



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLAS DE HIDALGO**



FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO – MATEMÁTICAS

“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

**“Propuesta Metodológica para la Enseñanza de los Criterios de
Divisibilidad en Escuelas de Nivel Medio Básico y Medio Superior”**

TESIS

Que para obtener el título de

Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

Presenta:

JOSÉ VIANEY BENÍTEZ MENDOZA

Asesor

Dr. Armando Sepúlveda López

Morelia, Michoacán, octubre de 2017

AGRADECIMIENTOS

Primeramente a dios, por haber puesto en mi camino a tan buenas personas.

A mi madre la Sra. Eloina, gracias mamá, por todo cuanto te has limitado y has tenido que renunciar para el bienestar y futuro mi persona.

A mi padre el Sr. Roberto.

A mis hermanos: Eduardo, Said, William, Luis Antonio, Treicy, Miguel Ángel, Araneli, Anayelli, María Luisa, German, Demetrio, Magdaleno (Benito), gracias hermanos.

A mi esposa María Concepción, gracias amor, me es imposible escribir todo lo que has hecho por mí.

A mi hija Itzayana Yaretzi, gracias hija has sido la principal causa de la terminación de este trabajo, y en general, de mi actual formación académica.

A mi asesor el Dr. Armando Sepúlveda, gracias profesor, su ayuda ha sido indispensable e invaluable para mí.

A mis sinodales, gracias profesores.

A los compañeros alumnos de la facultad físico-matemáticas.

A todos los que, por mi débil memoria, me es imposible recordar.

ÍNDICE

CONTENIDO	Página
Presentación	2
Capítulo 1. Planteamiento del problema	5
1.1 Introducción	5
1.2 Justificación	13
1.3 Problema de investigación	18
1.4 Objetivos y preguntas de investigación	19
Capítulo 2. Marco Teórico	21
2.1 Introducción	21
2.2 Reseña histórica	23
2.3 Axiomas de los Números Enteros	34
Capítulo 3. Los criterios de divisibilidad	38
3.1 Introducción	38
3.2 Divisibilidad	42
3.3 Criterio de divisibilidad de 2 y 5	49
3.4 Criterio de divisibilidad de 3 y 9	51
3.5 Criterio de divisibilidad de 4	56
3.6 Criterio de divisibilidad de 11	57
3.7 Criterio general de divisibilidad para primos distintos de 2 y de 5	62
3.8 Congruencias	67
3.9 Los criterios de divisibilidad basados en congruencias	71
Capítulo 4. Conclusiones	85
4.1 Conclusiones	85
Bibliografía	87

Presentación

Esta tesis trata sobre el concepto de divisibilidad en los números enteros, tema necesario para encontrar los factores primos de un entero; el cual aparece en la red curricular de los diferentes niveles educativos: Primaria, Secundaria, Bachillerato y Nivel Superior —escuelas de las áreas en Ciencias exactas, Ingeniería y Económico administrativas—.

Es común observar en varios egresados, incluso del nivel superior, que muestran un débil manejo de este contenido matemático, ya sea porque no se les explicó bien o no practicaron lo suficiente para madurar sus ideas, que no lograron el aprendizaje esperado. Contrasta esta situación con la importancia del tema para lograr uno de los objetivos fundamentales de la educación matemática de los estudiantes, que es el aprendizaje de la factorización.

El lenguaje de las matemáticas es el álgebra y sus reglas de operación se derivan de las propiedades de campo, de los números reales, siendo la factorización uno de los temas esenciales para la manipulación matemática. El aprendizaje de la factorización permite entender conceptos y resolver problemas en casi todas las áreas de las matemáticas; así como incursionar con éxito en otras ciencias. Recordemos que, en asuntos de la cognición, la aprehensión de un concepto fundamental y “no simple” requiere de un proceso de maduración que puede tardar mucho tiempo; es por eso que, regularmente, la factorización no se aprende de inmediato cuando se estudia por primera vez, antes hay que entender los pre-requisitos esenciales y practicar bastante: la multiplicación, la distinción y manipulación de números primos, lo que es un factor, e ir madurando las ideas desde los niveles escolares básicos.

Lo anterior presupone un manejo adecuado de estos conceptos por parte del profesor. En esta tesis se propone realizar el estudio y analizar el tema referido que permita la elaboración de una propuesta didáctica, dirigida a profesores de matemáticas, para la enseñanza de la divisibilidad en las escuelas de Secundaria y Bachillerato.

Resumen

En el Capítulo 1, se plantea el problema que nos motiva, y las intenciones que tenemos, mediante el establecimiento de objetivos y metas del trabajo.

En el Capítulo 2, se hace una revisión histórica sobre el desarrollo de la matemática griega y la aparición de los conceptos de factorización y de los números primos.

En el Capítulo 3, se presentan los criterios de divisibilidad como habitualmente aparecen en los textos escolares que tocan el tema, además, un teorema que generaliza los criterios de divisibilidad, y se incorpora el tema de congruencia para deducir, desde otro ángulo, los criterios de divisibilidad.

Finalmente, se expresa que uno de los propósitos de este trabajo es llegar a elaborar, en un futuro cercano, un cuadernillo para los profesores de matemáticas.

Abstract

In Chapter 1, the problem that motivates us, and the intentions that we have, is raised through the establishment of objectives and goals of the work.

In Chapter 2, a historical review is made of the development of Greek mathematics and the appearance of the concepts of factorization and prime numbers.

In Chapter 3, the divisibility criteria are presented as they usually appear in school textbooks that touch on the subject, in addition, a theorem that generalizes the criteria of divisibility, and incorporates the topic of congruence to deduce, from another angle, the criteria of divisibility.

Finally, it is expressed that one of the purposes of this work is to develop, in the near future, a booklet for mathematics teachers.

Capítulo 1. Planteamiento del problema

1.1 Introducción

El desarrollo de las teorías del aprendizaje, al igual que otras ramas de las ciencias, ha tenido un crecimiento amplio en las últimas décadas, estableciendo diferentes estrategias, métodos y técnicas que orientan al docente sobre su actuar en las distintas situaciones que se le presentan en el salón de clases.

Sin embargo, se da por hecho que el profesor de matemáticas tiene un dominio completo de los contenidos involucrados en el currículum que enseña, y que sabe cómo lograr que los estudiantes aprendan dichos contenidos, lo cual puede no ser del todo cierto por diferentes circunstancias: a) el profesor no estudió a fondo ciertos contenidos durante sus estudios profesionales; b) no tiene oportunidad de reflexionar sobre las dificultades de aprendizaje que implican esos contenidos; c) no tiene oportunidad de actualizarse.

Lo más que podemos plantear es que sería deseable que el profesor de educación media y media superior (Secundaria y Bachillerato), tenga un panorama general de los fundamentos matemáticos de los contenidos esenciales del currículum.

Uno de esos contenidos es la factorización, proceso inverso del desarrollo de un producto, cuyas ideas incipientes se encuentran en la factorización de una cierta cantidad en números primos; para lo cual se requiere utilizar los criterios de divisibilidad.

Tomemos en cuenta que la escuela es la institución creada por el hombre para asegurar la transmisión de la cultura y el conocimiento; algunos agregan, incluso, que ha sido el principal medio del que se vale el hombre para asegurar su sobrevivencia como ente socialmente útil. En general, la educación proporcionada por la escuela, tiene como

propósito principal la formación de ciudadanos educados, reflexivos, constructivos y comprometidos con su entorno social, de manera que sus conocimientos les permitan integrarse a la sociedad y resolver distintos tipos de problemas que se les presentan en su ámbito de trabajo y en la vida cotidiana.

Sin embargo, en los diversos niveles escolares de nuestro sistema educativo, es común observar diferencias en el aprendizaje que manifiestan algunos estudiantes respecto a la mayoría de sus compañeros; unos pocos manejan conocimientos y aspectos matemáticos de manera distinta que otros. Las diferencias se hacen evidentes cuando emiten sus opiniones, regularmente, opinan con argumentos concretos y contundentes y, si el caso lo amerita, anteponen el análisis de la situación y expresan lo que piensan después de un proceso de meditación y reflexión (Schoenfeld, 1985).

Ellos, al igual que muchos otros, cumplen satisfactoriamente los requisitos escolares establecidos por el currículum, pero resulta notable el hecho de que se ha producido un aprendizaje matemático diferente, la mayoría lo hizo en forma rutinaria, aplicando algoritmos, escuchando y memorizando hechos que expresa el profesor o que están contenidos en los libros de texto.

Las diferencias observadas en el aprendizaje matemático de los estudiantes se deben fundamentalmente a:

- i) el nivel de dominio de los contenidos matemáticos por parte del profesor y el papel que juega en la clase;
 - ii) la disposición que tienen los estudiantes por explorar e ir más allá de lo que su profesor les proporciona. El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM -por sus siglas en inglés-, 2000) manifiesta que un aspecto relevante en la educación matemática, es provocar esa disposición para que los estudiantes logren un aprendizaje con entendimiento (Hiebert y Carpenter, 1992);
 - iii) el tipo de problemas que se abordan en clase y el rol que juega el estudiante en la resolución de los mismos (también se incluyen aquí los problemas que se dejan de tarea);
- y,

iv) la forma de instrucción utilizada y el ambiente generado en el salón de clases, en donde el papel que juega el profesor es preponderante.

En general, existe el reconocimiento de que las matemáticas ayudan a organizar y ordenar nuestros pensamientos; nos hace competentes tanto para el desarrollo de diversas actividades intelectuales como hacia los demás. A pesar de estos puntos destacables, es evidente que la mayoría de las personas tienen dificultades y muestran deficiencias en el aprendizaje de las matemáticas; algunas de las posibles razones son: los alumnos no tienen la oportunidad de entender la importancia de lo que significa aprender matemáticas; el currículum que se ofrece es demasiado rígido; y los estudiantes y profesores no están comprometidos con el aprendizaje de las matemáticas.

En este contexto, algunas de las preguntas que en el campo de la Educación Matemática se han planteado, son: ¿Qué aspectos intervienen para que estudiantes de un mismo currículum escolar tengan aprendizajes que se diferencian por la forma de usar los recursos matemáticos y el tipo de argumentos esgrimidos? ¿Qué tipo de problemas promueven el aprendizaje de los estudiantes? ¿Qué significa que los estudiantes aprendan matemáticas?

Así, los resultados en el aprendizaje de las matemáticas escolares por parte de los estudiantes dependen, principalmente, de varios factores que intervienen en el sistema educativo: (1) el currículum, (2) la organización escolar, (3) el tipo de enseñanza, (4) las características propias de la matemática (nivel de abstracción y naturaleza epistemológica) y (5) la variada formación matemática de quienes imparten clases (Polya, 1945; Schoenfeld, 1985; Ausbel, Novak y Hanesian, 1968).

(1) El currículum es el responsable del perfil que adquirirán los estudiantes cuando egresen de un nivel de estudios o carrera profesional; incluye la estructuración de las asignaturas, los programas de estudio y sus objetivos. (2) La organización escolar tiene que ver con la disposición de las instituciones por atender los problemas educativos, que van desde las necesidades docentes más elementales, hasta cuestiones políticas, como el carácter de las decisiones sobre asuntos académicos que se toman en los niveles cupulares. (3) El tipo de

enseñanza que el profesor desarrolla en el salón de clases, considera las actividades y problemas que se estudian, la forma de impartir la clase, el papel que juegan tanto el profesor como los estudiantes durante las sesiones de clase, así como el tipo de problemas que se dejan de tarea y su retroalimentación. Algunos de estos factores están estrechamente interrelacionados.

(4) Las características propias de la matemática, relacionadas con su nivel de abstracción, la incorporación de la lógica al discurso matemático y su naturaleza epistemológica, implican dificultades de aprendizaje para la mayoría de las personas; y (5) La variada formación matemática de quienes imparten clases, contribuye a la generación de distintos niveles de aprendizaje.

El tercero de estos factores merece especial atención; es sobre el que tienen posibilidad de incidir investigadores y profesores de matemáticas. En este sentido, surgen preguntas como: ¿los problemas que se abordan en el salón de clases, son atractivos y alientan la participación de los estudiantes?, ¿poseen contenidos fundamentales del currículum?, ¿se promueven procesos de resolución de problemas en la clase?, ¿se implementan en el aula formas de trabajo distintas a la tradicional? Estas preguntas son importantes porque dependiendo de su respuesta, se tiene la orientación para poder mejorar algún tipo de aprendizaje en los estudiantes.

Por otra parte, trabajos como el de Ausbel, Novak y Hanesian (1968) presentan un análisis de la importancia de los tipos de aprendizaje, en estos trabajos podemos encontrar el aprendizaje por repetición o memorización, en el cual solo es necesario una gran cantidad de ejercicios de práctica para llegar a obtener dicho conocimiento (¿Quién no recuerda la forma en que aprendió las tablas de multiplicar?), también podemos encontrar el aprendizaje significativo, en este tipo de aprendizaje se hace énfasis en adquirir el conocimiento a través de la comprensión del mismo. Es necesario hacer notar que no se está en contra ni a favor de ninguno de los dos tipos de aprendizaje mencionados anteriormente, sino mejor aún, se cree que cada uno de ellos se complementa, así entonces se hace necesario que el docente conozca no solo una gama importante de ejercicios de

repetición para abordar un tema o un concepto, sino además tenga claro los fundamentos y las bases del por qué funciona cierto algoritmo.

Otros trabajos, que teniendo en cuenta el gran desarrollo de los medios electrónicos, presentan distintas aplicaciones electrónicas que abordan una vasta cantidad de temas, los hay desde los que presentan solo una variada gama de ejercicios, hasta los que pretenden una enseñanza basada únicamente en la aplicación, sin ser necesario -al parecer- el docente. No es objetivo de este trabajo analizar los distintos puntos de vista de estos últimos programas.

Es claro que existen distintos factores o variables que influyen en el aprendizaje, Ausbel, Novak y Hanesian (1968) mencionan dos categorías, la categoría intrapersonal y la categoría situacional.

La categoría intrapersonal se refiere a las características personales de cada alumno, factores propios que influyen en el aprendizaje, aquí hacen una subdivisión en las siguientes variables; variable de la estructura cognoscitiva, disposición del desarrollo, capacidad intelectual, factores motivacionales y actitudinales, factores de la personalidad.

La categoría situacional trata principalmente sobre la forma en cómo se desarrolla el aprendizaje en el salón de clases, la subdivisión que proponen es; la práctica, el ordenamiento de los materiales de enseñanza, los factores sociales y de grupo, las características del profesor. Es en esta última variable en donde el presente trabajo pretende influir.

En la variable *características del profesor*, se menciona la capacidad cognoscitiva, la competencia pedagógica, la personalidad, la conducta y el conocimiento de la materia de estudio. Así pues, el conocimiento de la materia de estudio, desde este punto de vista abarca no solo el dominio de los resultados, sino también la demostración o demostraciones del teorema correspondiente a estos resultados, es decir, no solo se trata de que el docente conozca, maneje o utilice, por ejemplo, el teorema de Pitágoras, sino que además debe ser capaz de ofrecer una o varias pruebas de éste.

En el salón de clases convergen una cantidad considerable de situaciones, en lo que se refiere a los alumnos, tenemos: desde el alumno que lejos de querer aprender un algoritmo prefiere conocer la forma o el por qué funciona dicho algoritmo, hasta el alumno que definitivamente está en el salón de clases por mero requisito o trámite.

El docente actúa de diferentes maneras, ante las distintas situaciones y así se plantea preguntas, por ejemplo, ¿Cómo abordar de una forma eficaz un tema en concreto? si un aprendizaje se hace por excelencia en forma de memorización, ¿Puede modificarse para que sea ahora aprendido de forma significativa? ¿Qué tipos de aprendizaje por memorización pueden manejarse también desde el aprendizaje significativo? y ¿Qué problemas se deben plantear a los alumnos interesados en profundizar en cierto tema para poder guiarlos?

El desarrollo de las matemáticas ha tenido distintas etapas, muchos de los conocimientos actuales se utilizan o aprenden, sin siquiera reparar en las justificaciones, y esto se hace necesario debido a la basta información que se ha desarrollado, sin embargo, ¿Cómo se puede despertar el interés en una materia que actualmente parece estar compuesta sólo de resultados ya completos y aparentemente terminados?

Se centra este documento, en dos áreas en particular de las matemáticas, la aritmética y la teoría de números, que son ramas de las matemáticas, con la que cualquier alumno tiene un primer contacto, es aquí donde se dan las primeras conjeturas propias, en una etapa escolar temprana se hace suficiente, sólo unos cuantos conocimientos (por ejemplo, las tablas de multiplicar), pronto el álgebra nos demandará conocimientos mayores, aquí se puede mencionar el tema de factorización, en donde se haga necesario factorizar en primos, el número 147, de entrada este número parece primo, nuestras tablas de multiplicar, poco pueden ayudarnos.

Así, en algunas ocasiones, se llega a iniciar al estudiante en el uso de algunas reglas, “la suma de los dígitos debe ser divisible por tres”; el alumno inquieto, pronto preguntará, por

qué funciona esta regla, he aquí que el docente menos preparado recurre a un “acto de fe” o un docente más preparado hará un bosquejo práctico de la demostración.

Muchas veces estos “actos de fe” hacen creer al alumno de una forma rápida, que las matemáticas son difíciles o peor aún que son artificiosas, esta creencia comienza a ser generalizada en ausencia de una demostración. La idea que aquí se presenta es que el docente esté preparado para cuando surja esta pregunta y la idea es que esta pregunta sea una oportunidad para el docente, así, por medio de ésta, el docente puede acercar al alumno a la rigurosidad matemática de una forma sencilla y más natural.

En el presente trabajo se capacitará al docente interesado en conocer las demostraciones de los criterios de divisibilidad, así también se mostrarán algunos resultados más superiores de éstos, en lo que se refiere a la teoría de números; se propone desarrollar, como ya se mencionó, un cuadernillo con diversos problemas de divisibilidad.

Una de las propuestas curriculares más influyente en la educación matemática en los últimos años, a nivel internacional, es la planteada por el NCTM (2000) en los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares, según la cual los fines de la educación se pretenden lograr a través de una serie *principios y estándares*, donde se flexibiliza la visión del orden tradicional en que deben cubrirse los contenidos matemáticos, desde el primer año escolar hasta el bachillerato, y además, se pretende lograr un aprendizaje diferente, que vaya más allá del tradicional. Ahí se sugiere organizar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas alrededor de la resolución de problemas, donde los estudiantes adquieran la formación para desarrollar distintos recursos y estrategias para resolver diferentes tipos de problemas; se pretende lograr un aprendizaje con entendimiento de las matemáticas (Hiebert y Carpenter, 1992).

Dicha propuesta curricular presupone una visión optimista tanto del dominio de los contenidos por parte del profesor, como de las posibilidades de aprendizaje de los estudiantes; contiene seis *principios*, que establecen la filosofía de la educación a la que se aspira con ese proyecto educativo y diez *estándares*; criterios de calidad previamente

establecidos que contienen instrucciones sobre contenidos a cubrir y procesos de pensamiento que se pretende promover para conseguir un aprendizaje significativo de los estudiantes. Cinco de los estándares se refieren a líneas de contenido y los otros cinco a procesos de pensamiento que se espera desarrollar a lo largo de los 12 grados escolares. También se contempla, con una visión amplia y flexible, la forma en que se entrelazan las líneas de contenido y los procesos de pensamiento a lo largo de la matemática escolar. El estudio de los contenidos así como el impulso y promoción de los procesos de pensamiento en los estudiantes, están concebidos como un todo armónico y dinámico que produce aprendizaje en los estudiantes.

Uno de los estándares, es, el de resolución de problemas y en él se plantea la utilización de problemas adecuados para promover el aprendizaje de las matemáticas. En este proceso, los maestros juegan un papel importante en la educación matemática, pues ellos tienen la posibilidad de seleccionar problemas con ciertas cualidades que permitan alcanzar los objetivos y metas planteadas; ayudan a los estudiantes a plantear o explorar conjeturas. Se debe aprovechar que en este nivel de desarrollo, los estudiantes son manipulables e influenciados por las orientaciones de sus maestros.

Los seis *principios* son: de la equidad, del currículum, de la enseñanza, del aprendizaje, de la evaluación y de la tecnología.

Los cinco *estándares* relacionados con líneas de contenido matemático son: números y operaciones; álgebra, geometría, medición, análisis de datos y probabilidad. Los cinco *estándares* relacionados con procesos de pensamiento que se deben promover en cada uno de los grados escolares, son: resolución de problemas, razonamiento y prueba; comunicación, conexiones y representaciones.

La interacción de los estudiantes con los problemas, ya sea mediante lápiz y papel o con el uso de la tecnología (computadora con software dinámico), puede contribuir a que los estudiantes se involucren en el proceso de resolución de problemas planteado por Polya (1945), quien ideó un método con la intención de ayudar a los estudiantes a resolver

problemas; el cual consiste de cuatro fases: Entender el problema, Diseño de un plan de solución, Ejecución del plan, y Revisión retrospectiva de lo realizado. Dicha interacción también puede contribuir a la evolución de los ciclos de entendimiento (Lesh, *et al.* 2000) que están presentes en el aprendizaje de las matemáticas, y que evolucionan de un nivel inicial, intermedio y final del entendimiento, y que en ese momento tiene el estudiante respecto a los conceptos y nociones involucradas; o bien, pueden contribuir al desarrollo de las características propias del pensamiento matemático, que Schoenfeld (1998) ha identificado como: tomar casos particulares, descubrir patrones y relaciones, hacer generalizaciones, justificar resultados; lo cual constituye el propósito principal del aprendizaje de las matemáticas.

1.2 Justificación

Los resultados en el aprovechamiento escolar obtenidos por México en diferentes evaluaciones internacionales, hace evidente la necesidad de realizar cambios en nuestro sistema educativo; uno de esos cambios, consiste en hacer propuestas de enseñanza que atiendan las necesidades de actualización del profesor y que estén basadas en los fundamentos de las matemáticas.

Dadas las dificultades existentes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, una tarea importante en educación matemática, ha sido estudiar e impulsar la generación de teorías que expliquen dichas dificultades. Estas teorías han aterrizado en la determinación y el estudio del tipo de actividades que favorezcan el aprendizaje; un aprendizaje que sea significativo para los estudiantes, es que vaya más allá de las cuestiones algorítmicas y rutinarias.

Sin duda, la resolución de problemas es la línea sobre la que se han centrado el mayor número de esfuerzos, tanto por lo escrito sobre el tema, como por el desarrollo de proyectos de investigación en los últimos años, y en consecuencia, la que mayor impulso ha proporcionado a la educación matemática. Quizás la razón sea que se nutre de los aspectos

esenciales del quehacer matemático: los problemas y las acciones típicas del pensamiento que intervienen en el proceso de solución.

El estudio e incorporación de estos aspectos, así como la puesta en claro de cómo realizar acciones que contribuyan a la resolución de los problemas, se debe a George Polya, que debido al acostumbrado fracaso de sus estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, se propuso diseñar un método que pudiera servirles para aprender a resolver problemas y en consecuencia, a aprender matemáticas. Dicho método lo denominó ¿Cómo resolverlo? (Polya, 1945), marcando así un nuevo rumbo en el estudio de problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Sin embargo, el reconocimiento del trabajo de Polya no ocurrió inmediatamente; fue hasta la década de 1970, después de haber aceptado la invitación para trabajar en Estados Unidos, que se reconocen plenamente sus planteamientos, los cuales inicialmente estaban dirigidos a los estudiantes como una propuesta de aprendizaje, pero que pronto se convirtieron también en una propuesta de enseñanza, pues dichos lineamientos podrían ser utilizados por los profesores para organizar sus cursos. Es así como surgen estudios, artículos y libros que buscan dar explicaciones y desarrollar la teoría de resolución de problemas en educación matemática; algunos de ellos son: NCTM (2000); Schoenfeld (1985, 1999); Santos (2007); y Zeitz (1999).

Incluso en la propuesta del Nuevo Modelo Educativo (2017), que no necesariamente tiene fines estrictamente educativos, se propone:

No obstante, el cambio que se plantea está orientado a fortalecer el sentido y el significado de lo que se aprende. Se propone ensanchar y hacer más sólidos el entendimiento y la comprensión de los principios fundamentales, así como de las relaciones que los contenidos guardan entre sí. La memorización de hechos, conceptos o procedimientos es insuficiente y hoy ocupa demasiado espacio en la enseñanza. El desarrollo de las capacidades de pensamiento crítico, análisis, razonamiento lógico y argumentación son indispensables para un aprendizaje

profundo que permita trasladarlo a las diversas situaciones para resolver nuevos problemas. (pág. 15)

De forma explícita se menciona que mucho del conocimiento que se ofrece en la educación básica está basado en el método de repetición, y no es que aprender repitiendo sea infructuoso, sino que, en muchas ocasiones esta forma de memorización limita la aplicación del conocimiento en otras áreas, ya que se tiene la impresión por parte del alumno de que solo se puede utilizar en la forma en que se aprendió. Sin duda, cuando el alumno puede aplicar un conocimiento en diversas situaciones tenemos una formación más completa de éste.

En el área de matemáticas que un alumno tenga un entendimiento completo del significado de los conceptos, así como de la comprensión y aplicación de los principios fundamentales y el conocimiento de las relaciones que guardan las definiciones, los axiomas y los teoremas, se vuelve algo no solo deseable sino más bien necesario para el alumno de formación Media Superior, que pretenda hacer estudios superiores en el área de matemáticas.

Lo tratado anteriormente, en cualquier sociedad, es un objetivo primordial desde cualquier punto de vista, esto supone un trabajo más dedicado por parte del docente, pues para que el alumno tenga una comprensión más completa se necesita de una guía adecuada, las teorías de aprendizaje juegan un papel importante en este rol y el docente del área de matemáticas se verá en la necesidad no solo de manejar los contenidos del currículo sino además deberá tener pleno conocimiento de la justificación de cada uno de ellos.

En otro apartado del documento oficial, se dice:

En la Educación Media Superior, la consolidación del modelo por competencias implica el desarrollo de nuevas formas de trabajo en las aulas, que debe ser apoyado con materiales educativos que permitan a los docentes contar con un amplio repertorio de estrategias para el trabajo con los alumnos, incluidas la evaluación y la retroalimentación. Esto significa poner a disposición de los estudiantes, padres de

familia y comunidades educativas, materiales educativos y recursos de apoyo actualizados, adecuados y pertinentes. (pág. 32)

En el enfoque por competencias la interacción del alumno con sus similares es indispensable, pues se pretende que el alumno tenga un amplio sentido de cooperación, además se toman en cuenta las investigaciones que muestran que un alumno es más eficaz y competente cuando se le presentan problemas que se simulen con su entorno social, sin duda esta es una tarea difícil para los conocimientos que se pretenden manejar de una forma puramente repetitiva.

En este enfoque se hace necesario el uso de múltiples problemas que además de tener relación con los conceptos que se pretenden enseñar, deben ser atractivos para el alumno, en cuanto a que resuelven – al menos aparentemente – un problema de su vida cotidiana.

Así, nuevamente es claro que el docente tendrá que estar capacitado para emplear resultados matemáticos a diferentes situaciones, lo cual se hará de una forma más completa y clara si se conocen las justificaciones teóricas de dicho resultado, pues estas se dan de una forma general y no aplicadas a algún caso en particular. En relación a la motivación se dice:

De forma cada vez más contundente, se sabe hoy que la motivación es requisito necesario para adquirir conocimientos y habilidades de forma significativa. En ese sentido, el maestro tiene un papel clave para ayudar a los estudiantes a reconocer sus sistemas de motivación y la forma como influyen en su aprendizaje. Para ello, los docentes deben aprender estrategias para reforzar la autoestima de los alumnos, la confianza en su potencial, y el desarrollo de expectativas positivas y realistas. (SEP, 2017, pág. 45)

El párrafo anterior tiene un enfoque general en lo que se refiere a la motivación, sin embargo, podemos desprender de este que, el docente al manejar los contenidos de una forma clara y a la vez con el uso de diversos recursos puede despertar un interés importante en los alumnos y generar en ellos la motivación necesaria para seguir indagando en el área

de las matemáticas. Así se transfiere al docente un rol crucial en las pretensiones de este “Nuevo modelo educativo” y, por lo mismo, se le exige una preparación más completa.

La educación Secundaria y la educación Media Superior son la base de los estudios superiores que se llevan a cabo en la Universidad, en el área de matemáticas, esta dependencia es aún más fuerte.

En los primeros semestres de la Universidad, en la Licenciatura en Ciencias Físico Matemáticas, los estudiantes se enfrentan a dos dificultades sustanciales:

1.- La no comprensión de la necesidad de demostrar los resultados, lo cual es entendible en el sentido de que nunca o pocas veces en sus estudios anteriores se les presentó alguna demostración; sin embargo, esto es de vital importancia para la formación del profesional del área de matemáticas.

2.- La no comprensión de la estructura de la argumentación lógica de una demostración. La argumentación lógica es una actividad que debería cultivarse desde los estudios iniciales en la educación básica, como primeros acercamientos a las demostraciones.

Por lo anterior, se considera conveniente que el docente de Secundaria y Bachillerato, conozca y tenga cierto entendimiento de axiomas, teoremas y demostraciones de los resultados que pretende enseñar, lo cual le generará confianza y podrá aspirar a generar en sus alumnos interés y comprensión sólida, de los contenidos fundamentales del currículum.

Cabe mencionar que diversas investigaciones indican que no es recomendable abordar demostraciones, de manera rigurosa, en un primer acercamiento; sino ir acercándose intuitivamente, e ir introduciendo gradualmente argumentaciones más sofisticadas, propias de un profesional del área de matemáticas. Se toma en cuenta que la ignorancia de ciertos temas no exime la responsabilidad del profesor de responderle a un alumno, que ha logrado cierto desarrollo cognoscitivo, y éste puede preguntarle.

1.3 Problema de investigación

Entre los contenidos fundamentales del currículum escolar desde la educación básica, está el tema de factorización, el cual depende fuertemente de los Criterios de divisibilidad. Su conocimiento por parte de los estudiantes trae consecuencias importantes para el aprendizaje de otros contenidos y a la resolución de problemas. El dominio de los conceptos involucrados por parte del profesor es esencial para ese acercamiento.

Este trabajo, tiene como propósito principal que el profesor de Educación básica (Secundaria y Bachillerato), conozca la base teórica de los principales resultados involucrados en la factorización; específicamente, en los Criterios de divisibilidad. Así, nuestro problema de investigación es:

¿Cuál es la base teórica y las demostraciones de los Criterios de divisibilidad que se enseñan en la Secundaria y el Bachillerato?

Se hará un recorrido histórico para mostrar cómo es que se ha llegado a tener una comprensión más completa de lo que es el concepto de número, en esta parte se verá cómo no ha sido sencillo, y ha llevado al ser humano en un proceso amplio para llegar a dicha comprensión. Por esto se hace necesario conocer este proceso y también conocer ¿Cuáles han sido las partes esenciales que ayudaron a la comprensión actual del concepto de número?

Después, se centrará este proceso en dar a conocer los axiomas de los números enteros, ya que son éstos los que permiten tener una definición de dichos números; de esta forma se tendrá por parte del docente una respuesta más adecuada a la pregunta ¿Qué es un número entero? con esto se dará un primer paso a la comprensión más rigurosa.

Así, se estará en condiciones necesarias para dar las demostraciones de los criterios de divisibilidad, los cuales, son los resultados que más se utilizan en la educación Secundaria y en la educación Media Superior; por mencionar algunos ejemplos de la utilización tenemos:

- a) Aritmética: Se utilizan para la reducción de fracciones equivalentes y para la factorización en primos de un número natural.
- b) Álgebra: Se utilizan para la factorización de polinomios de grado dos.
- c) Geometría plana: Se utilizan en la resolución de semejanza y en cualquier problema que se establezca una proporción.
- d) Geometría analítica: Se utilizan en la simplificación de ecuaciones.

En este trabajo no se considera la utilización de conocimiento previos por parte del lector, pero sí es necesario mencionar que está destinado principalmente para el docente que busca capacitarse y para aquel alumno inquieto que busca la justificaciones del conocimiento que se les muestra en la etapa escolar básica.

1.4 Objetivos y preguntas de investigación

Como hemos mencionado, debido al desarrollo que ha tenido el conocimiento en el área de matemáticas en los últimos años, muchas veces se recurre a la memorización del conocimiento dejando de lado la comprensión. Nuestra sociedad exige de los alumnos una comprensión completa, con el fin de utilizar el conocimiento en distintas situaciones.

Cuando se hace la consulta de alguna demostración en un libro de teoría de números, normalmente, se le exige al lector una cierta madurez cognoscitiva, pues algunos resultados no se muestran de forma completa por considerarlos “triviales” y esto, en varias ocasiones confunde o deja incertidumbre.

Un primer objetivo de este trabajo, es dar a conocer las demostraciones de forma completa, sin llegar a “trivializar” ningún resultado, por más simple que éste sea, también se tratará de mostrar los puntos donde el lector tendrá que poner especial atención.

Un segundo objetivo de este trabajo, es capacitar al docente de Educación Básica, en lo que se refiere a la base teórica de los principales resultados que se utilizan en esta etapa escolar. Partimos de la premisa de que: “el docente del área de matemáticas, en cualquier etapa,

para lograr la enseñanza de forma adecuada, debe poseer conocimientos superiores a los que se pretende enseñar”.

Así las preguntas de investigación que guiarán este trabajo son:

- 1.- ¿Cuál es el desarrollo histórico que ha tenido el concepto de número?
- 2.- ¿Cuáles son las propiedades de los números enteros?
- 3.- ¿Cuál es el concepto de divisibilidad?
- 4.- ¿Qué es un criterio de divisibilidad?
- 5.- ¿Cuáles son las demostraciones de los criterios de divisibilidad?
- 6.- ¿Existen otras demostraciones de los criterios de divisibilidad?
- 7.- ¿Cuál es el concepto de congruencia?
- 8.- ¿Cuáles son las demostraciones de los criterios de divisibilidad a través del concepto de congruencia?
- 9.- ¿Qué ejercicios se pueden plantear para trabajar con los criterios de divisibilidad?

Capítulo 2. Marco Teórico

2.1 Introducción

La revisión histórica en matemáticas, es esencial para entenderlas, ninguna ciencia pierde más que las matemáticas si se aísla de los hechos históricos. La historia es la disciplina que estudia y expone, de acuerdo con determinados principios y métodos, los acontecimientos y hechos que pertenecen al tiempo pasado y que constituyen el desarrollo de la humanidad desde sus orígenes hasta el momento presente; en ella encontramos la respuesta al porqué de nuestro mundo actual.

Se ilustra la importancia de esta revisión con una anécdota que se desarrolla durante la introducción de un curso de Álgebra de Bachillerato:

El docente escribe en el pizarrón lo que a todo niño en una etapa escolar le enseñaron como el número cinco y pregunta a los alumnos:

Docente: ¿Esté es el número cinco? (señalando lo escrito en el pizarrón)

Alumnos: ¡Sí! (la mayoría contestó como es de esperarse)

Docente: ¿Qué pasaría si yo les dijera que no es el número cinco?

-La mayoría se muestran confundidos y con cara de incertidumbre, el docente hace una pausa dejando espacio a la reflexión y después continúa:-

Docente: Tranquilos, les voy a comentar a lo que me refiero, éste (señalando lo escrito en el pizarrón) no es el número cinco sino más bien, es un “símbolo” (escribe la palabra “símbolo” a un lado), que sirve para representar algo más abstracto, como lo es un número, porque para alguna otra persona, éste (escribiendo y señalando en el pizarrón en números romanos el cinco) es el número cinco ¿no?

Alumnos: ¡sí!

Docente: o tal vez, para otra persona éste (escribe como anteriormente pero con notación diferente) sea el número cinco ¿no?

Alumnos: ¡sí!

Docente: así, en álgebra este es el número cinco (escribiendo por convención alguna de las últimas letras de nuestro alfabeto), mejor aún, esta letra representa cualquier número que se conozca.

...etc.

Con la anécdota anterior se puede dar cuenta de dos cosas:

- 1.- Debido a la sinergia de nuestra sociedad, pocas veces nos detenemos a reflexionar sobre el conocimiento que adquirimos.
- 2.- Conocer el desarrollo histórico que ha tenido el conocimiento –por más simple que sea– nos permite tener una comprensión más completa de éste.

En este apartado, se hará un recorrido desde la concepción del concepto de número hasta llegar a las propiedades que los definen. Todo esto con la finalidad de que el docente, se capacite en la rigurosidad propia de un profesional del área de matemáticas y pueda con ello, diseñar o transmitir sus conocimientos de una forma más completa.

La Teoría de números, es una rama de las matemáticas muy sofisticada, que surgió en la antigüedad y ha estado presente casi desde que el hombre concibió la idea de número; su estructura y desarrollo se basa, principalmente, en las propiedades de los Números enteros ($\mathbb{Z}$).

Es necesario mencionar lo siguiente, aunque este trabajo se basa principalmente en dar a conocer a los docentes las demostraciones de los criterios de divisibilidad con el uso de varios conceptos matemáticos propios de la teoría de números, en este repaso histórico se hace referencia al conjunto de los Números reales ($\mathbb{R}$).

2.2 Reseña histórica

Los egipcios y los babilonios. Los primeros acercamientos del hombre al mundo matemático surgieron de una necesidad inherente a su entorno, Ortiz (2005) menciona:

... La noción de número debe haber pasado por un proceso mental de muchísimos años; el hombre de las cavernas debe haber sentido la sensación de lo cuantitativo al ver una piedra y un montón de piedras, al observar a un hijo y a todos sus hijos; observaba (?) que sólo había una Luna. En su evolución, el hombre seguramente tuvo curiosidad al ver que poseía dos manos, dos pies y dos ojos (inoción de correspondencia biunívoca!) y que había algo en común en este sentimiento (?). (pág. 9)

Lo anterior es muy convincente, sin embargo, como el mismo Ortiz menciona, lo que se conoce es sólo a través de descubrimientos arqueológicos y éstos parecen mostrarnos que realmente el desarrollo de las matemáticas ha estado siempre con nosotros, en nuestra historia como humanidad. Podemos darnos cuenta con esto que los números son producto de la mente humana, aunque, no es propiamente – al menos con los primeros números naturales – exclusivo de nosotros, según sugieren algunos experimentos, pues algunos animales también poseen la capacidad de contar. Podemos decir que con la idea de hacer corresponder dos manos con la posibilidad de tomar dos y sólo dos animales, se tiene ya la idea del concepto de número, dicho concepto podría ser “es aquella característica que comparten los conjuntos que se pueden poder en asociación, de tal forma, que un elemento de un conjunto se asocia con uno y solamente con uno del otro conjunto”, por ejemplo, la característica que comparten los siguientes: el conjunto de dos manos, el conjunto de dos pies, el conjunto de dos ojos, el conjunto de dos árboles, el conjunto de dos animales, etc.

En el ejemplo anterior, una mano se puede asociar con un solo animal y la otra mano con otro animal, sin embargo, si tuviésemos un tercer animal, éste ya no se asociaría con ninguna mano, porque ya las tenemos asociadas, así el conjunto de tres animales tal vez se pueda asociar con otro conjunto que comparta esa característica con él, así se hace

necesaria la implementación de una simbología, por ejemplo, “marcas” que se pueden asociar con un determinado conjunto, estas “marcas” fueron las primeras representaciones de números.

Se han encontrado estas marcas en huesos, uno de ellos es el del peroné de un babuino de unos 35 000 años de antigüedad encontrado en África, en este se pueden observar 29 marcas que asemejan un calendario. Otro de ellos de unos 30 000 años, encontrado en Checoslovaquia con cincuenta y cinco incisiones colocadas en grupos de cinco.

Los vestigios más antiguos, con un carácter matemático, más avanzado, son unas 300 tablillas que pertenecen a cultura Babilónica (5000 A.C.), en éstas se encuentran diversos problemas y además se muestra que esta cultura usaba la base 60. Es por esto que actualmente una hora tenga 60 minutos o que la circunferencia este dividida en 360 grados. En la Tabla 1 se muestra alguna de su simbología.

El sistema numérico Babilónico era también posicional, en el sentido de que nuestro símbolo “5” actual, no tiene el mismo significado en el número 450, que en el número 540. Además para nosotros existe de una forma muy natural el uso del “0”, observe que usar el cero como número y siguiendo la idea de asociación, genera problemas, pues ¿cómo se realizará la asociación con algo que representa nada? Esto tuvo que forzar una nueva abstracción en la mente humana.

Tabla 1*. Simbología de los Babilonios

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
20	21	30	40	50	60	70
80	90	100	200	300	400	500
600	700	800	900	1000	2000	3000

Los babilónicos en un inicio, solo usaban un espacio amplio para esta necesidad del cero, veamos un ejemplo.

$$3\ 661 = 1 (60)^2 + 1 (60)^1 + 1 (60)^0 =$$

La escritura hecha de esta forma generaba ambigüedad, el número anterior también podría representar al número tres. Para mostrar la posición los babilónicos usaron después el símbolo , ahora el número quedaría escrito sin ambigüedad como:

$$3\ 661 =$$

El símbolo era una representación del cero, aunque no en la forma actual.

*Jean-Paul Collete (2000)

También los babilónicos empiezan a usar fracciones (números racionales), sin embargo, de acuerdo a su uso poseían un significado diferente, además de que sólo se conocían algunas fracciones, la razón de esto es que representaban cantidades completas y no la división en partes como lo entendemos actualmente. De la misma forma, tienen presencia algunos números que no se pueden escribir como fracción (números irracionales), se puede encontrar que tuvieron estudios sobre pi (π), logrando obtener la aproximación de 3.14159...

Algunas tablillas muestran unos tipos de ecuaciones, los métodos de solución de éstas (a falta de notación algebraica) eran a base de métodos aritméticos, dictados como recetas, esto no les impidió realizar la solución de ecuaciones de grado superior a las lineales, en estos procedimientos se hacía uso de tablas que contenían la suma de los cubos con los cuadrados de números menores que treinta, es decir, $n^3 + n^2$.

En lo que se refiere al desarrollo de los números, los babilónicos llegaron a conocer un tipo especial de ternas pitagóricas, éstas, además de que la suma del cuadrado de dos de ellas es igual al cuadrado de la tercera ($X^2 + Y^2 = Z^2$) y que se pueden escribir como $X = 2uv$, $Y = u^2 - v^2$, $Z = u^2 + v^2$, donde u y v se conocen como generadores, se caracterizaban porque los generadores que utilizaron son los que tienen como únicos factores a los números 2, 3, 5 que son los divisores de 60.

Otro de los vestigios más antiguos con carácter matemático avanzado, es el que pertenece a la cultura Egipcia. Tal vez porque se deriva de la unión de varias colonias en esta cultura, se encuentran también dos sistemas de numeración: el jeroglífico de uso más común, y el hierático con más utilización por parte de los sacerdotes.

Tabla 2*. Símbolos usados por los egipcios.

Cuadro de símbolos para los números de 1 a 9 000					
N	Jeroglíficos	Hieráticos	N	Jeroglíficos	Hieráticos
1	𐎠	𐎠	100	𐎡	𐎡
2	𐎡	𐎡	200	𐎢	𐎢
3	𐎢	𐎢	300	𐎣	𐎣
4	𐎣	𐎣	400	𐎤	𐎤
5	𐎤	𐎤	500	𐎥	𐎥
6	𐎥	𐎥	600	𐎦	𐎦
7	𐎦	𐎦	700	𐎧	𐎧
8	𐎧	𐎧	800	𐎨	𐎨
9	𐎨	𐎨	900	𐎩	𐎩
10	𐎩	𐎩	1 000	𐎪	𐎪
20	𐎪	𐎪	2 000	𐎫	𐎫
30	𐎫	𐎫	3 000	𐎬	𐎬
40	𐎬	𐎬	4 000	𐎭	𐎭
50	𐎭	𐎭	5 000	𐎮	𐎮
60	𐎮	𐎮	6 000	𐎯	𐎯
70	𐎯	𐎯	7 000	𐎰	𐎰
80	𐎰	𐎰	8 000	𐎱	𐎱
90	𐎱	𐎱	9 000	𐎲	𐎲

En el sistema hierático ya se puede observar el uso de símbolos más elaborados para ciertos números, es decir, las “marcas” que en un principio ayudaron al hombre a hacer la abstracción de un número, no parecen ser necesarias ya, en esta etapa.

*Jean-Paul Collete (2000)

Con esto se puede percibir que nuestra notación, es decir, nuestra simbología está muy desarrollada y es aquí, que el docente debe tener esta consideración.

Como se puede observar en la Tabla 2, el sistema egipcio era de base diez, el sistema de jeroglíficos tiene una estructura más primitiva, en cuanto al uso de marcas, a diferencia del sistema hierático, en el cual se muestra una sofisticación o al menos no es claro, por qué el símbolo que se usa para el número cuatro o el siete, tienen esta forma.

Los griegos.

Una de las culturas que más han contribuido al conocimiento de la humanidad es, sin duda, la cultura griega; sus grandes avances en la ciencia en general y en la matemática en particular, se ubican en el periodo comprendido entre los Siglos VII y II a.C., llamada la Época de oro de los griegos. Al respecto, Sepúlveda y Arcos (2016) describen:

Una buena parte de la información que hoy tenemos sobre el conocimiento matemático en la antigüedad se debe a Proclo, historiador matemático que vivió en el siglo V d. C. en la antigua Grecia, quien recuperó un famoso resumen elaborado por Eudemo (370-300) alumno de Aristóteles, conocido como *Sumario de Eudemo* y que, a su vez, contiene los trabajos de otro distinguido personaje, llamado Herodoto.

Herodoto vivió de 485 a 425 a. C. y se le ubica como el primer historiador griego que sistematizó el conocimiento matemático del antiguo Oriente, además de los resultados que se producían en ese momento alrededor del Mar Mediterráneo. Seguramente, estos trabajos fueron retomados por Eudemo, alrededor del año 335 a. C., para elaborar su *Sumario*, el cuál fue extraviado y descubierto siete siglos después por Proclo. Quizás, este último sea la fuente principal de la preservación de "*Los Elementos*" de Euclides, de quien se dice que vivió alrededor del año 300 a. C.; obra que posteriormente fue retomada, analizada y comentada por un buen número de destacados matemáticos e historiadores de diferentes épocas. En el medio escolar, han destacado los trabajos realizados por Sir Thomas L. Heath, Howard Eves y Moise & Downs.

Sin embargo, existen antecedentes conformados por evidencias físicas que revelan un conocimiento matemático de muchos siglos atrás, como son: las tablillas de arcilla de Mesopotamia, de alrededor del año 3000 a. C., que contienen tablas de multiplicar y una diversidad de problemas; las Pirámides de Egipto del 2900 a. C. Además, los papiros de Moscú (1859 a. C.) y de Rhind o de Ahmes (1650 a. C.) contienen la mayor fuente de registros escritos de la matemática egipcia y babilónica, los cuales indican que el mayor apogeo de la cultura desarrollada en Babilonia, se dio en el periodo del año 2000 a 1600 a. C. En el Museo de Berlín pueden encontrarse instrumentos topográficos que datan de 1950 a. C. y un reloj egipcio de 1500 a. C.

No se sabe cuándo ni cómo, pero el conocimiento de la matemática evolucionó de un primer nivel de conocimiento de las cosas a uno subconsciente, y finalmente, a un nivel consciente (Eves, 1969). El primer nivel corresponde a una interpretación inicial de las cuestiones más básicas de la naturaleza, donde las cuestiones primordiales están relacionadas con la sobrevivencia. El segundo nivel se refiere a un estado de manejo de la geometría subconsciente, donde lo importante era la aplicación de conocimientos para resolver problemas prácticos para la vida. Esto permitió acumular gran cantidad de conocimientos, algunos de ellos parcialmente correctos y otros que han prevalecido por su veracidad y utilidad a lo largo de varios siglos; tal es el caso de las relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo, que ya eran conocidas por la cultura Hindú antes del año 1650 a. C. y que posteriormente, se reconoce con el nombre de Teorema de Pitágoras, o bien, el antiguo problema Chino, en el que se trata de encontrar el radio de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo cuyos lados son conocidos. (pp. 1,2).

Y a continuación enlistan algunos de los científicos griegos que contribuyeron al desarrollo de la matemática, con algunas de sus aportaciones; además, hacen un resumen de los contenidos de los libros: *Los Elementos* de Euclides. En varios casos, las fechas que se dan son aproximadas.

Tales de Mileto (alrededor de 600 a. C.). Se le atribuye el Teorema del triángulo isósceles; el Teorema de Tales que se deriva del Teorema fundamental de proporcionalidad, proposiciones relacionadas con medidas de ángulos inscritos en una circunferencia.

Pitágoras de Samos (alrededor de 550 a. C.) El famoso teorema que lleva su nombre es, quizás, el teorema más citado durante las matemáticas escolares; Teorema de la suma de ángulos interiores de un triángulo; desarrollo de la teoría de proporcionalidad. Además, una de sus mayores contribuciones fue la de fundar en Crotona la Escuela Pitagórica que, con tintes religiosos de la filosofía Eleática, promovió y cultivó el estudio de las matemáticas por más de 200 años. Como un aspecto que muestra su sabiduría y religiosidad, es haber establecido la proporción divina llamada “sección áurea” y elegido al pentágulo místico como símbolo de su Escuela.

Hipócrates de Quio (450 a. C.) Pitagórico, al cual se le reconoce como el primero en intentar hacer una presentación lógica de la geometría, a partir de pocas afirmaciones y definiciones. Le siguieron Leon, Teudio y otros Pitagóricos.

Zenón de Alejandría (350 a. C.) Representa la oposición a algunas de las afirmaciones de la Escuela Pitagórica, y les plantea las famosas Paradojas de Zenón, siendo la de “Aquiles y la Tortuga” una de ellas.

Menecmo (antes del 350 a. C.) Se le reconoce como el inventor de las cónicas y, al parecer, las utilizó para determinar un segmento de longitud $\sqrt[3]{2}$, por la intersección de la parábola $y = x^2$, y la hipérbola $y = \frac{2}{x}$. Aprecie la dificultad de lograr esto en aquel tiempo, cuando todavía no se inventaba un sistema de coordenadas.

Theatetus (antes del 350 a. C.) Realizó un amplio trabajo sobre los inconmensurables, que posteriormente utilizó Eudoxio.

Eudoxio de Cnido (antes del 300 a. C.) Establece el método de exhaustión que consiste en obtener medidas de longitudes o áreas mediante la utilización de polígonos, interiores y/o exteriores, que van encerrando la línea o región de lo que se quiere medir, aumentando cada vez más el número de lados de los polígonos. Además, desarrolló una sofisticada teoría sobre proporcionalidad que le permitió resolver el problema de la semejanza de triángulos cuando los segmentos son inconmensurables.

Euclides de Alejandría (300 a. C.). Produjo la obra maestra de su época: *Los Elementos*; 13 libros con 465 proposiciones claras y elegantemente discutidas y organizadas, en las que se aplica el método axiomático y se recurre a la lógica para hacer deducciones y regular el discurso. Estos libros abarcan tópicos de geometría plana y del espacio, teoría de números y de álgebra geométrica. La primera versión, difundida por Proclo, se basa en los trabajos que Teón de Alejandría realizó en el año 400 d. C.

El Libro I, trata sobre congruencia de triángulos, suma de ángulos de un polígono, áreas de triángulos y paralelogramos, paralelismo y el Teorema de Pitágoras.

El Libro II, contiene la famosa sección áurea y un conjunto de relaciones que establecen la igualdad de áreas de diferentes rectángulos (álgebra geométrica) que conducen a la resolución geométrica de la ecuación de segundo grado.

En el Libro III, se estudia la circunferencia, ángulos inscritos, Teorema del ángulo central y el Teorema de la potencia de un punto.

El Libro IV, se refiere a la construcción de los polígonos regulares inscritos o circunscritos en una circunferencia.

En el Libro V, se hace un estudio general sobre medidas de magnitudes geométricas que conducen a los números irracionales.

En el Libro VI, se estudia la proporcionalidad y la semejanza de triángulos.

Los Libros VII, VIII y IX se dedican al estudio de la aritmética: proporciones, máximo común divisor y números primos.

En el Libro X se hace un estudio de los números inconmensurables a partir de los radicales cuadráticos.

Los Libros XI y XII tratan sobre la geometría del espacio, en particular las relaciones entre volúmenes de prismas y pirámides; entre cilindro y cono; y la proporcionalidad entre el volumen de una esfera y el cubo del diámetro. Finalmente, el Libro XIII, se dedica a la construcción de los cinco poliedros regulares, llamados sólidos platónicos.

Eratóstenes de Alejandría (250 a. C.) Bibliotecario de la Universidad de Alejandría, que se convirtió en el consultor por excelencia de los científicos de la época; dicen que sabía de todo y le apodaban el β. En particular, fue consultado por Arquímedes.

Arquímedes de Siracusa (287 – 212 a C.) Es considerado el máximo exponente de la matemática griega, estudió a fondo *Los Elementos* e hizo nuevas aportaciones: Usó el método de Eudoxio para inaugurar la forma de calcular π , concluyó que $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$; obtuvo medidas en la circunferencia; trabajó sobre espirales estableciendo la ecuación polar $r = k\theta$ para la espiral que lleva su nombre; obtuvo la fórmula para calcular el área de un triángulo $A(\Delta) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, la cual se atribuye a Herón; trabajó sobre medidas en la esfera y el cilindro, sobre conoides y esferoides; sobre equilibrio de planos, sobre cuerpos flotantes; estableció el famoso Postulado de Arquímedes; cuadró la parábola y encontró la cubatura de la esfera (uno de sus resultados favoritos), entre otros muchos resultados. (Sepúlveda, Arcos, 2016, pp. 4-6)

Los griegos estudiaron los Números primos y sentaron las bases de los criterios de divisibilidad; establecieron que existe una infinidad de este tipo de números e idearon un

método sencillo para obtener los primeros, mediante la llamada Criba de Eratóstenes, que consiste en lo siguiente:

Al 1 no lo consideran como número, porque definen: “*Unidad es aquello en virtud de lo cual cada cosa que existe se llama uno*” (Elementos de Euclides, p. 829); y luego definen: “*Un número es el solamente divisible por la unidad*” (*Ibid.* p. 830). Enseguida se enlistan los naturales menores que un cierto número, digamos 100, acomodados de 20 en 20 por ejemplo, en una tablilla rectangular de cera, y aplican el siguiente razonamiento: como el 2 es primo, entonces ningún múltiplo de 2 será primo, entonces con un punzón tachan dichos múltiplos. El que sigue es el 3, el cual es primo, por lo que ningún múltiplo de 3 será primo y se tachan con el punzón; algunos de estos múltiplos ya habían sido tachados por ser también múltiplos de 2. El que sigue sin tachar es el 5 por lo que ningún múltiplo de 5 será primo y se tachan con el punzón y así sucesivamente. El nombre de criba proviene del hecho de que al final, con nuestro ejemplo de los primos menores que 100, quedará la cera perforada en todos los que no son primos, generándose así un colador cuyo nombre también es el de criba.

Con este procedimiento podemos obtener la lista de los primeros 25 Números primos:

{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97}

A continuación, enunciamos una de las proposiciones contenidas en *Los Elementos* de Euclides, que es la base del Teorema Fundamental de la Aritmética.

Proposición 31 Libro VII. Todo número compuesto tiene algún divisor primo (*Ibid.* p. 840).

Demostración (como está en *Los Elementos*): Si A es un número compuesto, tiene algún divisor B que si es primo, queda demostrado lo que queríamos; si no lo es, tendrá también un divisor G que lo será también de A, si G es primo queda demostrado lo que queríamos; si no lo es, existe un divisor D y siguiendo razonando así, se llegará a un divisor primo porque cada divisor es menor que el anterior y no hay infinitos.

Teorema fundamental de la Aritmética. La descomposición de un número N en factores primos, es única.

Demostración. Sea N el número dado y supongamos que N se puede expresar como producto de n primos de dos maneras:

$$N = p_1 p_2 p_3 \dots p_n \quad y \quad N = q_1 q_2 q_3 \dots q_n, \text{ con } p_i \text{ y } q_i \text{ números primos}$$

Entonces, se debe tener:

$$p_1 p_2 p_3 \dots p_n = q_1 q_2 q_3 \dots q_n.$$

Como q_1 divide al lado izquierdo de la igualdad, debe dividir al lado derecho, pero los p_i son primos, entonces debe dividir a unos de ellos, digamos a p_1 ; lo cual implica que $p_1 = q_1$ por ser primos. Luego entonces nos queda:

$$p_2 p_3 \dots p_n = q_2 q_3 \dots q_n.$$

Como q_2 divide al lado izquierdo de la igualdad, debe dividir al lado derecho, pero los p_i son primos, entonces debe dividir a unos de ellos, digamos a p_2 ; lo cual implica que $p_2 = q_2$ por ser primos. Luego entonces nos queda: $p_3 \dots p_n = q_3 \dots q_n$. Y así sucesivamente, hasta llegar que los primos p_i y q_i son los mismos. Por lo tanto, la factorización de N es única, como queríamos mostrar.

2.3 Axiomas de los números Enteros

Actualmente la definición más formal, completa y rigurosa de los números enteros (**Z**) la encontramos en la Teoría de conjuntos, sin embargo para los fines de este trabajo tomaremos como definición la siguiente:

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Es decir, los números enteros son todos los negativos de los números naturales, el cero, y los números naturales. Con este conjunto de números, con la operación de suma (+) y con la operación producto (·) tenemos los siguientes axiomas:

Axioma 1. La suma de números enteros es conmutativa. Si $a, b \in \mathbf{Z}$, entonces

$$a + b = b + a.$$

Siempre se obtiene el mismo resultado, si al primer número (a) se le agrega el segundo número (b), que si al segundo número (b) se le agrega el primer número (a).

Axioma 2. La suma de números enteros es asociativa. Si $a, b, c \in \mathbf{Z}$, entonces

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Cuando se realice la suma de un número entero (a) con la suma de otros dos enteros ($b + c$), se obtiene el mismo resultado si a la suma de los dos enteros ($a + b$) se le agrega c .

Axioma 3. Existe en el conjunto de los enteros un elemento neutro para la suma llamado cero: 0. Si $a \in \mathbf{Z}$, entonces existe el número 0 tal que $a + 0 = 0 + a = a$.

Axioma 4. Para cada número entero existe en el conjunto de los enteros un inverso aditivo del primero. Si $a \in \mathbf{Z}$ entonces, existe el $-a$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Axioma 5. La multiplicación de números enteros es conmutativa. Si $a, b \in \mathbf{Z}$, entonces

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Axioma 6. La multiplicación de números enteros es asociativa. Si $a, b, c \in \mathbf{Z}$, entonces

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

Axioma 7. En el conjunto de los enteros existe un elemento neutro para la multiplicación. Si $a \in \mathbf{Z}$, entonces existe un número entero 1 tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Axioma 8. En el conjunto de los números enteros, la multiplicación se distribuye respecto a la suma. Si $a, b, c \in \mathbf{Z}$, entonces $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Cabe mencionar, que en la demostración de los criterios de divisibilidad se usará la estructura que estableció Euclides en el libro de Los Elementos: “el sistema axiomático deductivo”, en el que se incorpora la lógica para regular el discurso matemático, a pesar de que en ese tiempo, aún no se tiene el reconocimiento de esta ciencia como tal.

En el sistema axiomático deductivo se cuenta con enunciados o proposiciones, las cuales dependen de las definiciones que están implícitas en ellos y de acuerdo a la relación entre estas definiciones, pueden ser verdaderas o falsas. Por ejemplo, “Todo número compuesto tiene algún divisor primo”, esta proposición depende de las definiciones de número compuesto, divisor y número primo, al evidenciar la relación entre estas definiciones, se concluye que es verdadera.

Existen también proposiciones que guardan alguna relación entre sí, en este apartado mencionaremos tres; (1) las que la relación entre ellas proporciona condiciones necesarias, (2) las que la relación entre ellas proporciona condiciones suficientes, y (3) las que la relación entre ellas proporciona condiciones necesarias y suficientes.

(1) Cuando una proposición es verdadera puede tener diferentes consecuencias en otras proposiciones, así una condición necesaria es una consecuencia directa de la veracidad de la primera. Esto lo escribimos así $p \Rightarrow q$. Por ejemplo, si un número x es múltiplo de 6, se hace necesario que el número sea múltiplo de 2; y se hace necesario que el número sea múltiplo de 3. Esto se escribirá: x múltiplo de 6 $\Rightarrow x$ múltiplo de 2; y x múltiplo de 6 $\Rightarrow x$ múltiplo de 3. Sin embargo, que se cumpla una de las consecuencias no asegura que se cumpla la primera, por ello es necesario identificar qué consecuencias nos proporcionan condiciones suficientes para asegurar la veracidad de la primera.

(2) En este tipo de relación una de las consecuencias proporciona condiciones suficientes para asegurar la veracidad de la primera; es decir, si la consecuencia q es verdadera implica que la proposición p también sea verdadera. Esto se escribe $p \Leftarrow q$. Por ejemplo, si el dígito

de las unidades de un número es cero, esto es suficiente para asegurar que el número es múltiplo de diez.

(3) Cuando una proposición cumple con las dos relaciones anteriores entonces tenemos que la proposición primera p nos da condiciones necesarias y suficientes para asegurar la veracidad de la segunda proposición q , esto se escribe $p \Leftrightarrow q$. Los criterios de divisibilidad tienen esta característica.

Capítulo 3. Los criterios de divisibilidad

3.1 Introducción

Uno de los contenidos fundamentales de la educación básica es la factorización en el que los criterios de divisibilidad juegan un papel importante; por lo tanto, la divisibilidad deberá recibir mayor atención desde la educación básica, ya que sólo se enseña, en el mejor de los casos, los criterios más simples como son el del 2, del 5 y, si acaso, el del 3.

Imagine el shock que provocaría pedir a un alumno de cualquier nivel escolar, que explique el criterio del 19, del 89 o del 443; o que, por ejemplo, se quiera factorizar el trinomio $x^2 - 321x - 646$, seguramente el alumno tardará mucho tiempo y se generará sentimiento de frustración.

En este trabajo se verá un teorema que se aplica para conocer la divisibilidad de cualquier número entero por cualquier número primo diferente de 2 y 5; y además, se introduce el concepto de congruencia para demostrar, desde otro ángulo, los criterios de divisibilidad.

Tómese en cuenta que el presente trabajo está destinado, principalmente, a promover en el profesor de educación básica (Secundaria y Bachillerato) la enseñanza de los criterios de divisibilidad de los diferentes niveles escolares; en algunos casos, se hace demasiado énfasis en detalles básicos, porque regularmente, los profesores han tenido poca oportunidad de incursionar en las demostraciones de los teoremas.

La divisibilidad es un concepto matemático, que puede estudiarse desde un enfoque puramente teórico como parte de la Teoría de números. Sin embargo, las aplicaciones actuales de este concepto, por ejemplo la criptografía moderna, pueden ser el estímulo

perfecto para los estudiantes de nivel básico, pues muchas veces se tiene la idea de que dichos conocimientos teóricos nunca se utilizan. La criptografía en las computadoras se basa precisamente en la dificultad que tienen incluso las computadoras, en conocer si un número regularmente grande tiene o no divisores.

La divisibilidad de un número entero x por otro número entero z , trata sobre la existencia de otro número entero, digamos m tal que se cumple que el número entero x se puede expresar como el producto de m y z . Por ejemplo, supongamos que queremos conocer la divisibilidad del número seis con respecto del número tres, este es un ejercicio sencillo pues sabemos que el producto del número tres con el número dos es seis y de esta forma decimos que seis es divisible por tres. La sencillez del ejemplo anterior no nos debe confundir, pues qué pasaría si queremos conocer la divisibilidad del número 328 523 con respecto de cualquier otro número, sin duda la mayoría de nosotros tardaría en dar una respuesta; sin embargo, sería una tarea de un par de segundos para una computadora personal.

En las siguientes páginas se demuestran las afirmaciones que simplifican esa tarea, pero debido al objetivo de este trabajo, solo se hará para la divisibilidad de un número entero con respecto de los números 2, 3, 5, 4, 9, 11 y, en general, para cualquier número primo diferente de 2 y 5. Dichas demostraciones se harán usando primeramente la definición de divisibilidad y algunas proposiciones inmediatas; en segundo lugar se harán nuevamente las demostraciones basándonos en el concepto de *congruencia*, para que el profesor de matemáticas tenga acercamientos distintos para factorizar un número compuesto en primos, lo cual seguramente enriquecerá su conocimiento y podrá dar mejores clases.

Podemos decir que la *congruencia* es un concepto que simplifica una afirmación respecto de la divisibilidad; en varias ocasiones, se usa una definición para decir de una forma resumida, varias propiedades o condiciones respecto de un objeto. Por ejemplo, cuando nos referimos a un número entero se considera de forma implícita que es un objeto que cumple con todos los axiomas antes mencionados; el concepto de congruencia no solo se usa para simplificar, sino también para abrirnos paso a nuevas e interesantes cuestiones.

La congruencia es una especie de igualdad entre dos números enteros, dicha igualdad no se da propiamente con los números, sino más bien, con los residuos de éstos, al hacer la división con otro número entero. Por ejemplo, si hacemos la división de los números 8 y 26 con el número 3, obtenemos en ambos casos el mismo residuo 2; en este sentido los números 8 y 26 son equivalentes o iguales. Observe que esta igualdad en los residuos depende de que se haya hecho la división con el número 3, pues si ahora hacemos la división de los números 8 y 26 por el número 5, los residuos ahora serán el número 3 y el número 1, respectivamente, como estos residuos son diferentes, entonces los números 8 y 26 no son equivalentes.

A los números, con los que se hace la división se les llama módulos, de esta forma diremos los números 8 y 26 son congruentes módulo 3; de la misma forma los números 8 y 26 no son congruentes módulo 5. En este trabajo, usaremos el tema de congruencia para determinar los criterios de divisibilidad.

Veremos que los números que cumplen una afirmación (criterio de divisibilidad) pertenecen al mismo grupo de elementos equivalentes, mejor dicho; están en el grupo donde al hacer la división se obtiene el mismo residuo cero; es decir, estos números que cumplen cierta condición son divisibles con respecto al número que se hizo la división. Por ejemplo, los números enteros que tienen en las unidades un dígito par serán divisibles por el número dos.

Un criterio de divisibilidad es una afirmación que se hace con la totalidad o parte de los dígitos con los que se compone un número entero y esta afirmación nos permite asegurar que cuando hagamos la división, el residuo que obtendremos será cero; es decir, el número será divisible. Así, por ejemplo, si queremos averiguar si el número 123234436 es divisible por 2, es más sencillo revisar solamente el dígito de las unidades y con sólo inspeccionar este dígito, sabemos si es divisible por 2 sin efectuar propiamente la división. Más adelante se enuncia y demuestra éste y los demás criterios de divisibilidad.

Los enunciados o proposiciones en matemáticas hacen una o varias afirmaciones, en el caso de los criterios de divisibilidad estos enunciados realizan dos afirmaciones, y en matemáticas se usan las palabras “si y solo si” para escribir estas dos afirmaciones. Así, por ejemplo, en los criterios de divisibilidad, las dos afirmaciones son las siguientes:

Afirmación de la necesidad:

Si un número entero x es divisible con respecto de un número entero m , entonces debe ser necesario que los dígitos que forman el número entero m , o parte de estos dígitos, cumplan cierta condición dependiendo el criterio a utilizar.

Afirmación de la suficiencia:

Si la totalidad o parte de los dígitos que forman un número entero x cumplen cierta condición, dependiendo del criterio a utilizar, esto es suficiente para afirmar que el número entero x es divisible por el número entero m .

Estas dos afirmaciones pueden ser escritas de manera resumida de la siguiente forma:

Un número entero x es divisible por un número entero m , si y solo si la totalidad o parte de los dígitos que forman el número entero x cumplen cierta condición, dependiendo del criterio a utilizar. Los criterios de divisibilidad de los números enteros tienen la estructura anterior.

Como ya sabemos nuestro sistema de numeración es posicional, por esta razón cada dígito, dependiendo de la posición donde se encuentre, tiene un significado diferente; esta condición es fácil de identificarla a simple vista, pero cuando se quiere utilizar las propiedades de la divisibilidad, es necesario expresarlo en términos de la potencia de 10 que le corresponda. Recuerde que las potencias de 10 son la base de nuestro sistema de numeración.

Por otra parte, existen diferentes formas de expresar cierto tipo de números, algunos aceptan diferentes factorizaciones y otros sólo una; además, cada uno tiene una única expresión en potencias de 10, por ejemplo:

$$24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 10 + 2$$

$$237 = 3 \cdot 79 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 7$$

$$3325 = 5 \cdot 665 = 25 \cdot 133 = 25 \cdot 19 \cdot 7 = 3 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5$$

(En este último ejemplo, hay más posibles factorizaciones).

En general, cualquier número entero se expresa en términos de sus dígitos o cifras, donde a_k representa un dígito y n cualquier número natural:

$$a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Como puede observarse, expresar un número entero en potencias de 10 es conveniente, porque esta expresión es única según la teoría de polinomios, y cada dígito tiene un valor relativo.

3.2 Divisibilidad

La definición de divisibilidad es la siguiente:

Definición: Dados dos números enteros m y x , con $m \neq 0$, decimos que m divide a x y escribimos " $m|x$ ", si existe un entero p tal que: $x = p \cdot m$. También se dice que m es divisor de x o que x es múltiplo de m .

En el caso que no exista tal p número entero que cumpla la condición anterior se dirá m no divide a x y se escribirá " $m \nmid x$ ".

Ejemplos.

a) $3|147$.

- b) Si $a \neq 0$, entonces $a|a, a|a^2, \dots a|a^n; a|na$, donde n representa cualquier número natural.
- c) Si $b \neq 0$, entonces $b|0$.

Ahora, se mostrará la veracidad de las siguientes afirmaciones que, debido a su uso frecuente, se enumerarán con el nombre de propiedades:

Propiedad 1.- Se denotará (D1): La divisibilidad es reflexiva; es decir, para cualquier número entero a , se cumple que $a|a$.

Demostración.

Se busca la existencia de un número entero m tal que $a = m \cdot a$, si existe este número m se puede decir entonces que $a|a$. Puesto que se sabe de un axioma de los enteros de la existencia del 1, el idéntico multiplicativo: $a = 1 \cdot a$ entonces el número que se buscaba es $m = 1$, con lo cual se termina la demostración. ■

Propiedad 2.- Se denotará (D2): La divisibilidad es transitiva; es decir, para cualesquiera enteros a, b y c , si sucede que $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$.

Demostración.

Se busca la existencia de un número entero m tal que $c = m \cdot a$.

Como

$$b|c,$$

Entonces existe por definición un número entero digamos r tal que

$$c = r \cdot b \quad (A)$$

Además, como

$$a|b,$$

Entonces, existe por definición un número entero digamos p tal que

$$b = p \cdot a$$

Sustituyendo en (A)

$$c = r \cdot (p \cdot a)$$

Así, por el axioma de asociatividad de los enteros sucede que

$$c = (r \cdot p) \cdot a$$

Por lo tanto, el número que se buscaba es

$$m = r \cdot p$$

Con esto se concluye la demostración. ■

Ahora se enunciará y demostrará, tres proposiciones que serán de utilidad para la comprensión de la demostración de los criterios de divisibilidad.

Proposición 1 (P1)

Para cualesquiera tres números enteros digamos a , b y c . Si sucede que $a|b$ y $a|b + c$, entonces se tendrá que $a|c$.

Demostración

Dado que

$$a|b + c,$$

Esto implica, por definición, que existe un número entero m tal que

$$b + c = m \cdot a \quad (A)$$

Y además como

$$a|b,$$

Existe número entero n tal que

$$b = n \cdot a$$

Sustituyendo esto en (A), se tiene que

$$n \cdot a + c = m \cdot a$$

Haciendo uso de los axiomas de los enteros sucede que

$$c = m \cdot a - n \cdot a = (m - n) \cdot a$$

Es decir,

$$a|c. \blacksquare$$

Vea los siguientes ejemplos, para una mejor comprensión de lo que dice la proposición anterior.

Ejemplo 1

Si sucede que $5 | 15$ y que $5 | 35$, al descomponer al número $35 = 15 + 20$, entonces por la proposición P1 debe suceder que $5 | 20$, lo cual es cierto. Además, la demostración de la proposición nos dice que debido a que $15 = 5 \cdot 3$; y a que $35 = 5 \cdot 7$, entonces debe suceder que $20 = (7 - 3) \cdot 5$.

Ejemplo 2

Si sucede que $3 | 15$ y que $3 | 6$, si se escribe al número $6 = 15 + (-9)$, entonces debe suceder que $3 | -9$. Además, como en el ejemplo 1 debido a que $15 = 3 \cdot 5$ y a que $6 = 3 \cdot 2$, debe ser que $-9 = (2 - 5) \cdot 3$.

Proposición 2 (P2)

Para cualesquiera tres números enteros digamos a , b y c suceda que $a \mid b$ y $a \mid c$, si y sólo si $a \mid (m \cdot b + n \cdot c)$, para cualesquiera números enteros m y n .

Demostración de la necesidad ($\Rightarrow$).

Para cualesquiera tres números enteros digamos a , b y c . Si tenemos que $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces sucede que $a \mid (m \cdot b + n \cdot c)$, para cualesquiera números enteros m y n .

Debido a que

$$a \mid b \text{ y } a \mid c$$

Sabemos por definición que existen números enteros digamos p y q tal que

$$b = p \cdot a \text{ y } c = q \cdot a$$

Así para cualesquiera números enteros m y n , tenemos

$$m \cdot b + n \cdot c = m \cdot p \cdot a + n \cdot q \cdot a = a(m \cdot p + n \cdot q)$$

Es decir,

$$a \mid m \cdot b + n \cdot c. \blacksquare$$

Demostración de la suficiencia ($\Leftarrow$).

Para cualesquiera números enteros a , b y c , si sucede que $a \mid m \cdot b + n \cdot c$ para cualesquiera m y n números enteros, esto es suficiente para asegurar que $a \mid b$ y $a \mid c$.

Como para cualesquiera m y n números enteros

$$a \mid m \cdot b + n \cdot c$$

En particular para la pareja $m = 1$ y $n = 0$ se cumple, así que

$$a|1 \cdot b + 0 \cdot c$$

Es decir,

$$a|b.$$

De la misma forma se cumple para la pareja $m = 0$ y $n = 1$ que

$$a|0 \cdot b + 1 \cdot c$$

Es decir,

$$a|c. \blacksquare$$

En teoría de números la estructura $m \cdot b + n \cdot c$ tiene muchas aplicaciones, por eso se le da un nombre especial y se conoce como una “combinación lineal” de los números b y c . Por ejemplo 26 es una combinación lineal de 3 y 7 pues $26 = 3 \cdot 4 + 7 \cdot 2$; además, observe que para esta pareja de números, cualquier número entero se puede escribir como combinación lineal de ellos, debido a que $1 = -2 \cdot 3 + 1 \cdot 7$, si quisiéramos conseguir por ejemplo el 31 como combinación lineal de 3 y 7 esta sería $31 = -62 \cdot 3 + 31 \cdot 7$. Sin embargo, esto no sucede para cualquier pareja de números.

Proposición 3 (P3)

Para cualesquiera números enteros a , b y c . Si sucede que el único divisor común de a y b es el número 1 y además $a|b \cdot c$, entonces debe suceder que $a|c$.

Demostración.

Debido a que

$$a|b \cdot c$$

Entonces por definición existe un número entero, llamémosle m , tal que

$$b \cdot c = m \cdot a$$

Ahora, por uno de los axiomas de los enteros sucede que

$$c = \left(\frac{m}{b}\right) \cdot a$$

Observe que $\frac{m}{b}$ es un número entero, pues todos los divisores de b deben estar en m , pues no pueden estar en a ya que a y b no comparten divisores por la condición inicial. Así debido a que $c = \left(\frac{m}{b}\right) \cdot a$ y además que $\frac{m}{b}$ es entero, entonces $a \mid c$. ■

Definición. Cuando dos números enteros solo tienen como divisor común el número uno, se dice que los números son “primos relativos”. Este es un concepto importante en teoría de números con aplicaciones, por ejemplo, en el algoritmo de Euclides.

Aclaremos con algunos ejemplos la proposición anterior:

Ejemplo 3

Primero note que 15 y 8 sólo tienen el número 1 como divisor común, pues los divisores de 15 son 1, 3, 5, 15 y los de 8 son 1, 2, 4, 8; además por ejemplo, si $15 \mid 8 \cdot 75$, entonces debe suceder que $15 \mid 75$, lo cual es cierto.

Ejemplo 4

Si se usa ahora los números enteros 10 y 8, se sabe que $10 \mid 8 \cdot 5$ pero no sucede que $10 \mid 5$, porque no se cumple la condición inicial, pues 10 y 8 tienen como divisores comunes a los números 1 y 2.

Con las proposiciones anteriores se está en condiciones para conocer y dar la justificación de los criterios de divisibilidad.

3.3 Criterio de divisibilidad de 2 y 5.

Los criterios de divisibilidad del 2 y del 5 son los más usuales, ya que frecuentemente tenemos que hacer simplificaciones dividiendo entre 2 o entre 5 y se aplican de manera automática, casi sin reflexionar el porqué de su validez; lo cual se debe, quizás, a su sencillez.

Criterio de divisibilidad del 2. Un número entero x es divisible por 2 si y sólo si la cifra de las unidades es par (0, 2, 4, 6, 8).

Demostración

Si $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$ es un número entero. Primero note que por los axiomas de asociatividad y distributividad del producto con la suma en los enteros, sucede que:

$$\begin{aligned} x &= 10 (a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10 + a_1) + a_0 \\ &= 2 \cdot 5 (a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10 + a_1) + a_0. \end{aligned}$$

Veamos la necesidad ($\Rightarrow$): Si un número entero x es divisible por 2, entonces la cifra de las unidades es par (0, 2, 4, 6, 8).

Se conoce que $2|x$, por afirmación inicial

$$2|2 \cdot 5 (a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10 + a_1) + a_0$$

Ahora también, debido a que

$$2|2 \cdot 5 (a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10 + a_1)$$

La proposición P1 asegura que $2|a_0$.

Si $2|a_0$, entonces a_0 debe ser par, además a_0 es un dígito por lo tanto a_0 debe ser 0, 2, 4, 6 u 8. ■

Ahora veamos la suficiencia ($\Leftarrow$): Si la cifra de las unidades de un número entero x es par (0, 2, 4, 6, 8), entonces el número entero es divisible por 2.

Como $2|a_0$, existe m número entero tal que

$$a_0 = 2 \cdot m$$

$$\text{Así, } x = 2 \cdot 5 (a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10 + a_1) + 2 \cdot m$$

Nuevamente, por los axiomas citados, tenemos que

$$x = 2 \cdot 5 ((a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10 + a_1) + m)$$

Por lo tanto

$$2|x. \blacksquare$$

Criterio de divisibilidad del 5. Un número entero x es divisible por 5 si y sólo si la cifra de las unidades es divisible por 5.

Demostración.

Si $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$. Entonces, por los axiomas de la asociatividad y distributividad del producto con la suma en los enteros, tenemos:

$$\begin{aligned} x &= 10(a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10 + a_1) + a_0 \\ &= 2 \cdot 5(a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10 + a_1) + a_0. \end{aligned}$$

Veamos la necesidad ($\Rightarrow$): Si un número entero n es divisible por 5, entonces la cifra de las unidades es divisible por 5.

Sabemos que $5|x$; es decir,

$$5|2 \cdot 5(a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10 + a_1) + a_0,$$

Por afirmación inicial, y como

$$5|2 \cdot 5(a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10 + a_1),$$

La proposición P1 afirma que $5 \mid a_0$. ■

Ahora la suficiencia ($\Leftarrow$): Si la cifra de las unidades de un número entero x es divisible por 5, entonces el número entero es divisible por 5.

Como $5|a_0$, entonces existe un entero m tal que $a_0 = 5 \cdot m$

Así,

$$x = 2 \cdot 5(a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10 + a_1) + 5 \cdot m$$

Por los axiomas citados,

$$x = 5(2(a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10 + a_1) + m),$$

Por lo tanto, $5|x$. ■

3.4 Criterio de divisibilidad de 3 y 9

Criterio de divisibilidad del 3. Un número entero x es divisible por 3 si y sólo si la suma de todas las cifras del número entero es divisible por 3.

Demostración.

Si

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Observe que

$$10^n = \overbrace{99 \dots 99}^{(n-1)\text{nueves}} + 1$$

Así

$$x = \left(\overbrace{99 \dots 99}^{(n-1)\text{nueves}} + 1 \right) a_n + \left(\overbrace{99 \dots 99}^{(n-2)\text{nueves}} + 1 \right) a_{n-1} + \dots + (9 + 1)a_1 + a_0,$$

Por los axiomas de los enteros tenemos:

$$\begin{aligned} x &= \left(\overbrace{99 \dots 99}^{(n-1)\text{nueves}} \cdot a_n + \overbrace{99 \dots 99}^{(n-2)\text{nueves}} \cdot a_{n-1} + \dots + 9 \cdot a_1 \right) + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) \\ &= 9 \left(\overbrace{11 \dots 11}^{(n-1)\text{unos}} \cdot a_n + \overbrace{11 \dots 11}^{(n-2)\text{unos}} \cdot a_{n-1} + \dots + a_1 \right) + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) \\ &= 3 \cdot 3 \left(\overbrace{11 \dots 11}^{(n-1)\text{unos}} \cdot a_n + \overbrace{11 \dots 11}^{(n-2)\text{unos}} \cdot a_{n-1} + \dots + a_1 \right) + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) \end{aligned}$$

Necesidad ($\Rightarrow$): Si un número entero x es divisible por 3, entonces la suma de todas las cifras del número entero es divisible por 3. Como

$$x = 3 \cdot 3 \left(\overbrace{11 \dots 11}^{(n-1)\text{unos}} \cdot a_n + \overbrace{11 \dots 11}^{(n-2)\text{unos}} \cdot a_{n-1} + \dots + a_1 \right) + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0),$$

Entonces por hipótesis

$$3|3 \cdot 3 \left(\overbrace{11 \dots 11}^{(n-1)\text{unos}} \cdot a_n + \overbrace{11 \dots 11}^{(n-2)\text{unos}} \cdot a_{n-1} + \dots + a_1 \right) + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0),$$

Y como

$$3|3 \cdot 3 \left(\overbrace{11 \dots 11}^{(n-1)\text{unos}} \cdot a_n + \overbrace{11 \dots 11}^{(n-2)\text{unos}} \cdot a_{n-1} + \dots + a_1 \right),$$

Entonces por la proposición P1:

$$3|(a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0)$$

Como se quería demostrar. ■

Suficiencia ($\Leftarrow$): Si la suma de las cifras de un número entero x es divisible por 3, entonces el número entero es divisible por 3.

Por hipótesis

$$3 \mid (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)$$

Además

$$3 \mid 3 \cdot 3 \left(\overbrace{11 \dots 11}^{(n-1)\text{unos}} \cdot a_n + \overbrace{11 \dots 11}^{(n-2)\text{unos}} \cdot a_{n-1} + \cdots + a_1 \right),$$

Así, por proposición P2:

$$3 \mid 3 \cdot 3 \left(\overbrace{11 \dots 11}^{(n-1)\text{unos}} \cdot a_n + \overbrace{11 \dots 11}^{(n-2)\text{unos}} \cdot a_{n-1} + \cdots + a_1 \right) + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)$$

Es decir, $3 \mid x$. ■

Ejemplo 5.

El número 12345 es divisible por el número 3, pues la suma $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ es divisible por el número 3. Si ahora que estamos seguros de que la división será exacta se quisiera conocer el cociente de estos números tendríamos que $12345 = 3 \cdot 4115$, así el cociente es el número 4115.

Ejemplo 6.

El número 4567 no es divisible por el número 3. A pesar de esto podemos decir algo más interesante aún, esto es, que al realizar la división del número 4567 por el número 3 obtendremos un residuo de 1, para determinarlo es necesario notar que cuando se realizó la demostración del criterio del número 3 se estuvo determinando los residuos.

Criterio de divisibilidad del 9. Un número entero x es divisible por 9 si y sólo si la suma de todas sus cifras es divisible por 9.

Demostración:

Si $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$, como

$$10^n = \overbrace{99 \dots 99}^{(n-1)\text{nueves}} + 1,$$

Así

$$x = \left(\overbrace{99 \dots 99}^{(n-1)\text{nueves}} + 1 \right) a_n + \left(\overbrace{99 \dots 99}^{(n-2)\text{nueves}} + 1 \right) a_{n-1} + \cdots + (9 + 1) a_1 + a_0$$

Entonces por los axiomas de la suma de enteros:

$$\begin{aligned} x &= \left(\overbrace{99 \dots 99}^{(n-1)\text{nueves}} \cdot a_n + \overbrace{99 \dots 99}^{(n-2)\text{nueves}} \cdot a_{n-1} + \cdots + 9a_1 \right) + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0) \\ &= 9 \left(\overbrace{11 \dots 11}^{(n-1)\text{unos}} \cdot a_n + \overbrace{11 \dots 11}^{(n-2)\text{unos}} \cdot a_{n-1} + \cdots + a_1 \right) + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0) \end{aligned}$$

Necesidad ($\Rightarrow$): Si un número entero x es divisible por 9, entonces la suma de todas sus cifras es divisible por 9.

Como

$$x = 9 \left(\overbrace{11 \dots 11}^{(n-1)\text{unos}} \cdot a_n + \overbrace{11 \dots 11}^{(n-2)\text{unos}} \cdot a_{n-1} + \cdots + a_1 \right) + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)$$

Entonces, por la hipótesis

$$9 \mid 9 \left(\overbrace{11 \dots 11}^{(n-1)\text{unos}} \cdot a_n + \overbrace{11 \dots 11}^{(n-2)\text{unos}} \cdot a_{n-1} + \cdots + a_1 \right) + (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)$$

Y como

$$9 \mid 9 \left(\overbrace{11 \dots 11}^{(n-1)\text{unos}} \cdot a_n + \overbrace{11 \dots 11}^{(n-2)\text{unos}} \cdot a_{n-1} + \dots + 11a_2 + a_1 \right),$$

La proposición P1 implica que

$$9 \mid a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

Como se quería demostrar. ■

Suficiencia ($\Leftarrow$): Si la suma de las cifras de un número entero x es divisible por 9, entonces el número entero es divisible por 9.

Por hipótesis $9 \mid (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0)$; además,

$$9 \mid 9 \left(\overbrace{11 \dots 11}^{(n-1)\text{unos}} \cdot a_n + \overbrace{11 \dots 11}^{(n-2)\text{unos}} \cdot a_{n-1} + \dots + 11a_2 + a_1 \right),$$

Y por la proposición P2:

$$9 \mid 9 \left(\overbrace{11 \dots 11}^{(n-1)\text{unos}} \cdot a_n + \overbrace{11 \dots 11}^{(n-2)\text{unos}} \cdot a_{n-1} + \dots + a_1 \right) + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0)$$

Es decir, $9 \mid x$. ■

Ejemplo 7

El número 630 es divisible por 9, pues la suma de sus dígitos es divisible por 9.

Ejemplo 8

EL número 1233 también es divisible por 9, nuevamente porque la suma de sus dígitos es divisible por 9, recuerde notar que hacer la suma de los dígitos es realizar la suma de los residuos.

3.5 Criterio de divisibilidad de 4.

Un número entero x es divisible por 4 si y sólo si el número que se forma con las dos últimas cifras es divisible por 4.

Demostración:

Si

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

Por los axiomas de los enteros, tenemos que

$$x = 100(a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \cdots + a_3 \cdot 10 + a_2) + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Entonces

$$x = 4 \cdot 25(a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \cdots + a_3 \cdot 10 + a_2) + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Necesidad ($\Rightarrow$): Si un número entero x es divisible por 4, entonces el número que se forma con las últimas dos cifras es divisible por 4.

Como

$$x = 4 \cdot 25(a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \cdots + a_3 \cdot 10 + a_2) + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

Y por hipótesis

$$4 | 4 \cdot 25(a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \cdots + a_3 \cdot 10 + a_2) + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

La proposición P1 asegura que

$$4 | (a_1 \cdot 10 + a_0)$$

Es decir, 4 divide al número que se forma con las últimas dos cifras del número entero. ■

Suficiencia ($\Leftarrow$): Si el número que se forma con las últimas dos cifras de un número entero x es divisible por 4, entonces el número es divisible por 4.

Por hipótesis

$$4 \mid (a_1 \cdot 10 + a_0)$$

Además

$$4 \mid 4 \cdot 25(a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \dots + a_3 \cdot 10 + a_2)$$

Entonces

$$4 \mid 4 \cdot 25(a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \dots + a_3 \cdot 10 + a_2) + (a_1 \cdot 10 + a_0)$$

Es decir, $4 \mid x$. ■

Ejemplo 9

El año 2016 fue un año bisiesto (el mes de Febrero tuvo 29 días) debido a que es divisible por 4, ya que 16 es divisible por 4. Los años 1017, 1018 y 2019 no son bisiestos porque 17, 18 y 19 no son divisibles por 4.

3.6 Criterio de divisibilidad de 11.

Un número entero x es divisible por 11 si y sólo si la diferencia entre la suma de sus cifras colocadas en lugares pares y la suma de las cifras colocadas en lugares impares, es divisible entre 11.

Demostración.

Para esta demostración reescribiremos el número x en dos sumas como anteriormente, es decir, en dos sumas donde; una de ellas es claramente divisible por once y la otra es

precisamente la diferencia entre la suma de sus cifras colocadas en lugares pares y la suma de las cifras colocadas en lugares impares.

Primeramente, observemos que si

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

Se puede reescribir el número entero x como

$$x = 10 (a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_1) + a_0.$$

Considere las siguientes diferencias

$$D1 = x - 11 (a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1) \quad (I)$$

Simplificando se tendrá

$$D1 = -10 (a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \cdots + a_3 \cdot 10 + a_2) - a_1 + a_0 \quad (II)$$

Así despejando x de (I)

$$x = D1 + 11 (a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1) \quad (III)$$

Sustituyendo el valor obtenido en (II)

$$x = -10 (a_n \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_2) - a_1 + a_0 + 11 (a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1).$$

Ahora se forma la suma:

$$D2 = D1 + 11 (a_n \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_3 \cdot 10 + a_2) \quad (IV)$$

$$= -10 (a_n \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_2) - a_1 + a_0 + 11 (a_n \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_3 \cdot 10 + a_2)$$

$$= 10(a_n \cdot 10^{n-3} + \cdots + a_4 \cdot 10 + a_3) + a_2 - a_1 + a_0 \quad (V)$$

Despejando D1 de (IV) tenemos

$$D1 = D2 - 11 (a_n \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_3 \cdot 10 + a_2)$$

Sustituyendo el valor D2 que se obtuvo en (V), tenemos:

$$D1 = 10(a_n \cdot 10^{n-3} + \dots + a_3) + a_2 - a_1 + a_0 - 11(a_n \cdot 10^{n-2} + \dots + a_3 \cdot 10 + a_2)$$

Sustituyendo este valor D1, en la expresión (III):

$$x = 10(a_n \cdot 10^{n-3} + \dots + a_3) + a_2 - a_1 + a_0 - 11(a_n \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2) + \\ + 11(a_n \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1)$$

Tomando en cuenta lo obtenido en (V) tendremos

$$x = D2 - 11(a_n \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2) + 11(a_n \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1) \quad (VI)$$

Antes de hacerlo de forma general, se hará por último el desarrollo anterior con D3;

$$D3 = D2 - 11(a_n \cdot 10^{n-3} + \dots + a_3) \quad (VII)$$

Usando lo obtenido en (V)

$$D3 = 10(a_n \cdot 10^{n-3} + \dots + a_3) + a_2 - a_1 + a_0 - 11(a_n \cdot 10^{n-3} + \dots + a_3)$$

$$D3 = -10(a_n \cdot 10^{n-4} + \dots + a_4) - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 \quad (VIII)$$

Despejando D2 de (VII)

$$D2 = D3 + 11(a_n \cdot 10^{n-3} + \dots + a_3)$$

$$= -10(a_n \cdot 10^{n-4} + \dots + a_4) - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 + 11(a_n \cdot 10^{n-3} + \dots + a_3)$$

Sustituyendo en (VI) tenemos

$$x = -10(a_n \cdot 10^{n-4} + \dots + a_4) - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 + 11(a_n \cdot 10^{n-3} + \dots + a_3)$$

$$- 11(a_n \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2) + 11(a_n \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1)$$

$$x = D3 + 11(a_n \cdot 10^{n-3} + \dots + a_3) - 11(a_n \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2)$$

$$+ 11(a_n \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1) \quad (IX)$$

Para continuar con el desarrollo general, es necesario hacer algunas observaciones:

1. En cada una de las definiciones de las D_n , se hace alternadamente una suma o una resta de un número múltiplo de once con la diferencia directamente anterior.
2. En cada una de las definiciones de las D_n , al hacer la suma o resta respectiva se obtiene un número múltiplo de diez y la suma o resta alternada de las cifras, observe (II), (V) y (VIII).
3. En cada nueva diferencia se obtiene la suma o resta de una nueva cifra del número x y dado que x tiene un límite de cifras, entonces con este desarrollo llegaremos a una diferencia (D_n) que estará compuesta por la suma o resta alternada de todas las cifras del número x .
4. Con este desarrollo se muestra que x puede ser escrito con una diferencia D_n y la suma o resta alternada de múltiplos de 11, vea (III), (VI) y (IX).

Con el proceso que estamos implementando y de acuerdo con la observación 3 tenemos:

$$D_n = (-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} + \cdots + a_4 - a_4 + a_3 - a_1 + a_0$$

El objetivo del término $(-1)^n$ es controlar el signo de suma o resta, pues con las potencias pares se hará una suma y para las potencias impares se hará una resta.

Haciendo la sustitución respectiva, como en (III), (VI) y (IX).

$$x = D_n + (-1)^n \cdot 11(a_n) + (-1)^n \cdot 11(10 \cdot a_n + a_{n-1}) + \cdots + 11(10^{n-1} \cdot a_n + \cdots + a_1)$$

Es decir, factorizando el número 11

$$x = D_n + 11 [(-1)^n \cdot (a_n) + (-1)^n \cdot (10 \cdot a_n + a_{n-1}) + \cdots + (10^{n-1} \cdot a_n + \cdots + a_1)]$$

Para facilitar la escritura y la lectura de la demostración del criterio del 11 llamemos a “s” como sigue,

$$s = (-1)^n \cdot (a_n) + (-1)^n \cdot (10 \cdot a_n + a_{n-1}) + \cdots + (10^{n-1} \cdot a_n + \cdots + a_1)$$

Así,

$$x = Dn + 11 \cdot s$$

Con esto, continúa la demostración:

Necesidad ($\Rightarrow$): Si un número entero x es divisible por 11, entonces el número que se forma con la diferencia entre la suma de sus cifras colocadas en lugares pares y la suma de las cifras colocadas en lugares impares es divisible por 11. Como

$$x = Dn + 11 \cdot s$$

Entonces por hipótesis

$$11 | Dn + 11 \cdot s,$$

La proposición P1 asegura que

$$11 | Dn$$

Es decir, 11 divide al número que se forma con la diferencia entre la suma de sus cifras colocadas en lugares pares y la suma de las cifras colocadas en lugares impares. ■

Suficiencia ($\Rightarrow$): Si el número que se forma con la diferencia entre la suma de sus cifras colocadas en lugares pares y la suma de las cifras colocadas en lugares impares de un número entero x es divisible por 11, entonces el número entero x es divisible por 11.

Por hipótesis $11 | Dn$

Además, $11 | 11 \cdot s$

Entonces por la proposición P2:

$$11 | Dn + 11 \cdot s$$

Es decir

$$11 | x. \blacksquare$$

3.7 Criterio de divisibilidad general para números primos, excepto para 2 y 5. Este criterio (Sepúlveda, Tinoco, 2000) implica la aplicación de un algoritmo; sin embargo, su uso requiere la definición de variables auxiliares que damos a continuación. Además, se desarrollan dos ejemplos durante la presentación del algoritmo; y por último, se enuncia y demuestra el teorema.

Dado $x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$, y p un número primo distinto de 2 y 5, se busca el menor entero positivo q tal que el producto $p \cdot q$ termine en 1; es decir:

$$10|(p \cdot q - 1) \quad (1)$$

Ahora tomemos k el entero que resulta de ignorar el 1 en el producto $p \cdot q$; es decir:

$$k = (p \cdot q - 1)/10 \quad (2)$$

Veamos con algunos ejemplos el significado de las relaciones (1) y (2):

Ejemplo 10.

Suponga que se quiere conocer sobre la divisibilidad del número entero $x = 483756$ con respecto del número primo $p = 443$, busquemos el menor número q tal que al multiplicarlo con p termine en 1; éste debe ser 7, pues $p \cdot q = 3101$. Por lo tanto, tomamos $k = (3101 - 1)/10 = 310$.

Ejemplo 11.

Sea ahora $x = 8680437$ y el número primo $p = 89$; en este caso q el menor entero que funciona es 9, el producto $p \cdot q = 801$, por lo tanto $k = 80$.

Continuemos ahora con el algoritmo del criterio: Definamos m_1 y x_1 de la siguiente manera:

$$m_1 = (x - a_0)/10 \quad (3)$$

$$x_1 = m_1 - k \cdot a_0 \quad (4)$$

Es decir, m_1 es el número entero que se obtiene al restar de x el dígito a_0 (o ignorar a_0); mientras que x_1 es la diferencia entre m_1 y $k \cdot a_0$. Notemos que $x_1 < x$; y si x_1 es lo suficientemente pequeño como para determinar, por simple inspección, su divisibilidad por el número primo p , hemos terminado el algoritmo y el criterio que se establece en el siguiente teorema, dice que:

$$p|x \Leftrightarrow p|x_1$$

Si todavía no se puede decidir sobre la divisibilidad de x_1 por p , tómense los equivalentes a las relaciones (3) y (4): $m_2 = (x_1 - a_0)/10$ y $x_2 = m_2 - k \cdot a_0$, donde ahora a_0 es la cifra de las unidades de x_1 . El algoritmo continúa y si x_2 es lo suficientemente pequeño como para decidir la divisibilidad de x_2 por p y entonces:

$$p|x \Leftrightarrow p|x_2$$

De esta manera se continúa hasta conformar $m_i = (x_{i-1} - a_0)/10$ y $x_i = m_i - k \cdot a_0$, donde a_0 sigue siendo la cifra de las unidades de x_{i-1} .

En donde x_i es lo suficientemente pequeño como para decidir, por simple inspección, sobre la divisibilidad de x_i por p ; y entonces, el teorema afirma que:

$$p|x \Leftrightarrow p|x_i.$$

Antes de enunciar el teorema y demostrarlo, veamos con nuestros dos ejemplos la aplicación del algoritmo:

Ejemplo 12.

Dado $x = 483756$, y el número primo $p = 443$, encontramos $k = 310$.

$$(x - a_0)/10 = 483750/10$$

$$m_1 = 48375$$

Ahora

$$m_1 - k \cdot a_0 = 48375 - 310(6)$$

$$x_1 = 46515.$$

Continuamos:

$$(x_1 - a_0)/10 = 46510/10$$

$$m_2 = 4651$$

$$m_2 - k \cdot a_0 = 4651 - 310(5)$$

$$x_2 = 3101.$$

Continuamos:

$$(x_2 - a_0)/10 = 3100/10$$

$$m_3 = 310$$

$$m_3 - k \cdot a_0 = 310 - 310(1)$$

$$x_3 = 0$$

El teorema afirma que como 443 divide a 0, entonces 443 divide a $x = 483756$.

Lo anterior puede simplificarse mediante el siguiente arreglo: $x = 483756$, $p = 443$, $q = 7$, $pq = 3101$. Así, $k = 310$.

$$\begin{array}{r}
 4 \quad 8 \quad 3 \quad 7 \quad 5 \quad \mathbf{6} \\
 - \quad \quad 1 \quad 8 \quad 6 \quad 0 \\
 \hline
 4 \quad 6 \quad 5 \quad 1 \quad \mathbf{5} \\
 - \quad 1 \quad 5 \quad 5 \quad 0 \\
 \hline
 3 \quad 1 \quad 0 \quad \mathbf{1} \\
 - \quad \underline{3 \quad 1 \quad 0} \\
 \hline
 \end{array}$$

0

Por lo tanto, como $443|0 \Rightarrow 443|483756$.

Ejemplo 13. Apliquemos el esquema anterior al número dado en el ejemplo 10:

$x = 8680437$, número primo $p = 89$; $q = 9$; $p \cdot q = 801$, por lo tanto $k = 80$.

$$\begin{array}{r}
 8 \quad 6 \quad 8 \quad 0 \quad 4 \quad 3 \quad 7 \\
 - \qquad \qquad \qquad 5 \quad 6 \quad 0 \\
 \hline
 8 \quad 6 \quad 7 \quad 4 \quad 8 \quad 3 \\
 - \qquad \qquad \qquad 2 \quad 4 \quad 0 \\
 \hline
 8 \quad 6 \quad 5 \quad 0 \quad 8 \\
 - \qquad \qquad \qquad 6 \quad 4 \quad 0 \\
 \hline
 8 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\
 - \quad \underline{8 \quad 0} \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Nótese que como $a_0 = 0$ en el antepenúltimo renglón, simplemente lo ignoramos y nos recorremos dos lugares a la izquierda para continuar nuestra resta de $1 \cdot 80$. Por lo tanto, como $89|0 \Rightarrow 89|8680437$.

Teorema (Sepúlveda, Tinoco, 2000). Para averiguar la divisibilidad del número entero x por un número primo p , se busca el menor entero positivo q tal que el producto $p \cdot q$ termine en 1; es decir

$$10|(p \cdot q - 1) \tag{1}$$

Ahora tomemos k el menor entero que resulta al ignorar el 1:

$$k = (p \cdot q - 1)/10 \tag{2}$$

Sean m_1 y x_1 tales que:

$$m_1 = (x - a_0)/10 \quad (3)$$

$$x_1 = m_1 - k \cdot a_0 \quad (4)$$

Entonces $p \mid x$ si y sólo $p \mid x_1$.

Demostración. Observemos que como p es distinto de 2 y de 5, siempre existe q (de hecho existen una infinidad) tal que $p \cdot q$ termine en 1, este es el significado de (1), tomamos el menor. Entonces al calcular k con (2), obtenemos:

$$p \cdot q = 10k + 1$$

Las relaciones (3) y (4) nos llevan a:

$$x_1 = m_1 - ka_0 = \frac{x - a_0}{10} - ka_0 = \frac{x - (10k + 1)a_0}{10} = \frac{x - pqa_0}{10}$$

Esto es,

$$10x_1 = x - pqa_0 \quad (*)$$

Necesidad ($\Rightarrow$). Supongamos que $p \mid x$, entonces p divide al lado derecho de la igualdad, y por el Teorema P2 sobre divisibilidad, p debe dividir a $10x_1$; como no divide a 10, entonces p debe dividir a x_1 . ■

Suficiencia ($\Leftarrow$). Despejando x de la relación (*):

$$x = 10x_1 + pqa_0$$

Si suponemos que $p \mid x_1$, divide a $10x_1 + pqa_0$ y por el Teorema P2 sobre divisibilidad, debe ser que $p \mid x$, como queríamos demostrar. ■

3.8 Congruencias

La divisibilidad puede ser abordada a partir del concepto de congruencia, concepto que nos permite clasificar los números enteros en grupos, donde a los elementos de cada grupo se les puede considerar de alguna forma como “equivalentes o iguales”. Antes de enunciar los criterios, veamos el significado de este concepto.

Si consideramos el 3, entre el conjunto de los números enteros se pueden distinguir tres tipos de números: algunos de ellos son divisibles por 3, otros que al dividirlos por 3 se obtiene residuo 1, y por último los que al dividirlos por 3 se obtiene un residuo 2. Así, el conjunto de los enteros quedaría de la siguiente forma:

$$\mathbf{Z} = \{\{3m - 2\}, \{3m - 1\}, \{3m\}\}, \text{ donde } m \text{ representa cualquier entero.}$$

Nótese que si tomamos dos elementos de la categoría $\{3m - 2\}$ digamos $3p - 2$ y $3r - 2$, al hacer la resta de estos elementos tendremos:

$$(3p - 2) - (3r - 2) = 3p - 2 - 3r + 2 = 3p - 3r = 3(p - r)$$

Es decir, cada vez que restamos dos elementos de una categoría el resultado es divisible por el número 3. Esta es la característica que se usará para identificar los elementos de cada categoría. Además, nótese que el número 3 que se usó en el ejemplo anterior, no tiene nada de especial, si ahora usamos el número 5, los números enteros se clasificarían de la siguiente forma:

$$\mathbf{Z} = \{\{5m - 4\}, \{5m - 3\}, \{5m - 2\}, \{5m - 1\}, \{5m\}\}$$

Donde m representa cualquier entero. Nuevamente, la característica de los elementos de cada categoría, es que al realizar la resta de dos de ellos se obtiene un número divisible por 5. Al número que usamos para realizar la clasificación lo llamamos módulo.

Definición. Los números enteros a y b son congruentes módulo n , si n divide a la diferencia de a y b . En estas condiciones escribiremos:

$$a \equiv b \pmod{n} \text{ si y sólo si } n \mid a - b$$

De esta definición se deducen algunas afirmaciones que se denominan como propiedades y se muestra su veracidad; algunas de ellas son inmediatas.

Propiedad 1 (se llamará C1). La congruencia es reflexiva; es decir, para cualesquiera números enteros, digamos, a y m se cumple que

$$a \equiv a \pmod{m}.$$

Demostración. Como $m \mid 0$ y además $a - a = 0$, entonces $m \mid a - a$. ■

Propiedad 2 (C2). La congruencia es simétrica; es decir, para cualesquiera números enteros digamos a , b y m , se cumple que:

$$\text{Si } a \equiv b \pmod{m}, \text{ entonces } b \equiv a \pmod{m}.$$

Demostración. Se necesita mostrar que si $m \mid a - b$, entonces $m \mid b - a$. Como $m \mid a - b$, existe un entero p tal que $a - b = p \cdot m$. Multiplicando ambos miembros de la igualdad por -1 , tenemos

$$b - a = -p \cdot m$$

Como $-p$, esto quiere decir que

$$m \mid b - a. \blacksquare$$

Propiedad 3 (C3). La congruencia es transitiva; es decir, para cualesquiera números enteros a , b , c y m , se cumple que si $a \equiv b \pmod{m}$ y $b \equiv c \pmod{m}$, entonces:

$$a \equiv c \pmod{m}.$$

Demostración. Se necesita mostrar que si $m \mid a - b$ y $m \mid b - c$, entonces $m \mid a - c$.

Dado que $m \mid a - b$, existe un número entero p tal que $a - b = p \cdot m$; (i)

Y como también $m \mid b - c$, existe q tal que $b - c = q \cdot m$; despejando b de esta igualdad $b = q \cdot m + c$; sustituyendo en (i):

$$a - (q \cdot m + c) = p \cdot m \Rightarrow a - c = p \cdot m + q \cdot m = (p + q)m$$

Esto último muestra que $m \mid a - c$; es decir, $a \equiv c \pmod{m}$. ■

Propiedad 4 (C4). Para cualesquiera enteros a, b, c, d y m , se cumple que si:

$a \equiv b \pmod{m}$, y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces: $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$.

Demostración. Se necesita mostrar que si $m \mid a - b$ y $m \mid c - d$, entonces $m \mid a \cdot c - b \cdot d$.

Dado que $m \mid a - b$ y $m \mid c - d$, existen los enteros p y q tales que

$$a - b = p \cdot m \text{ y } c - d = q \cdot m,$$

Respectivamente, despejando a y c en ambas expresiones tenemos

$$a = p \cdot m + b \text{ y } c = q \cdot m + d$$

Multiplicando ambas expresiones

$$a \cdot c = (p \cdot m + b) \cdot (q \cdot m + d) = p \cdot q \cdot m^2 + p \cdot d \cdot m + q \cdot b \cdot m + b \cdot d$$

$$\Rightarrow a \cdot c = (p \cdot q \cdot m + p \cdot d + q \cdot b) \cdot m + b \cdot d$$

$$\therefore a \cdot c - b \cdot d = (p \cdot q \cdot m + p \cdot d + q \cdot b) \cdot m$$

Lo cual demuestra que

$$m \mid a \cdot c - b \cdot d$$

Es decir:

$$a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}. \blacksquare$$

De esta última propiedad se deducen dos casos particulares, los cuales serán de gran utilidad en las demostraciones de los criterios de divisibilidad.

La propiedad C4 se demostró para cuatro números enteros cualesquiera a, b, c y d , incluso diferentes; un caso particular es cuando c y d son iguales. Con esto, la propiedad C4 quedaría escrita así:

Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $c \equiv c \pmod{m}$, entonces $a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{m}$.

Otro caso particular es cuando la propiedad C4 se aplica a la misma pareja a y b ; en este caso C4 quedaría:

Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $a \equiv b \pmod{m}$, entonces $a \cdot a \equiv b \cdot b \pmod{m}$.

De lo cual se deduce que si, en este caso, se aplica k veces la propiedad C4, se tiene:

Si $a \equiv b \pmod{m}$ entonces $a^k \equiv b^k \pmod{m}$.

Cuando se haga uso de la propiedad C4, estará implícito el uso de estos casos particulares.

Propiedad 5 (C5). Para cualesquiera enteros a, b, c, d y m , se cumple que:

Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.

Demostración.

Se necesita mostrar que si $m \mid a - b$ y $m \mid c - d$, entonces $m \mid a + c - b - d$.

Dado que $m \mid a - b$ y $m \mid c - d$, existen p y q tales que $a - b = p \cdot m$ y $c - d = q \cdot m$, respectivamente, despejando en ambas expresiones tenemos:

$$a = p \cdot m + b \text{ y } c = q \cdot m + d$$

Sumando ambas expresiones

$$a + c = (p \cdot m + b) + (q \cdot m + d) = p \cdot m + q \cdot m + b + d$$

$$\Rightarrow a + c = (p + q)m + b + d$$

$$\therefore a + c - (b + d) = (p + q)m$$

Esto demuestra que $m \mid a + c - (b + d)$

Es decir $a + c \equiv b + d \pmod{m}$. ■

Existen algunas otras propiedades de las congruencias, pero para los fines de este trabajo sólo se usan las ya mencionadas anteriormente.

3.9 Criterios de divisibilidad basados en congruencias

Ahora presentamos nuevamente los criterios de divisibilidad deducidos a partir del concepto de congruencia, con el propósito de promover el estudio de estos temas e incorporar a los profesores de matemáticas, de los distintos niveles escolares, en estos contenidos matemáticos de la Teoría de números, con la seguridad de que su estudio contribuirá a robustecer sus conocimientos de matemáticas y contará con distintas opciones didácticas para su enseñanza.

Recordemos que un número entero positivo usualmente se escribe $x = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$, lo que significa en desarrollo de potencias de 10:

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Criterio de divisibilidad del 2. Un número entero x es divisible por 2 si y sólo si la cifra de las unidades es par: 0, 2, 4, 6, 8.

Demostración. Primeramente observe que $10 \equiv 0 \pmod{2}$, debido a que $2 \mid 10 - 0$.

Luego, usando la propiedad C4 tenemos que para cualquier natural n se cumple:

$$10^n \equiv 0 \pmod{2}$$

Además, la misma propiedad C4, asegura que para cualquier dígito a_n

$$a_n \cdot 10^n \equiv 0 \pmod{2}.$$

Ahora se considera el número x y aplicando propiedad C1, tenemos que:

$$x \equiv a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \pmod{2}$$

Entonces por la propiedad C5

$$x \equiv 0 + 0 + \dots + 0 + a_0 \pmod{2}$$

Es decir,

$$x \equiv a_0 \pmod{2}$$

Esto, debido a la propiedad (C2) es lo mismo que,

$$a_0 \equiv x \pmod{2}$$

Con lo anterior termina la demostración en la mayoría de los textos, ya que lo siguiente se considera obvio o trivial. Sin embargo, debido a nuestros propósitos creemos conveniente continuar con la escritura, pues cuando uno comienza a hacer demostraciones, regularmente se dificulta saber cuándo la demostración está bien justificada; o peor aún, cuándo ya está terminada. Concluyamos la demostración, exhibiendo la necesidad y la suficiencia del teorema.

Necesidad ($\Rightarrow$). Si un número entero x es divisible por 2, entonces la cifra de las unidades es par: 0, 2, 4, 6, 8.

Si suponemos que $2 \mid x$; entonces $x \equiv 0 \pmod{2}$ y debido a que $a_0 \equiv x \pmod{2}$, por C3, la transitividad de la congruencia, tenemos que $a_0 \equiv 0 \pmod{2}$; es decir

$$2 \mid a_0$$

Así, la cifra de las unidades debe ser par: 0, 2, 4, 6, 8. ■

Suficiencia ($\Leftarrow$). Si la cifra de las unidades de un número entero es par: 0, 2, 4, 6, 8, entonces el número es divisible por 2.

Si suponemos que a_0 , la cifra de las unidades de un número entero, es par: 0, 2, 4, 6, 8, entonces $2 \mid a_0$; es decir, $a_0 \equiv 0 \pmod{2}$ y debido a que $x \equiv a_0 \pmod{2}$, por C3 tenemos que $x \equiv 0 \pmod{2}$, lo que significa que

$$2 \mid x. \blacksquare$$

Criterio de divisibilidad del 5. Un número entero x es divisible por 5, si y sólo si la cifra de las unidades es divisible por 5.

Observe que $10 \equiv 0 \pmod{5}$, debido a que $5 \mid 10$. Por la propiedad C4 tenemos que para cualquier natural n , $10^n \equiv 0 \pmod{5}$ y además, también por C4, para cualquier dígito a_n , tenemos que

$$a_n \cdot 10^n \equiv 0 \pmod{5}$$

Así, dado número entero x , tenemos por C1 que

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \pmod{5}$$

Entonces debido a que $a_n \cdot 10^n \equiv 0 \pmod{5}$

Y por la propiedad C5,

$$x \equiv 0 + 0 + \cdots + 0 + a_0 \pmod{5}$$

Es decir

$$x \equiv a_0 \pmod{5} \quad (A)$$

Esto, debido a la propiedad (C2) es lo mismo que

$$a_0 \equiv x \pmod{5} \quad (B)$$

Necesidad ($\Rightarrow$).

Si un número entero n es divisible por cinco, entonces la cifra de las unidades es divisible por cinco.

Si suponemos que $5 \mid x$, entonces $x \equiv 0 \pmod{5}$ y debido a (B), sabemos que

$$a_0 \equiv x \pmod{5}$$

Ahora por C3 tenemos que

$$a_0 \equiv 0 \pmod{5}$$

Es decir

$$5 \mid a_0. \blacksquare$$

Suficiencia ($\Leftarrow$). Si la cifra de las unidades de un número entero x es divisible por cinco, entonces el número es divisible por cinco.

Debido a que a_0 , la cifra de las unidades de un número entero, es divisible por cinco entonces $a_0 \equiv 0 \pmod{5}$ y como $x \equiv a_0 \pmod{5}$. Por (A) y debido a C3 tenemos que

$$x \equiv 0 \pmod{5}$$

O lo que es lo mismo

$$5 \mid x. \blacksquare$$

Criterio de divisibilidad del 3. Un número entero x es divisible por 3, si y sólo si la suma de todas las cifras del número entero es divisible por 3.

Al realizar la división del número 10 entre el número 3 obtenemos como residuo el número 1, así tendremos que $10 \equiv 1 \pmod{3}$. Usando la propiedad C4, tenemos que para cualquier número natural n

$$10^n \equiv 1 \pmod{3}$$

Esto implica (también por la propiedad C4) que para cualquier dígito a_n y cualquier número natural n se cumple:

$$a_n \cdot 10^n \equiv a_n \pmod{3}$$

Ahora dado un número entero x , tenemos que:

$$x \equiv a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 \pmod{3}$$

Así por lo anterior y por la propiedad C5;

$$x \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \pmod{3}$$

Necesidad ($\Rightarrow$).

Si un número entero x es divisible por 3, entonces la suma de sus dígitos es divisible por 3.

Dado por hipótesis se conoce que

$$3 \mid x$$

Entonces por definición de congruencia

$$x \equiv 0 \pmod{3}$$

Además, mostramos que

$$x \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \pmod{3}$$

Ahora debido a que la congruencia es transitiva tenemos que

$$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod{3}$$

Esto significa que

$$3 \mid a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$$

Como se quería demostrar. ■

Suficiencia ($\Leftarrow$).

Si la suma de los dígitos de un número entero x es divisible por tres, entonces el entero x es divisible por tres.

Por hipótesis conocemos que

$$3 \mid a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$$

Entonces por definición de congruencia

$$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod{3}$$

Además, mostramos que

$$x \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \pmod{3}$$

Ahora por la transitividad de la congruencia tenemos que

$$x \equiv 0 \pmod{3}$$

Esto significa que

$$3 \mid x. \blacksquare$$

Criterio de divisibilidad del 9. Un número entero x es divisible por nueve, si y sólo si la suma de todas las cifras del número entero es divisible por nueve.

Nuevamente al realizar la división del número diez ahora entre el número nueve tendremos como residuo el número uno, entonces

$$10 \equiv 1 \pmod{9}$$

Así por la propiedad C4 de las congruencias sabemos que para cualquier natural n

$$10^n \equiv 1 \pmod{9}$$

Esto implica, también por la propiedad C4, que para cualquier dígito a_n y cualquier número natural n se tenga que

$$a_n 10^n \equiv a_n \pmod{9}$$

Ahora dado un número entero x , tenemos que;

$$x \equiv a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \pmod{9}$$

Así por lo anterior y por la propiedad C5;

$$x \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \pmod{9}$$

Necesidad ($\Rightarrow$).

Si un número entero x es divisible por nueve, entonces la suma de sus dígitos es divisible por nueve. Dado que por hipótesis se sabe que

$$9 \mid x$$

Así por definición de congruencia

$$x \equiv 0 \pmod{9}$$

Además, conocemos que

$$x \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \pmod{9}$$

Por la transitividad de la congruencia tenemos que

$$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod{9}$$

Esto significa que

$$9 \mid a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0. \blacksquare$$

Suficiencia ($\Leftarrow$).

Si la suma de los dígitos de un número entero es divisible por nueve, entonces el entero x es divisible por nueve.

La condición inicial es que

$$9 \mid a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$$

Entonces por definición de congruencia

$$a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod{9}$$

Además, mostramos que

$$x \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \pmod{9}$$

Ahora por la transitividad de la congruencia tenemos que

$$x \equiv 0 \pmod{9}$$

Esto implica que

$$9 \mid x. \blacksquare$$

Criterio de divisibilidad del cuatro. Un número entero x es divisible por cuatro, si y sólo si el número que se forma con la cifra de las decenas y la cifra de las unidades del número entero es divisible por cuatro.

Ahora al realizar la división del número 10 con respecto del número 4 se obtiene como residuo el número 2 y al realizar el cociente del número 100 también con el número cuatro, obtenemos como residuo el número cero, así tenemos que;

$$10 \equiv 2 \pmod{4}$$

Y

$$10^2 \equiv 0 \pmod{4}$$

De esta forma para cualquier número natural $n > 1$ y aplicando la propiedad C4 de las congruencias tenemos que;

$$10^n \equiv 10^2 * 10^{n-2} \equiv 0 * 10^{n-2} \equiv 0 \pmod{4}$$

Aplicando nuevamente la propiedad C4 y para cualquier dígito a_n se tiene que;

$$a_n \cdot 10^n \equiv 0 \pmod{4}.$$

Necesidad ($\Leftarrow$).

Si un número entero x es divisible por cuatro, entonces el número que se forma con la cifra de las decenas y la cifra de las unidades, es divisible por cuatro.

La hipótesis nos dice que

$$4 \mid x$$

Es decir,

$$4 \mid a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Así debido a que,

$$a_n \cdot 10^n \equiv 0 \pmod{4}, \quad \text{para } n > 1 \text{ y cualquier dígito } a_n$$

Por la propiedad C5 tenemos que

$$4 \mid 0 + 0 + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Es decir,

$$4 \mid a_1 \cdot 10 + a_0$$

Esto es, el número cuatro divide al número que se forma con la cifra de las decenas y la cifra de las unidades. ■

Suficiencia ($\Leftarrow$).

Si el número que se forma con la cifra de las decenas y la cifra de las unidades de un número entero x es divisible por cuatro, entonces el número entero x es divisible por cuatro.

Esta vez la hipótesis dice que

$$4 \mid a_1 \cdot 10 + a_0$$

Y dado que

$$a_n \cdot 10^n \equiv 0 \pmod{4}, \quad \text{para } n > 1 \text{ y cualquier dígito } a_n$$

Entonces por la propiedad C5 de la congruencia se tiene que

$$4 \mid a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Es decir

$$4 \mid x. \quad \blacksquare$$

Criterio de divisibilidad del 11. Un número entero es divisible entre once si y sólo si la diferencia entre la suma de sus cifras colocadas en lugares pares y la suma de las cifras colocadas en lugares impares, es divisible entre once.

Para esta demostración es necesario observar que

$$11 \mid 11$$

Es decir,

$$11 \equiv 0 \pmod{11}$$

Esto se puede escribir como

$$10 + 1 \equiv 0 \pmod{11}$$

Y por la reflexividad de la congruencia también tenemos que

$$-1 \equiv -1 \pmod{11}$$

Así debido a la propiedad C5

$$10 + 1 - 1 \equiv 0 - 1 \pmod{11}$$

Haciendo las operaciones en la última expresión tenemos que

$$10 \equiv -1 \pmod{11}.$$

Ahora usando la propiedad C4,

$$10^n \equiv 1 \pmod{11}, \text{ para } n \text{ par} \quad (A)$$

Y debido a la reflexividad de la congruencia tenemos que

$$a_n \equiv a_n \pmod{11}, \text{ para cualquier dígito } a_n \quad (B)$$

Así aplicando la propiedad C4 en los resultados (A) y (B)

$$a_n \cdot 10^n \equiv a_n \pmod{11}, \quad \text{donde } n \text{ es par y } a_n \text{ cualquier dígito}$$

De la misma forma usando la propiedad C4 tenemos que

$$10^n \equiv -1 \pmod{11}, \quad \text{para } n \text{ impar} \quad (C)$$

Así aplicando la propiedad C4 en los resultados (B) y (C)

$$a_n \cdot 10^n \equiv a_n \pmod{11}, \quad \text{donde } n \text{ es impar y } a_n \text{ cualquier dígito}$$

Observe que si tenemos un número entero digamos

$$x = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Al analizar la congruencia sabemos (por lo anterior) que el dígito a_n se sumará o se restará, y esto depende de la potencia (del número natural n), entonces;

$$a_n \cdot 10^n + \cdots - a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv (-1)^n \cdot a_n + (-1)^{n-1} \cdot a_{n-1} + \cdots - a_1 + a_0 \pmod{11}$$

Necesidad ($\Rightarrow$).

Si un número entero x es divisible entre once, entonces la diferencia entre la suma de sus cifras colocadas en lugares pares y la suma de las cifras colocadas en lugares impares es divisible entre once.

Como antes, partimos de la hipótesis la cual nos dice que

$$11 \mid x$$

Es decir,

$$x \equiv 0 \pmod{11}$$

Como

$$x \equiv (-1)^n \cdot a_n + (-1)^{n-1} \cdot a_{n-1} + \cdots - a_1 + a_0 \pmod{11}$$

Por la transitividad de la congruencia (propiedad C3) sucede que

$$(-1)^n \cdot a_n + (-1)^{n-1} \cdot a_{n-1} + \cdots - a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod{11}$$

Es decir,

$$11 \mid (-1)^n \cdot a_n + (-1)^{n-1} \cdot a_{n-1} + \cdots - a_1 + a_0. \blacksquare$$

Suficiencia($\Leftarrow$). Si la diferencia entre la suma de las cifras colocadas en lugares pares y las cifras colocadas en lugares impares de un número entero x es divisible entre once, entonces el número entero x también es divisible entre once.

La hipótesis nos dice que

$$11 \mid (-1)^n \cdot a_n + (-1)^{n-1} \cdot a_{n-1} + \cdots - a_1 + a_0$$

Es decir,

$$(-1)^n \cdot a_n + (-1)^{n-1} \cdot a_{n-1} + \cdots - a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod{11}$$

Además, sabemos que

$$x \equiv (-1)^n \cdot a_n + (-1)^{n-1} \cdot a_{n-1} + \cdots - a_1 + a_0 \equiv 0 \pmod{11}$$

Entonces aplicando la transitividad de la congruencia (propiedad C3)

$$x \equiv 0 \pmod{11}$$

Esto último nos dice que

$$11 \mid x. \blacksquare$$

Con esto terminamos las demostraciones.

Como puede observarse, tanto en las demostraciones que se realizaron con el uso las propiedades de divisibilidad, como en las que se usaron las propiedades de la congruencia, existen enunciados, menciones o justificaciones, que en la mayoría de los libros de Teoría de números se omiten por considerarlas obvias o innecesarias. Esto se hizo con el propósito de que lo escrito sea accesible a los docentes de educación media básica y media superior o, en general, para que un lector interesado en el tema se capacite en la rigurosidad matemática de las demostraciones.

De esta manera y teniendo una visión optimista de la enseñanza y el aprendizaje, si el docente conoce las demostraciones completas de los criterios de divisibilidad, podrá realizar las adecuaciones pertinentes para darlas a conocer a sus alumnos mediante variadas opciones didácticas, y el profesor, estará capacitado para incursionar en la aventura del conocimiento cada vez más profundo de las matemáticas. El alumno quedará satisfecho y realizará mayores esfuerzos por aprender.

Esta es una visión constructivista del aprendizaje, en la que el mismo, se concibe como resultado de transformación cognitiva del sujeto, en este caso maestro y alumnos, en la medida que interacciona con “la realidad” y está listo para construir nuevos conocimientos en el ámbito de los criterios de divisibilidad.

Capítulo 4. Conclusiones

4.1 Conclusiones

La formación matemática requerida para realizar estudios superiores en casi cualquier área del conocimiento, presupone un dominio mínimo de los contenidos de Aritmética, entre otros, operaciones numéricas con enteros, suma y multiplicación de fracciones, etc. contenidos de Álgebra: operaciones con polinomios y factorización; contenidos de Geometría: teorema de la suma de ángulos interiores de un triángulo y teorema de Pitágoras; contenidos de Trigonometría: razones e identidades trigonométricas; contenidos de Geometría analítica: la recta, la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola; y contenidos de Cálculo: funciones y conocimiento inicial y operativo de la derivada y quizás, de la integral. En todos estos contenidos aparece la importancia de la factorización; sin un dominio aceptable de este contenido, difícilmente se tendrá éxito en el estudio de éstos y otros contenidos de matemáticas; o bien, de otras ciencias.

Efectivamente, la factorización de números o de polinomios conlleva a la simplificación o transformación de las expresiones matemáticas para poder aplicar resultados o resolver problemas. La factorización es el proceso inverso de la multiplicación y se deriva, directamente, de las propiedades de campo de los números reales, contenido esencial de la matemática. Entonces, aprender la factorización es aprender uno de los pilares de esta ciencia.

Para factorizar un número o un polinomio, se requiere conocer los factores que lo originan; en el caso de un número se buscan básicamente los factores que sean primos, los cuales fueron estudiados por los griegos hace más de 22 siglos. Para encontrar esos factores primos, es necesario conocer los criterios de divisibilidad, uno de los conceptos más básicos de la Teoría de números; dichos criterios pueden ser deducidos mediante las propiedades de campo de los reales y la aplicación de teoremas básicos de esta teoría, pero también pueden deducirse del concepto de *congruencia*, de la Teoría de números.

Por todo ello y los beneficios que pueden derivarse de un correcto aprendizaje de la factorización, conviene realizar estudios y hacer propuestas metodológicas que permitan al alumno aprender a factorizar, siendo los criterios de divisibilidad uno de los contenidos que permitirán lograrlo.

En esta tesis se estudia a fondo los criterios de divisibilidad y se propone, en un futuro próximo, editar un cuadernillo dirigido a profesores de matemáticas de Secundaria y Bachillerato, que les permita enseñar, con propiedad, los criterios de divisibilidad, con la seguridad que esto traerá beneficios para el profesor y, lo más importante, para los estudiantes de estos niveles escolares. Se espera que el contenido de esta tesis y de dicho cuadernillo sea de utilidad para el sector educativo.

Bibliografía

- Departamento de Matemática Educativa (Ed). (1984). *Elementos de Euclides*, tomado de Científicos griegos. CINVESTAV, IPN, México.
- SEP. 2016. *El modelo educativo 2016*, el planteamiento pedagógico de la reforma educativa. SEP, México.
- Sepúlveda, A., Arcos, I. (2016). *Desarrollo conceptual de la geometría*, Segunda edición. Editorial Devi Kali, Toluca, México.
- Jean-Paul Collete (2000). *Historia de las matemáticas II*, Cuarta edición. Editorial siglo XXI editores, D. F, México
- Ausbel, D.P. Novak J.D. Hanesian, H. (1968). Educational psychology: A cognitive view
- Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum. *High School Assessment Package 1 & 2*, (1999, 2000). White Plains, N.Y.: Dale Seymours Publications.
- Howard Eves, (1969).(3rd edition), An Introduction to the History of Mathematics.
- Hiebert, J.C., Carpenter, T. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En D. Grouws, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (págs. 65-97). New York: Macmillan
- Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., Post, T. (2000). "Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers". En *Handbook of Research Desing in Mathematics Education*, edited by Antony E. Kelly & Richard Lesh, pp. 591-645. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Ortiz, A.(2005). *Historia de la Matemática*. Vol 1. Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Polya, G. (1945). *Como plantear y resolver problemas*. 27ª edición, traducción en español de "How to solve it". Editorial Trillas. México 2005.
- Santos, M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: Fundamentos cognitivos*. México: Editorial Trillas.
- Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. Orlando, Fla. Academic Press.
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in Mathematics. Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (D. Grouws, Ed.). p. 334-370.
- Secretaría de Educación Pública. (2017). *Nuevo Modelo Educativo*. SEP, México
- Sepúlveda, A., Tinoco, J.G. (2000). Un criterio de divisibilidad en los enteros. *Educación Matemática*. Revista Vol 12, No. 3, diciembre 2000. Grupo Editorial Iberoamérica, SA de CV. Medico.
- Zeitz, P. (1999). *The Art and Craft of Problem Solving*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Páginas de Internet:
- https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/114501/Modelo_Educativo_2016.pdf