthsTom (tom) Tabla de marcas tom, LengthsTom devuelve una lista de las longitudes de las clases de conjugación de subgrupos.

```
gap> LengthsTom( a5 );
[ 1, 15, 10, 5, 6, 10, 6, 5, 1 ]
```

3.3 Grupos con tablas de marcas isomorfas de orden menor a 500

El siguiente código es para buscar los grupos menores de orden menor a 500 que tienen tablas de marcas isomorfas.

```
gap> for x in [2 .. 500] do
> y:=x;;
> z := NumberSmallGroups(y);
> if (z>1) then
> for i in [ 1 .. z] do
> for j in [ i .. z ] do
> if  ( MatTom(TableOfMarks(SmallGroup(y,i)))=
MatTom(TableOfMarks(SmallGroup(y,j))))  then
> if not(i=j) then
> Print("\nOrden\n ", y,"Subgroup number" ,i,"subgroup ",j);
Print("\n");
> fi;
> fi;
> od;
> od;
> fi;
> od;
Orden  96 Subgroup number 108 subgroup 114
Orden 189 Subgroup number 4 subgroup 5
```

```
Orden 260 Subgroup number 9 subgroup 10
Orden 273 Subgroup number 3 subgroup 4
Orden 340 Subgroup number 9 subgroup 10
Orden 351 Subgroup number 4 subgroup 5
Orden 399 Subgroup number 3 subgroup 4
gap>
```

4 Grupos cíclicos preservados bajo tabla de marcas

4.1 Función de Euler

La función φ de Euler es una función importante en teoría de números. Si n es un número entero positivo, entonces $\varphi(n)$ se define como el número de enteros positivos menores o iguales a n y coprimos con n, es decir, formalmente se puede definir como:

$\varphi(m) = |\{n \in \mathbb{N} | n \leq m \wedge \mathrm{mcd}(m, n) = 1\}|$

Se sigue de la definición que $\varphi(1) = 1$, pues el elemento (1) es coprimo consigo mismo. Para otros números se cumple que:
1. $\varphi(p) = p - 1$ si p es primo.
2. $\varphi(p^k) = (p-1)p^{k-1}$ si p es primo y k es un número natural. Se demuestra mediante inducción sobre k:
3. φ es una función multiplicativa: si m y n son primos entre sí, entonces $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

La primera propiedad se demuestra fácilmente, porque un número primo es coprimo con todos sus anteriores. Y, por tanto, existen $p - 1$ elementos coprimos con p.

La segunda propiedad se demuestra por inducción, supongamos que $k = 1$. Entonces $\varphi(p^1) = \varphi(p) = p - 1$ por la propiedad 1, de manera que se puede escribir como $\varphi(p^1) = (p-1)p^{1-1}$. Se debe demostrar que se cumple para $\varphi(p^{k+1}) = (p-1)p^k$.

Reescribiendo la identidad, $(p-1)p^k = (p-1)p^{k-1}p$,
luego $((p-1)p^{k-1})p = \varphi(p^k)p$.
Como $\varphi(p^k)$ es la cantidad de números coprimos con p^k, si multiplicamos dicha cantidad por p, el número que es coprimo con los demás debe aumentar p veces,$\varphi(p^k)p = \varphi(p^{k+1}) = (p-1)p^k$.

Con esto, el valor de (n) puede calcularse empleando el teorema fundamental de la Aritmética: si $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ donde los pj son números primos distintos, entonces $\varphi(n) = (p_1 - 1)p_1^{k_1-1} \cdots (p_r - 1)p_r^{k_r-1}$.
Esta última fórmula es un producto de Euler y a menudo se escribe como $\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ donde los p son los distintos primos que dividen a n.

$\varphi(n)$ también es igual al número de generadores del grupo cíclico C_n.Como cada elemento de C_n genera un subgrupo cíclico y los subgrupos de C_n son de la forma C_d donde d divide a n (notación: $d|n$), se tiene que $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ donde la suma es de todos los divisores positivos d de n.

Entonces los grupo cíclicos tienen un único subgrupo para cada divisor del orden grupo.

4.2 Determinando subgrupos cíclicos de tabla de marcas

Dada la tabla de marcas de un grupo se numeran las clases de conjugación de subgrupos en este caso H_i es el representante de las clase de conjugación de subgrupos i-ésima por lo tanto como el primer renglón sus entradas son el índice de los subgrupos por lo tanto de aquí se determinan los ordenes de subgrupos H_i y se ve cuales de ellos tienen orden primo y así se concluye que los de orden primo son cíclicos, luego para determinar los otros casos se toma en cuenta que cada subgrupo H_j si es cíclico debe tener un único subgrupo de orden un divisor de este grupo o sea un subgrupo para cada divisor del grupo. Como todos los subgrupos conjugados tienen el mismo orden mismas propiedades y características entonces para saber si un subgrupo en la tabla de marcas es cíclico si el número de subgrupos conjugados a H_j de orden divisor del subgrupo H_i y contenidos en H_i sea 1.

Esto se deduce y calculando con la ayuda de la formula obtenida en la sección 2.

$$\#\{T \leq G \mid T_G = H_j, T \leq H_i\}|N_G(H_i)|/|H_i| = \beta(H_j, H_i)|N_G(H_j)|/|H_i|$$

Donde $T_G = H_j$ denota que T es conjugado a H_j bajo elementos de G, y $\beta(H_j, H_i)$ es el número de subgrupos conjugados a H_j y que estén contenidos en H_i.

Ahora usaré que la $\beta(H_j, H_i) = (i, j)|H_i|/|N_G(H_j)|$ donde (i,j) es la entrada de la tabla de marcas .

La entrada (i,i) de la tabla de marcas sirve para calcular el normalizador de cada subgrupo ya que cuando $H_i = H_j$ la $\beta(H_i, H_i)$ es 1 y el normalizador

se calcula por medio de la siguiente ecuación $|N_G(H_i)| = (i,i)|H_i|$.
Ahora con todo esto se puede ver si un sugrupo es cíclico.

4.3 Subgrupos cíclicos de $\mathbf{S}_5$

Primero con ayuda de *GAP* calculo la tabla de marcas de S_5 que da como resultado:

```
 gap> tom2:=TableOfMarks(SymmetricGroup(5));
TableOfMarks( Sym( [ 1 .. 5 ] ) )
gap> Display(tom2);
 1:  120
 2:   60 6
 3:   60 . 4
 4:   40 . . 4
 5:   30 . 6 . 6
 6:   30 . 2 . . 2
 7:   30 6 2 . . . 2
 8:   24 . . . . . . 4
 9:   20 6 . 2 . . . . 2
10:   20 . 4 2 . . . . . 2
11:   20 2 . 2 . . . . . . 2
12:   15 3 3 . 3 1 1 . . . . 1
13:   12 . 4 . . . . 2 . . . . 2
14:   10 . 2 4 2 . . . . . . . . 2
15:   10 4 2 1 . . 2 . 1 1 1 . . . 1
16:    6 . 2 . . 2 . 1 . . . . 1 . . 1
17:    5 3 1 2 1 1 1 . 2 . . 1 . 1 . . 1
18:    2 . 2 2 2 . . 2 . 2 . . 2 2 . . . 2
19:    1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

gap>
```

Se puede ver que hay 19 clases de conjugación de subgrupos para calcular el orden de los subgrupos de cada clases de conjugación de subgrupos uso la primera columna de la matriz de tabla de marcas, ya que la matriz que nos dio gap es la transpuesta de la que se definió anteriormente se puede observar que las columnas son los índices de los subgrupos y la primera entrada es el orden del grupo en este caso es 120, ahora para calcular los demás órdenes de los subgrupos uso lo anterior dicho y se deduce que los órdenes de los subgrupos son : $1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 8, 10, 12, 12, 20, 24, 60, 120$

$|H_1| = 1$
$|H_2| = 2$
$|H_3| = 2$
$|H_4| = 3$
$|H_5| = 4$
$|H_6| = 4$
$|H_7| = 4$
$|H_8| = 5$
$|H_9| = 6$
$|H_{10}| = 6$
$|H_{11}| = 6$
$|H_{12}| = 8$
$|H_{13}| = 10$
$|H_{14}| = 12$
$|H_{15}| = 12$
$|H_{16}| = 20$
$|H_{17}| = 24$
$|H_{18}| = 60$
$|H_{19}| = 120$

Ahora se calculan los normalizadores :

$|N_G(H_1)| = (1, 1)|H_1| = 120 \cdot 1 = 120$
$|N_G(H_2)| = (2, 2)|H_2| = 6 \cdot 2 = 12$
$|N_G(H_3)| = (3, 3)|H_3| = 4 \cdot 2 = 8$
$|N_G(H_4)| = (4, 4)|H_4| = 4 \cdot 3 = 12$
$|N_G(H_5)| = (5, 5)|H_5| = 6 \cdot 4 = 24$
$|N_G(H_6)| = (6, 6)|H_6| = 2 \cdot 4 = 8$
$|N_G(H_7)| = (7, 7)|H_7| = 2 \cdot 4 = 8$
$|N_G(H_8)| = (8, 8)|H_8| = 4 \cdot 5 = 20$
$|N_G(H_9)| = (9, 9)|H_9| = 2 \cdot 6 = 12$

$|N_G(H_{10})| = (10,10)|H_{10}| = 2 \cdot 6 = 12$
$|N_G(H_{11})| = (11,11)|H_{11}| = 2 \cdot 6 = 12$
$|N_G(H_{12})| = (12,12)|H_{12}| = 1 \cdot 8 = 8$
$|N_G(H_{13})| = (13,13)|H_{13}| = 2 \cdot 10 = 20$
$|N_G(H_{14})| = (14,14)|H_{14}| = 2 \cdot 12 = 24$
$|N_G(H_{15})| = (15,15)|H_{15}| = 1 \cdot 12 = 12$
$|N_G(H_{16})| = (16,16)|H_{16}| = 1 \cdot 20 = 20$
$|N_G(H_{17})| = (17,17)|H_{17}| = 1 \cdot 24 = 24$
$|N_G(H_{18})| = (18,18)|H_{18}| = 2 \cdot 60 = 120$
$|N_G(H_{19})| = (19,19)|H_{19}| = 1 \cdot 120 = 120$

Ahora veo que los grupos de orden primo son cíclicos en este caso son de orden 1 ,2, 3 y 5 que son H_1,H_2,H_3,H_4 y H_8 .

A partir de H_5 utilizo otros métodos para determinar si son cíclicos por ejemplo para este uso que el orden es 4 y sus divisores son 1, 2, 4 de los cuales para ver si es cíclico debe haber solo un único subgrupo de cada divisor de este, esto es equivalente a que haya un único subgrupo conjugado de orden divisor contenido en el subgrupo que estamos analizando si es cíclico.

Descartamos el caso ver si el subgrupo de orden 1 es único pues en todos los casos siempre esta contenido y es único, el caso del orden que queramos verificar el de orden máximo divisor esta contenido solo el mismo, entonces solo hay un único subgrupo de orden máximo divisor contenido en sí mismo.

Verificaré cuántos subgrupos de orden 2 hay contenidos Para esto uso la fórmula como es la matriz transpuesta la que conseguí de gap queda que :

$\beta(H_i, H_j) = (i,j)|H_i|/|N_G(H_j)|$
$\beta(H_5, H_2) = (5,2)|H_5|/|N_G(H_2)| = 0$ pues la entrada es (5,2) es 0.
$\beta(H_5, H_3) = (5,3)|H_5|/|N_G(H_3)| = 6 \cdot 4/8 = 3$
por lo tanto

$\beta(H_5, H_2) + \beta(H_5, H_3) = 3$
por lo tanto hay 3 subgrupos conjugados de orden 2 en H_5 y por lo tanto H_5 no es cíclico.

Para H_6 es de orden 4 y haré lo mismo que el anterior

$\beta(H_6, H_2) = (6, 2)|H_6|/|N_G(H_2)| = 0$ pues (6,2) es 0.
$\beta(H_6, H_3) = (6, 3)|H_6|/|N_G(H_3)| = 2 \cdot 4/8 = 1$

$\beta(H_6, H_2) + \beta(H_6, H_3) = 1$ por lo tanto H_6 es cíclico.

Para H_7 es de orden 4
$\beta(H_7, H_2) = (7, 2)|H_7|/|N_G(H_2)| = 6 \cdot 4/12 = 2$
$\beta(H_7, H_3) = (7, 3)|H_7|/|N_G(H_3)| = 2 \cdot 4/8 = 1$

$\beta(H_7, H_2) + \beta(H_7, H_3) = 3$ por lo tanto H_7 no es cíclico.
Para H_9 es de orden 6 y sus divisores son 1, 2, 3, 6 descarto para divisor 1 y 6, veré solo los casos divisores 2, 3.

$\beta(H_9, H_2) = (9, 2)|H_9|/|N_G(H_2)| = 6 \cdot 6/12 = 3$
$\beta(H_9, H_3) = (9, 3)|H_9|/|N_G(H_3)| = 0$ pues (9,3) es 0.
$\beta(H_9, H_4) = (9, 4)|H_9|/|N_G(H_4)| = 2 \cdot 6/12 = 1$

$\beta(H_9, H_2) + \beta(H_9, H_3) = 3$ hay 3 subgrupos conjugados de orden 2.

$\beta(H_9, H_4) = 1$ hay un único subgrupo conjugado de orden 3 .
Por lo tanto H_9 no es cíclico.

Para el siguiente caso es de orden 6 que es H_{10}, descarto si hay subgrupos conjugados a H_9 contenidos de orden 6 pues si están en diferentes clases de conjugación no puede estar contenido al menos que sea el mismo de esta clases de conjugación.

$\beta(H_{10}, H_2) = (10, 2)|H_{10}|/|N_G(H_2)| = 0$ pues la entrada (10,2) es 0.
$\beta(H_{10}, H_3) = (10, 3)|H_{10}|/|N_G(H_3)| = 4 \cdot 6/8 = 3$
$\beta(H_{10}, H_4) = (10, 4)|H_{10}|/|N_G(H_4)| = 2 \cdot 6/12 = 1$

$\beta(H_{10}, H_2) + \beta(H_{10}, H_4) = 3$ lo que significa que son 3 subgrupos de orden 2.
$\beta(H_{10}, H_4) = 1$ lo que significa que hay 1 único subgrupo de orden 3.
Entonces H_{10} no es cíclico.

Para el caso de H_{11} es de orden 6 entonces :

$\beta(H_{11},H_2)=(11,2)|H_{11}|/|N_G(H_2)|=2\cdot 6/12=1$
$\beta(H_{11},H_3)=(11,3)|H_{11}|/|N_G(H_3)|=0$ pues la entrada (11,3) es 0.
$\beta(H_{11},H_4)=(11,4)|H_{11}|/|N_G(H_4)|=2\cdot 6/12=1$

$\beta(H_{11},H_2)+\beta(H_{11},H_3)=1$ entonces hay 1 único subgrupo de orden 2.
$\beta(H_{11},H_4)=1$ hay un único subgrupo de orden 3 .
Por lo tanto H_{11} es cíclico.

Para el caso de H_{12} es de orden 8 y sus divisores son 1, 2, 4 y 8 pero veré los casos de divisores el 2 y el 4.
$\beta(H_{12},H_2)=(12,2)|H_{12}|/|N_G(H_2)|=3\cdot 8/12=2$
$\beta(H_{12},H_3)=(12,3)|H_{12}|/|N_G(H_3)|=3\cdot 8/8=3$

$\beta(H_{12},H_2)+\beta(H_{12},H_3)=5$ entonces hay 5 subgrupos de orden 2.

No tiene caso hacer para orden 4 pues ya fallo con el de orden 2, lo que quiere decir es que H_{12} no es cíclico.

Para el caso de H_{13} es de orden 10 y sus divisores son el 1 ,2 ,5 ,10, donde veo solo los casos de orden divisor 2 y 5.
$\beta(H_{13},H_2)=(13,2)|H_{13}|/|N_G(H_2)|=0$ pues la entrada (13,2) es 0.

$\beta(H_{13},H_3)=(13,3)|H_{13}|/|N_G(H_3)|=4\cdot 10/8=5$
Por lo tanto hay 5 subgrupos de orden 2 y por lo tanto H_{13} no es cíclico.

Para el caso de H_{14} es de orden 12 y sus divisores son el 1 , 2 ,3 ,4 y 6, analizaré los casos de orden divisor 2 , 3 , 4 y 6.

Como la entrada (14,8) es 0, esto significa que no hay subgrupos de orden 5 contenidos en H_{14} y por lo tanto no es cíclico H_{14} no es cíclico.

Para el caso de H_{15} es de orden 12 :
Lo mismo que en el caso anterior no hay subgrupos de orden 5 pues la entrada también es 0.
Por lo tanto H_{15} no es cíclico.

Para el caso de H_{16} es de orden 20 y sus divisores 1, 2 ,4 ,5 y 10: por lo que analizare los casos de orden divisor 2, 4, 5 y 10.

$\beta(H_{16}, H_2) = (16, 2)|H_{16}|/|N_G(H_2)| = 0$ pues la entrada (16,2) es 0. $\beta(H_{16}, H_3) = (16, 2)|H_{16}|/|N_G(H_3)| = 2 \cdot 20/8 = 5$

Por lo tanto hay 5 subgrupos de orden 2 y por lo tanto H_{16} no es cíclico.

Para el caso de H_{17} es de orden 24 y sus divisores son el 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24, de los cuales analizare los de orden divisor 2, 3, 4, 6, 8 y 12.

Aquí se puede ver que que las entradas para orden 2 son diferentes de 0 por lo tanto al sumar los subgrupos de orden 2 dará mas de 1 y por lo tanto H_{17} no es cíclico.

Ahora el caso H_{18} es de orden 60 sus divisores son el 1, 2, 3, 4, 4, 6, 10, 12, 15, 20, 30 y 60 .

Aquí se puede ver que 15 es divisor de 60 y que no hay ningún subgrupo en ninguna clases de conjugación de conjugación de subgrupos de orden 15, por lo tanto H_{18} no es cíclico.

Para el caso de H_{19} es de orden 120 y este no es cíclico por la razón del ejercicio anterior no hay subgrupos de orden 15 y por que ningún grupo que es simétrico de permutaciones es cíclico.Salvo sus subgrupos si pueden ser cíclico. Por lo tanto H_{19} no es cíclico.

5 Subgrupos nilpotentes y de Fitting en tablas de marcas

5.1 Grupos Nilpotentes

Un grupo *nilpotente* es un grupo que es casi abeliano. De forma más precisa, siempre existe un natural n tal que, aplicando la operación conmutación, $[x_1, x_2, ..., x_n] = [...[x_1, x_2], ...,], x_n]$ a cualesquiera elementos $x_1, x_2, ..., x_n$ del grupo, siempre obtenemos la identidad.

Una definición equivalente viene dada por las series centrales ascendentes de G, las cuales son una sucesión de grupos $Z_0 = e, Z_1, Z_2, ..., Z_i, ...$, definidos por:

$Z_{i+1} = \{x \in G | \forall y \in G : [x, y] \in Z_i\}$
En este caso, Z_1 es el centro de G, y en general el grupo cociente Z_{i+1}/Z_i es el centro de G/Z_i. Si G es un grupo abeliano entonces es claro que Z_1 es G. Con estas definiciones un grupo es llamado nilpotente de clase n si $Z_n = G$ y n es mínimo con esta propiedad.

Un grupo G que es p-grupo es nilpotente pues su centro $Z(G)$ es no trivial y por lo tanto $G/Z(G)$ es nilpotente.

Producto de grupos nilpotentes es nilpotente:

Por inducción en el número de factores es suficiente considerar el caso cuando $G = H \times K$ es el producto de dos grupos nilpotentes. Otra inducción sobre $i \geq 1$ muestra que $Z_i(G) = Z_i(H \times K) = Z_i(H) \times Z_i(K)$ para $i \geq 1$ sean m y n las clases de H y K respectivamente y sea $t = max\{m, n\}$ entonces $Z_t(G) = Z_t(H) \times Z_t(K) = G$ ya que $Z_t(H) \supseteq Z_m(H) = G$ y similarmente para K.

Lema: Sea G un grupo y P un p-subgrupo de Sylow de G entonces P es el único p-subgrupo de Sylow de su normalizador $N := N_G(P)$ y el normalizador de N es N:

Para la primera afirmacion observe que $P \lhd N_G(P)$ y así P es el único p-subgrupo de Sylow de N. Para la segunda afirmación, como $N \subseteq N_G(N)$, si existiera un elemento $x \in N_G(N) - N$, entonces x no pertenece a $N = N_G(P)$ por lo que $xPx^{-1} \neq P$. Ahora como $x \in N_G(N)$ entonces $xPx^{-1} \subseteq xNx^{-1} = N$ y así $xPx^{-1} \subseteq N$, xPx^{-1} p-subgrupo de Sylow diferente a P en contradicción con la primera parte del lema.

Equivalencias:

1)G es un grupo nilpotente.

2)Si H es un subgrupo propio de G, entonces H es un subgrupo normal propio de $N_G(H)$ (el normalizador de H en G).

3)Cada p-subgrupo de Sylow de G es normal y por lo tanto único.

4)G es el producto directo de sus subgrupos de Sylow.

$1 \Longrightarrow 2$ Escojo un índice i talque $Z_i(G) \subseteq H$, tal indice existe porque $Z_n = G$ para algún entero n, pero como $Z_{i+1}(G) \nsubseteq H$ entonces $[Z_{i+1}(G), H] \subseteq [Z_{i+1}(G), G] \subseteq H$, por que $Z_{i+1}/Z_i = Z(G/Z_i)$ y como $[Z_{i+1}(G), G] \subseteq Z_i(G) \subseteq H$ por lo tanto $Z_{i+1}(G) \subseteq N_G(H)$ y como Z_{i+1} normaliza a H entonces existe un elemento en $N_G(H)$ que no esta en H.

$2 \Longrightarrow 3$ Sea P cualquier p-subgrupo de Sylow y sea $N = N_G(P)$ su normalizador en G. Por el lema anterior N es igual a su normalizador y por la hipótesis de (2) se sigue que N no puede ser subgrupo propio de G, es decir, $G = N = N_G(P)$ y así $P \lhd N_G(P) = G$, es decir P es normal en G y como todos los p-subgrupos de Sylow son conjugados se sigue que todos son iguales a P ya que $P \lhd G$ y por lo tanto hay un único p-subgrupo de Sylow para cada p primo.

$3 \Longrightarrow 4$ Sean p_1,...,p_t todos los divisores del orden de G y sean G_{p_i} es un unico p_i-subgrupo de Sylow, el producto directo estos p_i es un subgrupo de orden igual a G. Por lo tanto G es el producto de sus p-subgrupos de Sylow.

$4 \Longrightarrow 1$ Esto se deduce porque producto directo de grupos nilpotentes es nilpotente.

Un *grupo nilpotente* es un grupo que es isomorfo a su producto directo de sus p-subgrupos de Sylow: es decir $G \cong P_1 \times P_2 \times ... \times P_t$ donde los P_1,...,P_t son los p-subgrupos de Sylow de G que son únicos si el grupo es nilpotente.

Los p-subgrupo de Sylow de un grupo nilpotente son normales:
Por el 3er. teorema de Sylow el número de p-subgrupos de Sylow esta dado por $[G : N_G(P_t)]$ el indice del normalizador del p-subgrupo en el Grupo G esto porque los p-subgrupos de Sylow son conjugados entre si por el 2do. teorema de Sylow y este implica el tercer teorema de Sylow, en conclusión el número de p-subgrupos de Sylow el cardinal de su clase de conjugación de subgrupos.

Entonces por el teorema de Lagrange $[G : N_G(P_t)] = \frac{|G|}{|N_G(P_t)|}$ esto implica que si son P_t es normal en G, $N_G(P_t) = G$ y por lo tanto si es normal solo hay un único p-subgrupo de Sylow y es normal.

Esto sirve para determinar si un grupo es nilpotente verificando que para cada p-subgrupo de Sylow solo 1 p-subgrupo de Sylow para cada p primo.

Por ejemplo S_3 no es nilpotente pues tiene 3 diferentes 2-subgrupos de Sylow, en este caso son $< (12) >$, $< (13) >$ y $< (23) >$ debe tener 1 solo para cada p primo.

Lema: Un grupo abeliano es nilpotente porque un grupo abeliano tiene todos sus subgrupos normales y si son normales solo hay un único p-subgrupo de sylow para cada primo y esto equivale a que su producto directo de estos subgrupos de sylow sea isomorfo al grupo y por lo tanto es nilpotente.

5.2 Subgrupo de Fitting

Teorema de Fitting es un teorema demostrado por Hans Fitting:
Si M y N son subgrupos normales nilpotentes de un grupo G, entonces su producto MN es también un subgrupo normal nilpotente de G;

La demostración de esto se sigue de que sea P un p-subgrupo de Sylow de MN, por lo que $P = (P \cap M)(P \cap N)$. Si P es nilpotente por ser un P grupo y ademas P es nilpotente pues contiene elementos de M por lo que es subgrupo normal de M, $P \cap N$ contiene elementos de N por lo que es subgrupo normal de N, por la definición de intersección estas intersecciones son nilpotentes, y como producto de subgrupos normales es normal, por que para cualquier elemento de g del grupo G y sean M y N subgrupos normales de este se tiene que $gMg^{-1}gNg^{-1} = MN = g^{-1}gMg^{-1}gNg^{-1}g = g^{-1}MNg$, lo que implica que MN es subgrupo normal del grupo, entonces P es normal en MN porque P tiene elementos de la forma mn con $m \in M$, $n \in N$ donde al conjugarlos por m' en M , n' en N, las intersecciones son normales o sea $m'n'(P)n'^{-1}m'^{-1} = P \trianglelefteq MN$, por lo tanto P es normal en MN, esto concluye la demostración.

El $subgrupo\ de\ fitting$ es el más grande y único subgrupo normal nilpotente de un grupo G denotado $F(G)$:
Esto es equivalente a que si N es subgrupo normal de G y ademas nilpotente entonces $\forall$ M normal y nilpotente subgrupo de G se cumple que $M \leq N$.

Esto empiezo $N_1 = 1$ nilpotente y normal y $\exists \mathrm{M}_1 \triangleleft G$ normal y nilpotente de tal manera de que M_1 es mas grande que N_1 entonces usando el teorema de Fitting $N_2 = N_1 M_1$ un subgrupo nilpotente y normal pero claramente N_1 esta contenido estrictamente en N_2 porque al multiplicar dos grupos que uno es grande que el otro genera un subgrupo mas grande, entonces tomando M_2 nilpotente y normal de G talque M_2 esta contenido estrictamente en N_2 entonce aplicando el teorema de Fitting $N_3 = N_2 M_2$ es subgrupo nilpotente y normal de G y se ve que N_2 esta contenido estrictamente en N_3 por que los N_i van creciendo en cardinalidad y son nilpotentes por el teorema de Fitting, pero como $|G|$ es finito se tiene que para un numero de pasos finito se tiene que N_i ya es el más grande subgrupo normal y nilpotente si se sigue haciendo mas pasos sigue siendo el mismo subgrupo y por lo tanto es único.

Se demostrara el caso particular de tablas de marcas de subgrupos de Fitting.

5.3 Subgrupo de Fitting en tablas de marcas isomorfas

El caso particular donde los grupo con tablas de marcas isomorfas de orden 96 que tienen definido para cada grupo un producto semidirecto de grupo, tomare el grupo simétrico S_3 de orden 6 con elementos llamados $\sigma_1 = (123)$,$\sigma_2 = (132)$,$\sigma_3 = ()$, que son elementos de orden 3 y los elementos de orden dos son $\tau_1 = (13)$, $\tau_2 = (13)$, y $\tau_3 = (2,3)$, donde denoto los elementos de S_3 como λ.

Sea C_8 el grupo cíclico de orden 8 generado por x y sea C_2 el grupo cíclico de orden 2 generado por y.

Sea W el grupo denotado por $S_3 \times C_8$ y α el automorfismo de W talque $\alpha(\lambda, x^i) = (\lambda, x^i\delta(\lambda))$ este correspondiente al grupo G y β el automorfismo de W talque $\beta(\lambda, x^i) = (\lambda, x^{5i}\delta(\lambda))$ esto correspondiente a Q.

Donde $\delta(\lambda) = \begin{cases} 1 & si \quad \lambda = \sigma_i \\ \\ x^4 & si \quad \lambda = \tau_i \end{cases}$

Entonces podemos definir el producto semidirecto de W con C_2 por α esto en G talque $y(\lambda, x^i)y = \alpha(\lambda, x^i)$, lo mismo con W y C_2 podemos definir el producto semidirecto con β esto en Q talque $y(\lambda, x^i)y = \beta(\lambda, x^i)$. Denoto los elementos de G y Q como $\lambda x^i y^j$.
Entonces los diferentes tipos de elementos en G se multiplican por la siguientes reglas:
$yx^iy = x^i$

$$yxy = x$$

$$(\mu x^i)(\lambda x^j) = \mu\lambda x^{i+j}$$

$$(\mu x^i y)(\lambda x^j y) = \mu x^i(y\lambda x^j y) = \mu\lambda x^{i+j}\delta(\lambda)$$

$$(\mu x^i y)(\lambda x^j) = \mu x^i(y\lambda x^j y)y = \mu\lambda x^{i+j}\delta(\lambda)y$$

$$(\mu x^i)(\lambda x^j y) = (\mu x^i \lambda x^j)y = \mu\lambda x^{i+j}y$$

Los elementos inversos en G son: para el elemento λx^i el inverso es $\lambda^{-1}x^{-i}$, para el elemento $\lambda x^i y$ su inverso es $\lambda^{-1}x^{-i}\delta(\lambda^{-1})y$.

Análogamente los diferentes tipos de elementos en Q se multiplican por la siguientes reglas:

$$yx^iy = x^{5i}$$

$yxy = x^5$

$(\mu x^i)(\lambda x^j) = \mu\lambda x^{i+j}$

$(\mu x^i y)(\lambda x^j y) = \mu x^i (y\lambda x^j y) = \mu\lambda x^{i+5j}\delta(\lambda)$

$(\mu x^i y)(\lambda x^j) = \mu x^i (y\lambda x^j y)y = \mu\lambda x^{i+5j}\delta(\lambda)y$

$(\mu x^i)(\lambda x^j y) = (\mu x^i \lambda x^j)y = \mu\lambda x^{i+j}y$

Los elementos inversos en Q son: para el elemento λx^i el inverso es $\lambda^{-1}x^{-i}$, para el elemento $\lambda x^i y$ su inverso es $\lambda^{-1}x^{-5i}\delta(\lambda^{-1})y$.

Ahora para demostrar que el subgrupo de Fitting de G , Q es el subgrupo generado por $< \sigma_1, x, y >$ que es de orden 48 uno de ellos es abeliano y el otro no. En el grupo G este es abeliano porque :

$(\sigma_i x^i y)(\sigma_j x^j y) = (\sigma_i x^i)(y\sigma_j x^j y) = \sigma_i\sigma_j x^{i+j}\delta(\sigma_j) = \sigma_j\sigma_i x^{j+i}\delta(\sigma_i) = (\sigma_j x^j)(y\sigma_i x^i y) = (\sigma_j x^j y)(\sigma_i x^i y)$

Los σ_i son () ,(123),(132) forman un grupo abeliano y por eso conmutan. En el grupo Q el grupo no es abeliano porque:

$(\sigma_i x^i y)(\sigma_j x^j y) = (\sigma_i x^i)(y\sigma_j x^j y) = \sigma_i\sigma_j x^{i+5j}\delta(\sigma_j) = \sigma_j\sigma_i x^{5j+i}\delta(\sigma_i)$

$(\sigma_j x^j y)(\sigma_i x^i y) = (\sigma_j x^j)(y\sigma_i x^i y) = \sigma_j\sigma_i x^{j+5i}\delta(\sigma_i)$

Como se puede ver $x^{5j+i} \neq x^{j+5i}$ excepto en casos como $i, j = 1$ entonces no es abeliano en Q.
Denoto el subgrupo de Fitting de G como $F(G) =< \sigma_1, x, y >$ y en Q es $F(Q) =< \sigma_1, x, y >$.

La normalidad de ambos grupo la demostraré usando el siguiente lema:
Lema: Si un grupo G finito y $H \leq G$ tal que el índice de este subgrupo en G es 2 entonces el subgrupo es normal en G. Esto porque $[G : H] = \frac{|G|}{|H|} = 2$ o sea dos clases laterales izquierdas o derechas.Una de ellas es el subgrupo H y la otra es de la forma gH esto para clases laterales izquierdas, para la clases

laterales derechas sería H, Hg, de lo que se sabe es que como conjuntos la unión de las clases laterales es el grupo G, entonces puedo escribir de esta manera $H \cup gH = H \cup Hg = G$ de aquí puedo restar H ambos lados y queda que $gH = Hg$ para todo g en G.

Por lo tanto $F(G)$ es normal en G y $F(Q)$ es normal en Q pues tienen indice 2, osea $\left[G : F(G)\right] = \frac{96}{48} = 2$ y $\left[Q : F(Q)\right] = \frac{96}{48} = 2$.

Ahora demostraré que son nilpotentes, en G uso que es abeliano y por lo tanto nilpotente por el lema demostrado anteriormente, en Q uso que es isomorfo al producto directo sus p-subgrupos de Sylow.
Para esto basta demostrar que sus p-subgrupos de Sylow son normales. Los divisores primos de 48 son 2 y 3 por lo tanto tengo que calcular los 2-subgrupos de Sylow y 3-subgrupos de Sylow, donde si estos son normales son únicos, el único 3-subgrupo de Sylow es $P_3 =< (123) >$ por que sus elementos son de orden 3, ahora para el 2-subgrupo de Sylow propongo el grupo de orden 16 porque $48 = 2^4 3$ llamado $P_2 =< x, y >$, por demostrar que este subgrupo es normal, los elementos son de la forma $x^i y$ o x^i al conjugarlos por $\sigma_k x^j y$ queda lo siguiente:

$\sigma_k x^j y x^i y \sigma_k^{-1} x^{-5j} \delta(\sigma_k^{-1}) y = \sigma_k x^j x^{5i} \delta(1) \sigma_k^{-1} x^{-5i} \delta(\sigma_k^{-1}) y = \sigma_k \sigma_k^{-1} x^{j+5i-5i} y = x^j y$

Los demás casos son parecidos por lo tanto el conjunto generado por F(Q) normaliza el conjunto $< x, y >$. Entonces $F(Q) \cong P_2 \times P_3$ por lo tanto es nilpotente.

Ahora nos falta demostrar que $F(G)$ y $F(Q)$ son los mas grandes subgrupos normales y nilpotentes y esto se deduce que si le agrego otro elemento generador los grupos son de orden 96 y estos no son nilpotentes ya que hay varios 2-subgrupos de sylow de orden 2^5 que son $< x, y, \tau_1 >$, $< x, y, \tau_2 >$, $< x, y, \tau_3 >$ por lo tanto no son nilpotentes por lo tanto ya no pueden ser mas grandes.

Para ver que $F(G)$ y $F(Q)$ no son isomorfos utilizo el siguiente lema: Si h es un isomorfismo de un grupo G en un grupo H, entonces si G es abeliano H es abeliano.

Sean f_i, f_j dos elementos cualesquiera del grupo H, existen g_i, g_j en

G tales que $h(g_i) = f_i$ y $h(g_j) = f_j$ dado que h es suprayectivo. Luego $f_if_j = h(g_i)h(g_j) = h(g_ig_j) = h(g_jg_i) = h(g_j)h(g_i) = f_jf_i$ Entonces H es abeliano.

Por lo tanto $F(G)$ y $F(Q)$ no son isomorfos pues uno de ellos es abeliano y el otro no.

5.4 Determinar subgrupos nilpotentes y de Fitting en la tabla de marcas

Para nilpotentes se usa que el grupo es producto de sus p-subgrupos de Sylow y que son únicos si son normales. Como los p-sugrupos de Sylow son conjugados entre si y ademas existe por lo menos 1 si este tiene orden talque divide al orden del grupo que queremos determinar. Basta verificar que cada divisor de potencia prima hay un único p-subgrupo de este orden. Si falla alguno ya no es nilpotente.

En términos de tablas de marcas para H_i representante de las clases de conjugación de subgrupos se calcula el número de subgrupos conjugados a H_j de orden divisor de potencia prima de H_i y que este contenido en H_i y este número debe ser 1 para cada divisor de potencia prima maximal.

En otras palabras se tiene que $|H_i| = p_1^{b_1}...p_m^{b_n}$ donde p_m son los primos y b_n números naturales.

Se buscan cuántos subgrupos de orden potencia prima maximal conjugados a H_j contenidos en H_j por medio de las siguientes ecuaciones:

Primero calculo el orden de los subgrupos H_i por medio de que las entradas del primer renglón son los indices de los subgrupos y que la primera entrada es el orden de grupo de la tabla de marcas y con esto se calcula el orden.

$\#\{T \leq G \mid T_G = H_j, T \leq H_i\}|N_G(H_j)|/|H_i| = \beta(H_j, H_i)|N_G(H_j)|/|H_i|$
Ahora tomando en cuenta que cuando $H_i = H_j$ la $\beta(H_i, H_i) = 1$ y se obtiene que

$|N_G(H_j)| = (j, j)|H_j|$

Donde (j,j) es el entrada de la diagonal de la tabla de marcas entonces ya puedo calcular el número de subgrupos conjugados a H_j contenidos en H_i $\beta(H_j, H_i) = (i, j)|H_i|/|N_G(H_j)|$ donde (i, j) es la entrada de la tabla de marcas.

Entonces ya se puede saber si un subgrupo en la tabla de marcas es nilpotente.

Por otro lado la cardinalidas del normalizador nos pueden decir si un subgrupo es normal en un grupo ya que si es normal su normalizador es todo el grupo y también si el índice es 2 es normal. Viendo eso podemos determinar cuáles subgrupos son normales en el grupo del cual se calculo la tabla de marcas.

Entonces viendo primero cuáles son los subgrupos normales más grandes del grupo y verificar para estos si son nilpotentes, el más grande normal y nilpotente es el subgrupo de Fitting.

A continuación se verificara el de orden 6 hecho anteriormente pero ahora con tabla de marcas:

```
gap> Display(TableOfMarks(SymmetricGroup(3)));
1:  6
2:  3 1
3:  2 . 2
4:  1 1 1 1
```

Como la matriz es la transpuesta se tiene que cambio la i, por j, en las formulas anteriores :

$|N_G(H_1)| = (1, 1)|H_1| = 6 \cdot 1 = 6$
$|N_G(H_2)| = (2, 2)|H_2| = 1 \cdot 2 = 2$
$|N_G(H_3)| = (3, 3)|H_3| = 2 \cdot 3 = 6$
$|N_G(H_4)| = (4, 4)|H_4| = 1 \cdot 6 = 6$

De aquí se deduce que H_3 es normal y de orden 3 y como todo grupo contiene a su identidad y a si mismo sus p-subgrupos de Sylow son únicos a parte de que es cíclico, y abeliano y esto implica que es nilpotente por lo tanto H_3 es el subgrupo de Fitting de este grupo, ya que H_4 no es nilpotente por los siguientes argumentos:

$\beta(H_4, H_2) = (4,2)|H_4|/|N_G(H_2)| = 1 \cdot 6/2 = 3$
$\beta(H_4, H_3) = (4,3)|H_4|/|N_G(H_3)| = 1 \cdot 6/6 = 1$

Por lo tanto hay 3 2-subgrupos de Sylow y un 3-subgrupo de Sylow. Por lo tanto H_4 no es nilpotente.

Bibliografía

[1] LUIS HUERTA-APARICIO, ARIEL MOLINA-RUEDA, ALBERTO RAGGI-CÁRDENAS, LUIS VALERO-ELIZONDO , Algunos invariantes preservados por los isomorfismos de tablas de marcas, 2008.

[2] ALBERTO RAGGI-CÁRDENAS, LUIS VALERO-ELIZONDO, Two non-isomorphic groups of order 96 with isomorphic tables of marks and non-corresponding centres and abelian subgroups, 2009.

[3] VICTOR NOZAIR GARCÍA-RÍOS, ALBERTO RAGGI-CÁRDENAS, LUIS VALERO-ELIZONDO, Characteristic subgroups are not preserved by isomorphisms of tables of marks .

[4] LUIS VALERO-ELIZONDO,

Cuando Sherlock Holmes usa Calvin Klein, Congreso Nacional de la SMM, Octubre 2015, http://computo.fismat.umich.mx/∼*valero/Conferencias/conferencias.html*.

[5] ALBERTO RAGGI-CÁRDENAS, LUIS VALERO-ELIZONDO, Un anillo para controlarlos a todos (los grupos finitos) ,http://computo.fismat.umich.mx/∼*valero/Conferencias/conferencias.html*, 2005.

[6] https://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_(matemática).

[7] https://es.wikipedia.org/wiki/Subgrupo.

[8] https://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_cíclico.

[9] https://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_simétrico.

[10] https://es.wikipedia.org/wiki/Acción_(matemática).

[11] https://en.wikipedia.org/wiki/Conjugacy_class.

[12] https://es.wikipedia.org/wiki/Normalizador.

[13] https://es.wikipedia.org/wiki/Producto_semidirecto.

[14] www.uv.es/∼ *iranzo/Lecciones_de_Grupos.pdf*.

[15] https://es.wikipedia.org/wiki/Homomorfismo.

[16] https://es.wikipedia.org/wiki/Producto_directo.

[17] https://es.wikipedia.org/wiki/P-grupo.

[18] https://es.wikipedia.org/wiki/Grupo_nilpotente.

[19] Rotman J.J. Introduction to the theory of groups.

[20] https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Fitting.

[21] https://en.wikipedia.org/wiki/Fitting_subgroup.

[22] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.8.6*; 2016, (`http://www.gap-system.org`).

[23] Felipe Zaldívar, Introducción a la teoría de grupos, 2006.

[24] Fernando Barrera Mora, Introducción a la teoría de grupos, 2004.

[25] https://es.wikipedia.org/wiki/Subgrupo_normal.

[26] http://www.gap-system.org/Manuals/doc/ref/chap4.html.

[27] http://www.gap-system.org/Manuals/doc/ref/chap39.htmlX8716635F7951801B.

[28] http://www.gap-system.org/Manuals/doc/ref/chap70.html.