



UNIVERSIDAD MICHOACANA  
DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

---

FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICO MATEMÁTICAS

“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

Modelo anisotrópico para la estrella de  
neutrones RX J1856.5-3754

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

PRESENTA

Rogelio Cuevas Torres

ASESOR

Dr. Joaquín Estevez Delgado



Morelia Michoacán, Abril 2017

*A mi familia*



# Agradecimientos

*Sorpresa, he vuelto!*

Agradezco a Dios por el camino que me ha permitido recorrer. A mis padres, quienes durante toda mi vida me han guiado a través de sus lecciones, a quienes les debo la persona que soy al día de hoy, de quienes estoy sumamente orgulloso y sé que de la misma manera en la que me han brindado su apoyo hasta aquí, continuarán haciéndolo el resto de mi vida. Gracias.

Mis hermanos Lalo y Ale, con quienes he crecido y pasado los años más divertidos de mi vida, gracias por haber nacido.

A mis abuelos, por todas las cosas que me han enseñado y espero jamás olvidar, por el tiempo y el afecto que me han regalado, son mi segundo hogar donde siempre encuentro lo que necesito. Sin ustedes esto no sería posible, gracias.

Gracias a mi tía Cheyo por los años que me ha aguantado, por esas pláticas y esos cafés.

A quienes se fueron pero sé que estarían felices de ver esto, para ellas un agradecimiento especial por sus regaños y cariño, María y Alicia.

Para Joaquín, quien por hippie no quiere hacerse llamar Professor, más que un asesor, para mi ha sabido ser un amigo y un segundo padre, por todos sus consejos, enseñanzas, burlas y regaños. Gracias.

Gracias a toda mi familia y a mis padrinos por haber formado parte de todo el proceso.

Mis amigos, Armando, Gabino, Ulises, Juan, y la banda, Vega, Vite, Niño y Julio y los que han ido llegando, gracias por haberlos conocido.

A ti Jenny que me has acompañado durante estos años, que a través de tus consejos, risas y regaños, de tu entrega y tu amor, compartí los más grandes momentos de felicidad.

# Resumen

A lo largo de la historia las estrellas han sido de suma importancia para prácticamente la totalidad de las civilizaciones alrededor del mundo. Por ello desde la antigüedad, a la par del nacimiento de las civilizaciones, nace un estudio sobre el movimiento de las estrellas y otros aspectos de la mecánica celeste. Sin embargo, surge la necesidad de entender los fenómenos que ocurren al interior de las estrellas, pues con ello se crea la posibilidad de describir el comportamiento externo de las mismas, su ciclo de vida y la oportunidad de utilizarlas como laboratorios, los cuales poseen condiciones imposibles de reproducir en la Tierra. Con el desarrollo Newtoniano de la teoría de gravitación se permite, por primera vez, conjeturar sobre el comportamiento interno de la estructura estelar. El modelo de Newton resulta ser una buena descripción de la estructura interna, no obstante, debido a la existencia de objetos compactos, es necesario un tratamiento relativista del problema, dada la naturaleza de los procesos que ocurren al interior, como el hecho de que, en los objetos compactos la presión de degeneración es la componente relevante para el equilibrio hidrostático.

En el presente trabajo se desarrolla un modelo para representar estrellas compactas con geometría esférica y un fluido en equilibrio hidrostático, el cual posee anisotropía en las presiones. Es utilizada para resolver el sistema una ecuación de estado tipo Chapligyn, tipo de ecuación usualmente utilizada para modelar objetos compactos (Rahaman et al., 2010), (Mebarki, 2010) y (Bhar, 2017); la cual relaciona la presión radial con la densidad del fluido. El modelo resultante satisface las condiciones de aceptabilidad física, además de ser completamente estable (Herrera y Santos, 1997) para los parámetros que describen a la estrella de neutrones RX J1856.5-3754, obteniendo un radio de  $R = 14669.5756\text{m}$  para la masa de  $1.4M_{\odot}$ .

**Palabras clave:** Estrella de neutrones, modelo anisotrópico, Chapligyn, relatividad, objetos compactos.

# Abstract

Throughout history the stars have been of paramount importance for virtually all civilizations around the world. For this reason, since antiquity, along with the birth of civilizations, a study of the movement of stars and other aspects of celestial mechanics is born. However, there arises the need to understand the phenomena that occur within the stars, because this creates the possibility of describing the external behavior of the same, their life cycle and the opportunity to use them as laboratories, which have conditions impossible to reproduce on Earth. With the Newtonian development of gravitational theory it is allowed, for the first time, to conjecture about the internal behavior of the stellar structure. Newton's model turns out to be a good description of the internal structure, however, because of the existence of compact objects, a relativistic treatment of the problem is necessary, given the nature of the processes that occur in the interior, such as the fact that in compact objects the degeneracy pressure is the relevant component for the hydrostatic equilibrium.

In the present work a model is developed to represent compact stars with spherical geometry and a fluid in hydrostatic equilibrium, which has anisotropy in pressures. It is used to solve the system an equation of state type Chapligyn, type of equation usually used to model compact objects (Rahaman et al., 2010), (Mebarki, 2010) and (Bhar, 2017); which relates the radial pressure to the density of the fluid. The resulting model satisfies the conditions of physical acceptability, besides being completely stable (Herrera y Santos, 1997) for the parameters that describe the neutron star RX J1856.5-3754, obtaining a radius of  $R = 14669.5756\text{m}$  for the mass of  $1.4M_{\odot}$ .

**Keywords:** Neutron star, anisotropic model, Chapligyn, relativity, compact objects.

# Índice

<b>Agradecimientos</b>	<b>IV</b>
<b>Resumen</b>	<b>VI</b>
<b>Abstract</b>	<b>VII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Radiación electromagnética . . . . .	2
1.2. Radiación de cuerpo negro . . . . .	3
1.3. Temperatura efectiva . . . . .	3
1.4. Diagrama de Hertzsprung-Russel . . . . .	5
<b>2. Formación y estructura interna</b>	<b>9</b>
2.1. Formación estelar . . . . .	9
2.2. Equilibrio hidrostático . . . . .	10
2.3. Objetos compactos . . . . .	11
2.3.1. Estrellas de neutrones . . . . .	11
2.3.2. RX J1856.5-3754 . . . . .	12
2.4. Ecuación de estado . . . . .	13
<b>3. Relatividad</b>	<b>15</b>
3.1. Introducción . . . . .	15
3.2. Relatividad General . . . . .	17
3.3. Geometría . . . . .	18
3.3.1. Vectores . . . . .	18
3.3.2. Tensores . . . . .	22



---

<b>4. Modelo estelar con ecuación de estado tipo Chaplygin</b>	<b>26</b>
4.1. Ecuaciones . . . . .	26
4.2. Aceptabilidad física . . . . .	29
4.3. Condiciones extremales . . . . .	30
4.4. Condiciones en la frontera . . . . .	35
4.5. Condiciones en el origen . . . . .	36
4.5.1. Estrella de neutrones . . . . .	43
<b>5. Conclusiones</b>	<b>53</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>54</b>

# Índice de figuras

1.1. Diagrama H-R . . . . .	5
1.2. Línea principal diagrama H-R . . . . .	6
1.3. Relación masa-radio . . . . .	7
1.4. Clasificación espectroscópica estelar . . . . .	8
2.1. Observación de RX J1856.5-3754 . . . . .	12
3.1. Espacio tangente . . . . .	20
4.1. Intervalos con condiciones en $v_t(0)$ . . . . .	40
4.2. Intervalos con condiciones en $v_t(0)$ , $v_t(1)$ y $P_t(1)$ . . . . .	41
4.3. Intervalos finales para $\mu$ e $y$ . . . . .	42
4.4. Densidad al interior de la estrella . . . . .	44
4.5. Presión tangencial al interior de la estrella . . . . .	45
4.6. Presión radial al interior de la estrella . . . . .	46
4.7. Velocidad tangencial al interior de la estrella . . . . .	47
4.8. Velocidad radial al interior de la estrella . . . . .	48
4.9. Comparación entre presiones tangencial, radial y densidad . . . . .	49
4.10. Comparación entre las velocidades en el interior de la estrella . . . . .	50
4.11. Condición de estabilidad en el interior. . . . .	51

# Índice de Tablas

1.1. Clasificación espectroscópica . . . . .	7
4.1. Parámetros al interior de la estrella. . . . .	52

# Capítulo 1

## Introducción

Una estrella se puede definir como un objeto estelar auto gravitacional que está o estuvo alguna vez (en el caso de una estrella muerta) sostenido por una reacción termonuclear de fusión de hidrógeno en su núcleo.

Las estrellas son formadas a partir del colapso gravitacional de nubes de materia encontradas en el Universo. Cuando la nube o una parte de ella colapsa, aproximadamente la mitad de la energía gravitacional es usada para incrementar la temperatura interna de la estrella en formación, siendo la energía remanente expulsada en forma de radiación electromagnética al espacio. Si la masa de la nube es suficientemente grande, aproximadamente 8% de la masa del Sol, la temperatura central será lo suficientemente alta para sostener la reacción de fusión de hidrógeno, lo que por definición es el nacimiento de una estrella.

En nuestro Sol, el hidrógeno es fusionado en Helio a través de la reacción  $4^1H \rightarrow ^4He + \text{energía}$ , estando la fusión presente solamente en la región central de las estrellas, debido a la existencia de una mínima temperatura en la cual la reacción exotérmica puede ser iniciada ( $10^7^\circ C$ ). A las altas temperaturas encontradas en el núcleo de las estrellas, la energía cinética de los protones es suficiente para superar la fuerza repulsiva eléctrica que se presenta entre ellos, reduciendo las distancias entre los mismos, hasta tal punto que la fuerza nuclear se vuelve dominante, fusionándolos y emitiendo energía. Esta energía emitida puede ser cuantificada por la ecuación más famosa de Einstein  $E = \Delta mc^2$ , donde  $\Delta m$  es la diferencia de masas en ambos lados de la ecuación de reacción nuclear y  $c$  es velocidad de la luz en el vacío.

En el inicio de la vida de una estrella, ésta transforma hidrógeno en helio

mediante la reacción nuclear que la sostiene gravitacionalmente, sin embargo conforme la vida de la estrella avanza, este combustible se agota y, para mantener el equilibrio, el núcleo de la estrella puede verse contraído al reajustarse la estructura de la estrella para mantener una temperatura central alta, mientras otras regiones se expanden, convirtiendo a la estrella en una gigante roja, posterior a esta etapa, el destino final de la estrella dependerá de su masa inicial, al convertirse en una enana blanca, una estrella de neutrones o un hoyo negro.

Debido a las reacciones nucleares en sus interiores, las estrellas son las progenitoras de la mayor parte de los elementos conocidos, esto las hace ser los bloques primordiales de construcción en el Universo, por lo cual su estudio es fundamental, siendo la astrofísica estelar un amplio campo de estudio el cual incorpora la mayoría de los campos de la física.

## 1.1. Radiación electromagnética

De la mecánica cuántica se sabe que en la radiación electromagnética existe la dualidad onda-partícula. Este fenómeno también se presenta en las estrellas. En las reacciones nucleares interiores de la estrella, la radiación actuará como partícula en los fotones absorbidos de las reacciones nucleares.

La energía  $E$  de un fotón el cual tiene un frecuencia  $\nu$  y una longitud de onda  $\lambda$  están asociadas de la forma

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

de donde  $h$  es la constante de Planck y  $c$  la velocidad de la luz en el vacío. Además el momento  $p$  de un fotón con longitud de onda  $\lambda$  se define como

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Además el espectro electromagnético puede ser dividido en varias regiones, las cuales van desde las ondas menos energéticas en el infrarrojo hasta las más potentes en los rayos gamma.

## 1.2. Radiación de cuerpo negro

Por definición un cuerpo negro es aquel que absorbe toda la radiación electromagnética que incide en él. Por otro lado, la radiación emitida por el cuerpo negro dependerá de la energía térmica que posea.

Max Planck mostró que un cuerpo negro con temperatura  $T$  emite un espectro continuo de radiación caracterizada por la función  $B_\nu(T)$ , llamada la función de Planck dada por:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

donde  $k$  es la constante de Boltzmann. Esta función es además isotrópica por lo que no depende de la dirección. En unidades de longitud de onda ésta puede ser expresada como

$$B_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

La distribución de energía emitida por un cuerpo negro obedece a dos leyes. La ley de Stefan Boltzmann proporciona la potencia total por unidad de área  $F$  de un cuerpo negro con temperatura  $T$

$$F = \int_0^\infty F_\nu d\nu = \int_0^\infty \pi B_\nu d\nu = \sigma T^4$$

donde  $\sigma$  es la constante de Boltzmann. La segunda ley la cual es derivada de la función de Planck, muestra que la longitud de onda máxima emitida por un cuerpo negro varía inversamente con la temperatura como

$$\lambda_{max} = \frac{0.290 K cm}{T}$$

ésta relación es conocida como la ley de Wien. Misma que explica el porqué los cuerpos negros más calientes (o estrellas) son azules mientras que las más frías son rojas.

## 1.3. Temperatura efectiva

La luminosidad de una estrella se define como la potencia de radiación emanada por la superficie de la misma. Esta característica de la estrella es

independiente de la distancia al observador y es obtenida al multiplicar el flujo  $F$  integrado por el área de la superficie estelar, cuando el flujo se asume constante.

La temperatura efectiva  $T_{ef}$  de una estrella en específico se define como la temperatura necesaria para un cuerpo negro con el mismo radio  $R_*$  que la estrella, para tener la misma luminosidad  $L_*$  que la estrella. Dado que la integral del flujo en la superficie de este cuerpo negro hipotético es  $\sigma T_{ef}^4$  su luminosidad es

$$L_* = 4\pi R_*^2 \sigma T_{ef}^4$$

y entonces la temperatura efectiva de la estrella es

$$T_{ef} = \left( \frac{L_*}{4\pi R_*^2 \sigma} \right)^{1/4}$$

Además el flujo radiactivo en la superficie de la estrella puede escribirse como

$$F = \frac{L_*}{4\pi R_*^2} = \sigma T_{ef}^4$$

y a una distancia  $r$  mayor que  $R_*$  del centro de la estrella, el flujo integrado es

$$F(r) = \sigma T_{ef}^4 \left( \frac{R_*}{r} \right)^2,$$

el cual contrario a la luminosidad, el flujo sí depende de la distancia del observador a la estrella.

A partir de las mediciones del flujo luminoso observado proveniente de diferentes objetos visibles se determinó una forma de clasificar las estrellas en diferentes magnitudes, donde la magnitud representa una escala de las mediciones relativas del valor de su flujo radiante, la definición moderna es:

$$m_1 - m_2 = 2.5 \log \left( \frac{F_2}{F_1} \right),$$

la cual da la diferencia de magnitudes de dos estrellas como función del flujo observado. Dado que la magnitud depende del flujo, esto implica una dependencia de la distancia que las separa del observador. Se define la magnitud  $m$  observada desde la tierra como la magnitud aparente, mientras que la magnitud absoluta  $M$  es definida como la magnitud observada a una distancia

de 10 parsecs. Debido a que estas mediciones son relativas, se toma como referencia que la estrella Vega, es elegida con magnitud de cero, por lo que cualquier objeto más brillante que la misma tendrá magnitud negativa. La diferencia entre las magnitudes aparente y absoluta viene dada por

$$m - M = 5 \log \left( \frac{d}{10} \right),$$

y es llamado el módulo de distancia, siendo  $d$  la distancia al observador.

## 1.4. Diagrama de Hertzsprung-Russel

Dado que la luminosidad de una estrella depende del radio así como de la temperatura efectiva, un diagrama de Hertzsprung-Russel (H-R), muestra la relación entre estos dos parámetros gráficamente. Estos fueron desarrollados por el astrónomo danés Ejnar Hertzsprung (1873-1967) y el astrónomo Henry Norris Russel (1877-1957). La utilidad de estos diagramas radica en el hecho de que, además, describen la evolución de una estrella.

Comúnmente es utilizada la escala de magnitud absoluta en lugar de la luminosidad y  $m_B - m_V$  como alternativa a la temperatura efectiva. Estos son llamados diagramas de color-magnitud, siendo  $m_B - m_V$  escrito como  $B - V$ .

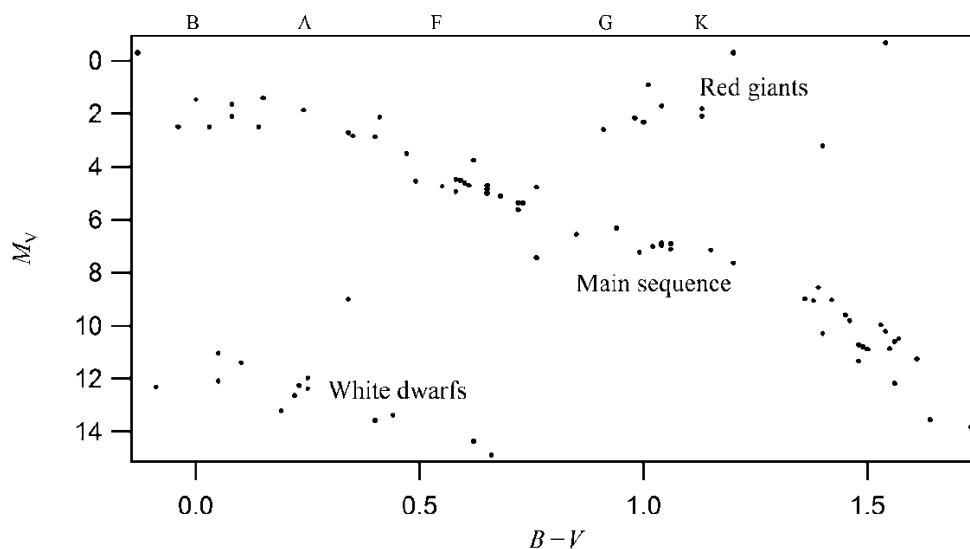


Figura 1.1: Muestreo de las 1000 estrellas más cercanas en un diagrama H-R. Fuente: *An Introduction to Stellar Astrophysics*, F. LeBlanc.



La figura 1.1 representa un diagrama H-R con un muestra de las 1000 estrellas más cercanas, obtenidas del catálogo Glaise. La porción más importante de estas se ubica en la secuencia principal sobre la diagonal, las cuales son gigantes rojas.

En la figura 1.2, cuando se desplaza hacia abajo sobre la diagonal las estrellas tienen cada vez menos masa y menor temperatura efectiva. Las estrellas de mayor masa son más luminosas debido a que sus temperaturas centrales son mayores, por lo que fusionan hidrógeno y producen energía nuclear en una tasa mayor. Siendo la relación entre la masa y la luminosidad una función cuasi lineal, cuyo entendimiento es crítico para estimar el tiempo de vida de las estrellas (LeBlanc, 2010).

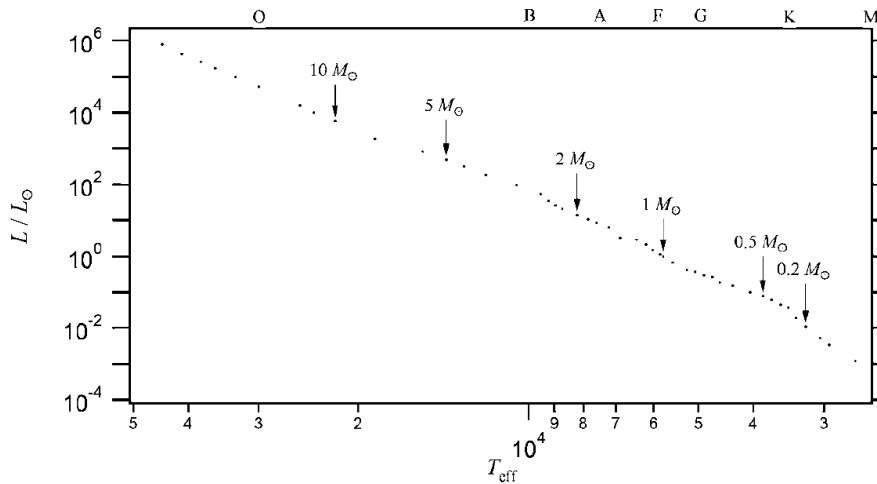


Figura 1.2: Línea de concentración principal del diagrama H-R mostrando valores para distintas masas.

Fuente: *An Introduction to Stellar Astrophysics*, F. LeBlanc.

Para algunas  $T_{ef}$  dadas, las estrellas pueden poseer diferentes radios, y diferentes luminosidades. Por lo que una estrella con una  $T_{ef}$  específica, puede de hecho, ser desde una enana blanca hasta una súper gigante roja. Una estrella súper gigante puede tener un radio arriba del orden de  $1000R_{\odot}$  mientras que una enana blanca pertenece al rango de  $0.01R_{\odot}$ .

Una clasificación espectroscópica de los diferentes tamaños estelares es presentada en la figura ??, esta clasificación es denominada como clasificación espectral y la nomenclatura corresponde a la clasificación estelar mostrada en la tabla 1.1.

Es remarcable el hecho de que las propiedades físicas de una estrella pueden ser determinadas por tres parámetros fundamentales, la masa, su

Ia	Súper gigantes brillantes
Ib	Súper gigantes
II	Gigantes brillantes
III	Gigantes
IV	Subgigantes
V	Enanas
VI	Subenanas
D	Enanas blancas

Tabla 1.1: Clasificación estelar espectroscópica de los diferentes tipos de estrellas.

radio y su luminosidad.

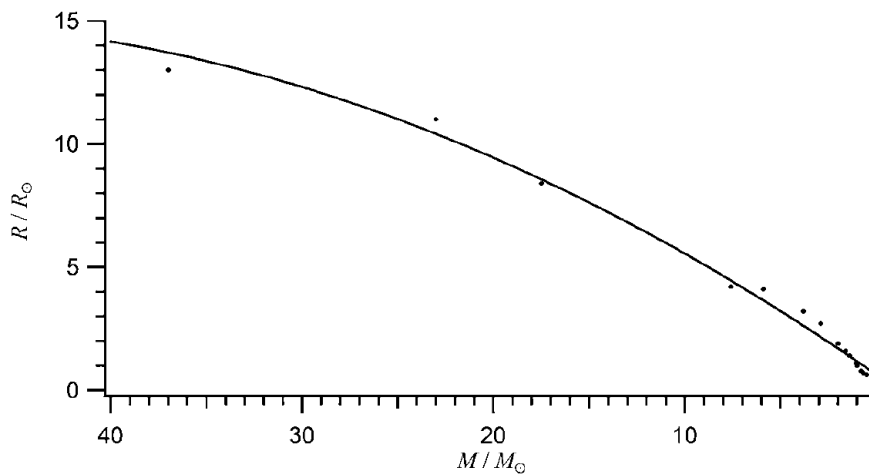


Figura 1.3: Relación entre la masa y el radio para la secuencia principal con una curva de ajuste.

Fuente: An Introduction to Stellar Astrophysics, F. LeBlanc.

La masa solar es  $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{33}g$ , donde el símbolo  $\odot$  representa el Sol. Las propiedades físicas de objetos estelares por lo regular son dadas en términos de unidades solares. La temperatura del Sol en su superficie es de aproximadamente 5800K, mientras que en el interior es alrededor de  $16 \times 10^6K$ .

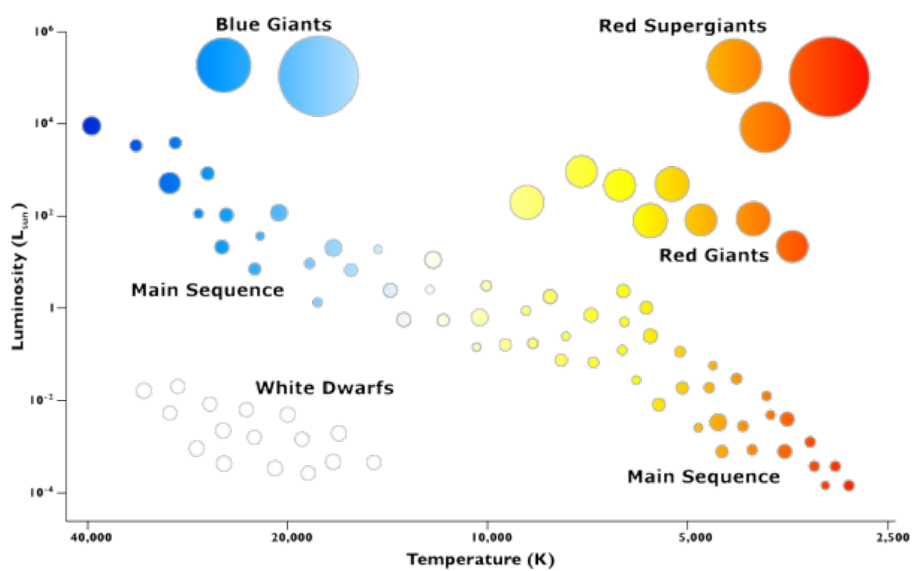


Figura 1.4: Clasificación luminosa del diagrama H-R.  
Fuente: Las Cumbres Observatory.

# Capítulo 2

## Formación y estructura interna

### 2.1. Formación estelar

Las estrellas son formadas cuando nubes de gas tales como cúmulos de polvo, alcanzan una masa lo suficientemente grande como para provocar un colapso gravitacional, este colapso ocurre hacia el interior del centro de la nube. La energía gravitacional que posee la nube de gas es transformada en energía térmica durante su colapso, si la masa de la nube en colapso es aproximadamente  $0.08M_{\odot}$  la energía gravitacional será suficiente para que sea alcanzada la temperatura crítica en la cual puede ser iniciada y sostenida la reacción de fusión de hidrógeno, siendo éste, el momento del nacimiento de una estrella.

Durante el proceso de formación al contraerse la nube bajo la acción de la gravedad, se genera una presión interna en la nube, ésta presión mientras el proceso de formación tenga lugar, no será constante sino que formará un gradiente de presión; este gradiente de presión en la nube variará hacia el centro de la misma, que junto con los gradientes de temperatura y densidad, presentarán inestabilidad durante la formación de la protoestrella. Una vez que los gradientes lleguen a un punto de equilibrio, la estrella será considerada estable ya que es el equilibrio al que llegan la presión y la gravedad lo que provoca la no expansión ni contracción de las estrellas.

## 2.2. Equilibrio hidrostático

Debido a que el material de la estrella se encuentra en un estado fluido, el equilibrio logrado por la estrella en su interior es llamado equilibrio hidrostático. Las ecuaciones que rigen este equilibrio hidrostático describen en principio el gradiente de presión al interior de la estrella.

Un elemento vital para el entendimiento del comportamiento estelar es la comprensión de la ecuación de equilibrio hidrostático. En una estrella la fuerza gravitacional provoca una presión en el interior que depende del radio. Es posible obtener una primera representación del interior estelar en términos de la teoría newtoniana, si se supone que la estrella tiene simetría esférica, los parámetros tales como presión, densidad, temperatura, dependerán únicamente del radio  $r$  desde el centro de la estrella. La ecuación que representa el equilibrio para un segmento del fluido en el interior de la estrella es

$$P(r)dA - [P(r) + dP]dA - \rho(r)dAdr g(r) = 0 \quad (2.1)$$

donde  $P(r)$ ,  $\rho(r)$  y  $g(r)$  son respectivamente, la presión del gas, la densidad gravitacional y la aceleración gravitacional. El elemento de masa es  $\rho(r)dAdr$ , mientras que los dos primeros términos de la ecuación representan las fuerzas hacia arriba y abajo debidas a la presión sobre el elemento de masa en el interior. La ecuación 2.1 puede ser simplificada en

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\rho(r)g(r) \quad (2.2)$$

dado que  $\rho$  y  $g$  son positivos, implica  $dP/dr < 0$ , por lo que  $P$  aumenta con la disminución del radio  $r$ .

A partir de la mecánica clásica se muestra que para una distribución de masa esféricamente simétrica la aceleración gravitacional a una distancia  $r$  del centro de la distribución será

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2} \quad (2.3)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación y  $M(r)$  la masa incluida en el radio  $r$ .

## 2.3. Objetos compactos

Dentro de la clasificación de las estrellas, la cual se estudió en el capítulo anterior, se encuentra en la parte baja alejada de la secuencia principal un grupo de estrellas conocidas como enanas blancas, estas forman parte de un grupo en particular de objetos conocidos como objetos compactos. Categoría dentro de la cual se encuentran además las estrellas de neutrones, estrellas de quarks, estrellas Q, estrellas de bosones y agujeros negros.

La obtención de un objeto compacto es considerado como el fin de la evolución estelar, así como la etapa final de la materia en el universo, al convertirse en algún tipo de objeto compacto, según las leyes de la termodinámica. En el caso de las enanas blancas, las cuales son consideradas el primer objeto compacto en el proceso de degeneración; éstas estrellas son sostenidas a través de la presión de degeneración de electrones, debida a la alta densidad que poseen del orden de  $10^9 \text{kg/m}^3$ . Su límite de masa queda definido a través del límite de Chandrasekhar para una estrella no rotante en  $1.44M_{\odot}$ . Al superar este límite, se obtiene otro tipo de objeto, conocido como estrella de neutrones.

### 2.3.1. Estrellas de neutrones

Las estrellas de neutrones son el tipo de estrella más denso conocido hasta el momento, formadas a partir del colapso gravitacional de una supernova, usualmente tienen una masa entre  $1.35$  y  $2.1M_{\odot}$  con un radio promedio de  $10 \text{km}$ . Como su nombre lo indica, están compuestas en su mayoría por neutrones, debido a la extrema densidad que poseen, del orden de  $10^{17} \text{kg/m}^3$ , la presión en el interior que evita el colapso de la estrella, no proviene de reacciones termonucleares, sino de la presión de degeneración de los neutrones. Debido a la naturaleza de su origen, basada en una serie de colapsos hasta lograr la estabilidad en la estrella de neutrones, la estrella final no puede sobrepasar la masa de tres soles, siendo éste el límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, que en caso de ser rebasado, generaría un agujero negro o una estrella de quarks, estrellas que aún no han sido confirmadas observacionalmente; debido a la insuficiencia en magnitud de la presión de degeneración de neutrones para evitar el colapso gravitacional.

### 2.3.2. RX J1856.5-3754

Localizada en la constelación Corona Austral, es una estrella de neutrones que forma parte del grupo de las magníficas siete, conformado por un conjunto de estrellas de neutrones aisladas a una distancia de entre 200 a 500 parsecs de la Tierra, a diferencia de la mayoría de las estrellas de neutrones, ésta no es de tipo pulsante. Siendo la RX J1856.5-3754 la primera en entrar en dicha clasificación, posee una edad estimada de un millón de años y se cree que proviene de la explosión de una supernova.

Descubierta primeramente en 1992 por el ROSAT X-ray satellite observatory como una fuente brillante de rayos X, y confirmada en 1996, en un principio debido a las observaciones combinadas del observatorio de rayos X Chandra y el Hubble, se estimó que radiaba como un cuerpo negro poseyendo un radio de 4 a 8km, puesto que esta descripción no concordaba con los modelos para estrellas de neutrones, se pensó erróneamente que era una estrella de quarks, no obstante, un análisis posterior estimó que el radio real de la estrella oscila alrededor de los 14km para una masa de 1.4 soles(Truemper et al., 2004).

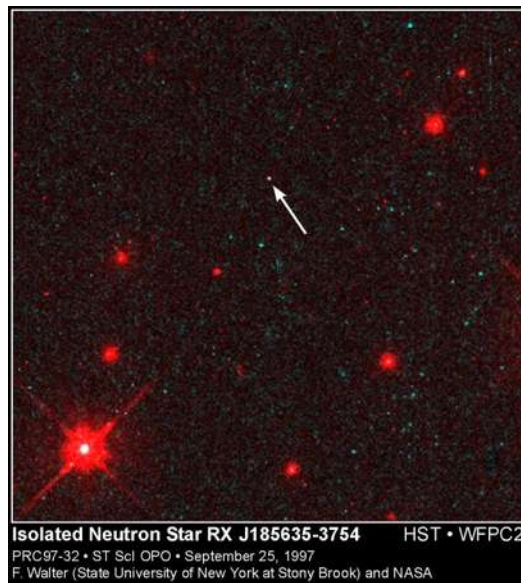


Figura 2.1: Primera confirmación observacional en luz visible de la estrella RX J1856.5-3754.

## 2.4. Ecuación de estado

Durante el proceso de análisis de la solución estelar se presenta la necesidad primordial de describir las condiciones físicas al interior de la estrella a modelar. Por lo que, durante el desarrollo de la solución se debe incluir en la misma a la ecuación de estado como recurso para describir el comportamiento interno de la materia en la estructura estelar.

Es común al ver el término ecuación de estado pensar en la más conocida de ellas, la ecuación del gas ideal, la cual es también adaptada para algunos modelos estelares, dado que inclusive un gas ideal obedece las ecuaciones de Maxwell-Boltzmann en estadística. Sin embargo dicha aproximación deja de ser efectiva cuando las interacciones entre las partículas se vuelven relevantes, ya que en tal punto los efectos se vuelven no ideales. Los efectos cuánticos deben ser tomados en cuenta en el caso de analizar estrellas enanas u objetos compactos, donde debido a la densidad al centro de la estrella ocurren fenómenos que causan un comportamiento no ideal de las partículas en el mismo. Otros factores que influyen en la desviación del modelo ideal hacia otras opciones más realistas son la presión de radiación, la presión magnética, así como los efectos relativistas debidos a la naturaleza del objeto y sus interacciones internas.

Diferentes factores deben ser tomados en cuenta para la correcta elección de una ecuación de estado adecuada al modelo planteado, tomando en cuenta el material del que está constituida además de las condiciones de presión, entre otras variables. Si se asume que a nivel microscópico el fluido perfecto es constituido por  $N$  tipos de partículas ( $N \geq 1$ ), entonces la densidad de energía será función del número de densidades  $n_A$  de las especies de partículas  $A$  ( $A \in \{1, 2, \dots, N\}$ ) en el marco de referencia del fluido y de la entropía del mismo así la densidad de energía se expresa como

$$\rho c^2 = \epsilon(s, n_1, n_2, \dots, n_N). \quad (2.4)$$

donde la función  $\epsilon$  es llamada Ecuación de Estado del fluido.

En el presente trabajo se utilizará una ecuación de estado tipo Chapligyn, nombrada por Sergey Chapligyn, la cual modela un gas exótico, su forma general es

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha},$$

donde  $p$  es la presión,  $\rho$  la densidad,  $0 < \alpha \leq 1$  y  $A$  es una constante positiva.



---

El uso de la ecuación de tipo Chapligyn es muy difundido en las áreas de relatividad y cosmología, en las cuales se utiliza para modelar fluidos exóticos, tales como los que se teorizan en el interior de las estrellas compactas, además de algunos otros modelos para gases en modelos de expansión entre otros.

# Capítulo 3

## Relatividad

La teoría de la relatividad general fue propuesta originalmente por Albert Einstein en 1915, siendo inclusive cien años después de su formulación una de las menos comprendidas teorías científicas; esto debido al distinto punto de vista que ofrece sobre la naturaleza del espacio y el tiempo, el cual en primera instancia dista de el sentido común y va por sí mismo contra el sentido intuitivo en el cual percibimos estas estructuras. Existe además un segundo obstáculo para el estudio de esta teoría, el cual es la compleja maquinaria matemática necesaria para su desarrollo, razón por la cual la teoría de la relatividad permaneció sin grandes avances por casi medio siglo después de su formulación.

El reciente interés en ésta teoría se debe principalmente a Wheeler y Bondi, en la década de los 50's; debido a dos descubrimientos, el primero el descubrimiento de los cuasares, donde se notó el gran efecto producido por los campos gravitacionales y derivó en el estudio de los colapsos, del cual surgieron las ecuaciones que describen las singularidades y el estudio de los agujeros de gusano en 1960's. El factor restante fue la necesidad de una teoría cuántica de gravitación.

### 3.1. Introducción

Como primer obstáculo en el entendimiento de la relatividad se ubica la dificultad de derrumbar previas suposiciones que se tienen sobre el comportamiento del espacio y del tiempo. Se puede considerar al espacio-tiempo como un continuo compuesto por *eventos* donde cada uno de los mismos puede ser

representado por un punto ubicado en el espacio a un tiempo específico, por lo que todos los eventos pueden ser descritos unicamente por tres coordenadas espaciales y una temporal.

Dados dos eventos  $p$  y  $q$  en el espacio, pueden ocurrir las siguientes posibilidades: (1) Es posible que un observador vaya de  $q$  a  $p$  en el cual se dice que  $q$  esta en el pasado de  $p$ . (2) Puede un observador ir de  $p$  a  $q$  siendo  $q$  en el futuro de  $p$ . (3) Es imposible en principio para un observador o cuerpo material estar en ambos eventos. Los eventos en la tercera posibilidad pueden ser a su vez (i) Eventos que yacen en la frontera de los eventos futuros de  $p$  los cuales no pueden ser alcanzados por objetos que viajen desde  $p$  pero sí por señales luminosas desde  $p$ . (ii) Los eventos ubicados en el pasado de  $p$  se definen de forma similar. (iii) Eventos que no están ni en el futuro ni el pasado, sino que se encuentran residiendo mutuamente en el vértice del cono de luz (Wald, 1984).

Lo cierto es que esta idea conlleva al hecho de que no existe la simultaneidad e inclusive el que un observador pudiera conjeturar que dos eventos ocurren simultáneamente ésta afirmación estaría ligada a las condiciones de movimiento de dicho observador. Es esta noción de simultaneidad que está tan firmemente concebida en el sentido común la que muchas veces obstruye el entendimiento de la teoría de la relatividad.

En el caso de dos observadores que verifican un evento  $p$ , la sincronización de sus relojes en el tiempo  $t$  en el cual el evento ocurre en un sistema de referencia  $O(x, y, z, t)$  respecto al primer observador y en el sistema  $O'(x', y', z', t')$  que se mueve con el observador dos a una velocidad  $v$  en la dirección  $x$ , será un asunto trivial al hacer  $t = t'$  se obtienen las coordenadas de  $O'$  como

$$t' = t, \quad (3.1)$$

$$x' = x - vt, \quad (3.2)$$

$$y' = y, \quad (3.3)$$

$$z' = z, \quad (3.4)$$

sin embargo en relatividad, la sincronización de relojes no es un asunto tan trivial, siendo necesarias las transformaciones de Lorentz

$$t' = \frac{(t - vx/c^2)}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad (3.5)$$

$$x' = \frac{(x - vt)}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad (3.6)$$

$$y' = y, \quad (3.7)$$

$$z' = z, \quad (3.8)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz. Dado que diferentes observadores pueden etiquetar diferentes sistemas de referencia inerciales y no existe una razón por la cual un observador tenga preferencia sobre otro, un postulado fundamental de la relatividad es la inexistencia de observadores inerciales preferenciales, siendo todos y cada uno de ellos igualmente válidos en sus observaciones. En relatividad especial ni el intervalo de tiempo ni espacio entre dos eventos simultáneos tiene relevancia absoluta. La cantidad que es independiente del observador es el intervalo espacio-tiempo  $I$  definido como

$$I = -(\Delta t)^2 + \frac{1}{c^2}[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]. \quad (3.9)$$

El intervalo  $I$  y las funciones que dependan de  $I$  son las únicas cantidades independientes del observador que caracterizan las relaciones entre eventos. Se puede referir a  $I$  como la métrica del espacio-tiempo análoga a la métrica Euclidiana (Hartle, 2002).

## 3.2. Relatividad General

La formulación de la teoría especial de la relatividad causó un gran impacto en la física de la época, ya que, en principio, la mayoría de los conceptos previos debían modificarse adaptándose a la nueva forma de entender el espacio y el tiempo. Una excepción a esta adaptación es la teoría electromagnética de Maxwell la cual era consistente con la relatividad. Sin embargo la teoría mecánica de Newton no lo era al considerar eventos simultáneos.

En lugar de modificar la teoría de Newton para hacerla coincidir con la naciente teoría relativista, Einstein optó por buscar una teoría más generalizada, un nuevo punto de vista de la gravitación y el espacio-tiempo. Esta idea la llevó a cabo influenciado por dos principios fundamentales, el principio de equivalencia, en el cual todos los cuerpos son influenciados por la gravedad y por lo cual, todos ellos caen de la misma forma en un campo gravitacional.

La segunda idea principal fue el principio de Mach, por la cual Einstein optó por una teoría en la cual la estructura del espacio-tiempo es afectada por la mera presencia de materia en él. Esta nueva teoría del espacio, tiempo y gravedad denominada como relatividad general se sigue de el hecho de que las propiedades intrínsecas, el observador independiente y las propiedades del espacio tiempo, quedan descritas por la métrica del espacio-tiempo, como el caso de relatividad especial. Con la diferencia de que la métrica no necesariamente es plana, en lugar de esto existe curvatura, lo que lleva a una desviación de la métrica plana. La curvatura del espacio-tiempo está, además, relacionada con el tensor de momento energía a través de las ecuaciones de Einstein. Por lo que, la estructura del espacio-tiempo está relacionada con la materia contenida en él.

### 3.3. Geometría

#### 3.3.1. Vectores

En la física el estudio de las magnitudes es de vital importancia, siendo, de las más trascendentales aquellas que representan no sólo una cantidad sino también, una dirección de efecto. Es aquí donde aparece para el físico el concepto de vector, magnitud que se ve representada en el principio de su aprendizaje, como una cantidad más una dirección. Sin embargo, matemáticamente, el vector es aquel elemento que forma parte de un cuerpo matemático con propiedades definidas conocido como **espacio vectorial**.

Un **espacio vectorial** (o espacio lineal) se define como la constitución de los siguientes elementos:

1. un cuerpo  $F$  de escalares;
2. un conjunto  $V$  de elementos llamados vectores;
3. una regla (u operación) llamada adición, que asocia a cada par de vectores  $\alpha, \beta$  de  $V$  un vector  $\alpha + \beta$  de  $V$ , que se llama suma de  $\alpha$  y  $\beta$ , de tal modo que:
  - (a) la adición es conmutativa,  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
  - (b) la adición es asociativa,  $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
  - (c) existe un único vector de  $0$  de  $V$ , llamado vector nulo, tal que  $\alpha + 0 = \alpha, \forall \alpha \in V$ ;

- (d)  $\forall \alpha \in V, \exists!$  vector  $-\alpha \in V : \alpha + (-\alpha) = 0$ ;
4. una regla (u operación), llamada multiplicación escalar, que asocia a cada escalar  $c$  de  $F$  y cada vector  $\alpha$  de  $V$  a un vector  $c\alpha$  de  $V$ , llamado producto de  $c$  y  $\alpha$  :
- (a)  $1\alpha = \alpha \forall \alpha \in V$ ;
- (b)  $(c_1c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha)$ ;
- (c)  $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$ ;
- (d)  $(c_1 + c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha$  (Hoffman y Kunze, 1971).

Al poder ser representados los vectores como un conjunto de coordenadas en un arreglo lineal, es de utilidad su descomposición en componentes con respecto al conjunto de **vectores base**, siendo la base de cualquier conjunto de vectores, aquel conjunto que por sí mismo puede reproducir todo el espacio vectorial asociado a ellos, y que son, entre sí, linealmente independientes. Siendo, por lo tanto, todos los vectores del espacio vectorial una combinación lineal de la base. Para cualquier espacio vectorial existe un infinidad de bases posibles, sin embargo, el número de elementos en la base permanece constante, este número se denomina la **dimensión** del espacio vectorial.

En el caso del espacio-tiempo los vectores son 4-dimensionales, conocidos como cuatro-vectores, cubriendo a cada punto del espacio. Ya que algunos de los conceptos tales como el que un vector vaya de un punto a otro sólo son válidos en espacios planos, una vez que se introduce curvatura, se dice que, a cada punto  $p$  en el espacio-tiempo se le pueden asociar todos los posibles vectores localizados en ese punto; este conjunto de vectores forma el *espacio tangente* de  $p$  o  $T_p$ .

Un vector  $A$  cualquiera, puede ser representado como una combinación lineal de sus vectores base en la forma:

$$A = A^\mu \hat{e}_\mu, \quad (3.10)$$

donde los coeficientes  $A^\mu$  son las *componentes* del vector  $A$ , además  $\hat{e}_\mu$  representa los vectores de la base, con  $\mu \in 0, 1, 2, 3$  (en el caso de un cuatro-vector).

Para una curva parametrizada  $x^\mu(\lambda)$ , el vector tangente  $V(\lambda)$  tendrá componentes

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (3.11)$$

siendo este de la forma  $V = V^\mu \hat{e}_\mu$ , que, mediante transformaciones de Lorentz, cambia en sus coordenadas  $x^\mu$  manteniendo la parametrización  $\lambda$  inalterada:

$$V^\mu \rightarrow V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_\nu V^\nu, \quad (3.12)$$

aquí, pese a que el vector  $V$  por sí mismo se mantiene inalterado, sus componentes se transforman, siendo  $V$  invariante bajo transformaciones de Lorentz.

El **espacio dual**, para el espacio  $T_p$ , es denotado mediante un asterisco en la forma  $T_p^*$ , el espacio dual es un mapeo lineal de los elementos del espacio original hacia los reales, esto es si  $w \in T_p^* \therefore$

$$w(aV + bW) = aw(V) + bw(W) \in \mathbf{R} \quad (3.13)$$

donde  $V, W$  son vectores y  $a, b$  números reales. Los vectores base del espacio dual pueden representarse como  $\hat{\theta}^\nu(\hat{e}_{(\mu)}) = \delta_\mu^\nu$ . Entonces el vector dual en términos de sus componentes se expresa como:

$$w = w_\mu \hat{\theta}^{(\mu)}. \quad (3.14)$$

De forma convencional se puede referir a los vectores del espacio original como vectores contravariantes o de índices superiores y a los vectores del espacio dual como vectores covariantes o de índices inferiores o también

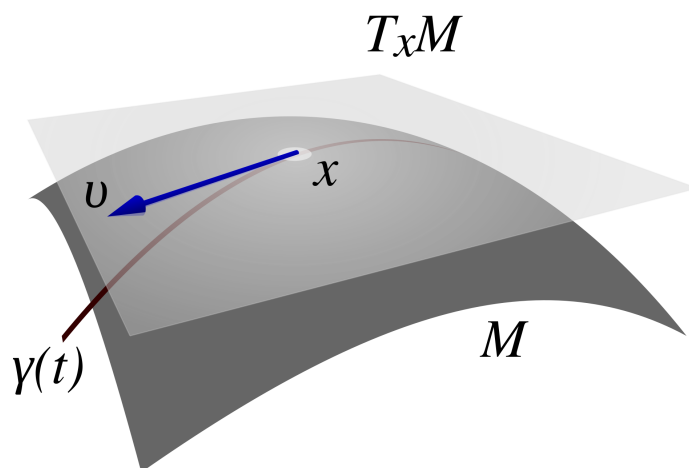


Figura 3.1: Espacio tangente  $T_x M$  en el punto  $x$  de la variedad  $M$ .  
Fuente: McSush. Dominio público.

llamados una-formas. La acción de un vector dual sobre un vector puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned}
 w(V) &= w_\mu \hat{\theta}^{(\mu)}(V^\nu \hat{e}_{(\nu)}) \\
 &= w_\mu V^\nu \hat{\theta}^{(\mu)}(\hat{e}_\nu) \\
 &= w_\mu V^\nu \delta_\nu^\mu \\
 &= w_\mu V^\mu \in \mathbf{R}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Esto lleva a que los vectores pueden ser vistos como mapeos de los elementos del espacio dual

$$V(w) = w(V) = w_\mu V^\mu. \tag{3.16}$$

por lo que, el espacio dual del espacio dual es el propio espacio vectorial. En el caso de la acción del espacio dual sobre el espacio vectorial el resultado es una función escalar, sin índices e invariante bajo transformaciones de Lorentz.

El más simple ejemplo de un vector dual, es el gradiente de una función escalar

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \hat{\theta}^\mu. \tag{3.17}$$

Una forma más sencilla de expresar el gradiente de una función es la ecuación

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \partial_\mu \phi = \phi_{,\mu}. \tag{3.18}$$

de la cual se desprende el hecho del gradiente de ser un vector dual, ya que el índice superior de  $x^\mu$  conlleva un índice inferior en el resultado al estar en la parte del denominador (Carroll, 2004).



### 3.3.2. Tensores

La generalización de los conceptos de vector y vector dual, es el objeto conocido como tensor. El cual es un mapeo multilinear, esto es, un tensor  $T$  de rango  $(k, l)$  es un mapeo de una colección de vectores y vectores duales a  $\mathbf{R}$ :

$$T : \underbrace{T_p^* \times \cdots \times T_p^*}_{(k \text{ veces})} \times \underbrace{T_p \times \cdots \times T_p}_{(l \text{ veces})} \rightarrow \mathbf{R}. \quad (3.19)$$

donde  $\times$  denota el producto cartesiano. Al ser un mapeo multilinear, se tiene que el tensor actúa de forma lineal en cada uno de sus argumentos. Los escalares son vectores tipo  $(0,0)$ , y los vectores son tensores de rango  $(1,0)$  mientras que los vectores duales son de rango  $(0,1)$ .

Como es natural, al ser los tensores una generalización de los vectores, el conjunto de tensores de rango  $(k, l)$  forma un espacio vectorial, por lo que pueden ser sumados entre sí además de multiplicados por un escalar (Misner et al., 1973).

Si se quiere obtener la base para el espacio vectorial de tensores, es necesaria la definición de el producto tensorial. Si  $T$  es un tensor de rango  $(k, l)$  y  $S$  uno de rango  $(m, n)$ , se define el tensor  $T \otimes S$  de rango  $(k + m, l + n)$  como:

$$\begin{aligned} T \otimes S(w^{(1)}, \dots, w^{(k)}, \dots, w^{(k+m)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}, \dots, V^{(l+n)}) \\ = T(w^{(1)}, \dots, w^{(k)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}) \\ \times S(w^{(k+1)}, \dots, w^{(k+m)}, V^{(l+1)}, \dots, V^{(l+n)}). \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde  $w^{(i)}$  y  $V^{(i)}$  son distintos vectores y vectores duales. En general el producto tensorial es no conmutativo,  $T \otimes S \neq S \otimes T$ .

Para la formación de las bases del espacio de los tensores  $(k, l)$ , se usa la multiplicación de los vectores y vectores duales, estos serán los tensores de la forma

$$\hat{e}_{(\mu_1)} \otimes \cdots \otimes \hat{e}_{(\mu_k)} \otimes \hat{\theta}^{(\nu_1)} \otimes \cdots \otimes \hat{\theta}^{(\nu_l)}. \quad (3.21)$$

Existiendo  $4^{k+l}$  tensores base en el espacio-tiempo 4-dimensional. Así un tensor puede expresarse en términos de sus componentes como:

$$T = T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l} \hat{e}_{(\mu_1)} \otimes \cdots \otimes \hat{e}_{(\mu_k)} \otimes \hat{\theta}^{(\nu_1)} \otimes \cdots \otimes \hat{\theta}^{(\nu_l)}. \quad (3.22)$$

Un tensor de rango  $(k, l)$  tiene  $k$  índices superiores y  $l$  índices inferiores. Siendo el orden de los mismos de importancia.

En el espacio-tiempo existen varios ejemplos de tensores. Uno de los más utilizados es el tensor métrico de rango  $(0,2)$   $\eta_{\mu\nu}$ . Ésta métrica actúa de forma particular sobre los vectores, siendo su acción sobre dos elementos una operación de interés conocida como producto interior, la cual opera de la forma

$$\eta(V, W) = \eta_{\mu\nu} V^\mu W^\nu = V \cdot W. \quad (3.23)$$

Como ya es conocido, al ser nulo el producto interno de dos vectores, se refiere a los mismos como ortogonales. La norma de un vector es definida por el producto interno del vector consigo mismo, sin embargo, a diferencia del concepto tradicional Euclidiano, aquí la norma no es necesariamente positiva por lo que

$$\text{si } \eta_{\mu\nu} V^\mu W^\nu \text{ es } \begin{cases} < 0, V^\mu \text{ es timelike} \\ = 0, V^\mu \text{ es lightlike o nulo} \\ > 0, V^\mu \text{ es spacelike.} \end{cases} \quad (3.24)$$

Asimismo, la delta de Kronecker  $\delta_\rho^\mu$  es un tensor de rango  $(1,1)$ , el cual funciona como mapeo de vectores a vectores y es además el mapeo identidad. Es mediante el uso de la delta de Kronecker que se obtiene la métrica inversa  $\eta^{\mu\nu}$  de rango  $(2,0)$  la cual opera con la métrica en la forma

$$\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\rho} = \eta_{\rho\nu} \eta^{\nu\mu} = \delta_{\rho\mu}. \quad (3.25)$$

Utilizando la métrica y la delta de Kronecker se llevan a cabo diferentes operaciones exclusivas de los tensores, siendo una de las más básicas la contracción de índices la cual, transforma un tensor de rango  $(k, l)$  en uno  $(k-1, l-1)$ . Esta se lleva a cabo sumando un índice superior con uno inferior

$$S^{\mu\rho}{}_\sigma = T^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma\nu}. \quad (3.26)$$

Además en general  $T^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma\nu} \neq T^{\mu\rho\nu}{}_{\sigma\nu}$ , ya que se obtienen diferentes tensores al cambiar el orden de los índices en la contracción. Las métricas y sus inversas son utilizables para subir o bajar índices en los tensores en la forma:

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta\mu}{}_\delta &= \eta^{\mu\gamma} T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}, \\ T_\mu{}^\beta{}_{\gamma\delta} &= \eta_{\mu\alpha} T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}, \\ T_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} &= \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} \eta^{\rho\gamma} \eta^{\sigma\delta} T^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

estas operaciones no alteran la posición relativa de los índices, además los índices mudos aparecen en ambos lados de la ecuación. Además es posible también transformar vectores en vectores duales y viceversa mediante

$$\begin{aligned} V_\mu &= \eta_{\mu\nu} V^\nu \\ \omega^\mu &= \eta^{\mu\nu} \omega_\nu. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Otra propiedad importante de los tensores es la simetría, un tensor se dirá simétrico en sus índices, si al cambiar el orden de los mismos dicho tensor permanece inalterado, es decir

$$S_{\mu\nu\rho} = S_{\nu\mu\rho}, \quad (3.29)$$

de esta forma,  $S_{\mu\nu\rho}$  es simétrico en sus primeros dos índices mientras que

$$S_{\mu\nu\rho} = S_{\mu\rho\nu} = S_{\rho\mu\nu} = S_{\nu\mu\rho} = S_{\rho\nu\mu}, \quad (3.30)$$

indica una simetría en los tres índices del tensor  $S$ . Por el contrario, un tensor es antisimétrico cuando sucede que

$$A_{\mu\nu\rho} = -A_{\rho\nu\mu} \quad (3.31)$$

el cual es antisimétrico en los índices primero y tercero. En el caso de tensores con mayor uso, se puede observar que por ejemplo, el tensor métrico  $\eta_{\mu\nu}$  y su inverso  $\eta^{\mu\nu}$  son simétricos, mientras que el conocido tensor del símbolo Levi-Civita  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  es antisimétrico.

### 3.3.2.1. Métrica

Dada la importancia del tensor métrico, este en general, recibe el símbolo  $g_{\mu\nu}$  dado que el usado anteriormente  $\eta_{\mu\nu}$  es reservado para la métrica de Minkowski. De la misma manera mencionada con anterioridad se define también la métrica inversa  $g^{\mu\nu}$  a través de

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = g_{\lambda\sigma} g^{\lambda\mu} = \delta_\sigma^\mu. \quad (3.32)$$

Para expresar el tensor métrico  $g$  en términos de sus componentes dentro de una base coordenada es utilizada la expansión

$$g = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (3.33)$$

además dado que  $dx^\mu$  es un vector dual es natural el hecho de escribir el elemento de línea en función de la métrica como

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.34)$$

la cual por comodidad suele representarse en la mayoría de los casos omitiendo la sumatoria, recordando su definición. Una representación útil de la métrica suele ser la forma canónica de  $g_{\mu\nu}$ , en esta forma, las componentes de la métrica son de la forma

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, -1, \dots, -1, +1, +1, \dots, +1, 0, 0, \dots, 0), \quad (3.35)$$

donde  $\text{diag}$  significa la matriz diagonal con los elementos dados. Estos signos en las entradas de la diagonal determinan ciertas propiedades para la métrica, como ejemplo en el espacio de Minkowski se tienen los signos  $(-, +, +, +)$ , si uno de los eigenvalores es nulo, la métrica se llama *degenerada* y su inversa es inexistente, de forma similar si la métrica es continua y no degenerada sus signos serán los mismos en cada punto. Si todos los signos son positivos, entonces a dicha métrica se le llamará Euclidiana o Riemanniana, por el contrario si son negativos entonces será Lorentziana o pseudo-Riemanniana, las métricas con signos mixtos son las indefinidas.

Algunos de los resultados que el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  provee son:

1. La métrica suple las nociones de pasado y futuro.
2. Permite la medición de longitudes y tiempo propio.
3. Determina la distancia más corta entre dos puntos.
4. Reemplaza el campo gravitacional Newtoniano  $\phi$
5. Provee la noción de marcos de referencia inerciales y por ello el sentido de no rotación.
6. Con ella se determina la causalidad al establecer la velocidad de la luz mayor a cualquier otra señal.
7. Reemplaza el concepto euclidiano de producto punto de la mecánica Newtoniana.

# Capítulo 4

## Modelo estelar con ecuación de estado tipo Chaplygin

### 4.1. Ecuaciones

Para esta solución estelar se considera un fluido con presiones anisotrópicas, es decir las presiones radial y tangencial son diferentes, mientras que la parte de la geometría se supone como estática y esféricamente simétrica, en tal caso el elemento de línea es dado por:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + g(r)dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (4.1)$$

De esta suposición, a partir de las ecuaciones de Einstein  $G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$  se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas:

$$kc^2\rho(r) = \frac{g'}{rg^2} + \frac{g-1}{gr^2} \quad (4.2)$$

$$kP_r(r) = \frac{f'}{rgf} - \frac{g-1}{gr^2} \quad (4.3)$$

$$kP_t(r) = -\frac{1}{4} \frac{f'^2}{rgrf^2} - \frac{1}{4} \frac{(g'r - 2g)f'}{fg^2r} - \frac{1}{2} \frac{g'}{rg^2} + \frac{1}{2} \frac{f''}{gf} \quad (4.4)$$

siendo,  $f$  y  $g$  funciones de  $r$ , y sus funciones primadas, derivadas respecto a  $r$ , además  $\rho$  representa la densidad del fluido,  $P_r$  a la presión radial y  $P_t$  la presión tangencial.

La existencia de dos presiones, tangencial y radial (Bowers y Liang, 1974), se debe al hecho de que dentro del tensor de energía momento se suponen

distintas puesto que para estrellas compactas, a tan altas densidades en su interior, se cree (Ruderman, 1972), que las interacciones neutrón-neutrón en el interior generarán un estado de superfluido con anisotropía. Es necesario mencionar que ésta no es la única posible fuente de anisotropía, otra fuente podría ser la existencia de un núcleo sólido (Canuto, 1973), dicho núcleo pudiese llegar a existir para materia fría en el rango de  $10^{15}\text{g/cm}^3$ , sin embargo el mencionado estado es aún incierto. Por otro lado, para la resolución de este sistema de ecuaciones, es necesaria la imposición de otras dos ecuaciones al sistema, las cuales deben ser consistentes con la naturaleza de los planteamientos descritos. La primera será, como es usual en la literatura, una ecuación de estado. En este caso, utilizaremos una ecuación de estado tipo Chaplygin (Bhar, 2017) (Bhar et al., 2016). Dicha ecuación de estado tiene la forma:

$$P_r(\rho) = \mu c^2 \rho - \frac{\nu}{c^2 \rho}, \quad (4.5)$$

ecuación que relaciona la presión radial con la densidad. La segunda ecuación impuesta es una forma explícita para  $g(r)$  la cual está relacionada con función de masa:

$$g(r) = (1 + \beta r^2)^2 \quad (4.6)$$

Al reemplazar las ecuaciones para la presión radial y densidad en la ecuación de estado, la ecuación resultante será:

$$\frac{d}{dr} f(r) = \left( -\frac{\nu r (1 + \beta r^2)^5 k^2}{\beta \sigma} + \frac{\beta r \sigma \mu}{1 + \beta r^2} + \beta r (2 + \beta r^2) \right) f(r) \quad (4.7)$$

donde  $\sigma$  es:

$$\sigma = 6 + 3\beta r^2 + \beta^2 r^4 \quad (4.8)$$

De la ecuación anterior se obtiene mediante la integración, la forma de  $f(r)$ :

$$f(r) = C(1 + \beta r^2)^{2\mu} \sigma - \frac{5 \nu k^2}{4 \beta^2} e^\omega \quad (4.9)$$

con

$$\begin{aligned} \omega = & -\frac{1}{120 \beta^2} \nu \left( 5 \beta r^2 (3 \beta^3 r^6 + 8 \beta^2 r^4 - 12 \beta r^2 + 48) \right. \\ & - 244 \sqrt{15} \arctan \left( \frac{1}{15} (2 \beta r^2 + 3) \sqrt{15} \right) \left. \right) k^2 \\ & + \frac{1}{4} \beta r^2 (1 + \mu) (\beta r^2 + 4) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Una vez obtenida la forma para  $f(r)$  se está en condiciones de reemplazarla dentro de las ecuaciones (4.1)-(4.3) con la finalidad de obtener las ecuaciones para cada una de las variables hidrostáticas, de esta manera el conjunto de ecuaciones para la solución obtenida es el siguiente:

$$\rho(r) = \frac{\beta\sigma}{(1 + \beta r^2)^3 c^2 k} \quad (4.11)$$

$$P_r(r) = \frac{\mu\beta\sigma}{k(1 + \beta r^2)^3} - \frac{k\nu(1 + \beta r^2)^3}{\beta\sigma} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} P_t(r) &= P_r(r) + \frac{1}{4}k(1 + \beta r^2)^2 r^2 P_r(r)^2 \\ &- \frac{1}{2} \frac{\beta^2 \nu r^2}{c^4 k (1 + \beta r^2)^4 \rho(r)^2} (54 + 38\beta r^2 + 21\beta^2 r^4 + 6\beta^3 r^6 + \beta^4 r^8) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\mu\beta^2 r^2}{(1 + \beta r^2)^4 k} (\beta r^2 + 3)(-2 + 8\beta r^2 + 3\beta^2 r^4 + \beta^3 r^6) \\ &+ \frac{1}{4} \beta r^2 (2 + \beta r^2) c^2 \rho(r) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Tras encontrar las formas funcionales de las variables hidrostáticas, se utiliza la definición para encontrar las velocidades del sonido, radial y tangencial, definidas como:

$$v_r^2 = \frac{\partial P_r(\rho)}{\partial \rho} = \frac{dP_r}{dr} \bigg/ c^2 \frac{d\rho}{dr}$$

$$v_t^2 = \frac{\partial P_t(\rho)}{\partial \rho} = \frac{dP_t}{dr} \bigg/ c^2 \frac{d\rho}{dr}$$

de las definiciones anteriores se obtienen los cuadrados de las velocidades del sonido como:

$$v_r^2(r) = c^2 \mu + \frac{c^2 k^2 (1 + \beta r^2)^6 \nu}{\beta^2 \sigma^2} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
v_t^2 = & -\frac{1}{4} \frac{(1 + \beta r^2)^{11} \nu^2 (6 + 51\beta r^2 + 18\beta^2 r^4 + 5\beta^3 r^6) c^2 k^4}{\beta^4 \sigma^3 \gamma} & (4.15) \\
& + \frac{1}{2} \frac{1}{\beta^2 \gamma \sigma^3} (c^2 \nu (1 + \beta r^2)^5 (3\beta^7 \mu r^{14} + 3\beta^7 r^{14} + 28\beta^6 \mu r^{12} + 28\beta^6 r^{12} \\
& + 144\beta^5 \mu r^{10} + 146\beta^5 r^{10} + 450\beta^4 \mu r^8 + 466\beta^4 r^8 + 945\beta^3 \mu r^6 \\
& + 1015\beta^3 r^6 + 1242\beta^2 \mu r^4 + 972\beta \mu r^2 + 1584\beta r^2 + 216\mu + 504) k^2) \\
& - \frac{1}{4} \frac{1}{(1 + \beta r^2) \gamma} (c^2 (\beta^5 \mu^2 r^{10} + 2\beta^5 \mu r^{10} \\
& + \beta^5 r^{10} + 5\beta^4 \mu^2 r^8 + 10\beta^4 \mu r^8 + 3\beta^3 \mu^2 r^6 + 10\beta^3 \mu r^6 + 7\beta^3 r^6 - 9\beta^2 \mu^2 r^4 \\
& - 6\beta^2 \mu r^4 + 3\beta^2 r^4 - 36\beta \mu^2 r^2 + 48\beta \mu r^2 + 12\beta r^2 + 36\mu^2 - 72\mu + 12))
\end{aligned}$$

donde  $\gamma = \beta^2 r^4 + 4\beta r^2 + 15$ .

## 4.2. Aceptabilidad física

Es un hecho que no cualquier solución que se presenta puede ser factible en la realidad, por ello es que existe una serie de condiciones de aceptabilidad física que aseguran el que un modelo en particular pueda efectivamente representar un objeto o grupo de objetos estelares existentes. Por ello es que estas condiciones deben ser satisfechas para afirmar que las soluciones son bien comportadas físicamente:

- (i) La solución no debe presentar singularidades en su geometría, por lo que debe tener un valor positivo y finito para las presiones y la densidad i.e.  $P_t(0), P_r(0) \geq 0$  y  $\rho(0) \geq 0$ .
- (ii) La condición de causalidad se debe obedecer, para esto las velocidades del sonido deben ser menores que la de la luz,  $v_r, v_t \leq c$ , además debe ser positiva  $v_s \geq 0$ .
- (iii) En la frontera de la estrella, donde el radio es  $r = R$  debe anularse la presión radial  $P_r(R) = 0$ , aunque no necesariamente ocurre esto para la presión tangencial y la densidad, así mismo las presiones deben coincidir en el origen de la estrella.
- (iv) Adicionalmente la presión radial debe ser una función monótona decreciente respecto al radio de la estrella,  $\frac{dP_r}{dr} < 0$  para  $0 < r < R$ .
- (v) Análogamente la densidad tendrá su máximo en el origen y decrecerá monótonamente hacia la frontera,  $\frac{d\rho}{dr} < 0$  para  $0 < r < R$ .



- (vi) Además una estrella compacta y anisotrópica, es considera estable cuando se satisface,  $v_t^2 - v_r^2 < 0$  (Herrera y Santos, 1997).

### 4.3. Condiciones extremales

Para entender el comportamiento de la solución, primeramente se deben evaluar las ecuaciones hidrostáticas para el origen y la frontera de la estrella. Aplicando las condiciones en el origen para las ecuaciones para la densidad, presión radial, velocidad radial, velocidad tangencial se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\rho_0(0) = \frac{6\beta}{c^2k}, \quad (4.16)$$

$$P_{r_0}(0) = P_{t_0}(0) = \frac{-\nu k^2 + 36\mu\beta^2}{6\beta k}, \quad (4.17)$$

$$v_{r_0}^2(0) = c^2\mu + \frac{c^2k^2\nu}{36\beta^2}, \quad (4.18)$$

$$v_{t_0}^2(0) = -\frac{\nu^2 c^2 k^4}{2160\beta^4} + \frac{c^2\nu(504 + 216\mu)k^2}{6480\beta^2} - \frac{c^2(12 + 36\mu^2 - 72\mu)}{60}. \quad (4.19)$$

Se evalúan los gradientes de las funciones enunciados en (iv) y (v):

$$\left. \frac{d^2}{dr^2} \rho_r(r) \right|_{r=0} = -\frac{30\beta^2}{c^2k} \quad (4.20)$$

$$\left. \frac{d^2}{dr^2} P_r(r) \right|_{r=0} = -\frac{5(\nu k^2 + 36\mu\beta^2)}{6k} \quad (4.21)$$

obteniendo como resultado, expresiones explícitamente negativas, las cuales indican la presencia de un máximo en el origen, cumpliendo las condiciones de aceptabilidad física.

De manera similar para las condiciones en la frontera donde  $r = R$  se obtienen las ecuaciones para las presiones en la frontera como:

$$P_R(R) = \frac{\mu\beta(6 + 3\beta R^2 + \beta^2 R^4)}{(1 + \beta R^2)^3 k} - \frac{\nu(1 + \beta R^2)^3 k}{\beta(6 + 3\beta R^2 + \beta R^4)} \quad (4.22)$$

debido a la condición (iii) en la frontera la presión radial se anula, de tal forma que es posible especificar el valor de  $\nu$  obteniendo:

$$\nu = \frac{\mu\beta^2(6 + 3\beta R^2 + \beta^2 R^4)^2}{(1 + \beta R^2)^6 k^2} \quad (4.23)$$

Otra consecuencia de esta condición es que, al reemplazar en la ecuación de estado 4.5 la forma de la densidad 4.11 y el valor de  $\nu$  obtenido en la ecuación 4.23, se obtiene que  $P_r(\rho)|_{r=R} = 0$ , por lo que la presión radial se anula en la frontera. Además, dada la definición de velocidad radial 4.14, al evaluarla en el origen con el valor de  $\nu$  se obtiene:

$$v_r^2 = 2\mu c^2, \quad (4.24)$$

ésta ecuación unida a las condiciones físicas de causalidad, permite obtener la más inmediata cota para  $\mu$ , un conjunto de límites dentro de los cuales deben existir los valores de  $\mu$  que llevarán a resultados físicamente aceptables, siendo la primera cota:

$$0 < \mu < \frac{1}{2}. \quad (4.25)$$

Para la presión tangencial evaluada en  $r = R$  se obtiene la ecuación:

$$\begin{aligned} P_T(R) &= \frac{\beta^2 R^2}{4(1 + \beta R^2)^4 k} (12 - 120\mu - 32\mu\beta R^2 + 24\beta R^2) \\ &- 8\mu\beta^2 R^4 + 17\beta^2 R^4 + 6\beta^3 R^6 + \beta^4 R^8), \end{aligned} \quad (4.26)$$

y, dado que la presión tangencial en el origen debe satisfacer que  $P_T(0) > 0$ , se resuelve dicha desigualdad para  $\mu$ , implicando otra cota para  $\mu$  que debe ser:

$$\frac{(2 + \beta R^2)(6 + 3\beta R^2 + \beta^2 R^4)(1 + \beta R^2)}{-8\beta^2 R^4 - 120 - 32\beta R^2} < \mu. \quad (4.27)$$

Sin embargo, para poder realizar un análisis más efectivo de las propiedades de la solución estelar y también obtener los límites para los intervalos de  $\mu$ , surge la necesidad de realizar cambios de variable dentro de las ecuaciones hidrostáticas. Esta reparametrización se realiza con  $y = \beta R^2$  y  $r = xR$ , siendo  $x$  e  $y$  parámetros adimensionales, estando  $x$  asociado con el radio de la estrella de tal forma que  $x = 0$  se asocia al centro y  $x = 1$  a la frontera de

la estrella. Al realizar dichos cambios de variable, como resultado son obtenidas las funciones adimensionales hidrostáticas, primeramente la densidad adimensional:

$$kc^2\rho(x, y) = \frac{y(6 + 3yx^2 + y^2x^4)}{(1 + yx^2)^3}. \quad (4.28)$$

Las presiones, además, poseen dependencia de  $\mu$ , el parámetro proveniente de la implementación de la ecuación de estado:

$$P_r(x, y, \mu) = \mu (x^2 y + 1)^3 \quad (4.29)$$

$$\times \left( \frac{y (x^4 y^2 + 3 x^2 y + 6)}{(x^2 y + 1)^6} - \frac{y (y^2 + 3 y + 6)^2}{(1 + y)^6 (x^4 y^2 + 3 x^2 y + 6)} \right),$$

$$P_t(x, y, \mu) = \mu \left( \frac{y (x^4 y^2 + 3 x^2 y + 6)}{(x^2 y + 1)^6} - \frac{y (y^2 + 3 y + 6)^2}{(1 + y)^6 (x^4 y^2 + 3 x^2 y + 6)} \right) \quad (4.30)$$

$$\times (x^2 y + 1)^3 + \frac{1}{4} \frac{\mu x^2 (-3 + \mu) y^2 (x^4 y^2 + 3 x^2 y + 6)^2}{(x^2 y + 1)^4}$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{y^2 x^2 (x^2 y + 2) (9 \mu + 1) (x^4 y^2 + 3 x^2 y + 6)}{(x^2 y + 1)^3}$$

$$- \frac{\mu y^2 x^2 (x^2 y + 3) (x^6 y^3 + 3 x^4 y^2 + 5 x^2 y + 1)}{(x^2 y + 1)^4}$$

$$- \frac{1}{4} \frac{\mu y^2 (y^2 + 3 y + 6)^2 (x^2 y + 1)^2 (2 \mu + 5) x^2}{(1 + y)^6}$$

$$+ \frac{7}{4} \frac{\mu y^2 (y^2 + 3 y + 6)^2 x^2 (x^2 y + 2) (x^2 y + 1)^3}{(1 + y)^6 (x^4 y^2 + 3 x^2 y + 6)}$$

$$+ \frac{1}{y^2 (x^4 y^2 + 3 x^2 y + 6)^2} \left( \frac{1}{4} \frac{\mu^2 y^4 (y^2 + 3 y + 6)^4 (x^2 y + 1)^2 x^2}{(1 + y)^{12}} \right.$$

$$\left. - \frac{y^4 x^2 (x^2 y + 3) (x^6 y^3 + 3 x^4 y^2 + 5 x^2 y + 1) \mu (y^2 + 3 y + 6)^2}{(x^2 y + 1)^4 (1 + y)^6} \right)$$

$$\times (x^2 y + 1)^6,$$

$$\begin{aligned}
v_t^2(x, y, \mu) = & -\frac{1}{4} \frac{1}{(x^4 y^2 + 3x^2 y + 6)^3 (1+y)^{12} (x^2 y + 1) (x^4 y^2 + 4x^2 y + 15)} \quad (4.31) \\
& \times (y^2 (x-1) (x+1) (x^4 y^4 + 3x^4 y^3 + 6x^4 y^2 + 3x^2 y^3 \\
& + 12x^2 y^2 + 17x^2 y + 6y^2 + 17y + 15) (5x^{18} y^{12} \\
& + 30x^{18} y^{11} + 105x^{18} y^{10} + 180x^{18} y^9 + 48x^{16} y^{11} + 180x^{18} y^8 \\
& + 288x^{16} y^{10} - x^{14} y^{12} + 1008x^{16} y^9 - 6x^{14} y^{11} + 1728x^{16} y^8 \\
& + 219x^{14} y^{10} + 1728x^{16} y^7 + 1384x^{14} y^9 - 8x^{12} y^{11} \\
& + 4899x^{14} y^8 - 48x^{12} y^{10} + 8418x^{14} y^7 + 562x^{12} y^9 \\
& + 8423x^{14} y^6 + 3932x^{12} y^8 - 24x^{10} y^{10} + 14202x^{12} y^7 \\
& - 144x^{10} y^9 + 24504x^{12} y^6 + 876x^{10} y^8 + 24544x^{12} y^5 \\
& + 6936x^{10} y^7 - 30x^8 y^9 + 25596x^{10} y^6 - 180x^8 y^8 \\
& + 44352x^{10} y^5 + 960x^8 y^7 + 44472x^{10} y^4 + 7860x^8 y^6 + 45x^6 y^8 \\
& + 29160x^8 y^5 + 270x^6 y^7 + 50580x^8 y^4 + 1673x^6 y^6 \\
& + 50730x^8 y^3 + 6888x^6 y^5 + 126x^4 y^7 + 21633x^6 y^4 + 756x^4 y^6 \\
& + 36198x^6 y^3 + 2304x^4 y^5 + 35973x^6 y^2 + 5004x^4 y^4 + 108x^2 y^6 \\
& + 10584x^4 y^3 + 648x^2 y^5 + 15660x^4 y^2 + 1707x^2 y^4 + 15030x^4 y \\
& + 2682x^2 y^3 - 216y^5 + 3447x^2 y^2 - 1296y^4 + 3780x^2 y - 3234y^3 \\
& + 3240x^2 - 4284y^2 - 3114y - 1080) (x^6 y^5 + 3x^6 y^4 + 6x^6 y^3 \\
& + x^4 y^5 + 6x^4 y^4 + 12x^4 y^3 + 19x^4 y^2 + 3x^2 y^4 + 12x^2 y^3 \\
& + 18x^2 y^2 + 21x^2 y + 6y^3 + 19y^2 + 21y + 12) \mu^2) \\
& + \frac{1}{2} \frac{1}{(x^4 y^2 + 3x^2 y + 6)^3 (1+y)^6 (x^2 y + 1) (x^4 y^2 + 4x^2 y + 15)} \\
& \times ((3x^{26} y^{17} + 18x^{26} y^{16} + 63x^{26} y^{15} + 108x^{26} y^{14} + 46x^{24} y^{16} \\
& + 108x^{26} y^{13} + 276x^{24} y^{15} - x^{22} y^{17} + 966x^{24} y^{14} - 6x^{22} y^{16} \\
& + 1656x^{24} y^{13} + 344x^{22} y^{15} + 1656x^{24} y^{12} + 2134x^{22} y^{14} - 14x^{20} y^{16} \\
& + 7524x^{22} y^{13} - 84x^{20} y^{15} + 12918x^{22} y^{12} + 1612x^{20} y^{14} \\
& + 12923x^{22} y^{11} + 10652x^{20} y^{13} - 95x^{18} y^{15} + 38052x^{20} y^{12} - 570x^{18} y^{14} \\
& + 65508x^{20} y^{11} + 5181x^{18} y^{13} + 65578x^{20} y^{10} + 37736x^{18} y^{12} \\
& - 402x^{16} y^{14} 137301x^{18} y^{11} - 2412x^{16} y^{13} + 237246x^{18} y^{10} \\
& + 11902x^{16} y^{12} 237721x^{18} y^9 + 99552x^{16} y^{11} - 1167x^{14} y^{13} \\
& + 370542x^{16} y^{10} - 7002x^{14} y^{12} + 643140x^{16} y^9 + 19949x^{14} y^{11} \\
& + 645150x^{16} y^8 + 201384x^{14} y^{10} - 2394x^{12} y^{12} + 769029x^{14} y^9 \\
& - 14364x^{12} y^{11} + 1341342x^{14} y^8 + 24702x^{12} y^{10} + 1347177x^{14} y^7 \\
& + 315792x^{12} y^9 - 3537x^{10} y^{11} + 1236942x^{12} y^8 - 21222x^{10} y^{10} \\
& + 2167668x^{12} y^7 + 21776x^{10} y^9 + 2179638x^{12} y^6 + 378246x^{10} y^8 \\
& - 3510x^8 y^{10} + 1518396x^{10} y^7 - 21060x^8 y^9 + 2672694x^{10} y^6 \\
& + 15556x^8 y^8 + 2690379x^{10} y^5 + 339036x^8 y^7 - 1728x^6 y^9 + 1379676x^8 y^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 10368 x^6 y^8 + 2434356 x^8 y^5 + 17899 x^6 y^7 + 2451906 x^8 y^4 \\
& + 228354 x^6 y^6 + 2592 x^4 y^8 + 894279 x^6 y^5 + 15552 x^4 y^7 \\
& + 1567116 x^6 y^4 + 57438 x^4 y^6 + 1575756 x^6 y^3 + 163188 x^4 y^5 \\
& + 6480 x^2 y^7 + 428598 x^4 y^4 + 38880 x^2 y^6 + 683640 x^4 y^3 \\
& + 101808 x^2 y^5 + 670680 x^4 y^2 + 157248 x^2 y^4 + 7776 y^6 + 193968 x^2 y^3 \\
& + 46656 y^5 + 204768 x^2 y^2 + 117144 y^4 + 172368 x^2 y + 158544 y^3 \\
& + 127224 y^2 + 64800 y + 25920) \mu) - \frac{1}{4} \frac{x^8 y^4 + 4x^6 y^3 + 3x^4 y^2 + 12}{x^4 y^2 + 4x^2 y + 15},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_r^2(x, y, \mu) &= \frac{1}{\frac{y(4x^3 y^2 + 6xy)}{(x^2 y + 1)^3} - \frac{6y^2(x^4 y^2 + 3x^2 y + 6)x}{(x^2 y + 1)^4}} \quad (4.32) \\
&\times \left( \mu \left( \frac{y(4x^3 y^2 + 6xy)}{(x^2 y + 1)^6} - \frac{12y^2(x^4 y^2 + 3x^2 y + 6)x}{(x^2 y + 1)^7} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{y(y^2 + 3y + 6)^2(4x^3 y^2 + 6xy)}{(1+y)^6(x^4 y^2 + 3x^2 y + 6)^2} \right) (x^2 y + 1)^3 \right. \\
&+ \left. 6\mu \left( \frac{y(x^4 y^2 + 3x^2 y + 6)}{(x^2 y + 1)^6} \right. \right. \\
&- \left. \left. \frac{y(y^2 + 3y + 6)^2}{(1+y)^6(x^4 y^2 + 3x^2 y + 6)} \right) (x^2 y + 1)^2 x y \right).
\end{aligned}$$

De lo anterior, las ecuaciones hidrostáticas han quedado definidas en términos de tres variables,  $(x, y, \mu)$ , y, puesto que  $x$  está asociada con el radio estelar, y su rango es  $0 \leq x \leq 1$ , solo queda, a partir de estas ecuaciones, obtenerse los intervalos de validez para  $y$  y  $\mu$ . Ésto se llevará a cabo aplicando las condiciones en la frontera y en el origen a las ecuaciones hidrostáticas, y asegurando que concuerden con las condiciones de aceptabilidad física.

## 4.4. Condiciones en la frontera

Primeramente evaluamos las ecuaciones hidrostáticas en la frontera comenzando por la densidad

$$\rho(1, y) = \frac{y(y^2 + 3y + 6)}{(1 + y)^3}, \quad (4.33)$$

y, ya que  $y$  es positiva, la densidad pese a que no establece condición alguna para la  $y$ , nos dice que en la frontera la densidad no se anula en este caso. Se verifica también que la presión radial se anula en la frontera al evaluarla en  $x = 1$  y obtener  $P_r(1, y, \mu) = 0$ . Por su parte, para la presión tangencial, la cual no necesariamente debe anularse, se obtiene tras evaluarla en  $x = 1$  e imponer la condición  $P_t(1, y, \mu) > 0$ , resolviendo para  $\mu$  su primera condición es:

$$\mu < \frac{1 y^4 + 6 y^3 + 17 y^2 + 24 y + 12}{8 y^2 + 4 y + 15}. \quad (4.34)$$

Tras evaluar la velocidad tangencial en la frontera se obtiene:

$$\begin{aligned} v_t^2(1, y, \mu) &= \frac{1}{2} \frac{1}{(1 + y)^7 (y^2 + 3y + 6)^3 (y^2 + 4y + 15)} \\ &\times ((2 y^{17} + 44 y^{16} + 504 y^{15} + 3848 y^{14} + 21542 y^{13} \\ &+ 92868 y^{12} + 317332 y^{11} + 874720 y^{10} + 1964670 y^9 + 3609460 y^8 \\ &+ 5412208 y^7 + 6564456 y^6 + 6330666 y^5 + 4722012 y^4 \\ &+ 2611908 y^3 + 1002672 y^2 + 237168 y + 25920)\mu) \\ &- \frac{1 y^4 + 4 y^3 + 3 y^2 + 12}{4 y^2 + 4 y + 15}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Ya que la velocidad tangencial en la frontera debe ser menor que la velocidad de la luz, dadas las nuevas variables normalizadas, la condición se expresa como  $v_t^2 \leq 1$ , y el intervalo para  $\mu$  obtenido es:

$$\mu \leq \frac{1}{4} \frac{(y^4 + 4 y^3 + 7 y^2 + 16 y + 72) (y^2 + 3 y + 6)}{y^6 + 9 y^5 + 51 y^4 + 161 y^3 + 324 y^2 + 414 y + 360}. \quad (4.36)$$

Análogamente para la velocidad del sonido radial en la frontera se obtiene que

$$v_r^2(1, y, \mu) = 2\mu, \quad (4.37)$$

de donde dado que la velocidad del sonido debe quedar acotada por la velocidad de la luz se tiene:

$$\mu \leq \frac{1}{2}. \quad (4.38)$$

Por otra parte también se debe tomar en cuenta la condición que especifica que la velocidad del sonido debe ser positiva, esto brinda una cota inferior para  $\mu$  al hacer  $v_t^2 \geq 0$ :

$$\mu \geq \frac{1}{4} \frac{(y^2 + 3y + 6)(y^4 + 4y^3 + 3y^2 + 12)}{(y^6 + 9y^5 + 51y^4 + 161y^3 + 324y^2 + 414y + 360)}. \quad (4.39)$$

## 4.5. Condiciones en el origen

Como resultado de evaluar la presión tangencial y presión radial en el origen  $x = 0$ , se verifica que estas presiones coinciden con el valor,

$$P_r(0, y, \mu) = P_t(0, y, \mu) = \mu \left( 6y - \frac{1}{6} \frac{y(y^2 + 3y + 6)^2}{(y + 1)^6} \right), \quad (4.40)$$

además dado que la presión debe ser positiva, implica que se satisface  $\mu > 0$ . Para la velocidad radial, se puede observar de su definición en términos de la ecuación de estado:

$$v_s^2 = \frac{dP_r}{d\rho} = \mu c^2 + \frac{\nu}{c^2 \rho^2}, \quad (4.41)$$

puesto que la densidad es una función monótona decreciente, con su máximo en el origen, y los parámetros son positivos, la velocidad radial es una función monótona creciente con su máximo valor en la frontera, es decir, para  $\mu$  no se obtiene nueva información más que la que ya se obtuvo en 4.25 y lleva a que la velocidad del sonido radial está acotada como  $0 \leq v_r^2 \leq 1$ .

Por su parte, la velocidad tangencial si que aporta una serie de condiciones para  $\mu$  debido a que no posee restricciones sobre su comportamiento, al no ser de carácter monótono. Comenzando con la evaluación de la velocidad tangencial en el origen se tiene:

$$\begin{aligned}
v_t^2(0, y, \mu) &= \left( y^2 (6y^2 + 17y + 15) (-216y^5 - 1296y^4 - 3234y^3) \right. \\
&\quad \left. - 4284y^2 - 3114y - 1080 \right) \frac{(6y^3 + 19y^2 + 21y + 12)}{12960(1+y)^{12}} \mu^2 \\
&\quad + \frac{1}{6480(1+y)^6} \left( 7776y^6 + 46656y^5 + 117144y^4 \right. \\
&\quad \left. + 158544y^3 + 127224y^2 + 64800y + 25920 \right) \mu - \frac{1}{5}.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

La cual es una ecuación cuadrática en  $\mu$ , que nos permite determinar un intervalo de la forma  $A(y) \leq \mu \leq B(y)$ . Para cada plano  $y = cte$  se obtendría una parábola, la cual abre hacia abajo debido al término negativo del coeficiente en el término cuadrático. El objetivo de encontrar los intervalos de  $\mu$  se traduce en hallar las raíces de  $\mu$  en función de  $y$ ; obteniendo así  $A(y)$  y  $B(y)$ :

$$\begin{aligned}
A(y) &= -12 \left( (-108y^6 - 648y^5 - 1627y^4 - 2202y^3 - 1767y^2 \right. \\
&\quad + (7776y^{12} + 93312y^{11} + 514944y^{10} + 1731456y^9 + 3973582y^8 \\
&\quad + 6629160y^7 + 8401668y^6 + 8371512y^5 + 6678126y^4 \\
&\quad + 4205520y^3 + 1985040y^2 + 648000y + 129600)^{1/2} - 900y \\
&\quad \left. - 360(1+y)^6 \right) / \left( y^2(1296y^{10} + 15552y^9 + 85464y^8 \right. \\
&\quad + 284256y^7 + 636337y^6 + 1006860y^5 + 1147038y^4 + 935172y^3 \\
&\quad \left. + 526401y^2 + 186840y + 32400) \right),
\end{aligned} \tag{4.43}$$



$$\begin{aligned}
B(y) = & 12 \left( (108 y^6 + 648 y^5 + 1627 y^4 + 2202 y^3 + 1767 y^2 \right. & (4.44) \\
& + (7776 y^{12} + 93312 y^{11} + 514944 y^{10} + 1731456 y^9 + 3973582 y^8 \\
& + 6629160 y^7 + 8401668 y^6 + 8371512 y^5 + 6678126 y^4 \\
& + 4205520 y^3 + 1985040 y^2 + 648000 y + 129600)^{1/2} + 900 y \\
& + 360 (1 + y)^6 \left. \right) / \left( y^2 (1296 y^{10} + 15552 y^9 + 85464 y^8 \right. \\
& + 284256 y^7 + 636337 y^6 + 1006860 y^5 + 1147038 y^4 + 935172 y^3 \\
& + 526401 y^2 + 186840 y + 32400) \left. \right).
\end{aligned}$$

Análogamente es necesario aplicar la condición de causalidad para conocer otras dos raíces que determinarán intervalos para  $\mu$  como en el caso anterior. Se tienen tras resolver  $v_t^2(0, y, \mu) \leq 1$  para  $\mu$ , los límites a continuación mostrados:

$$\begin{aligned}
C(y) = & -12 \left( \left( -108 y^6 - 648 y^5 - 1627 y^4 - 2202 y^3 - 1767 y^2 \right. & (4.45) \\
& + \left( -11664 y^{12} - 139968 y^{11} - 767016 y^{10} - 2532384 y^9 \right. \\
& - 5571473 y^8 - 8473740 y^7 - 8803902 y^6 - 5656068 y^5 \\
& - 1217889 y^4 + 1402920 y^3 + 1499040 y^2 + 648000 y + 129600 \left. \right)^{1/2} \\
& - 900 y - 360 \left. \right) (1 + y)^6 \left. \right) / \left( y^2 \left( 1296 y^{10} + 15552 y^9 + 85464 y^8 \right. \right. \\
& + 284256 y^7 + 636337 y^6 + 1006860 y^5 + 1147038 y^4 + 935172 y^3 \\
& + 526401 y^2 + 186840 y + 32400 \left. \right) \left. \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(y) = & 12 \left( \left( 108 y^6 + 648 y^5 + 1627 y^4 + 2202 y^3 + 1767 y^2 \right. \right. & (4.46) \\
& + \left( - 11664 y^{12} - 139968 y^{11} - 767016 y^{10} - 2532384 y^9 \right. \\
& - 5571473 y^8 - 8473740 y^7 - 8803902 y^6 - 5656068 y^5 \\
& - 1217889 y^4 + 1402920 y^3 + 1499040 y^2 + 648000 y + 129600 \left. \right)^{1/2} \\
& + 900 y + 360 \left. \right) (1 + y)^6 \Big/ \left( y^2 \left( 1296 y^{10} + 15552 y^9 + 85464 y^8 \right. \right. \\
& + 284256 y^7 + 636337 y^6 + 1006860 y^5 + 1147038 y^4 + 935172 y^3 \\
& + 526401 y^2 + 186840 y + 32400 \left. \right) \Big).
\end{aligned}$$

Estos dos pares de ecuaciones, forman los límites para los intervalos de  $\mu$  debidos a las condiciones de aceptabilidad aplicadas a la velocidad del sonido tangencial en el origen. Pueden ser presentados en un gráfica en función de  $y$  como se muestra en la figura 4.1:

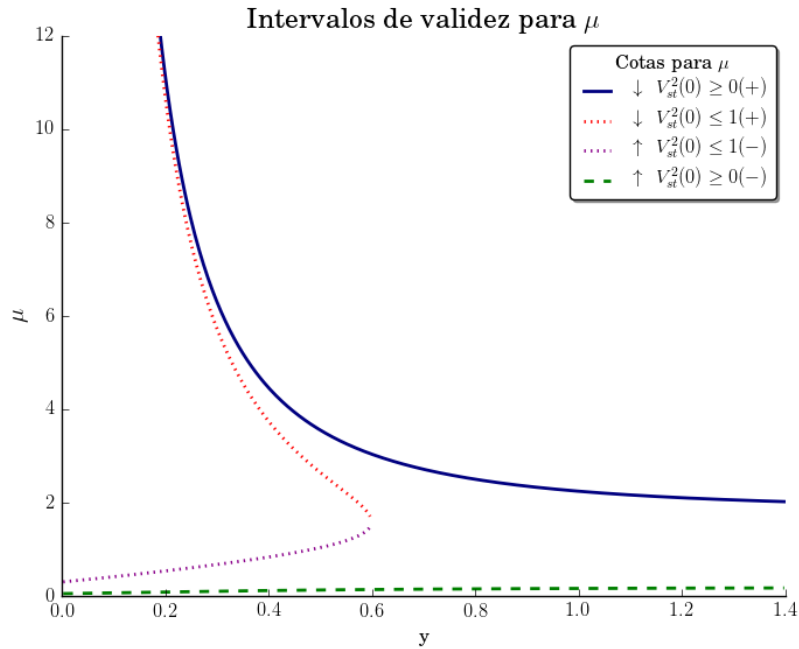


Figura 4.1: Intervalos de validez para  $\mu$  obtenidos a través de las condiciones impuestas a la velocidad del sonido tangencial en el origen.

Fuente: Elaboración propia.

Sin embargo, es necesario tomar en cuenta el resto de los limitantes de  $\mu$  obtenidos de las anteriores ecuaciones hidrostáticas con sus respectivas condiciones físicas, pueden ser observadas con mayor facilidad mediante la gráfica en la figura 4.2<sup>1</sup>:

<sup>1</sup>En este tipo de gráficas las flechas junto a las acotaciones indican si  $\mu$  debe encontrarse por arriba o por debajo de dicha función acotadora.

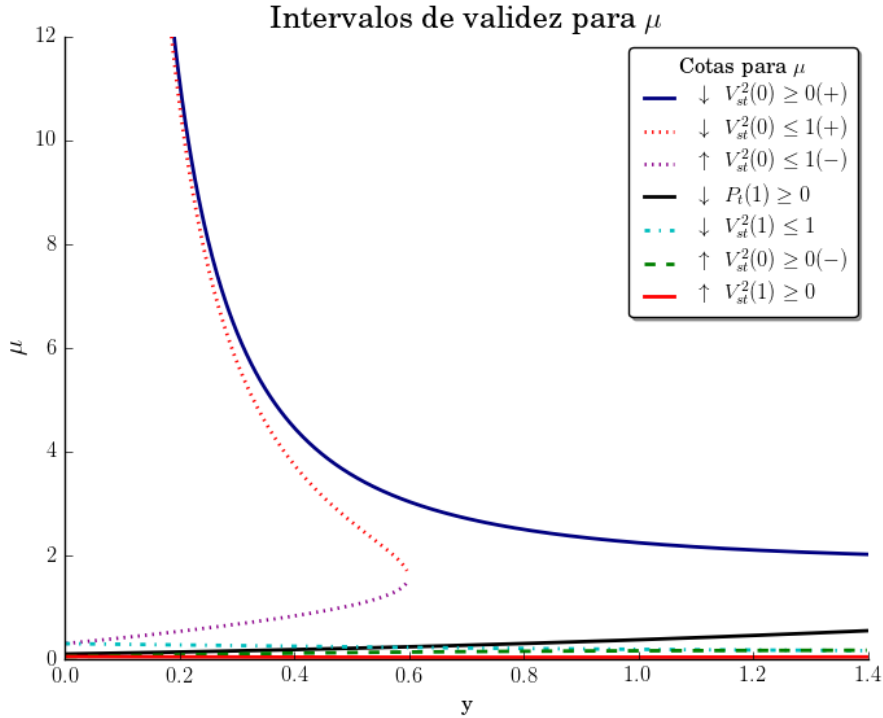


Figura 4.2: Intervalos de validez para  $\mu$  obtenidos a través de las condiciones impuestas a la velocidad del sonido tangencial y presión tangencial tanto en la frontera como en el origen.

Fuente: Elaboración propia.

A partir de lo mostrado en la gráfica anterior 4.2, se observa en primera instancia que las condiciones para las velocidades del sonido tangenciales provenientes de las ecuaciones 4.46 y 4.47 quedan por encima del rango de validez proporcionado por las condiciones subsecuentes como la brindada por la presión tangencial en el origen mayor que cero y la velocidad tangencial en la frontera mayor que 1. Es por ello que, con la finalidad de obtener el intervalo de validez adecuado para la solución, dichos límites superiores deben ser ignorados, tomando en cuenta únicamente el intervalo más pequeño como se muestra en la figura 4.3:

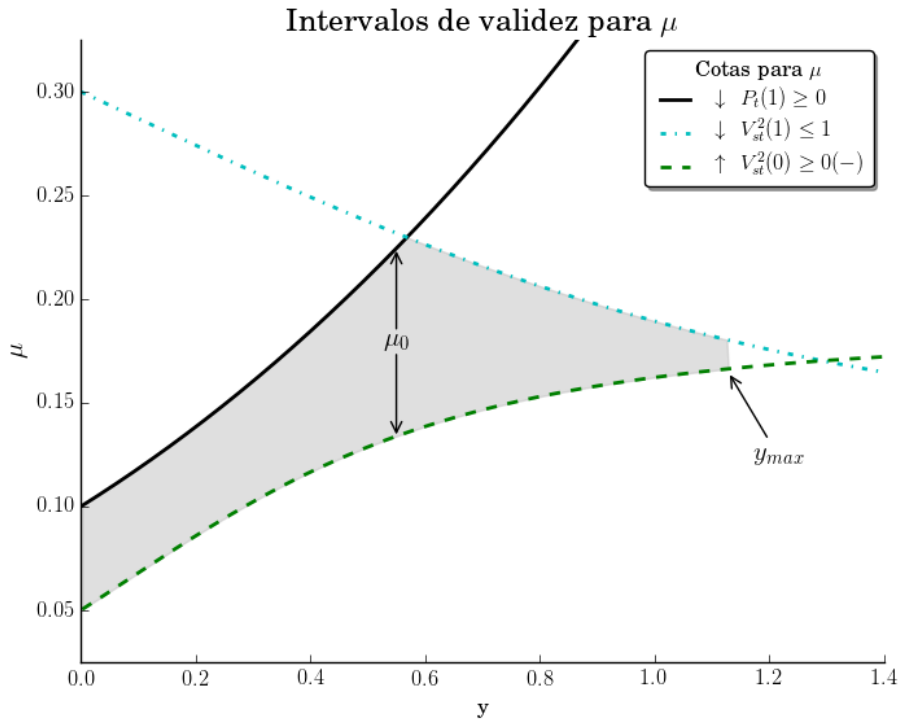


Figura 4.3: Intervalos de validez para  $\mu$  e  $y$  resultantes, tras considerar el intervalo más pequeño que satisface todas las condiciones físicas. El área en gris representa la región con los intervalos de validez para  $\mu$  e  $y$ .

Fuente: Elaboración propia.

De esta gráfica se observa que se generan dos regiones, determinadas por la intersección de la condición  $P_t(1) \geq 0$  y  $v_t^2(1) \leq 1$ , divididas por su intersección en  $y \approx 0.56849675934$ . Así pues, la región válida para  $\mu$  será entre la gráfica para  $v_t^2(0) \geq 0$  y la condición para la presión  $P_t \geq 0$ , esto desde  $y = 0$  hasta  $y \approx 0.56849675934$ , a partir de este punto en  $y \approx 0.56849675934$  la cota superior de  $\mu$  será la condición  $v_t \leq 1$ , este nuevo intervalo  $0 \leq P_t(1) \leq \mu \leq v_t^2(1) \leq 1$  continuará hasta el valor de  $y_{\max} \approx 1.127747777$ , siendo éste  $y$  el máximo posible para obtener un solución físicamente aceptable, en la cual para el interior se tenga una velocidad positiva y que en la frontera sea menor que la velocidad de la luz. Con esto entonces también queda determinado el intervalo para  $y$ , el cual se expresa en la forma  $0 < y \leq 1.127747777$ , para cada  $y_0$  en este intervalo será posible encontrar un intervalo  $\mu_0$  para  $\mu$ .

### 4.5.1. Estrella de neutrones

Ahora, una vez obtenidos los intervalos de validez estamos en condiciones para analizar el comportamiento de la solución, aplicándolo con el fin de reproducir a través de él los valores observados para masa y radio de una estrella de neutrones existente, la RX J1856.5-3754 cuya masa es de  $M_{RX} \approx 1.4M_{\odot}$  y posee un radio de  $R_{RX} \approx 14\text{km}$ . El modelo pues, será de utilidad ya que al reproducir las condiciones observacionales de la estrella mencionada, nos permite hablar del comportamiento interno mediante las ecuaciones hidrostáticas.

Definida la razón de compacidad como

$$u = \frac{GM}{c^2 R} \quad (4.47)$$

a partir del acoplamiento que ocurre en  $r = R$  entre la métrica de Schwarzschild que domina el exterior, y la métrica interior, se obtiene en función de los términos radiales la igualdad:

$$(1 + \beta R^2)^2 = \frac{1}{1 - 2u}, \quad (4.48)$$

y dado que previamente se definió

$$\beta = \frac{y}{R^2}, \quad (4.49)$$

se obtiene

$$(1 + y)^2 = \frac{1}{1 - 2u}, \quad (4.50)$$

la razón de compacidad se expresa así finalmente como

$$u = \frac{y(2 + y)}{2(1 + y)^2}. \quad (4.51)$$

Utilizando la forma para la razón de la compacidad de 4.51, se obtiene la razón apropiada para representar la estrella de neutrones, con  $u = 0.1409077851$  en  $y = 0.18$  para una masa de  $1.4M_{\odot}$ , se obtiene un radio de  $R = 14669.5756\text{m}$ .

Ahora para éste valor en particular de  $y$ , es necesario analizar el comportamiento de la velocidad del sonido tangencial al interior de la estrella. Este análisis es completamente necesario, ya que la velocidad del sonido tangencial no presenta un comportamiento monótono, sino que para ciertos valores de  $y$  y  $\mu$  presenta un mínimo al interior, pudiendo este mínimo ocurrir en un

valor negativo, hecho que contradice las condiciones de validez física. Puesto que las condiciones que se han presentado únicamente garantizan que en el origen y en la frontera la solución sea físicamente aceptable, faltaría pues, garantizar un comportamiento adecuado al interior, esto se realiza evaluando la velocidad del sonido tangencial para diferentes valores de  $\mu$  dentro del intervalo definido por las condiciones en los extremos, así se obtiene un intervalo de  $\mu$  mediante el cual se obtienen valores aceptables para las velocidades tanto en los extremos como al interior. Finalmente se encuentra un intervalo de validez para  $\mu$  en  $0.082328123295 \leq \mu \leq 0.134160840149$  dentro de las condiciones previamente tratadas. Con todos estos datos ahora se puede analizar el comportamiento al interior de la estrella en particular, comenzando con la densidad, la cual sólo depende de  $y$ :

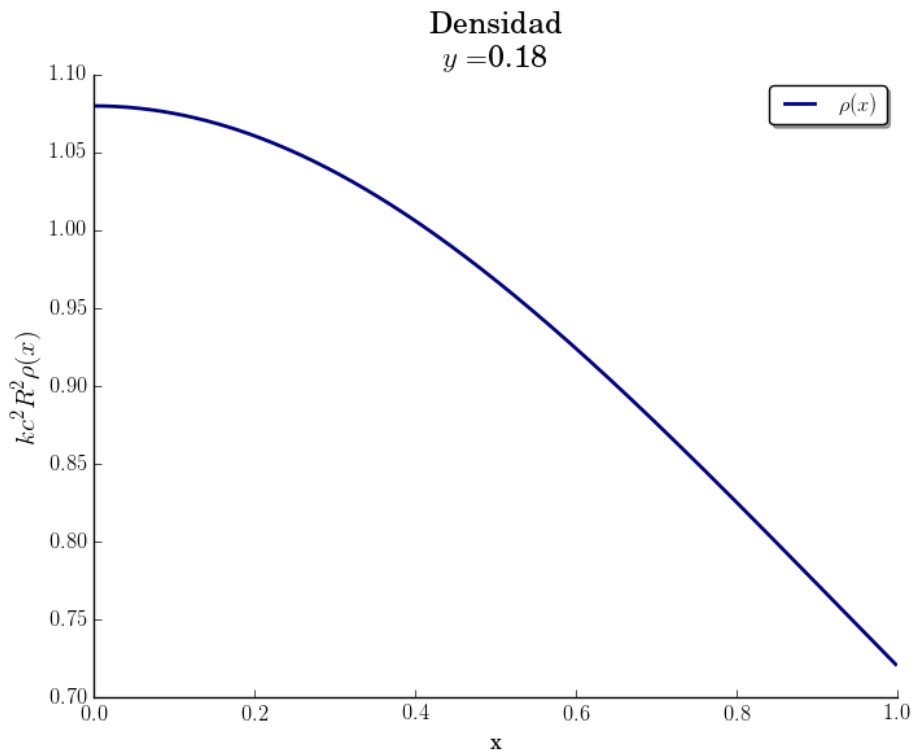


Figura 4.4: Comportamiento de la densidad como función del radio al interior de la estrella.

Fuente: Elaboración propia.

Para la función de densidad, se observa un comportamiento monótono decreciente, de tal manera que su valor en la frontera en este caso no se anula. Al evaluar esta función en el origen se obtiene que la densidad central

tiene un valor de:

$$\rho_c = 2.690177311 \times 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

mientras que en la frontera es de

$$\rho_b = 1.793525766 \times 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

De manera similar se realizan las gráficas para el resto de las variables

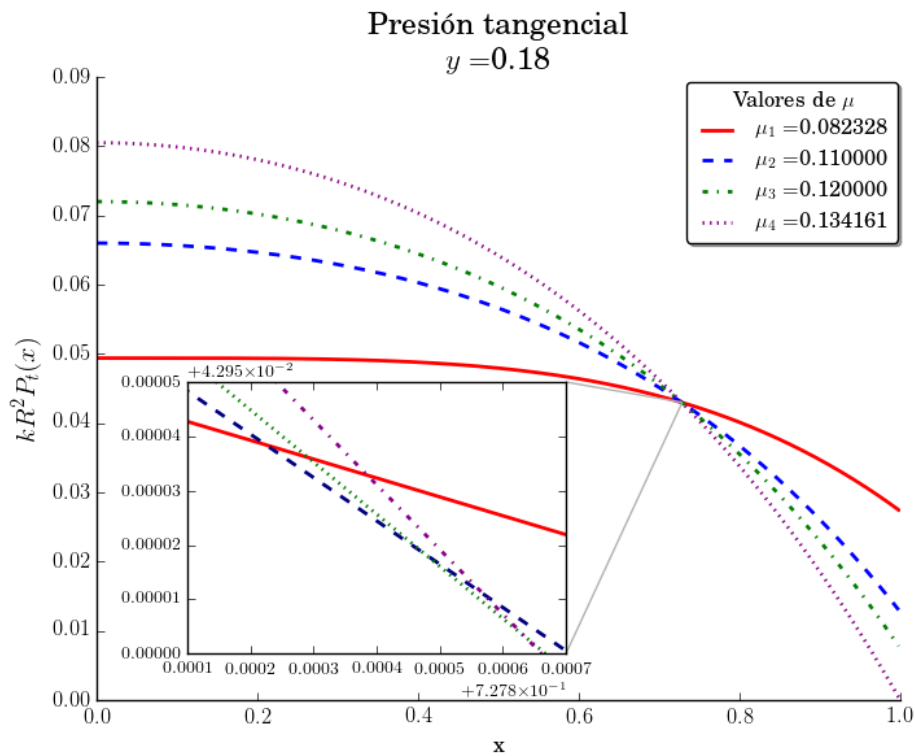


Figura 4.5: Comportamiento de la presión tangencial como función del radio al interior de la estrella.

Fuente: Elaboración propia.

En la figura 4.5 se observa que la presión tangencial tiene un valor positivo en el origen y se mantiene positiva a través del interior, sin anularse en la frontera. Es la presión tangencial la que presenta un comportamiento un tanto más interesante, dado que conforme  $\mu$  crece, el valor de la presión en el origen lo hace de manera similar, sin embargo cuando mayor sea  $\mu$ , menor será el valor de la presión en la frontera correspondiente. En el caso del mínimo valor de  $\mu = 0.082328123295$ , su presión correspondiente (en rojo en



las gráficas) se mantiene cuasi constante al interior, decreciendo en menor medida que sus contrapartes con  $\mu$  mayor, tras la intersección de las mismas en la región alrededor del punto  $x = 0.75$ .

Para el caso de la  $\mu = 0.082328123295$  la cual presenta un comportamiento más estable que sus compañeras, el valor de la presión en la frontera es de:

$$P_{t_b} = 6.109367315 \times 10^{32} \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}.$$

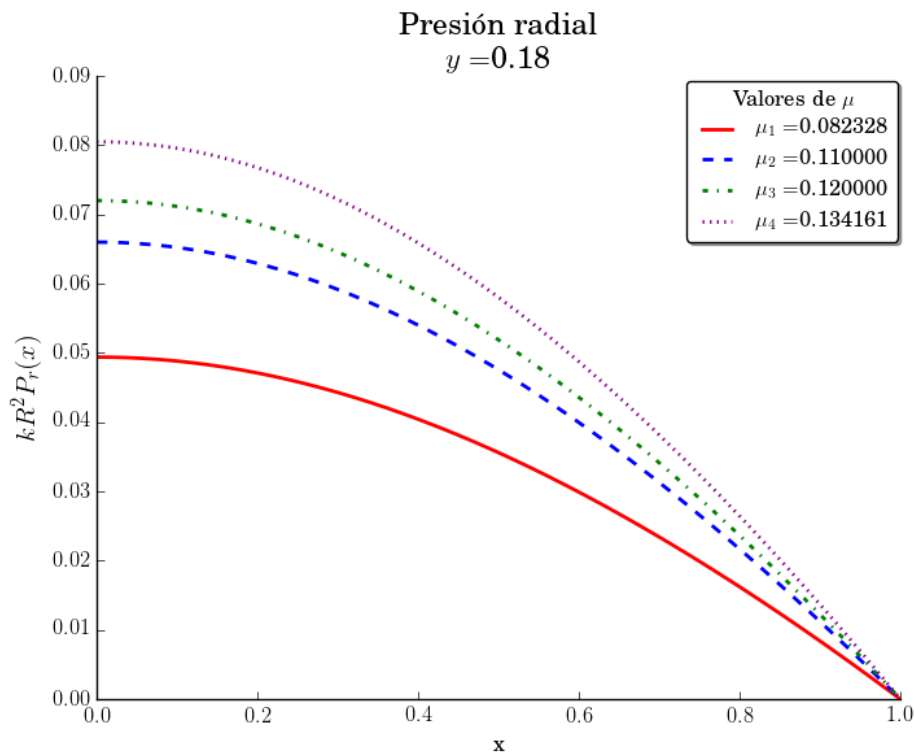


Figura 4.6: Comportamiento de la presión radial como función del radio al interior de la estrella.

Fuente: Elaboración propia.

En el caso de la presión radial se presenta un caso más sencillo, dado que en este caso  $\mu$  es solamente un factor multiplicativo, al ser mayor, mayor será la presión radial tanto en el centro, como durante todo el interior al ser una función monótona decreciente, hasta finalmente anularse para todo  $\mu$  en la frontera. Sin embargo se presenta una peculiaridad, y es que el valor de las funciones, hace que se ordenen de menor a mayor hacia la frontera, contrariamente al caso de la presión tangencial, en el cual el mínimo valor de

$\mu$  evaluado en la presión tangencial, genera el máximo valor de la misma en la frontera. Aquí, el valor para la presión central tomando en cuenta el valor de  $\mu = 0.082328123295$  será:

$$P_{r_c} = 1.105781352 \times 10^{33} \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}.$$

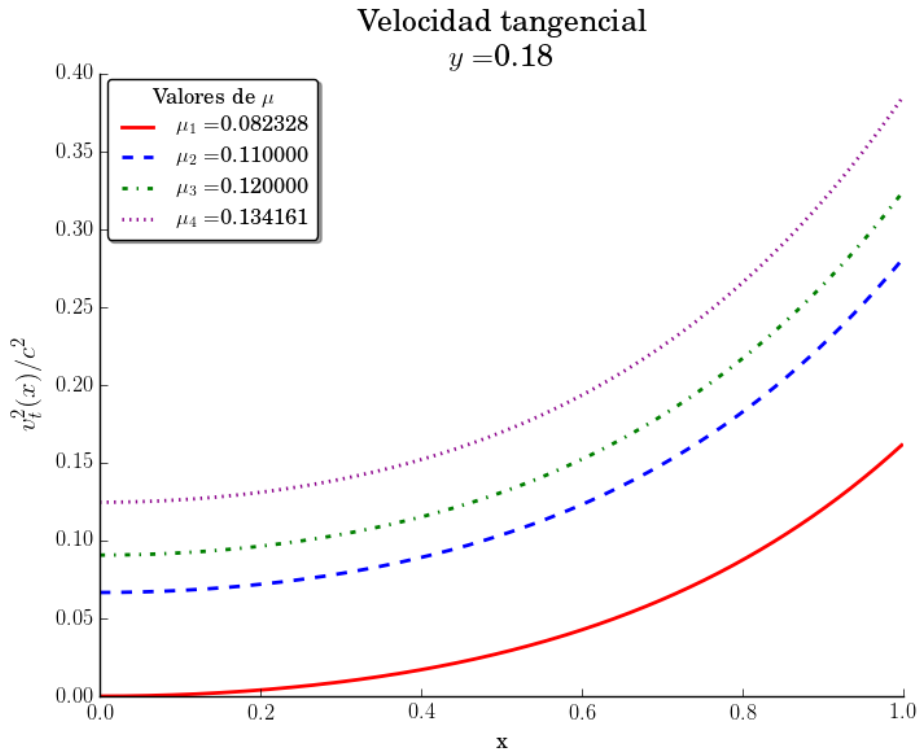


Figura 4.7: Comportamiento de la velocidad tangencial como función del radio al interior de la estrella.

Fuente: Elaboración propia.

Para la velocidad tangencial, el comportamiento en la región de interés<sup>2</sup> es creciente, sin embargo se debe recordar que este no indica que la velocidad tangencial para cualquier valor de  $\mu$  e  $y$  se porte de esta manera, de hecho, para valores mayores de  $y \approx 0.6$  se hace evidente la presencia de un mínimo en la velocidad del sonido tangencial al interior de la estrella, el cual se acerca hacia la frontera cuan mayor sea el valor de  $y$ . Aquí la magnitud de la velocidad depende del valor de  $\mu$  de manera que a mayor valor del

<sup>2</sup>En la cual se obtiene la solución que modela la estrella de neutrones estudiada.

mismo mayores velocidades, en el centro y en la frontera. Los valores para la velocidad tangencial en el centro y frontera son:

$$v_{t_c}^2 = 1.10 \times 10^{-10} c^2.$$

$$v_{t_b}^2 = 0.1622928405 c^2.$$

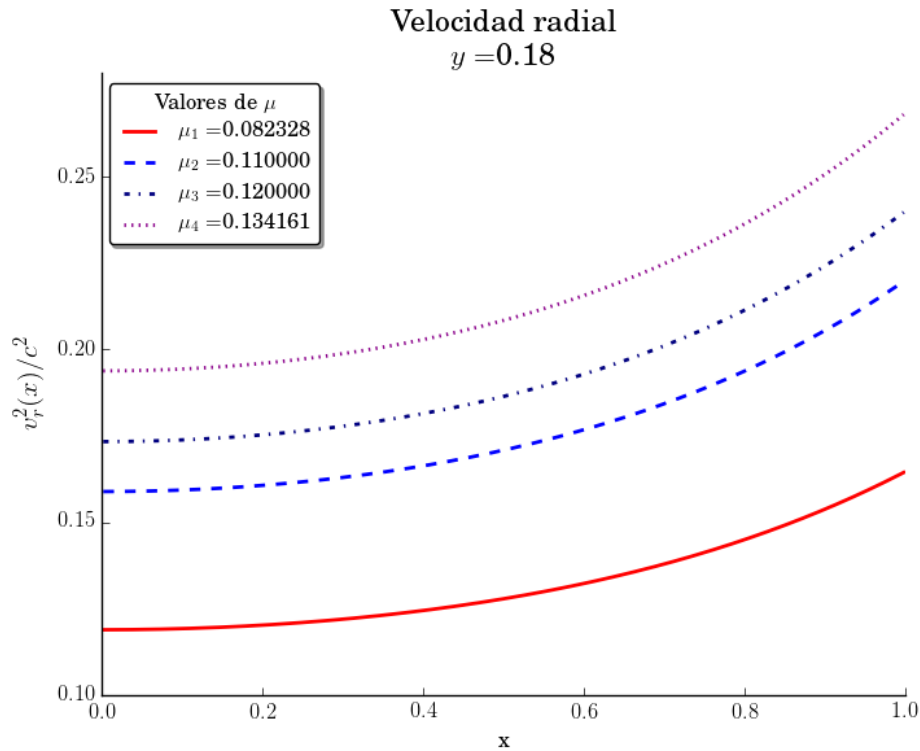


Figura 4.8: Comportamiento de la velocidad radial como función del radio al interior de la estrella.

Fuente: Elaboración propia.

La velocidad radial es monótona creciente, a diferencia de su análoga tangencial, esta no posee mínimos al interior de la estrella. De la misma manera que en la velocidad tangencial, aquí cuan mayor sea  $\mu$  mayor será el valor de la velocidad. Además para valores menores que  $x \approx 0.699537$  la velocidad radial se coloca por encima de su contraparte tangencial para  $\mu$ 's por arriba del  $\mu$  mínimo. Sus valores para el centro y la frontera son:

$$v_{r_c}^2 = 0.1189214291 c^2.$$

$$v_{r_b}^2 = 0.1646562466c^2.$$

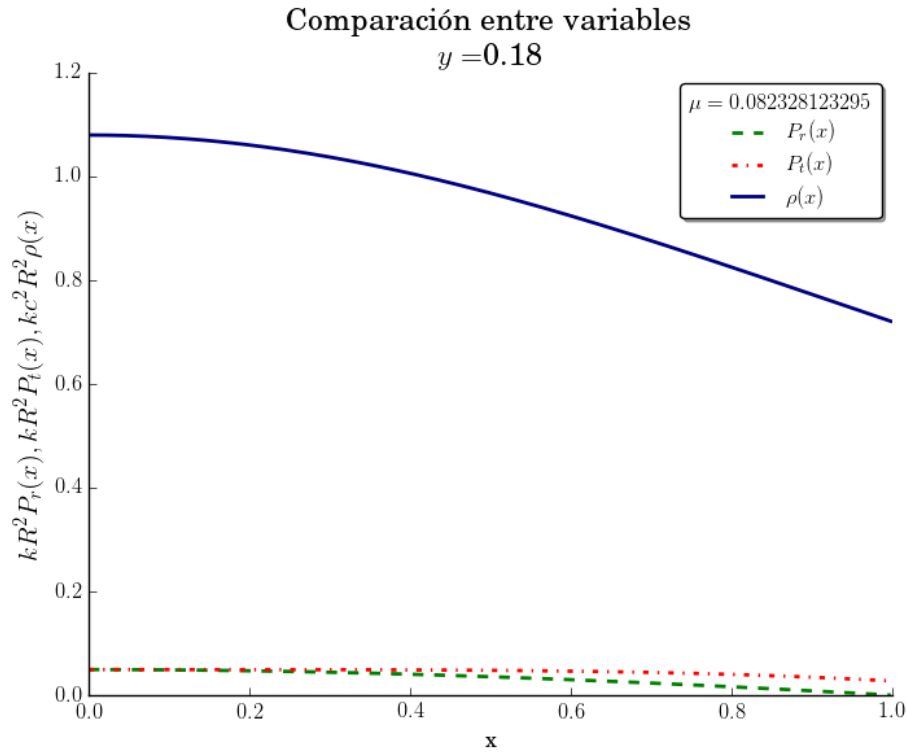


Figura 4.9: Comportamiento de la presión radial, presión tangencial y densidad en el interior de la estrella para el valor de  $\mu = 0.082328123295$ .

Fuente: Elaboración propia.

En la figura 4.9 se muestra una comparación entre las magnitudes de las tres variables principales, se observa que la presión tangencial se mantiene por encima de la radial. Mientras que ambas quedan por debajo a su vez, del valor de la densidad.

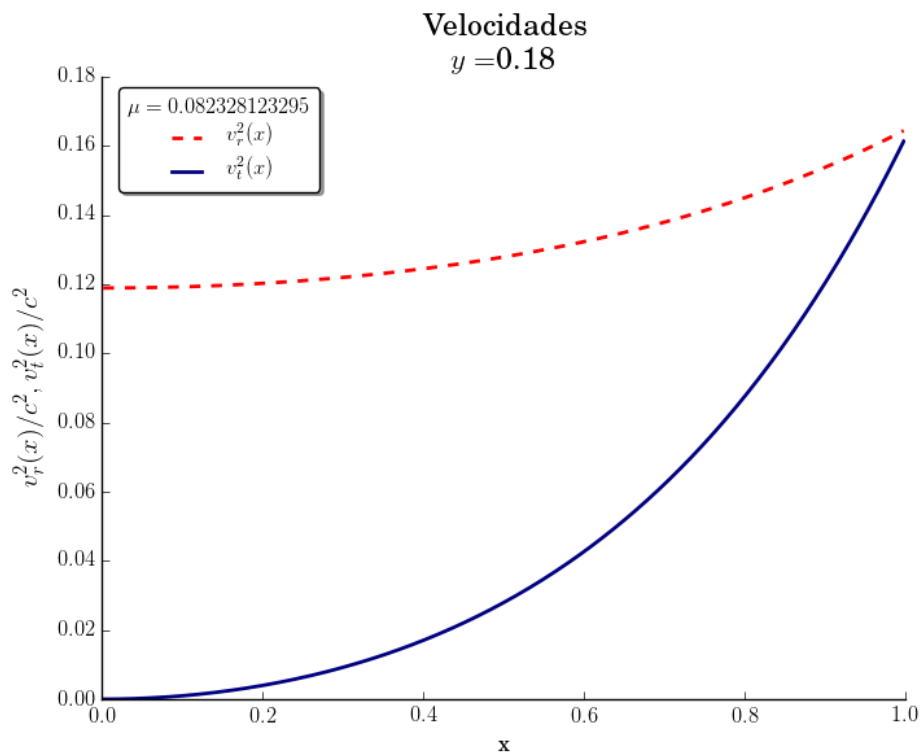


Figura 4.10: Comportamiento de las velocidades radial y tangencial para el valor de  $\mu = 0.082328123295$ .

Fuente: Elaboración propia.

Es la gráfica de la figura 4.10 se observa la comparativa entre las velocidades tangencial y radial desde el origen hacia la frontera, pese a que la presión tangencial crece con mayor rapidez hacia la frontera, mientras que la velocidad radial lo hace de forma más lenta, éstas no alcanzan a tocarse en ningún punto al interior de la estrella.

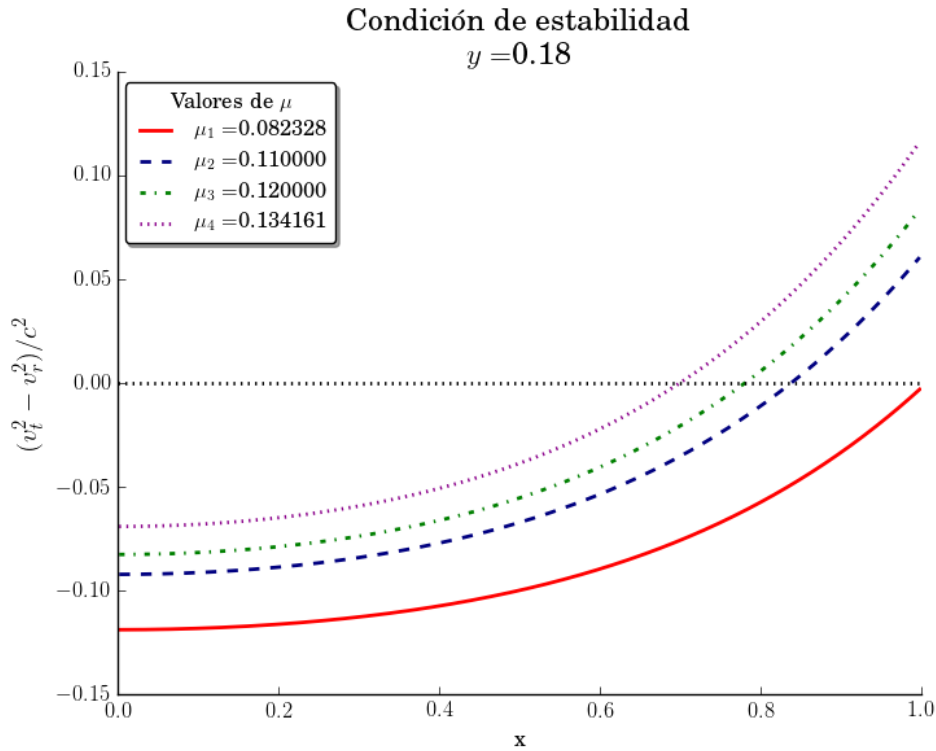


Figura 4.11: Condición de estabilidad para diferentes valores de  $\mu$  dentro del intervalo de validez de la solución.

Fuente: Elaboración propia.

La figura 4.11 representa la estabilidad del sistema, basándose en el criterio de la diferencia de velocidades (Herrera y Santos, 1997), se observa que conforme  $\mu$  crece, se pierde la estabilidad que genera el  $\mu$  mínimo, de esta manera al evaluar la diferencia de velocidades en la frontera, es posible encontrar el intervalo para  $\mu$  que produce estabilidad en todo el interior, éste intervalo es  $0.082328123295 \leq \mu < 0.08335212952$ . Como se vio en la figura 4.10, la velocidad tangencial queda en todo momento por debajo de la radial, garantizando la estabilidad. No así para  $\mu$ 's superiores a  $\mu_{\max} = 0.08335212952$ , para los cuales a partir de  $x \approx 0.699537$  ocurre una transición a la región de inestabilidad. Esto tiene relación con el hecho de que la presión tangencial para esta misma  $\mu_1$  en 4.5 tiene un comportamiento menos variable al interior.

$r/R$	$kc^2R^2\rho$	$kR^2P_r$	$kR^2P_t$	$v_r^2/c^2$	$v_t^2/c^2$
0	1.08	0.0493936029	0.0493936029	0.1189214291	$1 \times 10^{-10}$
0.1	1.075156282	0.0488167826	0.0493912485	0.1192518869	0.0009751179
0.2	1.060818282	0.0470997934	0.0493559986	0.1202567541	0.0039691152
0.3	1.03754906	0.0442817189	0.0492037892	0.12197709	0.009190889
0.4	1.006234746	0.0404234517	0.0487962037	0.1244832633	0.0169985945
0.5	0.9680137499	0.0356019603	0.0479430999	0.1278778844	0.0279150018
0.6	0.9241913986	0.0299034019	0.0464064024	0.1322999599	0.0426495729
0.7	0.8761503708	0.0234159409	0.0439050479	0.1379303082	0.0621274945
0.8	0.8252665457	0.0162230747	0.0401209808	0.1449982649	0.0875253831
0.9	0.7728377287	0.008398086	0.0347060423	0.1537896886	0.1203123094
1	0.7200297986	0	0.0272896322	0.1646562466	0.1622928405

Tabla 4.1: En esta tabla se resumen los valores obtenidos para las variables al interior de la estrella en función del radio.

En la tabla 4.1 se muestran los valores que se obtienen al evaluar las variables adimensionales para intervalos de  $1/10$  del radio desde el centro hasta la frontera. De forma que se observe que su comportamiento concuerda con el descrito por las anteriores gráficas. En especial, para la velocidad tangencial, la cual muestra su comportamiento monótono creciente para los valores de  $y$  y  $\mu$  asignados. Si consideramos la estrella RX J1856.5-3754 con masa  $1.4M_{\odot}$  y radio  $R = 14669.5756$  m, los ordenes de magnitud para las presiones y la densidad son de  $10^{33} Kg/ms^2$  y de  $10^{17} Kg/m^3$  respectivamente.

# Capítulo 5

## Conclusiones

A partir de la solución anisotrópica presentada se logró obtener un conjunto de parámetros dentro de los cuales se obtiene un modelo para representar la estrella de neutrones RX J1856.5-3754. Dado que el modelo satisface las condiciones de aceptabilidad física, tanto en la frontera como al interior, siendo las funciones de presión monótonamente decrecientes, mientras que las velocidades tangencial y radial poseen un comportamiento creciente. Además en este modelo se cumple el criterio de estabilidad (Herrera y Santos, 1997), ya que la velocidad tangencial a lo largo del interior de la estrella permanece por debajo en magnitud que la velocidad radial. Para dicha solución se obtiene un valor para la razón de compacidad de  $u = 0.1409077851$ , a partir del cual el radio obtenido resulta ser de  $R = 14669.5756$  m coincidiendo con el radio observado de la estrella RX J1856.5-3754 que posee una masa de  $1.4M_{\odot}$ . Además la densidad central y presión tangencial son  $\rho_c = 2.690177311 \times 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  y  $P_{t_c} = 1.105781352 \times 10^{33} \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}$  respectivamente, lo cual es consistente con el hecho de que RX J1856.5-3754 corresponde a una estrella de neutrones.



# Bibliografía

*Y así, del mucho leer y del poco dormir,  
se le secó el cerebro de manera que vino  
a perder el juicio.*

Miguel de Cervantes Saavedra

- BHAR, P. Relativistic anisotropic star admitting chaplygin equation of state in tolman vii spacetime. *ResearchGate*, vol. 2017(1), 2017.
- BHAR, P., GOVENDER, M. y SHARMA, R. Modeling anisotropic stars obeying chaplygin equation of state. *Eur. Phys. J.*, vol. 2016(1), 2016.
- BOWERS, R. L. y LIANG, E. Anisotropic spheres in general relativity. *The Astrophysical Journal*, vol. 188(657), 1974.
- CANUTO, V. Neutron stars: General review. *Solvay Conference on Astrophysics and Gravitation*, vol. 1(1), 1973.
- CARROLL, S. *Space Time and Geometry. An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.
- HARTLE, J. B. *Gravity. An Introduction to Einstein's General Relativity*. Pearson Education, 2002.
- HERRERA, L. y SANTOS, N. Local anisotropy in self-gravitating systems. *Physics Reports*, vol. 286(2), 1997.
- HOFFMAN, K. y KUNZE, R. *Linear Algebra*. Prentice-Hall, 1971.
- LEBLANC, F. *An Introduction to Stellar Astrophysics*. WILEY, 2010.

- MEBARKI, N. Anisotropic cosmological models with a generalized chaplygin gas. *Phys.Rev. D*, vol. 82(104055), 2010.
- MISNER, C. W., THORNE, K. S. y WHEELER, J. A. *Gravitation*. W.H. Freeman and Company, 1973.
- RAHAMAN, F., RAY, S., JAFRY, A. K. y CHAKRABORTY, K. Singularity-free solutions for anisotropic charged fluids with chaplygin equation of state. *AIP Conf.Proc.*, vol. 1241(1051), 2010.
- RUDERMAN, M. Pulsars: Structure and dynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 10(427), 1972.
- TRUEMPER, J. E., BURWITZ, V., HABERL, F. y ZAVLIN, V. E. The puzzles of rx j1856.5-3754: neutron star or quark star? *Nuclear Physics B Proceedings Supplements*, vol. 560(132), 2004.
- WALD, R. M. *General Relativity*. The University of Chicago Press Chicago and London, 1984.

*-Valar Dohaeris-*  
*Todos los hombres deben servir.*

