Universidad Nacional Autonoma de México
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Instituto de Física y Matemáticas
Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas

TESIS:
SOBRE EL PROBLEMA DE MINKOWSKI EN $\mathbb{R}^{n,1}$

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Jurgen Alfredo Julio Batalla

Asesor: Doctor Pierre Michel Bayard.

Morelia, Michoacán - Enero de 2015 .

Resumen

Se abordará un caso particular del problema de Minkowski sobre hipersuperficies de tipo espacio en $\mathbb{R}^{n,1}$ el cual se traduce en términos de ecuaciones diferenciales en resolver una ecuación de tipo Monge-Ampère, se simplificará dicha ecuación utilizando la transformada de Legendre y se dará solución al problema de Dirichlet asociado.

Palabras clave: Ecuación de Monge-Ampère, Transformada de Legendre, condición de Choi-Treibergs, soluciones de viscosidad.

Abstract

A special case of the problem of Minkowski on hypersurfaces of space type in $\mathbb{R}^{n,1}$ is discussed which translates in terms of differential equations to solve an equation of Monge-Ampère type, are simplified such equation using Legendre transform and solution will be given to the Dirichlet problem associated

Keywords: Monge-Ampère equation, Legendre transform, Choi-Treibergs condition, viscosity solutions.

Índice general

Introducción

El problema de Minkowski, en términos generales, consiste en encontrar hipersuperficies estrictamente convexas del espacio de Lorentz-Minkowski $\mathbb{R}^{n,1}$ con curvatura de Gauss-Kronecker específica dada como función de la dirección normal a la hipersuperficie. Es decir, dado una función positiva f definida en el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n$ la hipersuperficie M que se desea encontrar debe tener curvatura de Gauss-Kronecker $f(N(x))$ en el punto $x \in M$, donde N representa la aplicación de Gauss de la subvariedad M.

Este problema establece una profunda conexión entre la geometría y la teoría de ecuaciones diferenciales elípticas totalmente no lineales, debido principalmente a que tales hipersuperficies pueden ser escritas localmente como la gráfica de una función u convexa en $\mathbb{R}^n$ que satisface una condición de tipo espacio $|Du| < 1$ y la ecuación tipo Monge-Ampère

$$det(D^2u) = \psi(Du)(1 - |Du|^2)^{\frac{n+2}{2}} \quad (*)$$

donde $\psi(Du)$ es la curvatura de Gauss-Kronecker de M.

Para el caso $\psi \equiv 1$ se sabe que una solución entera del problema anterior es el hiperboloide $x_{n+1} = \sqrt{1 + |x|^2}$ para $x \in \mathbb{R}^n$, el cual es un encaje isométrico del espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n$ en $\mathbb{R}^{n,1}$. Para $n = 2$ Hano y Nomizu [5] construyeron otra solución entera a las ecuaciones anteriores diferente (geométricamente) al hiperboloide, lo que implica la no unicidad en general del problema de Minkowski en $\mathbb{R}^{n,1}$.

Como se verá en la sección 1.2 del capítulo 1 el problema de Minkowski se puede reescribir en un modelo alternativo del espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n$ llamado el modelo de Klein $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$: dado un dominio $\Omega \subseteq B_1(0)$ y $\eta \in C^\infty(\Omega)$ positiva, el problema consiste en encontrar una hipersuperficie M estrictamente convexa tipo espacio cuya imagen bajo su aplicación de Gauss sea Ω y la función η determine la curvatura de Gauss-Kronecker de M.

A.M. Li en [6] trató el problema para $\Omega = B_1(0)$ y η constante, mientras que Guan, Jian y Schoen en [4] resolvieron el problema para $\Omega = B_1^+(0) = \{x \in B_1(0)/\ x_1 > 0\}$ y $\eta \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. En este trabajo nos concentramos en el caso en que η es constante y $\overline{\Omega}$ es el envolvente convexo de un conjunto cerrado F de $\partial B_1(0)$ con al menos tres puntos diferentes. Para ello se ha distribuido el material en 4 capítulos.

En el primer capítulo se desarrollan los conceptos y fórmulas básicas relacionadas a hipersuperficies de $\mathbb{R}^{n,1}$, así como también se precisan los términos involucrados en la formulación general del problema de Minkowski.

En el segundo capítulo se establece la condición de Choi-Treibergs, la cual afirma que la imagen del gradiente de la solución u del problema no puede tener puntos extremos en el interior de $\overline{B_1(0)}$. Además se presenta la transformada de Legendre que permite plantear una correspondencia entre las soluciones de $(*)$ y las soluciones de

$$det(D^2 v) = \frac{1}{\eta(y)(1-|y|^2)^{\frac{n+2}{2}}}.$$

En el tercer capítulo, se estudia la solución de la ecuación de Monge-Ampère en dominios suaves y estrictamente convexos mediante el método de continuidad.

En el capítulo cuatro finalmente se expone una solución parcial del problema propuesto basada en las herramientas desarrolladas en [4].

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Hipersuperficies de tipo espacio

Iniciamos recordando algunos conceptos básicos.
$\mathbb{R}^{n,1}$ denota el espacio $\mathbb{R}^{n+1}$ dotado con la métrica Lorentziana

$$g = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 - dx_{n+1}^2,$$

la cual nos permite hacer la siguiente clasificación:

$$v \in \mathbb{R}^{n,1} \text{ se llama de tipo } \begin{cases} \text{tiempo} & \text{si} \quad g(v,v) < 0 \\ \text{luz} & \text{si} \quad g(v,v) = 0 \quad \text{con} \quad v \neq 0 \\ \text{espacio} & \text{si} \quad g(v,v) > 0 \quad \text{ó} \quad v = 0. \end{cases}$$

De manera natural, diremos que una hipersuperficie de $\mathbb{R}^{n,1}$ se llama de tipo espacio, si todos sus vectores tangentes son de tipo espacio.
Consideremos M una hipersuperficie de tipo espacio en $\mathbb{R}^{n,1}$, supongamos que se ve localmente como la gráfica de una función diferenciable $u : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con D abierto.
Determinemos algunas básicas fórmulas locales de M.
Sea $\varphi(x) = (x, u(x))$ parametrización local de M.

Para los campos inducidos por φ,

$$\partial_i = e_i + \frac{\partial u}{\partial x_i} e_{n+1}$$

se tiene que un campo local de vectores normales unitarios N sobre M cumple que

$$g(N, \partial_i) = 0 \quad \text{y} \quad N_{n+1} > 0,$$

además, desde que el índice de la métrica es 1, N debe ser de tipo tiempo, es decir, $g(N, N) = -1$.

Así no es difícil obtener que

$$N = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, 1\right)}{\sqrt{1 - |Du|^2}}. \tag{1.1}$$

Por otro lado, para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se puede considerar una base ortonormal $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$du_{x_0}(\bar{e}_1) = |Du(x_0)| \quad \text{y} \quad du_{x_0}(\bar{e}_i) = 0,\ 2 \leq i \leq n,$$

tomando a $\bar{e}_1$ en la dirección de $Du(x_0)$.

Luego para

$$\bar{\partial}_i = \bar{e}_i + \ \delta_{i1}|Du(x_0)|e_{n+1}$$

se tiene que

$$g_{ij} = g(\bar{\partial}_i, \bar{\partial}_j) = Diag\ (1 - |Du|^2, 1, \ldots, 1).$$

Así

$$det(g_{ij}) = 1 - |Du|^2. \tag{1.2}$$

Recordemos que la segunda forma fundamental escalar h de M es tal que, para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$

$$(\nabla_X Y)^\perp = h(X, Y)N$$

donde ∇ es la conexión de $\mathbb{R}^{n,1}$ y $(\nabla_X Y)^\perp$ es la componente de $\nabla_X Y$ en el haz normal de M.

De aquí se tiene la expresión

$$h_{ij} = h(\partial_i, \partial_j) = -g\left(\nabla_{\partial_i}\partial_j, N\right) = -g\left(d^2\varphi(e_i, e_j), N\right) = -g\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} e_{n+1}, N\right)$$

entonces, por (1.1)

$$h_{ij} = \frac{1}{\sqrt{1-|Du|^2}} \; \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{1.3}$$

Así la curvatura de Gauss-Kronecker de M es

$$K := \frac{det(h_{ij})}{det(g_{ij})} = \frac{det(D^2 u)}{\left(1-|Du|^2\right)^{\frac{n+2}{2}}}. \tag{1.4}$$

De manera similar al caso euclidiano esta curvatura es el producto de las curvaturas principales de M, que son por definición los autovalores de la segunda forma fundamental h_{ij} con respecto a la métrica g_{ij} de M.

Observaciones

Cabe destacar que la fórmula (1.2) permite establecer que la gráfica de u es de tipo espacio si y sólo si $|Du| < 1$.

Por otro lado la fórmula (1.4) dice que la gráfica de u es una hipersuperficie de curvatura de Gauss-Kronecker K si y sólo si la función u satisface una ecuación de tipo Monge-Ampère.

1.2. Problema de Minkowski

Una manera de estudiar propiedades de hipersuperficies es analizando la imagen de tales subvariedades bajo su aplicación de Gauss.

Supongamos M como antes, y además estrictamente convexa.

Debido a que N es tal que $N_{n+1} > 0$ y $g(N,N) = -1$, entonces para todo $x \in M$, $N(x)$ se puede pensar como un punto del espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n$.

Definimos la aplicación de Gauss

$$\begin{array}{rccc} N: & M & \longrightarrow & \mathbb{H}^n \\ & x & \mapsto & \dfrac{(Du(x),1)}{\sqrt{1-|Du(x)|^2}}; \end{array}$$

desde que M es estrictamente convexa, N es un difeomorfismo sobre $N(M)$.

Por otra parte, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \mathbb{H}^n & \longrightarrow & B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \\ & (\xi, \xi_{n+1}) & \mapsto & \dfrac{\xi}{\xi_{n+1}} \end{array}$$

establece un difeomorfismo entre $\mathbb{H}^n$ y $B_1(0)$.

Este difeomorfismo se interpreta geométricamente como la proyección de $\mathbb{H}^n$ al origen en el hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ con $x_{n+1} = 1$.

Así, se puede pensar como aplicación de Gauss sobre M a la función

$$\begin{array}{rccc} G: & M & \longrightarrow & B_1(0) \\ & (x,u(x)) & \mapsto & (\pi \circ N)\,(x,u(x)) = Du(x), \end{array} \tag{1.5}$$

es decir, en la parametrización natural φ de M la aplicación de Gauss es el gradiente de la función u.

Otro hecho que vale la pena mencionar, es que la bola $B_1(0)$ en $\mathbb{R}^n$ dotada de la métrica hiperbólica mediante la aplicación π es un modelo alternativo del espacio $\mathbb{H}^n$ llamado modelo de Klein.

En estos términos es posible plantear el problema de Minkowski: dado $\Omega \subseteq B_1(0)$ y $\eta \in C^\infty(\Omega)$ positiva ¿ es posible encontrar una hipersuperficie $M = \ graf(u)$ tipo espacio estrictamente convexa tal que,

$$G(M) = \Omega \quad y \quad K = \eta \circ G \ \ ?$$

De esta pregunta general subyacen otras como, si existe tal M ¿bajo que condiciones sobre Ω, M es única ? ¿ se puede decir algo de la geometría de M? ¿es completa? ¿ es entera?

En la actualidad la mayoria de estas preguntas se encuentran abiertas casi en su totalidad.

Capítulo 2

Planteamiento del problema

2.1. Condición de Choi-Treibergs

La principal referencia para los resultados expuestos en esta sección es [2].
Fijemos $M = graf(u)$ hipersuperficie tipo espacio estrictamente convexa con curvatura de Gauss acotada, $0 < k_1 < K < k_2$ en $\mathbb{R}^n$, con k_1, k_2 constantes.
Se le llama el "blowdown" de u en el infinito a la función

$$V_u(x) := \lim_{r \to \infty} \frac{u(rx)}{r}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Está bien definido ya que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$

$$|u(rx) - u(0)| \leq \sup_{\mathbb{R}^n} |Du|\, |rx| \leq |rx|;$$

luego, $\frac{u(rx)-u(0)}{r}$ es acotada como función de r.
Desde que u es convexa, entonces $\frac{u(rx)-u(0)}{r}$ es creciente en r.
Así está bien definida

$$V_u(x) = \lim_{r \to \infty} \frac{u(rx) - u(0)}{r}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

V_u es positivamente homogénea, ya que para todo $\lambda > 0$

$$V_u(\lambda x) = \lim_{r \to \infty} \frac{u(\lambda r x)}{r} = \lambda \lim_{r \to \infty} \frac{u(\lambda r x)}{\lambda r} = \lambda V_u(x).$$

Además V_u es convexa y, como se ve en [4], es nula en el sentido que $\forall x \in \mathbb{R}^n$ existe $y \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$|V_u(x) - V_u(y)| = |x - y|.$$

Denotamos por $\mathfrak{Q}$ la colección de funciones positivamente homogénea de grado 1, nulas y convexas. La importancia de esta clase es que se encuentra en correspondencia 1-1 con la familia $\mathfrak{F}$ de subconjuntos cerrados en S^{n-1}, de hecho, tal correspondencia es

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F} & \longrightarrow & \mathfrak{Q} \\ E & \mapsto & V_E \end{array}$$

donde $\quad V_E(x) = \sup_{\xi \in E} \langle \xi, x \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$

La inversa de la anterior aplicación es

$$\begin{array}{cccl} \mathfrak{Q} & \longrightarrow & \mathfrak{F} & \\ V & \mapsto & E_V & = T_V(0) \cap S^{n-1} \end{array}$$

donde, para $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$T_V(x_0) = \{\alpha \in \mathbb{R}^n / \ V(x) \geq \ V(x_0) + \langle \alpha, x - x_0 \rangle \ \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

es llamado el conjunto de direcciones soportes de V en x_0.

Para esta equivalencia referenciamos [2].

El conjunto $T_{V_u}(0)$ establece una relación directa entre V_u y Du:

Lema 2.1.1. *Bajo las mismas hipótesis sobre M y u del comienzo de la sección, se tiene que*

$$\overline{Du(\mathbb{R}^n)} = T_{V_u}(0) = \overline{T_{V_u}(\mathbb{R}^n)}.$$

Demostración. 1. $\overline{Du(\mathbb{R}^n)} \subset T_{V_u}(0) \subset \overline{T_{V_u}(\mathbb{R}^n)}$.

Sea $z \in \overline{Du(\mathbb{R}^n)}$, existe una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $Du(x_i) \to z$ cuando $i \to \infty$.

Como u es convexa, para cada $i \in \mathbb{N}$

$$u(y) \geq u(x_i) + \langle Du(x_i), y - x_i \rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

entonces

$$V_u(y) = \lim_{r\to\infty} \frac{u(ry)}{r} \geq \langle Du(x_i), y \rangle;$$

haciendo $i \to \infty$ se tiene que $z \in T_{V_u}(0)$.

2. $\overline{T_{V_u}(\mathbb{R}^n)} \subset T_{V_u}(0)$.

Desde la homogeneidad de V_u se tiene que para $x \in T_{V_u}(x_0)$ y $t > 0$

$$tV_u(y) = V_u(ty) \geq \langle x, ty - x_0 \rangle + V_u(x_0),$$

luego dividiendo por t y haciendo $t \to \infty$ se deduce que $x \in T_{V_u}(0)$.

Si suponemos $z \in \overline{T_{V_u}(\mathbb{R}^n)}$, existen $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tales que

$$z_i \in T_{V_u}(x_i) \quad \text{y} \quad \lim_{i\to\infty} z_i = z.$$

El argumento anterior junto con el hecho de que $T_{V_u}(0)$ es cerrado implica que $z \in T_{V_u}(0)$.

Observación: $Int(T_{V_u}(0)) \neq \emptyset$ como se puede ver en [2].

3. $T_{V_u}(0) \subset \overline{Du(\mathbb{R}^n)}$.

Supongamos $z \in Int(T_{V_u}(0))$, así $V_u(y) > \langle z, y \rangle$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$.

Luego

$$V_u(y) - \langle z, y \rangle \geq c > 0 \text{ para } |y| = \delta.$$

Desde que $\frac{u(ry)}{r}$ converge uniformemente a V_u sobre compactos (teorema de Dini)

$$\frac{u(ry)}{r} - \langle z, y\rangle \geq c \quad \text{y} \quad \frac{u(0)}{r} < \frac{c}{2} \quad \text{para } |y| = \delta \text{ y } r \text{ suficientemente grande.}$$

De esta manera la función $\frac{u(ry)}{r} - \langle z, y\rangle$ en $\overline{B_\delta(0)}$ no puede alcanzar el mínimo en $|y| = \delta$, por lo tanto tiene un punto crítico y_0 con $|y_0| < \delta$, es decir, tal que $Du(ry_0) = z$.

Ahora si $z \in \partial T_{V_u}(0)$ entonces por el argumento anterior $z \in \overline{Du(\mathbb{R}^n)}$. ♣

Daremos unos conceptos previos a la condición de Choi-Treibergs.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, $x_0 \in \partial\Omega$ se llama un punto extremo de Ω si x_0 no puede ser escrito como combinación convexa de elementos distintos en $\overline{\Omega}$.

Se define el conjunto de direcciones tipo luz de u como $L_u := T_{V_u}(0) \cap S^{n-1}$.

Denotaremos por $conv(L)$ como la cerradura convexa del conjunto L.

Lema 2.1.2. *Para u estrictamente convexa, cuya gráfica es de tipo espacio se cumple que*

$$T_{V_u}(0) = conv(L_u).$$

En particular, $\overline{Du(\mathbb{R}^n)}$ no puede tener puntos extremos en el interior de $B_1(0)$.

Demostración. Por la correspondencia entre $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{Q}$ se tiene que

$$V_u(x) = \sup_{\xi \in L_u} \langle x, \xi\rangle. \tag{2.1}$$

Es claro que $conv(L_u) \subset T_{V_u}(0)$, ya que $T_{V_u}(0)$ es cerrado y convexo.

Supongamos existe $z \in T_{V_u}(0)$ y z no pertenece a $conv(L_u)$.

Como $conv(L_u)$ es convexo, compacto existe un hiperplano H que pasa por z tal que

$conv(L_u)$ está de un lado del hiperplano: si w es un adecuado vector normal unitario al hiperplano

$$H = \{p \in \mathbb{R}^n / \langle p, w\rangle = \langle w, z\rangle\}$$

se tiene que

$$L_u \subset conv(L_u) \subset H^- = \{p \in \mathbb{R}^n / \langle p, w\rangle < \langle w, z\rangle\}.$$

En particular por (2.1), $V_u(w) < \langle w, z\rangle$, lo que contradice el hecho que $z \in T_{V_u}(0)$. ♣

El anterior lema establece una condición necesaria para resolver el problema de Minkowski, afirmando que no es posible que el conjunto $\Omega \subseteq \overline{B_1(0)}$ tenga punto extremo en $B_1(0)$.

2.2. Transformada de Legendre

A continuación se introduce la transformación de Legendre, la cual nos permitirá dar un primer paso hacia el estudio de la ecuación de tipo Monge-Ampère de la fórmula (1.4).

Sea u como en el principio del capítulo.
La transformada de Legendre de u se define como

$$u^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, y \rangle - u(x)\}, \quad y \in \Omega$$

donde $\Omega = Du(\mathbb{R}^n) \subseteq B_1(0)$.
Podemos resaltar que la función u^* es estrictamente convexa, y que además, para $y = Du(x)$

$$u^*(y) = \langle x, y \rangle - u(x)$$

con

$$Du^*(y) = x \qquad \text{y} \qquad D^2u^*(y) = \left(D^2u(x)\right)^{-1}.$$

Por la fórmula (1.4) se tiene que u^* debe cumplir la ecuación de Monge-Ampère

$$det\ D^2v(y) = \frac{1}{\eta(y)\left(1 - |y|^2\right)^{\frac{n+2}{2}}} \quad , \quad \forall y \in \Omega \tag{2.2}$$

con $\eta(y) = K(x)$.

Por otro lado, si existe $v \in C^\infty(\Omega)$ con Ω dominio convexo en $B_1(0)$, tal que v es solución de (2.2) con η una función positiva suave fija y

$$Dv(\Omega) = \mathbb{R}^n \tag{2.3}$$

entonces la transformada de Legendre v^* es una solución estrictamente convexa, suave, tipo espacio de (1.4) con

$$K(x) = \eta(y) \qquad \text{para} \qquad x = Dv(y).$$

Así queda claro la correspondencia entre las soluciones de (1.4) con (2.2) y (2.3).

2.3. Planteamiento preciso del problema de Minkowski

Motivados por la condición de Choi-Treibergs y, por las técnicas expuestas en [4] para la resolución del problema en el dominio $B_1^+(0) = \{x \in B_1(0)/x_1 > 0\}$, nosotros planteamos el siguiente problema tipo Minkowski: dado $F \subset \partial B_1(0)$ cerrado con al menos 3 puntos diferentes, considere el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} det(D^2v) & = & \dfrac{1}{(1-|y|^2)^{\frac{n+2}{2}}} & \text{en } \Omega \\ v & = & 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es tal que $\overline{\Omega} = conv(F)$.
La condición $v = 0$ sobre $\partial\Omega$ además de ser el problema de Dirichlet más sencillo de considerar, proporciona una interesante interpretación geométrica, y esta es que en caso de que v^* sea una función definida en todo $\mathbb{R}^n$ la gráfica de v^* será asintótica a su "blowdown".

Capítulo 3

Ecuación de Monge-Ampère

3.1. Generalidades

Sea $F : \Gamma = \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, donde Ω es un dominio de $\mathbb{R}^n$ y $S\mathbb{R}^n$ es el espacio de matrices simétricas de $n \times n$.
Una ecuación general de segundo orden en Ω se puede escribir como

$$F[u] = F(x, u, Du, D^2u) = 0. \qquad (*)$$

Se denotará los puntos de Γ por $\gamma = (x, z, p, r) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times S\mathbb{R}^n$.

-Cuando F es afín en la componente r, se dice que la ecuación $(*)$ es casi-lineal. En caso contrario, se dice totalmente no-lineal.

-Para F diferenciable con respecto a r, se dice que F es un operador elíptico en un subconjunto $\mathbf{U}$ de Γ si,

$$F_{ij}(\gamma) = \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(\gamma) \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

son las componentes de una matriz definida positiva en $\mathbf{U}$.

-Si $u \in C^2(\Omega)$ y F es elíptico en el rango del mapeo $x \mapsto (x, u(x), Du(x), D^2u(x))$, entonces se dice que F es elíptico respecto a u.

Para la ecuación de Monge-Ampère

$$F[u] = det(D^2u) - f(x) = 0$$

se tiene que $F_{ij}(\gamma)$ es el cofactor de r_{ij}, luego

$$\left(D^2u\right)^{-1} = \frac{1}{det(D^2u)}\left[F_{ij}(\gamma)\right].$$

Así el operador F es elíptico únicamente para funciones $u \in C^2(\Omega)$ que son estrictamente convexas en Ω.
Es claro que, para que la ecuación anterior tenga solución estrictamente convexa se debe exigir que f sea positiva.

Ahora presentaremos algunas formulaciones abstractas de análisis funcional.

Sea B_1, B_2 espacios de Banach y T una función definida en un abierto $\mathbf{U}$ de B_1 hasta B_2. La función T es llamado Fréchet diferenciable en $u \in \mathbf{U}$ si existe un mapeo lineal continuo $L : B_1 \to B_2$ tal que

$$\frac{\|T[u+h] - T[u] - Lh\|_{B_2}}{\|h\|_{B_1}} \longrightarrow 0 \ , \qquad \text{cuando } \ h \to 0 \ \text{ en } B_1.$$

$T_u := L$ es llamado la diferencial de T en u.
T se dice continuamente diferenciable en u si T es Fréchet diferenciable en una vecindad de u y el mapeo $v \mapsto T_v \in E(B_1, B_2)$ es continuo en u. Aquí $E(B_1, B_2)$ representa el espacio de Banach de operadores lineales continuos de B_1 en B_2.

Destaquemos un par de hechos sobre la diferencial de Fréchet:

1. La regla de la cadena se mantiene para la derivada de Fréchet:
   Para B_1, B_2, B_3 espacios de Banach y $T : B_1 \to B_2$, $G : B_2 \to B_3$ Fréchet diferenciables en $u \in B_1$ y $T[u]$, respectivamente, entonces el mapeo $G \circ T$ es diferenciable en $u \in B_1$ con $(G \circ T)_u = G_{T[u]} \circ T_u$.

2. Se cuenta con una versión del teorema de la función implícita:
   Sean B_1, B_2, K espacios de Banach y G un mapeo de un abierto de $B_1 \times K$ en B_2. Para $(u_0, \sigma_0) \in B_1 \times K$ que satisface:
   (i) $G[u_0, \sigma_0] = 0$
   (ii) G es continuamente diferenciable en (u_0, σ_0)
   (iii) La Fréchet derivada parcial $L = G^1_{(u_0,\sigma_0)} : B_1 \to B_2$ es invertible, donde G^1 es tal que

$$G_{(u_0,\sigma_0)}(h,k) = G^1_{(u_0,\sigma_0)}(h) + G^2_{(u_0,\sigma_0)}(k) \quad \forall (h,k) \in B_1 \times K.$$

   Entonces, existe una vecindad N de σ_0 en K tal que la ecuación $G[u, \sigma] = 0$ es soluble para cada $\sigma \in N$, con solución $u = u_\sigma \in B_1$.

Los anteriores resultados pueden ser consultados en [3]

3.2. Método de continuidad

Supongamos B_1, B_2 espacios de Banach con $T : \mathbf{U} \subset B_1 \to B_2$, $\mathbf{U}$ abierto en B_1. Para $\psi \in \mathbf{U}$ fijo se define el mapeo $G : \mathbf{U} \times \mathbb{R} \to B_2$ por $G[u,t] = T[u] - tT[\psi]$.

Sea S, E subconjuntos de $[0,1]$ y B_1, respectivamente, definidos por

$$\begin{aligned} S &= \{t \in [0,1] \;/\; G[u,t] = 0 \quad \text{para algún } u \in \mathbf{U}\}, \\ E &= \{u \in \mathbf{U} \;/\; G[u,t] = 0 \quad \text{para algún } t \in [0,1]\}. \end{aligned}$$

Claramente S y E no son vacios.

Si T es un mapeo continuamente diferenciable en E y, además, T_u es invertible entonces por el teorema de la función implícita el conjunto S es abierto en $[0,1]$. De esta manera, si S es un subconjunto cerrado de $[0,1]$ por conexidad se tendría que $S = [0,1]$, y por tanto $0 \in S$, lo que implica que la ecuación $T[u] = 0$ es soluble para $u \in \mathbf{U}$.

Consideremos nuevamente la ecuación de Monge-Ampère

$$F[u] = det(D^2u) - f(x) = 0$$

para $f \in C^\infty(\Omega)$, $f > 0$ con Ω un dominio estrictamente convexo, suave, acotado en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.2.1. *Sea $\boldsymbol{U}$ el subconjunto abierto de $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de funciones estrictamente convexas. Tomemos $\psi \in \boldsymbol{U}$ fijo. Para*

$$E = \{u \in \boldsymbol{U} \;/\; F[u] = tF[\psi] \;\; \textit{para algún } t \in [0,1]\},$$

si suponemos que E es acotado en $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ entonces el problema $F[u] = 0$ es soluble en $\boldsymbol{U}$.

Demostración. para $u \in \mathbf{U}$ se tiene que F_u es elíptica, luego por la teoría elíptica lineal F_u es invertible (ver Apéndice B).
Tomando $G(u,t) = F[u] - tF[\psi]$ y S como antes, basta probar que S es un conjunto cerrado.
Sea $t_0 \in \overline{S}$, luego existen

$$(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S\ ,\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$$

tales que $t_0 = \lim t_n$ y $G[u_n, t_n] = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Desde que E es acotado en $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ por el teorema de Arzelá - Ascoli, existen (u_{n_k}) subsucesión de (u_n) y $u \in \overline{E}$ tales que

$$u_{n_k} \longrightarrow u \ \text{ en } \ C^2(\overline{\Omega}).$$

Además $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, ya que por ser (u_{n_k}) uniformemente acotado en $C^{2,\alpha}$ existe $k_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$|D^2u_{n_k}(x) - D^2u_{n_k}(y)| \le k_0|x-y|^\alpha \quad \forall n_k \in \mathbb{N} \ \text{ y } \ \forall x,y \in \overline{\Omega}, x \neq y$$

luego,

$$|D^2u(x) - D^2u(y)| = \lim_k |D^2u_{n_k}(x) - D^2u_{n_k}(y)| \le k_0|x-y|^\alpha.$$

Ahora, como f es positiva se tiene que $u \in \mathbf{U}$, luego
$t_0 \in S$ ya que $0 = \lim G[u_{n_k}, t_{n_k}] = G[u, t_0]$ ♣

El teorema anterior reduce la solubilidad de la ecuación $F[u] = 0$ a el establecimiento de estimaciones en el espacio $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Afortunadamente se cuenta con tales estimaciones para la ecuación Monge-Ampère $F[u] = det(D^2u) - f(x)$ ([3], capítulo 17).

En resumen, enunciaremos la resolución del problema de Dirichlet para la ecuación de Monge-Ampère.

Teorema 3.2.2. *Para un dominio suave, acotado, estrictamente convexo* Ω *en* $\mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty(\overline{\Omega}) \quad y \quad f > 0$ *en* $\overline{\Omega}$, *el problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} det(D^2u(x)) & = & f(x) & en\, \Omega, \\ u & = & 0 & sobre\, \partial\Omega \end{cases}$$

tiene una única solución $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *estrictamente convexa.*

Capítulo 4
Resolución parcial del problema de Minkowski para curvatura de Gauss-Kronecker constante

A continuación expondremos una solución al problema de Minkowski para hipersuperficies tipo espacio, estrictamente convexas, de curvatura de Gauss-Kronecker 1.

Sea $F \subset \partial B_1(0)$ cerrado con al menos 3 puntos distintos y $\overline{\Omega} := conv(F)$.
Consideramos el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} det(D^2 v) = \dfrac{1}{(1-|y|^2)^{\frac{n+2}{2}}} & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega \ . \end{cases} \tag{4.1}$$

Debido a que $\partial\Omega$ no es suave y la función $\frac{1}{(1-|y|^2)^{\frac{n+2}{2}}}$ no es acotada en Ω, no es posible aplicar directamente el resultado de existencia de soluciones para el problema de Dirichlet asociado a la ecuación de Monge-Ampère del capítulo anterior. Por tal razón, se considera
$\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega_k \subset \cdots \subset \Omega$ una sucesión de dominios suaves estrictamente convexos tal que

$$\bigcup_k \Omega_k = \Omega.$$

Consideremos para $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} det(D^2 v) = \dfrac{1}{(1-|y|^2)^{\frac{n+2}{2}}} & \text{en } \Omega_k \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega_k. \end{cases} \tag{4.2}$$

Desde que $f(y) = \dfrac{1}{(1-|y|^2)^{\frac{n+2}{n}}}$ es positiva y $f \in C^\infty(\overline{\Omega_k})$, existen únicas v_k soluciones de (4.2) suaves y estrictamente convexas para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$v_k = 0 > v_{k+1} \ \text{ en } \partial\Omega_k \quad \text{y} \quad det(D^2 v_k) = det(D^2 v_{k+1}) \ \text{ en } \Omega_k,$$

luego por el principio de comparación (Apéndice B) se tiene que

$$v_k \geq v_{k+1} \quad \text{en } \Omega_k.$$

Es bien conocido que $u(x) = \sqrt{1+|x|^2}$ para $x \in \mathbb{R}^n$ es una solución estrictamente convexa de tipo espacio de la ecuación de tipo Monge-Ampère

$$det(D^2 u) = \left(1 - |Du|^2\right)^{\frac{n+2}{2}}$$

con $Du(\mathbb{R}^n) = B_1(0)$, ya que la gráfica de u corresponde a la hoja del hiperboloide con $x_{n+1} > 0$, la cual tiene curvatura de Gauss-Kronecker igual a 1.

Entonces $\underline{v} = u^*$ es tal que

$$\begin{cases} det(D^2 \underline{v}) = \dfrac{1}{(1-|y|^2)^{\frac{n+2}{2}}} & \text{en } B_1(0) \\ \underline{v} = 0 & \text{en } \partial B_1(0). \end{cases}$$

Nuevamente por principio de comparación $\underline{v} \leq v_k \ \forall k \in \mathbb{N}$. De esta manera existe v_∞ en Ω tal que es el limite puntual de la sucesión (v_k).

Como v_k son convexos, se afirma que v_∞ es también convexo y por lo tanto continua.

Por teorema de Dini, v_k converge uniformemente a v_∞ sobre cada compacto.
Teniendo en cuenta que todas las soluciones clásicas de la ecuación (4.2) son también de viscosidad y, además, por la propiedad de estabilidad de dichas soluciones, se obtiene que v_∞ es una solución de viscosidad convexa de

$$det(D^2 v) = \frac{1}{(1-|y|^2)^{\frac{n+2}{n}}} \quad \text{en } \Omega;$$

consultar apéndice A.
Veamos que $v_\infty = 0$ en $\partial\Omega$: el hecho que

$$0 \geq v_k \geq \underline{v}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

implica que

$$0 \geq v_\infty \geq \underline{v} \quad \text{en } \ \Omega.$$

Entonces, $\liminf_{x \to x_0} v_\infty \geq \liminf_{x \to x_0} \underline{v} = 0$ y $\limsup_{x \to x_0} v_\infty \leq 0$ para $x_0 \in \partial\Omega$.
Así $\lim_{x \to x_0} v_\infty$ existe y $v_\infty = 0$ en $\partial\Omega$.
Por [1] se sabe que para $f \in C^\infty(\Omega)$ las soluciones de viscosidad de $det(D^2 v) = f$ son de clase $C^\infty(\Omega)$. Por ende se concluye que v_∞ es solución suave de (4.1) ♣

La razón por la que decimos que se ha resuelto parcialmente el problema de Minkowski se debe a que si v es solución de (4.1) no se sabe si v^* está definida sobre todo $\mathbb{R}^n$: la gráfica de v^* en $\mathbb{R}^{n,1}$ es un hipersuperficie de curvatura de Gauss-Kronecker constante 1, pero tal vez sólo sobre un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$.

Finalizamos observando que una hipersuperficie tipo espacio convexa que resuelve el problema anterior no debe ser necesariamente geodésicamente completa.
Sea Ω_1 el interior de un triángulo ideal en $\overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2$ y v solución de (4.1) con $\Omega = \Omega_1$.

Consideremos $\Omega_1^* = Dv(\Omega_1)$ y $M = \{(x, v^*(x)) \;/\; x \in \Omega_1^*\} \subset \mathbb{R}^{2,1}$.

Recordemos que la ecuación de Gauss para M está dada por:

$\forall p \in M,\ \forall\, X, Y, Z, W \in T_pM,$

$$R_p(X,Y,Z,W) = g\left(I\!I(X,W), I\!I(Y,Z)\right) \;-\; g(I\!I(X,Z), I\!I(Y,W))$$

donde R_p es el tensor curvatura de M en p y $I\!I : T_pM \times T_pM \to N_pM$ es la segunda forma fundamental de M en p tal que $I\!I(\cdot,\cdot) = h(\cdot,\cdot)N(p)$ con N el vector normal unitario dado por (1.1) y h la segunda forma fundamental escalar.

Luego,

$$R_p(X,Y,Z,W) = -h(X,W)h(Y,Z) + h(X,Z)h(Y,W).$$

Observemos que el signo de la expresión anterior difiere de la fórmula de Gauss para superficies del espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$.

Si tomamos una base ortonormal $\{E_1, E_2\}$ en T_pM entonces la curvatura intrínseca de Gauss de M en p es

$$\begin{aligned} R_p(E_1,E_2,E_2,E_1) &= -h(E_1,E_1)h(E_2,E_2) + h(E_1,E_2)h(E_2,E_1) \\ &= -\left(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}\right) \\ &= -det(h_{ij}) = -1. \end{aligned}$$

Supongamos que M es geodésicamente completa.

Desde que M es simplemente conexa, con curvatura intrínseca de Gauss constante -1 entonces M es isométrica a $\mathbb{H}^2$. Es decir, M debe tener área infinita.

Sin embargo, considerando G_M la aplicación de Gauss sobre M

$$\text{Área}(M) = \int_M d\sigma = \int_M K d\sigma = \int_M |det(G_M)| d\sigma = \text{ Área hiperbólica}(\Omega_1).$$

Esta última igualdad se debe al teorema de cambio de variable, tomando a G_M como la función cambio de variable $M \to \Omega_1$.

Debido a que el área de un triángulo ideal es π, se concluye que M no puede ser geodésicamente completa.

Apéndice A

Soluciones de viscosidad

Antes de dar la definición de esta noción de soluciones para ecuaciones diferenciales parciales, iniciamos desarrollando una idea intuitiva en un ejemplo particular. Sea u solución clásica de $-\Delta u = 0$ y tomemos $\varphi \in C^2$ tal que $\varphi \geq u$, con $\varphi(x_0) = u(x_0)$ para algún x_0.

Entonces $u - \varphi$ tiene un máximo local en x_0, por lo tanto $u - \varphi$ es concava en una vecindad de x_0, lo que implica que

$$0 \geq \Delta(u - \varphi)(x_0) = \Delta u(x_0) - \Delta\varphi(x_0) = -\Delta\varphi(x_0).$$

Si se considera $\varphi \in C^2$ tal que $u \geq \varphi$ y $u(x_0) = \varphi(x_0)$ entonces $-\Delta\varphi(x_0) \geq 0$.

A continuación damos el concepto de solución de viscosidad para la ecuación de Monge-Ampère

$$det(D^2u) = f \quad \text{en } \Omega \tag{A.1}$$

para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto convexo y u convexa en $\overline{\Omega}$

(1) u se llama subsolución de viscosidad de la ecuación (A.1) en el punto $x_0 \in \Omega$ si y sólo si, $\forall \varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $u - \varphi$ tiene un máximo local en x_0 entonces

$$det\left(D^2\varphi(x_0)\right) \geq f(x_0).$$

(2) u se llama supersolución de viscosidad de la ecuación (A.1) en $x_0 \in \Omega$ si y sólo si, $\forall \varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $u - \varphi$ tiene un mínimo local en x_0 entonces

$$det\left(D^2\varphi(x_0)\right) \leq f(x_0).$$

(3) u se llama solución de viscosidad en Ω si u es subsolución y supersolución de viscosidad para todo punto $x_0 \in \Omega$.

NOTA: es claro que una solución de viscosidad $u \in C^2(\Omega)$ es también solución clásica.

(**Consistencia**)

Sea $u \in C^2(\Omega)$ convexa solución clásica de la ecuación (A.1), entonces u es solución de viscosidad en Ω.

Demostración. si $\varphi \in C^2(\Omega)$ es tal que $u - \varphi$ tiene un máximo local en $x_0 \in \Omega$, se tiene que $Du(x_0) = D\varphi(x_0)$ y $0 \leq D^2u(x_0) \leq D^2\varphi(x_0)$.

Por el teorema determinante de Minkowski (el cual afirma que, para A, B matrices simétricas, semi-definida positiva se cumple que $det(A+B)^{\frac{1}{n}} \geq det(A)^{\frac{1}{n}} + det(B)^{\frac{1}{n}}$) se concluye que

$$det(D^2u(x_0)) \leq det(D^2\varphi(x_0)),$$

luego

$$f(x_0) \leq det(D^2\varphi(x_0)).$$

Así u es una subsolución de viscosidad en $x_0 \in \Omega$.

De forma análoga se obtiene que u es una supersolución.

Por lo tanto u es una solución de viscosidad Ω. ♣

(**Estabilidad**)

Sean u_k soluciones de viscosidad de la ecuación (A.1) para $k \in \mathbb{N}$ tal que $u_k \to u$ uniformemente en cada compacto de Ω. Entonces u es solución de viscosidad Ω.

Demostración. $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $u - \varphi$ tiene un máximo local estricto en x_0 se tiene que existe $r > 0$ con

$$u(x) - \varphi(x) \leq u(x_0) - \varphi(x_0) \qquad \forall x \in B_r(x_0).$$

Consideremos x_k máximos de las funciones $u_k - \varphi$ en $\overline{B_{\frac{r}{2}}(x_0)}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.
Luego existe $(\hat{x}_k)$ subsucesión de (x_k) y $\hat{x}_0 \in \overline{B_{\frac{r}{2}}(x_0)}$ tales que $\lim \hat{x}_k = \hat{x}_0$.
Además

$$u_k(x_0) - \varphi(x_0) \leq u_k(\hat{x}_k) - \varphi(\hat{x}_k)$$

entonces haciendo $k \to \infty$

$$u(x_0) - \varphi(x_0) \leq u(\hat{x}_0) - \varphi(\hat{x}_0).$$

Como x_0 es máximo estricto se debe tener que $x_0 = \hat{x}_0$.
Por ser u_k soluciones de viscosidad y $\hat{x}_k$ máximos locales de $u_k - \varphi$,

$$det(D^2\varphi(\hat{x}_k)) \geq f(\hat{x}_k);$$

ahora cuando $k \to \infty$, $det(D^2\varphi(x_0)) \geq f(x_0)$.
Así u es subsolución de viscosidad de (A.1) en Ω. De manera análoga se concluye que u es supersolución, y por ende, de viscosidad en Ω. ♣

Apéndice B
Principio de comparación y problema de Dirichlet para operadores lineales

A continuación precisamos los enunciados de un par de resultados utilizados a lo largo del trabajo, cuyas demostraciones puede ser consultadas en [3].

Para $f \in C^\infty(\Omega)$, $f > 0$ con Ω dominio estrictamente convexo, suave, acotado en $\mathbb{R}^n$, y $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ estrictamente convexa consideramos la ecuación de Monge-Ampère en Ω

$$F[u] = det(D^2u) - f(x) = 0.$$

F visto como operador $F : C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ tiene derivada de Fréchet F_u continua dada por

$$F_u(h) = L(h) = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial r_{ij}} F(x, D^2u(x)) D_{ij}h,$$

para todo $h \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Teorema B.0.3. *Sean* $g \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ *y* $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. *Entonces el problema de Dirichlet*

$$Lu = g \text{ en } \Omega, \quad u = \varphi \quad \text{en } \partial\Omega$$

tiene una única solución en $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Por otro lado, se cuenta con una versión del principio de comparación.

Teorema B.0.4. *Sean* $u, v \in C^{0}(\overline{\Omega}) \cap C^{2}(\Omega)$ *tales que*

$$F[u] \geq F[v] \quad \text{en } \Omega, \quad u \leq v \ \text{ en } \partial\Omega \quad y \ \ u \text{ convexa en } \Omega.$$

Entonces $u \leq v$ *en* $\overline{\Omega}$.

Bibliografía

[1] Caffarelli L.A. , *Interior $W^{2,p}$ estimates for solutions of the Monge-Ampère equation* , Ann. Math. 131 (1990), 135-150.

[2] Choi H. and Treibergs A.E. , *Gauss maps of spacelike constant mean curvature hypersurface of Minkowski space*, J. Differential Geometry 32 (1990), 775-817.

[3] Gilbarg D. and Trudinger N. , *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* , Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[4] Guan B., Jian H.Y. and Schoen R. , *Entire spacelike hypersurfaces of prescribed Gauss curvature in Minkowski space* , J. Reine angew. Math. 595 (2006), 167-188.

[5] Hano J. and Nomizu K., *On isometric immersions of the hyperbolic plane into the Lorentz-Minkowski space and Monge-Ampère equation of a certain type*, Math. Ann. 262 (1983), 245-253.

[6] Li A.M. , *Spacelike hypersurfaces with constant Gauss-Kronecker curvature in the Minkowski space*, Arch. Math. 64 (1995), 534-551.