



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

“GENERACIÓN DINÁMICA DE MASA Y EL GRUPO DE RENORMALIZACIÓN”

T E S I S

PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA

JUAN PABLO GUTIÉRREZ MONTES

ASESOR

DR. AXEL WEBER

MORELIA, MICH. SEPTIEMBRE DE 2017.

Quiero agradecer, antes que nada, al doctor Axel Weber quien asesoró este trabajo como nadie más hubiera hecho, de una manera profesional y con un profundo sentido humano. Sin su valiosa guía esta tesis no habría llegado a concretarse.

Agradezco también a toda mi familia, en especial a mi madre, a mi hermana, a mis primas y a mi tía Militza que hicieron de una forma u otra que esto fuera posible. Por su apoyo moral, económico y por su cariño incondicional.

Finalmente a todos mis amigos, a las princesas, y a mis compañeros de la facultad a quienes no menciono nombre por nombre porque no terminaría pero sepan que estos renglones son para ustedes y que han estado siempre ahí impulsándome y siendo un apoyo incondicional para mí.

Esto es para ustedes y gracias a ustedes.

Índice

1	Introducción.....	5
1.1	Cromodinámica cuántica	
1.2	Generación dinámica de masa	
2	Ecuaciones relativistas.....	9
2.1	Ecuación de Klein-Gordon	
2.2	Ecuación de Dirac	
3	Propagadores.....	18
3.1	Propagador no relativista	
3.2	Propagador para la ecuación de Klein Gordon	
3.3	Propagador para la ecuación de Dirac	
3.4	Propagador del fotón	
3.5	Propagador para una partícula de Dirac en un campo electromagnético externo	
4	Diagrama de autointeracción.....	31
4.1	Autointeracción en QED	
4.2	Autointeracción en QCD	
4.3	Generalización a D dimensiones	

5 Evaluación del diagrama.....	40
5.1 $D=4-\epsilon$	
5.2 $D=3$	
6 Renormalización de la masa.....	67
7 Generación dinámica de la masa en la aproximación de Nambu-Jona-Lasinio.....	70
8 Grupo de Renormalización.....	74
9 Ecuación de brecha (Schwinger-Dyson).....	80
10 Conclusiones.....	85

Abstract

Standard Model quark masses currently considered (around 3MeV for an "up" quark and 6MeV for a "down" quark) are much smaller than what's measured for nucleons, which are supposed to be constituted of essentially three quarks and their interactions. Considering the mass of a proton, for example, around 938.3 MeV, shows us that protons are around one hundred times heavier than the sum of the current masses of their constituents. So, why are nucleons so heavy? The origin of this mass, estimated to be around 99% of the visible mass in the universe, may be inside QCD itself, in the strong interaction between quarks conforming the nucleon. This problem is known as the dynamical mass generation. This work approaches the dynamical mass generation problem by, first, presenting a review of central concepts around QCD and dynamical mass generation, such as relativistic equations, propagators, spontaneous symmetry breaking and, afterwards, by developing the case of the mass generated by quark self-interaction. This is done in three different approaches: The Nambu Jona Lasinio argument, originally proposed in 1961, to explain the difference between in the masses of pions and other hadrons. The other two approaches are: The renormalization group and the Schwinger-Dyson equations which have provided the standard descriptions. We explore the chance to find a good description of dynamical mass generation using the renormalization group in its standard formulation. As a first approach we consider the 3-dimensional case for QED which represents a simplified version of what would be 4-dimensional QCD. Finally, for this specific case, a comparison is made between the results for NJL, renormalization group and Schwinger-Dyson equation. The large and small momentum limits are explored in each case.

Resumen

Las masas consideradas en el modelo estándar para los quarks (alrededor de 3 MeV y 6 MeV respectivamente para el quark up y down) son sustancialmente más chicas que las de los estados ligados que se forman entre ellos como los nucleones. Un protón, con una masa de alrededor de 938.3 MeV es aproximadamente 100 veces mayor que la suma de las masas corrientes de los tres quarks que lo componen. “A escalas de distancia del orden del tamaño del protón, los quarks se comportan como si sus masas fueran de unos 300 MeV, de modo que el Mecanismo de Higgs no nos alcanza para explicar el 99% de la masa total de proton o un neutron”.¹ Por qué son los nucleones tan pesados? Se busca entonces el origen de esta masa, estimada como el 99% de la masa presente en el universo, en la misma QCD, en las interacciones fuertes entre quarks: Este es el problema de la generación dinámica de masa. La presente investigación busca acercarse a la descripción de la generación dinámica de la masa de los quarks mediante, primero, una revisión de los conceptos circundantes a la cuestión en los primeros capítulos como son los propagadores, las ecuaciones relativistas, QCD, rompimiento espontáneo de la simetría quiral y posteriormente revisando el caso de la masa generada por la autointeracción de los quarks a partir de tres enfoques: El argumento de Nambu Jona Lasinio, formulado en 1961, época anterior al desarrollo de la QCD, con la intención de explicar la diferencia de masa entre el pión y otros hadrones. Los otros dos son: el formalismo del grupo de renormalización y las ecuaciones Schwinger-Dyson que han aportado las descripciones estándar en la actualidad. Se explora si el grupo de renormalización, en su implementación estándar, puede ofrecer una buena descripción de la generación dinámica de la masa. Como primer acercamiento al problema se utiliza la QED en tres dimensiones que representa una versión simplificada del problema para QCD en cuatro dimensiones. Finalmente, para este caso, se hace una comparativa de los resultados encontrados en cada uno de los tres enfoques abarcados. Se exploran en cada caso los límites para momentos grandes y pequeños.

Generación dinámica de masa, QCD, Grupo de Renormalización, Ecuaciones de Schwinger-Dyson, QFT.

¹Sánchez Madrigal, S. (2012) Generación dinámica de masas y confinamiento en QED_3 , p.2

1 Introducción

1.1 Cromodinámica cuántica

En 1965, Moo-Young Han, Yoichiro Nambu y Oscar W. Greenberg propusieron la existencia de un número cuántico adicional en los quarks como solución al problema del barión Δ^{++} . El modelo de quarks, introducido a principio de la década de los sesentas por Gell-Mann y Zweig predecía que este barión estaría conformado por tres quarks tipo “up” con espines paralelos, esta predicción se contradice con el principio de exclusión de Pauli.

“Three identical quarks cannot form an antisymmetric S-state. In order to realize an antisymmetric orbital S-state, it is necessary for the quark to have an additional quantum number².”

Éste número cuántico adicional, posteriormente llamado “color” permite resolver el problema del barión Δ^{++} ya que ahora los quarks se encuentran en estados diferentes, distinguibles por su *carga de color*. El desarrollo de estas ideas marcó el nacimiento de una teoría de gauge donde el color adquiere un sentido físico[1], esta teoría pasó a ser conocida como cromodinámica cuántica, QCD por sus siglas en inglés, y es la teoría de las interacciones fuertes, una de las cuatro fuerzas fundamentales que considera el modelo estándar.

La QCD es una teoría de gauge no abeliana y su grupo de simetría asociado es el grupo de matrices de 3x3 unitarias con determinante uno o SU(3). Esta teoría entiende las interacciones fuertes como el producto del intercambio de 8 tipos de bosones, no masivos, eléctricamente neutros llamados gluones quienes son los portadores de la carga de color y juegan un papel análogo a los fotones en la electrodinámica cuántica (QED) con una significativa diferencia: Los gluones de la QCD tienen carga de color e interactúan entre si, al contrario de sus análogos en QED quienes están desprovistos de carga eléctrica y por lo tanto no se presenta interacción entre ellos. Esta diferencia tiene consecuencias importantes en la fenomenología

²B. V. Struminsky, Magnetic moments of barions in the quark model, JINR-Preprint P-1939, Dubna, Submitted on January 7, 1965.

asociada a la QCD y da lugar a algunos fenómenos característicos de la teoría.

1.1.1 Conservación de la carga de color

Una de las consecuencias del teorema de Noether es la conservación de la carga de color, esto es, en cualquier proceso físico la carga de color inicial debe ser igual a la carga de color final, esta característica es análoga a la conservación de la carga eléctrica en QED.

1.1.2 Libertad asintótica

En el 2004, se entregó el premio Nobel de física a Frank Wilczek, David Gross y David Politzer quienes en 1973 demostraron de manera analítica, con ayuda de la teoría de perturbaciones, que la QCD implica que la interacción fuerte disminuye a cortas distancias haciendo a los quarks “*asintóticamente libres*” cuando la distancia entre ellos tiende a cero. Esto es, cuando los quarks se encuentran cerca, se comportan más y más como partículas libres hasta que a distancias muy cortas parecen no estar sujetas a ningún potencial.

Este fenómeno resulta peculiar y es contrastante con el comportamiento de otras fuerzas en la naturaleza como la electromagnética o la gravitacional, las cuales tienden a aumentar a distancias cortas. La libertad asintótica es resultado de el hecho de que los gluones tengan a su vez carga de color y sean capaces de interacción entre ellos, a diferencia de los portadores de la fuerza electromagnética quienes están desprovistos de carga eléctrica.

1.1.3 Confinamiento de la carga de color

*“Indeed, the color electric field energy generated by an isolated quark is calculated to be truly infinite, due to the energy it creates in distant fields. This property explains why quarks are never observed in isolation”*³

³Frank Wilczek, Physics Today 52, 11, 11 (1999)

Sin embargo, los quarks no se han observado en estado libre, sino siempre formando estados ligados (nucleones, piones). Otra de las consecuencias de la interacción entre gluones es el confinamiento de la carga de color en partículas neutras o *blancas* como los bariones y los mesones.

Al aumentar la separación entre dos partículas con carga de color opuesta la intensidad de la interacción fuerte entre ellas aumenta. Llegado a un punto, la energía entre ellas es la suficiente para crear un nuevo par quark-antiquark. El producto de las interacciones entre los ahora cuatro quarks es el confinamiento de éstos en estructuras neutras nuevamente de forma que no se puede obtener un quark en estado libre.

1.1.4 Lagrangiano de la QCD

El lagrangiano de esta teoría está dado por:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m)q - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \quad (1)$$

Donde el campo gluónico está dado por

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \sum_{b,c=1}^8 f^{abc} A_\nu^b A_\mu^c \quad (2)$$

y

$$D_\mu = \partial_\mu + igT_a A_\mu^a \quad (3)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} &= \bar{q}(i\gamma^\mu (\partial_\mu + igT_a A_\mu^a) - m)q - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \\ &= \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q - g(\bar{q}\gamma^\mu T_a q)A_\mu^a - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4)$$

1.2 Generación dinámica de masa

“In quantum field theory, the primary elements of reality are not individual particles, but underlying fields”⁴.

En teoría cuántica de campos (QFT) las partículas del modelo estándar se entienden como excitaciones de un campo subyacente en el tiempo y en el espacio. Esta formulación muestra porque todos los electrones, por ejemplo, “son iguales” en el sentido de que tienen las mismas propiedades, particularmente, la misma masa. En QCD, sin embargo, los protones y neutrones son estados ligados de tres quarks (dos up y un down para el caso del protón y dos down y un up para el caso de neutrón) que se configuran como tales debido a las interacciones con el campo de color de los gluones.

“There is energy stored in the motion of the quarks, and energy in the color gluon fields that connect them. This bundling of energy makes the proton.”⁵

La simetría de gauge de Yang-Mills de la cual deriva la teoría de gluones prohíbe términos de masa para estos bosones, como ocurre también, por razones similares, para el caso de los fotones. Entonces la masa de los nucleones proviene principalmente de la energía residual en la interacción fuerte que sufren los quarks.

“Even so, at finite distances the fields do not cancel exactly, and so a finite field energy remains. According to QCD, it is precisely this color field energy that mostly makes us weigh.”⁶

⁴Physics Today 52, 11, 11 (1999)

⁵Physics Today 52, 11, 11 (1999)

⁶Physics Today 52, 11, 11 (1999)

2 Ecuaciones relativistas

2.1 Ecuación de Klein-Gordon

Para 1928, cuando Dirac propuso su famosa ecuación, ya existía una generalización de la ecuación de Schrödinger para el caso relativista que había sido propuesta por Oskar Klein y Walter Gordon en 1926, para la métrica de Minkowski se escribe:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \Phi = 0 \quad (5)$$

Identificando los primeros dos términos con el operador D'alambertiano

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (6)$$

Podemos escribirla de forma reducida como:

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \Phi = 0 \quad (7)$$

Klein y Gordon formularon esta ecuación que describe partículas de spin cero a partir de la cuantización de la energía y el momento en la ecuación relativista de Einstein para la energía, es decir:

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 \quad (8)$$

y se cambian E y p por los operadores correspondientes, a saber:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (9)$$

$$p \rightarrow \hat{P} = -i\hbar \nabla \quad (10)$$

2.1.1 Solución para una partícula libre

Las soluciones para una partícula con momento definido son

$$\Phi(t, \vec{x}) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(p_\mu x^\mu)} = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)} \quad (11)$$

Entonces aplicando la solución en (5) tenemos

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad (12)$$

Las soluciones con energía negativa son interpretadas como partículas viajando hacia atrás en el tiempo o equivalentemente antipartículas viajando hacia adelante en el tiempo. Esta interpretación fue propuesta por Feynman y Stckelberg, y es matemáticamente consistente ya que ⁷.

$$e^{-\frac{i}{\hbar}(-E)(-t)} = e^{-\frac{i}{\hbar}(Et)} \quad (13)$$

De donde se observa que una partícula con energía negativa $-E$ viajando hacia atrás en el tiempo es equivalente a una partícula con energía $+E$ propagándose hacia adelante en el tiempo.

2.1.2 Conservación de la corriente

La ecuación de Klein-Gordon también tiene asociada una ecuación de continuidad que se puede obtener multiplicando la ecuación de Klein Gordon por $i\Phi^*$ y su conjugado complejo por $-i\Phi$ y restándolas para obtener

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(i(\Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial t}) \right) + \nabla \cdot (-i(\Phi^* \nabla \Phi - \Phi \nabla \Phi^*)) = 0 \quad (14)$$

Esta ecuación es un análogo a la ecuación de continuidad para la ecuación de Shrödinger ⁸

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (15)$$

⁷Posteriormente veremos que la ecuación de Dirac presenta el mismo problema: soluciones con energía negativa que se tratan de acuerdo a la misma interpretación, Quarks and Leptons, p.77

⁸Quarks and Leptons, p. 71

Entonces identificamos la densidad de probabilidad

$$\rho = i(\Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial t}) \quad (16)$$

y el flujo de probabilidad

$$\vec{j} = -i(\Phi^* \nabla \Phi - \Phi \nabla \Phi^*) \quad (17)$$

Definiendo $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ podemos escribir (14) como

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (18)$$

que es conocida como la ecuación de continuidad relativista. Usando(11) en (16) y en (17) tenemos

$$\rho = 2E|A|^2 \quad (19)$$

aquí se puede ver que las partículas con energía negativa se corresponden con una densidad de probabilidad negativa y

$$\vec{j} = 2\vec{p}|A|^2 \quad (20)$$

y por lo tanto

$$j^\mu = 2p^\mu|A|^2 \quad (21)$$

2.2 Ecuación de Dirac

Sin embargo, Dirac buscaba una ecuación que tuviese una densidad de probabilidad positiva y una derivada de primer orden en el tiempo y para ello tomó la misma expresión de la relatividad especial pero de esta forma:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \quad (22)$$

De esta manera, al sustituir los operadores (6) y (7)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = c(\sqrt{m^2c^2 - \hbar^2 \nabla^2})\Psi \quad (23)$$

En esta expresión se tiene de lado derecho la derivada de primer orden en el tiempo, sin embargo, al otro lado aparece una raíz cuadrada que no está bien definida ya que contiene un operador como argumento. Entonces toda la raíz se asume como un operador de la forma:

$$\sqrt{m^2c^2 - \hbar^2\nabla^2} = \hat{\alpha}_1p_x + \hat{\alpha}_2p_y + \hat{\alpha}_3p_z + \hat{\beta}mc \quad (24)$$

donde las $\hat{\alpha}_i$ y $\hat{\beta}$ son constantes a determinar. Este operador tendrá que cumplir que

$$(\hat{\alpha}_1p_x + \hat{\alpha}_2p_y + \hat{\alpha}_3p_z + \hat{\beta}mc)^2 = m^2c^2 + p^2 \quad (25)$$

Esta condición impone que $\hat{\alpha}_i\hat{\alpha}_j = \delta_j^i$, $\hat{\beta}^2 = 1$ y $\hat{\alpha}_i\hat{\beta} = 0$. Como no existe solución en términos del álgebra estándar pensaremos los $\hat{\alpha}_i$ como la representación matricial de algún operador.^{9 10}

Entonces, usando el anticonmutador de dos operadores dado por:

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \quad (26)$$

podemos escribir estas condiciones como:

$$\{\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_j\} = 2I\delta_j^i \quad (27)$$

$$\{\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}\} = 0 \quad (28)$$

$$\{\hat{\beta}, \hat{\beta}\} = 2I \quad (29)$$

Las matrices mas “chicas” que satisfacen esta relación son de dimensión cuatro. Existen diferentes representaciones de estas matrices, pero una manera común de representarlas es:¹¹

⁹Esto impone también que la solución a la ecuación, dejará de ser una función de onda como en el caso de la ecuación de Klein Gordon. Checar la sección 2.4 “Solución para una partícula libre”.

¹⁰Las matrices $\hat{\alpha}_i$ y $\hat{\beta}$ deberán ser también hermiticas para que el Hamiltoniano de Dirac sea hermitico.

¹¹Esta representación se conoce como representación de Pauli-Dirac.

$$\hat{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

O en términos de las matrices de Pauli

$$\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

donde σ_i son las matrices de Pauli.

De esta manera, conociendo las matrices $\hat{\alpha}_i$ y $\hat{\beta}$ se llega a

$$c(\hat{\alpha}_1 p_x + \hat{\alpha}_2 p_y + \hat{\alpha}_3 p_z + \hat{\beta} mc)\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (30)$$

o equivalentemente

$$c\left(\sum_{j=1}^3 \hat{\alpha}_j p_j + \hat{\beta} mc\right)\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (31)$$

donde se identifica $p_x = p_1$, $p_y = p_2$ y $p_z = p_3$.

2.2.1 Forma covariante de la ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac se puede expresar en forma covariante multiplicando la expresión anterior por $\hat{\beta}$ del lado izquierdo

$$c\left(\sum_{j=1}^3 \hat{\beta}\hat{\alpha}_j p_j + \hat{\beta}\hat{\beta}mc\right)\Psi = i\hat{\beta}\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (32)$$

haciendo $c=\hbar=1$ ¹²

$$\left(\sum_{j=1}^3 \hat{\beta}\hat{\alpha}_j p_j + \hat{\beta}\hat{\beta}m\right)\Psi = i\hat{\beta}\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (33)$$

y sustituyendo el operador $p = -i\nabla$

$$(-i\hat{\beta}\vec{\alpha} \cdot \nabla + m)\Psi = i\hat{\beta}\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (34)$$

o

$$\left(i\hat{\beta}\frac{\partial}{\partial t} + i\hat{\beta}\vec{\alpha} \cdot \nabla - m\right)\Psi = 0 \quad (35)$$

Si se definen las matrices gamma de Dirac como $\gamma^\mu = (\hat{\beta}, \hat{\beta}\vec{\alpha})$ se puede escribir

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0 \quad (36)$$

2.2.2 Solución para una partícula libre

Buscamos la solución para una partícula libre, que es un objeto de cuatro componentes llamado espinor de Dirac y tiene la forma

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

¹²se usarán unidades naturales por el resto del capítulo

Se propone entonces una solución que tenga la forma $\Psi = u(p)e^{-ip_\mu x^\mu}$ donde $u(p)$ es un espinor de cuatro componentes y $p^\mu = (E, \vec{p})$. Aplicando Ψ a la ecuación (36) se tiene $(\hat{A} - m)u(p) = 0$. (Donde hemos adoptado la notación $\hat{A} = \gamma^\mu A_\mu$ para algún operador \hat{A}).

Multiplicando por $\hat{\beta}$ a la izquierda se tendría

$$\left(\sum_{j=1}^3 \hat{\alpha}_j p_j + \hat{\beta} m \right) u = H u = E u \quad (37)$$

Usando la representación de Pauli-Dirac de las matrices α y β podemos escribir:

$$\hat{H} u = \begin{pmatrix} mI & \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & -mI \end{pmatrix} u = E u$$

Si separamos los cuatro componentes de $u(p)$ en dos grupos de dos de modo que

$$u(p) = \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \end{pmatrix}$$

que se puede escribir como un sistema de dos ecuaciones.¹³

$$p \cdot \sigma u_b = (E - m)u_a \quad (38)$$

$$p \cdot \sigma u_a = (E + m)u_b \quad (39)$$

que tiene por soluciones:

$$u_1 = N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix}$$

$$u_2 = N_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}$$

¹³Los componentes de u_a están diferenciados por el spin de la partícula, lo mismo para los de u_b . Checar Halzen, F. and Martin, A. D.- Quarks and Leptons p.104.

$$u_3 = N_3 \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_4 = N_4 \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Reescribiendo las soluciones u_3 y u_4 para energías negativas según la interpretación de Feynman-Stuckelberg

$$v_1(E, p) = u_4(-E, -p) \quad (40)$$

$$v_2(E, p) = u_3(-E, -p) \quad (41)$$

Ya que se necesitará más tarde¹⁴ se hará notar aquí que:

$$\sum_{i=1}^2 u_\alpha^i(\vec{p}) \bar{u}_\beta^i(\vec{p}) = (\not{p} + m)_{\alpha\beta} \quad (42)$$

donde $\bar{u} \equiv u^* \gamma^0$ y con $p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ y

$$\sum_{i=1}^2 v_\alpha^i(\vec{p}) \bar{v}_\beta^i(\vec{p}) = (\not{p} - m)_{\alpha\beta} \quad (43)$$

donde $\bar{v} \equiv v^* \gamma^0$ igualmente con $p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

2.2.3 Conservación de la corriente

Como para el caso de Klein-Gordon la ecuación de Dirac tiene asociada una ecuación de continuidad. Para ello se toma el conjugado hermitiano de la ecuación de Dirac¹⁵

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \quad (44)$$

¹⁴En la sección 3.3

¹⁵Quarks and Leptons, p.103

Multiplicando esta ecuación por ψ por la derecha, multiplicando la ecuación de Dirac (36) por $\bar{\psi}$ por la izquierda y sumando ambas se obtiene

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi = \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0 \quad (45)$$

de donde identificamos $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ y entonces la densidad de probabilidad

$$\rho = j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi \quad (46)$$

y el flujo

$$\vec{j} = \bar{\psi}\vec{\gamma}\psi \quad (47)$$

Donde $\vec{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$.

3 Propagadores

Si se tiene una partícula localizada en un tiempo t_0 y en una posición $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ el formalismo de la mecánica cuántica indica que la amplitud de correlación entre este estado y otro estado (\vec{x}, t) de la partícula estará dada por: ¹⁶

$$\langle t, \vec{x} | t_0, \vec{x}_0 \rangle = \langle \vec{x} | U(t, t_0) | \vec{x}_0 \rangle \quad (48)$$

Donde U es el operador de evolución temporal usual dado por

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t-t_0)} \quad (49)$$

Si H no depende explícitamente del tiempo. Este objeto (48) se conoce como propagador y representa la amplitud de probabilidad de que dada una condición inicial $|\Psi(t_0)\rangle = |\vec{x}_0\rangle$, la partícula se encuentre en \vec{x} al tiempo t . Una vez conocido permite conocer la evolución de un estado ya que si se toma

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t-t_0)} |\Psi(t_0)\rangle \quad (50)$$

y se proyecta sobre la base de posiciones en $t = t_0$ y se usa la relación de completitud de la base

$$\langle \vec{x} | \Psi(t) \rangle = \int d\vec{x}_0 \underbrace{\langle \vec{x} | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t-t_0)} | \vec{x}_0 \rangle}_{\text{propagador}} \langle \vec{x}_0 | \Psi(t_0) \rangle \quad (51)$$

3.1 Propagador no relativista

Se supone un hamiltoniano no relativista y con $\hat{H}_I=0$ dado por:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (52)$$

¹⁶Consultar algún texto estándar de mecánica cuántica, J. J. Sakurai por ejemplo

Entonces la ecuación (49) toma la forma

$$U(t, t_0) = e^{\frac{-i\hat{p}^2}{2m\hbar}(t-t_0)} \quad (53)$$

Si se usa la relación de completitud de la base de momento la ecuación (48) se puede escribir:

$$\langle t, \vec{x} | t_0, \vec{x}_0 \rangle = \int d^3p \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | e^{\frac{-i\hat{p}^2}{2m\hbar}(t-t_0)} | \vec{x}_0 \rangle \quad (54)$$

Donde las integrales se entiende que van evaluadas de $-\infty$ a ∞ . Teniendo en cuenta que $\langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}$ se puede escribir:

$$\begin{aligned} \langle t, \vec{x} | t_0, \vec{x}_0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} e^{\frac{-i\hat{p}^2}{2m\hbar}(t-t_0)} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}_0/\hbar} \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)/\hbar} e^{\frac{-i\hat{p}^2}{2m\hbar}(t-t_0)} \end{aligned} \quad (55)$$

donde p son los autovalores de \hat{p} .

podemos escribirlo como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)/\hbar} e^{\frac{-i\hat{p}^2}{2m\hbar}(t-t_0)} \\ = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p e^{\frac{-i(t-t_0)}{2m\hbar} (\vec{p} - \frac{m(\vec{x}-\vec{x}_0)}{t-t_0})^2 + \frac{im(\vec{x}-\vec{x}_0)^2}{2\hbar(t-t_0)}} \end{aligned} \quad (56)$$

Integrando se obtiene:

$$\langle t, \vec{x} | t_0, \vec{x}_0 \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{2\pi\hbar m}{i(t-t_0)} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{im(\vec{x}-\vec{x}_0)^2}{2\hbar(t-t_0)}} \quad (57)$$

Que es el propagador no relativista para una partícula libre.

También se puede obtener el propagador no relativista como función de Green resolviendo la ecuación

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hat{p}^2}{2m} \right) G(\vec{x}, t; \vec{r}_0, t_0) = i\hbar \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0) \quad (58)$$

La solución tendrá la forma

$$G(\vec{x}, t; \vec{r}_0, t_0) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^4} \tilde{G}(p) e^{-\frac{i}{\hbar}(p_0(t-t_0) - \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0))} \quad (59)$$

Entonces

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\vec{p}^2}{2m}) G(\vec{x}, t; \vec{r}_0, t_0) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^4} \tilde{G}(p) (p_0 - \frac{\vec{p}^2}{2m}) e^{-\frac{i}{\hbar}(p_0(t-t_0) - \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0))} \quad (60)$$

Esto debe ser igual por (58) a

$$i\hbar \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0) \delta(t - t_0) = i\hbar \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^4} e^{-\frac{i}{\hbar}(p_0(t-t_0) - \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0))} \quad (61)$$

Esta ecuación se conoce como representación de Fourier de la delta de Dirac. Y entonces comparando ambos lados se tiene que

$$\tilde{G}(p) (p_0 - \frac{\vec{p}^2}{2m}) = i\hbar \quad (62)$$

o bien

$$\tilde{G}(p) = \frac{i\hbar}{(p_0 - \frac{\vec{p}^2}{2m})} \quad (63)$$

Reemplazando esta expresión para $\tilde{G}(p)$ en (64)

$$G(\vec{x}, t; \vec{r}_0, t_0) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^4} \left(\frac{i\hbar}{p_0 - \frac{\vec{p}^2}{2m}} \right) e^{-\frac{i}{\hbar} p_0(t-t_0) - \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)} \quad (64)$$

o escribiendo explícitamente la parte espacial y temporal

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \left(\int \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \left(\frac{i\hbar}{p_0 - \frac{\vec{p}^2}{2m}} \right) e^{-\frac{i}{\hbar} p_0(t-t_0)} \right) e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)} \quad (65)$$

Donde las integrales van evaluadas de $-\infty$ a ∞ . Para resolver la integral temporal se hace uso del teorema del residuo y del lema de Jordan. Para un contorno de integración como el de la figura () se tiene para $t - t_0 > 0$ que la integral es cero por el teorema integral de Cauchy y para $t - t_0 < 0$ será $2\pi i$ veces el residuo del polo encerrado

$$\int \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \left(\frac{i\hbar}{p_0 - \frac{\vec{p}^2}{2m}} \right) e^{-\frac{i}{\hbar} p_0(t-t_0)} = (2\pi i) \frac{i\hbar}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} (\frac{\vec{p}^2}{2m})(t-t_0)} = -e^{-\frac{i}{\hbar} (\frac{\vec{p}^2}{2m})(t-t_0)} \quad (66)$$

Entonces podemos escribir el propagador como

$$G_A(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > t_0 \\ - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{\vec{p}^2}{2m}(t-t_0) - \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0))} & \text{si } t < t_0 \end{cases} \quad (67)$$

Que se conoce como *función de Green avanzada* o *acausal*. Si se elige rodear el polo por arriba tendríamos

$$G_R(x - x_0) = \begin{cases} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-\frac{i}{\hbar}(\frac{\vec{p}^2}{2m}(t-t_0) - \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0))} & \text{si } t > t_0 \\ 0 & \text{si } t < t_0 \end{cases} \quad (68)$$

que se conoce como *función de Green retardada* o *causal*. Se puede expresar entonces el propagador en la ecuación (55) como

$$\langle t, \vec{x} | t_0, \vec{x}_0 \rangle = G_R(x - x_0) - G_A(x - x_0) \quad (69)$$

3.2 Propagador para la ecuación de Klein-Gordon

Se busca la solución a la ecuación

$$(\square + m^2)G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) = -i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_0)\delta(t - t_0) \quad (70)$$

Nótese que

$$\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_0)\delta(t - t_0) = \delta^{(4)}(\vec{x} - \vec{x}_0) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x-x_0)^\mu} \quad (71)$$

Donde la primera igualdad está dada por notación solamente y la última está dada por la representación de Fourier de la delta de Dirac.

Entonces la solución tendrá la forma:

$$G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{G}(p) e^{-ip_\mu(x-x_0)^\mu} \quad (72)$$

Para alguna función del momento \tilde{G} . Aquí μ corre de 0 a 3. Entonces:

$$(\square^2 + m^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{G}(p) e^{-ip_\mu \cdot (x-x_0)^\mu} = -i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_0)\delta(t - t_0) \quad (73)$$

Del lado izquierdo tenemos:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{G}(p) (-p_0^2 + \vec{p}^2 + m^2) e^{-ip_\mu \cdot (x-x_0)^\mu} \quad (74)$$

Pero esto debe ser igual a

$$-i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu \cdot (x-x_0)^\mu} \quad (75)$$

Y entonces comparando (74) y (75):

$$-i = \tilde{G}(p) (-p_0^2 + \vec{p}^2 + m^2) \quad (76)$$

de donde

$$\tilde{G}(p) = \frac{i}{(p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2)} = \frac{i}{(p_0 + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2})(p_0 - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2})} \quad (77)$$

Instertando $\tilde{G}(p)$ en (72) y escribiendo explícitamente la parte espacial y la temporal de la integral tenemos:

$$G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(\int \frac{dp_0}{(2\pi)} \left(\frac{i}{(p_0^2 - \vec{p}^2 - m^2)} \right) e^{-ip_0 \cdot (t-t_0)} \right) e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)} \quad (78)$$

La integral que corresponde a la parte temporal es una integral compleja que se puede solucionar utilizando el teorema del residuo:¹⁷

Localizamos los puntos donde la función se indetermina, esto es: $p_0 = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Y se selecciona *convencionalmente*¹⁸ El contorno de integración de la Figura 1. El lema de Jordan nos permite

¹⁷Es un teorema generalmente tratado en textos de variable compleja

¹⁸Se selecciona así porque lleva a la función de Green causal tomando en cuenta la interpretación de Feynman Stuckelberg, checar Quarks and Leptons, por ejemplo.

concluir aquí que la integral sobre el semiarco se va a cero cuando $R \rightarrow \infty$ y entonces por el teorema del residuo la integral sobre el eje real es proporcional a la suma de los residuos, podemos entonces escribir

$$\int \frac{dp_0}{(2\pi)} \left(\frac{i}{(p_0^2 - \vec{p}^2 + m^2)} \right) e^{-ip_0 \cdot (t-t_0)} = \left(\frac{1}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \right) e^{i\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \cdot (t-t_0)} \quad (79)$$

para $t < t_0$.

Y

$$\int \frac{dp_0}{(2\pi)} \left(\frac{i}{(p_0^2 - \vec{p}^2 + m^2)} \right) e^{-ip_0 \cdot (t-t_0)} = \left(\frac{1}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \right) e^{-i\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \cdot (t-t_0)} \quad (80)$$

para $t > t_0$.

Con esto se puede escribir finalmente el propagador como:

$$G(x-x_0) = \begin{cases} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \right) e^{i\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \cdot (t-t_0)} e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x}-\vec{x}_0)} & \text{si } t < t_0 \\ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \right) e^{-i\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \cdot (t-t_0)} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x}-\vec{x}_0)} & \text{si } t > t_0 \end{cases} \quad (81)$$

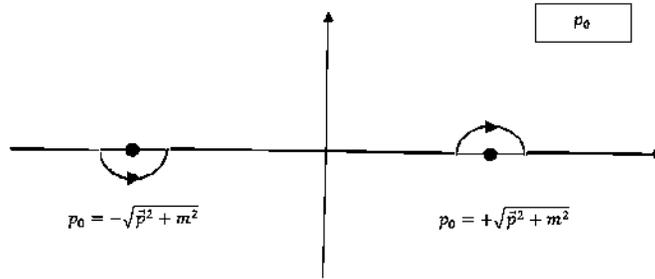


Figure 1: Contorno de integración

3.3 Propagador para la ecuación de Dirac

Se busca la solución a la ecuación ¹⁹:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_0)\delta(t - t_0) \quad (82)$$

Donde

$$i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_0)\delta(t - t_0) = i\delta^{(4)}(\vec{x} - \vec{x}_0) = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu \cdot (x-x_0)^\mu} \quad (83)$$

La solución será como en el caso anterior:

$$G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{G}(p) e^{-ip_\mu \cdot (x-x_0)^\mu} \quad (84)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{G}(p) e^{-ip_\mu \cdot (x-x_0)^\mu} &= \\ \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{G}(p) (i\gamma^\mu (-ip_\mu) - m) e^{-ip_\mu \cdot (x-x_0)^\mu} &= \\ = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{G}(p) (\not{p} - m) e^{-ip_\mu \cdot (x-x_0)^\mu} & \quad (85) \end{aligned}$$

Para que se satisfaga la ecuación (82) esto debe ser igual a

$$i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu \cdot (x-x_0)^\mu} \quad (86)$$

Y entonces comparando ambos lados:

$$i = \tilde{G}(p) (\not{p} - m) \quad (87)$$

de donde

$$\tilde{G}(p) = i(\not{p} - m)^{-1} \quad (88)$$

¹⁹Aquí hace falta decir que “m” en realidad quiere decir mI donde I es la matriz unitaria de 4x4, se utiliza la notación “m” por simplicidad.

Donde $(\not{p} - m)^{-1}$ se entiende como la matriz inversa de $(\not{p} - m)$. Para conocerla se utiliza la propiedad de:

$$\not{p}^2 = p^2 \quad (89)$$

Entonces

$$(\not{p} - m)(\not{p} + m) = p^2 - m^2 \quad (90)$$

$$\Rightarrow (\not{p} - m)^{-1} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \quad (91)$$

$$\Rightarrow \tilde{G}(p) = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \quad (92)$$

Instertando $\tilde{G}(p)$ en (84) y escribiendo la parte espacial y temporal tenemos:

$$G(\vec{x}, t; \vec{x}_0, t_0) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\int \frac{dp_0}{(2\pi)} \left(i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \right) e^{-ip_0 \cdot (t-t_0)} \right) e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)} \quad (93)$$

Nuevamente, buscamos resolver la parte temporal de la integral con el contorno de integración de la Figura 1. Tenemos los polos de la función en $p_0 = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Para $(t > t_0)$ tenemos ²⁰:

$$\int \frac{dp_0}{(2\pi)} \left(i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \right) e^{-ip_0 \cdot (t-t_0)} = \frac{\not{p} + m}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} e^{-i\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}(t-t_0)} \quad (94)$$

Y para $(t < t_0)$ ²¹:

$$\int \frac{dp_0}{(2\pi)} \left(i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \right) e^{-ip_0 \cdot (t-t_0)} = \frac{\not{p} + m}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} e^{i\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}(t-t_0)} \quad (95)$$

²⁰Donde la p_0 contenida en \not{p} del lado derecho esta también evaluada en $p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

²¹Igualmente la p_0 contenida en \not{p} del lado derecho esta evaluada en $p_0 = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

De estos dos resultados se puede escribir el propagador como²²:

$$G(x-x_0) = \begin{cases} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{-\not{p}+m}{2\sqrt{p^2+m^2}} e^{i\sqrt{p^2+m^2}(t-t_0)} \right) e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)} & \text{si } t < t_0 \\ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{\not{p}+m}{2\sqrt{p^2+m^2}} e^{-i\sqrt{p^2+m^2}(t-t_0)} \right) e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)} & \text{si } t > t_0 \end{cases} \quad (96)$$

o en términos de los espinores de Dirac (42) y (43) y la función de Heavyside

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{p^2+m^2}} [\theta(t-t_0) \left(\sum_{i=1}^2 u^i(\vec{p}) \bar{u}^i(\vec{p}) \right) e^{-ip\cdot(x-x_0)} - \theta(t_0-t) \left(\sum_{i=1}^2 v^i(\vec{p}) \bar{v}^i(\vec{p}) \right) e^{ip\cdot(x-x_0)}] \quad (97)$$

Donde p^0 está evaluado en $\sqrt{p^2+m^2}$

3.4 Propagador del fotón

La ecuación de onda para el potencial electromagnético en la norma de Lorentz es:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) A^\mu(t, \vec{r}) = 0 \quad (98)$$

esta ecuación tiene una forma similar a la ecuación de Klein-Gordon (5) con la diferencia del término de masa. Para una teoría con fotones masivos este término entraría en consideración.

Aplicando una transformada de Fourier a la ecuación (77) el propagador de Klein-Gordon se puede escribir como

$$G(x, x_0) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip\cdot x} \quad (99)$$

²²Para $t < t_0$ cambiamos convencionalmente $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$. De esta manera ahora tenemos que formalmente $p_0 = +\sqrt{p^2+m^2}$ y la partícula se propagará hacia atrás en el tiempo, esto es para $t < t_0$

o en notación con índices

$$G_{\mu\nu}(x, x_0) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(-i)\eta_{\mu\nu}}{p^2 - m} e^{-ip \cdot x} \quad (100)$$

que describe la propagación de los componentes de A^μ independientemente. Aquí se usa el tensor $\eta_{\mu\nu}$ en lugar de $\delta_{\mu\nu}$ para mantener la invariancia de Lorentz y se elige el signo para " $-i$ " de tal manera que el propagador para los componentes espaciales del potencial electromagnético sea igual al propagador de Klein-Gordon. En la ecuación anterior también se ha introducido un término de masa " m " para los fotones.

En la ecuación (98) $A^\mu(t, \vec{r})$ es el cuadrivector de potencial electromagnético formado por el potencial escalar y el potencial vectorial

$$A^\mu(t, \vec{r}) = (\phi(t, \vec{r}), \vec{A}(t, \vec{r})) \quad (101)$$

que se relacionan con los campos eléctrico y magnético de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned} \quad (102)$$

Estos componentes están definidos hasta el gradiente de una función de norma " $f(x)$ "²³. Si para fijar la elección de esta función se utiliza la condición de Lorentz

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (103)$$

es posible observar que para que dicha condición se satisfaga es necesario que $p_\mu \tilde{A}^\mu(p) = 0$. Para ello se toma la transformada de Fourier de A^μ

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{A}^\mu(p) e^{-ip \cdot x} \quad (104)$$

²³ya que $\nabla \times (\nabla f) = 0$

y se aplica directamente sobre la condición de Lorentz, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-ip^0 \tilde{\phi}(p) + i\vec{p} \cdot \vec{\tilde{A}}(p)) e^{-ip \cdot x} = 0 \\
\implies p^0 \tilde{\phi}(p) - \vec{p} \cdot \vec{\tilde{A}}(p) &= 0 \\
\implies p_\mu \tilde{A}^\mu &= 0
\end{aligned} \tag{105}$$

para que se cumpla esta condición, se busca una transformación $\eta_{\mu\nu}^T$ de $\eta_{\mu\nu}$ tal que $p^\mu \eta_{\mu\nu}^T(p) = 0$.

A la elección

$$\eta_{\mu\nu}^T(p) = \eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \tag{106}$$

se le llama *norma de Landau* y es fácil ver que satisface $p^\mu \eta_{\mu\nu}^T(p) = 0$ ya que

$$p^\mu (\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}) = p_\nu - \frac{p^2 p_\nu}{p^2} = 0 \tag{107}$$

con esta transformación de $\eta_{\mu\nu}$ en consideración, el propagador para un fotón se puede escribir, en la norma de Landau, como:

$$G(x, x_0)_{\mu\nu} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(-i)\eta_{\mu\nu}^T(p)}{p^2 - m} e^{-ip \cdot x} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(-i)(\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2})}{p^2 - m} e^{-ip \cdot x} \tag{108}$$

Es posible escribir $\eta_{\mu\nu}^T$ en términos de "vectores de polarización"²⁴ que describen físicamente la dirección del espín de los fotones, o, en el caso clásico, la polarización de la onda electromagnética.

3.5 Propagador para una partícula de Dirac en un campo electromagnético externo

²⁴Análogos a los espinores de Dirac en el caso de la ecuación de Dirac, ecuación (97)

En un campo electromagnético externo A_μ la ecuación de Dirac toma la forma:

$$(i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu(x)) - m)\Psi(x) = 0 \quad (109)$$

donde e es la carga electromagnética elemental.

Análogamente a los casos anteriores el propagador estará dado como función de Green, es decir, como solución de la ecuación

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu(x)) - m)D_e^{(A)}(x - x_0) &= i\delta(x - x_0) \\ \Leftrightarrow \\ (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)D_e^{(A)}(x - x_0) &= i\delta(x - x_0) + e\gamma^\mu A_\mu(x)D_e^{(A)}(x - x_0) \end{aligned} \quad (110)$$

o teniendo en cuenta la ecuación (82) se puede escribir en forma integral como

$$D_e^{(A)}(x - x_0) = D_e(x - x_0) + \int d^4z D_e(x - z)(-ie\gamma^\mu A_\mu(z))D_e^{(A)}(z - x_0) \quad (111)$$

Se busca ahora una solución iterativa en potencias de e de la ecuación anterior tal que $D_e^{(A)}(x - x_0) = D_e(x - x_0) + o(e)$. Para la primer iteración se tiene

$$\begin{aligned} D_e^{(A)}(x - x_0) &= \\ D_e(x - x_0) + \int d^4z D_e(x - z_1)(-ie\gamma^\mu A_\mu(z))D_e(z_1 - x_0) &+ \mathcal{O}(e^2) \end{aligned} \quad (112)$$

y para la segunda

$$\begin{aligned} D_e^{(A)}(x - x_0) &= \\ D_e(x - x_0) + \int d^4z D_e(x - z_1)(-ie\gamma^\mu A_\mu(z))D_e(z_1 - x_0) &+ \\ \int d^4z_2 \int d^4z_1 D_e(x - z_2)(-ie\gamma^\nu A_\nu(z_2))D_e(z_2 - z_1) & \\ \times (-ie\gamma^\mu A_\mu(z_1))D_e(z_1 - x_0) + \mathcal{O}(e^3) & \end{aligned} \quad (113)$$

Estas soluciones son los propagadores de una partícula que interactúa con el campo A_μ una o dos veces respectivamente, diagramáticamente este proceso se representa en la figuras 2 y 3.

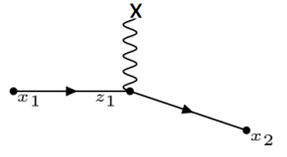


Figure 2: Propagador de Dirac que describe una interacción con el campo en el punto z_1

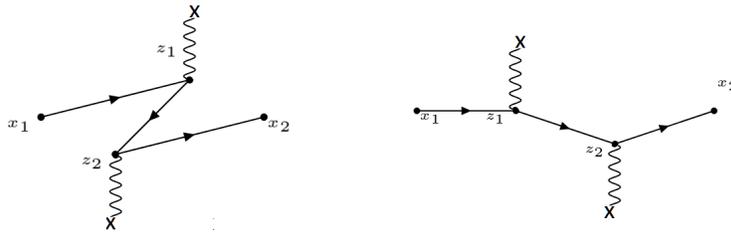


Figure 3: Propagador de Dirac que describe dos interacciones con el campo en los puntos z_1 y z_2

4 Diagrama de autointeracción

4.1 Autointeracción en QED

El proceso de auto-interacción de un electrón libre consta de tres partes:

La propagación libre del electrón desde un punto fijo x_1 del espacio-tiempo hasta un punto arbitrario z_1

La emisión de un fotón en el punto z_1 y la propagación de ambas partículas hasta otro punto arbitrario z_2

La absorción del fotón por el electrón en el punto z_2 y la propagación de éste hasta otro punto fijo x_2 .

Este proceso se puede representar en un diagrama de Feynman como el de la Figura 4. Es, esencialmente, nuestro resultado para la sección 3.5 tomando en cuenta que el gluón que se emite en z_1 es el mismo con el que se interactúa en z_2 .

La probabilidad de que ocurra este fenómeno está dada por:

$$\int \int d^4 z_1 d^4 z_2 G_{e,\alpha\gamma}(x_2, z_2) (-ie)(\gamma^\mu)_{\gamma\delta} G_{e,\delta\epsilon}(z_2, z_1) G_{f,\mu\nu}(z_2, z_1) (-ie)(\gamma^\nu)_{\epsilon\phi} G_{e,\phi\beta}(z_1, x_1) \quad (114)$$

Donde G_e y G_f son los propagadores del electrón y del fotón respectivamente. Utilizando la forma de los propagadores obtenidos en el capítulo anterior:



Figure 4: Diagrama de autointeracción

$$\begin{aligned}
& \int \int d^4 z_1 d^4 z_2 \int \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} (i \frac{(\not{p}_f + m_e)_{\alpha\gamma}}{p_f^2 - m_e^2}) e^{-ip_f \cdot (x_2 - z_2)} (-ie) (\gamma^\mu)_{\gamma\delta} \\
& \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (i \frac{(\not{q} + m_e)_{\delta\epsilon}}{q^2 - m_e^2}) e^{-iq \cdot (z_2 - z_1)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(-i)(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)}{k^2(k^2 - m_f^2)} e^{-ik \cdot (z_2 - z_1)} \\
& (-ie) (\gamma^\nu)_{\epsilon\phi} \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} (i \frac{(\not{p}_i + m_e)_{\phi\beta}}{p_i^2 - m_e^2}) e^{-ip_i \cdot (z_1 - x_1)} \quad (115)
\end{aligned}$$

Donde p_i, q, k, p_f, m_e y m_f son el momento inicial del electrón, el momento del electrón tras la emisión del fotón, el momento del fotón, el momento final del electrón, la masa del electrón y la masa del fotón respectivamente. No confundir el índice γ con las matrices de Dirac también escritas como γ

Atendamos ahora el álgebra de numeradores del factor que está en el centro:

$$\begin{aligned}
& (\gamma^\mu)_{\gamma\delta} (\not{q} + m_e)_{\delta\epsilon} (k^2 \eta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) (\gamma^\nu)_{\epsilon\phi} \\
& = k^2 (\gamma^\mu \not{q} \gamma_\mu)_{\gamma\phi} + m_e k^2 (\gamma^\mu \gamma_\mu)_{\gamma\phi} - (\not{k} \not{q} \not{k})_{\gamma\phi} - m_e (\not{k} \not{k})_{\gamma\phi} \quad (116)
\end{aligned}$$

El primer término

$$k^2 (\gamma^\mu \not{q} \gamma_\mu)_{\gamma\phi} = k^2 (q^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu)_{\gamma\phi} \quad (117)$$

Usando la regla de conmutación de las matrices de Dirac $\gamma_\nu \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\nu = 2g_{\mu\nu}$ se puede escribir $\gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} - \gamma_\mu \gamma_\nu$

$$k^2 (q^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu)_{\gamma\phi} = k^2 (q^\nu \gamma^\mu (2g_{\mu\nu} - \gamma_\mu \gamma_\nu))_{\gamma\phi} = k^2 (2q_\mu \gamma^\mu - 4q^\nu \gamma_\nu)_{\gamma\phi} \quad (118)$$

Donde se ha usado que $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4$. Finalmente entonces

$$k^2 (2q_\mu \gamma^\mu - 4q^\nu \gamma_\nu)_{\gamma\phi} = -(2k^2 \not{q})_{\gamma\phi} \quad (119)$$

En el segundo término usando $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4$ nuevamente

$$m_e k^2 (\gamma^\mu \gamma_\mu)_{\gamma\phi} = 4m_e k^2 \quad (120)$$

El tercer término se puede simplificar usando la relación de conmutación $\not{q}\not{k} + \not{k}\not{q} = 2(q \cdot k)$

$$-(\not{k}\not{q}\not{k})_{\gamma\phi} = -((2(q \cdot k) - \not{q}\not{k})\not{k})_{\gamma\phi} = (-2(q \cdot k)\not{k} + k^2\not{q})_{\gamma\phi} \quad (121)$$

Y el último término

$$-m_e(\not{k}\not{k})_{\gamma\phi} = -m_e k^2 \quad (122)$$

con estos resultados se puede reescribir (292) como

$$\begin{aligned} & \{-2k^2\not{q} + 4m_e k^2 - 2(q \cdot k)\not{k} + k^2\not{q} - m_e k^2\}_{\gamma\phi} \\ & = \{-k^2\not{q} - 2(q \cdot k)\not{k} + 3m_e k^2\}_{\gamma\phi} \end{aligned} \quad (123)$$

Con lo que podemos escribir (115) como:

$$\begin{aligned} & \int \int d^4 z_1 d^4 z_2 \int \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} (i \frac{(\not{p}_f + m_e)_{\alpha\gamma}}{p_f^2 - m_e^2}) e^{-ip_f \cdot (x_2 - z_2)} (-ie) \\ & \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{\{-k^2\not{q} - 2(q \cdot k)\not{k} + 3m_e k^2\}_{\gamma\phi}}{(q^2 - m_e^2)(k^2(k^2 - m_f^2))} \right) \\ & e^{-iq \cdot (z_2 - z_1)} e^{-ik \cdot (z_2 - z_1)} \\ & (-ie) \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} (i \frac{(\not{p}_i + m_e)_{\phi\beta}}{p_i^2 - m_e^2}) e^{-ip_i \cdot (z_1 - x_1)} \end{aligned} \quad (124)$$

$$\begin{aligned} & = \int \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} (i \frac{(\not{p}_f + m_e)_{\alpha\gamma}}{p_f^2 - m_e^2}) (-ie) \\ & \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{\{-k^2\not{q} - 2(q \cdot k)\not{k} + 3m_e k^2\}_{\gamma\phi}}{(q^2 - m_e^2)(k^2(k^2 - m_f^2))} \right) (-ie) \\ & \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} (i \frac{(\not{p}_i + m_e)_{\phi\beta}}{p_i^2 - m_e^2}) \\ & \int \int d^4 z_1 d^4 z_2 e^{-ip_f \cdot (x_2 - z_2)} e^{-iq \cdot (z_2 - z_1)} e^{-ik \cdot (z_2 - z_1)} e^{-ip_i \cdot (z_1 - x_1)} \end{aligned} \quad (125)$$

Resolviendo las integrales respecto a z_1 y z_2 :

$$\begin{aligned} & \int \int d^4 z_1 d^4 z_2 e^{-ip_f \cdot (x_2 - z_2)} e^{-iq \cdot (z_2 - z_1)} e^{-ik \cdot (z_2 - z_1)} e^{-ip_i \cdot (z_1 - x_1)} \\ &= \int d^4 z_1 e^{i(q+k-p_i)z_1} \int d^4 z_2 e^{i(p_f - q - k)z_2} e^{-ip_f \cdot x_2} e^{ip_i \cdot x_1} \quad (126) \end{aligned}$$

Y como $p_i = q + k = p_f$

$$= (2\pi)^4 \delta(q + k - p_i) (2\pi)^4 \delta(p_f - q - k) e^{-ip_f(x_2 - x_1)} \quad (127)$$

y con esto la expresión (125) queda²⁵:

$$\begin{aligned} &= \int \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \left(\frac{(\not{p}_f + m_e)_{\alpha\gamma}}{p_f^2 - m_e^2} \right) (-ie) \\ & \quad \int d^4 q \int d^4 k \left(\frac{\{-k^2 \not{q} - 2(q \cdot k) \not{k} + 3m_e k^2\}_{\gamma\phi}}{(q^2 - m_e^2)(k^2(k^2 - m_f^2))} \right) \\ & (-ie) \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \left(i \frac{(\not{p}_i + m_e)_{\phi\beta}}{p_i^2 - m_e^2} \right) e^{-ip_f(x_2 - x_1)} \delta(q + k - p_i) \delta(p_f - q - k) \quad (128) \end{aligned}$$

Gracias a estas deltas podemos *deshacernos* de dos integrales, tomemos la integral sobre p_i y la integral sobre q , entonces:

$$\begin{aligned} &= \int \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \left(i \frac{(\not{p}_f + m_e)_{\alpha\gamma}}{p_f^2 - m_e^2} \right) (-ie) \\ & \quad \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{\{-k^2(\not{p}_f - \not{k}) - 2((p_f - k) \cdot k) \not{k} + 3m_e k^2\}_{\gamma\phi}}{((p_f - k)^2 - m_e^2)(k^2(k^2 - m_f^2))} \right) \\ & \quad (-ie) \left(i \frac{(\not{p}_f + m_e)_{\phi\beta}}{p_f^2 - m_e^2} \right) e^{-ip_f(x_2 - x_1)} \quad (129) \end{aligned}$$

La transformada de Fourier de la suma de los diagramas es entonces

²⁵Aquí como ya se vio se pone de manifiesto el principio de conservación energía-momento $p_i = q + k$, $p_f = q + k$ y finalmente entonces $p_i = p_f$

26 .

$$\begin{aligned}
& \left(i \frac{(\not{p} + m_e)_{\alpha\beta}}{p^2 - m_e^2} \right) + \left(i \frac{(\not{p} + m_e)_{\alpha\gamma}}{p^2 - m_e^2} \right) (-e^2) \\
& \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{\{3k^2 \not{k} - 2(p \cdot k) \not{k} - k^2 \not{p} + 3m_e k^2\}_{\gamma\phi}}{((p-k)^2 - m_e^2)(k^2 - m_f^2)} \right) \\
& \left(i \frac{(\not{p} + m_e)_{\phi\beta}}{p^2 - m_e^2} \right) \quad (130)
\end{aligned}$$

4.2 Autointeracción en QCD

Para el caso de la interacción en QCD tomamos las definiciones de los propagadores del quark y del gluón en función de los propagadores del electrón y el fotón respectivamente:

$$G_q^{AB} = G_e \delta^{AB} \quad (131)$$

$$G_g^{ab} = G_f \delta^{ab} \quad (132)$$

Donde A y B corren de uno a tres y a y b de uno a ocho. Para el caso de un gluón masivo tenemos $m_g \neq 0$ y los vértices están dados por:

$$ig(T^a)_{AB}(\gamma^\mu)_{\gamma\delta} \quad (133)$$

Así, tenemos entonces un factor extra con respecto al caso de QED:

$$(T^a)_{AD} \delta^{DC} \delta_{ab} (T^b)_{CB} = (T^a)_{AC} (T^a)_{CB} = (T^a T^a)_{AB} \quad (134)$$

que para SU(N) es igual a

$$\frac{N^2 - 1}{2N} \delta_{AB} \quad (135)$$

²⁶ya que $p_i = p_f$ se usará la notación p indistintamente

Entonces el análogo de la ecuación (130) para QCD se escribe

$$\begin{aligned}
& [i \frac{(\not{p} + m_e)_{\alpha\beta}}{p^2 - m_e^2}] + (i \frac{(\not{p} + m_e)_{\alpha\gamma}}{p^2 - m_e^2})(-g^2) \\
& \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{\{3k^2 \not{k} - 2(p \cdot k) \not{k} - k^2 \not{p} + 3m_e k^2\}_{\gamma\phi}}{((p-k)^2 - m_e^2)(k^2(k^2 - m_f^2))} \right. \\
& \left. i \frac{(\not{p} + m_e)_{\phi\beta}}{p^2 - m_e^2} \right] \frac{N^2 - 1}{2N} \delta_{AB} \quad (136)
\end{aligned}$$

4.3 Generalización a D dimensiones

Para el caso de QED en D dimensiones trabajamos con una métrica η definida como:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

Las matrices de Dirac están definidas por sus relaciones de conmutación. Para esta métrica la forma más general de estas relaciones se puede escribir como:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} \quad (137)$$

con μ y ν que esta vez corren de 0 a D-1. El análogo a la ecuación (115) para D dimensiones queda:

$$\begin{aligned}
& \int \int d^D z_1 d^D z_2 \int \frac{d^D p_f}{(2\pi)^D} (i \frac{(\not{p}_f + m_e)_{\alpha\gamma}}{p_f^2 - m_e^2}) e^{-ip_f \cdot (x_2 - z_2)} (-ie) (\gamma^\mu)_{\gamma\delta} \\
& \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} (i \frac{(\not{q} + m_e)_{\delta\epsilon}}{q^2 - m_e^2}) e^{-iq \cdot (z_2 - z_1)} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(-i)(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)}{k^2(k^2 - m_f^2)} e^{-ik \cdot (z_2 - z_1)} \\
& (-ie) (\gamma^\nu)_{\epsilon\phi} \int \frac{d^D p_i}{(2\pi)^D} (i \frac{(\not{p}_i + m_e)_{\phi\beta}}{p_i^2 - m_e^2}) e^{-ip_i \cdot (z_1 - x_1)} \quad (138)
\end{aligned}$$

Trabajando ahora el álgebra de numeradores del factor que está en el centro:

$$\begin{aligned}
& (\gamma^\mu)_{\gamma\delta}(\not{q} + m_e)_{\delta\epsilon}(k^2\eta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)(\gamma^\nu)_{\epsilon\phi} \\
&= k^2(\gamma^\mu \not{q} \gamma_\mu)_{\gamma\phi} + m_e k^2(\gamma^\mu \gamma_\mu)_{\gamma\phi} - (\not{k} \not{q} \not{k})_{\gamma\phi} - m_e (\not{k} \not{k})_{\gamma\phi}
\end{aligned} \tag{139}$$

El primer término

$$k^2(\gamma^\mu \not{q} \gamma_\mu)_{\gamma\phi} = k^2(q^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu)_{\gamma\phi} \tag{140}$$

Usando la regla de conmutación de las matrices de Dirac $\gamma_\nu \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\nu = 2\eta_{\mu\nu}$ se puede escribir $\gamma_\nu \gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu} - \gamma_\mu \gamma_\nu$

$$k^2(q^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu)_{\gamma\phi} = k^2(q^\nu \gamma^\mu (2\eta_{\mu\nu} - \gamma_\mu \gamma_\nu))_{\gamma\phi} = k^2(2q_\mu \gamma^\mu - D q^\nu \gamma_\nu)_{\gamma\phi} \tag{141}$$

Donde se ha usado que $\gamma^\mu \gamma_\mu = D$. Finalmente entonces

$$k^2(2q_\mu \gamma^\mu - D q^\nu \gamma_\nu)_{\gamma\phi} = ((2 - D)k^2 \not{q})_{\gamma\phi} \tag{142}$$

En el segundo término usando $\gamma^\mu \gamma_\mu = D$ nuevamente

$$m_e k^2(\gamma^\mu \gamma_\mu)_{\gamma\phi} = D m_e k^2 \tag{143}$$

El tercer término se puede simplificar usando la relación de conmutación $\not{q} \not{k} + \not{k} \not{q} = 2(q \cdot k)$

$$-(\not{k} \not{q} \not{k})_{\gamma\phi} = -((2(q \cdot k) - \not{q} \not{k}) \not{k})_{\gamma\phi} = (-2(q \cdot k) \not{k} + k^2 \not{q})_{\gamma\phi} \tag{144}$$

Y el último término

$$-m_e (\not{k} \not{k})_{\gamma\phi} = -m_e k^2 \tag{145}$$

con estos resultados se puede reescribir (139) como

$$\begin{aligned} & \{(2-D)k^2 \not{q} + Dm_e k^2 - 2(q \cdot k) \not{k} + k^2 \not{q} - m_e k^2\}_{\gamma\phi} \\ & = \{(3-D)k^2 \not{q} - 2(q \cdot k) \not{k} + (D-1)m_e k^2\}_{\gamma\phi} \end{aligned} \quad (146)$$

con lo que podemos escribir la ecuación (124) para D dimensiones como

$$\begin{aligned} & \int \int d^D z_1 d^D z_2 \int \frac{d^D p_f}{(2\pi)^D} (i \frac{(\not{p}_f + m_e)_{\alpha\gamma}}{p_f^2 - m_e^2}) e^{-ip_f \cdot (x_2 - z_2)} (-ie) \\ & \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left(\frac{\{(3-D)k^2 \not{q} - 2(q \cdot k) \not{k} + (D-1)m_e k^2\}_{\gamma\phi}}{(q^2 - m_e^2)(k^2(k^2 - m_f^2))} \right) \\ & e^{-iq \cdot (z_2 - z_1)} e^{-ik \cdot (z_2 - z_1)} \\ & (-ie) \int \frac{d^D p_i}{(2\pi)^D} (i \frac{(\not{p}_i + m_e)_{\phi\beta}}{p_i^2 - m_e^2}) e^{-ip_i \cdot (z_1 - x_1)} \end{aligned} \quad (147)$$

Resolviendo las integrales para z_1 y z_2

$$\begin{aligned} & = \int \frac{d^D p_f}{(2\pi)^D} (i \frac{(\not{p}_f + m_e)_{\alpha\gamma}}{p_f^2 - m_e^2}) (-ie) \\ & \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left(\frac{\{(3-D)k^2(\not{p}_f - \not{k}) - 2((p_f - k) \cdot k) \not{k} + (D-1)m_e k^2\}_{\gamma\phi}}{((p_f - k)^2 - m_e^2)(k^2(k^2 - m_f^2))} \right) \\ & (-ie) (i \frac{(\not{p}_f + m_e)_{\phi\beta}}{p_f^2 - m_e^2}) e^{-ip_f \cdot (x_2 - x_1)} \end{aligned} \quad (148)$$

Y entonces la transformada de Fourier de la suma de los diagramas

es ²⁷ :

$$\begin{aligned}
& (i \frac{(\not{p} + m_e)_{\alpha\beta}}{p^2 - m_e^2}) + (i \frac{(\not{p} + m_e)_{\alpha\gamma}}{p^2 - m_e^2})(-e^2) \\
& \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left(\frac{\{(D-1)k^2 \not{k} - 2(p \cdot k) \not{k} + (3-D)k^2 \not{p} + (D-1)m_e k^2\}_{\gamma\phi}}{((p-k)^2 - m_e^2)(k^2(k^2 - m_f^2))} \right) \\
& \qquad \qquad \qquad (i \frac{(\not{p} + m_e)_{\phi\beta}}{p^2 - m_e^2}) \quad (149)
\end{aligned}$$

²⁷donde la notación “ p ” se usa indistintamente para designar a $p_i = p_f$

5 Evaluación del diagrama

Tomamos la expresión (149) y atendamos ahora el factor del centro del segundo término, esto es:

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left(\frac{(D-1)k^2 \not{k} - 2(p \cdot k) \not{k} + (3-D)k^2 \not{p} + (D-1)m_e k^2}{((p-k)^2 - m_e^2)(k^2(k^2 - m_f^2))} \right) \quad (150)$$

Su denominador se puede separar en fracciones parciales de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left(\frac{1}{((p-k)^2 - m_e^2)(k^2(k^2 - m_f^2))} \right) \\ &= \frac{1}{m_f^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{((p-k)^2 - m_e^2)(k^2 - m_f^2)} \\ & \quad - \frac{1}{m_f^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{((p-k)^2 - m_e^2)k^2} \quad (151) \end{aligned}$$

Nótese que esta expresión está indeterminada en $k^0 = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m_f^2}$ y $k^0 = p^0 \pm \sqrt{(\vec{p} - \vec{k})^2 + m_e^2}$ véase figura. Tomando en cuenta el numerador la expresión se ve entonces como:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left(\frac{(D-1)k^2 \not{k} - 2(p \cdot k) \not{k} + (3-D)k^2 \not{p} + (D-1)m_e k^2}{((p-k)^2 - m_e^2)(k^2(k^2 - m_f^2))} \right) \\ &= \frac{1}{m_f^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(D-1)k^2 \not{k} - 2(p \cdot k) \not{k} + (3-D)k^2 \not{p} + (D-1)m_e k^2}{((p-k)^2 - m_e^2)(k^2 - m_f^2)} \\ & \quad - \frac{1}{m_f^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(D-1)k^2 \not{k} - 2(p \cdot k) \not{k} + (3-D)k^2 \not{p} + (D-1)m_e k^2}{((p-k)^2 - m_e^2)k^2} \quad (152) \end{aligned}$$

Tomando el primer término y aplicándole la prescripción $i\epsilon$ se tiene

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(D-1)k^2 \not{k} - 2(p \cdot k) \not{k} + (3-D)k^2 \not{p} + (D-1)m_e k^2}{((p-k)^2 - m_e^2 + i\epsilon)(k^2 - m_f^2 + i\epsilon)} \quad (153)$$

Aplicando la sustitución $k \rightarrow k + \frac{p}{2}$ al denominador ²⁸

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{((k - \frac{p}{2})^2 - m_e^2 + i\epsilon)((k + \frac{p}{2})^2 - m_f^2 + i\epsilon)} \\ &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{((k - \frac{p}{2})^2 - m_e^2 + i\epsilon)((k + \frac{p}{2})^2 - m_f^2 + i\epsilon)} \end{aligned} \quad (154)$$

Ahora se analizan cada uno de los factores del denominador, el primero

$$\begin{aligned} ((k - \frac{p}{2})^2 - m_e^2 + i\epsilon) &= ((k^0 - \frac{p^0}{2})^2 - (\vec{k} - \frac{\vec{p}}{2})^2 - m_e^2 + i\epsilon) \\ &= (k^0 - \frac{p^0}{2} - \sqrt{(\vec{k} - \frac{\vec{p}}{2})^2 + m_e^2 + i\eta})(k^0 - \frac{p^0}{2} + \sqrt{(\vec{k} - \frac{\vec{p}}{2})^2 + m_e^2 - i\eta}) \end{aligned} \quad (155)$$

y el segundo término

$$\begin{aligned} (k + \frac{p}{2})^2 - m_f^2 + i\epsilon &= (k^0 + \frac{p^0}{2})^2 - (\vec{k} + \frac{\vec{p}}{2})^2 - m_f^2 + i\epsilon \\ &= (k^0 + \frac{p^0}{2} - \sqrt{(\vec{k} + \frac{\vec{p}}{2})^2 + m_f^2 + i\eta})(k^0 + \frac{p^0}{2} + \sqrt{(\vec{k} + \frac{\vec{p}}{2})^2 + m_f^2 - i\eta}) \end{aligned} \quad (156)$$

De las ecuaciones anteriores encontramos que ahora los polos se localizan en

$$\begin{aligned} k^0 &= -\frac{p^0}{2} + \sqrt{(\vec{k} + \frac{\vec{p}}{2})^2 + m_f^2 - i\eta} \\ k^0 &= -\frac{p^0}{2} - \sqrt{(\vec{k} + \frac{\vec{p}}{2})^2 + m_f^2 + i\eta} \\ k^0 &= \frac{p^0}{2} + \sqrt{(\frac{\vec{p}}{2} - \vec{k})^2 + m_e^2 - i\eta} \\ k^0 &= \frac{p^0}{2} - \sqrt{(\frac{\vec{p}}{2} - \vec{k})^2 + m_e^2 + i\eta} \end{aligned} \quad (157)$$

²⁸Se dejará de momento el numerador de la integral y se trabajará al final

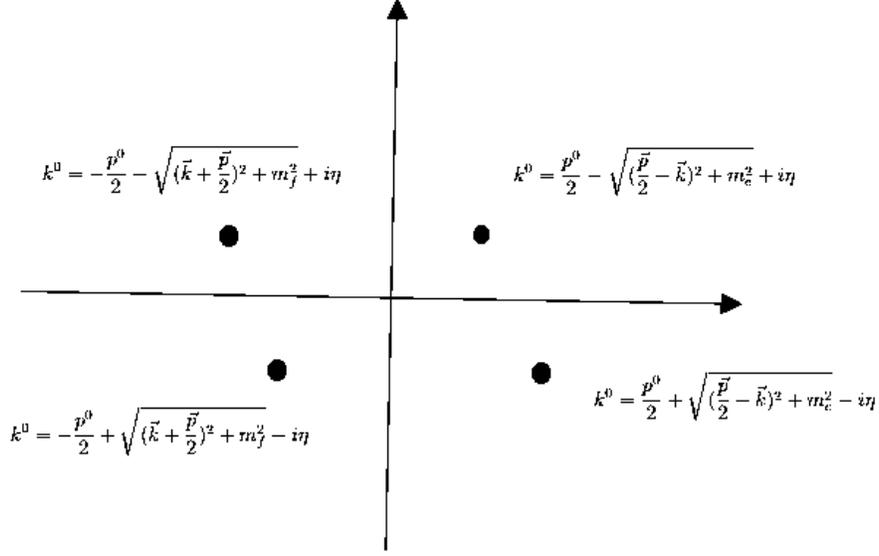


Figure 5: plano complejo que muestra los polos para k^0

Como se ilustra en la figura 5. Para poder hacer una rotación de Wick se necesita entonces que se satisfaga

$$\begin{aligned}
-\frac{p^0}{2} - \sqrt{(\vec{k} + \frac{\vec{p}}{2})^2 + m_f^2} < 0 &\Leftrightarrow \frac{p^0}{2} > -m_f \\
\frac{p^0}{2} - \sqrt{(\frac{\vec{p}}{2} - \vec{k})^2 + m_e^2} < 0 &\Leftrightarrow \frac{p^0}{2} < m_e \\
-\frac{p^0}{2} + \sqrt{(\vec{k} + \frac{\vec{p}}{2})^2 + m_f^2} > 0 &\Leftrightarrow \frac{p^0}{2} < m_f \\
\frac{p^0}{2} + \sqrt{(\frac{\vec{p}}{2} - \vec{k})^2 + m_e^2} > 0 &\Leftrightarrow \frac{p^0}{2} > -m_e
\end{aligned} \tag{158}$$

Entonces la rotación se puede realizar para $-2m < p^0 < 2m$ donde $m = \min(m_e, m_f)$

La expresión (154) se puede escribir como

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{((k - \frac{p}{2})^2 - m_e^2 + i\epsilon)((k + \frac{p}{2})^2 - m_f^2 + i\epsilon)} \\
&= i \int \frac{dk_E^0}{(2\pi)} \int \frac{d^{D-1} k}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{(ik_E^0 - \frac{p^0}{2})^2 - (\vec{k} - \frac{\vec{p}}{2})^2 - m_e^2 + i\epsilon} \\
& \quad \times \frac{1}{(ik_E^0 + \frac{p^0}{2})^2 - (\vec{k} + \frac{\vec{p}}{2})^2 - m_f^2 + i\epsilon} \quad (159)
\end{aligned}$$

Si se define $k^0 \equiv ik_E^0$. Nótese que

$$(ik_E^0 \pm \frac{p^0}{2})^2 - (\vec{k} \pm \frac{\vec{p}}{2})^2 = -(k_E^0 \mp i\frac{p^0}{2})^2 - (\vec{k} \pm \frac{\vec{p}}{2})^2 \quad (160)$$

y como de igual manera $p^0 \equiv ip_E^0$ se tiene que

$$-(k_E^0 \mp i\frac{p^0}{2})^2 - (\vec{k} \pm \frac{\vec{p}}{2})^2 = -(k_E^0 \pm \frac{p_E^0}{2})^2 - (\vec{k} \pm \frac{\vec{p}}{2})^2 = -(k_E \pm \frac{p_E}{2})^2 \quad (161)$$

Con esto se puede escribir (159) como

$$\begin{aligned}
& i \int \frac{dk_E^0}{(2\pi)} \int \frac{d^{D-1} k}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{(ik_E^0 - \frac{p^0}{2})^2 - (\vec{k} - \frac{\vec{p}}{2})^2 - m_e^2 + i\epsilon} \\
& \quad \times \frac{1}{(ik_E^0 + \frac{p^0}{2})^2 - (\vec{k} + \frac{\vec{p}}{2})^2 - m_f^2 + i\epsilon} \\
&= i \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{((k_E - \frac{p_E}{2})^2 + m_e^2 + i\epsilon)((k_E + \frac{p_E}{2})^2 + m_f^2 + i\epsilon)} \quad (162)
\end{aligned}$$

Tomando la sustitución $k_E \rightarrow k_E - \frac{p_E}{2}$

$$\begin{aligned}
& i \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{((k_E - \frac{p_E}{2})^2 + m_e^2 + i\epsilon)((k_E + \frac{p_E}{2})^2 + m_f^2 + i\epsilon)} \\
&= i \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{((k_E - p_E)^2 + m_e^2 + i\epsilon)(k_E^2 + m_f^2 + i\epsilon)} \quad (163)
\end{aligned}$$

De manera análoga tomando la prescripción $i\epsilon$ para el segundo término de la ecuación (152) y haciendo la rotación se tiene que

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{((p - k)^2 - m_e^2)k^2} = i \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{((k_E - p_E)^2 + m_e^2 + i\epsilon)(k_E^2 + i\epsilon)} \quad (164)$$

Se introduce aquí el parámetro de Feynman $\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{(xA+(1-x)B)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{(x(A-B)+B)^2}$. Identificando ahora $A = (k_E - p_E)^2 + m_e^2$ y $B = k_E^2 + m_f^2$ la expresión (163) puede escribirse como

$$\begin{aligned} & i \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{((k_E - p_E)^2 + m_e^2)(k_E^2 + m_f^2)} \\ &= i \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \frac{1}{(x(k_E - p_E)^2 + xm_e^2 + (1-x)k_E^2 + (1-x)m_f^2)^2} \end{aligned} \quad (165)$$

Nótese aquí que el primer y tercer término del denominador

$$\begin{aligned} x(k_E - p_E)^2 + (1-x)k_E^2 &= k_E^2 - 2xp_E \cdot k_E + xp_E^2 \\ &= (k_E - xp_E)^2 + (x-x^2)p_E^2 \end{aligned} \quad (166)$$

Con esto podemos reescribir el denominador

$$\begin{aligned} & i \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \frac{1}{(x(k_E - p_E)^2 + xm_e^2 + (1-x)k_E^2 + (1-x)m_f^2)^2} \\ &= i \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \frac{1}{((k_E - xp_E)^2 + (x-x^2)p_E^2 + xm_e^2 + (1-x)m_f^2)^2} \end{aligned} \quad (167)$$

Tomando la traslación $k_E \rightarrow k_E + xp_E$ la expresión anterior queda

$$i \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \frac{1}{(k_E^2 + (x-x^2)p_E^2 + xm_e^2 + (1-x)m_f^2)^2} \quad (168)$$

Con lo que se ha logrado escribir la expresión en la forma

$$i \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \frac{1}{(k_E^2 + \Delta_1)^2} \quad (169)$$

Con $\Delta_1 \equiv (x-x^2)p_E^2 + xm_e^2 + (1-x)m_f^2$.

Siguiendo los mismos pasos para el segundo término de la expresión (152) se obtiene el resultado

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{((p-k)^2 - m_e^2)k^2} = i \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \frac{1}{(k_E^2 + (x-x^2)p_E^2 + xm_e^2)^2} \quad (170)$$

Con lo que se puede reescribir (152) como

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{m_f^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{((p-k)^2 - m_e^2)(k^2 - m_f^2)} - \frac{1}{m_f^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{((p-k)^2 - m_e^2)k^2} \\
&= \frac{i}{m_f^2} \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \frac{1}{(k_E^2 + (x-x^2)p_E^2 + xm_e^2 + (1-x)m_f^2)^2} \\
&\quad - \frac{i}{m_f^2} \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \frac{1}{(k_E^2 + (x-x^2)p_E^2 + xm_e^2)^2} \\
&= \frac{i}{m_f^2} \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \frac{1}{(k_E^2 + \Delta_1)^2} - \frac{i}{m_f^2} \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \frac{1}{(k_E^2 + \Delta_2)^2}
\end{aligned} \tag{171}$$

Donde $\Delta_2 \equiv (x-x^2)p_E^2 + xm_e^2$.

Si reescribimos este resultado en coordenadas esféricas, es decir, teniendo en cuenta que

$$\int d^D k_E = \int_0^\infty d|k_E| \cdot |k_E|^{D-1} \int d\Omega \tag{172}$$

obtenemos

$$\int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k_E^2 + \Delta_i)^2} = \int d\Omega \int_0^\infty \frac{d|k_E| \cdot |k_E|^{D-1}}{(2\pi)^D (k_E^2 + \Delta_i)^2} \tag{173}$$

Para $i=1,2$.

En D dimensiones

$$\int d^D k_E = \int_0^\infty d|k_E| \cdot |k_E|^{D-1} \int d\Omega_D \tag{174}$$

con lo que obtenemos

$$\int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k_E^2 + \Delta_i)^2} = \int d\Omega_D \int_0^\infty \frac{d|k_E| \cdot |k_E|^{D-1}}{(2\pi)^D (|k_E|^2 + \Delta_i)^2} \tag{175}$$

Para $i=1,2$.

Podemos ver que para valores grandes de k_E el denominador va como k_E^4 es decir

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{d|k_E| \cdot |k_E|^{D-1}}{(2\pi)^D (|k_E|^2 + \Delta_i)^2} &\sim \int_0^\infty \frac{d|k_E| \cdot |k_E|^{D-1}}{(2\pi)^D |k_E|^4} \\ &= \int_0^\infty \frac{d|k_E| \cdot |k_E|^{D-5}}{(2\pi)^D} \sim \left. \frac{|k_E|^{D-4}}{D-4} \right|_0^\infty \end{aligned} \quad (176)$$

De esta expresión se puede ver que la integral diverge para $D \geq 4$

Tomamos el numerador como en la expresión (153). Se ha aplicado una traslación $k \rightarrow k + \frac{p}{2}$ (ecuación (154)), después se definió $k^0 \equiv ik_E^0$, (ecuación (159)), una vez definidos los momentos euclidianos k_E se tomó la traslación $k_E \rightarrow k_E - \frac{p_E}{2}$ (ecuación (163)) y finalmente la traslación $k_E \rightarrow k_E + xp_E$ (ecuación (159)). Se puede demostrar que la primer y segunda traslación se cancelan para el numerador, por lo que, aplicando la definición de los momentos euclidianos se tiene:

$$\begin{aligned} k^2 &= (k^0)^2 - \vec{k}^2 = -k_E^2 \\ p \cdot k &= p^0 k^0 - \vec{k} \cdot \vec{p} = -p_E \cdot k_E \\ \not{k} &= k_\mu \gamma^\mu = k^0 \gamma^0 - \vec{k} \cdot \vec{\gamma} = ik_E^0 \gamma^0 - \vec{k} \cdot \vec{\gamma} = ik_E^0 \gamma^0 + i\vec{k} \cdot \vec{\gamma}_E = ik_E \gamma_E = i\not{k}_E \end{aligned} \quad (177)$$

Donde se ha definido $\gamma_E^0 \equiv \gamma^0$, $\gamma_E^j \equiv i\gamma^j$ las matrices gamma euclidianas.²⁹ Con lo que se puede escribir el numerador como

$$\begin{aligned} &(D-1)k^2 \not{k} - 2(p \cdot k) \not{k} + (3-D)k^2 \not{p} + (D-1)m_e k^2 \\ &= -i(D-1)k_E^2 \not{k}_E + 2i(p_E \cdot k_E) \not{k}_E - i(3-D)k_E^2 \not{p}_E - (D-1)m_e k_E^2 \end{aligned} \quad (178)$$

y tomando ahora la tercer traslación $k_E \rightarrow k_E + xp_E$ la expresión

²⁹Más aún podemos obtener relaciones de conmutación para estas gammas euclidianas si consideramos que $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}$ entonces $\{\gamma_0, \gamma_0\} = 2 = \{\gamma_E^0, \gamma_E^0\}$ y $\{\gamma_i, \gamma_j\} = -2\delta_{ij} = -\{\gamma_E^i, \gamma_E^j\}$ y de aquí finalmente $\{\gamma_E^\mu, \gamma_E^\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$

anterior se puede escribir

$$\begin{aligned}
& -i(D-1)(k_E + xp_E)^2(k_E + xp_E) + 2i(p_E \cdot (k_E + xp_E))(k_E + xp_E) \\
& \quad - i(3-D)(k_E + xp_E)^2\cancel{\not{p}}_E - (D-1)m_e(k_E + xp_E)^2 \\
= & -i(D-1)(k_E^2\cancel{\not{p}}_E + 2xk_Ep_E\cancel{\not{p}}_E + x^2p_E^2\cancel{\not{p}}_E + k_E^2x\cancel{\not{p}}_E + 2x^2k_Ep_E\cancel{\not{p}}_E + x^3p_E^2\cancel{\not{p}}_E) \\
& \quad + 2i(p_E \cdot k_E + xp_E^2)(k_E + xp_E) \\
& -i(3-D)(k_E^2 + 2k_Exp_E + x^2p_E^2)\cancel{\not{p}}_E - (D-1)m_e(k_E^2 + 2k_Exp_E + x^2p_E^2) \equiv \tau
\end{aligned} \tag{179}$$

El desarrollo que hemos seguido en este capítulo permite escribir la ecuación (150) como

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left(\frac{(D-1)k^2\cancel{\not{p}} - 2(p \cdot k)\cancel{\not{p}} + (3-D)k^2\cancel{\not{p}} + (D-1)m_e k^2}{((p-k)^2 - m_e^2)(k^2(k^2 - m_f^2))} \right) \\
= & \frac{i}{m_f^2} \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \frac{\tau}{(k_E^2 + \Delta_1)^2} - \frac{i}{m_f^2} \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx \frac{\tau}{(k_E^2 + \Delta_2)^2}
\end{aligned} \tag{180}$$

Notemos aquí que las integrales que tengan potencias impares de k_E en el numerador darán por resultado cero pues son funciones impares³⁰ evaluadas en un intervalo simétrico $(-\infty, \infty)$. Si quitamos estos términos del numerador los términos restantes son:

$$\begin{aligned}
& -i(D-1)(2xk_Ep_E\cancel{\not{p}}_E + k_E^2x\cancel{\not{p}}_E + x^3p_E^2\cancel{\not{p}}_E) \\
& \quad + 2i((p_E \cdot k_E)\cancel{\not{p}}_E + x^2p_E^2\cancel{\not{p}}_E) \\
& \quad - i(3-D)(k_E^2 + x^2p_E^2)\cancel{\not{p}}_E \\
& \quad - (D-1)m_e(k_E^2 + x^2p_E^2)
\end{aligned} \tag{181}$$

³⁰Esto quiere decir que $f(-x) = -f(x)$

y con esto la expresión (180) se reescribe como

$$\sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{(-1)^{j-1}}{m_f^2} i \int_0^1 dx \int \frac{d^D k_E}{(2\pi)^D} \right. \\ \left. \left(\frac{-i(D-1)(2xk_E p_E k_E + k_E^2 x \not{p}_E + x^3 p_E^2 \not{p}_E)}{(k_E^2 + \Delta_j)^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2i((p_E \cdot k_E) \not{k}_E + x^2 p_E^2 \not{p}_E)}{(k_E^2 + \Delta_j)^2} - \frac{i(3-D)(k_E^2 + x^2 p_E^2) \not{p}_E}{(k_E^2 + \Delta_j)^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(D-1)m_e(k_E^2 + x^2 p_E^2)}{(k_E^2 + \Delta_j)^2} \right) \right\} \quad (182)$$

O en coordenadas esféricas

$$\sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{(-1)^{j-1}}{m_f^2} i \int_0^1 dx \int \frac{\Omega_D}{(2\pi)^D} \int_0^\infty d|k_E| |k_E|^{D-1} \right. \\ \left. \left(\frac{-i(D-1)(2xk_E p_E k_E + k_E^2 x \not{p}_E + x^3 p_E^2 \not{p}_E)}{(k_E^2 + \Delta_j)^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2i((p_E \cdot k_E) \not{k}_E + x^2 p_E^2 \not{p}_E)}{(k_E^2 + \Delta_j)^2} - \frac{i(3-D)(k_E^2 + x^2 p_E^2) \not{p}_E}{(k_E^2 + \Delta_j)^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(D-1)m_e(k_E^2 + x^2 p_E^2)}{(k_E^2 + \Delta_j)^2} \right) \right\} \quad (183)$$

La integral sobre los ángulos ($\int \Omega_D$) se puede resolver teniendo en cuenta que:

$$(\sqrt{\pi})^D = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \right)^D = \int_{-\infty}^{\infty} d^D x e^{-\sum_{i=1}^D x_i^2} \quad (184)$$

Cambiando a coordenadas esféricas esta expresión se escribe

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^D x e^{-\sum_{i=1}^D x_i^2} = \int \Omega_D \int_0^\infty d|x| |x|^{D-1} e^{-|x|^2} \quad (185)$$

Si se toma el cambio de variable $y = |x|^2 \Rightarrow dy = 2|x|d|x|$ y se puede reescribir la función anterior como

$$\int \Omega_D \int_0^\infty d|x| |x|^{D-1} e^{-|x|^2} = \frac{1}{2} \int \Omega_D \int_0^\infty dy y^{\frac{1}{2}(D-1)-\frac{1}{2}} e^{-y} \\ = \frac{1}{2} \int \Omega_D (\Gamma(D/2)) \quad (186)$$

donde Γ es la función gamma. Entonces

$$\int \Omega_D = \frac{2(\pi)^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \quad (187)$$

y

$$\int \frac{\Omega_D}{(2\pi)^D} = \frac{2}{(4\pi)^{D/2}\Gamma(D/2)} \quad (188)$$

Para la integral sobre la parte radial se toma el cambio de variable $y = |k_E|^2 \Rightarrow dy = 2|k_E|dk_E$ para escribir

$$\int_0^\infty \frac{d|k_E||k_E|^{D-1}}{(|k_E|^2 + \Delta_j)^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dy y^{D/2-1}}{(y + \Delta_j)^2} \quad (189)$$

Esto se puede escribir como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dy y^{D/2-1}}{(y + \Delta_j)^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_j} \frac{\Delta_j}{(y + \Delta_j)^2} dy \left(\frac{y}{y + \Delta_j}\right)^{D/2-1} \left(\frac{y + \Delta_j}{\Delta_j}\right)^{D/2-1} \Delta_j^{D/2-1} \end{aligned} \quad (190)$$

Para entonces tomar el cambio de variable $x = \frac{\Delta_j}{y + \Delta_j} \Rightarrow dx = \frac{-\Delta_j}{(y + \Delta_j)^2} dy$ y $1 - x = \frac{y}{y + \Delta_j}$ y obtener

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_j} \frac{\Delta_j}{(y + \Delta_j)^2} dy \left(\frac{y}{y + \Delta_j}\right)^{D/2-1} \left(\frac{y + \Delta_j}{\Delta_j}\right)^{D/2-1} \Delta_j^{D/2-1} \\ &= \Delta_j^{(D/2-2)} \frac{1}{2} \int_0^1 dx (1 - x)^{D/2-1} x^{1-D/2} \end{aligned} \quad (191)$$

Esta expresión tiene la forma de la función β de Euler: $\beta(a, b) \equiv \int_0^1 dx (1 - x)^{b-1} x^{a-1}$ que se puede escribir también en términos de la función gamma $\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$. Entonces la expresión anterior

$$\begin{aligned} & \Delta_j^{(D/2-2)} \frac{1}{2} \int_0^1 dx (1 - x)^{D/2-1} x^{1-D/2} \\ &= \Delta_j^{(D/2-2)} \frac{1}{2} \beta(2 - D/2, D/2) \\ &= \Delta_j^{(D/2-2)} \frac{1}{2} \frac{\Gamma(2 - D/2)\Gamma(D/2)}{\Gamma(2)} \end{aligned} \quad (192)$$

así que:

$$\int_0^\infty \frac{d|k_E||k_E|^{D-1}}{(|k_E|^2 + \Delta_j)^2} = \Delta_j^{(D/2-2)} \frac{1}{2} \frac{\Gamma(2 - D/2)\Gamma(D/2)}{\Gamma(2)} \quad (193)$$

Pero la expresión (183) también tiene potencias cuadradas de $|k_E|$ en el numerador, para este caso tenemos

$$\int_0^\infty \frac{d|k_E||k_E|^{D-1}|k_E|^2}{(|k_E|^2 + \Delta_j)^2} = \int_0^\infty \frac{d|k_E||k_E|^{D+1}}{(|k_E|^2 + \Delta_j)^2} \quad (194)$$

tomando el mismo cambio de variable que se tomó anteriormente $y = |k_E|^2 \Rightarrow dy = 2|k_E|d|k_E|$ la expresión queda

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dy y^{D/2}}{(y + \Delta_j)^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_j} \frac{\Delta_j}{(y + \Delta_j)^2} dy \left(\frac{y}{y + \Delta_j}\right)^{D/2} \left(\frac{y + \Delta_j}{\Delta_j}\right)^{D/2} \Delta_j^{D/2} \quad (195)$$

tomando $x = \frac{\Delta_j}{y + \Delta_j} \Rightarrow dx = \frac{-\Delta_j}{(y + \Delta_j)^2} dy$ y $1 - x = \frac{y}{y + \Delta_j}$ podemos escribirla como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_j} \frac{\Delta_j}{(y + \Delta_j)^2} dy \left(\frac{y}{y + \Delta_j}\right)^{D/2} \left(\frac{y + \Delta_j}{\Delta_j}\right)^{D/2} \Delta_j^{D/2} \\ = \frac{1}{2} \Delta_j^{D/2-1} \int_0^1 dx (1-x)^{D/2} x^{-D/2} \end{aligned} \quad (196)$$

en términos de la función β de Euler

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta_j^{D/2-1} \int_0^1 dx (1-x)^{D/2} x^{-D/2} \\ = \frac{1}{2} \Delta_j^{D/2-1} \beta(1 - D/2, D/2 + 1) \end{aligned} \quad (197)$$

y en términos de la función gamma se tiene que

$$\int_0^\infty \frac{d|k_E||k_E|^{D+1}}{(|k_E|^2 + \Delta_j)^2} = \frac{1}{2} \Delta_j^{D/2-1} \frac{\Gamma(1 - D/2)\Gamma(D/2 + 1)}{\Gamma(2)} \quad (198)$$

Para el caso de los términos de la forma $(k_E)_\mu (k_E)_\nu$ del numerador se espera que la integral de como resultado alguna función de Δ_j (independiente de μ) si los índices μ y ν son iguales y 0 si son diferentes, entonces

$$\int \frac{d^D k_E (k_E)_\mu (k_E)_\nu}{(2\pi)^D (|k_E|^2 + \Delta_j)^2} = \delta_{\mu\nu} c(\Delta) \quad (199)$$

contrayendo con $\delta_{\mu\nu}$

$$\int \frac{d^D k_E \delta_{\mu\nu} (k_E)_\mu (k_E)_\nu}{(2\pi)^D (|k_E|^2 + \Delta_j)^2} = \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\nu} c(\Delta_j) = D c(\Delta_j) \quad (200)$$

$$\int \frac{d^D k_E k_E^2}{(2\pi)^D (|k_E|^2 + \Delta_j)^2} = \frac{D}{2} \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}} \Delta^{D/2-1} \quad (201)$$

de aquí se puede obtener una expresión para $c(\Delta_j)$

$$\begin{aligned} c(\Delta_j) &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}} \Delta^{D/2-1} \\ &\rightarrow \int \frac{d^D k_E (k_E)_\mu (k_E)_\nu}{(2\pi)^D (|k_E|^2 + \Delta_j)^2} = \delta_{\mu\nu} \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}} \Delta^{D/2-1} \end{aligned} \quad (202)$$

De (188), (193) y (202) se tiene que

$$\int \frac{\Omega_D}{(2\pi)^D} \left(\int_0^\infty \frac{d|k_E| |k_E|^{D-1}}{(|k_E|^2 + \Delta_j)^2} \right) = \frac{\Gamma(2 - D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \Delta_j^{(D/2-2)} \quad (203)$$

y

$$\int \frac{\Omega_D}{(2\pi)^D} \left(\int_0^\infty \frac{d|k_E| |k_E|^{D+1}}{(|k_E|^2 + \Delta_j)^2} \right) = \frac{\Gamma(1 - D/2) \Gamma(D/2 + 1)}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(D/2)} \Delta_j^{D/2-1} \quad (204)$$

Usando que $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$

$$\int \frac{\Omega_D}{(2\pi)^D} \left(\int_0^\infty \frac{d|k_E| |k_E|^{D+1}}{(|k_E|^2 + \Delta_j)^2} \right) = \frac{D}{2} \frac{\Gamma(1 - D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \Delta_j^{D/2-1} \quad (205)$$

La expresión (183) puede escribirse convenientemente como

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{(-1)^{j-1}}{m_f^2} i \int_0^1 dx \int \frac{\Omega_D}{(2\pi)^D} \int_0^\infty \frac{d|k_E| |k_E|^{D-1}}{(k_E^2 + \Delta_j)^2} \right. \\ &(-i(D-1)x^3 p_E^2 \not{p}_E + i2x^2 p_E^2 \not{p}_E - i(3-D)x^2 p_E^2 \not{p}_E - (D-1)m_e x^2 p_E^2 \\ &\quad + (-i(D-1)x \not{p}_E - i(3-D)\not{p}_E - (D-1)m_e) k_E^2 \\ &\quad \left. + ((-i(D-1)2x(p_E \cdot k_E)(k_E)_\mu (\gamma_E)^\mu + i2(p_E \cdot k_E)(k_E)_\mu (\gamma_E)^\mu) \right\} \end{aligned} \quad (206)$$

Usando las expresiones anteriores para calcular las integrales sobre $|k_E|$ se tiene ³¹

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{(-1)^{j-1}}{m_f^2} i \int_0^1 dx \right. \\
& (-i(D-1)x^3 p_E^2 \not{x}_E + i2x^2 p_E^2 \not{x}_E - i(3-D)x^2 p_E^2 \not{x}_E - (D-1)m_e x^2 p_E^2) \left(\frac{\Gamma(2-D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \Delta_j^{(D/2-2)} \right) \\
& + (-i(D-1)x \not{x}_E - i(3-D) \not{x}_E - (D-1)m_e) \left(\frac{D \Gamma(1-D/2)}{2 (4\pi)^{D/2}} \Delta_j^{D/2-1} \right) \\
& \left. + 2i \not{x}_E ((-D+1)x+1) \left(\frac{1 \Gamma(1-D/2)}{2 (4\pi)^{D/2}} \Delta_j^{D/2-1} \right) \right\} \quad (207)
\end{aligned}$$

5.1 $D = 4 - \epsilon$

Tomando $D = 4 - \epsilon$ y haciendo una expansión en ϵ a segundo orden

³¹En lo sucesivo, se evaluará el resultado (207) explícitamente en $D = 4 - \epsilon$ y $D = 3$ dimensiones. Sin embargo, por conveniencia no se tomará en cuenta el factor global i de la ecuación (206) en las secciones 5.1 y 5.2, y se volverá a integrar en los resultados a partir del capítulo 6

se tiene para la expresión anterior

$$\begin{aligned}
\Gamma(2 - D/2) &\rightarrow \Gamma(\epsilon/2) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + o(\epsilon) \\
\Gamma(1 - D/2) &\rightarrow \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) = \frac{\Gamma(\epsilon/2)}{-1 + \frac{\epsilon}{2}} = -\frac{1}{1 - \frac{\epsilon}{2}} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + o(\epsilon)\right) \\
&= -(1 + \epsilon/2 + o(\epsilon)) \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + o(\epsilon)\right) = -\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + 1 + o(\epsilon)\right) \\
\Delta_j^{(D/2-2)} &\rightarrow \Delta_j(\epsilon/2) = 1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\Delta_j) + o(\epsilon) \\
\Delta_j^{D/2-1} &\rightarrow \Delta_j^{1-\epsilon/2} = \Delta_j \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\Delta_j) + o(\epsilon)\right) \\
(4\pi)^{-D/2} &= (4\pi)^{-2+\epsilon/2} = \frac{(4\pi)^{\epsilon/2}}{(4\pi)^2} = \frac{1 + \frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi) + o(\epsilon)}{(4\pi)^2}
\end{aligned} \tag{208}$$

donde $\gamma_E \approx 0.5772$ es la constante de Euler-Mascheroni. Teniendo en cuenta esto la expresión (207) se puede escribir como

$$\begin{aligned}
&\frac{1 + \frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi) + o(\epsilon)}{(4\pi)^2} \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{(-1)^{j-1}}{m_f^2} \int_0^1 dx \right. \\
&(-i(3 - \epsilon)x^3 p_E^2 \not{x} + i2x^2 p_E^2 \not{x} - i(-1 + \epsilon)x^2 p_E^2 \not{x} - (3 - \epsilon)m_e x^2 p_E^2) \\
&\quad \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + o(\epsilon)\right) \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\Delta_j) + o(\epsilon)\right) \\
&\quad + (-i(3 - \epsilon)x \not{x} - i(-1 + \epsilon) \not{x} - (3 - \epsilon)m_e) \left(-2 - \frac{\epsilon}{2}\right) \\
&\quad \Delta_j \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + 1 + o(\epsilon)\right) \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\Delta_j) + o(\epsilon)\right) \\
&\left. + 2i \not{x} \left((-3 + \epsilon)x + 1\right) \left(\frac{-\Delta_j}{2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + 1 + o(\epsilon)\right) \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(\Delta_j) + o(\epsilon)\right)\right) \right\}
\end{aligned} \tag{209}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 + \frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi) + o(\epsilon)}{(4\pi)^2} \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{(-1)^{j-1}}{m_f^2} \int_0^1 dx \right. \\
&\quad \left((-i(3-\epsilon)x + 2i - i(-1+\epsilon)) x^2 p_E^2 \not{p}_E - (3-\epsilon) m_e x^2 p_E^2 \right) \frac{2}{\epsilon} \\
&\quad + \left((-i3x + 3i) x^2 p_E^2 \not{p}_E - 3m_e x^2 p_E^2 \right) (-\gamma_E - \ln(\Delta_j) + o(\epsilon)) \\
&+ \left(\left((-3i+i\epsilon)x + i - i\epsilon \right) \not{p}_E - (3-\epsilon) m_e \right) \left(-\frac{4}{\epsilon} + 2\gamma_E - 2 + 2\ln(\Delta_j) + 1 + o(\epsilon) \right) \Delta_j \\
&\quad \left. + \left(i2\not{p}_E(-3x + x\epsilon + 1) \right) \left(-\frac{1}{2} \Delta_j \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + 1 - \ln(\Delta_j) + o(\epsilon) \right) \right) \right\} \\
&\hspace{15em} (210)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 + \frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi) + o(\epsilon)}{(4\pi)^2} \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{(-1)^{j-1}}{m_f^2} \int_0^1 dx \right. \\
&\quad \left(\left(\frac{-6ix}{\epsilon} + 2ix + \frac{4i}{\epsilon} + \frac{2i}{\epsilon} - 2i \right) x^2 p_E^2 \not{p}_E + \left(-\frac{6}{\epsilon} + 2 \right) m_e x^2 p_E^2 \right. \\
&\quad + \left((-i3x + 3i) x^2 p_E^2 \not{p}_E - 3m_e x^2 p_E^2 \right) (-\gamma_E - \ln(\Delta_j) + o(\epsilon)) \\
&\quad \left. + \left(\left(\frac{12ix}{\epsilon} - 4ix - \frac{4i}{\epsilon} + 4i \right) \not{p}_E + \left(\frac{12}{\epsilon} - 4 \right) m_e \right. \right. \\
&\quad \left. + \left((-3x + 1) i \not{p}_E - 3m_e \right) (2\gamma_E - 1 + 2\ln(\Delta_j) + o(\epsilon)) \Delta_j \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \Delta_j \left(i2\not{p}_E \left(-\frac{6x}{\epsilon} + 2x + \frac{2}{\epsilon} \right) + \left(i2\not{p}_E(-3x+1) \right) (-\gamma_E + 1 - \ln(\Delta_j) + o(\epsilon)) \right) \right\} \\
&\hspace{15em} (211)
\end{aligned}$$

Aquí la sumatoria sobre j elimina los términos que no dependen de este índice, a saber, la primera línea de la expresión anterior y el producto de $-\gamma_E$ con el primer factor de la segunda línea y también reduce los términos que sólo contienen un factor Δ_j ya que $\sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \int_0^1 \Delta_j dx = \frac{a_1 - a_2}{3} + \frac{b_1 - b_2}{2} + c_1 - c_2$ y $\sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \int_0^1 x \Delta_j dx = \frac{a_1 - a_2}{4} + \frac{b_1 - b_2}{3} + \frac{c_1 - c_2}{2}$. De acuerdo a la definiciones dadas anteriormente para a_j, b_j y c_j tenemos $a_1 - a_2 = 0$, $b_1 - b_2 = -m_f^2$ y $c_1 - c_2 = m_f^2$ y entonces $\sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \int_0^1 x \Delta_j dx = \frac{m_f^2}{6}$ y $\sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \int_0^1 \Delta_j dx = \frac{m_f^2}{2}$. Teniendo esto en cuenta, sacamos

algunos términos de la sumatoria

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{m_f^2} \left(\frac{1 + \frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi) + o(\epsilon)}{(4\pi)^2} \right) \left(\left(\frac{2}{\epsilon} - \frac{2}{3} \right) i\psi_E m_f^2 + \left(\left(2 - \frac{2}{\epsilon} \right) i\psi_E + \left(\frac{6}{\epsilon} - 2 \right) m_e \right) m_f^2 + \right. \\
&- i\psi_E \left(\left(-\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{\epsilon} \right) m_f^2 + (-\gamma_E + 1) (-i\psi_E) \left((-3) \frac{1}{6} m_f^2 + \frac{1}{2} m_f^2 \right) \\
&\quad + \frac{1 + \frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi) + o(\epsilon)}{(4\pi)^2} \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^{j-1}}{m_f^2} \\
&\quad \left\{ 3ip_E^2 \psi_E \int_0^1 x^3 \ln(\Delta_j) dx - 3p_E^2 (i\psi_E - m_e) \int_0^1 x^2 \ln(\Delta_j) dx \right. \\
&\quad + \int_0^1 (2\gamma_E - 1) ((-3x + 1) i\psi_E - 3m_e) \Delta_j dx \\
&\quad + 2 \int_0^1 \Delta_j \ln(\Delta_j) ((-3x + 1) i\psi_E - 3m_e) dx \\
&\quad \left. + i\psi_E \int_0^1 (-3x + 1) \Delta_j \ln(\Delta_j) dx + o(\epsilon) \right\} \quad (212)
\end{aligned}$$

Simplificando los términos fuera de la sumatoria y resolviendo el tercer término de la sumatoria

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{m_f^2} \left(\frac{1 + \frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi) + o(\epsilon)}{(4\pi)^2} \right) \left((2\gamma_E - 1) \left((-3i\psi_E) \left(\frac{m_f^2}{6} \right) + (i\psi_E - 3m_e) \left(\frac{m_f^2}{2} \right) \right) \right. \\
&\quad - \frac{2}{3} i\psi_E m_f^2 + \left(2i\psi_E + \left(\frac{6}{\epsilon} - 2 \right) m_e \right) m_f^2 + \\
&\quad \quad \left. - \frac{i}{3} \psi_E m_f^2 \right) \\
&\quad + \frac{1 + \frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi) + o(\epsilon)}{(4\pi)^2} \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^{j-1}}{m_f^2} \\
&\quad \left\{ 3ip_E^2 \psi_E \int_0^1 x^3 \ln(\Delta_j) dx - 3p_E^2 (i\psi_E - m_e) \int_0^1 x^2 \ln(\Delta_j) dx \right. \\
&\quad + 2 \int_0^1 \Delta_j \ln(\Delta_j) ((-3x + 1) i\psi_E - 3m_e) dx \\
&\quad \left. + i\psi_E \int_0^1 (-3x + 1) \Delta_j \ln(\Delta_j) dx + o(\epsilon) \right\} \quad (213)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{(4\pi)^2}\right)(i\psi_E + \left(\frac{2}{\epsilon} + \ln(4\pi) - \gamma_E - \frac{1}{6}\right)3m_e) \\
&\quad + \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^{j-1}}{(4\pi)^2 m_j^2} \\
&\quad \{3ip_E^2 \psi_E \int_0^1 x^3 \ln(\Delta_j) dx - 3p_E^2 (i\psi_E - m_e) \int_0^1 x^2 \ln(\Delta_j) dx \\
&\quad + 2 \int_0^1 \Delta_j \ln(\Delta_j) ((-3x+1)i\psi_E - 3m_e) dx \\
&\quad + i\psi_E \int_0^1 (-3x+1)\Delta_j \ln(\Delta_j) dx + o(\epsilon)\} \quad (214)
\end{aligned}$$

Donde se ha tomado el límite $\epsilon \rightarrow 0$ (salvo para un término). Agrupando las integrales que faltan por resolver

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{(4\pi)^2}\right)(i\psi_E + \left(\frac{2}{\epsilon} + \ln(4\pi) - \gamma_E - \frac{1}{6}\right)3m_e) \\
&\quad + \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^{j-1}}{(4\pi)^2 m_j^2} \\
&\quad \{12ip_E^2 \psi_E \int_0^1 x^3 \ln(\Delta_j) dx \\
&\quad + (i\psi_E(-6p_E^2 - 9b_j) + 9m_e p_E^2) \int_0^1 x^2 \ln(\Delta_j) dx \\
&\quad + ((3i\psi_E - 6m_e)b_j - 9i\psi_E c_j) \int_0^1 x \ln(\Delta_j) dx \\
&\quad + (3i\psi_E - 6m_e)c_j \int_0^1 \ln(\Delta_j) dx + o(\epsilon)\} \quad (215)
\end{aligned}$$

Donde se ha usado que $a_j = -p_E^2$ para $j=1,2$. Se puede demostrar

que las integrales restantes son:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln(\Delta_j) dx &= \frac{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}}{a_j} \ln\left(\frac{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j} + b_j + 2a_j}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j} + b_j}\right) \\
&+ \frac{b_j + 2a_j - \sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}}{2a_j} \ln(a_j + b_j + c_j) - \frac{b_j - \sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}}{2a_j} \ln(c_j) - 2
\end{aligned} \tag{216}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \ln(\Delta_j) dx &= -\frac{1}{4a_j^2} ((-2a_j(c_j + a_j) + b_j^2 - b_j \sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}) \ln(a_j + b_j + c_j) + \\
&2b_j \sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j} \ln\left(\frac{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j} + b_j + 2a_j}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j} + b_j}\right) \\
&+ 2a_j(a_j - b_j) + (2a_j c_j - b_j^2 + b_j \sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}) \ln(c_j))
\end{aligned} \tag{217}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 \ln(\Delta_j) dx &= \frac{1}{18a_j^3} (3(2a_j^3 - 3a_j b_j c_j + b_j^3) - \frac{3(4a_j^2 c_j^2 - 5a_j b_j^2 c_j + b_j^4)}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}}) \ln(a_j + b_j + c_j) \\
&+ \frac{6(4a_j^2 c_j^2 - 5a_j b_j^2 c_j + b_j^4)}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}} \ln\left(\frac{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j} + b_j + 2a_j}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j} + b_j}\right) \\
&- a_j(-3a_j b_j - 4a_j(-a_j + 3c_j) + 6b_j^2) \\
&- (3(-3a_j b_j c_j + b_j^3) - \frac{3(4a_j^2 c_j^2 - 5a_j b_j^2 c_j + b_j^4)}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}}) \ln(c_j)
\end{aligned} \tag{218}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^3 \ln(\Delta_j) dx &= -\frac{1}{24a_j^4} \left(\frac{6b_j(8a_j^2c_j^2 - 6a_jb_j^2c_j + b_j^4)}{\sqrt{b_j^2 - 4a_jc_j}} \ln\left(\frac{\sqrt{b_j^2 - 4a_jc_j} + b_j + 2a_j}{\sqrt{b_j^2 - 4a_jc_j} + b_j}\right) \right. \\
&\quad \left. - a_j(3a_j^2(2c_j - a_j) - 3a_jb_j^2 + 2a_jb_j(a_j - 9c_j) + 6b_j^3) \right. \\
&\quad \left. + (3(-2a_j^4 + 2a_j^2c_j^2 - 4a_jb_j^2c_j + b_j^4) - \frac{3b_j(8a_j^2c_j^2 - 6a_jb_j^2c_j + b_j^4)}{\sqrt{b_j^2 - 4a_jc_j}}) \ln(a_j + b_j + c_j) \right. \\
&\quad \left. - (3(2a_j^2c_j^2 - 4a_jb_j^2c_j + b_j^4) - \frac{3b_j(8a_j^2c_j^2 - 6a_jb_j^2c_j + b_j^4)}{\sqrt{b_j^2 - 4a_jc_j}}) \ln(c_j) \right) \quad (219)
\end{aligned}$$

Con esto, la expresión (215) queda

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{(4\pi)^2}\right)(i\psi_E + \left(\frac{2}{\epsilon} + \ln(4\pi) - \gamma_E - \frac{1}{6}\right)3m_e) + \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^{j-1}}{(4\pi)^2 m_j^2} \\
&\{12ip_E^2 \psi_E \left(-\frac{1}{24a_j^4} \left(\frac{6b_j(8a_j^2 c_j^2 - 6a_j b_j^2 c_j + b_j^4)}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}} \ln\left(\frac{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j} + b_j + 2a_j}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j} + b_j}\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - a_j(3a_j^2(2c_j - a_j) - 3a_j b_j^2 + 2a_j b_j(a_j - 9c_j) + 6b_j^3)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + (3(-2a_j^4 + 2a_j^2 c_j^2 - 4a_j b_j^2 c_j + b_j^4) - \frac{3b_j(8a_j^2 c_j^2 - 6a_j b_j^2 c_j + b_j^4)}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}})\ln(a_j + b_j + c_j)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - (3(2a_j^2 c_j^2 - 4a_j b_j^2 c_j + b_j^4) - \frac{3b_j(8a_j^2 c_j^2 - 6a_j b_j^2 c_j + b_j^4)}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}})\ln(c_j)\right)\right. \\
&\quad \left. + (i\psi_E(-6p_E^2 - 9b_j) + 9m_e p_E^2) \frac{1}{18a_j^3} \left(3(2a_j^3 - 3a_j b_j c_j + b_j^3) - \frac{3(4a_j^2 c_j^2 - 5a_j b_j^2 c_j + b_j^4)}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}}\right)\ln(a_j + b_j + c_j)\right. \\
&\quad \left. + \frac{6(4a_j^2 c_j^2 - 5a_j b_j^2 c_j + b_j^4)}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}} \ln\left(\frac{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j} + b_j + 2a_j}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j} + b_j}\right)\right. \\
&\quad \left. - a_j(-3a_j b_j - 4a_j(-a_j + 3c_j) + 6b_j^2)\right. \\
&\quad \left. - (3(-3a_j b_j c_j + b_j^3) - \frac{3(4a_j^2 c_j^2 - 5a_j b_j^2 c_j + b_j^4)}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}})\ln(c_j)\right) \\
&\quad + ((3i\psi_E - 6m_e)b_j - 9i\psi_E c_j) \left(-\frac{1}{4a_j^2} \left((-2a_j(c_j + a_j) + b_j^2 - b_j\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j})\ln(a_j + b_j + c_j) +\right.\right. \\
&\quad \left.\left. 2b_j\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j} \ln\left(\frac{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j} + b_j + 2a_j}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j} + b_j}\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + 2a_j(a_j - b_j) + (2a_j c_j - b_j^2 + b_j\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j})\ln(c_j)\right)\right) \\
&\quad + (3i\psi_E - 6m_e)c_j \left(\frac{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}}{a_j} \ln\left(\frac{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j} + b_j + 2a_j}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j} + b_j}\right)\right) \\
&\quad + \frac{b_j + 2a_j - \sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}}{2a_j} \ln(a_j + b_j + c_j) - \frac{b_j - \sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}}{2a_j} \ln(c_j) - 2) + o(\epsilon)\} \\
&\hspace{10em} 59 \hspace{10em} (220)
\end{aligned}$$

Usando los valores de a_j , b_j y c_j se puede llegar a la expresión:³²

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{(4\pi)^2}\right)(i\phi_E + \left(\frac{2}{\epsilon} + \ln(4\pi) - \gamma_E - \frac{1}{6}\right)3m_e) + \frac{i\phi_E}{(4\pi)^2 m_f^2} \left\{ -\frac{1}{12p_E^4} (6\sqrt{m_e^4 + 2m_e^2(-m_f^2 + p_E^2)} + (m_e^2 - m_f^2 + p_E^2)) \right. \\
&(m_e^4 - (2m_f^2 - p_E^2)(m_f^2 + p_E^2) + m_e^2(m_f^2 + 2p_E^2)) \operatorname{arctanh}\left(\frac{m_e^2 - m_f^2 + p_E^2}{\sqrt{m_e^4 + 2m_e^2(-m_f^2 + p_E^2)} + (m_f^2 + p_E^2)^2}\right) \\
&+ 3(2m_f^2 p_E^2(-m_e^2 + 2m_f^2 + p_E^2) + 2(m_e^4 + m_e^2 m_f^2 - 2m_f^4 + 2m_e^2 p_E^2 - m_f^2 p_E^2 + p_E^4)) \\
&\sqrt{(m_e^2 - m_f^2)^2 + 2(m_e^2 + m_f^2)p_E^2 + p_E^4} \operatorname{arctanh}\left(\frac{-m_e^2 + m_f^2 + p_E^2}{\sqrt{m_e^4 + 2m_e^2(-m_f^2 + p_E^2)} + (m_f^2 + p_E^2)^2}\right) \\
&- 2m_f^6 \ln\left(\frac{m_e^2}{m_f^2}\right) - 3m_e^2 m_f^4 \ln\left(\frac{m_f^2}{m_e^2}\right) + 3m_f^4 p_E^2 \ln\left(\frac{m_f^2}{m_e^2}\right) + m_e^6 \ln(m_e^2 m_f^2) \\
&+ 3m_e^4 p_E^2 \ln(m_e^2 m_f^2) + 3m_e^2 p_E^4 \ln(m_e^2 m_f^2) + p_E^6 \ln(m_e^2 m_f^2) - 2(m_e^2 + p_E^2)^3 \ln(m_e^2 + p_E^2) \left. \right\} \\
&+ \frac{m_e}{(4\pi)^2 m_f^2} \left\{ -\frac{3}{2p_E^2} m_f^2 (-3p_E^2 + 2\sqrt{m_e^4 + 2m_e^2(-m_f^2 + p_E^2)} + (m_f^2 + p_E^2)^2) \right. \\
&\quad \left(\operatorname{arctanh}\left(\frac{m_e^2 - m_f^2 + p_E^2}{\sqrt{m_e^4 + 2m_e^2(-m_f^2 + p_E^2)} + (m_f^2 + p_E^2)^2}\right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \operatorname{arctanh}\left(\frac{-m_e^2 + m_f^2 + p_E^2}{\sqrt{m_e^4 + 2m_e^2(-m_f^2 + p_E^2)} + (m_f^2 + p_E^2)^2}\right) \right) + \right. \\
&\quad \left. (-m_e^2 + m_f^2 + p_E^2) \ln(m_e^2) + (m_e^2 - m_f^2 + p_E^2) \ln(m_f^2) \right\} \quad (221)
\end{aligned}$$

³²Para llegar a esta expresión se usó *Mathematica* para reducir el álgebra.

5.2 D=3

Para D=3 la expresión (207) se escribe

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{(-1)^{j-1}}{(4\pi)^{3/2} m_f^2} \int_0^1 dx \right. \\
& \quad (-2ix^3 p_E^2 \not{x}_E + i2x^2 p_E^2 \not{x}_E - 2m_e x^2 p_E^2) (\Gamma(1/2) (\Delta_j^{(-1/2)}) \\
& \quad + (-i2x \not{x}_E - 2m_e) \left(\frac{3}{2} (\Gamma(-1/2)) (\Delta_j^{1/2}) \right) \\
& \quad \left. + 2i \not{x}_E ((-2x+1) \left(\frac{1}{2} \Gamma(-1/2) (\Delta_j^{1/2}) \right)) \right\} \quad (222)
\end{aligned}$$

Usando los valores explícitos de la función gamma ($\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$), se tiene

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{(-1)^{j-1} \sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2} m_f^2} \int_0^1 dx \right. \\
& \quad (-2ix^3 p_E^2 \not{x}_E + i2x^2 p_E^2 \not{x}_E - 2m_e x^2 p_E^2) ((\Delta_j^{(-1/2)}) \\
& \quad + (-i2x \not{x}_E - 2m_e) (-3\Delta_j^{1/2}) \\
& \quad \left. + 2i \not{x}_E ((-2x+1) (-\Delta_j^{1/2})) \right\} \quad (223)
\end{aligned}$$

factorizando la potencia cuadrática del primer término y reorganizando los últimos dos

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{(-1)^{j-1} \sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2} m_f^2} \int_0^1 dx \right. \\
& \quad (-2ix^3 p_E^2 \not{x}_E + (i2p_E^2 \not{x}_E - 2m_e p_E^2) x^2) ((\Delta_j^{(-1/2)}) \\
& \quad \left. + (10ix \not{x}_E + 6m_e - 2i \not{x}_E) \sqrt{\Delta_j} \right\} \quad (224)
\end{aligned}$$

Esto nos deja con cuatro tipos de integrales a resolver, a saber:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^3(\Delta_j^{(-1/2)})dx &= \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{a_j x^2 + b_j x + c_j}} \\
\int_0^1 x^2(\Delta_j^{(-1/2)}) &= \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{a_j x^2 + b_j x + c_j}} \\
\int_0^1 x\sqrt{\Delta_j} dx &= \int_0^1 x\sqrt{a_j x^2 + b_j x + c_j} dx \\
\int_0^1 \sqrt{\Delta_j} dx &= \int_0^1 \sqrt{a_j x^2 + b_j x + c_j} dx
\end{aligned} \tag{225}$$

Para $j=1,2$; y para $a_1 = a_2 = -p_E^2$, $b_1 = p_E^2 + m_e^2 - m_f^2$, $b_2 = p_E^2 + m_e^2$, $c_1 = m_f^2$ y $c_2 = 0$ como ya se había definido en la sección 5.2. Estas integrales son:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{a_j x^2 + b_j x + c_j}} = \\
&-\frac{1}{48(-a_j)^{\frac{13}{2}}} \left((36a_j^4 b_j c_j - 15a_j^3 b_j^3) \left(\arcsin\left(\frac{b_j + 2a_j}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}}\right) - \arcsin\left(\frac{b_j}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}}\right) \right) \right. \\
&\quad \left. + (16(-a_j)^{\frac{11}{2}} + 20(-a_j)^{\frac{9}{2}} b_j) (\sqrt{a_j + b_j + c_j}) \right. \\
&\quad \left. + (32(-a_j)^{\frac{9}{2}} c_j + 30(-a_j)^{\frac{7}{2}} b_j^2) (\sqrt{a_j + b_j + c_j} - \sqrt{c_j}) \right) \tag{226}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{a_j x^2 + b_j x + c_j}} = \\
&-\frac{1}{8(-a_j)^{\frac{9}{2}}} \left((3a_j^2 b_j^2 - 4a_j^3 c_j) \left(\arcsin\left(\frac{b_j + 2a_j}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}}\right) - \arcsin\left(\frac{b_j}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}}\right) \right) \right. \\
&\quad \left. + 4(-a_j)^{\frac{7}{2}} \sqrt{a_j + b_j + c_j} + 6(-a_j)^{\frac{5}{2}} b_j (\sqrt{a_j + b_j + c_j} - \sqrt{c_j}) \right) \tag{227}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 x \sqrt{a_j x^2 + b_j x + c_j} dx \\
&= -\frac{1}{48(-a_j)^{\frac{9}{2}}} ((3a_j^2 b_j^3 - 12a_j^3 b_j c_j) (\arcsin(\frac{b_j + 2a_j}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}}) - \arcsin(\frac{b_j}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}})) \\
&\quad + 16(-a_j)^{\frac{7}{2}} ((a_j + b_j + c_j)^{\frac{3}{2}} - c_j^{\frac{3}{2}}) \\
&\quad + 6(-a_j)^{\frac{5}{2}} b_j^2 (\sqrt{a_j + b_j + c_j} - \sqrt{c_j}) - 12(-a_j)^{\frac{7}{2}} b_j (\sqrt{a_j + b_j + c_j}) \\
&\hspace{15em} (228)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \sqrt{a_j x^2 + b_j x + c_j} dx \\
&= -\frac{1}{8(-a_j)^{\frac{5}{2}}} ((4a_j^2 c_j - a_j b_j^2) (\arcsin(\frac{b_j + 2a_j}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}}) - \arcsin(\frac{b_j}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}})) \\
&\quad + 2(-a_j)^{\frac{3}{2}} b_j (\sqrt{a_j + b_j + c_j} - \sqrt{c_j}) \\
&\quad - 4(-a_j)^{\frac{5}{2}} (\sqrt{a_j + b_j + c_j})) \quad (229)
\end{aligned}$$

Teniendo esto en cuenta la ecuación (224) se puede escribir

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{(-1)^{j-1} \sqrt{\pi}}{(4\pi)^{3/2} m_j^2} \right. \\
& - 2i p_E^2 \not{p}_E \left(-\frac{1}{48(-a_j)^{\frac{13}{2}}} ((36a_j^4 b_j c_j - 15a_j^3 b_j^3) (\arcsin(\frac{b_j + 2a_j}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}}) - \arcsin(\frac{b_j}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}})) \right. \\
& \quad + (16(-a_j)^{\frac{11}{2}} + 20(-a_j)^{\frac{9}{2}} b_j) (\sqrt{a_j + b_j + c_j}) \\
& \quad \left. + (32(-a_j)^{\frac{9}{2}} c_j + 30(-a_j)^{\frac{7}{2}} b_j^2) (\sqrt{a_j + b_j + c_j} - \sqrt{c_j}) \right) \\
& + (i 2 p_E^2 \not{p}_E - 2m_e p_E^2) \left(-\frac{1}{8(-a_j)^{\frac{9}{2}}} ((3a_j^2 b_j^2 - 4a_j^3 c_j) (\arcsin(\frac{b_j + 2a_j}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}}) - \arcsin(\frac{b_j}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}})) \right. \\
& \quad \left. + 4(-a_j)^{\frac{7}{2}} \sqrt{a_j + b_j + c_j} + 6(-a_j)^{\frac{5}{2}} b_j (\sqrt{a_j + b_j + c_j} - \sqrt{c_j}) \right) \\
& + 10i \not{p}_E \left(-\frac{1}{48(-a_j)^{\frac{9}{2}}} ((3a_j^2 b_j^3 - 12a_j^3 b_j c_j) (\arcsin(\frac{b_j + 2a_j}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}}) - \arcsin(\frac{b_j}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}})) \right. \\
& \quad + 16(-a_j)^{\frac{7}{2}} ((a_j + b_j + c_j)^{\frac{3}{2}} - c_j^{\frac{3}{2}}) \\
& \quad \left. + 6(-a_j)^{\frac{5}{2}} b_j^2 (\sqrt{a_j + b_j + c_j} - \sqrt{c_j}) - 12(-a_j)^{\frac{7}{2}} b_j (\sqrt{a_j + b_j + c_j}) \right) \\
& + (6m_e - 2i \not{p}_E) \left(-\frac{1}{8(-a_j)^{\frac{5}{2}}} ((4a_j^2 c_j - a_j b_j^2) (\arcsin(\frac{b_j + 2a_j}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}}) - \arcsin(\frac{b_j}{\sqrt{b_j^2 - 4a_j c_j}})) \right. \\
& \quad + 2(-a_j)^{\frac{3}{2}} b_j (\sqrt{a_j + b_j + c_j} - \sqrt{c_j}) \\
& \quad \left. - 4(-a_j)^{\frac{5}{2}} (\sqrt{a_j + b_j + c_j}) \right) \quad (230)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta los valores de a_j , b_j y c_j y reduciendo términos

se puede llegar a la expresión

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8\pi m_f^2} \left\{ \frac{i\phi_E}{2p_E^3} \left\{ (p_E^2 + m_e^2)^2 \left(\arcsin\left(\frac{-p_E^2 + m_e^2}{p_E^2 + m_e^2}\right) - \frac{\pi}{2} \right) \right. \right. \\
& - (p_E^2 + m_e^2 - m_f^2)(p_E^2 + m_e^2 + m_f^2) \left(\arcsin\left(\frac{-p_E^2 + m_e^2 - m_f^2}{D}\right) - \arcsin\left(\frac{p_E^2 + m_e^2 - m_f^2}{D}\right) \right) \\
& \quad \left. \left. + 2(-m_f^2 m_e + p_E^2 m_f + m_e^2 m_f + m_f^3) p_E \right\} \right. \\
& \left. - \frac{2m_f^2 m_e}{p_E} \left(\arcsin\left(\frac{-p_E^2 + m_e^2 - m_f^2}{D}\right) - \arcsin\left(\frac{p_E^2 + m_e^2 - m_f^2}{D}\right) \right) \right\} \quad (231)
\end{aligned}$$

$$\text{Para } D = \sqrt{p_E^4 + m_e^4 + m_f^4 - 2m_e^2 m_f^2 + 2m_f^2 p_E^2 + 2m_e^2 p_E^2}.$$

5.2.1 Límite $m_f \rightarrow 0$

El límite de esta expresión cuando $m_f \rightarrow 0$ se puede tomar haciendo algunas consideraciones para los arcosenos que en ella aparecen.

Expandiendo en serie de Taylor hasta segundo orden³³ se tiene

$$\begin{aligned}
\arcsin\left(\frac{-p_E^2 + m_e^2 - m_f^2}{D}\right) = \\
\arcsin\left(\frac{-p_E^2 + m_e^2}{p_E^2 + m_e^2}\right) - \frac{2p_E m_e}{(p_E^2 + m_e^2)^2} m_f^2 \quad (232)
\end{aligned}$$

Para el caso de $\arcsin\left(\frac{p_E^2 + m_e^2 - m_f^2}{D}\right)$ el segundo término de la serie de Taylor no está definido pero se puede aproximar mediante la fórmula:

$$\arcsin\left(\frac{p_E^2 + m_e^2 - m_f^2}{D}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2p_E}{p_E^2 + m_e^2} m_f \quad (233)$$

Con estas consideraciones se puede escribir el límite cuando $m_f \rightarrow 0$ de la expresión (231) como

$$-\frac{m_e}{4\pi p_E} \left(\arcsin\left(\frac{-p_E^2 + m_e^2}{p_E^2 + m_e^2}\right) - \frac{\pi}{2} \right) \quad (234)$$

³³los términos de tercer orden o superior no contribuirán ya que van a cero en el límite $m_f \rightarrow 0$

O equivalentemente en términos del arcotangente ³⁴

$$\frac{m_e}{2\pi p_E} \arctan\left(\frac{p_E}{m_e}\right) \quad (235)$$

³⁴se puede verificar que $\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{m_e^2 - p_E^2}{m_e^2 + p_E^2}\right) = 2\arctan\left(\frac{p_E}{m_e}\right)$

6 Renormalización de la masa

Nótese que el propagador de la figura 4 que incluye la autointeracción al orden e^2 debe poder escribirse como

$$G^{(2)}(p) = \frac{i}{\not{p} - m_e} + \frac{i}{\not{p} - m_e} (-ie^2) (F(p_E^2) i \not{p}_E + M(p_E^2) m_e) \frac{i}{\not{p} - m_e} \quad (236)$$

de acuerdo con la ecuación (130) para algunas funciones del cuadrado del momento $F(p_E^2)$, $M(p_E^2)$.³⁵

Para contar todas las posibles repeticiones sucesivas de este fenómeno el propagador se escribe como:

$$\begin{aligned} G^{(2)}(p) &= \frac{i}{\not{p} - m_e} \sum_{n=0}^{\infty} \left((-ie^2) (F(p_E^2) i \not{p}_E + M(p_E^2) m_e) \frac{i}{\not{p} - m_e} \right)^n \\ &= \frac{i}{\not{p} - m_e} \frac{1}{1 - (-ie^2) (F(p_E^2) i \not{p}_E + M(p_E^2) m_e) \frac{i}{\not{p} - m_e}} \quad (237) \end{aligned}$$

Donde se ha usado, en la última igualdad, el resultado para una serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ para $|x| < 1$. Esta ecuación se representa diagramáticamente en la figura 6.

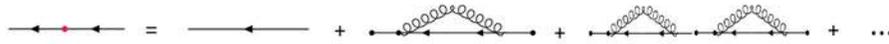


Figure 6: Diagrama de la ecuación (237)

Si se toma en cuenta la *rotación de Wick* que se aplicó en el

³⁵Estas funciones son precisamente los resultados del capítulo anterior para los casos $D = 3$ y $D = 4 - \epsilon$.

capítulo anterior $\not{p} \rightarrow i\not{p}_E$ se puede escribir

$$\begin{aligned}
G^{(2)}(p) &= \frac{i}{i\not{p}_E - m_e} \frac{1}{1 + ie^2(F(p_E^2)i\not{p}_E + M(p_E^2)m_e) \frac{i}{i\not{p}_E - m_e}} \\
&= \frac{i}{i\not{p}_E - m_e - e^2(F(p_E^2)i\not{p}_E + M(p_E^2)m_e)} \\
&= \frac{i}{i\not{p}_E(1 - e^2F(p_E^2)) - m_e(1 + e^2M(p_E^2))} \quad (238)
\end{aligned}$$

Que se representa en la figura 7.



Figure 7: Diagrama de la ecuación (238)

Se introduce entonces el propagador renormalizado $G_R(p)$, una escala de momentos μ y una función de esta escala $Z(\mu)$ tal que

$$G_R(p) = \frac{1}{Z(\mu)} G^{(2)}(p) \quad (239)$$

que cumpla con³⁶

$$G_R(p)|_{p^2=\mu^2} = \frac{i}{i\not{p} - m_R(\mu)} \quad (240)$$

Esta ecuación se conoce como condición de normalización. Entonces, de acuerdo con la ecuación (238)

$$\frac{1}{Z(\mu)} G^{(2)}(p) \Big|_{p^2=\mu^2} = \frac{i}{Z(\mu)i\not{p}(1 - e^2F(\mu^2)) - Z(\mu)m_e(1 + e^2M(\mu^2))} \quad (241)$$

es fácil ver que la elección de $Z(\mu)$ para que se cumpla la condición (240) es

$$Z(\mu) = \frac{1}{1 - e^2F(\mu^2)} \quad (242)$$

³⁶Se utilizará a partir de aquí indistintamente la notación $p_E = p$ para el momento euclidiano

y comparando (240) y (241) se obtiene

$$m_R = \frac{1 + e^2 M(\mu^2)}{1 - e^2 F(\mu^2)} m_e \quad (243)$$

Que se conoce como masa renormalizada y depende de la escala μ . Se introduce también la constante de acoplamiento renormalizada ³⁷

$$e_R(\mu) = Z(\mu)e \quad (244)$$

se trabaja consecuentemente al orden e^2 y se busca escribir $G_R(p)$ en términos de $m_R(\mu)$ y $e_R(\mu)$.

Tomando primero la aproximación $Z(\mu) = \frac{1}{1 - e^2 F(\mu^2)} \approx 1 + e^2 F(\mu^2)$ se tiene

$$\begin{aligned} i(G_R(p))^{-1} &= Z(\mu)(1 - e^2 F(p^2))i\not{p} - Z(\mu)(1 + e^2 M(p^2))m_e \\ &= (1 + e^2 F(\mu^2))(1 - e^2 F(p^2))i\not{p} - (1 + e^2 F(\mu^2))(1 + e^2 M(p^2)) \times \frac{1 - e^2 F(\mu^2)}{1 + e^2 M(\mu^2)} m_R \\ &= (1 - e^2(F(p^2) - F(\mu^2)))i\not{p} - (1 + e^2(M(p^2) - M(\mu^2)))m_R \\ &= (1 - e_R^2(F(p^2) - F(\mu^2))i\not{p}|_{m_e \rightarrow m_R}) - (1 + e_R^2(M(p^2) - M(\mu^2))|_{m_e \rightarrow m_R})m_R \end{aligned} \quad (245)$$

Donde se ha usado

$$e = (1 - e^2 F(\mu^2))e_R \quad (246)$$

$$m_e = \frac{1 - e^2 F(\mu^2)}{1 + e^2 M(\mu^2)} m_R(\mu) = (1 - e_R^2 F(\mu^2) - e_R^2 M(\mu^2))|_{m_e \rightarrow m_R} m_R(\mu) \quad (247)$$

Para la ecuación (245) en $4 - \epsilon$ dimensiones se cancela el término de $M(p^2)$ que diverge cuando $\epsilon \rightarrow 0$, de esta manera se obtiene un resultado finito para el propagador renormalizado.

³⁷Se verá que para el caso $D=3 \rightarrow Z(\mu) = 1$ y por tanto $e_R = e$ por lo que se utilizará la notación e_R o e indistintamente cuando se trate este caso

7 Generación dinámica de la masa en la aproximación de Nambu-Jona-Lasinio

Con una división de numerador y denominador de la ecuación (238) entre $(1 - e^2 F(p^2))$ ³⁸ se obtiene

$$G^{(2)}(p) = \frac{\frac{i}{1 - e^2 F(p^2)}}{i\not{p} - \frac{1 + e^2 M(p^2)}{1 - e^2 F(p^2)} m_e} \quad (248)$$

En esta expresión el factor $\frac{1}{1 - e^2 F(p^2)}$ ha cambiado la normalización del propagador y $\frac{1 + e^2 M(p^2)}{1 - e^2 F(p^2)} m_e$ es la *masa efectiva*³⁹ de la partícula que depende ahora del cuadrado de su momento.

El argumento original de Nambu-Jona-Lasinio (NJL)⁴⁰ permite mejorar la aproximación de la expansión en serie de potencias de e que se hace como parte de la teoría de perturbaciones y consiste en tomar la masa efectiva

$$m_{eff}(p) = m_e \frac{1 + e^2 M(p^2)}{1 - e^2 F(p^2)} = m_e + \delta m_e \quad (249)$$

como la masa del electrón para alguna escala de momentos $\mu^2 = p^2$. Entonces reemplazando m_e por m_{eff} en la ecuación anterior

$$m_{eff}(\mu) = m_e + \delta m_e = m_e + \left(\frac{1 + e^2 M(\mu^2)}{1 - e^2 F(\mu^2)} - 1 \right) m_e \Bigg|_{m_e \rightarrow m_{eff}(\mu)} \quad (250)$$

Nótese que en esta última expresión sólo el segundo término está evaluado en $m_e = m_{eff}(\mu)$.

³⁸Este factor de normalización es igual a $Z(\mu)$ (ecuación (242)) para $\mu^2 = p^2$

³⁹Esta expresión es igual a la de la masa renormalizada (ecuación (243)) también para $\mu^2 = p^2$

⁴⁰Y. Nambu y G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122, 345 (1961).

Se considera ahora, de la ecuación (238)

$$\begin{aligned} (G^{(2)}(\mu))^{-1} &= \frac{i\psi_E(1 - e^2 F(\mu^2)) - m_e(1 + e^2 M(\mu^2))}{i} \\ &= \frac{i\psi - m_e}{i} - (-ie^2(F(\mu^2)i\psi + M(\mu^2)m_e)|_{m_e \rightarrow m_{eff}(\mu)}) \end{aligned} \quad (251)$$

Esta última forma de $(G(\mu))^{-1}$ se expresa diagramáticamente en

$$(\text{---}\leftarrow\text{---})^{-1} = (\text{---}\leftarrow\text{---})^{-1} \cdot \text{---}\leftarrow\text{---}$$

Figure 8: representación diagramatica de la ecuación (251). El punto rojo simboliza que en ese propagador se usa la masa efectiva en lugar de la masa m_e .

$$\begin{aligned} \text{---}\leftarrow\text{---} &= \text{---}\leftarrow\text{---} + \text{---}\leftarrow\text{---} + \text{---}\leftarrow\text{---} + \dots \\ &= \text{---}\leftarrow\text{---} + \text{---}\leftarrow\text{---} + \text{---}\leftarrow\text{---} + \text{---}\leftarrow\text{---} + \dots \\ &+ \text{---}\leftarrow\text{---} + \text{---}\leftarrow\text{---} + \text{---}\leftarrow\text{---} + \dots \end{aligned}$$

Figure 9: algunos de los procesos tomados en cuenta al usar la definición del propagador iterativamente

la figura 8. Así, iterativamente, se pueden tomar en cuenta más procesos (diagramas), tal como se ilustra en la figura 9.

Para el caso de QED, $D = 3$, $m_f = 0$ se tiene

$$F(p^2) = 0, M(p^2) = \frac{1}{2\pi p} \arctan\left(\frac{p}{m_e}\right) \quad (252)$$

$$\rightarrow m_{eff}(\mu) = m_e + \frac{e^2 m_{eff}(\mu)}{2\pi\mu} \arctan\left(\frac{\mu}{m_{eff}(\mu)}\right) \quad (253)$$

Para la QED en $D=3$ dimensiones y con $m_f = 0$ esta ecuación es idéntica a la que se obtuvo para la masa renormalizada en el capítulo anterior, ecuación (247).

En el límite quiral $m_e = 0$ la expresión se reduce a

$$m_{eff}(\mu) \left(1 - \frac{e^2}{2\pi\mu} \arctan\left(\frac{\mu}{m_{eff}(\mu)}\right)\right) = 0 \quad (254)$$

como consideramos que en general $m_{eff}(\mu) \neq 0$ tenemos que

$$\frac{e^2}{2\pi\mu} \arctan\left(\frac{\mu}{m_{eff}(\mu)}\right) = 1 \quad (255)$$

La función tangente es invertible en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ por lo que

$$\begin{aligned} \frac{2\pi\mu}{e^2} &\leq \frac{\pi}{2} \\ \rightarrow e^2 &\geq 4\mu \equiv e_c^2 \end{aligned} \quad (256)$$

o

$$\mu \leq \frac{e^2}{4} = \mu_c. \quad (257)$$

que se define como el valor crítico de μ . A partir de este valor $m_{eff}(\mu) = 0$. Existe entonces para alguna escala de momento μ fija, un valor crítico de e para la generación dinámica de la masa, es decir, para que la ecuación (254) tenga solución distinta de cero.

La ecuación (255) permite también obtener una expresión para $m_{eff}(\mu)$

$$m_{eff}(\mu) = \frac{\mu}{\tan\left(\frac{2\pi\mu}{e^2}\right)} = \frac{\mu}{\tan\left(\frac{\pi\mu}{2\mu_c}\right)} \quad (258)$$

definida para valores de $\mu \leq \mu_c$. El valor de esta función cuando $\mu \rightarrow 0$ es $\frac{e^2}{2\pi}$.⁴¹ Nótese entonces que para $\mu > \mu_c$ la única solución posible de la ecuación (254) es la trivial: $m_{eff}(\mu) = 0$.

Se regresa ahora al caso general $m_e \geq 0$ y se analiza el comportamiento de la solución de la ecuación (253) en los límites $\mu \rightarrow 0$ y $\mu \rightarrow \infty$. Expandiendo el arcotangente de esta expresión en potencias de $\frac{\mu}{m_{eff}}$ (bajo la suposición de que en el límite $\mu \rightarrow 0$, el cociente $\frac{\mu}{m_{eff}(\mu)} \rightarrow 0$) se puede escribir

⁴¹Esto puede verse expandiendo la función tangente como $\tan(x) = x + \mathcal{O}(x^3)$

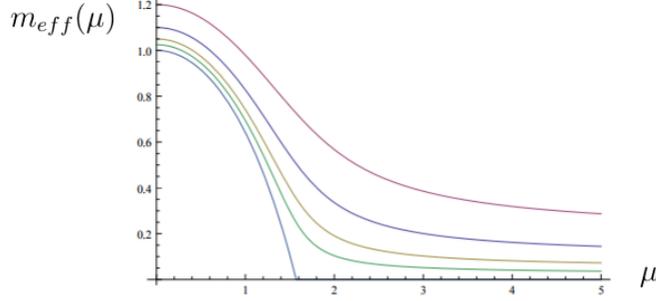


Figure 10: Gráfica para la masa efectiva de Nambu-Jona-Lasinio para diferentes valores de m_e , en azul el caso quiral (ecuación (258)) en unidades de $\frac{e^2}{2\pi}$

$$\begin{aligned}
 m_{eff}(\mu) &= m_e + \frac{e^2 m_{eff}}{2\pi\mu} \left(\frac{\mu}{m_{eff}} - \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{m_{eff}} \right)^3 \right) \\
 &= m_e + \frac{e^2}{2\pi} \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{m_{eff}} \right)^2 \right) = m_e + \frac{e^2}{2\pi} - \frac{1}{3} \left(\frac{e^2 \mu^2}{2\pi \left(\frac{e^2}{2\pi} + m_e \right)^2} \right) \quad (259)
 \end{aligned}$$

Lo que permite ver que efectivamente en límite $\mu \rightarrow 0$, el cociente $\frac{\mu}{m_{eff}(\mu)} \rightarrow 0$.

Se considera ahora el límite $\mu \rightarrow \infty$, para ello se toma la misma ecuación (253) para $m_{eff}(\mu)$, se supone ahora que en el límite $\mu \rightarrow \infty$ el cociente $\frac{m_{eff}}{\mu} \rightarrow 0$ y utilizando la identidad⁴² $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1}{x})$ se obtiene

$$m_{eff}(\mu) = m_e + \frac{e^2 m_{eff}}{2\pi\mu} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{m_{eff}}{\mu}\right) \right) \quad (260)$$

y aproximando $\tan(x) \approx x$

$$m_{eff}(\mu) = m_e + \frac{e^2 m_{eff}}{4\mu} - \frac{e^2 m_{eff}^2}{2\pi\mu^2} = m_e + \frac{e^2 m_e}{4\mu} \quad (261)$$

esto muestra que efectivamente en el límite $\mu \rightarrow \infty$ el cociente $\frac{\mu}{m_{eff}(\mu)} \rightarrow \infty$.

Se tiene entonces un comportamiento como el de la figura 10 para diferentes valores de m_e .

⁴²válida para $x > 0$, como es el caso.

8 Grupo de Renormalización

Con la finalidad de asegurar que las predicciones de la teoría no dependan de la escala μ de renormalización, se pide que la masa renormalizada m_R cambie con μ de la misma manera en que lo hace la función $M(\mu)$ dicho se otra fomra, se requiere que

$$\frac{dm_R(\mu)}{d\mu} = m_e e^2 \frac{\partial M(\mu^2)}{\partial \mu} \quad (262)$$

para algún valor de m_e fijo. Una vez tomada la derivada $\frac{\partial M(\mu^2)}{\partial \mu}$ para m_e y e fijos la segunda parte de esta ecuación se expresa entonces en términos de $m_R(\mu)$ y $e_R(\mu)$ utilizando las ecuaciones (246) y (247). Esto es análogo a lo que se hace para la renormalización y en el argumento de Nambu-Jona-Lasinio pero en este caso se reescribe una vez que se ha tomado la derivada. Esta es una ecuación del grupo de renormalización, en particular es una ecuación de Callan-Symanzik.⁴³

El propagador al orden e^2 en $D = 3$ y con $m_f = 0$ se puede escribir

$$G^{(2)}(p) = \frac{i}{i\not{p} - (1 + e^2 M(p^2))m_e} \quad (263)$$

en particular

$$\frac{d}{d\mu} G^{(2)}(p) \equiv 0 \quad (264)$$

de la ecuación (239) para $Z(\mu) = 1$ y de la condición de normalización (240)

$$\begin{aligned} G^{(2)}(p) &= G_R(p, \mu) \\ \rightarrow \frac{d}{d\mu} G_R(p, \mu) &\equiv 0 \end{aligned} \quad (265)$$

⁴³Peskin, p.406

$$\begin{aligned}
\rightarrow G^{(2)}(p) &= G_R(p, \mu_0) = G_R(p, \mu_0^2 = p^2) \\
&= \frac{i}{i\phi - m_R(p)} \\
\rightarrow G^{(2)}(p) &= G_R(p, \mu_0) = \frac{i}{i\phi - m_R(p)}
\end{aligned} \tag{266}$$

En esta ecuación $m_R(p)$ juega el papel de la masa efectiva en la ecuación (248) pero se obtiene ahora integrando una ecuación diferencial: La ecuación de Callan-Symanzik. Es decir, $m_R(p)$ no está dada, en este caso, por la ecuación (243).

De las ecuaciones (265) y (266) se obtiene entonces una expresión para $G^{(2)}(p)$ que es distinta a la que se tenía en (263). La ecuación (266) se conoce como “propagador mejorado por el grupo de renormalización” y es un ejemplo del grupo de renormalización mejorando los resultados de la teoría de perturbaciones simple.

Utilizando explícitamente el valor de la función M se puede escribir la ecuación (262) como

$$\begin{aligned}
\frac{dm_R(\mu)}{d\mu} &= m_e e^2 \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1}{2\pi\mu} \arctan\left(\frac{\mu}{m_e}\right) \right) \\
&= m_e e^2 \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{\mu^2} \arctan\left(\frac{\mu}{m_e}\right) + \frac{1}{\mu} \frac{1}{1 + \frac{\mu^2}{m_e^2}} \frac{1}{m_e} \right) \\
&= \frac{1}{\mu} \frac{e^2}{2\pi} \left(-\frac{m_e}{\mu} \arctan\left(\frac{\mu}{m_e}\right) + \frac{m_e^2}{m_e^2 + \mu^2} \right) \Bigg|_{m_e \rightarrow m_R, e \rightarrow e_R} \\
\rightarrow \mu \frac{dm_R}{d\mu} &= \frac{e^2}{2\pi} \left(\frac{m_R^2}{m_R^2 + \mu^2} - \frac{m_R}{\mu} \arctan\left(\frac{\mu}{m_R}\right) \right) \tag{267}
\end{aligned}$$

donde $m_R(\mu, e^2 = e_R^2, m_R(\mu_0))$ ⁴⁴ es una función que depende de los parámetros $e_R^2, m_R(\mu_0)$. Se busca ahora la aproximación de esta ecuación en el límite $\mu \rightarrow 0$, o más precisamente, $\mu/m_R \rightarrow 0$ para

⁴⁴ $e^2 = e_R^2$ de acuerdo con la ecuación (244) para el caso $Z(\mu) = 1$

ello se escribe la ecuación anterior como

$$\begin{aligned}\mu \frac{dm_R}{d\mu} &= \frac{e^2}{2\pi} \left(\frac{1}{1 + \frac{\mu^2}{m_R^2}} - \frac{m_R}{\mu} \arctan\left(\frac{\mu}{m_R}\right) \right) \\ &= \frac{e^2}{2\pi} \left(1 - \frac{\mu^2}{m_R^2} - \frac{m_R}{\mu} \left(\frac{\mu}{m_R} - \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{m_R} \right)^3 \right) \right)\end{aligned}\tag{268}$$

donde se han tomado las aproximaciones $\frac{1}{1 + \frac{\mu^2}{m_R^2}} \approx (1 - \frac{\mu^2}{m_R^2})$ y $\arctan(\frac{\mu}{m_R}) \approx \frac{\mu}{m_R} - \frac{1}{3}(\frac{\mu}{m_R})^3$ como ya se había hecho anteriormente.

$$\begin{aligned}&= \frac{e^2}{2\pi} \left(-\frac{\mu^2}{m_R^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu^2}{m_R^2} \right) \right) \\ &= -\frac{2}{3} \frac{e^2}{2\pi} \frac{\mu^2}{m_R^2} \\ \rightarrow m_R^2 dm_R &= -\frac{2}{3} \frac{e^2}{2\pi} \mu d\mu\end{aligned}\tag{269}$$

e integrando a ambos lados entre 0 y μ se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}(m_R^3(\mu) - m_R^3(0)) &= -\frac{1}{3} \frac{e^2}{2\pi} \mu^2 \\ \rightarrow m_R^3(\mu) - m_R^3(0) &= -\frac{e^2}{2\pi} \mu^2\end{aligned}\tag{270}$$

Este resultado no depende de m_e pero si de un valor inicial $m_R(\mu_0)$ en alguna escala arbitraria; es decir, se pierde la información sobre la relación entre $m_R(\mu)$ y m_e . Despejando m_R de esta última expresión

y expandiendo la raíz cúbica resultante a primer orden de μ^2 se tiene

$$m_R(\mu) = \sqrt[3]{-\frac{e^2}{2\pi}\mu^2 + m_R^3(0)} \approx m_R(0) - \frac{1}{3} \frac{e^2}{2\pi} \frac{\mu^2}{m_R^2(0)} \quad (271)$$

Esta expresión es entonces idéntica a la (259) si se hace la identificación $m_R(\mu = 0) \rightarrow m_e + \frac{e^2}{2\pi}$. De esta última expresión se puede ver que el límite cuando $\mu \rightarrow 0$ de el cociente $\frac{\mu}{m_R(\mu)}$ es también cero.

El límite $\mu \rightarrow \infty$ se puede obtener de la expresión (267) escribiéndola como

$$\mu \frac{dm_R}{d\mu} = \frac{e^2}{2\pi} \left(\frac{\frac{m_R^2}{\mu^2}}{1 + \frac{m_R^2}{\mu^2}} - \frac{m_R}{\mu} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{m_R}{\mu}\right) \right) \right) \quad (272)$$

con ayuda de la identidad $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. Expandiendo en $\frac{m_R}{\mu}$ se tiene

$$\begin{aligned} &\approx \frac{e^2}{2\pi} \left(\frac{m_R^2}{\mu^2} \left(1 - \frac{m_R^2}{\mu^2} \right) - \frac{m_R}{\mu} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{m_R}{\mu} \right) \right) \\ &\approx -\frac{\pi}{2} \frac{e^2}{2\pi} \frac{m_R}{\mu} \end{aligned} \quad (273)$$

para $m_R \ll \mu$ y donde se ha tomado la última aproximación sólo hasta primer orden

$$\rightarrow \frac{dm_R}{m_R} = -\frac{e^2}{4} \frac{d\mu}{\mu^2} \quad (274)$$

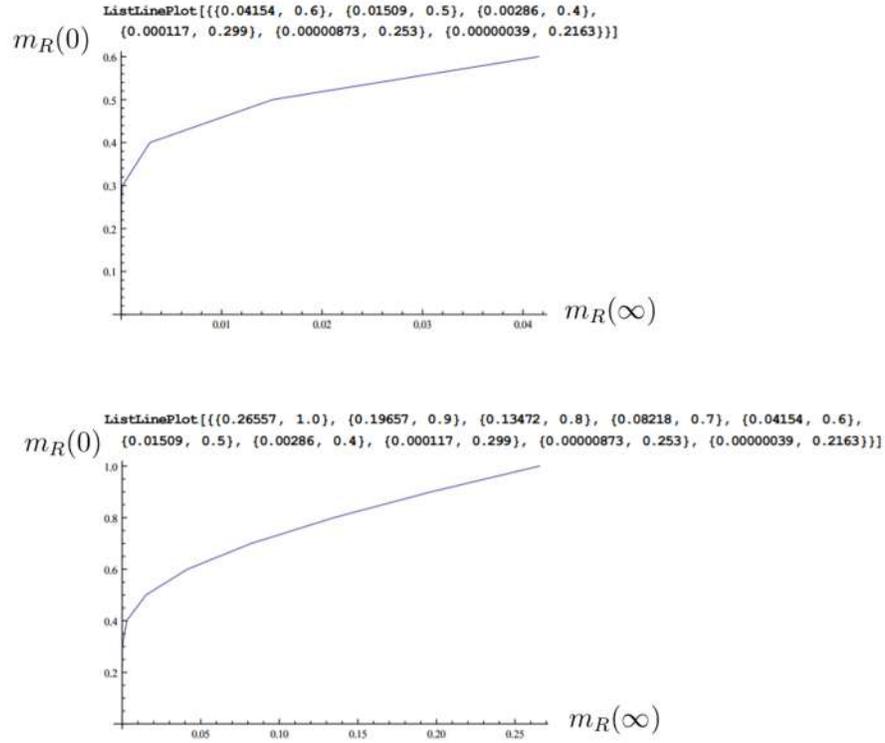


Figure 11: Aproximaciones de la curva $m_R(0)$ con seis y diez valores e integrando ambos lados desde algún valor μ_0 hasta μ .

$$\rightarrow \ln\left(\frac{m_R(\mu)}{m_R(\mu_0)}\right) = \frac{e^2}{4}\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_0}\right) \quad (275)$$

de donde se puede obtener una expresión para m_R

$$m_R(\mu) = m_R(\mu_0) \frac{\exp\left(\frac{e^2}{4} \frac{1}{\mu}\right)}{\exp\left(\frac{e^2}{4} \frac{1}{\mu_0}\right)} \quad (276)$$

y tomando el límite $\mu_0 \rightarrow \infty$

$$m_R(\mu) = m_R(\infty) \exp\left(\frac{e^2}{4} \frac{1}{\mu}\right) \quad (277)$$

que para una escala de momentos lo suficientemente grande $\mu \gg \frac{e^2}{4}$ se permite la expansión

$$m_R(\mu) = m_R(\infty) \left(1 + \frac{e^2}{4\mu} + \dots\right) \quad (278)$$

Este resultado es igual al de la ecuación (261) para la masa efectiva de Nambu-Jona-Lasinio si se hace la identificación $m_R(\infty) \rightarrow m_e$ que es, de hecho, el valor de $m_{eff}(\mu)$ para $\mu \rightarrow \infty$.

A pesar de que el comportamiento de la solución de la ecuación de Callan-Symanzik y la masa efectiva de NJL es igual en ambos límites ($\mu \rightarrow 0$ y $\mu \rightarrow \infty$) la relación entre $m_R(0)$ y $m_R(\infty)$ es diferente a la relación entre $m_{eff}(0)$ y $m_{eff}(\infty)$.

La figura 11 muestra aproximaciones obtenidas para la relación entre $m_R(\infty)$ y $m_R(0)$ a partir de la integración numérica de la ecuación del grupo de renormalización.

Se puede ver que para el grupo de renormalización, cuando $m_R(\infty)$ tiende hacia cero, se encuentra un valor para $m_R(0)$ igual a cero.

9 Ecuación de brecha (Schwinger-Dyson)

La forma más general que puede tomar el inverso del propagador, para algunas funciones $F(p^2)$ y $M(p^2)$ por determinar es ⁴⁵

$$(G(p))^{-1} = \frac{i\not{p}(1 - e^2 F(p^2)) - m_e(1 + e^2 M(p^2))}{i} \quad (279)$$

Se consideran ahora dos aproximaciones: la *aproximación quenched* y la *aproximación de arcoiris*. La primera se refiere a que no serán consideradas autointeracciones del bosón, la segunda se refiere a considerar un vértice simple fermión-bosón como ilustra la figura 12.

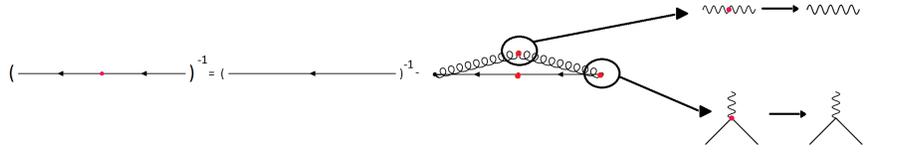


Figure 12: representación diagramática del propagador tomando en cuenta las aproximaciones “quenched” y “arcoiris”

Análogamente a los diagramas que se presentan en el contexto del argumento de Nambu-Jona-Lasinio. La diferencia es que el “punto” sobre el propagador del electrón no representa, en esta ocasión, simplemente el cambio de la masa m_e por $m_{eff}(\mu)$ sino por la función $\tilde{M}(k^2)$ (donde k es el momento del propagador interno en el diagrama sobre el que se integra, mientras μ es una escala externa al diagrama).

La ecuación (279) se puede escribir para el caso de $m_f = 0 \rightarrow$

⁴⁵éstas también serán funciones de e^2 y m_e

$F(p^2) = 0^{46}$ donde queda una s3la funci3n $M(p^2)$ a determinar.

$$\begin{aligned}
(G(p))^{-1} &= \frac{i\not{p} - m_e(1 + e^2 M(p_E^2))}{i} \\
&= \frac{i\not{p} - m_e}{i} + ie^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \gamma_\mu \frac{i\not{k} + (1 + e^2 M(k^2))m_e}{k^2 + (1 + e^2 M(k^2))^2 m_e^2} \gamma_\nu \\
&\quad \times \frac{\delta_{\mu\nu} - \frac{(p_\mu - k_\mu)(p_\nu - k_\nu)}{(p-k)^2}}{(p-k)^2}
\end{aligned} \tag{280}$$

Esta es una ecuaci3n de Dyson-Schwinger con una funci3n $M(p^2)$ a determinar.

Definiendo $\tilde{M}(p^2) \equiv (1 + e^2 M(p^2))m_e$ se puede escribir

$$\begin{aligned}
-\frac{\tilde{M}(p^2)}{i} &= \frac{-m_e}{i} - \frac{e^2}{i} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{M}(k^2)}{k^2 + \tilde{M}(k^2)^2} \frac{1}{(p-k)^2} \\
&\quad \times \gamma_\mu \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{(p_\mu - k_\mu)(p_\nu - k_\nu)}{(p-k)^2} \right) \gamma_\nu
\end{aligned} \tag{281}$$

contrayendo las gammas en el 3ltimo factor del segundo t3rmino

$$\begin{aligned}
&= \frac{-m_e}{i} - \frac{e^2}{i} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{M}(k^2)}{k^2 + \tilde{M}(k^2)^2} \frac{1}{(p-k)^2} \\
&\quad \times \left(\gamma_\mu \gamma_\mu - \frac{(\not{p}_\mu - \not{k}_\mu)(\not{p}_\nu - \not{k}_\nu)}{(p-k)^2} \right)
\end{aligned} \tag{282}$$

usando las propiedades de las matrices gamma y teniendo en cuenta que $\not{a}\not{a} = a^2$ para cualquier cuadvivector a

$$-\frac{\tilde{M}(p^2)}{i} = \frac{-m_e}{i} - \frac{2e^2}{i} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{M}(k^2)}{k^2 + \tilde{M}(k^2)^2} \frac{1}{(p-k)^2} \tag{283}$$

⁴⁶ $F(p^2) = 0$ se cumple para el caso que estamos considerando: En la norma de Landau y no necesariamente en otras normas

y se puede escribir

$$\tilde{M}(p^2) = m_e + 2e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{M}(k^2)}{k^2 + \tilde{M}^2(k^2)} \frac{1}{(p-k)^2} \quad (284)$$

Se resolverá esta ecuación únicamente para el caso $m_e = 0$ que corresponde al límite quiral y se hará una aproximación lineal, que consiste en aproximar el valor de $\frac{\tilde{M}(k^2)}{k^2 + \tilde{M}^2(k^2)}$ como $\frac{\tilde{M}(k^2)}{k^2 + \tilde{M}^2(0)} = \frac{\tilde{M}(k^2)}{k^2 + \tilde{M}_0^2}$ con \tilde{M}_0 el valor de \tilde{M} para $k = 0$. Con estas consideraciones se reescribe (284) como

$$\tilde{M}(p^2) = 2e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{M}(k^2)}{k^2 + \tilde{M}_0^2} \frac{1}{(p-k)^2} \quad (285)$$

se define aquí el factor $\frac{\tilde{M}(k^2)}{k^2 + \tilde{M}_0^2} \equiv \chi(k)$ y entonces

$$\tilde{M}(p^2) = 2e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p-k)^2} \chi(k) = (\tilde{M}_0^2 + p^2) \chi(p) \quad (286)$$

Usando el teorema de convolución por un lado y $\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{\vec{q}^2 + \alpha^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\alpha r}}{r}$ por otro se puede escribir la ecuación anterior en el espacio de posiciones como

$$\begin{aligned} (\tilde{M}_0^2 - \nabla^2) \tilde{\chi}(\vec{r}) &= \frac{2e^2}{(4\pi)r} \tilde{\chi}(\vec{r}) \\ \rightarrow (-\nabla^2 - \frac{e^2}{2\pi r}) \tilde{\chi}(\vec{r}) &= -\tilde{M}_0^2 \tilde{\chi}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (287)$$

que tiene la forma de la ecuación de Schrödinger para el hidrógeno con $\frac{\hbar}{2m} = 1$, $E = -\tilde{M}_0^2$ para una solución con simetría rotacional ($l=0$). Si se toma el estado base, que no tiene nodos⁴⁷, el eigenvalor de energía se escribe

$$\tilde{M}_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^2}{2\pi}\right)^2 = \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \quad (288)$$

de donde se define la constante de estructura fina $\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi}$ y entonces

$$\tilde{M}_0^2 = \alpha^2 \quad (289)$$

⁴⁷Lo mismo es cierto para las funciones de onda en el espacio de momentos, solamente la del estado base no tiene nodos y por lo tanto no cambia de signo.

La solución a la ecuación (287) es entonces $\tilde{\chi}(\vec{r}) = Ce^{-\alpha r}$ ⁴⁸, con lo cual se obtiene

$$(\tilde{M}_0^2 - \nabla^2)Ce^{-\alpha r} = \frac{e^2}{2\pi r}Ce^{-\alpha r} \quad (290)$$

con $\tilde{M}_0 = \alpha$.

De regreso al espacio de momentos, es decir, aplicando de vuelta la transformación $\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}}{q^2 + \alpha^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\alpha r}}{r}$ se tiene

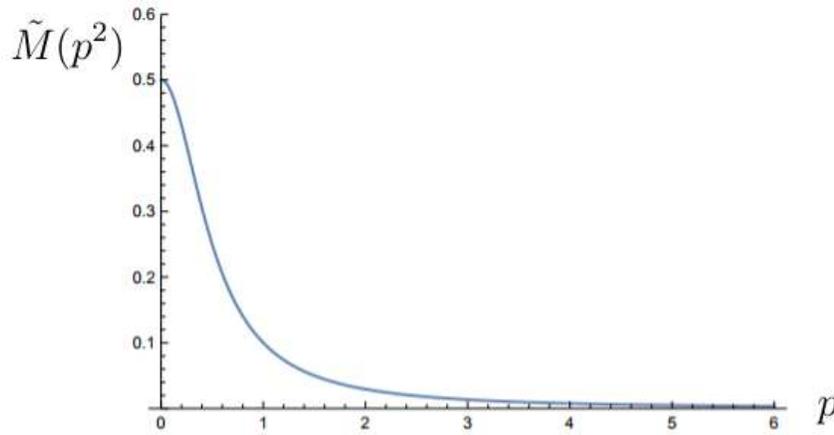


Figure 13: la función de masa \tilde{M} en unidades de $\frac{e^2}{2\pi}$

$$\begin{aligned} \tilde{M}(p^2) &= (\tilde{M}_0^2 + p^2)\chi(p) = \frac{2Ce^2}{p^2 + \alpha^2} \\ \rightarrow \tilde{M}(0) &= \frac{2e^2C}{\alpha^2} = \tilde{M}_0 = \alpha \\ \rightarrow 2e^2C &= \alpha^3 \end{aligned} \quad (291)$$

con lo que queda determinada la función $\tilde{M}(p^2)$ en la aproximación lineal como

$$\tilde{M}(p^2) = \frac{\alpha^3}{\alpha^2 + p^2} \quad (292)$$

⁴⁸Aquí la constante C se determinará por la condición $\tilde{M}(0) = \tilde{M}_0$.

para $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$.

La figura 13 muestra una gráfica de esta solución para la ecuación de Schwinger-Dyson. La ecuación (292) tiene un comportamiento proporcional a $\frac{1}{p^2}$ en el límite $p^2 \rightarrow \infty$ que se considera como el comportamiento correcto en el límite quiral (y no lo cumple la masa efectiva de Nambu-Jona-Lasinio).⁴⁹

La figura 14 muestra una comparación entre el resultado de la integración de la ecuación de Callan-Symanzik del grupo de renormalización.

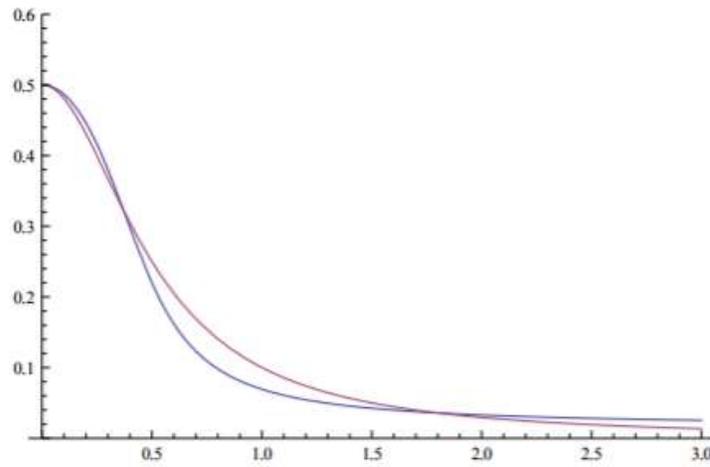


Figure 14: Gráfico comparativo entre la solución a la ecuación de Schwinger-Dyson en el límite quiral y la ecuación de Callan-Symanzik con valor de 0.5 para $p=0$ en unidades de $\frac{e^2}{2\pi}$.

⁴⁹C. D. Roberts y A. G Williams, Prog. Part. Nucl. Phys. 33, 477 (1994)

10 Conclusiones

Como se mencionó en la introducción, el argumento de Nambu-Jona-Lasinio se utilizó originalmente en un contexto diferente a la QCD y forma parte de lo que hoy se conoce como el modelo de Nambu-Jona-Lasinio utilizado principalmente en la descripción de mesones.

El resultado obtenido en el capítulo siete para la autointeracción de quarks se puede obtener también como resultado de la renormalización de la teoría en el caso de la QED en 3 dimensiones con masa del fotón igual a cero. Predice, además, la generación de masa aún en el límite quiral. La descripción para la generación de masa proporcionada por este argumento tiene, sin embargo, algunas diferencias importantes con respecto a las descripciones de los últimos dos enfoques (capítulos ocho y nueve).

Primero, la función de masa en el punto $\mu = 0$ de la masa efectiva en el argumento de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) para el límite quiral tiene un valor de $\frac{e^2}{2\pi}$ que es el doble de lo predicho por la ecuación de Schwinger-Dyson que presentan un valor de $\frac{e^2}{4\pi}$ para $\mu = 0$. Esto se puede apreciar en la figura comparativa 11.

El límite $\mu \rightarrow \infty$ en el argumento de NJL es m_e , que en el límite quiral por supuesto se vuelve cero a partir de un cierto valor $\frac{e^2}{4}$. La función es entonces “cortada” en un punto a partir del cual se vuelve constante. Por su parte la solución de la ecuación de Schwinger-Dyson en la aproximación lineal (ecuación (292)) describe un comportamiento que va como $\frac{1}{p^2}$ para momentos grandes, que, como se mencionó al final del capítulo anterior, es el comportamiento esperado en este régimen de momentos.

En el caso de la ecuación del grupo de renormalización, y la ecuación de Nambu-Jona-Lasinio para $m_e > 0$, las soluciones han sido generadas numéricamente, sin embargo la exploración de los límites $\mu \rightarrow 0$ y $\mu \rightarrow \infty$ mediante las expansiones en serie de Taylor en las ecuaciones (259) y (261) para el caso de NJL y (271) y (273) para grupo de renormalización son útiles para entender el comportamiento de la solución exacta cualitativamente. Las gráficas de

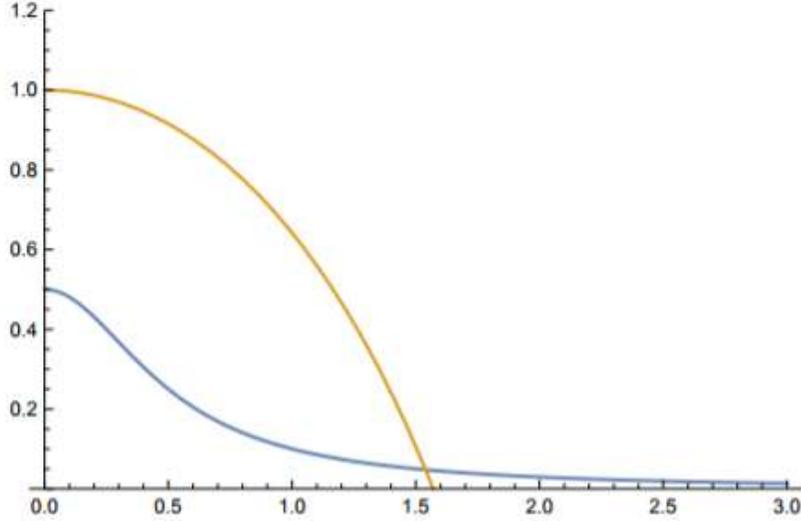


Figure 15: Comparación de las relaciones obtenidas para $m_{eff}(\mu)$ con el argumento de NJL para el límite quiral (en anaranjado) y $\tilde{M}(p^2)$ la solución a la ecuación de Schwinger-Dyson en la aproximación lineal para el límite quiral también (en azul)

estas cantidades aparecen en la figura 15).

Entonces los dos resultados para $m_R(\mu)$ y la masa efectiva $m_{eff}(\mu)$ (con el grupo de renormalización y el argumento de Nambu-Jona-Lasinio) tienen el mismo comportamiento tanto en el límite $\mu \rightarrow 0$ como en el límite $\mu \rightarrow \infty$ si $m_e > 0$ o $m_R(\infty) > 0$. Lo que no coincide, sin embargo, de las dos descripciones anteriores es la relación entre $m_R(0)$ y $m_R(\infty)$. En el caso de Nambu-Jona-Lasinio está dada simplemente por la ecuación (259) como:

$$m_R(0) = m_e + \frac{e^2}{2\pi} = m_R(\infty) + \frac{e^2}{2\pi} \quad (293)$$

que corresponde a una recta que corta el eje y en $\frac{e^2}{2\pi}$. Para el grupo de renormalización sin embargo la relación entre estas dos cantidades no está dada de forma explícita y se ha obtenido al integrar, de manera numérica, la ecuación del grupo de renormalización (267)

desde cero⁵⁰ hasta infinito. La figura 16 presenta una comparación entre la relación para $m_R(\infty)$ y $m_R(0)$ en cada caso.

La dependencia de la masa renormalizada en función de la es-

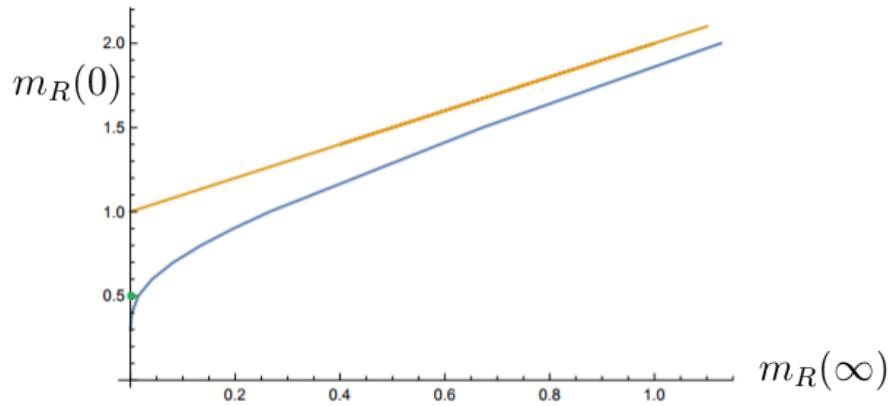


Figure 16: Comparación de las relaciones obtenidas para $m_R(\infty)$ y $m_R(0)$ con el argumento de NJL para el límite quiral (en anaranjado) y para la solución a la ecuación del grupo de renormalización (en azul). También se incluye el valor obtenido para la ecuación de Schwinger-Dyson (verde) para el límite quiral.

cala de momentos se ve bien mientras $m_R(\infty) > 0$, sin embargo, el grupo de renormalización, por lo menos en esta formulación⁵¹, no genera masa dinámica en el límite quiral a diferencia de lo que se esperaba. Sin embargo no se descarta que alguna otra condición o esquema de renormalización pueda describir la generación de masa para el caso $m_e = 0$.

La discusión para el caso de la ecuación de Schwinger-Dyson puede ser también ampliada considerando el caso $m_e > 0$ ya que la ecuación sólo se resolvió para el límite quiral. También se pueden considerar otras aproximaciones como la aproximación angular (tanto para el límite quiral como para $m_e > 0$) o probando a resolver numéricamente la ecuación (280). Cabe también notar que se hicieron dos aproximaciones importantes al comienzo del capítulo nueve: una al propagador del fotón y otra al vértice, llamadas “quenched” y

⁵⁰En realidad desde algún valor μ_0 muy pequeño debido a que no es posible integrar numéricamente desde cero.

⁵¹Es decir, para esta elección de la condición de renormalización (ecuación (240)).

“arcoiris” respectivamente, el no considerarlas, o considerar otras en su lugar podría también mejorar la descripción de la generación de masa.

Bibliografía:

- 1 Halzen, I F; Alan D., M. (1984). Quarks and Leptons; An Introductory Course in Modern Particle Physics. USA. John Wiley and Sons.
- 2 Schiff, I.L.(1949). Quantum Mechanics. USA. McGraw Hill
- 3 Greiner, W. (2001). Quantum Mechanics: An Introduccion Alemania. Springer.
- 4 Sakurai, J.J. (1994). Modern Quantum Mechanics. Hawai. San Fu Tuan
- 5 Griffiths, D. (2004). Introduction to Quantum Mechanics. USA. Pearson
- 6 Bjorken, J.; Drell, S.(1964) Relativistic Quantum Mechanics. USA McGraw Hill.
- 7 Peskin, M.; Schroeder, D. (1995). An Introduction to Quantum Field Theory. USA. Perseus Books
- 8 Arfken, B.; Weber, H. (2005) Mathematical Methods for Physicists. USA. El Sevier Academic Press.
- 9 Feynman, R. (2016) Lectures on Physics. Vol II y Vol III. USA. Pearsons
- 10 Cohen, C; Diu, B; Lalo, F (1977) Quantum Mechanics. USA. John Wiley and Sons.
- 11 Sánchez Madrigal, S. (2012) Generación dinámica de masas y confinamiento en QED_3 (tesis doctoral). Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Michoacán México
- 12 González Valdés , J. (2009) Tres Métodos para obtener el Propagador de Feynman en la Mecánica Cuántica (tesis de pregrado). Uni-

versidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Michoacán México.

13 C. D. Roberts y A. G Williams, Prog. Part. Nucl. Phys. 33, 477 (1994)

14 B. V. Struminsky, Magnetic moments of barions in the quark model, JINR-Preprint P-1939, Dubna, Submitted on January 7, 1965.

15 F. Wilczek, Physics Today 52, 11, 11 (1999)

16 F. Wilczek, Physics Today 53, 1, 13 (2000)