



# Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

---

**Facultad de Ciencias Físico  
Matemáticas  
“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”**

**COSMOLOGÍA, FONONES Y  
EXPANSIÓN ACELERADA DEL  
UNIVERSO**

**T E S I S**

Para obtener el título de:  
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

Presentado por:

**Reyes Manuel García García**

Asesor:

**Dr. Francisco Antonio Astorga Sáenz**





---

## Agradecimientos

*A mi familia y novia por su apoyo incondicional.*

*A mi asesor por su esmero y dedicación.*

*A la Mtra. Gabriela García por su asesoría y tiempo.*

---

---

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>Abstract</b>	<b>IX</b>
<b>Introducción</b>	<b>XI</b>
<b>1. Cosmología Estándar</b>	<b>1</b>
1.1. Principio Cosmológico y Ley de Hubble . . . . .	1
1.2. Observaciones Fundamentales . . . . .	2
1.2.1. La Expansión del Universo . . . . .	2
1.2.2. Abundancia de Elemento Ligeros . . . . .	5
1.2.3. Radiación Cósmica de Fondo . . . . .	5
1.3. Ecuaciones Fundamentales . . . . .	7
1.3.1. Ecuación de Friedmann . . . . .	7
1.3.2. Ecuación del Fluido . . . . .	11
1.3.3. Ecuación de la Aceleración . . . . .	12
1.4. Evolución y Geometría del Universo . . . . .	13
1.4.1. Universo Plano . . . . .	14
1.4.2. Universo Abierto . . . . .	16
1.4.3. Universo Cerrado . . . . .	17
1.5. Velocidad de Escape y Velocidad Terminal . . . . .	17
1.6. Corrimiento al Rojo y Ley de Hubble . . . . .	20
<b>2. Campos Escalares en Cosmología</b>	<b>23</b>
2.1. Campos en Física . . . . .	23
2.1.1. Campos Escalares . . . . .	24
2.2. Tensor de Energía-Momento . . . . .	25
2.3. Mecánica Lagrangiana . . . . .	25
2.3.1. Mecánica Lagrangiana para Partículas . . . . .	26
2.3.2. Mecánica Lagrangiana para Campos Escalares . . . . .	28
2.4. Ecuaciones para un Campo Escalar . . . . .	29

## ÍNDICE GENERAL

---

2.4.1.	Ecuaciones de Presión y Densidad para Campos Escalares Homogéneos . . . . .	29
2.4.2.	Ecuación de Movimiento para Campos Escalares Homogéneos . . . . .	30
2.4.3.	Ecuaciones de Presión y Densidad para Campos Escalares Generales . . . . .	32
2.4.4.	Ecuación de Movimiento para Campos Escalares Generales . . . . .	32
<b>3.</b>	<b>Inflación Cosmológica</b>	<b>35</b>
3.1.	Motivación para Inflación . . . . .	36
3.1.1.	Problema de la Planitud . . . . .	37
3.1.2.	Problema del Horizonte . . . . .	38
3.1.3.	Expansión Acelerada . . . . .	40
3.1.4.	Monopolos Magnéticos . . . . .	40
3.2.	Constante Cosmológica $\Lambda$ . . . . .	41
3.3.	Problemas con Inflación . . . . .	42
3.3.1.	Problema de la Salida Airosa . . . . .	42
3.3.2.	Problema de Guth . . . . .	42
3.3.3.	Problema de Inflación Eterna . . . . .	43
3.3.4.	Problema con Multiversos . . . . .	43
3.3.5.	Problema de Inflación con Constante Cosmológica $\Lambda$ . . . . .	44
3.3.6.	¿Cuánta Inflación? . . . . .	44
3.4.	Nueva Teoría Inflacionaria . . . . .	45
3.4.1.	Características de Inflación . . . . .	47
<b>4.</b>	<b>Fonones</b>	<b>49</b>
4.1.	Fonones: de Campo a Partícula . . . . .	49
4.2.	Fonones en Estado Sólido . . . . .	56
4.2.1.	Calor Específico . . . . .	56
4.2.2.	Modelo Clásico . . . . .	56
4.2.3.	Modelo Einstein . . . . .	57
4.2.4.	Modelo Debye . . . . .	58
4.3.	Fonones en el Universo . . . . .	61
4.3.1.	Fonones y Expansión Acelerada del Universo Actual . . . . .	61
4.4.	Fonones y Física de Materiales . . . . .	66
4.4.1.	Sonido de un Átomo . . . . .	67
4.5.	Producción de Fonones . . . . .	68
4.6.	Decaimiento del Campo de Fonones . . . . .	68
4.7.	Dispersión de Fonones . . . . .	69
4.8.	Fonón y Quintaesencia . . . . .	71
<b>5.</b>	<b>Análisis Dinámico</b>	<b>75</b>
5.1.	Sistema de Ecuaciones . . . . .	75
5.2.	Características de los Puntos Críticos . . . . .	79
5.3.	Teorema de la Variedad Central . . . . .	81

5.4. Condiciones de Inflación . . . . .	89
<b>6. Conclusiones</b>	<b>93</b>
<b>A. Cosmología y Mecánica Estadística</b>	<b>97</b>
<b>B. Ec. Fundamentales con Constante Cosmológica</b>	<b>107</b>
<b>C. Función Estadística</b>	<b>109</b>
<b>D. Escalar de Curvatura</b>	<b>111</b>

ÍNDICE GENERAL

---



# Resumen

En esta tesis se considera el escenario en el que los fonones asumen el papel de los campos escalares que podrían haber producido la expansión acelerada del universo, tanto en la época actual (Astron. J. 116, 1009-1038(1998)) como en la época de inflación temprana del universo. El origen de los fonones podría ubicarse en los modos normales de vibración asociados a una estructura cosmológica presente en cada caso. Esta propuesta tiene la ventaja de explicar el origen de estos campos escalares, lo que usualmente no se discute. En este trabajo se desarrolla un análisis dinámico de las ecuaciones cosmológicas correspondientes a la expansión acelerada actual del universo que podría haber sido generada por fonones. Este análisis dinámico constituye la aportación principal de la tesis.

## Palabras clave

Fonones, Expansión Acelerada, Análisis Dinámico, Cosmología, Campos Escalares.



# Abstract

In this thesis we discuss phonons as the scalar fields responsible for the accelerated expansion of the universe, both the current one and the early inflationary epoch. The origin of these particles can be traced to the vibrational modes of rigid structures in the universe. The advantage of this idea is that it pursues an understanding of the origin of these scalar fields which is not always considered in these models. We carry out a dynamical analysis of the cosmological equations for the case of a phonon induced accelerated expansion. This is the main contribution of this thesis.

## Key words

Phonons, Accelerated Expansion, Dynamical Analysis, Cosmology, Scalar Fields.



# Introducción

Desde la antigüedad filósofos y científicos han buscado explicar el origen, la estructura y la evolución del cosmos. En el siglo III a. C., la idea de que la Tierra y los demás planetas giraban alrededor del sol (que era el centro del universo) fue propuesta por Aristarco de Samos, sin embargo es hasta el siglo XVI, cuando Nicolás Copérnico con su modelo matemático demostró esta teoría y la llamó Teoría Heliocéntrica. En el siglo siguiente, Johannes Kepler analiza los datos obtenidos por Tycho Brahe (astrónomo danés) y descubre que la tierra y los demás planetas del sistema solar giran alrededor del sol en órbitas elíptica, con el sol en uno de sus focos.

Ya en las primeras décadas del siglo XX, con las observaciones de Edwin Hubble, muchos científicos dejaron de pensar que el sol era el centro del universo. En esta época se mostró que había otras estructuras similares a la Vía Láctea (*Galaxias*), las cuales se alejaban todas entre sí. De aquí se propone que el universo se está expandiendo, es decir que el espacio se estira.

Anteriores a las observaciones de Hubble y Humason (1.2.1) y un poco después de que Einstein propusiera sus ecuaciones de la Teoría de la Relatividad General (1.8), Alexander Friedmann (en San Petesburgo, Rusia) obtiene sus ecuaciones (1.12, 1.14, 1.15), a partir de las de Einstein, y llega a la conclusión de que el universo no es estático sino que se está expandiendo (lo que confirmaron posteriormente las observaciones de Hubble). Contemporáneo a Einstein y Friedmann, el cosmólogo Georges Lemaitre propone que en un determinado tiempo en el pasado toda la materia y energía estaban concentradas en un punto el cual se descomprimió con una gran explosión: *el átomo primordial*.

Durante las décadas siguientes se conjugarían una serie de modelos y observaciones cosmológicas que empezarían a dar forma a la imagen de un universo temprano denso y caliente. A saber:

1. Que el universo se está expandiendo (Hubble y Humason, Friedmann, Lemaitre).
2. Que los núcleos más ligeros se formaron en  $t \sim 1\text{seg}$  (Nucleosíntesis), en la vida del universo (Gamow, Alpher y Herman).
3. Que un mar homogéneo de fotones perméa el universo: *La radiación cósmica de*

## CAPÍTULO 0. INTRODUCCIÓN

---

*fondo*(Penzias y Wilson, Gamow, Dicke, Peebles, Wilkenson 1.2.3).

Estas observaciones consolidan la imagen de lo que se llamaría (inicialmente de manera despectiva pero que finalmente se acuñaría como el nombre de este modelo): el *Hot Big Bang*.

A partir de COBE (Siglas en inglés *Cosmic Background Explorer*), la cosmología entró en una época de precisión que ha permitido afinar nuestros modelos y realizar grandes descubrimientos que nos plantean preguntas fundamentales y cambian radicalmente nuestras imágenes de lo que es y ha sido el universo. La actual es una época de grandes retos y proyectos de precisión increíble de las observaciones cosmológicas (aproximándose a la ciencia ficción, dirían algunos).

Estos modelos son apenas un atisbo al universo y su evolución sigue siendo un espacio abierto a preguntas y enigmas sobre cómo ha sido, cómo es y cómo será el universo. La razón de la actual expansión acelerada del universo (1.2.1), el origen de la misma expansión, la identidad de la materia oscura y la energía oscura y la asimetría materia-antimateria en nuestro universo, son algunas de las preguntas que siguen esperando respuestas desde la física.

La discusión que se presenta en esta tesis se ubica precisamente en el contexto de la expansión acelerada del universo. El mecanismo usual para producir esta aceleración es un campo escalar (por razones que discutiremos más adelante) cuyo origen se desconoce típicamente. En esta tesis se busca relacionar el origen de este campo a un proceso físico que de manera natural produzca campos escalares cuantizados en partículas: las vibraciones de un sólido y sus partículas asociadas, los fonones.

# Cosmología Estándar

## 1.1. Principio Cosmológico y Ley de Hubble

A la idea de un universo isótropo (invariante ante rotaciones) y homogéneo (invariante ante traslaciones) en promedio para grandes escalas de distancia (cúmulos de galaxias: 100 Mpc) se le suele denominar el "**Principio Cosmológico**". Los mapas a gran escala de la estructura del universo: SDSS, 2DF... permiten inferir la validez de este principio (Véase por ejemplo mapa 2df, en la Fig. 1.1).

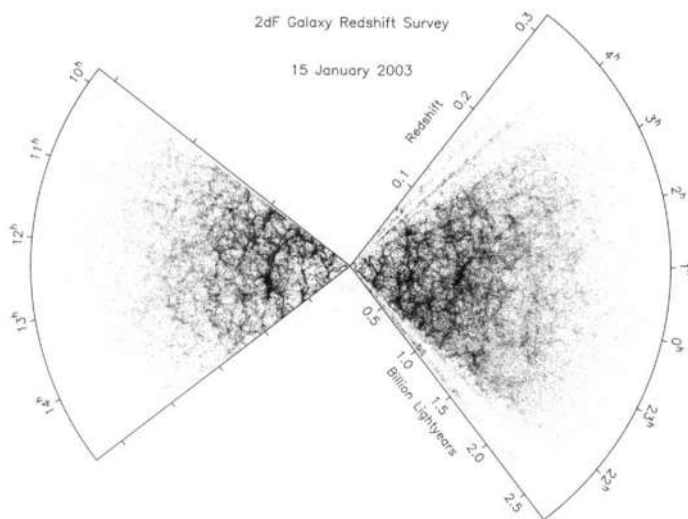


Figura 1.1: Los resultados muestran como las galaxias están dispersas en el universo de 4 billones de años luz. Inmensos grupos, filamentos largos, y vacíos espaciales midiendo sobre los 100 millones de años luz a lo largo, son visibles en el resultado del mapa 2dF. Fuente [1].

**La ley de Hubble** se descubrió observacionalmente y nos dice que la velocidad de expansión crece linealmente respecto a la distancia ( $\vec{v} = H\vec{r}$ ) con  $H$  conocido como el

parámetro de Hubble, figura (1.2).

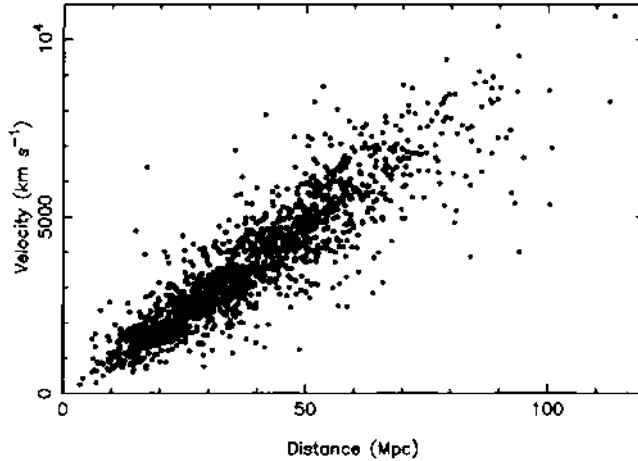


Figura 1.2: Gráfica de Velocidad contra distancia, implica la ley de Hubble. Fuente [1].

El carácter lineal de la ley de Hubble implica que la expansión no tiene un centro, sino que se ocurre igual en todas direcciones, en consecuencia implica el Principio Cosmológico como se muestra en la siguiente figura.

Tomando la Ley de Hubble en la Fig. 1.3, con  $v_1 = Hr_1$  entonces  $v_2 = Hr_2 = H2r_1 = 2Hr_1 = 2v_1$ .

Por otro lado, usando coordenadas comóviles  $v = rH = axH$  y como  $v = \dot{a}x$  entonces  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ .

## 1.2. Observaciones Fundamentales

Consideremos a continuación las tres observaciones que confirman la imagen de un universo temprano denso y caliente. La primera proviene del resultado que se acaba de mencionar: la ley de Hubble.

### 1.2.1. La Expansión del Universo

Desde sus inicios, la tesis de la expansión del universo fue controvertida. Durante algunos años, la controversia se elevó al nivel de un modelo alternativo que asumía un universo estático: el Modelo Estacionario del universo [34]. Este modelo concordaba con la idea de Einstein sobre el carácter estático de nuestro universo que le llevó a postular la llamada constante cosmológica  $\Lambda$  en sus famosas ecuaciones. El modelo estacionario tuvo prestigiados científicos a su favor y propuso soluciones, en el contexto estacionario, a las observaciones que parecían indicar un universo en expansión. Estas



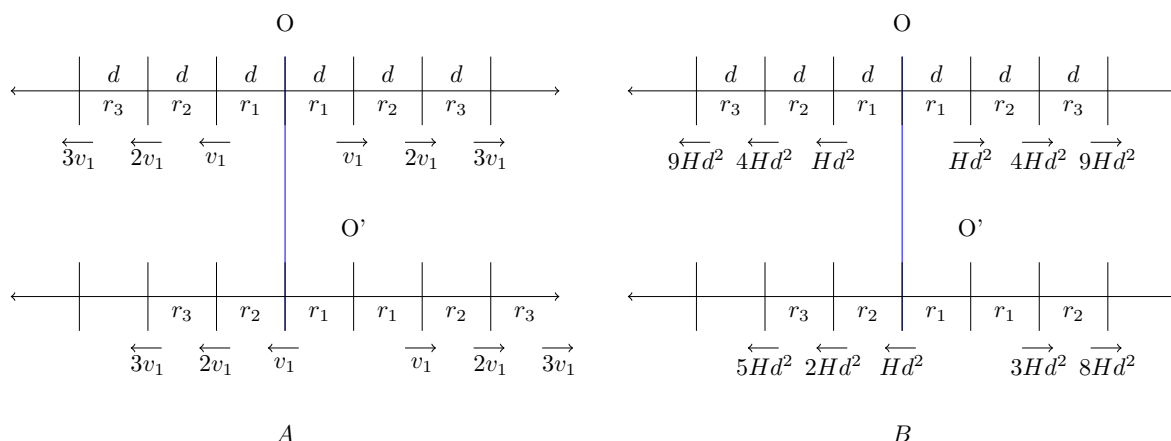


Figura 1.3: Principio Cosmológico y Ley de Hubble. La linealidad de la ley de Hubble se muestra en la figura A, con  $v = Hr$  donde las velocidades son las mismas en 2 puntos de referencia distintos y tomando  $v = Hr^2$  tenemos la figura B, que muestra velocidades distintas de expansión, en distintos puntos de referencia. *Realizó Reyes Manuel García García.*

fueron descartándose poco a poco a medida que se sumaron otras observaciones. A partir de las observaciones de Hubble y Humason, la conclusión natural es que, dado el patrón de los movimientos de las nebulosas observadas, estos no son movimientos propios de éstas, sino una indicación de que el mismo espacio es lo que está creciendo, y al hacerlo mueve de esta manera a las nebulosas, como puntos sobre la superficie del globo que se infla; en esto consiste precisamente la expansión del universo y contribuye a una de las observaciones mas asombrosas de nuestro universo.

Esta expansión, plantea interrogantes profundas sobre la dinámica de nuestro universo: ¿por qué el universo se expande? y ¿cómo ha sido su expansión a lo largo de su evolución?

Se puede decir que por definición, universo es expansión, no conocemos otro tipo de universo. Hablar de universo es hablar de expansión.

Las ecuaciones y modelos que empleamos para describir la dinámica del universo contendrán siempre un parámetro asociado a la expansión: el factor de escala  $a(t)$ , que debido al principio cosmológico no depende de la posición, y que da cuenta de cuánto se expande el universo.

En relación con la pregunta de por qué se expande actualmente el universo, de manera acelerada, se ha propuesto la existencia de un objeto presente en todo el universo y el que por su naturaleza genera un efecto de repulsión que acelera la expansión del universo en contra de la gravedad. A este objeto se le ha llamado energía oscura

## CAPÍTULO 1. COSMOLOGÍA ESTÁNDAR

---

y entre otros candidatos para ésta se encuentra la constante cosmológica mencionada anteriormente. Otros modelos consideran campos escalares. Respecto a cómo ha sido esta expansión en la evolución del universo, la respuesta se encuentra en la figura 1.4. La curva en esta figura muestra los datos obtenidos por el experimento BOSS en relación a la aceleración de la expansión del universo. De acuerdo con esta curva, desde hace 5 mil millones de años, esta fuerza misteriosa conocida como energía oscura ha provocado que el Universo se expanda cada vez más rápido. Sin embargo, al parecer el Cosmos no ha crecido a la misma velocidad desde el principio de los tiempos, como se muestra en esta curva, la expansión hace 10 mil millones de años era frenada hasta llegar al punto más bajo hace 5 mil millones de años y empezar a acelerarse.

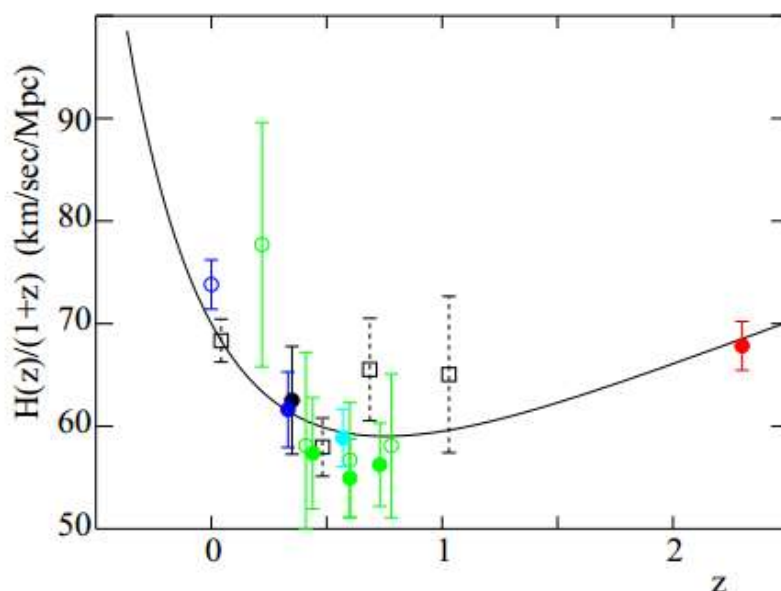


Figura 1.4: Aceleración de la Expansión del Universo por BOSS. Fuente [36].

El equipo de investigadores que presenta esta curva (y que publica sus resultados en la revista *Astronomy and Astrophysics*) fue capaz de medir por primera vez la tasa de expansión de hace 11.000 millones de años, no observando las galaxias, sino la distribución del gas en las regiones distantes del Universo. Estas nubes se pudieron medir ya que absorben la luz de los quásares, objetos celestes que emiten una gran cantidad de energía y que se encuentran en el corazón de las galaxias. La medición de dicha absorción produce una imagen detallada del gas entre nosotros y el quásar (fig. 1.5). El nuevo mapa utiliza la luz de 160,000 quásares de todo el cielo lo cual es un incremento considerable en la relación a dos mediciones anteriores en las que el número de quásares observados es 50,000. Los científicos dicen que las mediciones dibujan un cuadro de cómo el Universo ha evolucionado a lo largo de su historia y que la imagen que resulta es consistente con nuestra comprensión actual del Cosmos, en el que la energía oscura es una parte constante del espacio y agregan que lo más interesante sobre el

nuevo resultado es que, por primera vez, vemos cómo la energía oscura trabajaba en un tiempo antes de que empezara la aceleración actual del Universo.

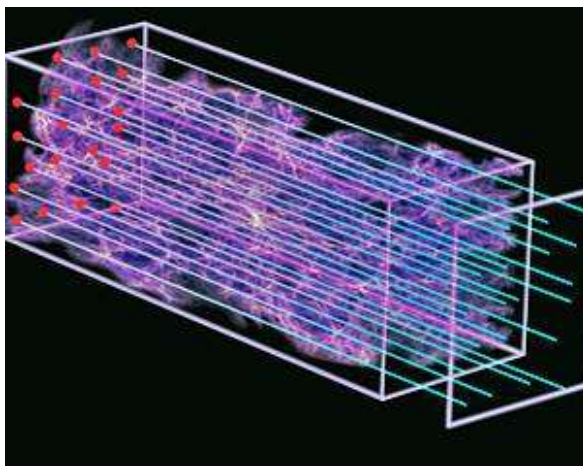


Figura 1.5: Medición de la Absorción de luz de cuásares, del proyecto BOSS.

### 1.2.2. Abundancia de Elemento Ligeros

Una segunda observación sobre la que se fundamenta el Big Bang proviene de la formación de los núcleos ligeros tempranos: el  $1H$  (el hidrógeno ligero), su isótopo el deuterio ( $^2H$  o  $D$ ), los isótopos del helio  $^3He$  y  $4He$  y los isótopos del litio  $^7Li$  y  $^6Li$  y algunos isótopos inestables o radiactivos como el tritio  $^3H$ , y los isótopos del berilio,  $^7Be$  y  $^8Be$ , en cantidades despreciables.

A este proceso, ocurrido cuando el universo tenía una edad de 1s, se le denomina Nucleosíntesis y su predicción más impactante es la abundancia primordial de estos elementos ligeros: 79 % Hidrógeno, 24 % Helio y 1 % de otros elementos ligeros, George Gamow, Ralph Alpher, Hans Bethe y Robert Hermann realizaron este análisis en la década de 1940 [37].

Esta predicción ha sido corroborada experimentalmente.

### 1.2.3. Radiación Cósmica de Fondo

Esta es la tercera de las observaciones cosmológicas fundamentales y la más reciente de las tres.

La radiación cósmica de fondo son los fotones que se desacoplaron del plasma primordial cuando el universo tenía tan sólo 380,000 años de edad. La predicción teórica de esta radiación fue realizada por el físico ruso George Gamow y dos colegas suyos Robert C. Herman y Ralph A. Alpher en 1948 [37].

La radiación cósmica de fondo fue detectada por primera vez por los radio-astrónomos Arno Penzias y Robert Wilson en 1964. De hecho, los científicos que marginalmente

## CAPÍTULO 1. COSMOLOGÍA ESTÁNDAR

---

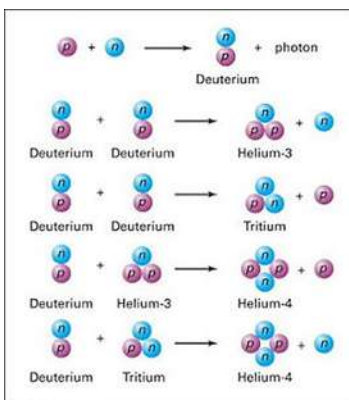


Figura 1.6: Creación de los elementos ligeros durante la nucleosíntesis primordial.

tocaban el tema adoptaban el modelo del Big Bang o el modelo rival cuasi-estacionario guiados no por resultados empíricos sino por inclinación filosófica.

Posteriormente el satélite COBE (Cosmic Background Explorer) de la NASA detectó anisotropías de temperatura del orden de  $10^{-5} K$  (o pequeñas desviaciones de la temperatura con respecto al valor promedio) en la radiación cósmica de fondo en 1992. Después de COBE, se sucedieron una serie de experimentos similares que han permitido analizar con más precisión las anisotropías de la radiación de fondo: WMAP(NASA) y PLANCK(ESA), entre otros. Aunque este es el resultado principal del COBE, fue también importante que corroborara el carácter de Cuerpo Negro (dado por la ley de Radiación de Planck) del espectro de la radiación Cósmica de Fondo (Fig. A.2).

En la figura del satélite WMAP (Fig. 1.7) aparece la temperatura de la radiación cósmica de fondo representada por colores (caliente = rojo, frío = azul).

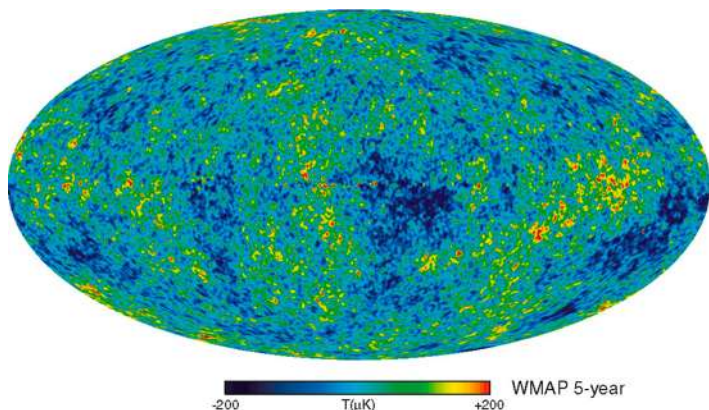


Figura 1.7: Radiación de Fondo Cósmico por el Satelite WMAP.

La estructura detectada por COBE, WMAP o PLANCK, es un registro de la historia del universo a gran detalle.

## 1.3. Ecuaciones Fundamentales

En la cosmología de un universo en el que se satisface el Principio Cosmológico, resultan ecuaciones que describen la dinámica de un universo en expansión: estas llevan el nombre de ecuaciones de Friedmann.

### 1.3.1. Ecuación de Friedmann

#### Ley de Gauss

La ley de Gauss también conocida como Teorema de Gauss, establece que el flujo de un campo a través de una superficie cerrada es proporcional a la magnitud de las fuentes de dicho campo que hay en el interior de la misma superficie, como se muestra en la figura (1.8).<sup>1</sup>

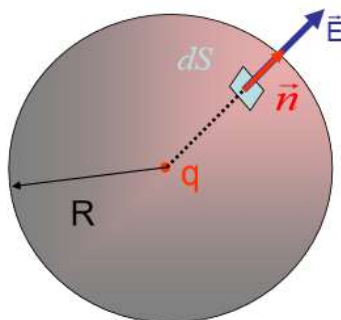


Figura 1.8: Ley de Gauss. Fuente [7]

Estos campos son aquellos cuya intensidad decrece como el cuadrado de la distancia a la fuente. Esta ley se aplica en campos electrostáticos y gravitatorio aunque también se puede aplicar a campos magnetostáticos.

**Deducción:** El campo eléctrico creado por una carga puntual a una distancia  $R$  es

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (1.1)$$

donde  $E$  es la magnitud del campo eléctrico,  $Q$  es la carga eléctrica y  $\epsilon_0$  es la permisividad eléctrica en el vacío. Usaremos el concepto de ángulo sólido<sup>2</sup> ( $\Delta\Omega$ ), que es subtendido por  $\Delta A$  sobre una superficie esférica y que se define como

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A}{R^2}, \quad (1.2)$$

<sup>1</sup>**La divergencia** de un campo vectorial mide la diferencia entre el flujo saliente y el flujo entrante de un campo vectorial sobre la superficie que rodea a un volumen de control, por tanto, si el campo tiene "fuentes" la divergencia será positiva, y si tiene "sumideros, la divergencia será negativa.

<sup>2</sup>**Ángulo Sólido** es el ángulo que abarca un objeto visto desde un punto dado, que se corresponde con la zona del espacio limitado por una superficie cónica. La unidad de medida en el SI es el estereorradián, y para calcularlo se proyecta el objeto sobre una esfera de radio conocido.

## CAPÍTULO 1. COSMOLOGÍA ESTÁNDAR

---

donde  $R$  es el radio de la esfera (Véase la Fig. 1.9).

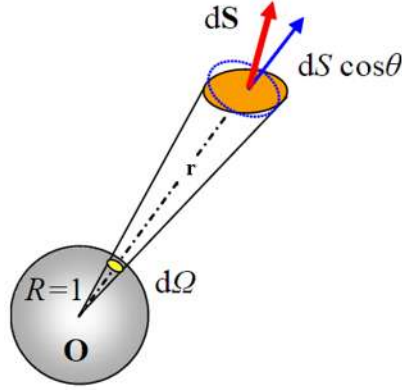


Figura 1.9: Ángulo Sólido, donde  $r$  es el radio conocido.

Como  $A$ (área) es  $4\pi R^2$ , el ángulo solido para toda la esfera es:

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A}{R^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi.$$

Si el área  $\Delta A$  es perpendicular a las líneas que salen del origen que subtiende a  $\Delta\Omega$ , se busca la proyección normal que es

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A \hat{n} \cdot \hat{R}}{R^2} = \frac{\Delta A \cos \theta}{R^2},$$

así que si se tiene carga  $q$  rodeada por una superficie cualquiera, para calcular el flujo a través de esta superficie es necesario encontrar  $E \cdot d\vec{s}$  para cada elemento de área  $\Delta A$ , para luego sumarlos.

$$\Delta\phi = \vec{E} \cdot \hat{n} \Delta A = \frac{kq \hat{n} \cdot \hat{R}}{R^2} \Delta A = \Delta\Omega kq$$

donde  $k$  es una constante que depende de las propiedades de la superficie. De manera que  $\Delta\Omega$  es el mismo ángulo anterior,  $\Delta\Omega = 4\pi$  para cualquier esfera de cualquier radio. Entonces el flujo total sobre la esfera será

$$\phi_{neto} = \oint_s \vec{E} \cdot \hat{n} dA = kq \oint_0^{4\pi} d\Omega = 4\pi kq = \frac{q}{\epsilon_0},$$

implicando que el flujo sólo depende de la carga encerrada por la esfera de radio  $R$ . Por lo que la **forma integral de la Ley de Gauss** queda

$$\oint_s \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.3)$$

Para la forma diferencial partiremos de la forma integral (1.3) y usando que para una distribución de carga volumétrica  $q = \int_v \rho dv$  y tomando el teorema de la divergencia de Gauss que dice

$$\int_v (\nabla \cdot \vec{E}) dv = \oint_{\delta v} \vec{E} \cdot dA, \quad (1.4)$$

tenemos que

$$\int_v (\nabla \cdot \vec{E}) dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho dv$$

y como ambos términos poseen diferencial de volumen y se integran en el mismo espacio, obtenemos la **forma diferencial de la ley de Gauss**.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.5)$$

En un medio distinto al vacío, esta forma se convierte en

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (1.6)$$

donde  $D$  es el desplazamiento eléctrico ( $D = \epsilon E$ ) y  $\epsilon$  es la constante de permitividad eléctrica del medio.

### Ley de Gravitación

De forma análoga al argumento anterior, el mismo resultado se sigue en el caso de Newton.

La Ley de gravitación de Newton nos dice que la fuerza ejercida entre dos cuerpos de masa  $m_1$  y  $m_2$  separados por una distancia  $r$  es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, es decir

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1.7)$$

donde  $F$  es el modulo de la fuerza ejercida entre las dos masas y  $G$ <sup>3</sup> es la constante de Gravitación universal. Esta expresión tiene la misma forma de la ley de Coulomb.

Una nueva forma de la ley de Gravedad, Einstein introduce la matemática tensorial y nuevos términos. Cabe mencionar que de esta ecuación se puede llegar a la ley de Newton (no funciona en el otro sentido).

Donde la Ley de Gravedad de Einstein se reduce a la siguiente expresión

$$G_{ik} = R_{ik} - \left(\frac{g_{ik}R}{2}\right) + \Lambda g_{ik} = G_E T_{ik}, \quad (1.8)$$

---

<sup>3</sup>La Constante de gravitación universal es determinada empíricamente y establece la intensidad de la fuerza gravitatoria entre 2 cuerpos,  $G = 6.67384 * 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$ , también existe una constante experimental de proporcionalidad en electromagnetismo  $k = 8.9875517873681764 * 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$ .

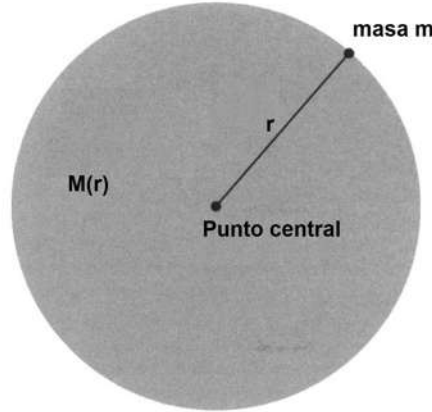


Figura 1.10: Ley de gravitación de Newton. Fuente [1].

donde  $R$  es el tensor de Ricci  $G_E$  es una constante y es el factor de proporcionalidad entre el tensor de curvatura de Einstein (que es una medida de la intensidad del campo gravitatorio) y el tensor de energía-momento de la materia que provoca el campo, y  $\Lambda$  es una constante con la que Einstein buscaba que sus ecuaciones fueran consistentes para un universo estático, aunque ahora se considera a esta, una posible solución para explicar la expansión del universo.

Una forma simple para encontrar la ecuación de Friedmann, proviene de considerar (Fig. 1.10), un sistema de masas con una distribución de masa  $M(r)$  esférica y con una masa  $m$  de prueba a una distancia  $r$ . De donde

$$F = G \frac{M(r)m}{r^2} \quad (1.9)$$

y como se había estudiado que nuestra fuerza de gravedad es conservativa,<sup>4</sup> se cumple que

$$F = -\frac{dV}{dr} \rightarrow V = -\int F dr.$$

Entonces tomando nuestra fuerza (1.9), la energía potencial  $V$  de la masa  $m$  está dada por

$$V = -G \frac{M(r)m}{r} \quad (1.10)$$

y su energía cinética es  $T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$ . Siendo la energía total  $E = T+V$  y la  $M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$

---

<sup>4</sup>*Fuerza conservativa:* Un campo es conservativo sí el trabajo total realizado por el campo sobre la partícula realiza un desplazamiento en una trayectoria cerrada es nulo, es decir  $\oint_c F(r)dr = 0$ , y cumple que  $F(r) = -\nabla V(r)$  y que el rotacional es nulo,  $\nabla \times \vec{F}(r) = 0$ , lo cual nos dice que el campo solo puede ser atractivo o repulsivo.



(con  $\rho$  la densidad de masa M), resulta

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{4}{3}G\rho\pi mr^2, \quad (1.11)$$

donde considerando coordenadas comóviles, obtenemos que

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{a}x)^2 - \frac{4}{3}G\rho\pi m(ax)^2$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{a}^2x^2 - \frac{4}{3}G\pi\rho ma^2x^2$$

$$\frac{2E}{mx^2} = \dot{a}^2 - \frac{8}{3}G\pi\rho a^2$$

si hacemos  $-\frac{2E}{mx^2} \equiv kc^2$ , obtenemos la ec. de Friedmann

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{kc^2}{a^2}}, \quad (1.12)$$

donde la  $\rho$  es la densidad y depende de la composición del universo y  $k$  es la curvatura del espacio. Esta ecuación nos da la relación entre la velocidad de expansión del universo, la geometría del mismo y la composición.

### 1.3.2. Ecuación del Fluido

Si se piensa en el universo como un gas (Fig. 1.11),

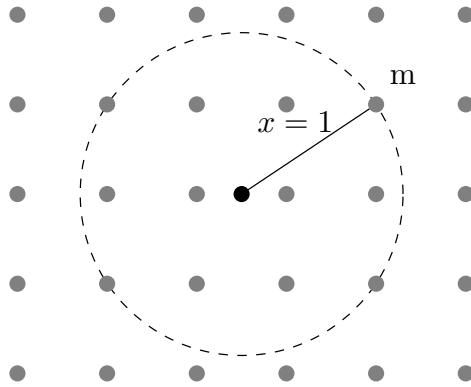


Figura 1.11: Universo visto como Gas de partículas. *Realizó Reyes Manuel García García.*

consideremos coordenadas comóviles X (fijas a la expansión) tal que  $x = 1$ , entonces en  $r = ax = a$  y para una distribución esférica con  $r = X$  tenemos que  $V = \frac{4}{3}\pi a^3$ . Empleando la primera ley de la Termodinámica:

$$dE = dQ + dW,$$

## CAPÍTULO 1. COSMOLOGÍA ESTÁNDAR

---

donde  $dE$  es el cambio de energía,  $dQ$  el cambio de calor y  $dW$  el trabajo realizado, tenemos

$$dE = TdS - pdV, \quad (1.13)$$

donde  $T$  es la temperatura del sistema,  $dS$  el cambio de entropía,  $p$  la presión y  $dV$  el cambio de volumen.

Incluyendo la ecuación de energía de Einstein  $E = mc^2$ , con  $m$  masa y con  $c$  la velocidad de la luz. y considerando una distribución esférica del gas,  $mc^2 = \frac{4}{3}\pi a^3 c^2 \rho$ , resulta para  $dE$ :

$$dE = 4\pi\rho c^2 a^2 da + \frac{4}{3}\pi a^3 c^2 d\rho.$$

Si asumimos  $dS = 0$  (expansión adiabática y reversible) y tomando  $V = \frac{4}{3}\pi a^3$  en (1.13), obtenemos

$$4\pi\rho c^2 a^2 da + \frac{4}{3}\pi a^3 c^2 d\rho + p(4\pi a^2 da) = 0$$

y reagrupando términos tenemos la ec. del Fluido.

$$\boxed{\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a} \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0,} \quad (1.14)$$

la cual dice como cambia la densidad en el sistema, que puede ser por:

- La expansión dada por el término  $\frac{\dot{a}}{a}$ .
- La energía invertida por el fluido al producir expansión mediante una presión  $p$ .

### 1.3.3. Ecuación de la Aceleración

Para obtener esta ecuación partimos de la ecuación de Friedmann (1.12) y se deriva respecto al tiempo (donde solamente  $a$  y  $\rho$  dependen de él):

$$2\frac{\dot{a}}{a} \left( \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = \frac{8}{3}\pi G\dot{\rho} + \frac{2kc^2\dot{a}}{a^3}$$

Usando la ecuación del fluido (1.14), tenemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -4\pi G \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) + \frac{kc^2}{a^2}$$

y sustituyendo la ec. de Friedmann (1.12)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a^2} - 4\pi G \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) + \frac{kc^2}{a^2}$$

resulta la ecuación de la Aceleración

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + 3\frac{p}{c^2} \right)}, \quad (1.15)$$

de este resultado podemos establecer varias conclusiones

1. La aceleración no depende de la curvatura  $k$ .
2. La aceleración es negativa excepto si  $\left( \rho + 3\frac{p}{c^2} \right) < 0$ , en este caso  $\ddot{a} > 0$  y la expansión del universo se acelera. En este caso se debe satisfacer  $p < -\frac{1}{3}\rho c^2$ .

La pregunta que surge es **¿Cómo podemos obtener una presión negativa?**

Para esto existen varios candidatos teóricos,

1. La constante cosmológica.
2. Campos escalares  $\phi$ .
3. Gas de paredes (defectos topológicos).
4. Otros modelos.

## 1.4. Evolución y Geometría del Universo

La pregunta de la cantidad de materia en el universo observable y la geometría correspondiente a partir de la relación entre ambas, es cuestión fundamental en cosmología.

Si se piensa que el universo está constituido por diferentes especies de materia (ó fluido), podemos definir de la proporción de cada una de ellas a una densidad estándar  $\rho_c$  llamada densidad crítica que enseguida definiremos.

Parámetro de densidad:

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c} \quad (1.16)$$

donde  $\rho_c$  es la densidad del espacio plano ( $k=0$ ).

$$H = \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc}{a^2}$$

si  $k=0$

$$\rho_c = \frac{3H}{8\pi G} \quad (1.17)$$

El parámetro total de densidad total  $\Omega_T = \sum \Omega_i$  y si el universo es plano entonces

$$\Omega = \frac{\sum \rho_i}{\rho_c} = \frac{\rho_c}{\rho_c} = 1 \quad (1.18)$$

La curvatura  $k$  que aparece en la ecuación de Friedmann 1.12, puede tomar 3 valores (números de vectores de Killing) que se asocian distintas geometrías: plana, abierta y cerrada. Enseguida discutimos estos casos.

### 1.4.1. Universo Plano

En el universo es plano  $k=0$  y  $\rho = \rho_c$ , y tendrá la geometría de la figura (1.12). La gravedad y la expansión estarán en equilibrio. El Universo se expandirá, pero cada vez más despacio.

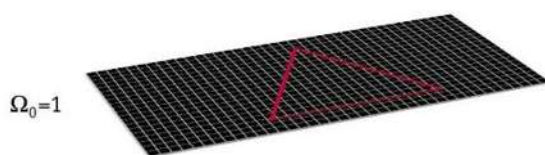


Figura 1.12: Geometría de un universo plano. Fuente [2]

Ahora calculemos como se comportaría este universo con *materia no relativista*, empecemos con recordar que para materia no relativista  $p = 0$  y por universo plano  $k = 0$ . Sustituyendo estos valores en la ecuación del fluido(1.14) tenemos

$$\dot{\rho}_m = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho_m$$

e integrando respecto al tiempo,  $\rho_m \approx a^{-3}$ , y sustituyendo esta densidad y los demás parámetros en la ecuación de Friedmann(1.12) obtenemos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{8\pi G}{3}\rho\left(\frac{a_0}{a}\right)^3$$

y así

$$\int \sqrt{a} da \approx dt$$

integrando obtenemos la expresión para el factor de escala de la materia no relativista en un universo plano

$$a_m \approx t^{\frac{2}{3}}. \tag{1.19}$$

Ahora calculemos la expresión para la densidad y el factor de escala para la radiación en un universo plano. Al igual que el caso anterior partiendo en la ecuación de fluido (1.14), pero ahora con la ecuación  $p = \frac{1}{3}\rho c^2$ , tenemos la nueva ec. de fluido

$$\dot{\rho}_r + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho_r + \frac{1}{3}\rho_r\right) = 0$$

despejando e integrando nos queda

$$\rho_r \approx \frac{1}{a^4} \tag{1.20}$$

donde en este término se tiene un factor adicional  $\frac{1}{a}$  debido a que con la expansión la longitud de onda crece, y así disminuye la frecuencia al igual que la energía.

Y sustituyendo este valor para la densidad y con  $k=0$  en la ec. de Friedmann, tenemos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \approx \frac{1}{a^4}$$

$$\int a^2 da \approx dt$$

e integrando nos queda que la ecuación del factor de escala para radiación respecto al tiempo es

$$a_r \approx t^{\frac{1}{2}}. \tag{1.21}$$

En el cuadro 1.1 se muestran los datos obtenidos para densidad y factor de escala para materia no relativista y radiación en un universo plano.

Tipo de materia	Densidad	Factor de escala
Materia no relativista	$\rho_m \approx \frac{1}{a^3}$	$a \approx t^{\frac{2}{3}}$
Radiación	$\rho_r \approx \frac{1}{a^4}$	$a \approx t^{\frac{1}{2}}$

Cuadro 1.1: Densidad y factor de escala para los tipos de materia en un universo plano.

En un universo con materia no relativista y radiación tenemos que estudiar varios casos, primero veremos que sucede si en el universo domina la radiación, es decir que el factor de escala es  $a = t^{\frac{1}{2}}$ , entonces tenemos que las densidades se comportan de la siguiente forma  $\rho_m \approx \frac{1}{a^3} \approx t^{-\frac{3}{2}}$  y  $\rho_r \approx \frac{1}{a^4} \approx t^{-2}$ , donde se nota que para un universo dominado por radiación la densidad de radiación decae mas rápido en el tiempo que la densidad de materia. Es decir que cuando domina la radiación, después de un tiempo dominará la materia no relativista.

Ahora si en el universo domina la materia no relativista, tenemos que  $a = t^{\frac{2}{3}}$  y sustituyendo en las ecuaciones de densidad tenemos que  $\rho_m \approx t^{-2}$  y  $\rho_r \approx t^{-\frac{8}{3}}$ . Donde la densidad de radiación  $\rho_r$  decae mas rápido que la de materia no relativista.

Es decir en un universo donde inicia dominando la materia no relativista, así se mantendrá siempre.

En la siguiente gráfica (1.13) se muestra visualmente el comportamiento de las densidades de materia en el tiempo, donde ( $x = a$ ), a factor de escala que cambia en el tiempo.

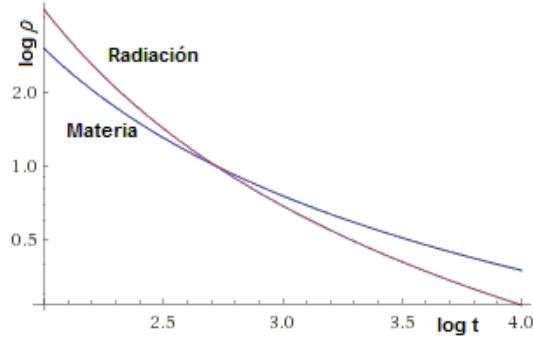


Figura 1.13: Evolución Materia no relativista y Radiación, donde el valor  $\log t \approx 2.7 \sim t \approx 300000$  años. *Realizó Reyes Manuel García García.*

### 1.4.2. Universo Abierto

Un universo es abierto si la densidad de materia y energía es muy baja en relación a  $\rho_c$ , el Universo se curvará hacia afuera, es decir es aquel cuyo destino es expandirse siempre. En un universo abierto, la energía cinética de expansión siempre es mayor que la energía gravitacional, y el valor de  $\Omega$  siempre es inferior a 1, pues la densidad crítica es mayor que la densidad del sistema y su geometría se representa como la figura (1.14).

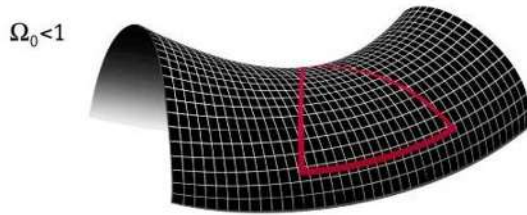


Figura 1.14: Geometría de un Universo Abierto. Fuente [2]

Los universos abiertos tienen la geometría de una superficie curva infinita con el mismo grado de curvatura en cada punto y a diferencia del universo plano su velocidad de expansión no disminuye con el tiempo sino que crece y crece. La gravedad será tan débil que no podrá haber estrellas, ni planetas, ni siquiera átomos. La materia se separará y se desintegrará hasta quedar reducida a partículas elementales. El Universo se enfriará y morirá. Este final se llama *Big Chill*.

En este universo la curvatura  $k < 0$ , por lo que si se toma la ecuación de Friedmann se tiene que los dos términos de la derecha serán positivos por lo que  $\frac{\dot{a}}{a} > 0$ , lo que nos

dice que el factor de escala  $a(t)$  crecerá siempre. De modo que si  $\rho \approx \rho_m$ , tenemos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3a^3}C_1 - \frac{kc^2}{a^2}$$

con  $C_1 = \rho_m a^3$  y donde el segundo término decae mas lento así que en un tiempo  $t$ , dominará siempre, entonces

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \approx -\frac{kc^2}{a^2},$$

donde integrando tendremos que  $a \approx t$  lo cual nos dice que un universo abierto se expande de manera constante ( $\dot{a} = cte$ ).

Como se vió aquí la velocidad es constante y si se recuerdan los cálculos de un universo plano, se tiene que si  $t \rightarrow \infty$  entonces para universo plano  $\dot{a} \approx \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}} \rightarrow 0$ .

### 1.4.3. Universo Cerrado

Un universo es cerrado si hay demasiada materia y energía ( $\rho > \rho_c$ ). El Universo se curvará hacia dentro y tendrá forma de esfera. Será un Universo finito. La gravedad será más fuerte que la expansión, toda la materia acabará agrupándose y el Universo colapsará. Este final se denomina Big Crunch.

En este universo  $k > 0$ , por lo que se tiene que la ec. de Friedmann (1.12) tiene un término negativo y otro positivo,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3a^3}C_1 - \frac{kc^2}{a^2},$$

donde el primer término es positivo y el segundo negativo, entonces cuando el primer término domina se tiene que  $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 > 0$ , es decir se expande el universo en este tiempo, después se igualan los términos tal que  $\dot{a} = 0$ , es decir no hay expansión, pero como el denominador del segundo término será menor siempre entonces después de un tiempo el segundo término dominará, por lo que  $\dot{a} < 0$ , lo cual dice que después de la expansión vendrá una contracción, es decir una aceleración negativa.

En la figura (1.15) se muestra la geometría del universo cerrado.

En el siguiente gráfico (1.16), se muestra las 3 curvas correspondientes a universo plano, cerrado y abierto.

## 1.5. Velocidad de Escape y Velocidad Terminal

Se puede plantear una analogía de los tres casos de curvatura con la velocidad de escape y la velocidad terminal. **La velocidad de escape** es la velocidad mínima con la que debe lanzarse un cuerpo para que escape de la atracción gravitatoria de la Tierra

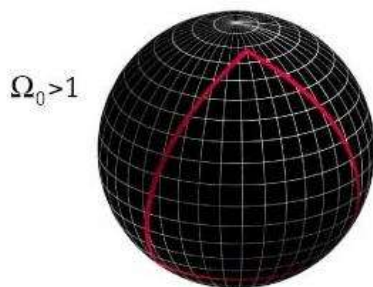


Figura 1.15: Geometría de un universo cerrado. Fuente [2]

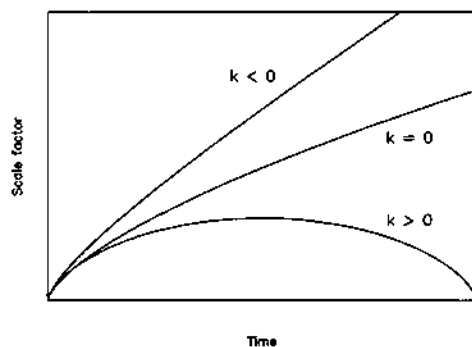


Figura 1.16: Gráfica de Universos Plano, Abierto y Cerrado. Fuente [1]

o de cualquier otro astro de forma que, al escapar de su influjo, la velocidad del cuerpo sea 0. Esto significa que el cuerpo o proyectil no volverá a caer sobre la Tierra o astro de partida, quedando en reposo a una distancia suficientemente grande (en principio, infinita) de la Tierra o del astro.

Una forma muy sencilla de deducir la fórmula de la velocidad de escape es tomar en cuenta la conservación de la energía, en un sistema en el que el proyectil está en la superficie y parte de una velocidad inicial, tenemos

$$E_i = 0 + \frac{mv_e^2}{2}$$

y el valor final

$$E_f = 0 - \left[ -\frac{GMm}{R} \right]$$

donde  $R$  es el radio del astro celeste,  $M$  su masa,  $m$  la masa del proyectil,  $v$  la velocidad del proyectil y  $G$  la constante de gravitación. Usando la conservación de la energía tenemos que

$$\frac{GMm}{R} - \frac{mv_e^2}{2} = 0$$



de donde

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (1.22)$$

Podemos encontrar la similitud de la gráfica de velocidad contra altura (1.17) con la gráfica (1.16), que nos explica el comportamiento de el universo dependiendo su geometría.

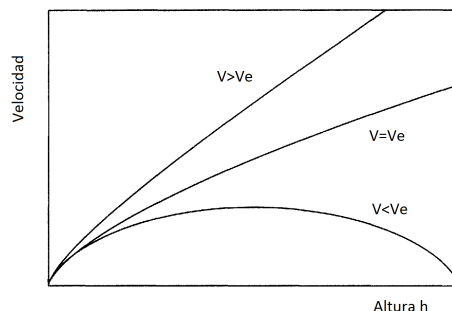


Figura 1.17: Velocidad de Escape. *Realizó Reyes Manuel García García.*

**La velocidad terminal** es la velocidad máxima que alcanzaría un cuerpo moviéndose en el seno de un fluido infinito bajo la acción de una fuerza constante. Un ejemplo es el caso de la velocidad límite alcanzada por un paracaidista en caída libre que cae desde suficiente altura.

Para su deducción suponemos una partícula moviéndose en un medio resistivo, que tiene una fuerza  $F = -mg - \alpha v = m \frac{dv}{dt}$  con el segundo término negativo pues es en sentido opuesto a la fuerza y  $\alpha$  depende de el medio en el que se mueve. La cual se reescribe

$$\frac{m dv}{-mg - \alpha v} = dt$$

donde  $y = -mg - \alpha v$ , se integra desde una posición inicial hasta una final y tenemos

$$t = \frac{m}{\alpha} \ln \left( \frac{mg + \alpha v}{mg + \alpha v_0} \right)$$

aplicando exponencial a cada lado y reagrupando

$$\frac{\left[ (mg + \alpha v_0) e^{-\frac{t\alpha}{m}} - mg \right]}{\alpha} = v$$

donde el primer término decae con el tiempo y el segundo permanece constante, por lo que obtenemos que la velocidad terminal es

$$V_T = \frac{mg}{\alpha}, \quad (1.23)$$

la cual es la velocidad máxima o límite a la que se moverá un objeto en un medio infinito que se opone al movimiento. Este comportamiento se asemeja a la expansión de un universo plano, en el que el factor de escala  $a(t)$  tiende a constante.

### 1.6. Corrimiento al Rojo y Ley de Hubble

Como se mencionó anteriormente, en 1929 el astrónomo E. Hubble postuló que el universo se expandía, de modo que cada galaxia se aleja de nosotros a una velocidad proporcional a la distancia. Cuanto más alejado, tanto más débil es el brillo de la galaxia y mayor es su velocidad de alejamiento. Una imagen en la que se puede ver el proceso de la expansión, es el movimiento las partículas de polvo en un globo inflándose, donde cada partícula sería una galaxia. Note la dificultad de encontrar un centro entre todas esas partículas.

La velocidad de la galaxia se obtiene a través de su espectro de radiación (relacionada a los componentes químicos presente), de manera que si la galaxia se aleja, las líneas se desplazarán hacia la zona de longitudes largas identificado por el color rojo, a este fenómeno se le conoce como *corrimiento al rojo*.

En este caso si ésta se acercara, el espectro se moverá a la zona azul (longitudes de onda cortas). Esto se muestra en la figura 1.18.



Figura 1.18: Corrimiento al rojo y azul. Tomando la órbita de una estrella, donde por un lado se aleja (corrimiento al rojo) y la longitud de onda crece, mientras que por el otro se acerca (corrimiento al azul) y la longitud de onda decrece. Fuente [14].

Imaginemos que se observa una fuente que está en movimiento respecto a nosotros a una velocidad  $v$ , sabemos que la luz sufre un cambio en su frecuencia (efecto Doppler relativista) dado por:

$$\nu = \nu' \left(1 - \frac{v}{c}\right), \quad (1.24)$$

donde  $\nu$  es frecuencia la observada,  $\nu'$  es la frecuencia emitida por la fuente,  $v$  es la velocidad de la fuente y  $c$  la velocidad de la luz. Notemos que  $\nu < \nu'$ , y sustituyendo  $\nu = \frac{c}{\lambda}$  la ecuación (1.24) se reescribe como

$$\lambda' = \lambda \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

se ve que  $\lambda > \lambda'$ . se puede escribir

$$\lambda = \lambda' \left(1 - \frac{v}{c}\right)^{-1}$$

y expandir

$$\left(1 - \frac{v}{c}\right)^{-1} = 1 + \frac{v}{c} + O\left[\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]$$

si se ignoran los términos cuadráticos, se tienen

$$\lambda = \lambda' + \frac{\lambda'v}{c}$$

entonces

$$\frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'} = \frac{v}{c}$$

y así se encuentra la función  $z$ , llamada *corrimiento al rojo*

$$z = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda'}. \tag{1.25}$$

Esto permite calcular la velocidad de la fuente: La forma de calcular la velocidad con la que se aleja una galaxia es usar las ondas de observación y calcular con el corrimiento del hidrógeno la longitud con la que sale, y así usar que

$$(z + 1)^2 = \frac{1 + \beta}{1 - \beta},$$

donde  $\beta = \frac{v}{c}$ . Usando

$$\lambda_{observada} = (c + v)T_0\gamma = \frac{(c + v)\lambda_{fuente}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\frac{\lambda_{observada}}{\lambda_{fuente}} = \sqrt{\frac{(1 + v/c)(1 + v/c)}{(1 + v/c)(1 - v/c)}} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

Así con  $z = \Delta\lambda/\lambda$  y con  $1 + z = \sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)}$ , obtenemos el valor de  $\beta < 1$ , tal que se tiene que la velocidad con la que se aleja una galaxia es  $v = \beta c$ .

## CAPÍTULO 1. COSMOLOGÍA ESTÁNDAR

---

Ahora recordando la Ley de Hubble  $\vec{v} = H\vec{r}$ , donde  $v, \vec{v} = \frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\vec{r}}\vec{r}$  y como  $\dot{\vec{r}} = \dot{a}\vec{x}$  entonces

$$\vec{v} = \frac{\dot{a}|x|}{a|x|}\vec{r} = H\vec{r} \quad (1.26)$$

lo cual dice que

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.27)$$

En cosmología la ley de Hubble se escribe tomando en cuenta el corrimiento al rojo

$$cz = H_0 D \quad (1.28)$$

donde  $z$  es el corrimiento al rojo,  $D$  es la distancia entre la fuente y observador,  $c$  es la velocidad de la luz y  $H_0$  es el parámetro de Hubble en la actualidad. Esta ecuación muchas veces es confundida con la relación entre velocidad y distancia  $V = HD$ .

La Ley de Hubble es la única que produce expansión homologa que no cambia la forma de las estructuras en el universo y es compatible con una visión Copernicana que dice que nuestra posición en el universo no es de particular importancia.

Cualquier observador en el universo verá el mismo tipo de ley ante la expansión del universo (Principio Cosmológico) como en la figura 1.3.

# Campos Escalares en Cosmología

## 2.1. Campos en Física

Un campo, en sentido físico, es una magnitud definida en un cierto espacio y que se puede expresar analíticamente como una función de las coordenadas espaciales y del tiempo. Si la magnitud es escalar, se tiene un campo escalar, y si la magnitud es vectorial, se tiene un campo vectorial.

Los campos pueden ser:

- **Campos estacionarios**, cuando únicamente dependen de las coordenadas espaciales y no dependen del tiempo.
- **Campos no estacionarios**, cuando dependen del tiempo.
- Los campos pueden ser **uniformes**, si no dependen de las coordenadas espaciales, es decir, si su valor (módulo, dirección y sentido) es el mismo en todos los puntos y **no uniformes**.

### Campos escalares, vectoriales y tensoriales

Una clasificación posible atendiendo a la forma matemática de los campos es:

- \* *Campo escalar*: aquel en el que cada punto del espacio lleva asociada una magnitud escalar (campo de temperaturas de un sólido, campo de presiones atmosféricas).
- \* *Campo vectorial*: aquel en que cada punto del espacio lleva asociado una magnitud vectorial (campos de fuerzas).
- \* *Campo tensorial*: aquel en que cada punto del espacio lleva asociado un tensor (campo electromagnético en electrodinámica clásica, campo gravitatorio en teoría de la relatividad general, campo de tensiones de un sólido).
- \* *Campo espinorial*: un campo que generaliza al tipo anterior y que aparece sólo en mecánica cuántica y teoría cuántica de campos.

## CAPÍTULO 2. CAMPOS ESCALARES EN COSMOLOGÍA

---

### Propiedades de campos escalares y vectoriales

Dado un campo físico es común definir, según el tipo de campo algunas de las siguientes características de dicho campo:

- a) *Intensidad*, que puede definirse localmente dada una región arbitrariamente pequeña, puede definirse la intensidad del campo, como un escalar formado a partir de las componentes tensoriales del campo. Cuanto mayor es dicha intensidad mayor el efecto físico o la perturbación que el campo ocasiona en una determinada región.
- b) *Flujo*, que sólo puede definirse sobre una superficie, por lo que el flujo de un campo a través de una superficie depende tanto del campo como de la superficie escogida y por tanto no es una propiedad intrínseca del campo a diferencia de la intensidad.

Según el tipo de campo físico pueden definirse otros campos derivados como operadores diferenciales sobre las componentes del campo original, los tipos de operaciones usadas para definir estos otros campos derivados son:

1. Potencial escalar, definible para campos vectoriales irrotacionales, es decir, cuyo rotacional es nulo en una región simplemente conexa.
2. Potencial vectorial, definible para campos vectoriales solenoidales.
3. Gradiente, definible para un campo escalar cualquiera.
4. Rotacional, definible para cualquier campo vectorial, es otro campo vectorial derivado del primero.
5. Divergencia, definible para cualquier campo vectorial, es un campo escalar derivado del campo vectorial.

### 2.1.1. Campos Escalares

En física se habla de un campo cuando se tiene una magnitud física que toma valores en cada punto del espacio. Así que cuando se dice campo no es más que una propiedad que toma distintos valores en cada punto del espacio-tiempo.

Cuando se habla de un campo escalar a lo que se está refiriendo es a una magnitud que viene completamente definida por un número (y sus unidades). Es decir, no tiene ni dirección ni sentido.

En física teórica, especialmente en cuántica de campos, los campos escalares representan campos físicos cuyas excitaciones son partículas de espín 0.

Estos campos aparecen por todos sitios en física, en teoría de cuerdas, en teorías de Gran Unificación, en teorías supersimétricas, en teorías con dimensiones extra de tamaño variable, en reducciones de simetría, etc. además, se considera que la forma más simple de producir inflación es por la presencia de un campo escalar.

### La energía potencial de un campo escalar

Por el hecho de tener un campo en el espacio y debido a los valores que tome dicho campo este adquiere una energía de tipo potencial. Esta energía es fundamental para entender el comportamiento del campo. Se representa el campo por  $\phi$  y la energía por tener un valor dado  $V(\phi)$ .

En física se ha aprendido que los sistemas tienden a su mínimo de energía. La parte curiosa es que para determinados potenciales de un campo escalar aparecen más de un mínimo o distintos mínimos locales (como se verá en la propuesta de Guth (3.3.2)).

## 2.2. Tensor de Energía-Momento

Las ecuaciones de campo de Einstein relacionan la presencia de materia con la curvatura del espacio-tiempo. Más exactamente cuanto mayor sea la concentración de materia, representada por el tensor de energía-impulso, tanto mayores serán las componentes del tensor de curvatura de Ricci. Para cada punto del espacio-tiempo, la ecuación del campo de Einstein describe cómo el espacio-tiempo se curva por la materia y tiene la forma de una igualdad local entre un tensor de curvatura para el punto y un tensor que describe la distribución de materia alrededor del punto:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de curvatura de Einstein que se forma a partir de segundas derivadas del tensor métrico <sup>1</sup>  $g_{\mu\nu}$ ,  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía momento,  $c$  la velocidad de la luz y  $G$  la constante de la gravitación universal. El tensor de energía momento esta dado por

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.2)$$

usando álgebra tensorial podemos llegar a la ecuación

$$T_{\beta}^{\alpha} = g^{\alpha\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\beta} - g_{\beta}^{\alpha} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} + V(\phi) \right]. \quad (2.3)$$

## 2.3. Mecánica Lagrangiana

La mecánica lagrangiana es una reformulación de la mecánica clásica introducida por Joseph Louis Lagrange en 1788. En la mecánica lagrangiana, la trayectoria de un objeto es obtenida encontrando la trayectoria que minimiza la acción, que es la integral del lagrangiano en el tiempo; siendo éste la energía cinética del objeto menos la energía potencial del mismo.

La formulación lagrangiana simplifica considerablemente muchos problemas físicos. Por ejemplo, los sistemas de referencia inerciales son tratados en pie de igualdad y a

---

<sup>1</sup>El tensor métrico es un tensor de rango 2 que se utiliza para definir conceptos métricos como distancia, ángulo y volumen en un espacio localmente euclídeo.

diferencia de las leyes de Newton la forma de las ecuaciones del movimiento no depende del sistema de referencia elegido.

### 2.3.1. Mecánica Lagrangiana para Partículas

Considerando la cantidad,

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt. \quad (2.4)$$

$S$  se llama la acción. Es una cantidad con las dimensiones de (Energía) $\times$ (Tiempo).  $S$  depende de  $L$ , y  $L$  a su vez depende de la función  $x(t)$  a través de  $L = T - V$ . Dada una función  $x(t)$ , se puede producir la cantidad de  $S$ . Sólo nos ocuparemos de una coordenada,  $x$ , por ahora. Integrales como la de (2.4) son llamados funcionales, y  $S$  a veces se denota por  $S[x(t)]$ . Depende de toda la función  $x(t)$ , y no sólo en un número de entrada, como una función  $f(t)$ .  $S$  puede ser pensado como una función de un número infinito de valores, o sea, todas las  $x(t)$  para  $t$  que van de  $t_1$  a  $t_2$ . Si no te gusta infinitos, se puede imaginar romper el intervalo de tiempo en, por decir, un millón de piezas, y volviendo a poner la integral por una suma discreta. Se plantea la siguiente pregunta: Considere una función  $x(t)$ , por  $t_1 \leq t \leq t_2$ , que tiene sus extremos fijos (es decir,  $x(t_1) = x_1$  y  $x(t_2) = x_2$ , donde  $x_1$  y  $x_2$  son dados), pero es de otra manera arbitraria. ¿Qué función  $x(t)$  se obtiene un valor estacionario de  $S$ ? Un estacionario valor es un mínimo local, máximo o punto silla. Por ejemplo, considere un balón en tierra desde el reposo, y considerar la función  $y(t)$  para  $0 \leq t \leq 1$ . Suponemos que de alguna manera sabemos que  $y(0) = 0$  e  $y(1) = -g/2$ . Un número de posibilidades para  $y(t)$  se muestran en la Fig. 2.1, y cada uno de ellos puede (en teoría) estar conectado a  $L = T - V$  y a la ec. 2.4 a generar  $S$ . ¿Cuál valor estacionario se obtiene de  $S$ ?

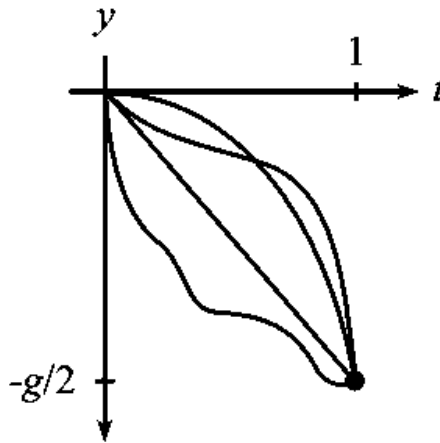


Figura 2.1: Posibles caminos entre 2 puntos.



El siguiente teorema da la respuesta.

**Teorema:** Si la función  $x_0(t)$  obtiene un valor estacionario (es decir, un mínimo local, máximo, o punto de silla) de  $S$ , entonces

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_0}. \quad (2.5)$$

Se entiende que se está considerando la clase de funciones cuyos extremos son fijos. Es decir,  $x(t_1) = x_1$  y  $x(t_2) = x_2$ .

**Demostración:** Se utilizará el hecho de que si una función determinada  $x_0(t)$  se obtiene un valor fijo de  $S$ , entonces cualquier otra función muy cerca de  $x_0(t)$  (con los mismos valores de punto final) produce esencialmente el mismo  $S$ , hasta el primer orden en cualquier desviación. Esto es en realidad la definición de un valor estacionario. La analogía con las funciones regulares es que si  $f(b)$  es un valor fijo de  $f$ , entonces  $f(b + \epsilon)$  difiere de  $f(b)$  solamente en segundo orden en la pequeña cantidad  $\epsilon$ . Esto es cierto porque  $f'(b) = 0$ , lo que indica que no hay término de primer orden en el desarrollo en serie de Taylor en torno  $b$ .

Suponga que la función  $x_0(t)$  se obtiene un valor fijo de  $S$ , y considerar la función

$$x_a(t) \equiv x_0(t) + a\beta(t), \quad (2.6)$$

donde  $a$  es un número, y donde  $\beta(t)$  satisface  $\beta(t_1) = \beta(t_2) = 0$  (para mantener los criterios de valoración de la función fija), pero es de otra manera arbitraria. Cuando se produce la acción  $S[x_a(t)]$  en (2.4), la  $t$  se integra a cabo, por lo que  $S$  es sólo un número. Depende de  $a$ , además de  $t_1$  y  $t_2$ . Su requisito es que no haya algún cambio en  $S$  en un primer orden en  $a$ . ¿Cómo  $S$  depende de  $a$ ? Utilizando la regla de la cadena, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} S[x_a(t)] &= \frac{\partial}{\partial a} \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial a} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x_a} \frac{\partial x_a}{\partial a} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \frac{\partial \dot{x}_a}{\partial a} \right) dt. \end{aligned}$$

En otras palabras, las influencias de  $a$  sobre  $S$  a través de su efecto sobre  $x$ , y también  $a$  a través de su efecto sobre  $\dot{x}$ . De ec. (2.6), tenemos

$$\frac{\partial x_a}{\partial a} = \beta, \quad \text{y} \quad \frac{\partial \dot{x}_a}{\partial a} = \dot{\beta}, \quad (2.7)$$

de manera que (2.3.1) se convierte

$$\frac{\partial}{\partial a} S[x_a(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x_a} \beta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \dot{\beta} \right) dt. \quad (2.8)$$

## CAPÍTULO 2. CAMPOS ESCALARES EN COSMOLOGÍA

---

Ahora viene una parte solapada de la prueba. Se integra el segundo término por partes. Tenemos

$$\int \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \dot{\beta} dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \beta - \int \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \right) \beta dt, \quad (2.9)$$

la ec. 2.8 se convierte

$$\frac{\partial}{\partial a} S[x_a(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \right) \beta dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \beta \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (2.10)$$

Pero  $\beta(t_1) = \beta(t_2) = 0$ , por lo que el último término se anula. Ahora se usa el hecho de que  $(\partial/\partial a)S[x_a(t)]$  debe ser cero para cualquier función  $\beta(t)$ , ya que se está suponiendo que  $x_0(t)$  se obtiene un valor estacionario. La única forma en que esto puede ser cierto es que si la cantidad en paréntesis de 2.10 (evaluada en  $a = 0$ ) es idénticamente igual a cero, es decir,

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} = \frac{\partial L}{\partial x_0}}, \quad (2.11)$$

que es la ecuación de Euler-Lagrange para el caso de partículas.

### 2.3.2. Mecánica Lagrangiana para Campos Escalares

Ahora si suponemos que en vez de un sistema fijo de números finitos de grados de libertad, tenemos un medio continuo. Este sistema viene descrito por un campo  $\phi(x)$ , tal que

$$q_i(t) \Rightarrow \phi(t, x) = \phi(x) \quad (2.12)$$

y su dinámica por un lagrangiano,  $\mathcal{L} = \int d^3x L(\phi, \partial_\mu \phi)$ . La acción  $S$  se escribe

$$S = \int dt \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (2.13)$$

aplicando el principio de mínima acción

$$\delta S = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right] = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] \delta \phi = 0$$

donde la condición de contorno ahora no es que  $q_i(t_{in})$  y  $q_i(t_{fi})$  fijos sino que los campos permanecen constantes en el infinito

$$\int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) = \int d^4x \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] - \int d^4x \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi,$$

usando el Teorema de Stokes donde  $\partial V$  es la superficie del Volumen  $V$  tenemos que

$$\int_V d^4x \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right] = \int_{\partial V} dA \eta_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right],$$

donde  $\eta_\mu$  es el vector normal a la superficie y la condición  $\delta\phi|_{\partial V}$ , así tenemos

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0,} \quad (2.14)$$

que es la Ecuación de Euler-Lagrange para el campo escalar  $\phi$ .

## 2.4. Ecuaciones para un Campo Escalar

### 2.4.1. Ecuaciones de Presión y Densidad para Campos Escalares Homogéneos

En general un campo escalar depende del tiempo y de la posición, y se puede escribir como

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi^0(t) + \delta\phi(\vec{x}, t)$$

donde el primer término corresponde a la parte homogénea de  $\phi$ , es decir donde el campo tiene el mismo valor en el espacio, y el segundo término corresponde a pequeñas fluctuaciones espaciales.

Considerando solo la parte homogénea, el primer término del Tensor de Energía-Momento (2.3), usando álgebra tensorial tenemos

$$\begin{aligned} g^{\alpha\nu} \partial_\nu \phi \partial_\beta \phi &= g^{\alpha\nu} \partial_\nu \phi g_\beta^\mu \partial_\mu \phi \\ &= g^{\alpha\nu} g_\beta^\mu \partial_\nu \phi \partial_\mu \phi \end{aligned}$$

con  $\mu = 0 = \nu$

$$g^{\alpha\nu} \partial_\nu \phi \partial_\beta \phi = g^{\alpha 0} g_\beta^0 (\partial_0 \phi)^2$$

y como  $g^{\alpha\nu} = g_\lambda^\alpha g^{\lambda\nu}$  cuando  $\nu = 0$

$$g^{\alpha 0} = g_\lambda^\alpha g^{\lambda 0} = g_0^\alpha g^{00}$$

tomando en cuenta que la métrica en su diagonal es  $(-1, 1, 1, 1)$ ,  $g^{00} = -1$ , y así el primer término resulta ser:

$$-g_\beta^0 g_0^\alpha (\partial_0 \phi)^2$$

entonces el segundo término queda

$$\frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 \phi)^2 = -\frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2$$

así el Tensor Energía-Momento esta dado como

$$\boxed{T_\beta^\alpha = -g_0^\alpha g_\beta^0 (\partial_0 \phi)^2 - g_\beta^\alpha \left[ -\frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 + V(\phi) \right]} \quad (2.15)$$

si se toma la matriz del Tensor  $T_\beta^\alpha$  como

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

entonces, sustituyendo en (2.15), para  $T_0^0$

$$\begin{aligned} \rho &= g_0^0 g_0^0 \left( \frac{d\phi}{dt} \right) + g_0^0 \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + V(\phi) \right] \\ &= \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + V(\phi) \end{aligned}$$

finalmente obtenemos que la expresión para la densidad esta dada por

$$\boxed{\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + V(\phi)}, \quad (2.16)$$

así mismo se llega a que la ecuación para la presión es

$$\boxed{p = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 - V(\phi)}, \quad (2.17)$$

donde es claro que la presión puede ser negativa, esto si el potencial del campo  $V(\phi)$  es mayor que la energía cinética  $\frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2$ , y como sabemos una condición para la expansión se acelere es  $p < -\frac{1}{3}\rho$ , así que el campo escalar como mecanismo de expansión acelerada funciona.

## 2.4.2. Ecuación de Movimiento para Campos Escalares Homogéneos

### Método Euler-Lagrange

Tomando un campo escalar general  $\phi(\tilde{x}, t)$ , el lagrangiano es  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - \nabla\phi \cdot \nabla\phi) - V(\phi)$  que en tensores podemos escribirla como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) \quad (2.18)$$

con la métrica  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$  y  $diag(\eta) = (-1, 1, 1, 1)$ . Recordando las ecuaciones de Euler-Lagrange para campos (2.14) tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial\phi}(\mathcal{L}) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\mathcal{L}) \right) = 0,$$

sustituyendo (2.18)

$$-V'(\phi) - \ddot{\phi} + \nabla^2\phi = 0$$

que reescribiendo resulta que la ec. de movimiento para campos escalares sin tomar en cuenta la expansión del universo (sólo depende de  $t$ ) es:

$$\boxed{\ddot{\phi} - \nabla^2 \phi + V'(\phi) = 0.} \quad (2.19)$$

### Método Friedmann

Recordando la ecuación de Friedmann (1.12) con  $k = 0$  y la de Aceleración (1.15)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (2.20)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$$

sustituyendo  $\rho$  con la obtenida para campos escalares (2.16), pensando que en este tiempo la densidad del campo escalar fue el dominante

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right]$$

derivando respecto el tiempo, donde  $\phi(t)$

$$2 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \left[ \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right] = \frac{8\pi G}{3} \left[ \ddot{\phi} \dot{\phi} + V'(\phi) \dot{\phi} \right] \quad (2.21)$$

tomando solamente el lado izquierdo de la igualdad 2.21, y sustituyendo en esta expresión la ecuación para la Aceleración (1.15) y la ecuación de Friedmann con  $k = 0$  (2.20) obtenemos

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) \left[ \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right] &= 2H \left[ -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) - \frac{8\pi G}{3}\rho \right] \\ &= -\frac{8\pi G}{3}H(3p + 3\rho) \\ &= -8\pi GH(p + \rho) \end{aligned}$$

sustituyendo el valor para campos escalares de  $\rho$  (2.16) y  $p$  (2.17), este lado izquierdo de 2.21, es  $-8\pi G \dot{\phi}^2$ , retomando en (2.21) tenemos

$$-8\pi G \dot{\phi}^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[ \ddot{\phi} \dot{\phi} + V'(\phi) \dot{\phi} \right]$$

reacomodando términos obtenemos que la ec. de movimiento para campos escalares  $\phi(t)$  es

$$\boxed{\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0.} \quad (2.22)$$

### 2.4.3. Ecuaciones de Presión y Densidad para Campos Escalares Generales

Utilizando la métrica Friedmann-Robertson-Walker (FRW) dada como

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (2.23)$$

la acción del inflatón se lee

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + V(\phi) \right],$$

donde  $\sqrt{-g} = a^3$  para la métrica FRW. Con la ec. de Euler-Lagrange para campos (ec. 2.14) obtenemos

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{\nabla^2 \phi}{a^2} + V'(\phi).$$

Tomando el tensor de E-M como

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}$$

tomando la métrica FRW las ec. de densidad  $\rho$  y presión  $p$  se escriben como

$$T_{00} = \rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \frac{(\nabla\phi)^2}{2a^2} \quad (2.24)$$

$$T_{ii} = p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) - \frac{(\nabla\phi)^2}{6a^2}. \quad (2.25)$$

Nótese que, si el gradiente es dominante, obtenemos  $p_\phi = -\frac{\rho_\phi}{3}$ , que no conduce a una aceleración positiva necesaria para inflación (condición  $p < -\frac{\rho}{3}$ ). Donde vemos que la ec. de presión 2.25 a diferencia de la ec. 2.17, consta de un término que ayuda a presiones negativas, es el papel de las fluctuaciones cuánticas del campo. Si se toman estas fluctuaciones la ec. 2.25 se convierte en la ec. 2.17.

### 2.4.4. Ecuación de Movimiento para Campos Escalares Generales

Tomando la forma de lagrangiano para un campo escalar (2.18) con la métrica  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  y  $diag(\eta) = (-1, 1, 1, 1)$ , con expansión nuestra métrica sería  $ds^2 = \eta a^2 dx^\mu dx^\nu$  y la matriz dada por la métrica es

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

---

## CAPÍTULO 2. CAMPOS ESCALARES EN COSMOLOGÍA

---

con expansión la acción  $S$  queda como

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \rightarrow S = \int a^3 d^4x \mathcal{L},$$

donde  $a^3 = \sqrt{-g}$ , provee invarianza al elemento de volumen y  $g = \det(g_{\mu\nu})$  entonces

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \mathcal{L},$$

donde  $(-g)$  viene dado por el jacobiano del elemento de volumen.

Transformando coordenadas a esféricas  $d^3x \rightarrow JdRd\Theta d\phi$ , con  $J = R \sin\Theta$ , y tomando que  $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)$ , con expansión  $\tilde{\mathcal{L}} \rightarrow a^3\mathcal{L}$ , donde  $a$  es el factor de escala que depende sólo de  $t$ , por lo que escribimos

$$\tilde{\mathcal{L}} = a^3\mathcal{L} = a^3 \left( -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) \right)$$

y aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange para campos (2.14) tenemos

$$\frac{\partial}{\partial\phi}(a^3\mathcal{L}) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\phi)}(a^3\mathcal{L}) \right) = 0.$$

Ahora sustituyendo el lagrangiano (2.18) resulta

$$\begin{aligned} -a^3V'(\phi) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} a^3(\partial_0\phi - \partial_1\phi - \partial_2\phi - \partial_3\phi) &= 0 \\ -a^3V'(\phi) - \frac{\partial}{\partial x^0} a^3\partial_0\phi + a^3 \frac{\partial}{\partial x^1} \partial_1\phi + a^3 \frac{\partial}{\partial x^2} \partial_2\phi + a^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \partial_3\phi &= 0 \\ -a^3V'(\phi) + a^3\nabla^2\phi - a^3\ddot{\phi} - 3a^2\dot{a}\dot{\phi} &= 0 \end{aligned}$$

donde los subíndices corresponden a las coordenadas (en coordenadas rectangulares  $t = 0, x = 1, y = 2, z = 3$ ), reescribiendo tenemos que la ecuación de movimiento para un campo escalar en general esta dada por

$$\boxed{\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \nabla^2\phi + V'(\phi) = 0,} \quad (2.26)$$

donde  $H$  es el Parámetro de Hubble y  $V'(\phi)$  es la derivada del potencial respecto al campo. Se nota que el término con  $\dot{\phi}$  funciona como una fuerza de amortiguamiento debido a la expansión.





## Inflación Cosmológica

La idea de inflación fue propuesta en 1981 por Alan H. Guth como un mecanismo para resolver algunas paradojas cosmológicas que mencionaremos más adelante. Entre los precursores de esta idea destaca el trabajo de Willem de Sitter Universo inflacionario[15], llamado espacio de Sitter. De Sitter, sin embargo, no lo aplicó a ningún problema cosmológico que interesara Guth. Contemporáneo a Guth, Alexei Starobinsky[16] en Rusia argumentó que las correcciones cuánticas de la gravedad reemplazarían la singularidad inicial del Universo con un estado de expansión exponencial. Demosthenes Kazanas [17] anticipó parte del trabajo de Guth sugiriendo que la expansión exponencial podía eliminar el horizonte de partículas y tal vez resolver el problema del horizonte, y Sato[18] sugirió que una expansión exponencial podría eliminar las paredes de dominio (otro tipo de reliquia exótica). Sin embargo, Guth fue el primero en ensamblar una imagen completa de cómo todas estas condiciones iniciales se podían resolver mediante un estado de expansión exponencial.

Guth propuso que al enfriarse el universo temprano y producirse una transición de fase, este fue atrapado en un falso vacío con una densidad de energía alta, un estado metaestable que podía solo decaer a través del proceso de nucleación de burbujas vía el efecto de túnel cuántico. Las burbujas del vacío verdadero se forman espontáneamente en el mar de falso vacío y rápidamente empieza a expandirse a la velocidad de la luz. Guth reconoció que este modelo era problemático porque el modelo no recalentaba apropiadamente: cuando las burbujas nucleaban, no generaban ninguna radiación. La radiación sólo podía ser generada en colisiones entre muros de burbujas. Pero si la inflación duró lo suficiente como para solucionar los problemas de las condiciones iniciales, las colisiones entre las burbujas llegaron a ser excesivamente raras. (Incluso aunque las burbujas se expandan a la velocidad de la luz, las burbujas están lejos de que la expansión del espacio esté causando que la distancia entre ellos se expanda mucho más deprisa).

Este problema fue resuelto por Andréi Linde e independientemente por Andreas Albrecht y Paul Steinhardt[19] en un modelo llamado nueva inflación o inflación de

rodadura lenta (el modelo de Guth se conoció a partir de entonces como inflación antigua). En este modelo, en vez de hacer un túnel desde un estado de falso vacío, la inflación ocurrió por un campo escalar rodando hacia abajo de una montaña de energía potencial. Cuando el campo rueda muy lentamente comparado con la expansión del Universo, ocurre la inflación. Sin embargo, cuando la montaña se vuelve más empinada, la inflación termina y se puede dar el recalentamiento.

### 3.1. Motivación para Inflación

La inflación cosmológica surgió como un modelo para resolver los siguientes problemas cosmológicos:

- I **El Problema de la Planitud:** en este caso el parámetro que parece tener valores especiales es la densidad de materia y energía en el universo. Este valor afecta la curvatura del espacio-tiempo con un valor crítico muy específico requerido para la existencia de un universo plano. Se cree que la densidad actual del Universo es muy cercana a este valor crítico. Debido a que la densidad total se aleja del valor crítico con el paso del tiempo, el universo joven debió haber tenido una densidad aún más cercana a la densidad crítica, alejándose por una parte en  $10^{62}$  o menos. Esto llevó a los cosmólogos a preguntarse cómo llegó (la densidad inicial) a ser tan cercana a este *valor especial*.
- II **Problema del Horizonte:** es una dificultad de los modelos cosmológicos explicar la gran homogeneidad que el universo muestra a gran escala en la distribución de materia y radiación. Los datos empíricos muestran que nuestro universo es altamente uniforme y homogéneo, aun cuando está claro que debido a las grandes distancias no ha podido establecerse equilibrio térmico.
- III **Expansión Acelerada:** el problema es que no tenemos un mecanismo que nos proporcione una expansión acelerada como se observa en la actualidad.
- IV **Monopolos Magnéticos:** si el Universo primigenio estaba muy caliente, se produciría una serie de transiciones de fase que generarán un gran número de monopolos magnéticos estables y muy pesados. Este problema junto con la Teoría de la gran unificación, fueron populares en los años 1970 y los años 1980, que proponían que a altas temperaturas (como en el Universo primigenio) la fuerza electromagnética, las fuerzas nucleares fuerte y débil no son realmente fuerzas fundamentales pero aparecen debido a la ruptura espontánea de simetría de una teoría de norma.

¿Cómo puede la idea de inflación resolver estos problemas?

### 3.1.1. Problema de la Planitud

De la ecuación de Friedmann (1.12), vemos que si la curvatura es plana <sup>1</sup>  $k = 0$ , es solución inestable, el problema es que si ahora  $k$  es muy cercana a cero, en la antigüedad debió estar mucho más cerca.

El parámetro de densidad es  $\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_{crit}}$ , si  $k = 0 \Rightarrow H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{crit} \Rightarrow \rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}$ , si  $k \neq 0$ , con  $\rho_i = \rho_{crit}\Omega_i$  y unidades naturales  $c = 1$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{crit}\Omega_i - \frac{k}{a^2}$$

tomando  $\rho_{crit}$  para  $k = 0$

$$= H^2\Omega_i - \frac{k}{a^2}$$

$$\Rightarrow |\Omega_i - 1| = \frac{|k|}{a^2 H^2}, \quad (3.1)$$

donde tenemos que  $k = 0$  si y solo si  $\Omega_i = 1$ , esto significa que el espacio es plano.

Para el caso de radiación  $a = t^{\frac{1}{2}}$ , tenemos que  $a^2 H^2 \rightarrow t^{-1} \Rightarrow |\Omega - 1| \rightarrow t$ .

Para el caso de materia no relativista  $a = t^{\frac{2}{3}}$ , tenemos que  $a^2 H^2 \rightarrow t^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow |\Omega - 1| \rightarrow t^{\frac{2}{3}}$ .

Se ve como inflación te acerca al universo plano.

Tomando la ecuación de Friedmann con constante cosmológica (B.1), y asumiendo  $k = 0$  y  $\Omega_T = 1$ , ( $\Omega_T = \Omega_r + \Omega_m + \dots$ )

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{3}} \quad (3.2)$$

entonces

$$a = e^{Ht} \quad (3.3)$$

donde el factor de escala crece exponencialmente, se dice que la constante cosmológica  $\Lambda$  produce una super expansión. Sabiendo que inflación, fue una época de expansión muy acelerada, tenemos que

$$\ddot{a} > 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\dot{a} > 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(aH) > 0$$

por lo que  $aH$  crece en el tiempo. Recordando la condición espacio plano (3.1), tenemos que  $\Omega_T \sim 1$ , durante la super aceleración el parámetro de densidad ( $\Omega_T$ ) tiende a 1.

Usando el resultado del factor de escala para super expansión (3.3),

$$|\Omega_T - 1| = \frac{|k|}{H^2 e^{2Ht}} \approx e^{-\sqrt{\frac{4\Lambda}{3}}t} \quad (3.4)$$

lo cual nos dice que  $\Omega_T$  se acerca mucho y muy rápido a 1 durante la inflación.

Asumiendo que inflación termina en  $t \approx 10^{-34}s$ , que domina la radiación  $|\Omega_T - 1| \approx t$  y que hoy  $|\Omega_T(4x10^{17}s) - 1| \approx 0.1$

---

<sup>1</sup>Las imágenes del **Experimento Boomerang** indican que el universo es plano: existe justamente la densidad crítica para que el cosmos, en el infinito, frene su expansión, esto es que  $k \approx 0$ .

## CAPÍTULO 3. INFLACIÓN COSMOLÓGICA

---

1. Al término de inflación  $|\Omega_T(10^{-34}\text{s}) - 1| \leq 10^{-53}$  es decir  $\Omega_T$  estaba cerca de 1, con 53 cifras decimales.
2. Tomando  $|k|$  y  $H$  como constantes durante inflación, la ecuación (3.1) se convierte en

$$|\Omega_T - 1| \approx \frac{1}{a^2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} \approx 10^{-53} \Rightarrow a \approx 10^{27}$$

lo que significa que  $a$  creció  $10^{27}$  veces.

Como ejemplo un objeto de 1cm se expande a  $1 \times 10^{27}$ cm, mas grande aún que nuestra galaxia, todo en  $10^{-34}$ s.

En conclusión, la inflación resuelve el problema de la planitud, pues su super-expansión acerca lo suficiente a  $\Omega$  al 1, como para observar hoy un universo plano, aun cuando este sea un estado inestable, que se aleja del 1 con el paso del tiempo.

### 3.1.2. Problema del Horizonte

También llamado problema de la causalidad, resulta del hecho de que la información no puede viajar mas rápido que la velocidad de la luz, de manera que dos regiones en el espacio separadas por una distancia mayor que la velocidad de la luz multiplicada por la edad del universo no pueden estar causalmente conectadas como se muestra en la figura (3.1). En este sentido, la isotropía observada en la radiación cósmica de fondo en extremos opuestos del universo observable resulta problemática, debido a que estos puntos no habían estado en contacto térmico entre si, pues están separados una distancia mayor a la que ha recorrido un rayo de luz en el tiempo de vida del universo.

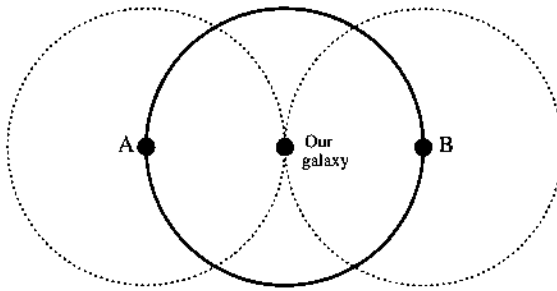


Figura 3.1: Problema del Horizonte. Fuente [1].

La inflación como vimos en el problema de planitud, para  $\ddot{a} > 0$ ,  $\frac{d}{dt}(aH) > 0$ , por lo que

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{aH} < 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{H^{-1}}{a} < 0 \quad (3.5)$$

## CAPÍTULO 3. INFLACIÓN COSMOLÓGICA

de aquí vemos que  $\frac{H^{-1}}{a}$  decrece y  $[H] = t^{-1}$  llamado tiempo de Hubble, entonces se denomina la longitud de Hubble  $[CH^{-1}] = L$  que es la distancia que viaja la luz en un tiempo de Hubble, nos dice el tiempo de vida del universo.

Tomando unidades naturales ( $c = 1$ ) la longitud de Hubble se convierte en el radio de Hubble

$$R_H = H^{-1}. \tag{3.6}$$

De aquí se llama al término  $\frac{H^{-1}}{a}$  Radio Comóvil de Hubble, el cual como vimos en la ec. (3.5) decrece durante la inflación.

En la figura (3.2) se muestra como cambió el Radio de Hubble durante la inflación.

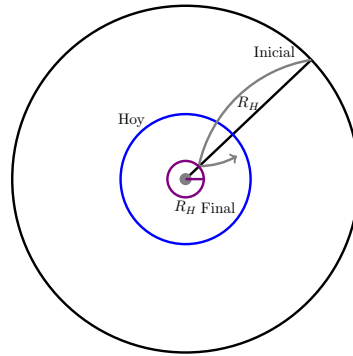


Figura 3.2: Radio de Hubble durante la Inflación. *Realizó Reyes Manuel García García.*

En términos de coordenadas comóviles el radio de Hubble durante la inflación se comporta como en la figura (3.3).

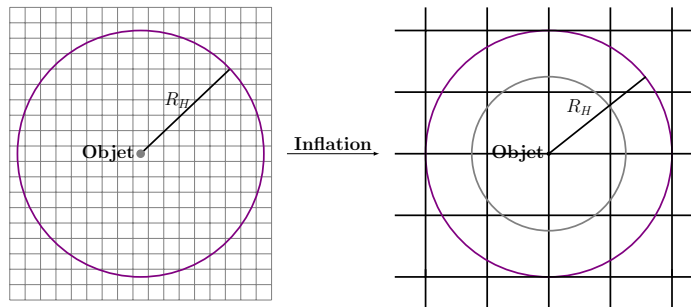


Figura 3.3: Radio de Hubble antes y después de la Inflación. *Realizó Reyes Manuel García García.*

Antes de la inflación dos objetos dentro del Radio de Hubble estaban en contacto térmico, pero con la inflación  $R_H$  disminuye por lo tanto, lo que vemos dentro del radio de Hubble en direcciones distintas, antes estuvo en contacto, de ahí que la Radiación Cómica de Fondo tenga la misma temperatura en todas direcciones. Y así Inflación resuelve el problema del horizonte.

### 3.1.3. Expansión Acelerada

Así como cuando un cuerpo se acelera por un momento y después se hace cero su aceleración, continuará en movimiento con aceleración constante, en la inflación sucede lo mismo. Siendo inflación una época de expansión muy acelerada, al término de la inflación el espacio continuaría expandiéndose. Sin embargo la expansión no se frena con fricción sino con la fuerza de gravedad entre galaxias y cúmulos. Esto haría que se frenara por completo si la densidad total fuera  $\rho_T \gg \rho_{crit}$ .

Este hecho se muestra en la figura 1.4, donde la parte que decae es causado por la desaceleración post-inflación, y la parte que crece es a lo que los cosmólogos le llaman Energía Oscura, un tipo de materia que hace que el universo se expanda aceleradamente, algunos modelos asumen a la constante cosmológica  $\Lambda$  como la energía oscura.

De esta manera Inflación resuelve el problema de la expansión en el universo, al considerar que ésta es un remanente de la super expansión producida por la inflación.

### 3.1.4. Monopolos Magnéticos

En 1931 estudiando la cuantización del electromagnetismo, Paul Dirac descubrió algo que otorgo importancia a los monopolos. Vio que teoría cuántica simétrica para la electricidad y el magnetismo, esto es que el magnetismo también tuviera su ‘carga magnética’ o monopolo, tenía como resultado que la carga eléctrica estaba cuantizada. De forma natural aparecía que la carga solo podría aparecer en múltiplos de una carga fundamental, como sabemos que ocurre en la naturaleza. Estas partículas hipotéticas de masa desconocida actuarían como solo polo norte o sur. Demostró que con solo que existiera un monopolo en el universo sería suficiente para que la carga estuviera cuantizada.

Según la teoría electromagnética que rige desde la estructura atómica hasta nuestros dispositivos electrónicos, existen las fuentes de campo eléctrico aisladas, las cargas. Pero el campo magnético es producido por cargas en movimiento. No hay carga magnética aislada, el campo magnético siempre va producido por un polo norte y un polo sur, no hay polos aislados.

Por otro lado, de la física de partículas sabemos que hay tres interacciones no gravitatorias. La electromagnética, la débil y la fuerte. La electromagnética es claro lo que es, la débil produce decaimientos espontáneos y la fuerte es la que une los quarks para formar protones y neutrones (además de otras partículas).

Se asume que dichas teorías podrían comportarse como una sola a muy alta temperaturas  $\sim M_{planck}$ . Es decir, todas estas interacciones han de venir descritas por una única teoría. Esto es lo que propone la unificación, proveer una teoría que explique por qué estas interacciones eran la misma en el universo temprano hoy día las vemos como tres interacciones distintas. Actualmente tenemos una teoría que unifica dos de ellas, la interacción electromagnética y la interacción débil, y se le llama la teoría electrodébil. Sin embargo, aún no tenemos una teoría definitiva de la unificación de la

teoría electrodébil con la fuerte, a tal hipotética teoría se la denomina teoría de gran unificación.

El caso es que inicialmente en una época tempranísima de la vida del universo se tenía una única interacción, la GUT. Pero cuando bajó la temperatura del universo las interacciones se separaron en la interacción fuerte y la electrodébil. Como subproducto de esto aparecen ciertas partículas que son de hecho monopolos magnéticos, además de producirse también estructuras llamadas defectos topológicos de los que hablaremos adelante.

Los monopolos serían muy pesados y numerosos. Pero eso significaría que tales partículas dominarían la evolución del universo, pudiendo incluso frenar su expansión y provocar el re-colapso del universo. El problema es que no vemos monopolos por ningún sitio. Y la pregunta es **¿Dónde están?**

Como vimos en el problema de planitud ec (3.1), el universo tiende a ser plano ( $\Omega = 1$ ) si la expansión es muy acelerada ( $\ddot{a} > 0$ ), por lo que la densidades de todo tipo de materia y radiación va a 0, pues estas densidades están dadas por  $\rho_i \approx \frac{1}{a^j}$  con  $j \geq 2$ .

La Teoría de Inflación sugiere que esta expansión muy acelerada surgió después de la ruptura de simetría, es decir ya que los monopolos se habían creado, así al suceder la inflación haría cero todas las densidades junto con la de monopolos. Cabe notar que si proponemos que la inflación fue antes de la ruptura de simetría, no funcionarían pues los monopolos seguirían existiendo.

Ahora, si todas las densidades con la inflación se hicieron cero, **¿como es que surgió la materia que vemos ahora?** y **¿por qué no se crearon nuevamente monopolos?**

Esta pregunta se resuelve en inflación al considerar que cuando el potencial del campo escalar oscila alrededor del mínimo, la energía de vacío en las oscilaciones es convertida en partículas de masas del orden de  $10^{14} \text{ GeV}$  que terminan decayendo en partículas más ligeras, recalentando el universo; es así que no vemos monopolos, pues estos decayeron en partículas mas ligeras al igual que toda la materia antes de inflación.

### 3.2. Constante Cosmológica $\Lambda$

Cuando Einstein formuló la teoría de la relatividad general, estaba convencido que el Universo era estático. Sin embargo, más tarde se dio cuenta que su teoría no lo permitía, debido a que toda la materia se atrae gravitacionalmente y por tanto en algún momento esto conduciría al colapso total del Universo. Para poder conseguir un Universo estático, él propuso un cambio en las ecuaciones, algo que después llamo el error más grande de su vida, y fue la introducción de una constante cosmológica  $\Lambda$ , la cual aparece en la ecuación de Friedmann como un término extra, dado por (B.1).

La constante cosmológica a veces se piensa como la densidad de energía del espacio “vacío”; en particular un posible origen en física cuántica es algún tipo de ‘energía del punto cero’, el cual se mantiene aún si no hay partículas presentes. De la misma

## CAPÍTULO 3. INFLACIÓN COSMOLÓGICA

---

forma que fue útil expresar la densidad como una fracción de la densidad crítica, es conveniente normalizar la constante cosmológica, definiendo

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}. \quad (3.7)$$

Repitiendo los mismos pasos para escribir la ecuación de Friedmann en la forma de la ecuación (1.12), se encuentra

$$\Omega + \Omega_\Lambda - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (3.8)$$

Las observaciones de las supernovas tipo Ia argumentan fuertemente en favor de la constante cosmológica como un buen candidato a energía oscura.

### 3.3. Problemas con Inflación

Con el tiempo se han desarrollado numerosas versiones del escenario inflacionario. No existe por tanto un modelo estándar para la inflación. Los modelos más simples tienen como mecanismo de expansión un campo escalar (el inflatón) que actuaba a modo de constante cosmológica cuando el universo tenía unos  $10^{-35}$  segundos de vida (la escala de energía corresponde a unos  $10^{16}$  GeV) y llevó a un aumento del factor de escala del universo en unos 30 órdenes de magnitud, permitiendo resolver el problema de la curvatura nula y el problema del horizonte. El modelo de expansión de un universo inflacionario dominado por la energía de vacío se acerca mucho a un universo de De Sitter donde la expansión es de tipo exponencial.

#### 3.3.1. Problema de la Salida Airosa

Este problema se refiere a que la inflación debe concluir de manera que el universo que resulta de ésta debe reproducir el que se observa en el pasado corresponde a una desaceleración y que pudo formar la estructura que ahora observamos.

#### 3.3.2. Problema de Guth

En el modelo original de Guth, del potencial  $V(\phi)$  el campo escalar  $\phi$  estaba situado en un mínimo. Sin embargo, a medida que el universo se enfriaba, el potencial evolucionaba con la temperatura de tal manera que el mínimo global se convertía en mínimo local creándose otro mínimo global.

El mínimo local representa un estado denominado de falso vacío y el nuevo mínimo global es verdadero vacío. En el nuevo estado, se crearon por efecto túnel<sup>2</sup> (línea discontinua en la figura 3.4) algunas regiones burbuja de verdadero vacío dentro del estado general de falso vacío.

---

<sup>2</sup>En mecánica cuántica, el efecto túnel es un fenómeno nanoscópico por el que una partícula viola los principios de la mecánica clásica penetrando una barrera de potencial o impedancia mayor que la energía cinética de la propia partícula.



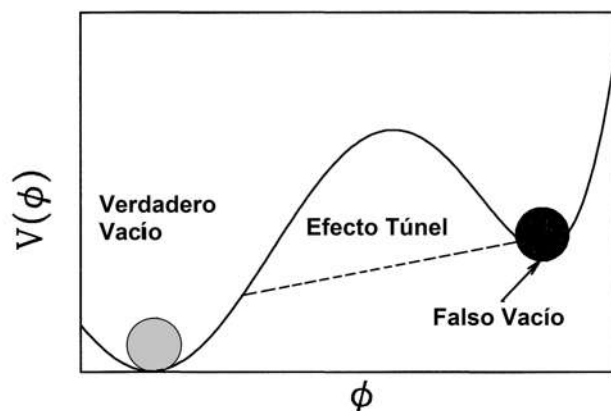


Figura 3.4: Efecto túnel Cuántico. Fuente [6]

El choque entre las burbujas crearía un recalentamiento del universo de donde aparecería toda la radiación y partículas elementales. Sin embargo, el propio Guth señalaría que este modelo crearía un universo demasiado poco homogéneo para ser compatible con las observaciones actuales; además, la idea de que el efecto túnel sucediera al mismo tiempo en todo el campo era muy improbable.

### 3.3.3. Problema de Inflación Eterna

La inflación cósmica parece ser eterna de la forma en la que es teorizada. Aunque la nueva inflación es clásicamente la rodadura hacia abajo del potencial, las fluctuaciones cuánticas pueden a veces hacer que vuelva a niveles anteriores. Estas regiones en las que el inflatón fluctúa ascendentemente se expande mucho más rápido que las regiones en que el inflatón tiene una energía potencial menor y tiende a dominar en términos de volumen físico. Este estado estacionario, fue desarrollado por primera vez por Vilenkin, se llama *inflación eterna*. Se ha demostrado que cualquier teoría inflacionaria con un potencial no acotado es eterna. Como nadie conoce el mecanismo inflacionario, siempre existe la posibilidad de que vuelva a producirse. La pregunta es: ¿Pueden ocurrir repetidamente las explosiones inflacionarias?; Fuera cual fuera el mecanismo que la produjo, ese mecanismo continúa en funcionamiento. Por lo tanto, es posible que otras regiones del universo estén experimentando el mismo fenómeno. El físico ruso Andréi Linde llama a esta teoría inflación eterna autoreproducida o inflación caótica, porque prevé un proceso interminable de inflación continua de universos paralelos. Lo que se llama convencionalmente “el universo” bien podría ser sólo un elemento de un conjunto o un multiverso.

### 3.3.4. Problema con Multiversos

Nuestro universo debe ser mucho más grande que el universo visible, la parte hasta la que podemos ver hoy. Si no se cumpliera el principio cosmológico a escala del

universo entero, podría haber regiones muy separadas de la nuestra e invisibles para nosotros donde las propiedades físicas fuesen diferentes. Esas regiones funcionarían como universos distintos, a pesar de compartir con nosotros el mismo espacio y tiempo global.

Considerando Inflación, quizá nosotros estamos en una burbuja dentro de un espacio mucho más amplio donde el proceso inflacionario duró mas, respecto de otras burbujas. Cada una de estas sería un universo como el nuestro, con propiedades y leyes físicas diferentes.

El problema de los multiverso es que nunca podremos saber si esta imagen es correcta puesto que estos otros universos siempre estarán fuera de nuestro radio de observación.

### 3.3.5. Problema de Inflación con Constante Cosmológica $\Lambda$

En este caso, el problema surge al notar que en la ecuación (3.4), la constante cosmológica funciona, pues produce una super aceleración haciendo que el parámetro de densidad  $\Omega$  se acerque a 1; Sin embargo, nuestro universo muestra que ésta tuvo un final, lo cual no sucedería con la constante cosmológica, como lo muestra ecuación para el parámetro de Hubble (3.2), el parámetro de Hubble depende sólo de la constante cosmológica, y como la expresión del factor de escala (3.3) depende sólo de  $H$ , entonces (3.4) se mantendrá constante y así la inflación no terminaría.

Desde el punto de vista de un campo escalar, y considerando que se necesita una presión negativa ( $p < -\frac{\rho}{3}$ ), por lo que para que inflación termine se debe tener un potencial variable, tal que primero sea mayor a la parte cinética y después menor (ecuación 2.17), pero un campo escalar con la constante cosmológica no variaría, y así se tendría una inflación eterna y no existiría estructura en el universo.

### 3.3.6. ¿Cuánta Inflación?

Un problema a la hora de intentar proponer un campo escalar como inflatón, es ver que esta expansión acelerada dure lo suficiente. Los cálculos de cuánta inflación dependen de la observación de la planitud. Como ya lo vimos esta condición es inestable, mientras pasa el tiempo mas se aleja ( $\Omega$ ) de 1.

Tomando en cuenta las observaciones y suponiendo que el final de inflación surgió en  $t \approx 10^{-34}s$ , resulta que si  $k$  y  $H$  son constantes durante inflación, el factor de escala creció  $10^{27}$  veces, por ejemplo, un centímetro creció por un factor de  $10^{27}$ cm durante inflación.

Ahora veremos si se puede producir suficiente inflación. Si esta empieza en  $t = 10^{-36}$  y termina en  $t = 10^{-34}$ , con  $H^{-1} = 10^{-36}$ .

$$\frac{a_f}{a_i} \approx e^{H(t_f - t_i)} = e^{10^{-36}(10^{-36} - 10^{-34})} = e^{10^{-36}(9.9 \times 10^{-35})} = e^{9.9 \times 10^{-71}} = 10^{43}$$

$$10^{43} > 10^{27},$$

por lo que la inflación producida en este tiempo es suficiente para el universo observado actualmente.

### 3.4. Nueva Teoría Inflacionaria

Los modelos de inflación tiene al menos dos cuestionamientos:

- \* La identidad del campo escalar que puede ser el inflatón.
- \* La escala de energías asociada a la inflación que es del orden de  $10^{15}$  GeV y no hay una teoría física robusta para ese rango de energías.

Sin embargo, todos los modelos tienen una características común: una curva de energía potencial casi plana que permite una expansión exponencial “superlumínica”(perfectamente consistente con la Relatividad General) y con una alta tasa de producción de entropía debida al recalentamiento del Universo, por la creación de partículas que terminan decayendo en los fotones que podemos observar hoy en día como radiación de fondo.

Esta característica común lleva a una serie de predicciones interesantes:

- El universo debe tener una geometría espacial indistinguible de la euclidiana y por tanto el parámetro de densidad debería ser esencialmente uno (la mayoría de modelos predicen  $\Omega = 1 \pm 0.0001$ ).
- El espectro de las fluctuaciones de la densidad es aproximadamente invariante con la escala considerada (la mayoría de modelos predicen un índice espectral  $n = 1 \pm 0.2$ ). Estas perturbaciones en la densidad quedan reflejadas en anisotropías de la radiación cósmica de fondo. Las medidas observacionales son compatibles con esta predicción.
- El espectro de ondas gravitatorias producidas por las fluctuaciones de la métrica debería también ser muy aproximadamente invariante con la escala.

La propuesta de Andréi D. Linde (un físico teórico ruso), es que el potencial del campo escalar sea distinto al de Guth, de manera que el inflatón llegaría al mínimo de forma natural, sin el efecto túnel, a esto se le conoce como *Slow-roll* (rodamiento lento). En este caso en lugar de las burbujas de falso vacío que colisionan, sólo se forma una burbuja que cubre todo el espacio.

## CAPÍTULO 3. INFLACIÓN COSMOLÓGICA

Al llegar al mínimo el inflatón oscila en él, y así se produce el recalentamiento (que crearía la materia). En este modelo se tiene un potencial como el que se muestra en la fig. 3.5.

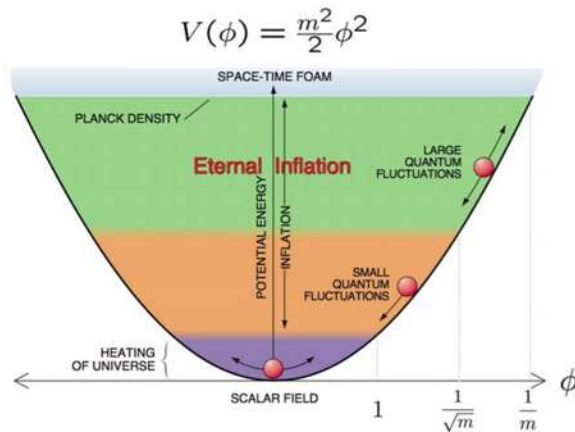


Figura 3.5: Propuesta de Andréi Linde de un potencial para un campo escalar. Fuente [8]

La diferencia entre la evolución del universo sin inflación y con inflación, se muestra en la figura 3.6. En esta figura se ilustra la diferencia de tamaño en ambos universos, el caso que se ajusta a las observaciones es el universo con inflación.

### Inflationary Universe

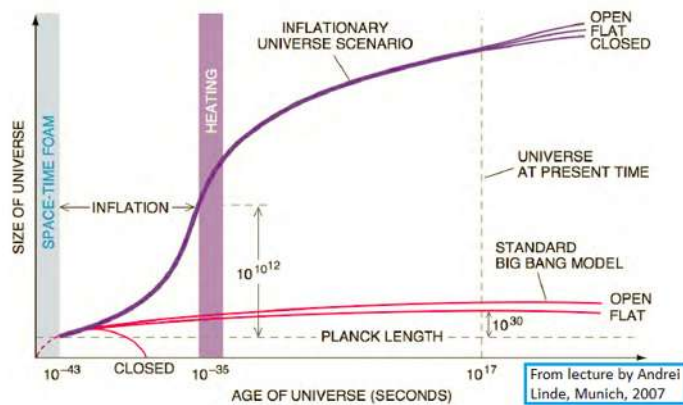


Figura 3.6: Evolución del universo con y sin inflación.

### 3.4.1. Características de Inflación

#### Fluctuaciones Cuánticas

Eventualmente, se mostró que la nueva inflación no produce un Universo perfectamente simétrico, sino que se generan débiles fluctuaciones cuánticas en el inflatón (figura 3.7) generando que en algunas regiones se produzca mas o menos inflación. Estas débiles fluctuaciones formaron las semillas primigenias para todas las estructuras creadas en el Universo posterior. Estas fluctuaciones fueron por primera vez calculadas por Viatcheslav Mukhanov y G. V. Chibisov[20] en la Unión Soviética analizando el modelo similar de Starobinsky[16].

De esta forma, las estructuras visibles en el Universo hoy se formarían a través del colapso gravitacional de perturbaciones que se generaron a partir de las fluctuaciones cuánticas en esta época inflacionaria.

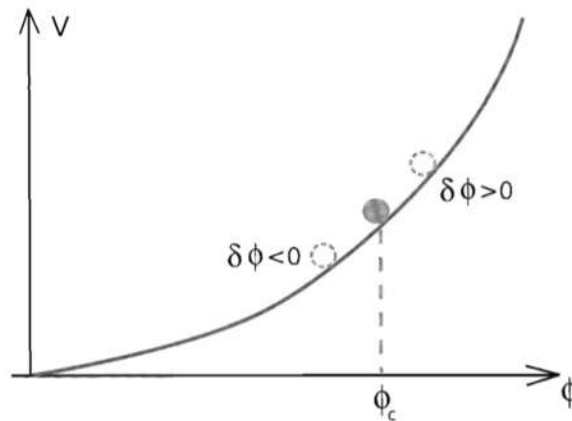


Figura 3.7: Fluctuaciones del Inflatón, las cuales pueden producir más inflación ( $\delta\phi > 0$ ) o menos inflación ( $\delta\phi < 0$ ) en distintas regiones. Fuente [22].

#### Recalentamiento

Durante la etapa de inflación la energía del campo que dirige la inflación está concentrada en la energía potencial asociada al campo, que es dominante sobre los términos cinéticos del potencial. Una vez terminada esta etapa, el campo empieza a oscilar alrededor del mínimo de su potencial (véase la fig. 3.5).

El recalentamiento se debe a la producción de partículas por la oscilación del inflatón, alrededor del mínimo de su potencial. Las partículas creadas, interaccionan unas

### CAPÍTULO 3. INFLACIÓN COSMOLÓGICA

---

con otras, hasta alcanzar un equilibrio térmico.

La amplitud de las oscilaciones del campo decrece debido a la expansión del universo y a que el campo escalar transfiere su energía a las partículas creadas. Este proceso continúa hasta que casi toda la energía del campo escalar haya sido transferida.

De esta manera, la inflación modelada mediante un campo escalar inicialmente excitado y que rueda lentamente hacia su mínimo potencial, contiene los elementos deseables para una imagen con ésta, a saber,

- I) Produce inflación de manera natural.
- II) Detiene el proceso de inflación cuando domina el término cinético sobre el potencial.
- III) Las fluctuaciones cuánticas del inflatón proveen un mecanismo para explicar la formación de estructura en el universo.
- IV) Las oscilaciones en el mínimo de potencial dan lugar a la materia y radiación después de inflación.

# Capítulo 4

## Fonones

Este capítulo se basa en las siguientes referencias: [21], [25], [40], entre otros.

El fonón proviene de la descripción de la mecánica cuántica de un movimiento de vibración primaria en el que un entramado de átomos o moléculas oscila de manera uniforme a una sola frecuencia. En la mecánica clásica esta vibración se designa un modo normal. Los modos normales son importantes porque cualquier vibración del enrejado arbitraria puede ser considerada como una superposición de estas vibraciones elementales. Es interesante señalar que de manera análoga a como el fotón puede entenderse como la partícula asociada a las radiaciones de los campos de una onda electromagnética, también los fonones pueden considerarse como las partículas asociadas a las vibraciones (ondas de sonido) de un sólido, como a continuación se describe.

La evidencia sobre el comportamiento de la energía vibracional en sólidos periódicos proviene de que los modos de vibración colectiva pueden aceptar energía sólo en cantidades discretas, y estos cuantos de energía han sido etiquetados como "fonones". Al igual que los fotones de energía electromagnética, los fonones obedecen la estadística de Bose-Einstein.<sup>1</sup>

### 4.1. Fonones: de Campo a Partícula

Uno de los hechos más notables acerca de la física de la materia condensada es que la fantástica complejidad fenomenológica del sistema puede describirse a partir de un hamiltoniano de simplicidad comparativa. De hecho, no es difícil construir hamiltoniano microscópico de la materia condensada de generalidad razonable. Por ejemplo, un metal prototípico o aislante pueden ser descritos por el hamiltoniano de muchas partículas,  $H = H_e + H_i + H_{ei}$ , donde

---

<sup>1</sup>La distribución de Bose-Einstein describe el comportamiento estadístico de las partículas de espín entero (bosones). A bajas temperaturas, los bosones se comportan de manera muy diferente a los fermiones, debido a que un número ilimitado de ellos pueden captar el mismo estado de energía, un fenómeno llamado "condensación". Esta distribución se expresa  $f(E) = \frac{1}{Ae^{E/kT} - 1}$ .

$$\begin{aligned}
 H_e &= \sum_i \frac{P_i^2}{2m} + \sum_{i<j} V_{ee}(r_i - r_j), \\
 H_i &= \sum_I \frac{P_I^2}{2M} + \sum_{I<J} V_{ii}(R_I - R_J), \\
 H_{ei} &= \sum_{iI} V_{ei}(R_I - r_i).
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

aquí,  $r_i$  denotan las coordenadas de los electrones de valencia,  $R_I$  las de los iones y  $H_e$ ,  $H_i$  y  $H_{ei}$  describen la dinámica de los electrones, iones y la interacción de iones y electrones, respectivamente (véase Fig. 4.1).

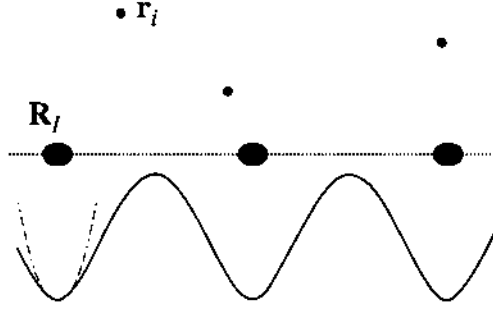


Figura 4.1: Imagen uni-dimensional de un sólido. Fuente [21]

En relación al hamiltoniano prototipo (4.1), nos centraremos en la dinámica propiedades de los iones cargados positivamente que forman la red huésped de un cristal. Por el momento, se ignorará el hecho de que los átomos son objetos cuánticos y trataremos a los iones como entidades clásicas. Para simplificar aún más el problema, consideremos una cadena lineal atómica en vez de un sólido d-dimensional genérico. En este caso, las posiciones de los iones se pueden especificar por una secuencia de coordenadas con un enrejado de  $a$ . Para entender el comportamiento de los iones, la dinámica de los electrones de conducción es de importancia secundaria, es decir, se va a considerar  $H_e = H_{ei} = 0$ .

A temperatura de cero se considera el ión unidimensional con coordenadas  $R_I \equiv \bar{R}_I = Ia$  en una matriz regularmente espaciada. El **Hamiltoniano** a bajas energías se escribe como:

$$H = \sum_{I=1}^N \left[ \frac{P_I^2}{2M} + \frac{k_s}{2} (R_{I+1} - R_I - a)^2 \right], \tag{4.2}$$

donde el coeficiente  $k_s$  determina la pendiente del potencial de la rejilla. Note que  $H$  puede ser interpretada como el Hamiltoniano de  $N$  partículas puntuales de masa  $M$  elásticamente conectados por un resorte con constante de estiramiento  $k_s$  (véase Fig. 4.2).



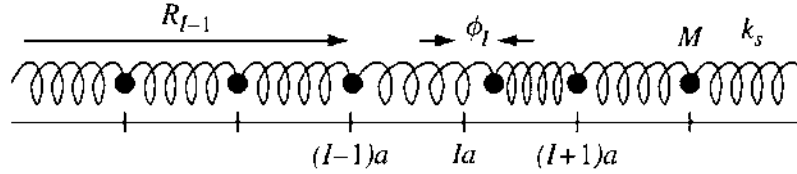


Figura 4.2: Modelo de un sólido unidimensional; una cadena de partículas puntuales masivas elásticamente unidas. Fuente [21].

Sabiendo que el Hamiltoniano  $H(R, P) = T + V$  (donde  $T$  es la energía cinética y  $V$  es la energía potencial) y que el Lagrangiano  $L(R, \dot{R}) = T - V$ , la ecuación 4.2 se convierte en

$$L = \sum_{I=1}^N \left[ \frac{M \dot{R}_I^2}{2} - \frac{k_s}{2} (R_{I+1} - R_I - a)^2 \right]. \quad (4.3)$$

Podemos suponer que la desviación de los iones de su posición de equilibrio es pequeña ( $|R_I(t) - \bar{R}_I| \ll a$ ), y la integridad del sólido se mantiene. Con  $R_I(t) = \bar{R}_I + \phi_I(t)$ , ( $\phi_{N+1} = \phi_1$ ) la función de Lagrange (4.3) asume la forma simplificada

$$L = \sum_{I=1}^N \left[ \frac{M}{2} \dot{\phi}_I^2 - \frac{k_s}{2} (\phi_{I+1} - \phi_I)^2 \right]. \quad (4.4)$$

Si se pasa del carácter discreto de las entidades microscópicas al caso continuo para describir el sistema en términos de grados de libertad efectivos, tendremos el llamado límite continuo.

De esta manera el límite continuo equivale a la descripción de las fluctuaciones de rejilla  $\phi_i$  en términos de funciones suaves de una variable continua  $x$  (véase la figura 4.3, en la que el desplazamiento horizontal de las partículas puntuales en la rejilla, se ha trazado a lo largo de la vertical). Introduciendo  $\phi(x)$  y haciendo una expansión de

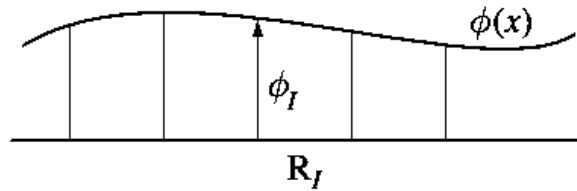


Figura 4.3: Distribución continua para los valores del campo. Fuente [21].

Taylor a primer orden, definimos

$$\phi_I \rightarrow a^{1/2} \phi(x)|_{x=Ia}, \quad \phi_{I+1} - \phi_I \rightarrow a^{3/2} \partial_x \phi(x)|_{x=Ia}, \quad \sum_{I=1}^N \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^L dx,$$

## CAPÍTULO 4. FONONES

donde  $L = Na$ . Note que, como las definimos, las funciones  $\phi(x, t)$  tiene dimensión [longitud]<sup>1/2</sup>. Expresado en términos de los nuevos grados de libertad, el limite continuo del lagrangiano, entonces

$$L[\phi] = \int_0^L dx \mathcal{L}(\phi, \partial_x \phi, \dot{\phi}), \quad \mathcal{L}(\phi, \partial_x \phi, \dot{\phi}) = \frac{m}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{k_s a^2}{2} (\partial_x \phi)^2, \quad (4.5)$$

donde la **densidad lagrangiana**  $\mathcal{L}$  tiene dimensión [energía]/[longitud]. Similarmente, la acción clásica asume la forma continua

$$S[\phi] = \int dt L[\phi] = \int dt \int_0^L dx \mathcal{L}(\phi, \partial_x \phi, \dot{\phi}). \quad (4.6)$$

Así, hemos cambiado la descripción de  $N$  partículas a favor de una que implica grados de libertad continuos, un **campo (clásico)**. Tomando el principio de extremo de Hamilton ( $\delta S[x] = 0$ )

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (S[x + \epsilon y] - S[x]) = 0 \quad (4.7)$$

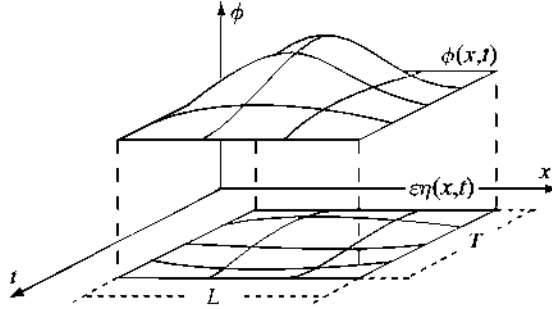


Figura 4.4: Esquema que muestra la variación del campo asociado con la acción funcional. Fuente [21].

Cuando se aplica a la función de Lagrange específica (4.4), sustituyendo el campo  $\phi(x, t) \rightarrow \phi(x, t) + \epsilon \eta(x, t)$  en la ec. 4.6 conduce a

$$S[\phi + \epsilon \eta] = S[\phi] + \epsilon \int dt \int_0^L dx \left( m \dot{\phi} \dot{\eta} - k_s a^2 \partial_x \phi \partial_x \eta \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Integrando por partes y considerando la contribución lineal en  $\epsilon$ , obtenemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (S[\phi + \epsilon \eta] - S[\phi]) = - \int dt \int_0^L dx \left( m \ddot{\phi} - k_s a^2 \partial_x^2 \phi \right) \eta \doteq 0$$

como  $\eta$  es arbitraria, tenemos que la ecuación de movimiento toma la forma de una ecuación de onda

$$\boxed{(m \partial_t^2 - k_s a^2 \partial_x^2) \phi = 0.} \quad (4.8)$$

Las soluciones a la ec. 4.8 tienen la forma general  $\phi_+(x - vt) + \phi_-(x + vt)$  donde la velocidad de onda en el medio es  $v = a\sqrt{k_s/m}$ , y  $\phi_{\pm}$  son funciones suaves arbitrarias del argumento.

De esto podemos deducir que las excitaciones de nuestro modelo son vibraciones de la red que se propagan como ondas de sonido hacia la izquierda o hacia la derecha a una velocidad constante  $v$  (ver la figura 4.5). El comportamiento trivial de nuestro modelo es por supuesto, una directa consecuencia de su definición simplista; no hay disipación, dispersión, u otros ingredientes no triviales. La adición de estos refinamientos conduce a la teoría clásica general de vibraciones de la red.



Figura 4.5: Propagación de ondas de sonido en un sólido. Fuente [21].

Recordando que, para un lagrangiano de una partícula puntual,  $p \equiv \partial_x L$  es el momento conjugado de las coordenadas  $x$ , consideremos la densidad lagrangiana y definimos

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}(\phi, \partial_x \phi, \dot{\phi})}{\partial \dot{\phi}(x)}, \quad (4.9)$$

como el **momento canónico** asociado con  $\phi$ , y la densidad de Hamiltoniano se define como usualmente las **transformadas de Legendre**<sup>2</sup>,

$$\mathcal{H}(\phi, \partial_x \phi, \pi) = \left( \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}(\phi, \partial_x \phi, \dot{\phi}) \right) \Big|_{\dot{\phi} = \dot{\phi}(\phi, \pi)}, \quad (4.10)$$

de donde el Hamiltoniano completo se obtiene de  $H = \int_0^L dx \mathcal{H}$ . Aplicando la ecuación 4.9 y 4.10 a el lagrangiano de la cadena de átomos da  $\pi(x, t) = m\dot{\phi}(x, t)$  y

$$H[\pi, \phi] = \int dx \left( \frac{\pi^2}{2m} + \frac{k_s a^2}{2} (\partial_x \phi)^2 \right) \quad (4.11)$$

donde vemos que

$$\mathcal{H} = \frac{\pi^2}{2m} + \frac{k_s a^2}{2} (\partial_x \phi)^2.$$

De esta forma, el hamiltoniano puede cuantificarse de acuerdo con las siguientes reglas: (a) promover los campos  $\phi(x)$  y  $\pi(x)$  a operadores:  $\phi \rightarrow \hat{\phi}$ ,  $\pi \rightarrow \hat{\pi}$ , y (b)

<sup>2</sup>En matemáticas se dice que dos funciones diferenciables  $f$  y  $g$  son una **transformada de Legendre** si cada una de sus primeras derivadas son función inversa de la otra:  $Df = (Dg)^{-1}$ . Se dice entonces de  $f$  y  $g$  que están relacionadas por una transformada de Legendre.

La estrategia tras el uso de las transformadas de Legendre es desplazar la dependencia de una función de una variable independiente a otra (la derivada de la función original con respecto a su variable independiente) tomando la diferencia entre la función original y su producto.

## CAPÍTULO 4. FONONES

---

generalizar las relaciones canónicas de conmutación de una sola partícula en mecánica cuántica,  $[\hat{p}_m, x_n] = -i\hbar\delta_{mn}$ , a la relación

$$[\hat{\pi}(x), \hat{\phi}(x')] = -i\hbar\delta(x - x'). \quad (4.12)$$

Funciones de operador de valor como  $\hat{\phi}$  y  $\hat{\pi}$  se refieren generalmente a los campos cuánticos. El empleo de estas definiciones, se obtiene la densidad del Hamiltoniano cuántico

$$\hat{\mathcal{H}}(\hat{\pi}, \hat{\phi}) = \frac{\hat{\pi}^2}{2m} + \frac{k_s a^2}{2} (\partial_x \hat{\phi})^2. \quad (4.13)$$

Para hacer frente a las propiedades cuánticas del sistema, es útil ahora cambiar a una representación de Fourier. Como con cualquier función, funciones de operador se pueden representar en una variedad de maneras diferentes. En particular, pueden ser sometidas a una expansión Fourier

$$\begin{cases} \hat{\phi}_k \\ \hat{\pi}_k \end{cases} \equiv \frac{1}{L^{1/2}} \int_0^L dx e^{\mp ikx} \begin{cases} \hat{\phi}(x) \\ \hat{\pi}(x) \end{cases}, \quad \begin{cases} \hat{\phi}(x) \\ \hat{\pi}(x) \end{cases} \equiv \frac{1}{L^{1/2}} \sum_k e^{\pm ikx} \begin{cases} \hat{\phi}_k \\ \hat{\pi}_k \end{cases} \quad (4.14)$$

donde  $\sum_k$  representa la suma de todos los coeficientes de Fourier indexados por el vector de onda  $k = 2\pi m/L$ ,  $m$  entero. Dado que el campo clásico  $\phi(x)$  es real, el campo cuántico  $\hat{\phi}(x)$  es Hermitiano, es decir  $\hat{\phi}_k = \hat{\phi}_{-k}^\dagger$  (y lo mismo para  $\hat{\pi}_k$ ). En la representación de Fourier, los operadores de campo transformado obedecen a las relaciones de conmutación canónicas

$$\boxed{[\hat{\pi}_k, \hat{\phi}_{k'}] = -i\hbar\delta_{kk'}}. \quad (4.15)$$

Cuando se expresa en la representación de Fourier, haciendo uso de la identidad

$$\int_0^L dx (\partial \hat{\phi})^2 = \sum_{k, k'} (ik\hat{\phi}_k)(ik'\hat{\phi}_{k'}) \underbrace{\frac{1}{L} \int_0^L dx e^{i(k+k')x}}_{\delta_{k+k', 0}} = \sum_k k^2 \hat{\phi}_k \hat{\phi}_{-k},$$

junto con la relación paralela para  $\int_0^L dx \hat{\pi}^2$ , el hamiltoniano asume la forma “casi en diagonal”,

$$\hat{H} = \sum_k \left[ \frac{1}{2m} \hat{\pi}_k \hat{\pi}_{-k} + \frac{1}{2} m \omega_k^2 \hat{\phi}_k \hat{\phi}_{-k} \right], \quad (4.16)$$

donde  $\omega_k = v|k|$ , y  $v = a(k_s/m)^{1/2}$  indica la velocidad de la onda de sonido clásica. En esta forma, el Hamiltoniano se puede considerar como una superposición de osciladores armónicos cuánticos independientes. La diferencia entre (4.16) y la forma canónica de un oscilador hamiltoniano  $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$  es la presencia de sub-índices  $k$  y  $-k$  (consecuencia de  $\hat{\phi}_k^\dagger = \hat{\phi}_{-k}$ ). Este resultado no es realmente difícil de entender (véase fig. 4.6): Clásicamente, el sistema es compatible con un conjunto discreto de excitaciones en forma de onda, cada una en un índice por una ola adormecida en

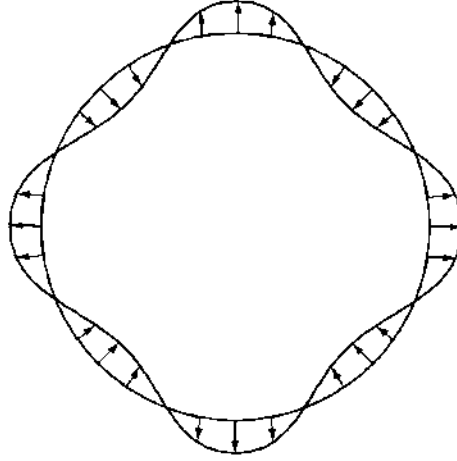


Figura 4.6: Descripción explícita de las excitaciones de baja energía eficaz del sistema (las olas). Fuente [21].

$k = 2\pi m/L$ . Dentro de la imagen cuántica, cada una de estas excitaciones se describe por un hamiltoniano oscilador con una frecuencia dependiente de  $k$ . Sin embargo, es importante no confundir los constituyentes atómicos, también osciladores, con los modos de oscilador colectivos independientes descritos por  $\hat{H}$ .

Nuestro análisis equivale a describir explícitamente las excitaciones de baja energía eficaz del sistema (las olas) en términos de sus componentes microscópicos (los átomos). Sin embargo es deseable desarrollar una imagen donde las excitaciones pertinentes del sistema, las olas, aparecen como unidades fundamentales, sin consideración explícita de los detalles microscópicos subyacentes. Recordando las propiedades de un oscilador armónico cuántico y regresando a la cadena armónica de átomos 4.16, introducimos los operadores de creación y aniquilación:

$$a_k \equiv \sqrt{\frac{m\omega_k}{2\hbar}} \left( \hat{\phi}_k + \frac{i}{m\omega_k} \hat{\pi}_{-k} \right), \quad a_k^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega_k}{2\hbar}} \left( \hat{\phi}_{-k} + \frac{i}{m\omega_k} \hat{\pi}_k \right).$$

Con esta definición se encuentra que los operadores también llamados de escalera obedecen a las relaciones de conmutación

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}, \quad [a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0 \quad (4.17)$$

y el Hamiltoniano asume la forma diagonal

$$\hat{H} = \sum_k \hbar\omega_k \left( a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right). \quad (4.18)$$

Las ecuaciones 4.17 y 4.18 representan el resultado final de nuestro análisis: las bajas excitaciones elementales de la cadena atómica discreta, descritos por los modos de onda de oscilador conocidos como **fonones**, cada uno caracterizado por un vector de onda  $k$  y una dispersión lineal,  $\omega_k = v|k|$ .

## 4.2. Fonones en Estado Sólido

### 4.2.1. Calor Específico

El calor específico es la cantidad de calor que se necesita por unidad de masa para elevar la temperatura un grado Celsius. La relación entre calor y cambio de temperatura, se expresa normalmente en la forma que se muestra en la ec. 4.19, donde  $c$  es el calor específico. Esta fórmula no se aplica si se produce un cambio de fase, porque el calor añadido o sustraído durante el cambio de fase no cambia la temperatura.

$$Q = cm\Delta T. \quad (4.19)$$

La capacidad calorífica de sólidos depende fundamentalmente de la temperatura. El caso general es que  $C_p$  la capacidad a presión constante aumente con ella. Tiende a un valor de cero cuando la temperatura  $T$  tiende a cero absoluto.

La *capacidad calorífica* a  $X = cte$  viene dada por la ecuación:

$$C_X = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_X \quad (4.20)$$

donde  $U$  es la energía interna. Para sólidos  $C_v \approx C_p$ .

Datos experimentales demuestran que a temperaturas altas  $C_v$  se acerca a un cota superior, y a temperaturas bajas cerca del cero absoluto esta tiende a cero como  $T^3$ , a este resultado se le conoce como *Ley de Dulong-Petit*<sup>3</sup>.

### 4.2.2. Modelo Clásico

El modelo clásico, de Dulong-Petit, usa la energía vibracional de los átomos de un sólido.

Con el *teorema de equipartición*<sup>4</sup> y tomando en cuenta que cada átomo de un cristal (oscilador tridimensional) tiene 6 grados de libertad, obtenemos

$$U = 6N_A \left( \frac{1}{2}k_B T \right) = 3N_A k_B T \quad (4.21)$$

sustituyendo este valor en (4.20), obtenemos la ley de Dulong-Petit para temperaturas altas.

$$C_v = 3N_A k_B \quad (4.22)$$

---

<sup>3</sup>La *ley de Dulong-Petit*, La ley de Dulong y Petit, trata de la similitud de los calores específicos molares de los metales. A temperaturas altas tienden a  $3Nk$  y a temperaturas bajas: aisladores  $C_v \approx T^3$  y para metales  $C_v \approx T$ .

<sup>4</sup>El *teorema de equipartición*: La cantidad de energía asociada a cada grado de libertad de un átomo es igual a  $\frac{1}{2}k_B T$ .

### 4.2.3. Modelo Einstein

La ley de Dulong y Petit asumió que se podía aplicar la estadística de Maxwell-Boltzmann y la equipartición de energía incluso a bajas temperaturas. Einstein reconoció que para un oscilador armónico cuántico a energías menores de  $kT$ , se debe aplicar la estadística de Einstein-Bose. Esta fue la misma conclusión que se obtuvo sobre la radiación del cuerpo negro. En los estados vibracionales, la distribución estadística de energía da la energía media:

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

donde esta frecuencia es la frecuencia de un vibrador cuántico. Hay tres grados de libertad por vibrador, de modo que la energía total es

$$E_{osciladores} = \frac{3h\nu N_A}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

por lo que sustituyendo en la ec. 4.20, tenemos

$$C_v = \frac{3N_A k \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2}$$

la cual a altas temperaturas concuerda con la ley de Dulong-Petit. Pero a bajas temperaturas no tiene dependencia de  $T^3$  como se sabe experimentalmente. Este hecho se muestra en la siguiente gráfica (fig. 4.7).

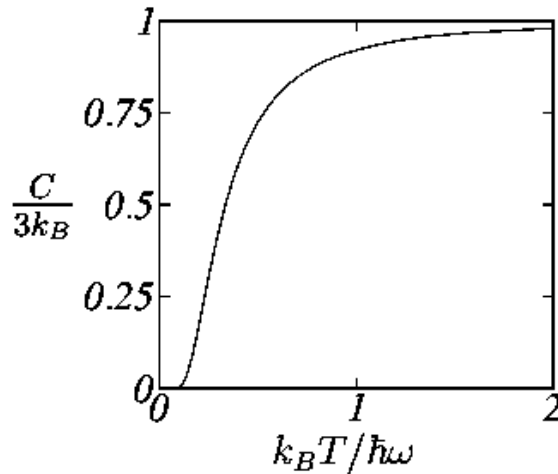


Figura 4.7: Capacidad calorífica de Einstein para átomo en tres dimensiones. Fuente [9].

Donde se ve claramente que el modelo de Einstein cumple sólo para temperaturas altas.

#### 4.2.4. Modelo Debye

Considerando un sólido como una matriz periódica de puntos de masa, hay limitaciones tanto en el mínimo como en el máximo de longitud de onda asociado con un modo vibracional.

Asociando la energía del fonón

$$E = h\nu = \frac{hv_s}{\lambda} = \frac{hv_s n}{2L}$$

con los modos y sumando los modos, Debye fue capaz de encontrar una expresión de la energía como una función de la temperatura y derivar una expresión para el calor específico del sólido como mostraremos enseguida. En esta expresión,  $v_s$  es la velocidad del sonido en el sólido.

La aplicación del oscilador de Einstein al calor específico, le proporcionó al experimento una concordancia cualitativa, y le dió el correcto límite a alta temperatura (la ley de Dulong y Petit). El ajuste cuantitativo del experimento, se mejoró con el reconocimiento de Debye de que había un número máximo de modos de vibración en un sólido. Se imaginó a las vibraciones en forma de modos de ondas estacionarias en el cristal, similar a los modos electromagnéticos en una cavidad, que se explica con éxito en la radiación del cuerpo negro. La densidad de estados de estos modos, que se llaman "fonones", es de la misma forma que la densidad de estados de fotones en una cavidad.

Para imponer un límite finito al número de modos en el sólido, Debye utilizó un máximo de frecuencias de fonones permitida, que ahora se llama frecuencia de Debye  $\nu_D$ . En el tratamiento del calor específico, se define la temperatura de Debye por

$$T_D = \frac{h\nu_D}{k}. \tag{4.23}$$

El enfoque de Debye fue considerar una esfera en el n-espacio que le daría el mismo número de átomos. Tomando  $n$  como un vector y permitiendo a los componentes tomar sólo valores positivos de  $1/8$  del volumen de la esfera fig. 4.8, entonces

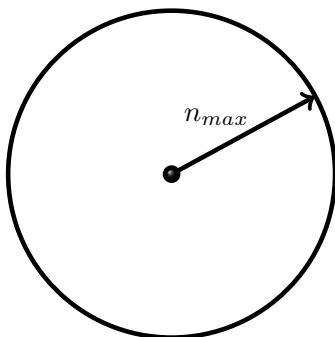


Figura 4.8: Esfera en el n-espacio [40].



$$N = \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi n_{max}^3$$

$$n_{max} = \left( \frac{6}{\pi} N \right)^{1/3}$$

Asociando la energía del fonón con los modos vibracionales del sólido

$$E = h\nu = \frac{hv_s}{\lambda} = \frac{hv_s n}{2L}$$

donde  $v_s$  es la velocidad del sonido en el sólido, Debye abordó la materia del calor específico en los sólidos. Tratándolos con las estadísticas de Einstein-Bose, la energía total de las vibraciones de la red es de la forma, y aproximando un cubo de longitud  $L$  con un octavo de esfera radio  $n_{max}$

$$U = 3 \int_0^{E_{max}} \frac{E}{e^{E/kT} - 1} dE \approx 3 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{n_{max}} \frac{E}{e^{E/kT} - 1} n^2 \sin \theta dn d\theta d\phi.$$

Esto se puede expresar en términos de modos de fonón, expresando la integral en términos del número de modos  $n$ .

$$U = \frac{3\pi}{2} \int_0^{n_{max}} \frac{hv_s n}{2L} \frac{n^2}{e^{hv_s n/2kT} - 1} dn$$

Aquí el factor  $3\pi/2$  viene de tres consideraciones. Primera, hay 3 modos asociados con cada número de modo  $n$ : un modo longitudinal y dos modos transversales. Luego se obtiene un factor de  $4\pi^2$  por integración sobre las coordenadas angulares, tratando el número de modo  $n$  como el radio-vector. Finalmente se limita la integral al cuadrante en el cual, todas las componentes de  $n$  son positivas, dando un factor de  $1/8$ : el producto de estos es  $3\pi/2$ .

Para resolver la integral, se realiza la sustitución

$$x = \frac{hv_s n}{2LkT}$$

y el límite de la integral en términos de  $x$  se obtiene de

$$x_{max} = \frac{hv_s n_{max}}{2LkT} = \frac{hv_s}{2kT} \left( \frac{6N}{\pi V} \right)^{1/3} = \frac{T_D}{T},$$

donde se introduce aquí la constante  $T_D$ . Se le llama temperatura Debye y es una constante asociada con el modo vibracional mas alto permitido.

Cuando se ponen todas los parámetros, la integral toma la forma

$$U = \frac{9NkT^4}{T_D^3} \int_0^{T_D/T} \frac{x^3}{e^x - 1} dx. \quad (4.24)$$

## CAPÍTULO 4. FONONES

---

La expresión del calor específico Debye es la derivada de esta expresión con respecto a  $T$ . La integral no se puede evaluar en forma cerrada, pero la evaluación numérica muestra un resultado razonablemente de acuerdo con los calores específicos de los sólidos observados para todo el rango de temperatura, alcanzando la ley de Dulong-Petit a altas temperaturas y el comportamiento característico  $T^3$  a muy bajas temperaturas.

Para **temperaturas altas**  $T \gg T_D$ , el valor de  $x$  es muy pequeño en el rango de la integral, haciendo posible usar series exponenciales,  $e^x = 1 + x$ . Esto reduce la expresión de la energía a

$$U = \frac{9NkT^4}{T_D^3} \int_0^{T_D/T} x^2 dx = \frac{9NkT^4}{T_D^3} \frac{T_D^3}{3T^3} = 3NkT, \quad (4.25)$$

sustituyendo este valor en la ecuación 4.20 tenemos que la capacidad calorífica es

$$C_v = 3Nk \quad (4.26)$$

este resultado concuerda con la ley Dulong-Petit para temperaturas altas.

Para **temperaturas bajas** el limite superior de la integral tiende a infinito, por lo que tenemos la forma de integral de Riemann (Apéndice C), por lo que

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

entonces la energía  $U$  es

$$U = \frac{3\pi^4 NkT^4}{5T_D^3}$$

y sustituyendo esta energía en la ec. 4.20, obtenemos el calor específico

$$C_v = \frac{12\pi^4 Nk}{5T_D^3} T^3 \approx T^3$$

el cual cumple la condición de la ley de Dulong-Petit, pues este calor específico tiende a cero con dependencia de  $T^3$ .

La expresión del calor específico que surge de la teoría de Debye, se puede obtener tomando la derivada de la expresión de la energía 4.24

$$C_v = 9Nk \left[ \frac{T}{T_D} \right]^3 \int_0^{T_D/T} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx. \quad (4.27)$$

El resultado de experimental concuerda con el modelo de Debye, el cual se muestra junto con el modelo de Einstein en la gráfica fig. 4.9, donde se ve claramente la diferencia de ambos.

Así los fonones, insertando nuevas condiciones a este modelo (Frecuencia no finita, delimitada por el medio de propagación; un modo de mayor orden,  $n_{max}$  y tienen tres estados posibles de polarización, un longitudinal y dos transversales) ayudan a resolver este problema, pues como vimos no se podía sin tomar en cuenta la vibración del sólido como un todo, no la vibración de los átomos individualmente.

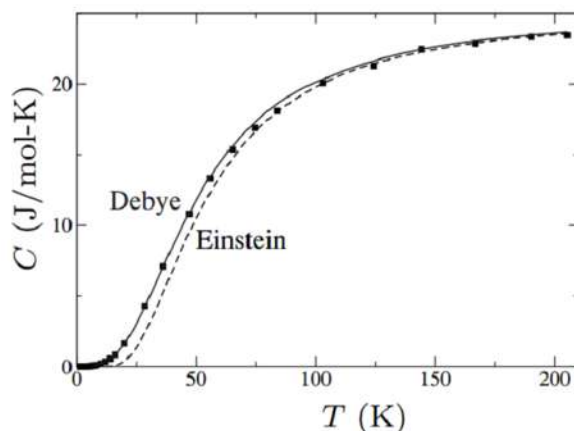


Figura 4.9: Gráfica de Capacidad calorífica de Debye y Einstein. Fuente [9]

### 4.3. Fonones en el Universo

#### 4.3.1. Fonones y Expansión Acelerada del Universo Actual

Esta sección se basa en la referencia: [25].

Como lo dijimos, el fonón se describe como un campo escalar eficaz que abarca el movimiento colectivo de los átomos en un material.

La formación de la estructura cósmica en un universo en expansión es un mecanismo no lineal muy complejo. En aras de la simplicidad, se aconseja un enfoque heurístico por el cual el potencial newtoniano total entre las estructuras que constituyen la red cristalina se limita a los dos primeros términos de su expansión. Más tarde se supone que los coeficientes de esos términos simplemente cambian la escala con la expansión cósmica. Esto nos permite derivar un modelo cosmológico simple para un fonón con dinámicas cosmológicas muy diferentes que el de la quintaesencia<sup>5</sup>. También se muestra que este modelo simple puede proporcionar una aceleración cósmica a través de una ecuación de estado con  $w < p/\rho = -1/3$ .

*El Modelo.-* Para escribir un modelo completo para una red sólida en el Universo, uno debería, en principio, resolver las ecuaciones de Einstein con el dado derecho apropiado. Esto se hizo perturbativamente en [26] en el caso de una red cúbica. Las características observables de un modelo así fueron estudiadas por los autores en [27]. Los autores encuentran que, en la aproximación de límite continuo, su modelo predice una solución para el factor de Hubble idéntico al caso de un universo lleno de polvo (en el límite perturbativo). En este contexto se desea ampliar su resultado ahora considerando lo que sucede si se incluye la pequeña excitación de la red en torno a su estado de equilibrio. Para este fin, basta suponer que los efectos gravitacionales entre

<sup>5</sup>En cosmología, quintaesencia es una forma hipotética de materia que se postula para explicar las observaciones del universo en expansión acelerada. La quintaesencia es un tipo de “energía del vacío”, con una ecuación de estado de la forma:  $p = w\rho c^2$ . Con  $w < -1/3$  y campos escalares.

## CAPÍTULO 4. FONONES

---

las masas se describen adecuadamente por un potencial newtoniano general. Siguiendo el procedimiento habitual en el estudio de la formación de estructuras a gran escala, se debe, en principio resolver la ecuación de Poisson  $\nabla^2 V = 4\pi G\delta\rho$ , con  $V$ , el potencial gravitacional y  $\delta\rho$ , la parte no homogénea de la densidad de la materia. Porque sólo interesa la perturbación de este potencial en torno a su valor de equilibrio, se supone que el potencial se conoce de antemano. Se podría, en principio derivar de la solución de [26] en el caso perfectamente homogéneo o calcular en un estudio numérico más riguroso de la formación de estructura a gran escala.

En el marco de la expansión cósmica comóvil, el lagrangiano que describe un conjunto de masas  $m_a$  sometidas a interacción gravitatoria mediada a través del potencial  $V$  es, hasta términos de segundo grado:

$$L = \sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{q}_a^2 - \sum_{a,b} \frac{1}{2} k_{ab} (q_a - q_b)^2 + \sum_a k q_a^2 \quad (4.28)$$

Donde los  $q_a$ 's son el desplazamiento de las masas  $m_a$  desde su punto de equilibrio.  $k_{ab}$  es el acoplamiento armónico entre masas puntuales  $a$  y  $b$ , y  $k$  es la auto-acoplamiento de una sola masa. En términos de la expansión usando  $V$ :

$$k_{ab} = - \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_a \partial q_b} \right) \quad (4.29)$$

$$k = - \left( \frac{\partial^2 V}{\partial q_a^2} \right). \quad (4.30)$$

La función (4.28) puede expresarse en términos de una función escalar:

$$\begin{aligned} q_a &\rightarrow \phi(x) \\ \sum_a &\rightarrow \frac{1}{l^3} \int d^3x \end{aligned} \quad (4.31)$$

donde  $l$  denota la distancia media entre dos estructuras y la integral debe ser tomada en el conjunto (posiblemente infinito) del volumen de la red. Al pasar por todo el proceso, uno puede encontrar (ver por ejemplo [28]) que el lagrangiano efectivo toma la forma:

$$L = \int d^3x \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial \psi^2}{\partial t} \right)^2 - [\vec{\nabla} \psi]^2 + M^2 \psi^2 \right). \quad (4.32)$$

Los nuevos parámetros de esta expresión pueden ser expresados en términos de los parámetros de red:

$$v^2 = \frac{k_{ab} l^2}{m}, \quad M^2 = 2 \frac{k}{k_{ab} l^2}, \quad (4.33)$$

el cual puede ser negativo o positivo dependiendo de los signos de los parámetros de red. Para mayor comodidad, también hemos reescalado el campo a partir de (4.31)

como  $\psi = \sqrt{\frac{k_{ab}}{l}} \phi$ . El lagrangiano (4.32) es exactamente el que se utiliza en el tratamiento continuo de las propiedades elásticas de la física de materia condensada con  $\psi$  siendo la amplitud de la onda del fonón (véase por ejemplo [21]).

Ahora se escribe este lagrangiano en una forma adecuada para la cosmología. En primer lugar, se supone que el  $\psi$  desplazamiento  $\psi(\vec{x}, t)$  es una función escalar tal que no hay dirección preferida en general para la oscilación del campo. Esto está de acuerdo con el principio cosmológico que asume isotropía del espacio a grandes escalas, por lo tanto se anula el término proporcional a  $\vec{\nabla}\psi$  en (4.32). Nuestro enfoque es equivalente a considerar sólo el campo escalar promediada espacialmente

$$\psi(t) = \langle \psi(\vec{x}, t) \rangle .$$

Donde el promedio se toma sobre una región del espacio lo suficientemente grande para que el principio cosmológico sea válido ( $> 100$  Mpc). Las cantidades físicas en (4.32) se verá afectada por la expansión cósmica a través de la dependencia de los parámetros en el factor de escala. Al mirar a (4.33) y teniendo en cuenta el hecho de que las escalas de distancia comóvil  $l \sim a(t)l_0$ , se puede obtener

$$\frac{1}{v^2} \sim \frac{1}{a^2}, \quad M^2 \sim \frac{1}{a^2}. \quad (4.34)$$

Este cambio de escala de los parámetros del Lagrangiano tendrá un impacto en la dinámica cosmológica del fonón, diferenciándose del campo de la quintaesencia escalar habitual. Para anotar la evolución dinámica del Universo en la presencia de nuestro nuevo campo  $\psi$  tenemos que considerar la acción que consiste en la integral temporal de la función de Lagrange (4.32), además de la habitual acción de Einstein-Hilbert. La métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker(FLRW)<sup>6</sup>

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (4.35)$$

a continuación se procede a escribir la acción total como la integral de una función de Lagrange 1D efectiva (véase [29]), usando la acción de Einstein-Hilbert con la curvatura  $R$  en (apéndice D, primer término) y el lagrangiano efectivo 4.32 (segundo y tercer término):

$$L = -\frac{3}{\kappa} \frac{\dot{a}^2 a}{N} + \frac{1}{2v^2} \frac{a\dot{\psi}^2}{N} - Na \frac{M^2 \psi^2}{2}. \quad (4.36)$$

Como cuestión de comparación, la reducción de Lagrange para un campo escalar ordinario mínimamente acoplado  $\phi$  como quintaesencia [25], se escribe

$$L = -\frac{3}{\kappa} \frac{\dot{a}^2 a}{N} + \frac{1}{2c^2} \frac{a^3 \dot{\Phi}^2}{N} - Na^3 \frac{M^2 \Phi^2}{2}. \quad (4.37)$$

---

<sup>6</sup>La métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker o modelo FLRW es una solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein de la relatividad general para un Universo en expansión (o contracción), homogéneo e isótropo.

Mientras campo escalar de quintaesencia proviene de un enfoque de campo fundamental, el fonón cosmológico es un campo escalar efectivo cuya masa y la velocidad no son constantes, sino más bien cambian con escala modificada por la expansión cósmica. Como consecuencia, la dinámicas cosmológicas asociadas al fonón y a quintaesencia diferirán.

### La dinámica cosmológica

Variando la ecuación. (4.36) con respecto a las coordenadas generalizadas  $(a, N, \psi)$  y especificando que el indicador de conformación ( $N = a$ ), obtenemos las siguientes ecuaciones (teniendo en cuenta la contribución de la materia y la radiación):

$$\begin{aligned}\frac{a'^2}{a^2} &= \frac{\kappa}{3} \left( \frac{1}{2v^2} \frac{\psi'^2}{a^2} + \frac{M^2}{2} \psi^2 \right) + H_0^2 \left( \frac{\Omega_m^0}{a} + \frac{\Omega_{rad}^0}{a^2} \right) \\ \frac{a''}{a} &= \frac{\kappa}{6} M^2 \psi^2 + \frac{H_0^2}{2} \left( \frac{\Omega_m^0}{a} \right) \\ \psi'' &= -a^2 v^2 M^2 \psi.\end{aligned}\tag{4.38}$$

Donde las cantidades con prima deben ser interpretadas como derivadas con respecto a el tiempo conformal  $\eta$  (dado en términos del tiempo síncrono por  $dt = a(t)d\eta$ ) y con  $\kappa = 8\pi G$  en unidades con  $c = 1$ . Los índices de cero símbolos denotan los valores presentes de estas cantidades ( $\Omega_m^0 = 0,25$ ,  $\Omega_{rad}^0 = 7.97 \times 10^{-5}$ ,  $H_0 = 71 \text{ km/s/Mpc}$ ) [31], [32]. Definiendo

$$\Omega_\psi(a) = \frac{\kappa}{3a^2 H^2} \left( \frac{1}{2v^2} \frac{\psi'^2}{a^2} + \frac{M^2}{2} \psi^2 \right),\tag{4.39}$$

la ecuación de Friedmann (la primera en 4.38) se puede poner bajo la forma:

$$\frac{a'^2}{a^2} = \frac{H_0^2}{(1 - \Omega_\psi(a))} \left( \frac{\Omega_m^0}{a} + \frac{\Omega_{rad}^0}{a^2} \right).\tag{4.40}$$

Para determinar qué valores deben tener de los parámetros  $v^2$  y  $M^2$ , uno puede mirar el comportamiento asintótico del modelo. A partir de las ecuaciones cosmológicas (4.38) uno puede fácilmente adivinar la relación de la presión sobre la densidad de energía del campo  $\psi$  ser

$$w_\psi = \frac{1}{3} \frac{\left( \frac{\dot{\psi}^2}{v^2 a^2} - M^2 \psi^2 \right)}{\left( \frac{\dot{\psi}^2}{v^2 a^2} + M^2 \psi^2 \right)}.\tag{4.41}$$

Esta ecuación de estado para el campo efectivo  $\psi$  tiene propiedades interesantes. De hecho, se interpola entre  $w_\psi = -1/3$  cuando se congela el campo ( $\frac{\dot{\psi}^2}{v^2 a^2} \ll M^2 \psi^2$ ) y

una constante cosmológica  $w_\psi = -1$  en el futuro lejano ( $a \gg 1$ ; Universo De Sitter). Para mostrar que esto es una solución asintótica, se supone que el Universo entra en el régimen de aceleración alrededor de  $a \sim 1$  y empezar a partir de la condición  $w_\psi = -1$ , que se puede integrar fácilmente para el comportamiento asintótico de  $\psi$  a partir de (4.41) como

$$\psi = \psi_0 \exp \left( \sqrt{\left| \frac{v^2 M^2}{2} \right|} (t - t_0) \right), \quad (4.42)$$

con  $\psi_0$  el valor actual del campo. Insertando este resultado en la ecuación de la aceleración y resolviendo para  $a$ , se encuentra

$$a = \sqrt{\frac{\kappa}{6}} \frac{\psi_0}{\sqrt{|v^2|}} \exp \left( \sqrt{\left| \frac{v^2 M^2}{2} \right|} (t - t_0) \right). \quad (4.43)$$

Mediante una elección adecuada de  $\psi_0$  y  $\sqrt{|v^2|}$ , siempre se puede hacer  $\sqrt{\frac{\kappa}{6}} \frac{\psi_0}{\sqrt{|v^2|}} \approx a_0$ . El resultado (4.43) es entonces en comparación con la solución asintótica de Sitter habitual  $a = a_0 \exp \left( \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c (t - t_0) \right)$ , mostrando que el estado asintótico es un universo de Sitter (véase también la Fig. 4.10).

Por lo tanto, la dinámica cosmológica del campo efectivo fonón se aparta de la de un campo escalar masivo (Quintaesencia con potencial cuadrático) para los que  $w \rightarrow -1$  cuando el campo es congelado y  $w$  es cero en promedio (y el campo se comporta como materia sin presión) asintóticamente.

### Restricciones Observacionales

El problema de la coincidencia cósmica no está bien tratada en este trabajo [25], tuvieron que ajustar el valor de los parámetros para producir una fase de aceleración provocada alrededor de  $a \sim 1$ . Sin embargo, presionando hacia adelante veremos si el modelo predice resultados interesantes para la dinámica del universo entre el momento de la formación de la red cosmológica y la época actual. A partir de (4.43), es sencillo identificar la cantidad que representa una constante cosmológica efectiva a ser:

$$\Lambda_{eff} = \frac{3 |v^2 M^2|}{2 c^2}. \quad (4.44)$$

Es decir, si se ajusta el valor de la constante cosmológica a los datos de supernovas, cualquiera de los dos valores de los parámetros  $v^2$  y  $M^2$  que satisfacen la restricción (4.44) debe producir el mismo comportamiento asintótico.

Hemos encontrado que el parámetro  $v^2$  tiene que ser negativo para la solución asintótica de (4.38) que se va a de Sitter (de ahí la necesidad del valor absoluto en (4.42)). El significado físico de ésta se entiende observando la tercera ecuación de la ec. (4.38). Los valores positivos de  $v^2$  implicarían oscilaciones de el campo a través del tiempo, mientras que los valores negativos describen una deformación inelástica. El último caso

es más adecuado para describir las inestabilidades gravitatorias en la interacción de las grandes estructuras en un universo dinámico. Este caso de hecho se ha de entender como el análogo del concepto de fonones de la física de estado sólido (véase, por ejemplo [30]), que representan deformaciones inelásticas crecientes rápidamente cuando un cristal se aparta de un estado de equilibrio inestable. Este proceso es responsable de las transiciones de fase estructurales que aparecen cuando la frecuencia de el fonón se convierte en imaginario, lo que conduce a inestabilidades.

La dinámica del sistema (4.38) se investiga numéricamente. Comencemos la integración en  $a_i = 10^{-3}$ , que corresponde al comienzo del proceso de la formación de estructura a gran escala a través de colapso gravitacional. Antes del tiempo, oscilaciones acústicas en el plasma primordial evitan la deformación inelástica de la red. También debemos imponer condiciones iniciales sobre los valores de  $\Omega_\psi^i$  y  $\psi_i'$  en este mismo punto. Mientras que elegimos para comenzar en reposo  $\psi_i' \approx 0$ ,  $\Omega_\psi^i$  es un parámetro libre por debajo del 1% (ver abajo). Hemos elegido para integrar la segunda y la tercera ecuación de (4.38) y a continuación, comprobar la solución mediante la inyección del resultado en la ecuación de Friedmann (4.40). La restricción siempre se verifica hasta la precisión de la máquina. La integración se llevó a cabo para varios valores de  $v^2$  y  $M^2$ . El modelo se ajusta a los datos SNIa [31] con la  $\chi^2 = 1,0018$  (En similitud,  $\chi^2_{\Lambda CDM} = 0,99$  para el mismo conjunto de datos).

La Fig. 4.10 muestra la evolución comparada del parámetro de aceleración ( $q = \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$ ). El modelo de fonones predice una aceleración por arriba de  $\Lambda CDM$  en todo el tiempo. Esto debería tener un impacto sobre la física de la formación de estructura a gran escala en un universo temprano.

Concluimos este capítulo mencionando brevemente algunos aspectos de los fonones que nos permiten caracterizarlos de la mejor manera.

## 4.4. Fonones y Física de Materiales

Las vibraciones de red o fonones son importantes y permiten entender el porque del comportamiento de algunas propiedades en los materiales:

- Explican las propiedades térmicas del material:
  - La Capacidad Calorífica. Modelo de Debye (ya discutido). Que cumplen que para temperaturas cercanas al cero absoluto estén de acuerdo con la tercera ley termodinámica,  $C_V \rightarrow 0$  si  $T \rightarrow 0$ .
  - La conductividad térmica en los aislantes (se destaca por ejemplo el caso el diamante que es un aislante y tiene una conductividad térmica que es cerca de seis veces la del cobre metálico), pues se estima se realiza a través de una red cristalina [41].



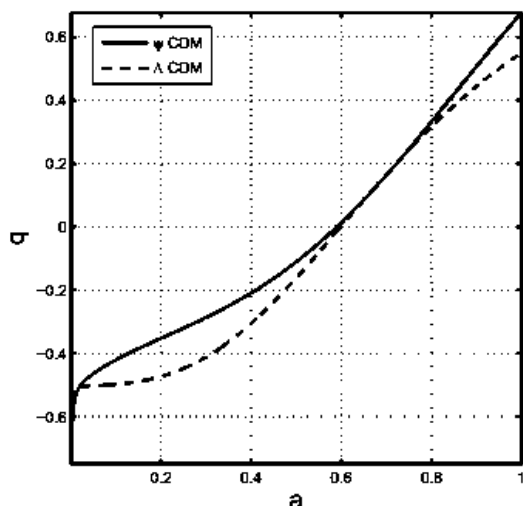


Figura 4.10: Evolución del parámetro de aceleración ( $q = \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$ ) para el modelo de fonones cosmológicos ( $\psi CDM$ ) en comparación con  $\Lambda CDM$ . Fuente [25].

- La dilatación Térmica por vibración de los átomos en una red, así su separación varía, Anarmonicidad [41].
- La dispersión inelástica de neutrones o de Rayos X en un cristal en las que se producen cambios en la energía y en la cantidad de movimiento debido a la creación o absorción de fonones en el blanco [41].
- Las interacciones del tipo electrón-fonón que son responsables de explicar el fenómeno de la superconductividad en la teoría BCS (Bardeen–Cooper–Schrieffer) [11].

#### 4.4.1. Sonido de un Átomo

La amplitud del sonido para un fonón es muy débil. Básicamente, cuando manipulas un átomo, este crea un sonido, un fonón cada vez, explica Göran Johansson en el informe publicado en Science [42]. El sonido es tan débil que los investigadores no pudieron siquiera oírlo, sólo captar sus ondas con circuitos similares a los utilizados hoy en día en ordenadores cuánticos.

Para el experimento, crearon un átomo artificial y lo manipularon para intentar captar las ondas que generaba. Lo hicieron con un diminuto circuito con amplificadores de microondas a baja temperatura, tecnología similar a la utilizada para leer qbits en supercomputación. El objetivo de todo esto era analizar las particularidades cuánticas del sonido y las propiedades de los fonones frente a los fotones.

Dado que el sonido se mueve mucho más lento que la luz (fotones), la acústica a nivel cuántico abre nuevas posibilidades de investigación. Es ahí donde reside la importancia de este experimento. De probarse de forma exitosa, las comunicaciones cuánticas podrían basarse en un futuro en la propagación y manipulación del sonido de las partículas y no solo en la propagación de luz a nivel cuántico, mucho más difícil de manipular por su alta velocidad.

### 4.5. Producción de Fonones

En los sólidos reales, hay dos tipos de fonones: fonones acústicos y fonones ópticos. *Los Fonones acústicos*, que son los fonones descritos anteriormente, tienen frecuencias que llegan a ser pequeña en las longitudes de onda largas, y corresponden a las ondas sonoras en la red. Fonones acústicos longitudinales y transversales son a menudo abreviado como LA y los fonones TA, respectivamente, que dependen de como oscilan los elementos de la red, ya sea transversal a la onda o en la misma dirección.

*Los Fonones ópticos*, que se presentan en cristales que tienen más de un átomo en la celda unidad, siempre tienen una cierta frecuencia mínima de la vibración, incluso cuando su longitud de onda es grande. Se les llama *óptica* porque en cristales iónicos (como el cloruro de sodio) se excitan muy fácilmente por la luz (de hecho, la radiación infrarroja). Esto es debido a que corresponden a un modo de vibración en iones positivos y negativos en los sitios reticulares adyacentes que pivotean uno contra el otro, creando un momento dipolar eléctrico variable en el tiempo. Fonones ópticos suelen abreviarse LO y TO, para las variedades longitudinal y transversal.

Una red cristalina a temperatura cero se encuentra en su estado fundamental, y no contiene fonones. De acuerdo con la termodinámica, cuando la estructura reticular se encuentra a una temperatura que no sea cero, su energía no es constante, sino que fluctúa al azar sobre un valor medio. Estas fluctuaciones de energía son causados por vibraciones de la red al azar, que se pueden ver como un gas de fonones. (Nota: El movimiento aleatorio de los átomos en la red es lo que se piensa generalmente en forma de calor) debido a que estos fonones son generados por la temperatura de la red, se les conoce como **fonones térmicos**.

### 4.6. Decaimiento del Campo de Fonones

Como ya se discutió al inicio del capítulo, al considerar una celosía regular de átomos en un material sólido uniforme, se podría esperar que hubiera una energía asociada con las vibraciones de estos átomos. Pero estos átomos están atados entre sí por medio de enlaces, de modo que no pueden vibrar independientemente. Las vibraciones por tanto toman la forma de modos colectivos, que se propagan a través del material. Tales vibraciones de la red de propagación pueden ser consideradas como ondas de sonido,

y su velocidad de propagación es la velocidad del sonido en el material.

Las energías vibracionales de las moléculas, por ejemplo, una molécula diatómica, se cuantifican y se tratan como osciladores armónicos cuánticos. Los osciladores armónicos cuánticos tienen niveles de energía igualmente espaciados, con una separación  $h\nu$ . Así que los osciladores pueden aceptar o perder energía sólo en unidades discretas de energía  $h\nu$ .

La evidencia sobre el comportamiento de la energía vibracional en sólidos periódicos está en que, los modos de vibración colectiva pueden aceptar energía sólo en cantidades discretas, y estos cuantos de energía han sido etiquetados como "fonones". Al igual que los fotones de energía electromagnética, obedecen a las estadísticas de Bose-Einstein.

Esta definición de fonones nos dice claramente que, para que estos existan es necesario estar dentro del sólido. Dado que si estos salieran de este empezarían a perder energía cediendo a partículas interaccionando.

Esto indicaría que los fonones fuera de la estructura de sólido no decaen en partículas, sino que por medio de interacción estos ceden su energía.

## 4.7. Dispersión de Fonones

La dispersión de fonones existe en varios escenarios:

- Dispersión fonón-fonón:** esta dispersión sucede cuando dos o más fonones interactúan intercambiando energía, donde de este proceso surgen otros fonones con distinta energía a la inicial o un fonón con la suma de la energía. También es posible que un sólo fonón se disperse él mismo, es decir que el decaiga en 2 o más fonones, los cuales tendrán fracción de energía del fonón inicial (véase Fig. 4.11).

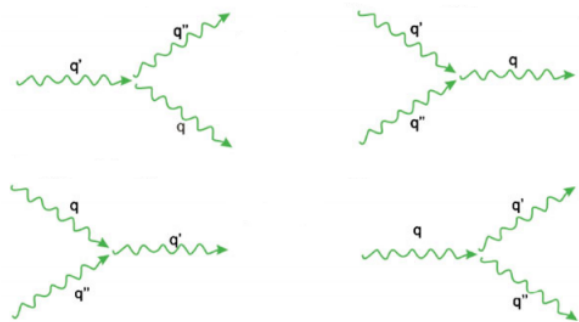


Figura 4.11: Dispersión fonón fonón, donde  $q$ ,  $q'$  y  $q''$  indican fonones con distinta energía. Fuente [35].

También pueden considerarse los siguientes procesos de interacción [44]:

- **Dispersión por impurezas:** estas dispersiones ocasionan que el fonón tenga otro comportamiento en su tiempo medio de interacción, estas impurezas surgen de fonones con impurezas en la red. (Véase Fig. 4.12).

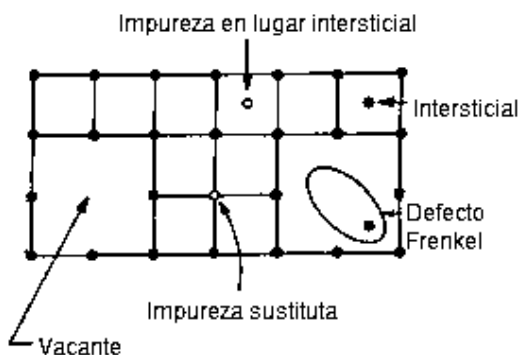


Figura 4.12: Defectos puntuales en cristales que ocasionan dispersión con fonones. Realizó Reyes Manuel García García.

- **Dispersión electrón fonón:** En la descripción del modelo de la banda, los electrones en un sólido son cuasi-partículas que ocupan los estados de un electrón. En un cristal perfecto, un electrón se propaga sin dispersión, sin embargo, la periodicidad perfecta es destruida por las vibraciones de la red de los átomos. Estas vibraciones causan que los electrones tengan una cierta probabilidad de ser dispersados. El proceso de interacción electrón-fonón induce la aniquilación o la creación de un fonón y una excitación simultánea o des-excitación del electrón a un estado menor (véase Fig. 4.13).

Estos dos procesos se ilustran en la imagen superior. Otros dos procesos posibles se ilustran en la segunda imagen, donde la recombinación de un par electrón-agujero crean de un fonón, y la creación de un par electrón-hueco por la aniquilación de un fonón.

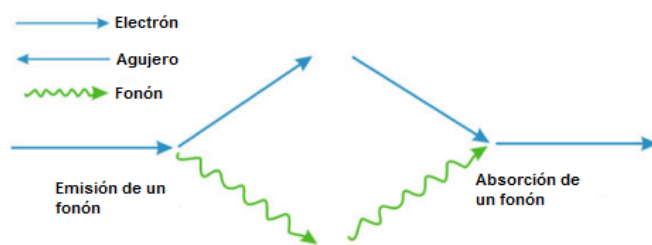


Figura 4.13: Dispersión Electrón Fonón. Fuente [35].

## 4.8. Fonón y Quintaesencia

Ahora reproduciendo los cálculos realizados para fonones y comparemos con los de quintaesencia.

Partiendo de ec. 4.36, para obtener las ecuaciones de movimiento 4.38, se varía el lagrangiano respecto, a, N y  $\psi$ :

**Variando primeramente N**, y usando  $\frac{1}{N+\delta N} = \frac{1}{N} - \frac{\delta N}{N^2}$ , tenemos:

$$\delta L = \frac{3\dot{a}^2 a}{kN^2} \delta N - \frac{a\dot{\psi}^2}{2v^2 N^2} \delta N - \frac{aM^2\psi^2}{2} \delta N$$

y sustituyendo  $N = a$ , obtenemos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{k}{6} \left( \frac{\dot{\psi}^2}{v^2 a^2} + M^2 \psi^2 \right) \quad (4.45)$$

**Variando a**, tenemos

$$L(a + \delta a) = -\frac{3}{kN} (\dot{a} + \delta \dot{a})^2 (a + \delta a) + \frac{\dot{\psi}}{2v^2 N} (a + \delta a) - \frac{NM^2\psi^2}{2} (a + \delta a)$$

donde como es un análisis lineal los términos con  $(\delta x)^s = 0$  con  $s > 1$ , entonces

$$\delta L = L(a + \delta a) - L(a) = \frac{3}{kN} (\dot{a}^2 \delta a + 2\dot{a} a \delta \dot{a}) + \frac{\dot{\psi}^2}{2v^2 N} \delta a - \frac{NM^2\psi^2}{2} \delta a$$

usando que  $N = a$

$$-\frac{6}{kN} \dot{a} a \frac{d}{dt}(\delta a) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{-6\dot{a} a \delta a}{kN} \right] - \frac{d}{dt} \left[ -\frac{6\dot{a} a}{kN} \right] \delta a = \frac{6}{k} \ddot{a} \delta a$$

y sustituyendo en  $\delta L$

$$\delta L = \left[ -\frac{3}{ka} \dot{a}^2 + \frac{6}{k} \ddot{a} + \frac{\dot{\psi}^2}{2v^2 a} - \frac{aM^2\psi^2}{2} \right] \delta a$$

llegando a la ecuación

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{k\dot{\psi}^2}{12v^2 a^2} + \frac{M^2\psi^2 k}{12}$$

y sustituyendo la ec. 4.45 se llega a la ecuación de aceleración (que claramente es positiva)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{k}{6} M^2 \psi^2. \quad (4.46)$$

## CAPÍTULO 4. FONONES

---

Finalmente **Variando**  $\psi$ ,

$$L(\psi + \delta\psi) = -\frac{3\dot{a}^2 a}{kN} + \frac{a}{2v^2 N} (\dot{\psi} + \delta\dot{\psi})^2 - Na \frac{M^2(\psi + \delta\psi)^2}{2}$$

usando que  $N = a$

$$\frac{a\dot{\psi}\delta\dot{\psi}}{v^2 N} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\dot{\psi}\delta\psi}{v^2} \right] - \delta\psi \frac{d}{dt} \left[ \frac{\dot{\psi}}{v^2} \right]$$

obteniendo la ecuación de movimiento para  $\psi$

$$\ddot{\psi} = -a^2 M^2 v^2 \psi \quad (4.47)$$

reescribiendo tenemos

$$\ddot{\psi} + a^2 M^2 v^2 \psi = 0 \quad (4.48)$$

La cual se puede comparar con la ecuación de un oscilador armónico simple, que tiene soluciones:  $\psi(t) = A\cos(aMvt) + B\sin(aMvt)$ . Con A y B dependientes de las condiciones iniciales. Donde esta oscila en el tiempo, pero como el campo de fonones pierde energía al no tener un medio para propagarse, entonces al final de inflación este término se diluiría de forma automática.

Y donde en el capítulo 4, tomando 4.41,

$$w_\psi = \frac{1}{3} \frac{\left( \frac{\dot{\psi}^2}{v^2 a^2} - M^2 \psi^2 \right)}{\left( \frac{\dot{\psi}^2}{v^2 a^2} + M^2 \psi^2 \right)}. \quad (4.49)$$

con  $a \approx 1$  y  $w_\psi = -1$ , entonces

$$\psi = \psi_0 \exp \left( \sqrt{\left| \frac{v^2 M^2}{2} \right|} (t - t_0) \right),$$

con  $\psi_0$  el valor actual del campo. Insertando este resultado en la ecuación de la aceleración 4.46 y resolviendo para a, se encuentra

$$a = \sqrt{\frac{\kappa}{6}} \frac{\psi_0}{|v^2|} \exp \left( \sqrt{\left| \frac{v^2 M^2}{2} \right|} (t - t_0) \right), \quad (4.50)$$

donde tenemos una aceleración positiva y creciente en el tiempo, que se reescribe como  $a = a_0 \exp \left( \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c (t - t_0) \right)$  entonces

$$\Lambda_{eff} = \frac{3 |v^2 M^2|}{2 c^2}.$$

Con en análisis anterior se llega a que la gráfica del parámetro de aceleración para constante cosmológica  $\Lambda$  y para campo escalar de fonones  $\phi$ , es la gráfica 4.10.

Usando las variaciones para el lagrangiano 4.37:

**Variando a:**

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{3}ka^2M^2\phi^2 - \frac{1}{6}\frac{k\dot{\phi}^2}{c^2}, \quad (4.51)$$

donde claramente se ve que  $\ddot{a}$  no necesariamente es mayor que cero, como en el caso de Fonones.

**Variando N:**

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{k}{6}\left(\frac{\dot{\phi}^2}{c^2} + a^2M^2\phi^2\right). \quad (4.52)$$

**Variando  $\phi$**

$$\ddot{\phi} = -\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a} - a^2c^2M^2\phi \quad (4.53)$$

reescribiendo tenemos

$$\ddot{\phi} + H\dot{\phi} + a^2c^2M^2\phi = 0, \quad (4.54)$$

donde comparando la ec. 4.54, con la de un oscilador armónico amortiguado, vemos que el término con  $\dot{\phi}$  es de frenado, lo que indica que la expansión con fonones es mayor. Tomando la solución general del oscilador armónico amortiguado tenemos que esta se puede escribir  $\phi(t) = e^{-Ht/2}(A\cos(\sqrt{a^2c^2M^2 - \frac{H^2}{4}}t) + B\sen(\sqrt{a^2c^2M^2 - \frac{H^2}{4}}t))$ . Con A y B dependientes de las condiciones iniciales. Donde se ve claramente que si t crece,  $\phi(t)$  decrece hasta detenerse.

Como vimos en la sección 3.1.1, la aceleración para la constante cosmológica está dada por  $a \approx e^{Ht}$  con  $H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$  y esta, en tiempos de  $10^{-36}s$  a  $10^{-34}s$  expande  $10^{43}$ ; que es mayor a  $10^{27}$ , necesaria para inflación. Y como sabemos la relación entre parámetros de aceleración para constante cosmológica y campo escalar de fonones  $q_\Lambda < q_\psi$  entonces  $\psi$  en este tiempo expande más que  $\Lambda \approx 10^{43}$ .





## Análisis Dinámico

Este capítulo se basa en el artículo [43].

En cosmología el análisis dinámico juega un papel muy importante, debido a la información que se obtiene de éste sobre la evolución del universo. Mediante la resolución del sistema de ecuaciones se obtienen los puntos críticos, los cuales indican la estabilidad y así dan información sobre la dinámica del sistema.

Esta descripción requiere condiciones iniciales correspondiente a el modelo a analizar En esta tesis se desarrolla el análisis dinámico para un modelo propuesto en [25] para la expansión acelerada del universo en la actualidad.

### 5.1. Sistema de Ecuaciones

Iniciando con un universo espacialmente plano, con métrica F-R-W conteniendo un campo escalar  $\phi$  y un fluido barotrópico ( $p_m = w_m \rho_m$ ), las ecuaciones de conservación para materia y el campo escalar son

$$\dot{\rho}_m + 3H(1 + w_m)\rho_m = 0, \quad (5.1)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \quad (5.2)$$

donde  $\rho_m$  es la densidad de materia del fluido,  $H$  es el parámetro de Hubble,  $w_m$  es la densidad de materia del fluido,  $\dot{\phi}$  y  $\ddot{\phi}$  son la primera y segunda derivada del campo escalar, respectivamente, y  $V(\phi)$  es el potencial del campo escalar. Ahora tomando

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}[\rho_m + \rho_\phi] \quad (5.3)$$

y dividiendo por  $H^2$ , tenemos la condición  $1 = \Omega_m + \Omega_\phi$  (debido a que  $3H^2/8\pi G = \rho_{crit}$  y  $\rho_i/\rho_{crit} = \Omega_i$ ), con  $\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)$  (ec.2.16),  $p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)$ (ec.2.17) y el potencial

## CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DINÁMICO

---

supuesto para inflación  $V(\phi) = \frac{m^2\phi^2}{2}$ . Podemos definir las siguientes variables

$$x \equiv \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}M_{pl}H}, \quad y \equiv \frac{\sqrt{V(\phi)}}{\sqrt{3}M_{pl}H}, \quad \lambda \equiv -\frac{M_{pl}}{V(\phi)} \frac{dV(\phi)}{d\phi} \quad (5.4)$$

donde  $M_{pl}^2 = \frac{1}{8\pi G}$  es la masa de Planck (y asegura adimensionalidad de las variables), tomando la relación  $\Omega_\phi = x^2 + y^2$  y por restricción de Friedmann  $\Omega_\phi \leq 1$ , por construcción  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  y  $-\infty < \lambda < \infty$ . Note que  $\lambda$  por el análisis corresponder a un campo escalar real, no tiene cotas.

En ec. (5.3), se tiene el cuadrado de H, despejando se tiene

$$H = \frac{1}{\sqrt{3}M_{pl}} \left( \sqrt{\rho_m + \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)} \right) \quad (5.5)$$

derivando respecto el tiempo se llega a  $\dot{H}$ ,

$$\dot{H} = \frac{1}{\sqrt{3}M_{pl}} \frac{1}{2} \left( \rho_m + \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \dot{\rho}_m + \ddot{\phi}\dot{\phi} + \frac{dV(\phi)}{dt} \right)$$

con  $\frac{dV(\phi)}{dt} = \frac{dV(\phi)}{d\phi}\dot{\phi}$ , se llega a

$$\dot{H} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3}M_{pl}} \left[ \frac{-3H(1+w_m)\rho_m - 3\dot{\phi}^2 H - \phi dV/d\phi + \phi dV/d\phi}{\left( \rho_m + \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right)^{1/2}} \right]$$

y usando la ec. (5.5)

$$\dot{H} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3}M_{pl}} \left[ \frac{-3H((1+w_m)\rho_m + \dot{\phi}^2)}{\sqrt{3}M_{pl}H} \right]$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2M_{pl}^2} \left[ (1+w_m)\rho_m + \dot{\phi}^2 \right]$$

usando  $M_{pl}^2 = \frac{1}{8\pi G}$ , resulta

$$\dot{H} = -4\pi G[(1+w_m)\rho_m + \dot{\phi}^2], \quad (5.6)$$

Por lo que  $\frac{\dot{H}}{H^2}$  se encuentra con el procedimiento a continuación

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2} \frac{(1+w_m)\rho_m + \dot{\phi}^2}{\rho_m + \rho_\phi}$$

sustituyendo valores de la ec. (5.3) y de las variables estándar tomadas  $x$ ,  $y$  y  $M_{pl}$

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3(1+w_m)\left(\frac{3H^2}{8\pi G} - \rho_\phi\right) + 6x^2 M_{pl} H^2}{\frac{3H^2}{8\pi G} - \rho_\phi + \rho_\phi}$$

recordando que  $\rho_\phi = \dot{\phi}^2/2 + V(\phi)$

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{1}{2M_{pl}^2 H^2} \left[ (1+w_m)3M_{pl}^2 H^2 - \frac{(1+w_m)\dot{\phi}^2}{2} - (1+w_m)V(\phi) + 6x^2 M_{pl}^2 H^2 \right]$$

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{1}{2M_{pl}^2 H^2} \left[ (1+w_m)3M_{pl}^2 H^2 - 3(1+w_m)x^2 M_{pl}^2 H^2 - 3(1+w_m)y^2 M_{pl}^2 H^2 + 6x^2 M_{pl}^2 H^2 \right]$$

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2} [1 + w_m - x^2 - w_m x^2 - y^2 - y^2 w_m + 2x^2]$$

finalmente agrupando, resulta

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{3}{2} [(1+w_m)(1-y^2) + x^2(1-w_m)]. \quad (5.7)$$

Tomando  $x$  y  $y$ , derivando respecto a  $N$  (donde  $N$  es el tiempo conforme), con  $\frac{dx}{dN} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dN}$ , se llega a  $x' = \frac{dx}{dN} = \frac{1}{H} \dot{x}$ , así

$$x' = \frac{\ddot{\phi}}{\sqrt{6}M_{pl}H^2} - \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}M_{pl}} \frac{\dot{H}}{H^2},$$

ahora, sustituyendo  $\ddot{\phi}$  de la ec. (5.2), se tiene

$$x' = \frac{-3\dot{\phi}}{\sqrt{6}M_{pl}H} - \frac{\frac{dV(\phi)}{d\phi}}{\sqrt{6}M_{pl}H^2} - x \frac{\dot{H}}{H^2}$$

y tomando los valores de las variables del análisis, se obtiene

$$x' = \frac{\sqrt{6}}{2} \lambda y^2 + \frac{3}{2} x [(1+w_m)(1-y^2) + x^2(1-w_m)] - 3x. \quad (5.8)$$

Ahora para encontrar  $y' = \frac{\dot{y}}{H}$ , se tiene

$$y' = \frac{\dot{V}V^{1/2}}{2\sqrt{3}VM_{pl}H^2} - \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{3}M_{pl}H} \frac{\dot{H}}{H^2}$$

sustituyendo valores de  $x$ ,  $y$ ,  $\lambda$  y  $\dot{H}/H^2$ , obtenemos

$$y' = -\frac{\dot{\phi}V^{1/2}dV/d\phi}{\sqrt{6}\sqrt{3}M_{pl}H^2V} + \frac{3}{2}y[(1+w_m)(1-y^2) + x^2(1-w_m)].$$

$$y' = -\frac{\sqrt{6}}{2}\lambda xy + \frac{3}{2}y[(1+w_m)(1-y^2) + x^2(1-w_m)]. \quad (5.9)$$

Para  $\lambda$ , se sigue el mismo procedimiento  $\lambda' = \frac{\dot{\lambda}}{H}$ , así

$$\lambda' = \frac{M_{pl}\dot{V}(\phi)\frac{dV(\phi)}{d\phi}}{V(\phi)^2H} - \frac{\frac{dV(\phi)}{d\phi}\dot{M}_{pl}}{V(\phi)H},$$

Factorizando términos se tiene

$$\lambda' = -\frac{M_{pl}}{HV(\phi)^2} \left[ \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2}\dot{\phi}V(\phi) - \left( \frac{dV(\phi)}{d\phi} \right)^2 \dot{\phi} \right],$$

ahora factorizando  $(dV(\phi)/d\phi)^2\dot{\phi}$

$$\lambda' = -\frac{M_{pl}}{HV(\phi)^2} \left( \frac{dV(\phi)}{d\phi} \right)^2 \dot{\phi} \left[ \frac{\frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2}V(\phi)}{\left( \frac{dV(\phi)}{d\phi} \right)^2} - 1 \right],$$

sustituyendo el valor de  $V(\phi) = \frac{M\phi^2}{2}$  (dentro de los corchetes) para nuestro sistema y completando  $x$  y  $\lambda$ ,

$$\lambda' = \frac{1}{2} \frac{M_{pl}^2}{V(\phi)^2} \frac{\dot{\phi}^2}{6M_{pl}^2H^2} \left( \frac{dV(\phi)}{d\phi} \right)^2$$

así se obtiene

$$\lambda' = \frac{\sqrt{6}}{2}\lambda^2x. \quad (5.10)$$

Para hacer un análisis, es útil tener variables acotadas. En este caso se hace el siguiente cambio de variable de  $\lambda$  a  $u$

$$u = \begin{cases} \frac{\lambda}{1+\lambda} & u \in [0,1) \text{ si } \lambda \in [0,\infty) \\ \frac{\lambda}{1-\lambda} & u \in (-1,0] \text{ si } \lambda \in (-\infty,0] \end{cases}$$

así  $\lambda = \frac{u}{1 \pm u}$ . Sustituyendo este valor en (5.8), (5.9) y (5.10) el nuevo sistema es

$$x' = \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{u}{1 \pm u} y^2 + \frac{3}{2}x[(1+w_m)(1-y^2) + x^2(1-w_m)] - 3x, \quad (5.11)$$

$$y' = -\frac{\sqrt{6}}{2} \frac{u}{1 \pm u} xy + \frac{3}{2} y [(1 + w_m)(1 - y^2) + x^2(1 - w_m)], \quad (5.12)$$

tomando la derivada de  $\lambda$ ,  $\lambda' = u'/(1 \pm u)^2$

$$u'/(1 \pm u)^2 = \frac{\sqrt{6}}{2} \left( \frac{u}{1 \pm u} \right)^2 x,$$

así, resulta

$$u' = \frac{\sqrt{6}}{2} u^2 x. \quad (5.13)$$

Con este sistema autónomo y adimensional por construcción, podemos encontrar los puntos críticos  $(x_c, y_c, u_c)$ , tales que  $x'(x_c, y_c, u_c) = y'(x_c, y_c, u_c) = u'(x_c, y_c, u_c) = 0$ .

Basta con observar cada ecuación y verificar para que valores de las variables, estas se hacen cero. Para la ec. 5.11, las combinaciones posibles son:  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, u)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$  y  $(-1, 0, 0)$ . Para la ec. 5.12:  $(0, 0, 0)$ ,  $(\pm 1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(0, 0, u)$ . Para la ec. 5.13 basta que  $u = 0$  o  $x = 0$ . Note que  $(0, 0, 0)$  es un caso particular de  $(0, 0, u)$ .

Los puntos críticos del sistema son:

$$P = (0, 0, u), \quad (5.14)$$

$$A = (1, 0, 0), \quad (5.15)$$

$$B = (-1, 0, 0), \quad (5.16)$$

$$C = (0, 1, 0). \quad (5.17)$$

## 5.2. Características de los Puntos Críticos

Verificando las ecuaciones 5.4, para  $x$ ,  $y$  y  $u$ , que podemos escribir como  $x^2 \sim \dot{\phi}^2$  y  $y^2 \sim V(\phi)$ , las cuales podemos sustituir en los valores para densidad y presión de un campo escalar  $\phi$ ,  $\rho = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + V(\phi)$  y  $p = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 - V(\phi)$ , tenemos para cada punto crítico lo siguiente

$$\begin{aligned} P : & \quad p_\phi \sim 0 \quad \rho_\phi \sim 0 \\ A : & \quad p_\phi \sim 1 \quad \rho_\phi \sim 1 \\ B : & \quad p_\phi \sim 1 \quad \rho_\phi \sim 1 \\ C : & \quad p_\phi \sim -1 \quad \rho_\phi \sim 1 \end{aligned} \quad (5.18)$$

donde se observa que el punto crítico  $C$  es el que me puede producir expansión acelerada en su dinámica por condición de presión negativa.

Calculando el parámetro de desaceleración partiendo de la ec.  $q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$ , y tomando que  $H = \dot{a}/a$ , por lo que

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}$$

dividiendo entre  $H^2$

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2}}{\frac{\dot{a}^2}{a^2}} = \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} - 1$$

reescribiendo

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2}$$

sustituyendo el valor de  $\dot{H}/H^2$ , ec. (5.7)

$$q = -1 + \frac{3}{2}[(1 + w_m)(1 - y^2) + x^2(1 - w_m)]$$

$$q = -1 + \frac{3}{2}[1 + w_m - y^2 - y^2w_m + x^2 - w_mx^2]$$

agrupando términos

$$q = -1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}[w_m(1 - x^2 - y^2) + (x^2 - y^2)]$$

llegando a la forma final

$$q = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}[w_m(1 - x^2 - y^2) + (x^2 - y^2)] \quad (5.19)$$

cuya expresión nos indica que para valores  $q > 0$  el punto crítico desacelera y para  $q < 0$  acelera. Entonces al sustituir  $w_m = 0$  (con densidad materia cero) y los valores críticos  $x$  y  $y$ , resulta

$$\begin{aligned} P : \quad q_\phi &= \frac{1}{2}, \\ A : \quad q_\phi &= 2, \\ B : \quad q_\phi &= 2, \\ C : \quad q_\phi &= -1, \end{aligned} \quad (5.20)$$

donde se muestra que en la dinámica del sistema, el  $C = (0, 1, 0)$ , está acelerado.

Ahora calculando el parámetro de densidad  $\omega_\phi = \frac{p}{\rho}$ , donde  $\frac{p}{H^2} = x^2 - y^2$  y  $\frac{\rho}{H^2} = x^2 + y^2$  ( $H^2$  elimina dimensiones), en el cual se muestra que para  $C = (0, 1, 0)$ , es similar a la constante cosmológica, y que produce una aceleración positiva.

$$\begin{aligned} P : \quad \omega_\phi &= \text{indet}, \\ A : \quad \omega_\phi &= 1, \\ B : \quad \omega_\phi &= 1, \\ C : \quad \omega_\phi &= -1. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Agupando todos los resultados anteriores para cada punto crítico, tenemos la tabla 5.1, donde  $\Omega_\phi = x^2 + y^2$ ,

<b>P. crítico</b>	$q$	$\omega_\phi$	$\Omega_\phi$	$p_\phi$	Existencia
<b>A</b>	2	1	1	1	Siempre
<b>B</b>	2	1	1	1	Siempre
<b>C</b>	-1	-1	1	-1	Siempre
<b>P</b>	1/2	Indet.	0	0	Siempre

Cuadro 5.1: Puntos críticos y sus característica del sistema dinámico 5.11.

### 5.3. Teorema de la Variedad Central

Regresando al sistema de ecuaciones (5.11), (5.12) y (5.13) y expandiendo en series de Taylor<sup>1</sup> alrededor de  $P_c$  con  $\Delta z = z - z_0$ , hasta primer orden, tendiendo:

$$\begin{aligned} \Delta x' = & \left[ -3 + \frac{3}{2}(1 + w_m)(1 - y^2) + \frac{9}{2}x^2(1 - w_m) \right] \Big|_{P_c} \Delta x + \left[ \sqrt{6} \frac{u}{1 \pm u} y - 3xy(1 + w_m) \right] \Big|_{P_c} \Delta y \\ & + \left[ \frac{\sqrt{6}}{2} y^2 \left( \frac{1}{1 \pm u} \mp \frac{u}{(1 \pm u)^2} \right) \right] \Big|_{P_c} \Delta u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta y' = & \left[ -\frac{\sqrt{6}}{2} \frac{u}{1 \pm u} y + 3yx(1 - w_m) \right] \Big|_{P_c} \Delta x \\ & + \left[ -\frac{\sqrt{6}}{2} \frac{u}{1 \pm u} x + \frac{3}{2}(1 + w_m)(1 - y^2) + \frac{3}{2}x^2(1 - w_m) - 3y^2(1 + w_m) \right] \Big|_{P_c} \Delta y \\ & + \left[ -\frac{\sqrt{6}}{2} xy \left( \frac{1}{1 \pm u} \mp \frac{u}{(1 \pm u)^2} \right) \right] \Big|_{P_c} \Delta u \end{aligned}$$

$$\Delta u' = \left( \frac{\sqrt{6}}{2} u^2 \right) \Big|_{P_c} \Delta x + \left( \sqrt{6} xu \right) \Big|_{P_c} \Delta u.$$

Escribiendo la matriz de derivadas, la matriz jacobiana,

$$\begin{pmatrix} \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial u} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial u} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial u} \end{pmatrix} \Big|_{P_c} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta u \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup>La serie de Taylor de una función  $f$  real o compleja  $f(x)$  infinitamente diferenciable en el entorno de un número real o complejo  $a$  es la siguiente serie de potencias:  $f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$

## CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DINÁMICO

---

Con la matriz anterior se pueden encontrar los eigenvalores asociados a cada matriz y así a cada punto crítico, para usar la siguiente tabla.

Donde la matriz con los valores de  $P_c$  anteriores son:

$$\text{Para } P = (0, 0, u): J = \begin{pmatrix} -3 + \frac{3}{2}(1 + w_m) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}(1 + w_m) & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{2}u^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{para } A = (1, 0, 0): J = \begin{pmatrix} 3(1 - w_m) & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{para } B = (-1, 0, 0): J = \begin{pmatrix} 3(1 - w_m) & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{para } C = (0, 1, 0): J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 & -3(1 + w_m) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analizando las matrices para encontrar los eigenvalores<sup>2</sup>, usando  $\det(A - \lambda I) = 0$ , tomando en cuenta la siguiente tabla 5.2, se obtiene información sobre la dinámica de los puntos críticos.

Estabilidad	Condiciones
<b>Nodo Estable</b>	$\lambda_i \neq \lambda_j$ y $(\lambda_i, \lambda_j \in \Re) < 0$
<b>Nodo Inestable</b>	$\lambda_i \neq \lambda_j$ y $(\lambda_i, \lambda_j \in \Re) > 0$
<b>Foco</b>	$\lambda_i \in \mathbb{C}$ y $\Re(\lambda) > 0$
<b>Centro</b>	$\lambda_i \in \mathbb{C}$ y $\Re(\lambda) = 0$
<b>Punto silla</b>	$\lambda_i \neq \lambda_j, \lambda_i > 0$ y $\lambda_j < 0$

Cuadro 5.2: Eigenvalores y estabilidad para cada punto crítico.

Con los resultados de la tabla 5.2, los puntos críticos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $P$  y su dinámica se muestra en la tabla 5.3, la cual indica que un análisis lineal no es válido debido a un eigenvalor igual a cero en cada punto crítico.

---

<sup>2</sup>Si se tiene un sistema dinámico lineal  $\dot{x} = Ax$ , es fácil conocer que tipo de punto fijo presenta dicho sistema; simplemente se calculan los eigenvalores  $\lambda$  a partir de la ecuación característica del sistema  $\det(A - \lambda I) = 0$  y se analiza la relación que hay entre los eigenvalores.



Punto crítico	ev1	ev2	ev3	Estabilidad
<b>A</b>	$3 - 3w_m$	3	0	Inestable
<b>B</b>	$3 - 3w_m$	3	0	Inestable
<b>C</b>	-3	$-3(1 + w_m)$	0	Inestable
<b>P</b>	$-3 + 3/2(1 + w_m)$	$3/2(1 + w_m)$	0	Inestable

Cuadro 5.3: Eigenvalores y estabilidad para cada punto crítico.

En el análisis,  $J$ , tiene un renglón de ceros o un determinante igual a cero, que provoca un eigenvalor igual a cero en cada caso, por lo que estos puntos críticos son no hiperbólicos; estos casos requieren de un análisis más avanzado. El cual muestra a continuación usando el Teorema de variedad central<sup>3</sup> [38], el cual se puede usar para el punto crítico  $C$  pues se tienen eigenvalores negativos. Primeramente diagonalizaremos<sup>4</sup> la matriz jacobiana para  $C$ , pero con la fila  $u$  como la primera, es decir  $(u, x, y)$  y haciendo un cambio de variable ( $Y = y - y_c$ ,  $X = x$ ,  $U = u$ ) para mover este punto crítico al origen, el sistema queda como:

$$\begin{aligned}
 X' &= \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{U}{1 \pm U} (Y + 1)^2 + \frac{3}{2} X [(1 + w_m)(-Y^2 - 2Y) + X^2(1 - w_m)] - 3X \\
 Y' &= -\frac{\sqrt{6}}{2} \frac{U}{1 \pm U} X(Y + 1) + \frac{3}{2} (Y + 1) [(1 + w_m)(-Y^2 - 2Y) + X^2(1 - w_m)] \\
 U' &= \frac{\sqrt{6}}{2} U^2 X
 \end{aligned}$$

y retomando la matriz  $J$  para el punto crítico  $C = (0, 1, 0)$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3(1 + w_m) \end{pmatrix}.$$

Al diagonalizar ( $J = SQS^{-1}$ ) resulta:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3(1 + w_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3(1 + w_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<sup>3</sup>El teorema de la variedad central proporciona un medio para reducir sistemáticamente la dimensión del espacio de estados proyectando la dinámica sobre una variedad adecuada llamada *variedad central* y que se corresponde con los autovalores de parte real nula.

<sup>4</sup>En álgebra lineal, una matriz cuadrada  $A$  se dice que es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal. Es decir, si mediante un cambio de base puede reducirse a una forma diagonal. En este caso, la matriz podrá descomponerse de la forma  $A = PDP^{-1}$ .

## CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DINÁMICO

---

Pero se requiere que la matriz diagonal, tenga la forma

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}.$$

donde  $C$  y  $P$  son submatrices, las cuales son cuadradas  $1 \times 1$  y  $2 \times 2$ , respectivamente. Eligiendo  $C$  la fila o variable que no nos da información del sistema. Por lo que se busca  $S$  y  $S^{-1}$  tal que,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3(1+w_m) \end{pmatrix} = (S^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3(1+w_m) \end{pmatrix} (S)$$

donde la primer matriz es la diagonal de la matriz  $J$ , pero cambiando las filas para que se quede en la forma de submatrices  $C$  y  $P$ . Sustituyendo  $S^{-1}$  por  $[(a, b, c), (d, e, f), (g, h, i)]$  y  $S$  en mayúsculas, y resolviendo el sistema de ecuaciones. Las matrices resultantes son

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando esta  $S^{-1}$  podemos llegar a un nuevo sistema:

$$\begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} U \\ X \\ Y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{U}' \\ \tilde{X}' \\ \tilde{Y}' \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} U' \\ X' \\ Y' \end{pmatrix}$$

donde la anterior transformación corresponde al análisis mediante el teorema de la variedad central. Resultando

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}' \\ \tilde{X}' \\ \tilde{Y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U' \\ X' \\ Y' \end{pmatrix}.$$

Tomando en cuenta esta condición resulta el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \tilde{U}' &= U' \\ \tilde{X}' &= -\frac{1}{\sqrt{6}}U' + X' \\ \tilde{Y}' &= Y' \end{aligned}$$

usando las identidades anteriores y los valores para  $U$ ,  $X$ , y  $Y$ , con sus respectivas derivadas, se llega a las expresiones finales:

$$\tilde{U}' = \frac{\sqrt{6}}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{6}}\tilde{U} + \tilde{X} \right) \tilde{U}^2, \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{Y}' &= -\frac{\sqrt{6}}{2} \frac{\tilde{U}}{1 \pm \tilde{U}} (\tilde{Y} + 1) \left( \tilde{X} + \frac{1}{\sqrt{6}} \tilde{U} \right) \\
 &\quad - \frac{3}{2} \tilde{Y} \left[ (1 + w_m) (\tilde{Y}^2 + 2\tilde{Y}) - \left( \tilde{X} + \frac{1}{\sqrt{6}} \tilde{U} \right)^2 (1 - w_m) \right] \\
 &\quad - \frac{3}{2} (1 + w_m) \tilde{Y}^2 - 3(1 + w_m) \tilde{Y} + \frac{3}{2} \left( \tilde{X} + \frac{1}{\sqrt{6}} \tilde{U} \right)^2 (1 - w_m) \\
 \tilde{X}' &= \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{\tilde{U}}{1 \pm \tilde{U}} (\tilde{Y} + 1)^2 - \frac{3}{2} \tilde{Y} \left( \tilde{X} + \frac{1}{\sqrt{6}} \tilde{U} \right) (1 + w_m) (\tilde{Y} + 2) \\
 &\quad + \frac{3}{2} (1 - w_m) \left( \tilde{X} + \frac{1}{\sqrt{6}} \tilde{U} \right)^3 - 3 \left( \tilde{X} + \frac{1}{\sqrt{6}} \tilde{U} \right).
 \end{aligned}$$

Ya con el nuevo sistema de ecuaciones y usando la matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3(1 + w_m) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} C_{1 \times 1} & 0 \\ 0 & P_{2 \times 2} \end{pmatrix}$$

donde  $C_{1 \times 1}$  es la matriz con eigenvalores cero, y  $P_{2 \times 2}$  es la matriz de eigenvalores negativos, siguiendo el teorema de variedad central [38], se sustituye en el nuevo sistema

$$\tilde{U}' = C\tilde{U} + F(\tilde{U}, h_x(\tilde{U}), h_y(\tilde{U})) \tag{5.23}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}' \\ \tilde{Y}' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} h_x(\tilde{U}) \\ h_y(\tilde{U}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_x(\tilde{U}, h_x(\tilde{U}), h_y(\tilde{U})) \\ G_y(\tilde{U}, h_x(\tilde{U}), h_y(\tilde{U})) \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

donde  $h_x(\tilde{U}) = a_1\tilde{U} + a_2\tilde{U}^2 + a_3\tilde{U}^3$  y  $h_y(\tilde{U}) = b_1\tilde{U} + b_2\tilde{U}^2 + b_3\tilde{U}^3$ , así  $Dh_x(\tilde{U}) = a_1 + 2a_2\tilde{U} + 3a_3\tilde{U}^2$  y  $Dh_y(\tilde{U}) = b_1 + 2b_2\tilde{U} + 3b_3\tilde{U}^2$ . Usando la siguiente relación para conocer los valores para  $a_i$  y  $b_i$  con  $i = 1, 2, 3$  y así conocer  $h_x$  y  $h_y$ ,

$$\begin{pmatrix} Dh_x(\tilde{U}) \\ Dh_y(\tilde{U}) \end{pmatrix} [C\tilde{U} + F(\tilde{U}, h_x(\tilde{U}), h_y(\tilde{U}))] = P \begin{pmatrix} h_x(\tilde{U}) \\ h_y(\tilde{U}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_x(\tilde{U}, h_x(\tilde{U}), h_y(\tilde{U})) \\ G_y(\tilde{U}, h_x(\tilde{U}), h_y(\tilde{U})) \end{pmatrix}. \tag{5.25}$$

Con  $C = 0$ ,  $P = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3(1 + w_m) \end{pmatrix}$ , y con  $F$  y  $G$  la parte no lineal de  $\tilde{U}'$ ,  $\tilde{X}'$  y  $\tilde{Y}'$ , se llega al siguiente sistema para  $Dh_x(\tilde{U})$ :

$$Dh_x(\tilde{U})[(0)\tilde{U} + F(\tilde{U}, h_x(\tilde{U}), h_y(\tilde{U}))] = (-3)h_x(\tilde{U}) + G_x(\tilde{U}, h_x(\tilde{U}), h_y(\tilde{U}))$$

sustituyendo los valores

$$(a_1 + 2a_2\tilde{U} + 3a_3\tilde{U}^2) \left[ \frac{\sqrt{6}}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \tilde{U} + a_1\tilde{U} + a_2\tilde{U}^2 + a_3\tilde{U}^3 \right) \tilde{U}^2 \right] = -3(a_1\tilde{U} + a_2\tilde{U}^2 + a_3\tilde{U}^3)$$

$$+ \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{\tilde{U}}{1 \pm \tilde{U}} \left( (b_1 \tilde{U} + b_2 \tilde{U}^2 + b_3 \tilde{U}^3) + 1 \right)^2 - \frac{3}{2} (b_1 \tilde{U} + b_2 \tilde{U}^2 + b_3 \tilde{U}^3) \left( (a_1 \tilde{U} + a_2 \tilde{U}^2 + a_3 \tilde{U}^3) + \frac{1}{\sqrt{6}} \tilde{U} \right) \times \\ (1 + w_m) \left( (b_1 \tilde{U} + b_2 \tilde{U}^2 + b_3 \tilde{U}^3) + 2 \right) + \frac{3}{2} (1 - w_m) \left( (a_1 \tilde{U} + a_2 \tilde{U}^2 + a_3 \tilde{U}^3) + \frac{1}{\sqrt{6}} \tilde{U} \right)^3.$$

Desarrollando se obtiene la igualdad

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} a_1 \tilde{U}^3 + \frac{\sqrt{6}}{2} a_1^2 \tilde{U}^3 + \frac{\sqrt{6}}{2} a_1 a_2 \tilde{U}^4 + a_2 \tilde{U}^4 + \sqrt{6} a_1 a_2 \tilde{U}^4 + \sqrt{6} a_2^2 \tilde{U}^5 + \frac{3}{2} a_3 \tilde{U}^5 \\ & \quad + 5 a_2 a_3 \frac{\sqrt{6}}{2} \tilde{U}^6 + 2 a_1 a_3 \sqrt{6} \tilde{U}^5 + 3 a_3^2 \frac{\sqrt{6}}{2} \tilde{U}^7 \\ & = -3 a_1 \tilde{U} - 3 a_2 \tilde{U}^2 - 3 a_3 \tilde{U}^3 + \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{\tilde{U}}{1 \pm \tilde{U}} \left( b_1 \tilde{U} + b_2 \tilde{U}^2 + b_3 \tilde{U}^3 + 1 \right)^2 \\ & \quad - \frac{3}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \tilde{U} \right) (1 + w_m) \left[ (b_1 \tilde{U} + b_2 \tilde{U}^2 + b_3 \tilde{U}^3)^2 + 2(b_1 \tilde{U} + b_2 \tilde{U}^2 + b_3 \tilde{U}^3) \right] \\ & \quad - \frac{3}{2} a_1 \tilde{U} (1 + w_m) \left[ (b_1 \tilde{U} + b_2 \tilde{U}^2 + b_3 \tilde{U}^3)^2 + 2(b_1 \tilde{U} + b_2 \tilde{U}^2 + b_3 \tilde{U}^3) \right] \\ & \quad - \frac{3}{2} a_2 \tilde{U}^2 (1 + w_m) \left[ (b_1 \tilde{U} + b_2 \tilde{U}^2 + b_3 \tilde{U}^3)^2 + 2(b_1 \tilde{U} + b_2 \tilde{U}^2 + b_3 \tilde{U}^3) \right] \\ & \quad - \frac{3}{2} a_3 \tilde{U}^3 (1 + w_m) \left[ (b_1 \tilde{U} + b_2 \tilde{U}^2 + b_3 \tilde{U}^3)^2 + 2(b_1 \tilde{U} + b_2 \tilde{U}^2 + b_3 \tilde{U}^3) \right] \\ & \quad + \frac{3}{2} (1 - w_m) \left( a_1 \tilde{U} + a_2 \tilde{U}^2 + a_3 \tilde{U}^3 + \frac{1}{\sqrt{6}} \tilde{U} \right)^3 \end{aligned}$$

Igualando términos con  $\tilde{U}^i$  en ambos lados, se obtienen los valores  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 0$  y  $a_3 = 0$ , así  $h_x(\tilde{U}) = 0$ .

Ahora haciendo la sustitución en la ec. (5.22)  $\tilde{U}'(\tilde{U}, h_x(\tilde{U}), h_y(\tilde{U}))$ , resulta

$$\boxed{\tilde{U}' = \frac{1}{2} \tilde{U}^3.} \quad (5.26)$$

Graficando esta ecuación (Fig. 5.1) se observa que el punto crítico  $C$  es un repulsor en ambas direcciones. Pues del análisis lineal se sabe que el comportamiento para  $\tilde{U}' < 0$  las líneas de flujo van a la izquierda y para  $\tilde{U}' > 0$  a la derecha.

La gráfica siguiente (Fig. 5.2) muestra la dinámica de nuestro sistema, el cual corrobora la información del punto crítico analizado mediante el teorema de variedad central. En ésta el punto crítico  $C$ , es un repulsor, en el plano  $u = 0$  atrae por ser el punto de equilibrio y en órbitas que inician  $(x, y > 0, u > 0)$  son repelidas por el plano  $xu$  y por  $C$ . Las órbitas que inician en puntos  $(x, y = 0, u > 0)$ , se acercarán a

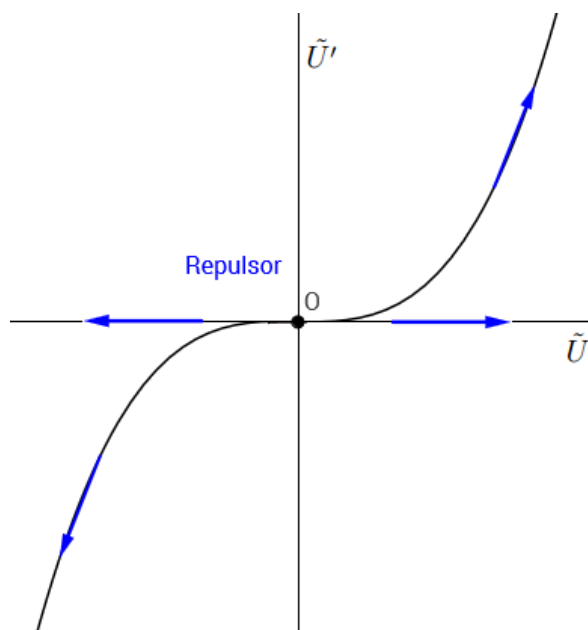


Figura 5.1: Gráfica de resultado final del análisis dinámico con el método de variable central. Realizó Reyes Manuel García García.

la variedad de puntos fijos  $(0, 0, u)$ , donde las órbitas inician en  $x \approx -1$  se acercarán primero al punto fijo  $B$  y se acercarán después a la variedad de puntos  $P$  y los que inician con una aproximación menor a  $x = -1$  actúa más la atracción de la variedad  $P$  que la de  $B$ ; y los que inician en  $x > 0$ , son repelidos por el punto fijo  $A$  y atraídos por la variedad de puntos  $P$ . Las órbitas superiores indican la naturaleza atractiva y repulsiva de los semiplanos  $(x < 0, y = 0, u > 0)$  y  $(x > 0, y = 0, u > 0)$ , respectivamente.

Tomando la ecuación para la aceleración de [38],

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2 + \dot{H},$$

en la cual se ve claramente que para un cambio en la aceleración de positiva a negativa, hay un punto en el que la aceleración es igual a cero, es decir que

$$H^2 = -\dot{H},$$

sustituyendo la ecuación del parámetro de desaceleración para el punto  $C$  (5.7) con  $w_m = 0$ , resulta

$$-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}y^2 - \frac{3}{2}x^2 = -1,$$

llegando a la ecuación parabólica

$$\frac{y^2}{1/3} - \frac{x^2}{1/3} = 1. \quad (5.27)$$

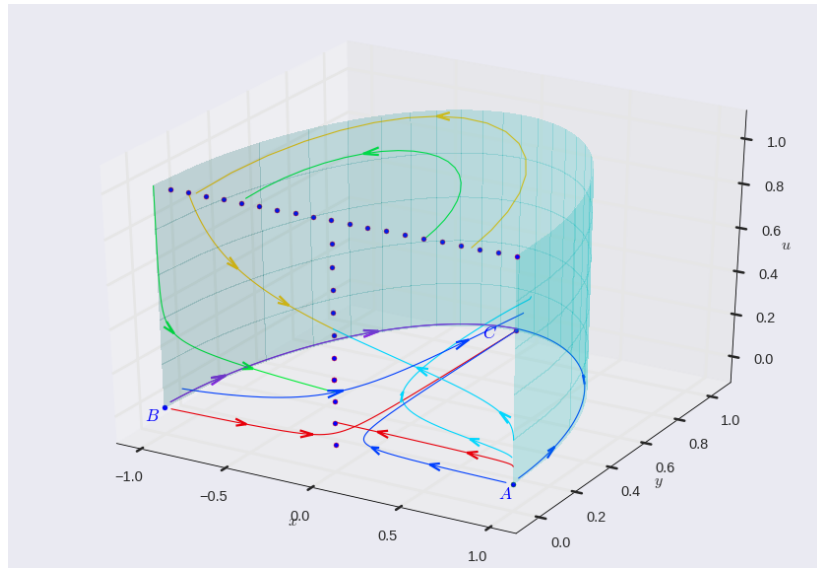


Figura 5.2: Gráfica del sistema correspondiente al análisis dinámico empleando la paquetería <https://bitbucket.org/elchinot7/pynccare>. Realizó Reyes Manuel García García.

Haciendo la proyección en el plano  $XY$  y graficando la aceleración obtenida al sustituir el parámetro de desaceleración actual  $(-0.61 \pm 0.05)$ [39] en la ec. 5.19, se concluye que la aceleración en el punto  $C$  es mayor a la actual, esto debido a que el parámetro de desaceleración es mayor en la actualidad.

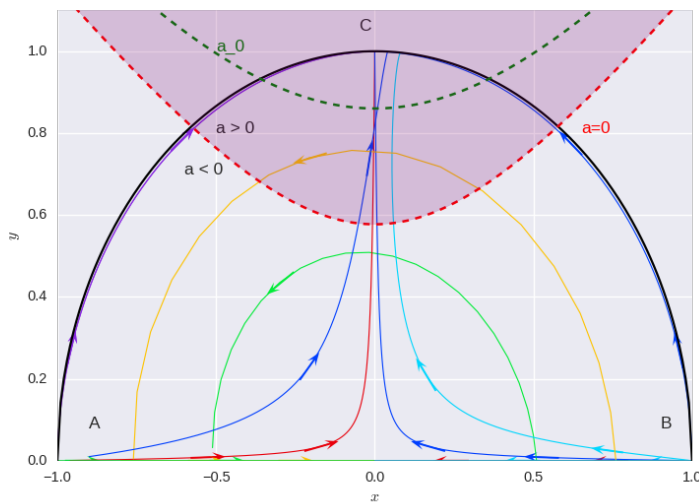


Figura 5.3: Gráfica del sistema correspondiente al análisis dinámico con proyección en el plano  $XY$ . Realizó Reyes Manuel García García.

Esto se muestra en la gráfica 5.3 en donde vemos que la aceleración mostrada por

la dinámica del punto crítico  $C$  es mayor que la observada en la actualidad. Tomando en cuenta que la aceleración es proporcionada por el parámetro de desaceleración. Esta expansión mayor corresponde a los parámetros utilizados y propios de su mecanismo. Claramente se puede usar este mecanismo para la etapa de inflación, donde si se conservan características del campo de fonones respecto a expansión mayor que la de constante cosmológica  $\Lambda$ , se produciría mayor aceleración.

De esta manera, mediante este análisis se tiene que el sistema de ecuaciones (5.11) puede cumplir las siguientes condiciones en el punto crítico de interés haciendo el análisis por medio del teorema de la variedad central y el análisis numérico de las ecuaciones:

- Produce una presión negativa de forma similar a el campo de constante cosmológica, que se sabe que podría producir expansión acelerada e inflación.
- Se tiene una aceleración positiva, obtenida al calcular el parámetro de desaceleración para el punto crítico de interés ( $C$ ).
- El parámetro de densidad es -1 similar al de la constante cosmológica.
- La gráfica de  $\tilde{U}\tilde{U}'$  (Fig. 5.1), confirma la dinámica del punto crítico  $C = (0, 1, 0)$ , para valores de  $\tilde{U} > 0$  se tiene un repulsor. Esto significa que el universo está en expansión dependiendo el valor del potencial del campo escalar, así será el parámetro de desaceleración. Por lo que depende directamente del comportamiento del campo para si se acelera o desacelera la expansión.
- La gráfica obtenida del análisis numérico en su proyección plano  $XY$  corrobora la información de la fig. 4.10, donde la aceleración mostrada es mayor que la generada por constante cosmológica que se propone como la actual.

## 5.4. Condiciones de Inflación

Las condiciones de Rodadura lenta (Slow roll) necesarias para producir suficiente inflación [38], las cuales indican condiciones para que un campo escalar tenga esta dinámica,

$$\left(\frac{V_{,\phi}}{V}\right)^2 \ll 1 \quad \left|\frac{V_{,\phi\phi}}{V}\right| \ll 1, \quad (5.28)$$

corresponden en términos de  $\lambda$  a,

$$\lambda^2 \ll 1 \quad \left|\frac{\lambda^2}{2}\right| \ll 1, \quad (5.29)$$

y realizando el cambio de variable anterior para  $\lambda$ , se tiene

$$\frac{u^2}{(1 \pm u)^2} \ll 1 \quad \frac{u^2}{2(1 \pm u)^2} \ll 1, \quad (5.30)$$

## CAPÍTULO 5. ANÁLISIS DINÁMICO

---

de donde se observa que los puntos críticos  $A$ ,  $B$  y  $C$  cumplen esta condición. Resolviendo la desigualdad resulta que para  $u \neq 0$ , se cumple la condición cuando:

$$\begin{aligned} \lambda^2 = \frac{u^2}{(1+u)^2} \ll 1 &\Rightarrow u \ll 0.5 \\ \lambda^2 = \frac{u^2}{(1-u)^2} \ll 1 &\Rightarrow u \gg -0.5 \end{aligned} \quad (5.31)$$

Por último partiendo de la predicción actual sobre la densidad de materia, dice que para  $\Omega_0 = 1$  las fluctuaciones cuánticas serían aproximadamente de orden  $10^{-5}$  (pag. 233 [20]). Usando la ecuación 5.32,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2 + \dot{H}, \quad (5.32)$$

donde radio  $|\dot{H}|/H^2$  crece al final de inflación. Asumiendo que  $H^2$  cambia mas rápido que  $\dot{H}$ , es decir,  $|\dot{H}| < 2H\dot{H}$ , se obtiene la siguiente estimación para la duración de inflación [38],

$$t_f \sim H_i/|\dot{H}_i|, \quad (5.33)$$

donde  $H_i$  y  $\dot{H}_i$  corresponden al comienzo de inflación. Los cambios de signo del lado derecho de la ecuación 5.32 indican cuando el universo inicia a desacelerarse.

La inflación debe durar el tiempo suficiente para estirar un pequeño dominio a la escala del universo observable. Reescribiendo la condición  $\dot{a}_i/\dot{a}_0 < 10^{-5}$  como

$$\frac{\dot{a}_i \dot{a}_f}{\dot{a}_f \dot{a}_0} = \frac{a_i H_i \dot{a}_f}{a_f H_f \dot{a}_0} < 10^{-5}, \quad (5.34)$$

y teniendo en cuenta que  $\dot{a}_f/\dot{a}_0$  debe ser mayor que  $10^{28}$  [38], concluimos que la inflación sólo es exitosa si

$$\frac{a_f}{a_i} > 10^{33} \frac{H_i}{H_f}. \quad (5.35)$$

Suponemos  $|\dot{H}_i| \ll H_i^2$  y omitiendo el cambio del parámetro de Hubble. Entonces la relación de los factores de escala puede ser estimada aproximadamente como

$$\frac{a_f}{a_i} \sim \exp(H_i t_f) \sim \exp(H_i^2/|\dot{H}_i|) > 10^{33} \quad (5.36)$$

Por lo tanto, el problema de inflación puede resolver las condiciones iniciales sólo si  $t_f > 75H_i^{-1}$ , es decir, dura más de 75 tiempos Hubble (e-folds). Reescribiendo en términos de los valores iniciales del parámetro Hubble y su derivada, esta condición toma la forma

$$\frac{|\dot{H}_i|}{H_i^2} < \frac{1}{75}. \quad (5.37)$$



Sustituyendo el valor para  $|\dot{H}_i|/H_i^2$ , la desigualdad se transforma,

$$\frac{3}{2}[(1 + w_m)(1 - y^2) + x^2(1 - w_m)] < \frac{1}{75}, \quad (5.38)$$

y con los valores para cada punto crítico, se tienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} P : & \quad \frac{3}{2}(1 + w_m) > 1/75, \\ A : & \quad 3 > 1/75, \\ B : & \quad 3 > 1/75, \\ C : & \quad 0 < 1/75. \end{aligned} \quad (5.39)$$

donde el punto crítico  $C = (0, 1, 0)$  cumple la condición necesaria de duración para que la expansión sea mayor que 75 e-folds.

La figura 5.1 tomando valores de  $\tilde{U} > 0$ , esto debido a que este campo de fonones sólo podría producir inflación y no recalentamiento pues es necesaria una estructura de red para que estos subsistan, al término de inflación fonones podrían ceder su energía a otro campo existente antes de decaer, pero el campo de fonones no decae en partículas elementales, no producen recalentamiento. Por ello,  $V(\phi) > 0$ , entonces  $\lambda \in [0, \infty)$  y así  $\tilde{U} > 0$ .

Se tienen las aportaciones de este análisis comparando con la etapa de inflación sobre duración y dinámica.

- Las condiciones de rodadura lenta son cumplidas por el punto crítico de interés, el punto  $C$ .
- El punto crítico de interés  $C = (0, 1, 0)$ , cumple la condición para que en inflación la expansión sea mayor a 75 e-folds.
- Al suponer que fonones sólo inflarían el universo y no producirían recalentamiento, es decir, no decaerían en el fondo oscilando, sino que por rodadura lenta producen inflación. En este escenario  $\tilde{U} > 0$ , así nuestra gráfica cúbica (Fig. 5.1) nos indica una dinámica de repulsor.



# Capítulo 6

## Conclusiones

La dinámica cosmológica que nos interesa en esta tesis es el de la expansión acelerada del universo, lo que se asume ocurrió en una época tempranísima del universo y actualmente también está ocurriendo. El mecanismo que se consideró en la discusión que presentamos en este trabajo para explicar este proceso, utiliza campos escalares, lo cual es un modelo típico para estos escenarios. En el enfoque que se presentó, el origen de estos campos escalares estaría ligado a las vibraciones de una estructura cosmológica que en este proceso podría producir fonones, a los cuales asumimos como agentes de la aceleración cosmológica.

Los fonones tomarían este papel tanto en la inflación inicial como en la época actual de expansión acelerada del universo.

El primero de estos escenarios (el de inflación) es uno que hemos empezado a estudiar y requiere de una modelación cuidadosa de varios aspectos de este proceso. Para el segundo escenario (la expansión acelerada actual) que se mostró en la tesis una contribución original: el análisis dinámico de las ecuaciones cosmológicas correspondientes a este proceso.

En este análisis se determinan los puntos críticos del sistema de ecuaciones considerado y para analizarlos se emplea el Teorema de la Variedad Central, resultando que uno de los puntos críticos obtenidos corresponde precisamente a un escenario de expansión acelerada.

Al comparar la aceleración obtenida en este modelo con el valor observado de la aceleración actual, vemos que los fonones producen una aceleración mayor que la observada, lo que nos pone por delante la pregunta de el origen de esta diferencia, misma que se busca explicar actualmente. En este sentido es interesante la discusión que recientemente ha surgido en relación a cómo los valores observados de algunos parámetros cosmológicos al tener variaciones importantes, según datos recientes, dependiendo del sistema físico del cual se obtengan podrían indicar la necesidad de nuevos modelos (

## CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

---

DOI: 10.1038/s 41550-017-0216-z).

El escenario que se está considerando, propone asociar el origen de los fonones a los efectos topológicos, esto es, partiendo de un escenario en el universo temprano, después del big bang y a través de las rupturas de simetría primigenias, son creados defectos topológicos (cuerdas cosmológicas, paredes de dominio, monopolos magnéticos y texturas), tales defectos están sumergidos en una temperatura tan grande que al suponer una estructura de sólido para las paredes, estas paredes vibran creando un campo de fonones. Si se considera una distribución uniforme en todo este universo temprano, se tendría un campo de fonones en todo el universo.

Teniendo un campo escalar en todo el universo temprano, concordando con la teoría inflacionaria, se propone un potencial cuadrático que cumpla con la condición de rodadura lenta y con una presión negativa durante ésta, de tal modo que se produzca una inflación (expansión acelerada). Esta expansión sería lo suficientemente grande para que este modelo se pueda tomar como inflatón; lo que vemos al comparar con el parámetro de aceleración para la constante cosmológica  $\Lambda$  (campo escalar de densidad constante) que produce inflación (véase Fig. 4.10), resulta que el campo escalar de fonones produce fácilmente una mayor inflación que  $\Lambda$ .

De esta manera, este campo crea inflación de manera natural partiendo del universo temprano y sin suponer un campo escalar de origen desconocido, sino siendo producido durante las transiciones de fase en la evolución del universo primigenio. Conociendo el comportamiento de dicho campo en los sólidos, se tiene que al desaparecer o diluirse la materia existente a causa de la expansión acelerada de inflación el campo de fonones desaparecería, esto debido a que el campo de fonones existe sólo a través de las vibraciones en la estructura de sólido, la cual se perdería al diluirse la distribución de paredes.

En esta Tesis se mostró que esta propuesta de inflatón natural produce la inflación suficiente para el universo observado actualmente. Al terminar inflación e iniciar el recalentamiento como la teoría inflacionaria lo propone, se necesitaría un mecanismo adicional; el propuesto pero no analizado en esta tesis, es la interacción entre el campo de fonones antes de diluirse y el campo de Higgs, que daría un extra de energía al campo Higgs final, el cual según análisis podría crear el recalentamiento del universo, es decir crear las partículas necesarias para la evolución del universo, y así concluir lo predicho por la teoría inflacionaria. El análisis del recalentamiento en el contexto de fonones implica varios detalles para su modelación.

Finalmente como lo se mencionó ya, se realizó un análisis dinámico a las ecuaciones de conservación sin interacción, (5.1) y (5.2), donde, mediante el teorema de variedad central y análisis numérico, con el campo considerado ( $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$ ) se obtiene un punto crítico silla  $C = (0, 1, 0)$ , cuyas características satisfacen condiciones de inflación (presión, aceleración y duración de inflación suficiente).

Concluyendo, las aportaciones importantes de este trabajo pueden resumirse así:

- \* Se propone un mecanismo de creación para el inflatón; dándole un origen y final a este campo escalar.
- \* El análisis dinámico realizado muestra la existencia de un punto crítico que puede producir expansión acelerada y que satisface las características de evolución para este campo en condiciones de aceleración, indicando el cumplimiento de algunas condiciones de inflación.
- \* La aceleración para el campo de fonones es mayor a la de constante cosmológica ( $a_\phi > a_\Lambda$ ). Esta diferencia debe ser explicada y actualmente se está analizando este punto.



# Apéndice **A**

## Cosmología y Mecánica Estadística

En mecánica estadística<sup>1</sup> la teoría de Maxwell-Boltzmann establece la siguiente relación entre entropía<sup>2</sup> y la probabilidad termodinámica,

$$S = k \ln \Omega \quad (\text{A.1})$$

donde  $S$  es la entropía,  $k$  la constante de Boltzmann ( $k = 1.3806488 * 10^{-23} JK^{-1}$ ) y  $\Omega$  el número de microestados<sup>3</sup> posibles en el sistema. La ecuación asume que todos los microestados tienen la misma probabilidad de aparecer.

La ecuación (A.1) nos dice que la cantidad de entropía de un sistema es proporcional al logaritmo natural del número de microestados posibles.

### Función de Partición

Para la física es muy importante calcular con qué probabilidad se encontrará un sistema en cierto estado de energía. Para calcular esta probabilidad, los microestados juegan un papel importante, ya que la probabilidad de un estado de energía en el sistema, es proporcional a los microestados asociados a esta energía, es decir

$$P(\epsilon_i) \approx \Omega(\epsilon_i)$$

tomemos 2 energías distintas para deducir la función de partición:

$$P(\epsilon_1) = \Omega(\epsilon_1)$$

$$P(\epsilon_2) = \Omega(\epsilon_2)$$

---

<sup>1</sup>*Mecánica estadística* es una rama de la física que mediante la teoría de probabilidad es capaz de deducir el comportamiento de los sistemas físicos macroscópicos

<sup>2</sup>La *entropía* es una magnitud física que mediante el cálculo, permite determinar la parte de energía que no puede utilizarse para producir trabajo.

<sup>3</sup>En mecánica estadística **un microestado** es la especificación detallada de una configuración microscópica de un sistema termodinámico (Un microestado es un punto en el espacio fase).

realizando el cociente

$$\frac{P(\epsilon_1)}{P(\epsilon_2)} = \frac{\Omega(\epsilon_1)}{\Omega(\epsilon_2)}$$

tomando en cuenta que probabilidad  $P(\epsilon_1) = P(U_0 - \epsilon_1) = \Omega(U_0 - \epsilon_1)$  despejando  $\Omega$  en la ley Maxwell-Boltzmann (A.1) y sustituyendo

$$\frac{P(\epsilon_1)}{P(\epsilon_2)} = \frac{e^{\frac{1}{k}(S(U_0 - \epsilon_1))}}{e^{\frac{1}{k}(S(U_0 - \epsilon_2))}} = e^{\frac{1}{k}(S(U_0 - \epsilon_1) - S(U_0 - \epsilon_2))}$$

expandiendo en serie de Taylor <sup>4</sup>

$$\frac{P(\epsilon_1)}{P(\epsilon_2)} = e^{\frac{1}{k} \left( \left( -\epsilon_1 \frac{\partial S}{\partial U} \Big|_{U_0} + \epsilon_2 \frac{\partial S}{\partial U} \Big|_{U_0} \right) \right)}$$

usando la relación de termodinámica  $\frac{\partial S}{\partial U} \Big|_{U_0} = \frac{1}{T}$ , con  $T$  temperatura, que nos dice que el cambio de la entropía respecto a la energía es igual al inverso de la temperatura, nos queda

$$\frac{P(\epsilon_1)}{P(\epsilon_2)} = \frac{e^{-\frac{\epsilon_1}{kT}}}{e^{-\frac{\epsilon_2}{kT}}},$$

por lo que

$$P(\epsilon_i) \approx e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}} \tag{A.2}$$

y ya que la suma de todas las probabilidades es uno,  $\sum_i P(\epsilon_i) = 1$ , normalizando la ec. (A.2) y así tenemos que se convierte en

$$P(\epsilon_i) = \frac{e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}}}{\sum_i e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}}} \tag{A.3}$$

aquí la función  $\sum_i e^{-\frac{\epsilon_i}{kT}}$  normaliza y se le llama *función de partición*  $z$ , donde  $z$  corresponde la suma de todos los valores posibles de energía del sistema.

### Función de Partición para Fotones

El fotón es la partícula asociada a la radiación electromagnética, incluyendo a los rayos gamma, los rayos X, la luz ultravioleta, la luz visible, la luz infrarroja, las microondas, y las ondas de radio. El fotón tiene masa cero y viaja en el vacío con una velocidad constante  $c$ .

Como todos los cuantos, el fotón presenta tanto propiedades corpusculares como ondulatorias ("dualidad onda-corpúsculo"). Se comporta como una onda en algunos fenómenos como la refracción que tiene lugar en una lente; o como una partícula cuando

---

<sup>4</sup>La serie de Taylor de una función  $f$  real o compleja  $f(x)$  infinitamente diferenciable en el entorno de un número real o complejo  $a$  es la siguiente serie de potencias:  $f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$ , y para nuestro problemas la serie es  $S(U_0 - \epsilon_i) = S(U_0) - \epsilon_i \frac{\partial S}{\partial U} \Big|_{U_0}$ .



interacciona con la materia para transferir una cantidad fija de energía. La energía de un fotón es proporcional a la frecuencia de la radiación:

$$E_\gamma = h\nu,$$

donde  $h$  es la constante de Planck ( $h = 6.62606957 * 10^{-34} J * s$ ),  $\nu$  es la frecuencia. Ahora si suponemos  $n$  niveles de energía, tenemos que la función de partición es

$$z_\gamma = \sum_n e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}} = \sum_n e^{-\frac{n h \nu}{kT}}, \quad (\text{A.4})$$

proponemos el cambio de variable  $X = e^{-\frac{h\nu}{kT}}$

$$z_\gamma = \sum_n X^n$$

vemos que la parte derecha es la serie geométrica que es  $\sum_n X^n = \frac{1}{1-X}$  regresando el cambio de variable nos queda que la *función de partición para los fotones con frecuencia  $\nu$*  es

$$\boxed{z_\gamma = \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}}.} \quad (\text{A.5})$$

### Promedio y Función de Partición

Para calcular la energía promedio  $\langle \epsilon_s \rangle$  escribimos

$$\langle \epsilon_s \rangle = \sum_{\epsilon_s} \epsilon_s P(\epsilon_s),$$

donde la sumatoria recorre todo el espectro de energías y  $P(\epsilon_s)$  es similar a la ec. (A.2) pero con el espectro  $\epsilon_s$ .

Cabe notar que  $\frac{\partial}{\partial T} e^{-\frac{\epsilon_s}{kT}} = \frac{\epsilon_s}{kT^2} e^{-\frac{\epsilon_s}{kT}}$  entonces completando el diferencial

$$\langle \epsilon_s \rangle = \sum_{\epsilon_s} \frac{\epsilon_s k T^2}{k T^2} \frac{e^{-\frac{\epsilon_s}{kT}}}{z} = k T^2 \sum_{\epsilon_s} \frac{\partial}{\partial T} \frac{e^{-\frac{\epsilon_s}{kT}}}{z}$$

viendo que  $\frac{\partial}{\partial T} \ln z = \frac{\frac{\partial}{\partial T} z}{z}$  y como  $\frac{\partial}{\partial T} z = \sum_{\epsilon_s} \frac{\partial}{\partial T} e^{-\frac{\epsilon_s}{kT}} = \sum_{\epsilon_s} \frac{\partial}{\partial T} e^{-\frac{\epsilon_s}{kT}}$ , obtenemos la expresión de la *energía promedio para un espectro  $\epsilon_s$* .

$$\langle \epsilon_s \rangle = k T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln z. \quad (\text{A.6})$$

**Energía Promedio para Fotones con frecuencia  $\nu$**

Para un gas de fotones ya obtuvimos la función de partición(A.5). Si sustituimos esta  $z_\gamma$  en la ecuación para calcular la energía promedio para fotones  $\epsilon_\gamma$ , tenemos

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_\gamma \rangle &= kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln \left( \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}} \right) \\ &= kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln \left( 1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right)^{-1} \\ &= -kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln \left( 1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right) \end{aligned}$$

derivando obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_\gamma \rangle &= -kT^2 \left( \frac{-\frac{h\nu}{kT^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}} \right) \\ &= \frac{h\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}} \end{aligned}$$

multiplicando por uno  $\left(\frac{e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{e^{-\frac{h\nu}{kT}}}\right) = 1$ , nos da como resultado que la **energía promedio por frecuencia  $\nu$**  es

$$\boxed{\langle \epsilon_\gamma \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}} \quad (\text{A.7})$$

**Promedio de Fotones por frecuencia**

Análogamente a como se calculó el promedio de energía por frecuencia, tenemos la siguiente expresión para calcular el número promedio de fotones con frecuencia  $\nu$ :

$$\langle n \rangle = \sum_n n P(\epsilon_n) = \frac{1}{z} \sum_n n e^{-\frac{h\nu n}{kT}}$$

realizando el cambio de variable  $Y = \frac{h\nu}{kT}$ , entonces

$$\langle n \rangle = \frac{1}{z} \sum_n n e^{-Yn}$$

notemos que  $\frac{\partial}{\partial Y} e^{-Yn} = -n e^{-Yn}$ , siendo así,

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \frac{1}{z} \sum_n \frac{\partial}{\partial Y} e^{-Yn} \\ &= \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial Y} \sum_n e^{-Yn} \end{aligned}$$

---

**APÉNDICE A. COSMOLOGÍA Y MECÁNICA ESTADÍSTICA**

---

y como  $\frac{\partial}{\partial Y} \sum_n e^{-Yn} = \frac{\partial}{\partial Y} z$ , decimos que

$$\langle n \rangle = -\frac{\partial}{\partial Y} \ln z \quad (\text{A.8})$$

y si se usa la función de partición obtenida para fotones, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= -\frac{\partial}{\partial Y} \ln (1 - e^{-Y})^{-1} \\ &= \frac{\partial}{\partial Y} \ln (1 - e^{-Y}) \end{aligned}$$

realizando la derivada obtenemos la expresión que nos indica el **promedio de fotones con frecuencia  $\nu$**

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (\text{A.9})$$

note que  $\langle \epsilon_\gamma \rangle = h\nu \langle n \rangle$ .

En la siguiente gráfica (A.1) de  $\langle n \rangle$  vs  $Y$  se ilustra cómo varía el promedio de fotones respecto la energía mostrando que el promedio de fotones es mayor cuando estos tienen poca energía, y es menor cuando tienen mayor energía.

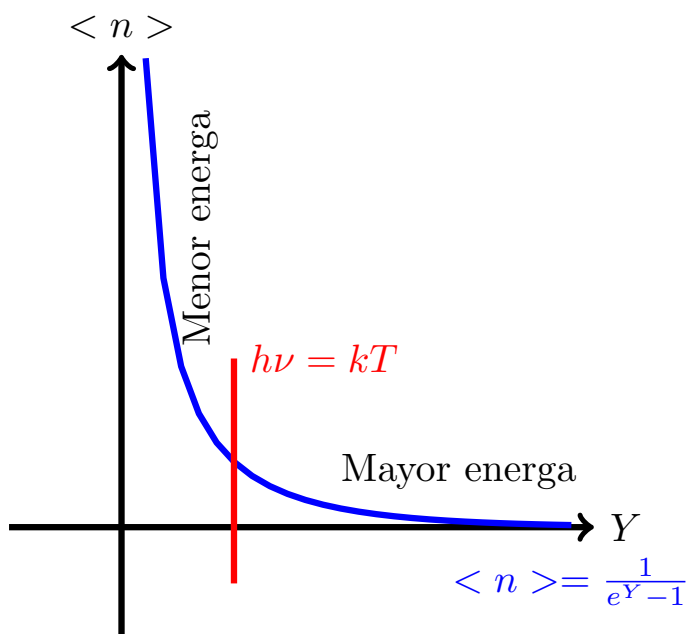


Figura A.1: Promedio de Fotones con Frecuencia  $\nu$ . *Realizó Reyes Manuel García García.*

### Ley de Planck

La ley de Planck describe la radiación electromagnética emitida por un cuerpo negro en equilibrio térmico a una temperatura definida. Nos dice que la distribución de la energía entre fotones esta dado como el producto del número de estados de fotones por frecuencia y energía promedio por frecuencia.

El número de microestados de fotones por frecuencia se calcula de la siguiente forma

$$\Omega_\gamma = \frac{\text{Vol. del espacio fase asociado a una partícula}}{\text{Vol. mínimo en el espacio fase}} \quad (\text{A.10})$$

donde el volumen asociado es  $\iiint dq \iiint dp$  y el volumen mínimo es  $h^3$ , entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \Omega_\gamma &= \frac{\iiint dq \iiint dp}{h^3} \\ &= \frac{V \iiint dp}{h^3} \end{aligned}$$

con coordenadas esféricas  $\iiint dp = 4\pi \int_p p^2 dp$  y tomando que en física moderna tenemos que  $E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$  y suponiendo que son partículas muy relativistas  $m_0^2 c^4 \approx 0$ ; y con  $p^2 dp = \frac{E^2 dE}{c^3}$ , la ec. (A.10) se reescribe como

$$\Omega_\gamma = \frac{4\pi V}{h^3 c^3} \int_0^\infty E^2 dE$$

entonces

$$\Omega_\gamma \rightarrow \frac{4\pi V}{h^3 c^3} E^2$$

pero como los fotones tienen dos estados de polarización<sup>5</sup>, se tiene que

$$\Omega_\gamma = \frac{8\pi V}{h^3 c^3} E^2$$

donde la expresión sería el número de microestados de fotones por frecuencia, ahora basta con multiplicar por la energía promedio para fotones de frecuencia  $\nu$ , ec. (A.7)

$$\left( \frac{8\pi V}{h^3 c^3} E^2 \right) * \left( \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \right) dE \quad (\text{A.11})$$

recordando que  $E = h\nu$ , sabemos que  $dE = h d\nu$  y así

$$\frac{8\pi h V}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu$$

---

<sup>5</sup>La polarización electromagnética es una propiedad de las ondas que pueden oscilar con más de una orientación. Si vemos un fotón venir hacia nosotros los estados de helicidad/polarización básicos serían vertical y horizontal respecto a su dirección de movimiento.

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu$$

concluimos que la **densidad de energía por frecuencia**  $\nu$  es

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (\text{A.12})$$

Reescribiendo usando que  $\lambda = \nu c$ ,

$$\rho_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{\nu^3}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

donde  $\rho_\lambda$  es la densidad de energía radiante por intervalo de longitud de onda.

Ahora veamos qué nos dice gráficamente la ecuación (A.12), hacemos el cambio de variable  $Y = \frac{h\nu}{kT}$ ,  $\rho$  se puede escribir como

$$\rho_\nu \approx \frac{Y^3}{e^Y - 1}, \quad (\text{A.13})$$

donde los términos faltantes no son necesarios para ver el comportamiento del gráfico pues nada más crecerían la gráfica. La curva de esta ecuación se muestra en la figura (A.2). Esta es la típica curva de radiación de cuerpo negro y nos dice que  $\rho_\nu$  a frecuencias bajas y altas va a cero, y la mayor densidad de energía es a frecuencias media.

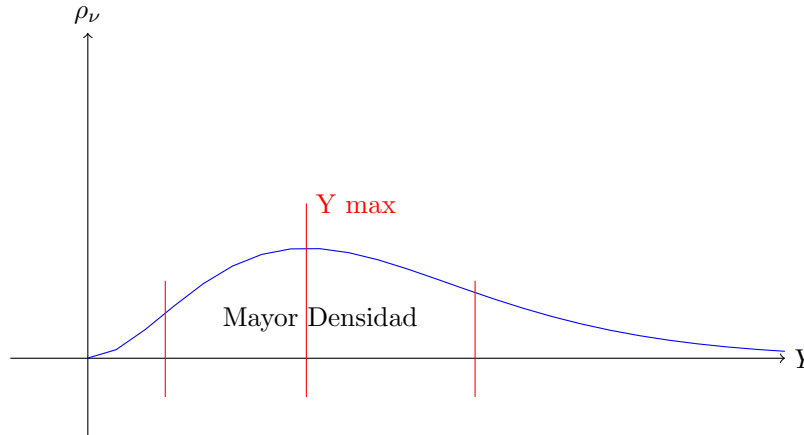


Figura A.2: Densidad de energía por frecuencia  $\nu$ . *Realizó Reyes Manuel García García.*

### Densidad Total de Energía

Tomando el resultado de la densidad de energía por frecuencia  $\nu$  (A.12), para calcular la densidad total basta con integrar de 0 a  $\infty$ . Haciendo el cambio de variable  $x = \frac{h\nu}{kT}$ ,  $d\nu = \frac{kT}{h} dx$  tenemos que

$$\rho_T = \int_0^\infty \rho_\nu d\nu = \frac{8\pi k^4 T^4}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx,$$

## APÉNDICE A. COSMOLOGÍA Y MECÁNICA ESTADÍSTICA

---

usando los resultados en el apéndice C

$$\rho_T = \frac{8\pi k^4 T^4}{h^3 c^3} \Gamma(4) \zeta(4) \quad (\text{A.14})$$

con  $\Gamma(4) = 6$ ,  $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$  y los valores de las constantes en la ecuación, obtenemos

$$\rho_T = \sigma T^4 \quad (\text{A.15})$$

$$\sigma \approx 7.565 * 10^{-16} \left[ \frac{J}{m^3 K^4} \right]$$

esta expresión es la *Ley de Stefan-Boltzmann*, donde  $\sigma$  es la constante de Stefan-Boltzmann con las unidades que se muestran entre los corchetes.

Recordando los resultados para la densidad de radiación (1.20), vemos que

$$\rho_\gamma = \frac{1}{a^4} \approx T^4$$

entonces

$$T \approx \frac{1}{a}$$

esto nos dice que mientras el universo se expande con el factor de escala  $a$ , la temperatura  $T$  disminuye como  $\frac{1}{a}$ .

### Expansión y Ley de Planck

En cosmología una pregunta frecuente es qué pasa con las leyes físicas en un universo en expansión, en esta sección estudiaremos qué sucede en particular con la Ley de Planck.

El espectro de cuerpo negro va como  $\rho_x \approx \frac{x^3}{e^x - 1}$  con  $x = \frac{h\nu}{kT}$ , pero de la sección anterior (**Densidad Total de Energía**) sabemos que en un universo en expansión

$$\begin{aligned} \nu &\rightarrow \nu_0 \frac{1}{a} \\ T &\rightarrow T_0 \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ley de Planck, resulta

$$\rho_{x_0} \approx \frac{x_0^3}{e^{x_0} - 1}$$

donde esta expresión nos dice que la expansión no afecta al cuerpo negro por eso vemos la radiación cósmica de fondo. En otras palabras un cuerpo negro siempre será un cuerpo negro.

### Energía Media de Fotones

En la sección (Energía Promedio para Fotones con frecuencia  $\nu$ ) se calcula la densidad de energía por frecuencia  $\nu$ . Usaremos ahora el mismo principio para calcular la energía media para todos los fotones con la ec (A.11), sólo que en el segundo término en lugar de la energía promedio para fotones, multiplicaremos por el promedio de fotones. Con esto tenemos,

$$\left(\frac{8\pi V}{h^3 c^3} E^2\right) * \left(\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\right) dE$$

$$n_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^2}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (\text{A.16})$$

Ahora veamos qué nos dice gráficamente la ecuación (A.16). Haciendo el cambio de variable  $Y = \frac{h\nu}{kT}$ ,  $\rho$  se puede escribir como

$$\rho_\nu \approx \frac{Y^2}{e^Y - 1}, \quad (\text{A.17})$$

donde los términos faltantes no son necesarios para analizar el comportamiento del gráfico pues nada más crecerían la gráfica. La curva de esta ecuación se muestra en la figura (A.3), esta es la típica curva de radiación de cuerpo negro lo que nos dice que  $n_\nu$  a frecuencias bajas y altas va a cero, y la mayor densidad de fotones es a frecuencias medias.

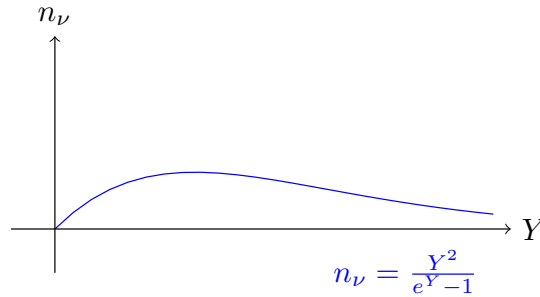


Figura A.3: Densidad de fotones por frecuencia. *Realizó Reyes Manuel García García.*

siendo  $n_\nu$  la densidad de fotones por frecuencia, la densidad total (con  $x = \frac{h\nu}{kT}$ ), resulta ser

$$n_T = \int_0^\infty n_\nu d\nu$$

$$= \frac{8\pi k^3 T^3}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1}$$

## APÉNDICE A. COSMOLOGÍA Y MECÁNICA ESTADÍSTICA

---

con la integral estadística resuelta en el apéndice C, tenemos que

$$n_T = 8\pi \left( \frac{k}{hc} \right)^3 \zeta(3)\Gamma(3)T^3$$

y de la expresión  $E_m = \frac{\rho_T}{n_T}$ , con  $\rho_T$  de ec. (A.14), tenemos que la *energía promedio de fotones* esta dada como:

$$E_m = 2.7013kT. \tag{A.18}$$



## Ec. Fundamentales con Constante Cosmológica

Usando las transformaciones  $p_\Lambda = p - \frac{\Lambda}{8\pi G}$  y  $\rho_\Lambda = \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G}$  Ec. Friedmann(1.12) con constante cosmológica se convierte en

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (\text{B.1})$$

la Ec. de Aceleración(1.15) se puede escribir como

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3} \quad (\text{B.2})$$

y la Ec de Fluido(1.14) se escribe como

$$\dot{\rho}_\Lambda + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho_\Lambda + \frac{p_\Lambda}{c^2}\right) = 0 \quad (\text{B.3})$$

de donde podemos concluir que  $\left(\rho_\Lambda + \frac{p_\Lambda}{c^2}\right) = 0$  y así la ecuación de estado  $p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$  donde a la constante cosmológica comúnmente se le llama energía oscura, y es la causante de la expansión del universo.

De la ecuación de estado tenemos  $p = w\rho c^2$  donde

- $w = -1$  para la constante cosmológica.
- $w < -\frac{1}{3}$  para expansión acelerada.
- $w = \frac{1}{3}$  para radiación.
- $w = 0$  para materia no relativista.

**APÉNDICE B. EC. FUNDAMENTALES CON CONSTANTE  
COSMOLÓGICA**

---

# Apéndice **C**

## Función Estadística

Una forma de integral que regularmente aparece en la estadística cuántica es

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x \pm 1} dx. \quad (\text{C.1})$$

La evaluación de esta clase de integrales, se realiza en términos de dos funciones especiales, la función gamma ( $\Gamma$ ) y la función zeta de Riemann( $\zeta$ ).

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x - 1} dx = \Gamma(n + 1)\zeta(n + 1)$$
$$\int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x + 1} dx = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \Gamma(n + 1)\zeta(n + 1)$$

**La Función Gamma** es una función que a menudo aparece en el cálculo estadístico:

$$\Gamma(n + 1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

esto se puede relacionar con otra integral

$$n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

que nos lleva a la fórmula

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad \Gamma(n + 1) = n\Gamma(n).$$

Otras relaciones comunes con la función gamma:

$$0! = \Gamma(1) = 1 \quad \left(\frac{d}{2} - 1\right)! = \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \quad \Gamma(n)\Gamma(1 - n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$$

En la figura C.1 se muestran algunos valores para esta función.

**APÉNDICE C. FUNCIÓN ESTADÍSTICA**

---

$\Gamma(-3/2)$	$= \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$	$\approx 2,363$
$\Gamma(-1/2)$	$= -2\sqrt{\pi}$	$\approx -3,545$
$\Gamma(1/2)$	$= \sqrt{\pi}$	$\approx 1,772$
$\Gamma(1)$	$= 0!$	$= 1$
$\Gamma(3/2)$	$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}$	$\approx 0,886$
$\Gamma(2)$	$= 1!$	$= 1$
$\Gamma(5/2)$	$= \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	$\approx 1,329$
$\Gamma(3)$	$= 2!$	$= 2$
$\Gamma(7/2)$	$= \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$	$\approx 3,323$
$\Gamma(4)$	$= 3!$	$= 6$

Figura C.1: Valores de función  $\Gamma$

**La Función Zeta de Riemann** es una función que aparece a menudo en el cálculo estadístico:

$$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$$

Los trabajos de Euler sobre  $\zeta(x)$  culminan en 1749 con el descubrimiento de la ecuación funcional para la zeta de Riemann,

$$\zeta(x) = 2(2\pi)^{x-1}\Gamma(1-x)\text{sen}\left(\frac{x\pi}{2}\right)\zeta(1-x)$$

Euler no aseveró el haber demostrado esta ecuación. Él sólo se limitó a verificar su validez para distintos valores de x. Cien años después de este descubrimiento, Riemann dió dos demostraciones distintas de esta ecuación funcional.

A continuación se presenta en la figura C.2 los valores de la función zeta de Riemann.

$\zeta(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \infty$	$\zeta(7) = 1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \dots = 1.00834\dots$
$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} = 1.6449\dots$	$\zeta(8) = 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \dots = \frac{\pi^8}{9450} = 1.00407\dots\dots$
$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots = 1.20205\dots$	$\zeta(9) = 1 + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} + \dots = 1.002008\dots$
$\zeta(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90} = 1.0823\dots$	$\zeta(10) = 1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \dots = \frac{\pi^{10}}{93555} = 1.000994\dots\dots$
$\zeta(5) = 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \dots = 1.03692\dots$	$\zeta(12) = 1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \dots = \frac{691\pi^{12}}{638512875} = 1.000246\dots$
$\zeta(6) = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots = \frac{\pi^6}{945} = 1.0173\dots\dots$	$\zeta(14) = 1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \dots = \frac{2\pi^{14}}{18243225} = 1.0000612\dots$

Figura C.2: Valores de la Función Zeta de Riemann

# Apéndice D

## Escalar de Curvatura

La curvatura escalar de una superficie es el doble de la familiar curvatura gaussiana. Para las variedades riemannianas de dimensión más alta ( $n > 2$ ), es el doble de la suma de todas las curvaturas seccionales a lo largo de todos los 2-planos atravesados por un cierto marco ortonormal [45]. Matemáticamente, la curvatura escalar o escalar de curvatura, que suele designarse con las letras  $R$  o  $S$ , coincide también la traza total de la curvatura de Ricci así como del tensor de curvatura (D.1.)

Partiendo de la forma para el tensor de curvatura

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \quad (\text{D.1})$$

donde  $\Gamma_{jk}^i$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{i\lambda}(g_{\lambda j,k} + g_{\lambda k,j} - g_{jk,\lambda}) \quad (\text{D.2})$$

con  $g_{\lambda j,k} = \frac{\partial}{\partial x^k}g_{\lambda j}$ . y usando la métrica dada por (4.35), podemos calcular el valor para cada  $\Gamma^s$ . Sustituyendo  $i \rightarrow \rho$ ,  $j \rightarrow \nu$  y  $k \rightarrow \sigma$ , fijando primeramente  $\rho = 0$  y para  $\lambda = \rho$ , sólo tenemos elementos en la diagonal,

$$\Gamma_{\nu\sigma}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(g_{0\nu,\sigma} + g_{0\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,0}), \quad (\text{D.3})$$

ahora haciendo  $\nu = 0$

$$\Gamma_{0\sigma}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(g_{00,\sigma} + g_{0\sigma,0} - g_{0\sigma,0}), \quad (\text{D.4})$$

así resulta que variando  $\sigma$  en 0, 1, 2 y 3,

$$\Gamma_{00}^0 = -\frac{1}{2N^2}(2N\dot{N}) = -\frac{\dot{N}}{N} \quad \Gamma_{01}^0 = 0 \quad \Gamma_{02}^0 = 0 \quad \Gamma_{03}^0 = 0.$$

Con  $\nu = 1$  y  $\sigma = 0, 1, 2, 3$

$$\Gamma_{10}^0 = 0 \quad \Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{N^2} \quad \Gamma_{12}^0 = 0 \quad \Gamma_{13}^0 = 0.$$

## APÉNDICE D. ESCALAR DE CURVATURA

---

Con  $\nu = 2$  y  $\sigma = 0, 1, 2, 3$

$$\Gamma_{20}^0 = 0 \quad \Gamma_{11}^0 = 0 \quad \Gamma_{22}^0 = \frac{a\dot{a}}{N^2} \quad \Gamma_{23}^0 = 0.$$

Con  $\nu = 3$  y  $\sigma = 0, 1, 2, 3$

$$\Gamma_{30}^0 = 0 \quad \Gamma_{31}^0 = 0 \quad \Gamma_{32}^0 = 0 \quad \Gamma_{33}^0 = \frac{a\dot{a}}{N^2}.$$

Ahora fijando  $\rho = 1$ ,

$$\Gamma_{0\sigma}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(g_{1\nu,\sigma} + g_{1\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,1}), \quad (\text{D.5})$$

haciendo  $\nu = 0$  y variando  $\sigma$  en 0, 1, 2 y 3, tenemos

$$\Gamma_{00}^1 = 0 \quad \Gamma_{01}^1 = \frac{\dot{a}}{a} \quad \Gamma_{02}^1 = 0 \quad \Gamma_{03}^1 = 0.$$

Con  $\nu = 1$  y  $\sigma = 0, 1, 2, 3$

$$\Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{a}}{a} \quad \Gamma_{11}^1 = 0 \quad \Gamma_{12}^1 = 0 \quad \Gamma_{13}^1 = 0.$$

Con  $\nu = 2$  y  $\sigma = 0, 1, 2, 3$

$$\Gamma_{20}^1 = 0 \quad \Gamma_{21}^1 = 0 \quad \Gamma_{22}^1 = 0 \quad \Gamma_{23}^1 = 0.$$

Con  $\nu = 3$  y  $\sigma = 0, 1, 2, 3$

$$\Gamma_{30}^1 = 0 \quad \Gamma_{31}^1 = 0 \quad \Gamma_{32}^1 = 0 \quad \Gamma_{33}^1 = 0.$$

Ahora fijando  $\rho = 2$ ,

$$\Gamma_{0\sigma}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(g_{2\nu,\sigma} + g_{2\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,2}), \quad (\text{D.6})$$

haciendo  $\nu = 0$  y variando  $\sigma$  en 0, 1, 2 y 3, tenemos

$$\Gamma_{00}^2 = 0 \quad \Gamma_{01}^2 = 0 \quad \Gamma_{02}^2 = \frac{\dot{a}}{a} \quad \Gamma_{03}^2 = 0.$$

Con  $\nu = 1$  y  $\sigma = 0, 1, 2, 3$

$$\Gamma_{10}^2 = \frac{\dot{a}}{a} \quad \Gamma_{11}^2 = 0 \quad \Gamma_{12}^2 = 0 \quad \Gamma_{13}^2 = 0.$$

Con  $\nu = 2$  y  $\sigma = 0, 1, 2, 3$

$$\Gamma_{20}^2 = \frac{\dot{a}}{a} \quad \Gamma_{21}^2 = 0 \quad \Gamma_{12}^2 = 0 \quad \Gamma_{13}^2 = 0.$$

Con  $\nu = 3$  y  $\sigma = 0, 1, 2, 3$

$$\Gamma_{30}^2 = 0 \quad \Gamma_{31}^2 = 0 \quad \Gamma_{32}^2 = 0 \quad \Gamma_{33}^2 = 0.$$

Ahora fijando  $\rho = 3$ ,

$$\Gamma_{0\sigma}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(g_{3\nu,\sigma} + g_{3\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,3}), \quad (\text{D.7})$$

haciendo  $\nu = 0$  y variando  $\sigma$  en 0, 1, 2 y 3, tenemos

$$\Gamma_{00}^3 = 0 \quad \Gamma_{01}^3 = 0 \quad \Gamma_{02}^3 = 0 \quad \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}.$$

Con  $\nu = 1$  y  $\sigma = 0, 1, 2, 3$

$$\Gamma_{10}^3 = \frac{\dot{a}}{a} \quad \Gamma_{11}^3 = 0 \quad \Gamma_{12}^3 = 0 \quad \Gamma_{13}^3 = 0.$$

Con  $\nu = 2$  y  $\sigma = 0, 1, 2, 3$

$$\Gamma_{20}^3 = 0 \quad \Gamma_{21}^3 = 0 \quad \Gamma_{12}^3 = 0 \quad \Gamma_{13}^3 = 0.$$

Con  $\nu = 3$  y  $\sigma = 0, 1, 2, 3$

$$\Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{a}}{a} \quad \Gamma_{31}^3 = 0 \quad \Gamma_{32}^3 = 0 \quad \Gamma_{33}^3 = 0.$$

Sustituyendo estos valores en el tensor de Riemann, pero usando el tensor de Ricci  $R_{ab} = R_{acb}$ , llegando a la forma

$$R_{\rho\sigma} = \partial_\mu \Gamma_{\sigma\nu}^\mu - \partial_\nu \Gamma_{\sigma\mu}^\mu + \Gamma_{e\mu}^\mu \Gamma_{\sigma\nu}^e - \Gamma_{e\nu}^\mu \Gamma_{\sigma\mu}^e \quad (\text{D.8})$$

tomando  $\rho = \sigma = 0$

$$R_{00} = \partial_\mu \Gamma_{0\nu}^\mu - \partial_\nu \Gamma_{0\mu}^\mu + \Gamma_{e\mu}^\mu \Gamma_{0\nu}^e - \Gamma_{e\nu}^\mu \Gamma_{0\mu}^e \quad (\text{D.9})$$

donde haciendo los cálculos correspondientes, sustituyendo a  $\mu, \nu, e = 0, 1, 2, 3$  obtenemos el valor para  $R_{00}$

$$R_{00} = -3 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{N}}{Na} \right),$$

## APÉNDICE D. ESCALAR DE CURVATURA

---

Así mismo podemos obtener los resultados para  $R_{ii}$ ,

$$R_{11} = \frac{\ddot{a}a}{N^2} + 2\frac{\dot{a}^2}{N^2} - 2\frac{a\dot{a}\dot{N}}{N^3},$$

$$R_{22} = \frac{\ddot{a}a}{N^2} + 2\frac{\dot{a}^2}{N^2} - 2\frac{a\dot{a}\dot{N}}{N^3},$$

$$R_{33} = \frac{\ddot{a}a}{N^2} + 2\frac{\dot{a}^2}{N^2} - 2\frac{a\dot{a}\dot{N}}{N^3},$$

suponiendo que  $N$  es suave, tal que  $\dot{N} = 0$ , y usando la condición para escalar de curvatura  $R = R_a^a = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}$ , entonces el *escalar de curvatura*  $R$  es

$$\boxed{R = \frac{6}{N^2} \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right)}. \quad (\text{D.10})$$

Para la acción de Einstein-Hilbert

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4x \quad (\text{D.11})$$

con la métrica (4.35), la acción que resulta es:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \frac{6}{N^2} \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) a^3 N d^4x = \frac{1}{16\pi G} \int \frac{6}{N} (\ddot{a}a^2 + \dot{a}^2 a) d^4x$$

e integrando

$$\int \ddot{a}a^2 dt = \dot{a}a^2 - 2 \int \dot{a}^2 a dt$$

y como por límites de integración  $\dot{a}a^2 = 0$ , entonces resulta  $\ddot{a}a^2 = -2\dot{a}^2 a$ . Así el primer término del Lagrangiano correspondiente de la acción E-H, es

$$\boxed{L_{E-H} = -\frac{3\dot{a}^2 a}{\kappa N}} \quad (\text{D.12})$$



# Bibliografía

- [1] ANDREW R. LIDDLE, *An Introduction to Modern Cosmology*, Second Edition, Wiley, 2003.
- [2] ALAN H. GUTH, *El Universo Inflacionario*, Primera Edición, Debate S.A., 1999.
- [3] HERNÁN QUINTANA G., *Espacio, Tiempo y Universo*, Segunda Edición, Alfaomega, 2002.
- [4] LANDAU AND LIFSCHITZ, *Mecánica*, Ed. Reverté, Barcelona, 1991.
- [5] ANDREW R. LIDDLE AND DAVID H. LYTH, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, First Published, Cambridge University Press, 2000.
- [6] SCOTT DODELSON, *Modern Cosmology*, Academic Press, 2003.
- [7] PAUL ALLEN TIPLER, GENE MOSCA , *Física Cap. 22*, 5ta Edición Reverté.
- [8] ANDREI LINDE, MARTIN LEMOINE, JÉROME MARTIN Y PATRICK PETER, *Inflationary Cosmology*, Springer, Paris April 2007.
- [9] STEVEN H. SIMON, *The Oxford Solid State Basics*, University of Oxford, First Edition published in 2013.
- [10] G. V. CHIBISOV AND V. F. MUKHANOV , *Galaxy formation and phonons*, Theoretical Department of P. N. Lebedev Physical Institute, USSR Academy of Sciences, Leninsky Prospect, 53, Moscow 117934, USSR, august 3, 1981.
- [11] ROHLF, JAMES WILLIAM , *Modern Physics from A to Z*, Wiley 1994.
- [12] SCHROEDER, DANIEL V. , *An Introduction to Thermal Physics Cap. 7*, Addison-Wesley 2000.
- [13] BLATT AND FRANK J., *Modern Physics secc. 4.3*, McGraw-Hill 1992.
- [14] JOANNE BAKER, *50 Cosas que hay que saber sobre el Universo*.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [15] JOSÉ MAZA SANCHO, *Cosmología: Einstein, de Sitter y Lemaitre*, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, UNIVERSIDAD DE CHILE , Noviembre 2013.
- [16] B. BOISSEAU, G. ESPOSITO-FARESE, D. POLARSKI, AND A.A. STAROBINSKY, *Reconstruction of a scalar-tensor theory of gravity in an accelerating universe*, January 21, 2000 (arxiv.org/abs/gr-qc/0001066v1).
- [17] D. KAZANAS, *Cosmological Inflation: A Personal Perspective*, Marzo 2008, Astrophysics Science Division, Greenbelt (arXiv:0803.2080v1).
- [18] KATSUHIKO SATO, *Cosmological baryon-number domain structure and the first order phase transition of a vacuum* February 1981, The University of Tokyo.
- [19] ANDREAS ALBRECHT AND PAUL J. STEINHARDT, *Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking*, Department of Physics, University of Philadelphia, Pennsylvania 19104, April 1982.
- [20] V. MUKHANOV, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University, 2005.
- [21] A. ALTLAND AND B. SIMONS, *Condensed Matter Field Theory*, Cambridge, Second Edition 2010.
- [22] DMITRY S. GORBUNOV AND VALERY A RUBAKOV, *Introduction to the Theory of the Early Universe, Cosmological Perturbations and Inflationary Theory*, World Scientific, 2011.
- [23] SRIVASTAVA, A., *Topological Defects in cosmology*, PRAMANA, Vol 53, No6, Dic 1999, pp 1069-1076.
- [24] A. VILENKIN, *Cosmic Strings and other topological defects*, Univerity of Cambridge, 1994.
- [25] J. REKIER AND A. FUSFA, *Cosmic acceleration with cosmological soft phonons in a network of large structures*, FNRS Research Fellow, january 20, 2014, arXiv:1205.3350v5.
- [26] J-P. Bruneton, J. Larena, *Class. Quantum Grav.* 29 (2012).
- [27] J-P. Bruneton, J. Larena, *Class. Quantum Grav.* 30 (2013).
- [28] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press (2003).
- [29] A. FUZFA AND J-M. ALIMI, *Phys. Rev. D*73, 023520 (2006)
- [30] C. KITTEL, *Introduction to Solid State Physics*, 8th Edition, WILEY (2005).
- [31] M. Kowalski et al., *Astrophys.J.*686, 749-778 (2008) R. Amanullah et al., *Astrophys.J.* 716, 712-738 (2010).

- [32] Komatsu E. et al., 2009, The Astrophysical Journal Supplement Series, 180, 330.
- [33] M. Bucher, D. Spergel, Phys. Rev. D60 (1999) 043501.
- [34] LUIS ÁLVAREZ, *El Origen del Universo Desde la Filosofía, la Religión y la Ciencia*, Barcelona, 2010.
- [35] AYNAJIAN, PEGOR, *Electron-Phonon Interaction in Conventional and Unconventional Superconductors*, Springer, Hardcover, 2011.
- [36] NICOLÁS G. BUSCA, *Baryon Acoustic Oscillations in the Ly $\alpha$  forest of BOSS quasars*, Astronomy & Astrophysics, February 15, 2013 (arXiv:1211.2616v2).
- [37] SIGFRIDO ESCALANTE Y LAURA DUQUE, *El Origen de los Elementos y los Diversos Mecanismos de nucleosíntesis*, Universidad Nacional Autónoma de México, Diciembre 2011 .
- [38] LAWRENCE PERKO, *Diferential Equactions and Dynamical Systems*, Springer, Tercera Edición, Department of Mathematics Northern Arizona University Flagstaff, USA .
- [39] V.V. KISELEV, *Acceleration parameter of the Universe expansion and cosmological equation of state* , Russian State Research Center Institute for High Energy Physics.
- [40] SCHROEDER AND DANIEL V., *An Introduction to Thermal Physics*, Addison-Wesley, 2000.
- [41] CHARLES KITTEL, *Introducción a la física del estado sólido*, 3ra edición, REVERTÉ S.A. 1997.
- [42] MARTIN V. GUSTAFSSON, THOMAS AREF, ANTON FRISK KOCKUM, MARIA K. EKSTRÖM, GÖRAN JOHANSSON<sup>1</sup>, PER DELSING, *Propagating phonons coupled to an artificial atom*, science. 1257219, 2014.
- [43] ULISES NUCAMENDI, GABRIELA GARCÍA, JORGE FUENTES Y EFRAÍN TORRES-LOMAS, *Dark Energy with Yukawa interaction: A dynamical system analysis*, UMSNH, Marzo 2016.
- [44] JAMES F. SHACKELFORD, *Intrucción a la ciencia de los materiales para ingenieros*, University of California, Davis, sexta edición, PEARSON 2005.
- [45] R.M. WALD, ROBERT M. WALD, *General Relativity* , University of Chicago Press, 1984, ISBN 978-0226870328.