



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO
UNIVERSIDAD MICHUACANA DE SAN NICOLAS DE
HIDALGO
INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMATICAS

TESIS:

Triangulación de Farey y 3-variedades que
Fibran sobre el círculo por toros ponchados

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Leidy Johanna González Cely

Asesor: Doctor en Ciencias Matemáticas Jorge Luis López López.

Morelia, Michoacán - Enero de 2015.

Resumen

Se selecciona una matriz en $SL_2(\mathbb{Z})$ con dos autovalores reales distintos y se construye una 3-variedad que fibra sobre el círculo con toros ponchados. Se considera la triangulación de Farey del plano hiperbólico y la geodésica hiperbólica que une los puntos fijos de la transformación asociada a la matriz dada inicialmente; ésta geodésica intersecta una familia biinfinita de triángulos de Farey que engendran una 3-variedad foliada por toros ponchados y es teselada por tetraedros ideales.

Palabras clave: Triangulación de 3-variedades no compactas, Triangulación de Farey, espacio hiperbólico.

Abstract

A matrix is selected in $SL_2(\mathbb{Z})$ with two distinct real eigenvalues and 3 -variety that fiber over the circle with torus punctured built. Farey triangulation of the hyperbolic plane and the hyperbolic geodesic joining the fixed points of the transformation matrix associated with the given initially considered; this geodesic intersects a bi-infinite family of Farey triangles engender a 3 -variety foliated by torus punctured and is tessellated ideal tetrahedra.

Keywords: triangulation Farey, Triangulation of non compact 3-manifolds, hyperbolic space.

ÍNDICE

Introducción	4
1. Descomposición de automorfismos del toro ponchado	5
1.1. $PSL_2(\mathbb{Z})$ y el Plano Hiperbólico	5
1.2. Triangulación de Farey	5
2. Construcción de una 3-variedad a partir de un elemento de $SL_2(\mathbb{Z})$	14
2.1. Combinatoria del Toro Frontera	16
2.2. Fibración	18
Referencias	25

INTRODUCCIÓN

Triangular una 3-variedad es hacer una descomposición de la misma, de tal forma que ella se vea como el pegado de tetraedros donde cada cara de un tetraedro se identifica de manera única con la cara de otro tetraedro.

Elegida cualquier 3-variedad, contar con una triangulación de la misma puede facilitar el estudio de sus propiedades. Si la variedad seleccionada resulta ser no compacta, se aspira poder encontrar una triangulación por tetraedros ideales (tetraedros sin vértices), sin embargo no es algo que se pueda hacer de manera trivial.

Este trabajo tiene como objetivo estudiar una triangulación de una 3-variedad que fibra sobre el círculo con toros ponchados (toros menos un punto). Esta triangulación fue descubierta por Floyd y Hatcher [1], sin embargo para la elaboración de esta tesina se toma como referencia principal [2].

Considerar las siguientes dos interpretaciones del grupo $SL_2(\mathbb{Z})$ aportará en gran manera a la elaboración de este trabajo. Primero, el hecho de que $SL_2(\mathbb{Z})$ actúe en \mathbb{R}^2 preservando a \mathbb{Z}^2 permite considerar cada uno de sus elementos como difeomorfismo del toro ponchado $(\mathbb{R}^2 - \mathbb{Z}^2)/\mathbb{Z}^2$. Finalmente, $SL_2(\mathbb{Z})$ se interpreta como un grupo que actúa en el plano hiperbólico \mathbb{H}^2 preservando la triangulación de Farey.

Este trabajo consta de dos secciones.

En la primera sección, se considera una matriz en $SL_2(\mathbb{Z})$ con autovalores reales distintos. La intersección de la geodésica hiperbólica que une los puntos fijos de la transformación de Mobius correspondiente y los triángulos de Farey de \mathbb{H}^2 determinan una factorización de la matriz dada como producto de las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Este es el Teorema 1 del trabajo. Creemos que la demostración que se realiza es original. De hecho, no fue posible encontrar una demostración completa de este teorema en ninguna referencia publicada, aunque es un resultado conocido. Esta sección está expresada en un lenguaje hiperbólico, para el cual una referencia estándar puede ser [4].

En la segunda sección, se considera nuevamente un elemento en $SL_2(\mathbb{Z})$ con dos autovalores reales distintos. La descomposición de éste dada por el Teorema 1 define una 3-variedad triangulada por un número finito de tetraedros ideales. Se verificará que esta 3-variedad fibra sobre el círculo con fibra el toro ponchado y que la monodromía de la fibración es la matriz dada inicialmente entendiéndola como un difeomorfismo del toro ponchado.

1. DESCOMPOSICIÓN DE AUTOMORFISMOS DEL TORO PONCHADO

1.1. $PSL_2(\mathbb{Z})$ y el Plano Hiperbólico. De aquí en adelante se considerará el modelo del espacio hiperbólico \mathbb{H}^2 dado por el semi-plano superior.

Se identificará a $PSL_2(\mathbb{R})$ con el grupo de isometrías de \mathbb{H}^2 que preservan la orientación vía el isomorfismo Ψ definido por:

$$\begin{aligned} \Psi : PSL_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^2) \\ A &\longrightarrow \phi_A : z \rightarrow \frac{dz + c}{bz + a}, \end{aligned}$$

donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Normalmente se identifica una matriz en $PSL_2(\mathbb{Z})$ con la transformación $\phi_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$. En este caso, por ser una manera inusual de identificar a $PSL_2(\mathbb{R})$ con el grupo de isometrías de \mathbb{H}^2 se verificará que efectivamente Ψ es un isomorfismo de grupos vía el homomorfismo f de grupos.

$$\begin{aligned} f : PSL_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow PSL_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Efectivamente, se considera A, B en $PSL_2(\mathbb{R})$ con

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix},$$

entonces,

$$f(AB) = \begin{pmatrix} c_1b_2 + d_1d_2 & c_1a_2 + d_1c_2 \\ a_1b_2 + b_1d_2 & a_1a_2 + b_1c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & c_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_2 & c_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = f(A)f(B).$$

El homomorfismo f implica que Ψ es efectivamente un isomorfismo de grupos.

Para $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ con dos autovalores reales distintos, los dos puntos fijos de ϕ_A son los reales:

$$z_1 = \frac{(d - a) + \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2b}, \quad z_2 = \frac{(d - a) - \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2b}.$$

Dado que $\phi'_A(z_1)\phi'_A(z_2) = 1$, se deduce que dicha transformación tiene un punto fijo atractor y otro repulsor.

1.2. Triangulación de Farey. Todo número racional será denotado de manera única por $\frac{p}{q}$ con $(p, q) = 1$ y $q > 0$. Se acuerda designar al cero como $\frac{0}{1}$ y al infinito como $\frac{1}{0}$. Cada vez que se seleccionen dos racionales $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ en la frontera de \mathbb{H}^2 se trazará la geodésica hiperbólica que los une siempre que $|ps - qr| = 1$. Bajo estas indicaciones, se observa que los únicos racionales unidos con infinito son los números enteros.

Las aristas que se definen según esta condición se conocen como aristas de Farey.

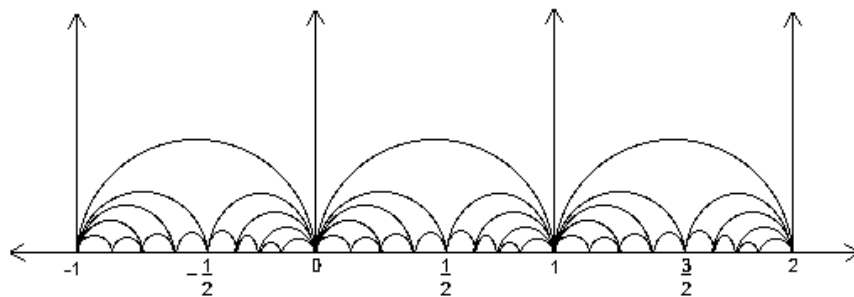


FIGURA 1. Teselación de Farey

Proposición 1. *Las aristas de Farey determinan una triangulación del semi-plano superior.*

Demostración. Para evidenciar este hecho se tendrá en cuenta que la acción de $PSL_2(\mathbb{Z})$ envía la recta real en ella misma y se procederá constatando lo siguiente:

- $PSL_2(\mathbb{Z})$ preserva las aristas de Farey.

Se eligen $\frac{r}{s}, \frac{p}{q}$ dos elementos en la frontera de \mathbb{H}^2 que están unidos por una arista de Farey y $A \in PSL_2(\mathbb{Z})$ donde $\phi_A(z) = \frac{dz + c}{bz + a}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$\phi_A\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{dr + cs}{br + as} \quad \phi_A\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{dp + cq}{bp + aq},$$

y

$$(dr + cs)(bp + aq) - (br + as)(dp + cq) = ps - rq = \pm 1.$$

- Las aristas de Farey no se intersectan.

Se seleccionan r_i, s_i, p_i, q_i enteros tales que $\frac{r_i}{s_i}$ está unido por la arista de Farey γ_i con $\frac{p_i}{q_i}$ para $i = 1, 2$. Se supone que $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$.

Bajo estas consideraciones se generan dos posibles situaciones dependiendo de si algún vértice es o no $\frac{1}{0}$, estas son:

1. La geodésica γ_1 es una recta al infinito si se supone que $s_1 = 1, q_1 = 0$ y γ_2 es un semicírculo que lo intersecta. Bajo estas circunstancias se elige un elemento A en $PSL_2(\mathbb{Z})$ de modo que $\phi_A(r_1) = 0$ y $\phi_A(\infty) = \infty$.

No existen racionales con signos contrarios unidos por una arista de Farey. En efecto, si existieran racionales $\frac{r}{s}, \frac{p}{q}$ unidos por una arista de Farey tal que $s, p, q \in \mathbb{Z}^+$ y $r \in \mathbb{Z}^-$ se generarían dos opciones:

$$rq = 1 + sp \quad \text{ó} \quad rq - sp = -1.$$

El primer caso nunca se da debido a que $rq < 0$ y $1 + sp > 0$, en consecuencia $rq - sp = -1$ de lo cual se obtendría que $rq = 0$, esto no es posible ya que $r < 0$ y $q > 0$.

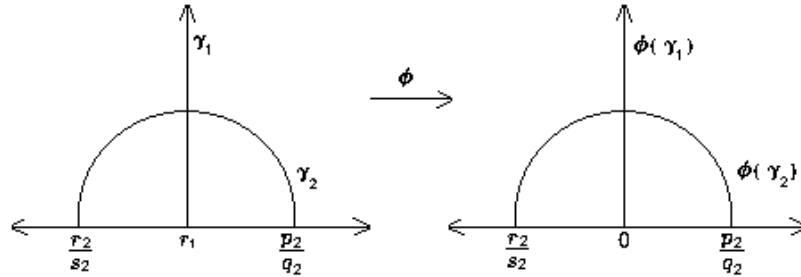


FIGURA 2.

2. Se supone ahora la situación de todos los vértices finitos, es decir, dos semicírculos intersectados. Se considera A un elemento en $PSL_2(\mathbb{Z})$ de tal forma que $\phi_A(z) = \frac{-s_1z + r_1}{q_1z - p_1}$, así $\phi_A\left(\frac{r_1}{s_1}\right) = 0$ y $\phi_A\left(\frac{p_1}{q_1}\right) = \infty$, esto implica que se está en las mismas condiciones que el caso anterior.

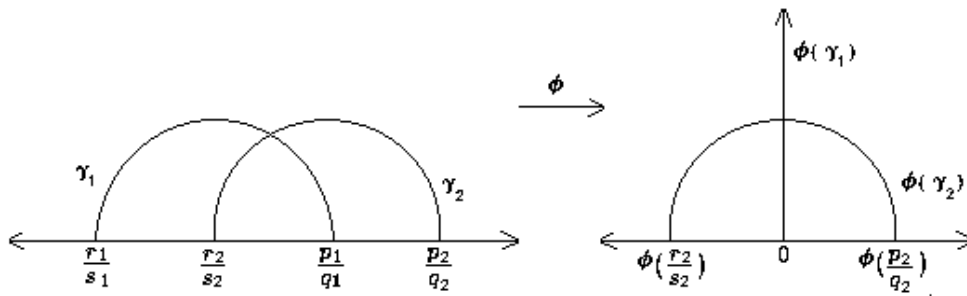


FIGURA 3.

- Todo punto de \mathbb{H}^2 se encuentra en algún triángulo.

El triángulo con vértices en cero, uno e infinito contiene la región fundamental del grupo modular, éste hecho se puede consultar en [3], ello prueba que todo punto de \mathbb{H}^2 está en un triángulo de Farey.

□

Lema 1. Si dos vértices de Farey $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ con $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ se encuentran conectados por una arista de Farey entonces $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ también se encuentran conectados con $\frac{p+r}{q+s}$ y $\frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}$

Demostración. Como $ps - rq = \pm 1$, se tiene de manera inmediata que

$$p(q + s) - q(p + r) = \pm 1 = s(p + r) - r(q + s),$$

por lo tanto $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ se conectan con $\frac{p+r}{q+s}$.

Por otro lado se tiene

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s} &\Leftrightarrow ps < rq \\ &\Leftrightarrow \frac{p}{q} < \frac{r}{s}. \end{aligned}$$

□

Lema 2. Para A un elemento de $SL_2(\mathbb{Z})$ con dos autovalores distintos en \mathbb{R}^* , los puntos fijos de ϕ_A son irracionales.

Demostración. La prueba se hará por contradicción.

Si se supone que $\beta = \sqrt{\alpha^2 - 4}$ es un número entero con $\alpha^2 = (a + d)^2$, entonces

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 4,$$

de donde se deducen los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{cccccc} \alpha - \beta = 2 & \alpha - \beta = -2 & \alpha - \beta = 4 & \alpha - \beta = -4 & \alpha - \beta = 1 & \alpha - \beta = -1 \\ \alpha + \beta = 2 & \alpha + \beta = -2 & \alpha + \beta = 1 & \alpha + \beta = -1 & \alpha + \beta = 4 & \alpha + \beta = -4 \end{array},$$

Los dos primeros sistemas se descartan, pues en caso que se diera cualquiera de ellos se tendría que β es igual a cero y por tanto los números fijos de ϕ_A iguales.

Si sucediera que se satisface el tercer o quinto sistema, al resolverlos se tendría que $\beta = \pm \frac{3}{2}$ respectivamente, lo cual contradice que β es un número entero.

Si por el contrario se asumen el cuarto o sexto sistema se concluye que $\beta = \pm \frac{5}{2}$ respectivamente y nuevamente se infiere la misma contradicción. Por lo tanto β no es un entero.

En general la raíz cuadrada de un número entero que no es entero debe ser irracional. En efecto, si para $n \in \mathbb{Z}$ se supone que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, entonces,

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q} \quad \text{con } (p, q) = 1.$$

Si la descomposición en potencias de primos de n fuera de la forma $n = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_k^{2\alpha_k}$, entonces

$$\sqrt{n} = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k},$$

contradiendo el hecho de que \sqrt{n} no es un entero. Así, se tiene que $n = p_1^{2\alpha_1+1} \dots p_s^{2\alpha_s+1} \lambda_1^2$. Debido a que $n = \frac{p^2}{q^2}$ se deduce que $p^2 = p_1 \dots p_s \lambda_2^2$, que es un absurdo, pues al considerar la descomposición en factores primos de p^2 se obtienen solo potencias pares de primos.

Por lo tanto β es un número irracional y en consecuencia los puntos fijos de ϕ_A también. □

Teorema 1. Para A un elemento de $SL_2(\mathbb{Z})$ con dos autovalores distintos en \mathbb{R}^* , se tiene que la clase de conjugación de A en $SL_2(\mathbb{Z})$ contiene un elemento de la forma

$$BAB^{-1} = \pm \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_2 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_n & 1 \end{pmatrix},$$

donde $n > 0$ y los a_i y b_i son enteros positivos. Además el lado derecho es único hasta permutaciones cíclicas de los factores $\begin{pmatrix} 1 & a_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_i & 1 \end{pmatrix}$.

Demostración. Se probará que la descomposición es cierta al pasar al cociente $PSL_2(\mathbb{Z})$, esto en $SL_2(\mathbb{Z})$ se traduce como el \pm que antecede a la descomposición de la matriz dada luego de conjugar.

Se considera $\phi_A(z) = \frac{dz + b}{bz + a}$ con dos autovalores reales distintos. Sus puntos fijos están dados por:

$$z_1 = \frac{(d-a) + \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2b}, \quad z_2 = \frac{(d-a) - \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2b}.$$

Sea \mathfrak{L} la geodésica hiperbólica que los une orientada del punto fijo repulsor al atractor.

Teniendo en cuenta que los vértices de la triangulación de Farey (denotada por \mathfrak{F}) son racionales y los puntos fijos de ϕ_A son irracionales, \mathfrak{L} define una sucesión bi-infinita de triángulos $(\dots t_{-1}, t_0, t_1, \dots)$ en el orden en el que se van cruzando.

Se puede describir este comportamiento con una palabra bi-infinita

$$\Omega = \dots LRRRLRLL \dots$$

donde la k -ésima letra es R (o L) si \mathfrak{L} sale de t_k a la derecha (o izquierda) de donde entró. Se designa con t_0 a cualquier triángulo fijo que sea abandonado por la derecha.

La palabra Ω contiene al menos una R y una L , pues los puntos extremos de \mathfrak{L} son distintos. Si se diera el caso que todas las letras fuesen R o L se tendría que \mathfrak{L} es una curva cerrada (lo que se conoce como oriciclo), hecho que contradice que \mathfrak{L} es una geodésica hiperbólica. Ésta situación se evidencia de manera clara si se considera el triángulo con vértices en $0, 1$ e ∞ ; al caminar bi-infinitamente hacia la derecha (izquierda) se obtiene una curva cerrada. El hecho de poder enviar cualquier triángulo de Farey al antes mencionado bajo la conjugación de un elemento de $SL_2(\mathbb{Z})$, implica que basta con saber que sucede en él para saber que sucede en general. Por tanto, siempre se puede, salvo conjugación, denotar al triángulo con vértices en $0, 1$ e ∞ como t_0 .

La imagen de t_0 bajo ϕ_A es un determinado t_m ($m \geq 1$, pues la geodésica está orientada hacia el punto atractor) y Ω es periódica de período m , pues la palabra queda totalmente determinada por los puntos fijos de ϕ_A y al ser \mathfrak{L} un conjunto invariante bajo la acción de ϕ_A se infiere que la palabra es invariante bajo su acción.

Ahora, se definen las siguientes matrices R y L mediante

$$R := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad L := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

las cuales son transformaciones parabólicas de \mathbb{H}^2 con puntos fijos 0 e ∞ respectivamente (el abuso de notación respecto a las letras de la palabra Ω y las matrices ahora definidas es totalmente voluntario). Se observa que para cualquier subpalabra M de Ω de longitud m es el producto de matrices L y R , por tanto se ve como un elemento de $SL_2(\mathbb{Z})$.

De aquí en adelante se denotará por $\Delta(x, y, z)$ al triángulo con vértices en x, y, z .

Se procederá a comprobar que caminar desde t_0 según la palabra $\Omega = R^{a_1}L^{b_1}..R^{a_n}L^{b_n}$ ó aplicar la transformación dada por el producto

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_2 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_n & 1 \end{pmatrix},$$

a t_0 es exactamente lo mismo, es decir, se llega al mismo triángulo.

Para verificar esto se tienen en cuenta las siguientes observaciones.

Observación 1. *Al elegir el triángulo de Farey $\Delta(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_1+r_1}{q_1+s_1}, \frac{r_1}{s_1})$ y realizar a_1 movimientos a la derecha seguidos de b_1 movimientos a la izquierda se obtiene al triángulo*

$$\Delta\left(\frac{p_1 + b_1(r_1 + a_1p_1)}{q_1 + b_1(s_1 + a_1q_1)}, \frac{p_1 + b_1(r_1 + a_1p_1) + r_1 + a_1p_1}{q_1 + b_1(s_1 + a_1q_1) + s_1 + a_1q_1}, \frac{r_1 + a_1p_1}{s_1 + a_1q_1}\right).$$

Ver figura 4.

Ahora, teniendo en cuenta los vértices de los extremos del triángulo $\Delta(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_1+r_1}{q_1+s_1}, \frac{r_1}{s_1})$ se construye la matriz

$$A = \begin{pmatrix} q_1 & s_1 \\ p_1 & r_1 \end{pmatrix}.$$

Se observa que al realizar el producto

$$\begin{pmatrix} q_1 & s_1 \\ p_1 & r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 + b_1(s_1 + a_1q_1) & s_1 + a_1q_1 \\ p_1 + b_1(r_1 + a_1p_1) & r_1 + a_1p_1 \end{pmatrix},$$

de las columnas de la matriz resultante se pueden deducir los vértices de los extremos del triángulo

$$\Delta\left(\frac{p_1 + b_1(r_1 + a_1p_1)}{q_1 + b_1(s_1 + a_1q_1)}, \frac{p_1 + b_1(r_1 + a_1p_1) + r_1 + a_1p_1}{q_1 + b_1(s_1 + a_1q_1) + s_1 + a_1q_1}, \frac{r_1 + a_1p_1}{s_1 + a_1q_1}\right),$$

de la misma manera como a partir del triángulo inicial se construye A .

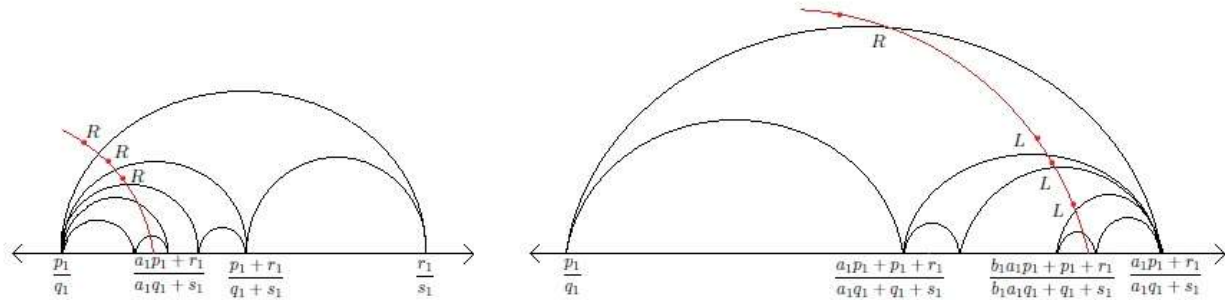


FIGURA 4. Partiendo del triángulo $\Delta\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_1+r_1}{q_1+s_1}, \frac{r_1}{s_1}\right)$ se realizan a_1 movimientos a la derecha seguidos de b_1 movimientos a la izquierda. Aplicando el primer lema de manera iterada $a_1 + b_1$ se obtiene el triángulo $\Delta\left(\frac{p_1+b_1(r_1+a_1p_1)}{q_1+b_1(s_1+a_1q_1)}, \frac{p_1+b_1(r_1+a_1p_1)+r_1+a_1p_1}{q_1+b_1(s_1+a_1q_1)+s_1+a_1q_1}, \frac{r_1+a_1p_1}{s_1+a_1q_1}\right)$.

Observación 2. En particular, si se considera el triángulo $\Delta(0, 1, \infty)$ la matriz dada por los vértices de los extremos es la identidad.

Al elegir vértices de Farey $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ tal que $0 < \frac{p}{q} < \frac{r}{s} < 1$ siempre es posible determinar un camino de tal forma que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & s \\ p & r \end{pmatrix}.$$

Se denota por $\Omega = R^{a_1} L^{b_1} \dots R^{a_n} L^{b_n}$ la palabra que describe estos movimientos.

Observación 3. Seleccionada una matriz en $SL_2(\mathbb{Z})$ se determinan los puntos fijos de la transformación asociada y la geodésica hiperbólica orientada que va del punto fijo repulsor x_2 al punto fijo atractor x_1 .

Si t_0 no es intersectado por esta geodésica o es intersectado pero sale por la parte izquierda de la arista por donde entra se conjuga la matriz inicial por una matriz cuya transformación de Möbius asociada envía x_1 en un número x'_1 tal que $0 < x'_1 < 1$ y x_2 en un número negativo.

De esta manera se obtiene una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} q & s \\ p & r \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}),$$

tal que al considerar los racionales $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ se tenga $0 < \frac{p}{q} < \frac{r}{s} < 1$ con $qr - sp = 1$ y de esta manera determinar la descomposición de la Observación 2.

En conclusión, dada una matriz en $SL_2(\mathbb{Z})$, se observa su imagen mediante el isomorfismo Ψ y se encuentra una descomposición de dicha transformación relacionada directamente con la palabra por ella definida. Como Ψ es un isomorfismo de grupos, esta descomposición se traduce en una descomposición de la matriz inicial salvo conjugación, puesto que, dado cualquier triángulo de Farey se conjuga para trabajar desde t_0 (la matriz que se obtiene es precisamente una matriz que satisface las propiedades descritas en la última observación),

además la palabra determinada por cada transformación es única. Esto prueba la existencia y unicidad de los enteros a_i y b_i . □

Ejemplo 1.

Se observa que la matriz

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

satisface que todas sus entradas son positivas y los vértices de Farey determinados por sus columnas se encuentran entre 0 y 1. Esto indica que se puede considerar $t_0 = \Delta(0, 1, \infty)$ y estimar los movimientos necesarios para cruzar la arista de Farey con vértices $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{7}$. Ver figura 5.

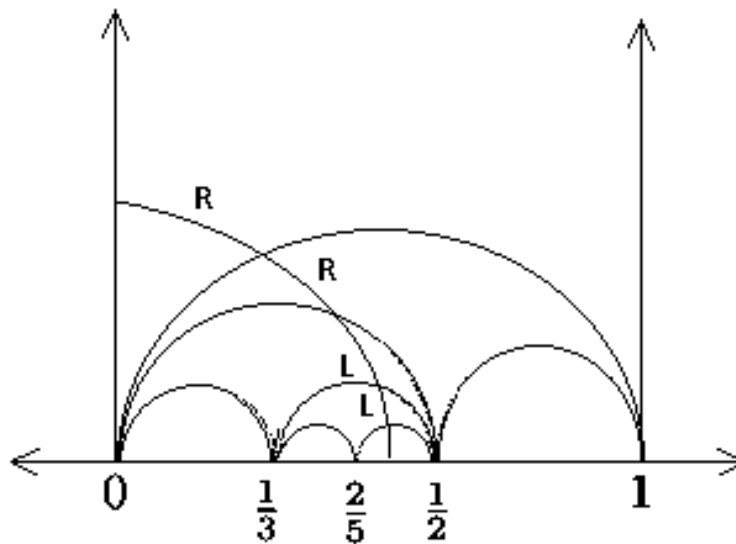


FIGURA 5. Partiendo del triángulo t_0 debo realizar dos movimientos a la derecha seguido de dos movimientos a la izquierda y finalmente uno a la derecha para intersectar al triángulo de Farey cuyos vértices extremos son $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{7}$.

Entonces, la descomposición descrita en la segunda observación es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.

Para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix},$$

el isomorfismo Ψ define la transformación $\phi_A(z) = \frac{3z-7}{4z-9}$. Sus puntos fijos están dados por:

$$z_1 = \frac{3 - \sqrt{2}}{2} \quad z_2 = \frac{3 + \sqrt{2}}{2},$$

donde z_1 resulta ser el punto fijo atractor y z_2 el repulsor.

De todos los triángulos de Farey intersectados por la geodésica que une z_1 con z_2 se elige cualquiera que cumpla que la geodésica lo abandona por la derecha de donde lo intersecta, en este caso, se considera el triángulo $\Delta(\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1)$.

Se requiere encontrar una transformación ϕ en $SL_2(\mathbb{Z})$ que envíe $\Delta(\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1)$ a t_0 . Si se supone que

$$\begin{aligned} 3/4 &\longrightarrow 0 \\ 4/5 &\longrightarrow 1, \\ 1 &\longrightarrow \infty \end{aligned}$$

entonces $\phi(z) = \frac{4z-3}{-z+1}$ y su matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Se procede ahora a realizar la conjugación

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

De esta manera, se está bajo las condiciones que se necesitan para encontrar la trayectoria que desde t_0 intersecta a la arista de Farey con vértices $\frac{4}{5}$ y 1;

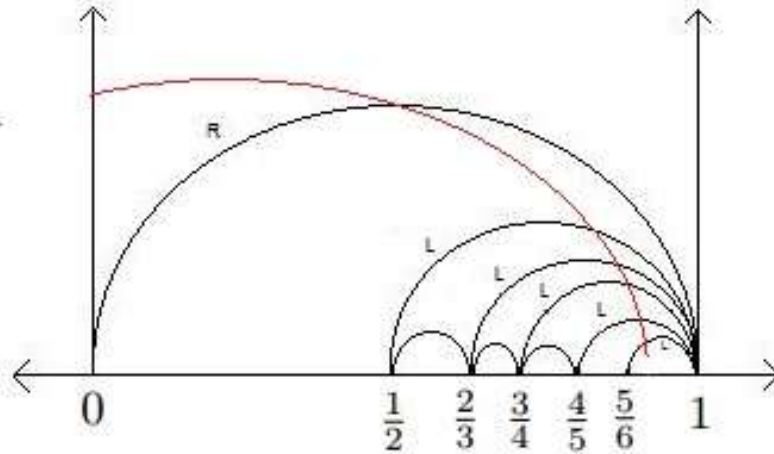


FIGURA 6. Iniciando de t_0 se realiza un movimiento a la derecha y cuatro a la izquierda para intersectar a la arista de Farey cuyos vértices son $\frac{4}{5}$ y 1.

por lo tanto

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente se logra la siguiente expresión.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. CONSTRUCCIÓN DE UNA 3-VARIEDAD A PARTIR DE UN ELEMENTO DE $SL_2(\mathbb{Z})$

Primero, se selecciona una matriz $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ de tal forma que ϕ_A tiene dos autovalores distintos en \mathbb{R}^* . ϕ_A define los triángulos $\dots t_0, t_1, \dots$ que son interceptados por la geodésica \mathfrak{L} que une los dos puntos fijos.

Ahora, se considera $T := (\mathbb{R}^2 - \mathbb{Z}^2)/\mathbb{Z}^2$ el toro ponchado y por cada vértice de Farey $\frac{p}{q}$ se traza la recta en $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Z}^2$ que tiene esa pendiente. En el cociente, dicha recta describe una curva con pendiente $\frac{p}{q}$.

Lema 3. *Los vértices de cada triángulo de Farey definen tres rectas en $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Z}^2$ con esas pendientes. Al pasar al cociente se obtienen tres curvas en T correspondientes a una triangulación ideal.*

Demostración. Sea $\Delta(\frac{p}{q}, \frac{p+r}{q+s}, \frac{r}{s})$ un triángulo de Farey. Al considerar las rectas

$$\begin{aligned} y &= \frac{p}{q}x \\ y &= \frac{r}{s}x \\ y &= \frac{p+r}{q+s}x \end{aligned}$$

en $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Z}^2$ se requiere verificar que las tres curvas en el cociente T no se intersectan, es decir, no existe solución no entera común para las tres rectas en $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Z}^2$.

Si (x_0, y_0) solución de

$$y = \frac{p}{q}x,$$

entonces, $y_0 = \frac{p}{q}x_0$. Supongamos que existen enteros m y n tal que $(x_0 + m, y_0 + n)$ es solución de

$$y = \frac{r}{s}x,$$

entonces

$$\begin{aligned} y_0 + n &= \frac{r}{s}(x_0 + m) \\ \frac{p}{q}x_0 + n &= \frac{r}{s}(x_0 + m) \\ spx_0 + qsn &= qrx_0 + qrm \\ (ps - rq)x_0 &= q(rm - sn) \\ \pm x_0 &= q(rm - sn), \end{aligned}$$

lo que implica que $x_0 \in \mathbb{Z}$. Como $y_0 = \frac{p}{q}x_0$ se tiene que $y_0 = p(rm - sn) \in \mathbb{Z}$, es decir, la solución es entera.

De manera análoga se obtiene de las otras dos posibles combinaciones que la solución siempre es entera. Por lo tanto, estas tres curvas en el cociente determinan una triangulación ideal. \square

Cualquiera de estas triangulaciones determinadas por un triángulo de Farey tiene un vértice (la ponchadura), tres aristas (cada arista corresponde a cada uno de los vértices de Farey del triángulo de Farey señalado) y dos triángulos.

Cuando se cruza de un triángulo de \mathfrak{F} a otro, exactamente un vértice es reemplazado (ver parte izquierda de la figura 7). Estos dos triángulos de Farey adyacentes determinan dos triangulaciones de T . Estas triangulaciones están relacionadas de la siguiente manera: la triangulación inicial (la correspondiente al triángulo de Farey de donde se parte) es sometida a un intercambio de diagonal, es decir, se borra una arista e de tal forma que se obtiene un cuadrilátero, de donde e era una diagonal, entonces se inserta su otra diagonal. (ver la figura 7)

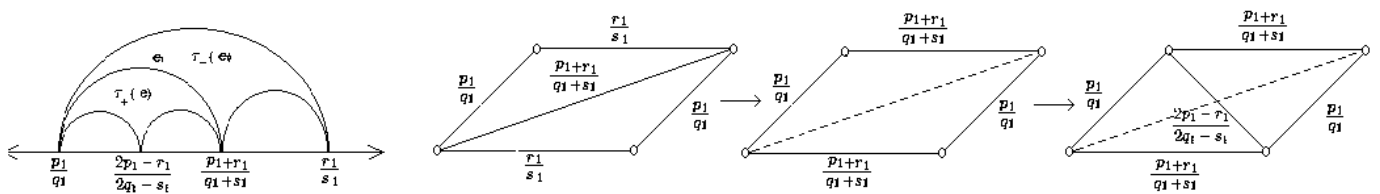


FIGURA 7. En la primera figura de izquierda a derecha se observa el triángulo de Farey $\Delta\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_1+r_1}{q_1+s_1}, \frac{r_1}{s_1}\right)$, los vértices de este determinan una triangulación en T descrita en la siguiente figura. Al cruzar de este triángulo de Farey a otro, este nuevo define una nueva triangulación de T que se obtiene de la inicial borrando la diagonal e e intersectando su otra diagonal.

Dada una arista e se define la triangulación superior (o inferior) τ_+e (τ_-e) del toro ponchado T como la asociada con el triángulo de Farey cruzado justo después (o antes) de la arista e . Un intercambio diagonal separa la triangulación τ_+e y τ_-e . El automorfismo de T definido por A envía la triangulación de T dada por t_0 en la triangulación dada por t_m (donde m es el período de la palabra). Por otro lado del teorema 1 se observa que la triangulación dada por t_m se puede obtener a partir de la dada por t_0 a través de cambios de diagonales.

Se origina un tetraedro $\Delta(e)$ por cada arista e de la triangulación de Farey de la siguiente manera: las aristas de $\Delta(e)$ tienen asociadas las pendientes de los vértices de Farey que la componen. Al identificar las aristas de la misma pendiente la frontera de $\Delta(e)$ se puede ver como dos toros ponchados (superior e inferior) triangulados según $\tau_+(e)$ y $\tau_-(e)$ respectivamente (ver figura 8). Existen dos aristas especiales opuestas de $\Delta(e)$ que corresponden a las pendientes de los vértices reemplazados.

Si m es el período de ϕ_A , dicho período engendra m tetraedros, uno por cada arista que cruza \mathcal{L} en la triangulación de Farey. Las caras de estos tetraedros se identifican si todas las pendientes asociadas a sus aristas coinciden, entonces $\Delta_i := \Delta(e_i)$ y Δ_{i+1} tiene exactamente dos caras identificadas correspondiente a un toro plegado. El hecho de que Ω (palabra definida por el período de ϕ_A) es periódica implica que un toro plegado de Δ_1 se identifica con un

toro plegado de Δ_m .

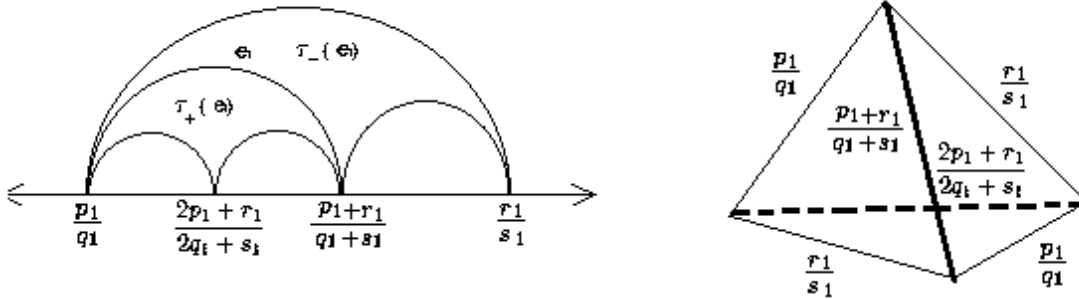


FIGURA 8. El tetraedro $\Delta(e)$ esta determinado por dos triángulos de Farey adyacentes por la arista e . Cada arista de $\Delta(e)$ tiene la etiqueta de uno de los vértices de los triángulos de Farey y existen dos aristas especiales correspondientes a los vértices reemplazados.

Este pegado de m tetraedros genera una 3-variedad que denotaremos como V_A .

2.1. Combinatoria del Toro Frontera. Se evidenciará a continuación que la frontera de una vecindad de los vértices de los tetraedros Δ_i identificados forman un toro topológico bidimensional (ver figura 9).

Si en lugar de considerar los toros ponchados plegados como antes, se considera quitar una vecindad de la ponchadura se tiene que pensar en tetraedros truncados. Cada tetraedro Δ_i truncado tiene cuatro vértices, contribuyentes exactamente con cuatro triángulos a una superficie triangulada \mathfrak{A} . Los vértices de \mathfrak{A} corresponden a aristas de Δ_i y como cada tetraedro Δ_i tiene dos aristas especiales (las que corresponden al cambio de diagonal), cada uno de los cuatro triángulos aportados por Δ_i tiene un vértice especial. A este vértice se llama *cúspide* y a la arista opuesta *base*. Las cuatro bases forman un círculo poligonal de cuatro segmentos alrededor de la ponchadura y de las cuatro cúspides dos pertenecen al toro plegado inferior y las otras dos al toro plegado superior. Ver figura 9.

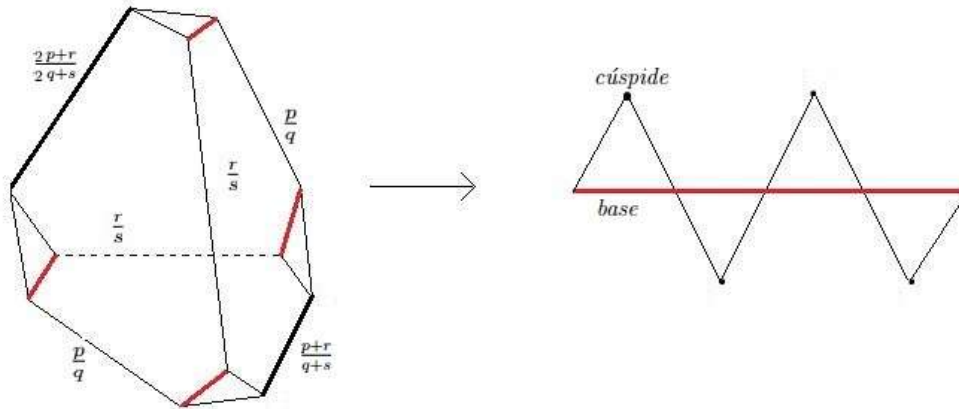


FIGURA 9. Truncar cada tetraedro aporta cuatro triángulos enlazados con una línea que en T se ve como una curva cerrada alrededor de la ponchadra.

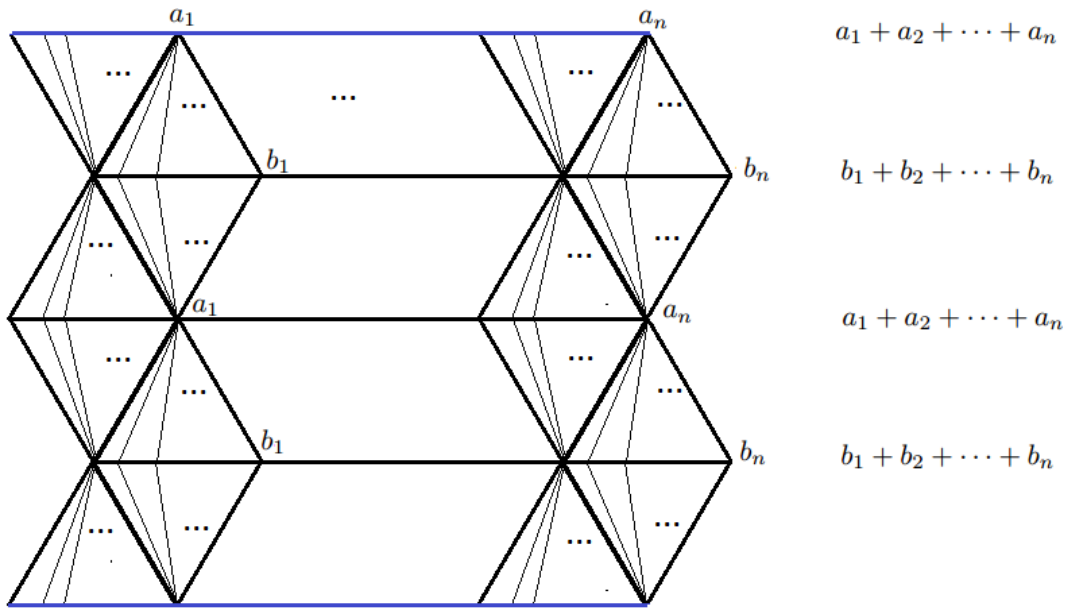
Al pegar el tetraedro Δ_i con el Δ_{i+1} según como indican las pendientes de sus aristas, la cadena de cuatro triángulos proporcionada por Δ_i se pega a la cadena correspondiente de Δ_{i+1} .

Si $\Omega = R^{a_1} L^{b_1} \dots R^{a_n} L^{b_n}$ es la palabra que describe el período de ϕ_A , el pegado de $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$ tetraedros genera las $4 \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$ caras de \mathfrak{A} . Doce aristas son contribuidas por cada cadena de triángulos, pero están identificadas por pares, por lo tanto \mathfrak{A} tiene exactamente $6 \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$ aristas.

Cada vértice de \mathfrak{A} corresponde a una arista de Farey de algún Δ_i compartida por unos pocos tetraedros consecutivos. Esta arista a su vez corresponde a un vértice de Farey compartido por unos pocos triángulos de Farey consecutivos. La unión de todos los triángulos de Farey adyacentes al vértice dado v forman un *abanico*. Por ejemplo, en la figura 4 se observan dos abanicos; uno correspondiente a letras R y otro de letras L .

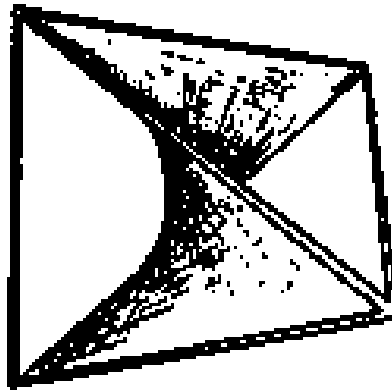
Los vértices de \mathfrak{A} corresponden exactamente a subpalabras de Ω de la forma RL^bR o LR^aL (donde $a, b \geq 1$). Cada una de tales subpalabras corresponden en realidad a dos vértices de \mathfrak{A} debido a que las aristas de Δ_i tienen dos extremos.

De esta manera, la palabra $\Omega = R^{a_1} L^{b_1} \dots R^{a_n} L^{b_n}$ define una banda que describe todos los abanicos de Ω . Al realizar una rotación por π alrededor de cada vértice se obtiene el teselado \mathfrak{A} (ver figura 10).

FIGURA 10. Teselación \mathfrak{A}

De la figura 10 se infiere que hay exactamente $2 \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$ vértices ya que las líneas azules se identifican. Al calcular la característica de Euler de \mathfrak{A} se concluye que es un toro topológico.

2.2. Fibración. El interior de cada tetraedro Δ_i está foliado por toros que se obtienen realizando una homotopía de $\tau_+(e)$ a $\tau_-(e)$.

FIGURA 11. homotopía de $\tau_+(e)$ a $\tau_-(e)$.

Dicha foliación define una familia de curvas en los cuatro triángulos que este aporta a \mathfrak{A} . En cada cadena la familia de curvas se ven como en figura 12).

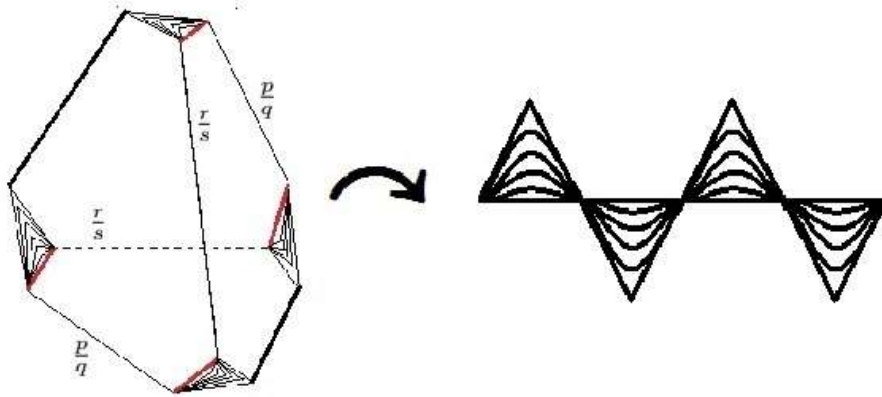


FIGURA 12. Familia de curvas en triángulos de \mathfrak{A} determinadas por la foliación en el tetraedro.

Dado que los vértices de \mathfrak{A} corresponden exactamente a subpalabras de Ω de la forma RL^bR o LR^aL (donde $a, b \geq 0$) implica que en cada vértice de \mathfrak{A} se tiene exactamente dos cúspides, correspondientes a la letra R (o L) en el caso de la subpalabra RL^bR (o LR^aL) ver figura 10. Esto permite arreglar la foliación singular a través de una rectificación en una vecindad de cada vértice. Obteniéndose así una foliación no singular que permite concluir que el pegado de estos tetraedros definen una 3-variedad foliada por toros punchados que fibran sobre el círculo, pues la función de monodromía A pega el toro punchado plegado inferior de t_0 con el toro punchado plegado superior de t_m .

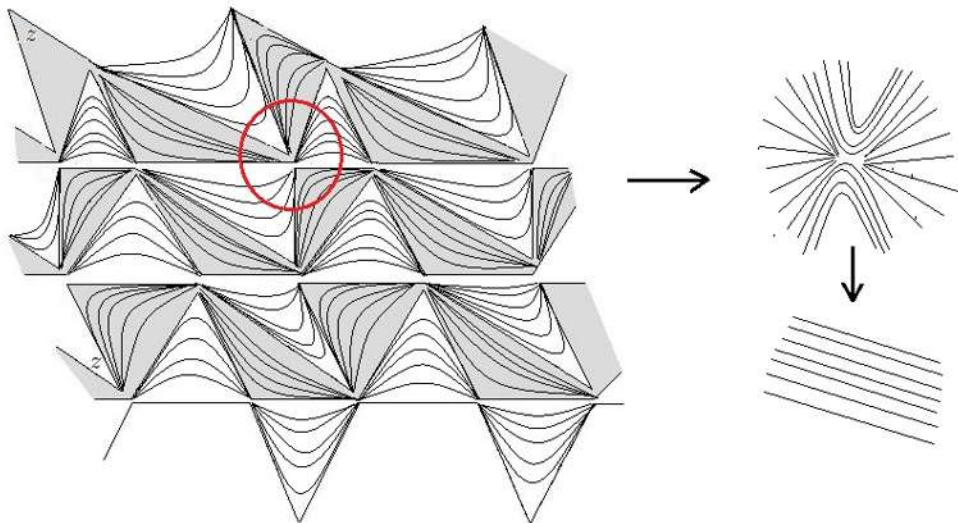


FIGURA 13. Foliación en los triángulos de \mathfrak{A} definida por la palabra RL . Es claro en este ejemplo la singularidad que existe a primera vista en cada vértice de \mathfrak{A} , sin embargo también es evidente que se puede rectificar y eliminar la singularidad observada.

Ejemplo 3.

Para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

matriz en $SL_2(\mathbb{R})$ se considera su imagen mediante Ψ dada por $\phi_A(z) = \frac{z+1}{z+2}$. Los puntos fijos de ésta están dados por

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{-5}}{2}.$$

Debido a que $|\phi'_A(z_1)|$ es menor que 1 y $|\phi'_A(z_2)|$ es mayor que 1, z_1 es el punto fijo o atractor y z_2 el repulsor.

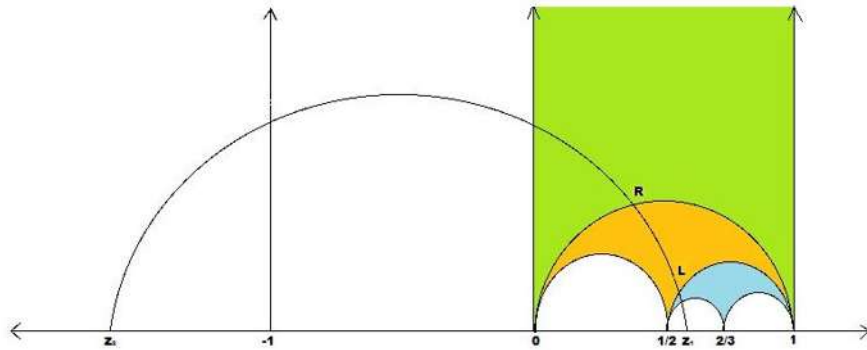


FIGURA 14.

La imagen de t_0 mediante ϕ_A es el triángulo $\Delta(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1)$, esto implica que ϕ_A define la palabra RL de período dos. Dicha palabra tiene asociada la transformación obtenida de realizar el producto

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

que es precisamente ϕ_A . Los vértices de cada uno de los triángulos intersectados por la palabra RL desde t_0 define la variedad V_{ϕ_A} teselada con 2 tetraedros ideales los cuales se obtienen al someter a un cambio de diagonal la triangulación inicial definida por t_0 .



FIGURA 15.

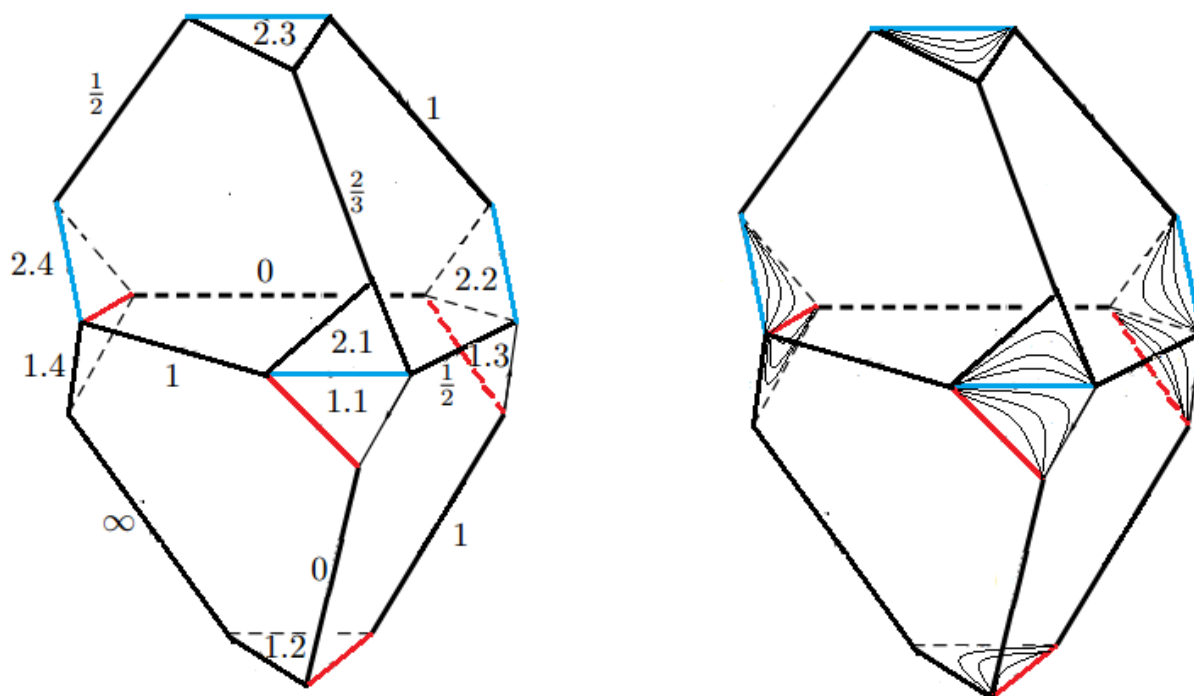


FIGURA 16. En la figura se muestra la foliación en \mathfrak{A} y la manera como se pegan las dos cadenas aportada por cada uno de los tetraedros.

Cada uno de estos tetraedros aporta una cadena de cuatro triángulos que conforman a \mathfrak{A} . Se denota por $i.j$ al j -ésimo triángulo de la cadena aportada por el tetraedro Δ_i para $i = 1, 2$. Si se observa en la figura el triángulo 1.1, la arista cuyos vértices son 1 y $\frac{1}{2}$ pertenecen también al triángulo 2.1. Esta aclaración evidencia la manera como se deben pegar las dos cadenas.

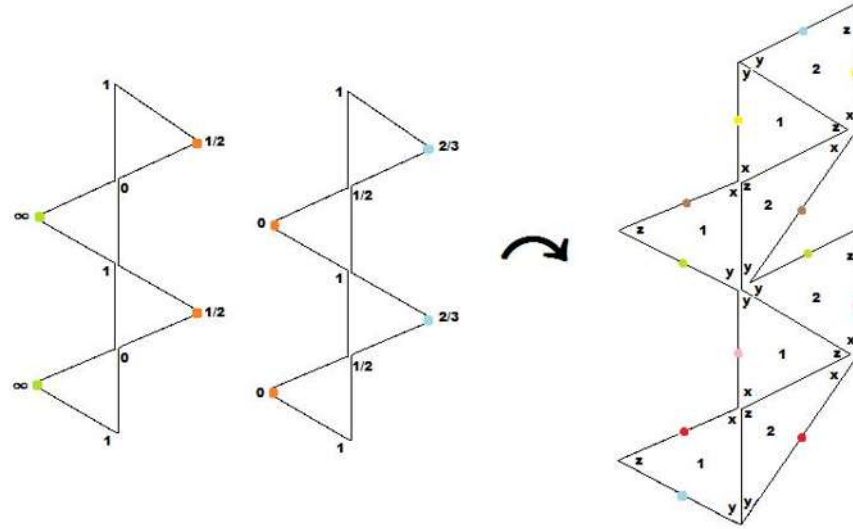
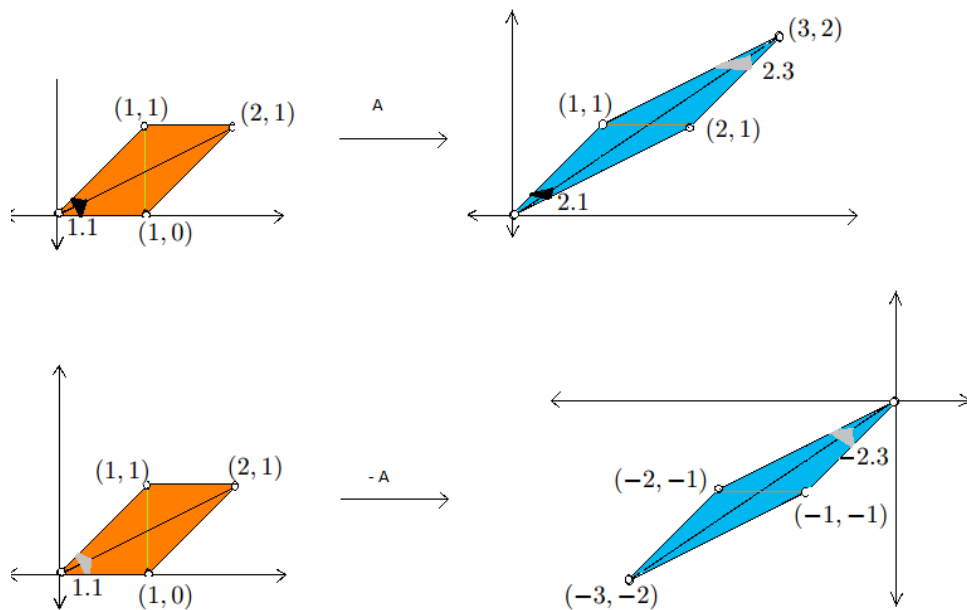


FIGURA 17.

Si en lugar de A se hubiera considerado $-A$, aunque las dos definan exactamente la misma transformación bajo el isomorfismo Ψ , ellas definen distintos difeomorfismos de T . Por lo tanto las maneras de pegar las dos cadenas generadas por los dos tetraedros que se obtienen al ver la imagen de t_0 mediante $\phi_{-A} = \phi_A$ son distintas.

FIGURA 18. La imagen del triángulo 1.1 mediante $-A$ es un triángulo que en el cociente es equivalente al triángulo 2.3.

La imagen de los vectores $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$ mediante la matriz A definen una homotopía de T , que indica que la arista con vértices $1, \frac{1}{2}$ del triángulo 1.1 aportado por Δ_1 debe ser pegada a la arista del triángulo 2.1 de Δ_2 que tiene los mismo vértices. Si se fija ahora en la

matriz $-A$, la homotopía que ahora se define de T indica que la arista con vértices $1, \frac{1}{2}$ de 1.1 debe ser pegada con la arista del triángulo 2.3 que tiene los mismos vértices.

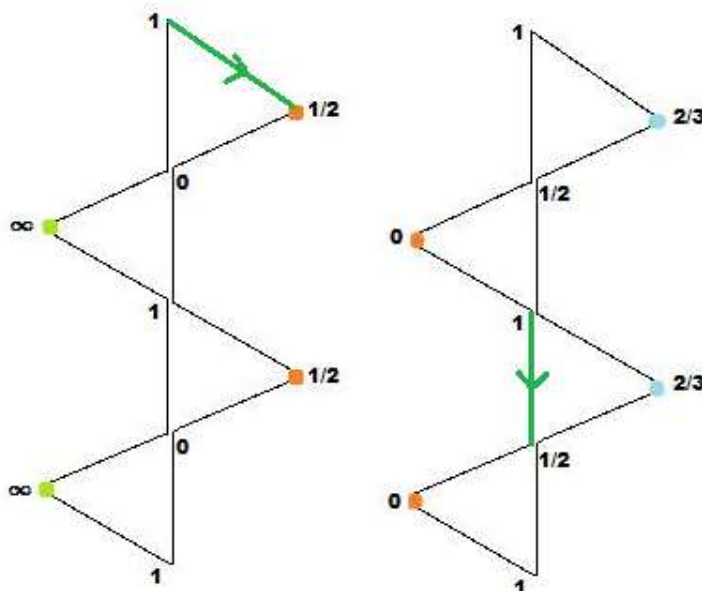


FIGURA 19. La figura muestra como el triángulo 1.1 se pega mediante la función de monodromía con el triángulo 2.3.

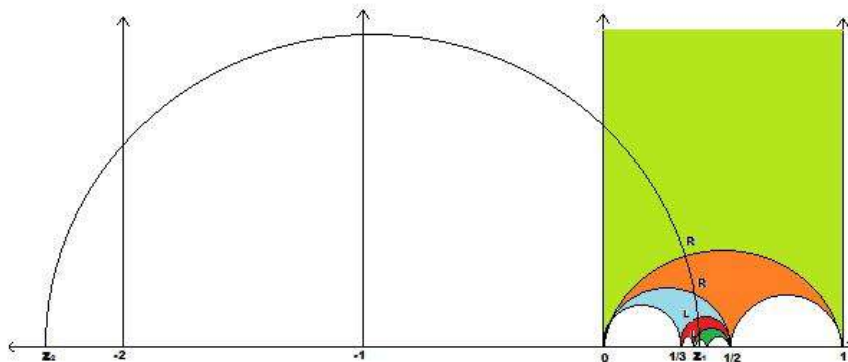
Ejemplo 4.

Dada la palabra R^2L^2 ; ésta tiene la siguiente representación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

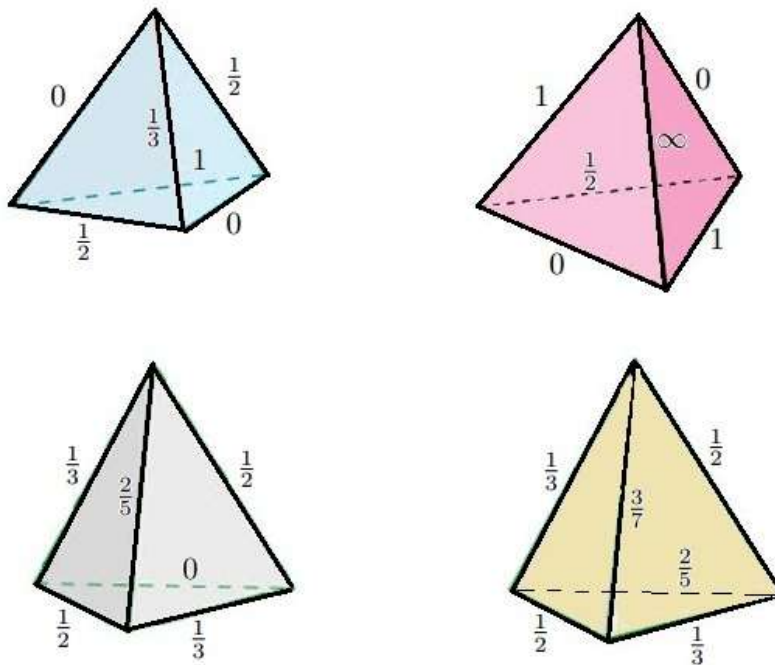
a la cual se le asocia la transformación $\phi_A(z) = \frac{z+2}{2z+5}$ y los puntos fijos vienen dados por:

$$z_1 = -1 + \sqrt{2} \quad z_2 = -1 - \sqrt{2}.$$

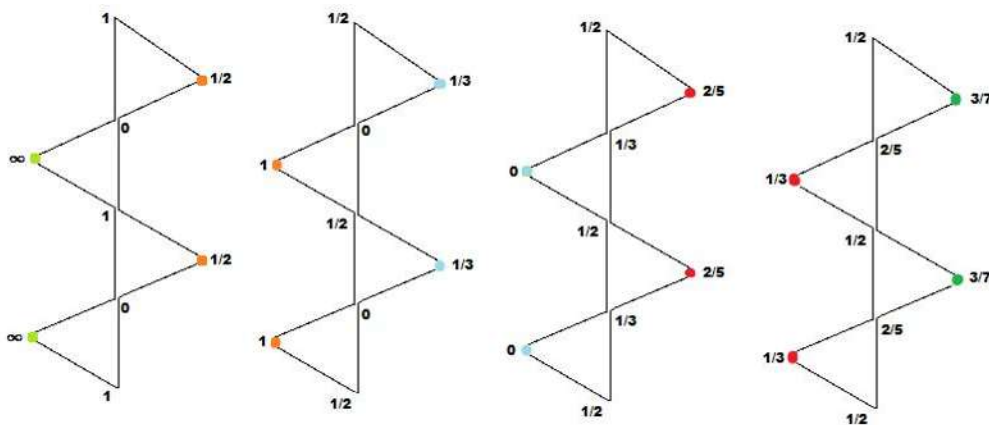


Los triángulos señalados en la triangulación de Farey definen una variedad teselada por cuatro tetraedros ideales, que como se ha mencionado anteriormente, se obtienen haciendo un

cambio de arista de Δ_i .



En este caso, obtenemos cuatro cadenas de triángulos que conformarán la teselación \mathcal{A} .



Apilando tales cadenas, teniendo en cuenta la combinatoria previamente descrita por los vértices obtenemos:

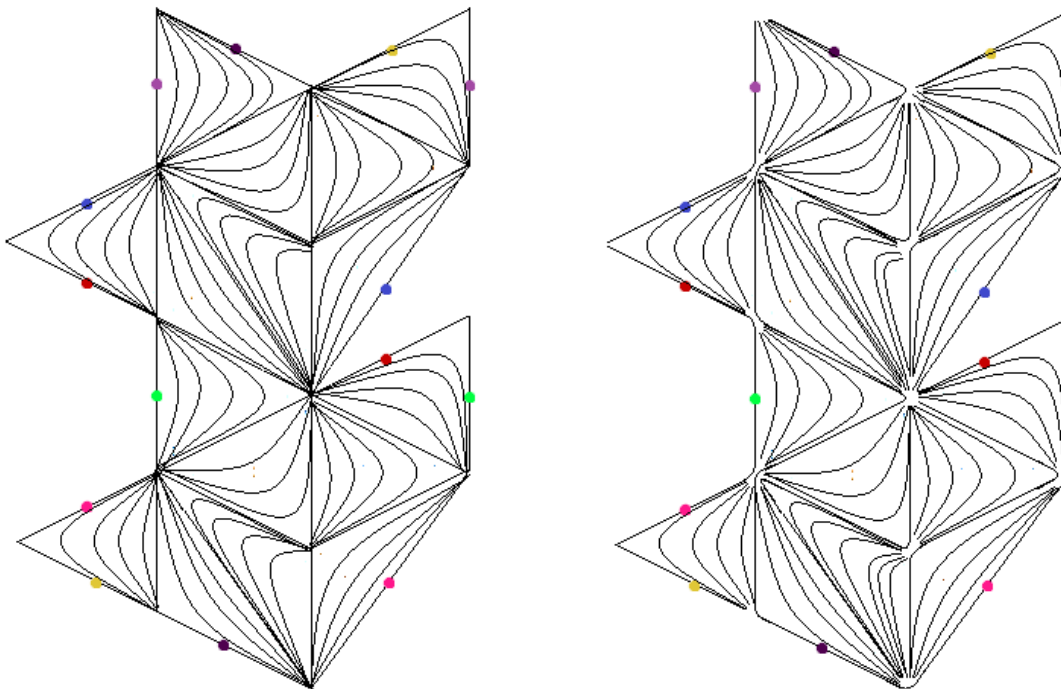


FIGURA 20. Rectificación en los vértices de \mathfrak{A} .

En este ejemplo se ve claramente la familia de curvas en los triángulos de \mathfrak{A} generados por la foliación de los tetraedros por toros punchados. El comportamiento de las curvas en los vértices permiten realizar la rectificación que permite concluir que el pegado de estos tetraedros ideales es una 3-variedad donde la monodromía de la fibración es la transformación asociada a A mediante el isomorfismo Φ

REFERENCIAS

- [1] W. Floyd, A. Hatcher. *Incompressible surfaces in punctured-torus bundles*. Topology and its applications 13, (1982) 263-282.
- [2] F. Guéritaud, D. Futer. *On canonical triangulations of once-punctured torus bundles and two-bridge link complements*. Geometry and Topology 10 (2006) 1239–1284 arXiv:math. GT/0406242
- [3] L.V. Ahlfors. *Complex Analysis. An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. Third edition.
- [4] J.G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Second Edition. Springer-Verlag.