



Universidad Michoacana de San Nicolás de  
Hidalgo

---

Instituto de Física y Matemáticas

---



## Curvas de Rotación de Galaxias Espirales y el problema de la Materia Oscura

Tesis presentada al

Instituto de Física y Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de  
Maestra en Ciencias en el Área de Física

por

Gabriela García Arroyo

asesorada por

Dr. en Física Ulises Nucamendi Gómez

Morelia, Michoacán, México  
Febrero del 2015



# Agradecimientos

Primero que todo quiero agradecer a mi asesor de tesis, Dr. Ulises Nucamendi, por toda su paciencia y dedicación para lograr que este trabajo fuese realizado, todo lo que he aprendido durante esta etapa académica se lo debo a él y a los profesores con quienes he tenido el gusto de tomar los cursos curriculares.

Es preciso mencionar que no hubiese sido posible analizar las galaxias presentadas sin la disposición del profesor W. J. G. de Blok quién amablemente nos facilitó los datos principales. Por sus recomendaciones también agradezco al profesor Fabian Walter y a todo su equipo de trabajo.

Por su disposición ante la premura del tiempo, quiero agradecer a los sinodales, Dr. Ricardo Becerril y Dr. Francisco Astorga.

Finalmente, agradezco al Dr. Arturo Avelino por la información proporcionada para la realización de la tesis.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>IV</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Introducción</b>	<b>VI</b>
<b>1. Teoría de Potenciales gravitacionales Newtonianos</b>	<b>1</b>
1.1. Resultados generales . . . . .	2
1.1.1. Cinemática de partículas de prueba . . . . .	4
1.2. Sistemas esféricos . . . . .	5
1.2.1. Modelo de Navarro-Frenk-White . . . . .	6
1.2.2. Modelo de Burkert . . . . .	8
1.3. Potenciales de Discos . . . . .	9
1.3.1. Potenciales gravitacionales de discos delgados vía funciones de Bessel. . . . .	9
1.3.2. Discos Gruesos . . . . .	14
<b>2. Estadística Bayesiana</b>	<b>17</b>
2.1. Teoremas de probabilidad . . . . .	17
2.2. La Prueba $\chi^2$ . . . . .	19
2.2.1. La prueba $\chi^2$ como medida de calidad de ajuste . . . . .	23
2.2.2. La prueba $\chi^2$ por grados de libertad . . . . .	23
2.3. Intervalos de confianza y barras de error . . . . .	24
<b>3. Curvas de Rotación y Modelos de masa</b>	<b>28</b>
3.1. La Distribución de gas . . . . .	31
3.2. La Distribución estelar . . . . .	32
3.3. La Distribución de materia oscura . . . . .	36
3.4. La muestra THINGS . . . . .	39

4. Modelos de masa de galaxias espirales	42
5. Conclusiones	58
A. Galaxias	60

# Resumen

Presentamos las curvas de rotación de 16 galaxias espirales derivadas por el experimento “THINGS”, la alta resolución espacial y de velocidad de éste hace que sus mediciones sean las de mejor calidad obtenidas hasta el momento. Con la finalidad de abordar uno de los problemas de la descripción física del universo a escalas galácticas y cosmológicas es necesario construir modelos de masa que sean capaces de reproducir a las curvas de rotación observadas, para lo que se combinan las curvas obtenidas por el experimento THINGS con los datos recolectados por el experimento “Spitzer IRAC” en la longitud de onda de  $3.6\ \mu\text{m}$ . La construcción de los modelos de masa requiere de la descomposición de la galaxia en componentes, para la componente estelar es necesario implementar una función de masa inicial, en nuestro caso, utilizaremos la de “diet-Salpeter”, como veremos, es imposible reproducir la curva de rotación observada asumiendo como componentes de la galaxia únicamente a la distribución de gas y al disco estelar luminoso, por lo que introduciremos una componente adicional denominada materia oscura cuya contribución a las curvas de rotación se determina considerando a los modelos de halo oscuro de Navarro-Frenk-White y al de Burkert.

Palabras clave: materia oscura, galaxias espirales.

# Abstract

We present rotation curves of 16 spiral galaxies from the THINGS, the high spatial and velocity resolution allow us to obtain the best quality measurement since. In order to attack one problem of the physical description universe at galactic scales we must construct mass models which can reproduce the observed rotation curves, to achieve this curves obtained by THINGS and the Spitzer IRAC data are combined. The mass models construction requires the decomposition of the galaxy into its components, for the stellar component is a priority implement an initial mass function, in this work, we use the diet-Salpeter function, as we will see it's impossible reproduce the observed rotation curve assuming as galaxy components only the gas distribution and luminous stellar disk so we introduce an additional component denominated dark matter which contribution to the rotation curves is determined considering the Navarro-Frenk-White and Burkert's dark halo models.

Key words: dark matter, spiral galaxies.

# Introducción

Hoy en día, a pesar de los grandes avances tecnológicos, prevalecen muchos misterios en la física del Universo en que vivimos, uno de éstos es el llamado problema de la materia oscura que, aunque se dio a conocer alrededor de 1930 por el astrónomo Suizo Fritz Zwicky[1]. [2], en el presente sigue representando un reto tanto para la cosmología como para la física de partículas. Los objetos astrofísicos, en su mayoría, son observados porque emiten o absorben luz en un amplio espectro de longitudes de onda, estas observaciones permiten darnos una idea de la masa del Universo asociada a objetos luminosos. Estas observaciones de luz van más allá de las detectadas por el ojo humano ya que en tiempos recientes se han generado observaciones confiables a distintas longitudes de onda. La dificultad de obtener la distribución de masa partiendo únicamente de la emisión de fotones, proviene del hecho de que las mismas observaciones indican que los objetos astronómicos emiten y absorben luz de diferentes formas y no todos lo hacen con la misma eficiencia. Una forma de medir la eficiencia de emisión es usando la relación masa-luz, la cual no necesariamente se mantiene constante para diferentes objetos astrofísicos, y, en particular, a lo largo de una galaxia [3].

Es común que los astrónomos determinen la masa de un cuerpo astronómico estudiando únicamente su emisión de luz, sin embargo, la masa de los objetos puede determinarse directamente si analizamos el movimiento de partículas de prueba alrededor del cuerpo bajo estudio. Esta determinación usualmente se hace usando las leyes de Newton, las cuales han demostrado ser confiables en la descripción de fenómenos físicos a escalas terrestres y del sistema solar, por lo que existe una tendencia de aplicarla también en escalas galácticas <sup>1</sup>, modelando con ella las curvas de velocidad circular que describen las partículas en las galaxias espirales (comúnmente llamadas curvas de rotación galácticas); las curvas de rotación representan una pieza fundamental para inferir la masa total asociada a este tipo de galaxias; en este contexto, en este tipo de galaxias han sido encontradas grandes discrepancias entre la masa inferida por efectos luminosos y la masa obtenida teóricamente partiendo de las Leyes de Newton lo cual se interpreta como una evidencia de la existencia de materia oscura en sistemas galácticos; aquí es preciso mencionar que el término “Materia Oscura” se refiere a la materia que se detecta únicamente por medio de sus efectos dinámicos gravitacionales y que no

---

<sup>1</sup>La fuerza gravitacional relativista comienza a ser adecuada para la descripción de un objeto de masa  $M$  y radio  $R$  cuando el radio adimensional,  $\frac{GM}{Rc^2}$ , es una fracción significativa de la unidad, en el caso de las galaxias espirales utilizadas dicho radio es del orden de  $\sim 10^{-6}$

emite algún tipo de radiación electromagnética. Sin embargo, es preciso mencionar que existe un grupo importante de físicos que no adoptan esta interpretación y postulan que las discrepancias de ambas masas se debe a que la ley de la gravedad Newtoniana no puede aplicarse a esas escalas [4].

Históricamente, el primer indicio de la existencia de Materia Oscura provino de estudios dinámicos de la Vía Láctea. El astrónomo británico James Jeans (1922) [5] reanalizó la existencia de movimientos verticales de estrellas cerca del plano de la galaxia, los cuales habían sido estudiados anteriormente por el astrónomo Holandés Jacobus Kapteyn (1922) [6], con estas observaciones, ambos astrónomos calcularon la densidad de materia cerca del sol y la densidad de estrellas cerca del plano galáctico. Por su lado, Kapteyn encontró que la densidad espacial de estrellas conocidas era suficiente para explicar los movimientos verticales. En contraste, los resultados obtenidos por Jeans indicaron la presencia de 2 estrellas oscuras por cada estrella brillante. El segundo indicio provino de observaciones hechas por Fritz Zwicky (1933), quien midió las velocidades radiales de las galaxias en el cúmulo de galaxias llamado Coma, con respecto a la velocidad promedio del cúmulo [1], [2]. Las velocidades de las galaxias en el cúmulo se asemejan a los movimientos planetarios alrededor del sol. Para su sorpresa, Zwicky encontró que las velocidades medidas eran casi diez veces mayores que las esperadas considerando únicamente materia luminosa y concluyó que, para que las galaxias se mantengan unidas, el cúmulo debe contener grandes cantidades de materia que no es detectada por emisión luminosa, los resultados de este estudio fueron la primera evidencia convincente de la existencia de materia oscura en cúmulos de galaxias.

En las siguientes décadas, nuevas observaciones cosmológicas y astrofísicas agregaron evidencia que apoya la idea de la existencia de materia oscura, por esta razón, la hipótesis de la materia oscura como una de las componentes principales de la materia total en nuestro universo ha sido analizada desde diferentes perspectivas. A principios de 1980, su posible presencia había sido confirmada por fuentes independientes: observaciones de la dinámica de galaxias y sus estrellas [7], [8], las determinaciones de masa basadas en lentes gravitacionales y estudios de rayos-X de cúmulos de galaxias [9], [10]. Actualmente, la física de partículas propone varios candidatos para la materia oscura, cuyas características principales son las siguientes: deben ser partículas eléctricamente neutras y sus interacciones permitidas con otras partículas son únicamente bajo la fuerza de gravedad y la fuerza nuclear débil, lo cual descarta a los bariones por interactuar bajo la fuerza nuclear fuerte. Ejemplos de estas partículas hipotéticas son los axiones, los neutrinos estériles, WIMPs (Partículas masivas débilmente interactuantes), etc. Existen diferentes compendios [11] que describen como a través del tiempo y, a medida que los experimentos de detección de materia oscura han ido aumentando sus rangos de observación, se han ido descartando candidatos de partículas de materia oscura [12].

A fin de determinar la masa de galaxias espirales utilizando la segunda ley de Newton, la ley de gravitación universal y observaciones de hidrógeno neutral (HI) en galaxias, tenemos que detallar los modelos de masa que describen a las diferentes compo-

nentes de materia de cada galaxia. Un análisis reciente sobre modelos de masa puede consultarse en [13], donde se dice que, los modelos de masa detallados de galaxias espirales deben incluir ecuaciones para los perfiles de densidad, y sus curvas de rotación, asociados al disco luminoso compuesto de estrellas, al gas de hidrógeno neutral (HI) e ionizado (HII) y al hipotético halo de materia oscura. Una descripción de estos perfiles puede encontrarse en [3]. Los discos luminosos y el gas son comunmente modelados como una distribución de disco axialsimétrica de ancho nulo, con un decrecimiento radialmente exponencial. El caso más realista de discos anchos [14] solamente añade un pequeño efecto a la curva de rotación [15]. Discos reales, sin embargo, exhiben pequeñas desviaciones en sus perfiles de brillo exponenciales [18], los cuales se pueden modelar de forma más apropiada reconstruyendo la masa estelar con una inversión del perfil de brillo asociado. Debido a que estas desviaciones son pequeñas, en esta tesis usaremos el modelo de disco ancho con un perfil de brillo exponencial radialmente decreciente. Para el perfil de densidad del halo oscuro se proponen modelos teóricos fenomenológicos basados en simulaciones numéricas de formación de estructura cosmológica, ejemplos de estos son los perfiles de densidad de Navarro-Frenk-White[20] y Burkert [22].

En la presente tesis se derivan modelos de masa para galaxias espirales usando las observaciones de las curvas de rotación de 16 galaxias espirales pertenecientes al experimento “ The HI Nearby Galaxies Survey ” (THINGS) [19]. Es preciso mencionar que esta muestra de curvas de rotación es la de mejor calidad en precisión obtenida hoy en día. Para realizar el estudio, es necesario realizar una serie de procedimientos, comenzando con el cálculo de la curva de rotación asociada a cada componente de materia y después obtener la curva de rotación total generada por la suma de las diferentes componentes. Para lograr este objetivo, en el capítulo 1 se describe el método general para encontrar la velocidad circular de rotación de partículas de prueba en una galaxia espiral, partiendo del potencial gravitacional generado por distribuciones de masa tanto esféricas como axialsimétricas. Los resultados obtenidos para distribuciones esféricas se utilizan para derivar las curvas de rotación debidas a la presencia de un halo de materia oscura y los resultados para las distribuciones axialsimétricas nos servirán para modelar el perfil de brillo superficial de la componente estelar y la densidad superficial de la componente de gas; la derivación de la densidad de masa superficial para la componente estelar asume una razón masa-luz  $\gamma_*$  constante. Los halos oscuros poseen cada uno dos parámetros libres que pueden ser ajustados y acotados por las observaciones. Para tal fin, en el capítulo 2 se presentan las bases de la Estadística Bayesiana, y en particular, el ajuste estadístico llamado  $\chi$ -cuadrada ( $\chi^2$ ) que será utilizado para inferir los parámetros libres del halo oscuro. En el capítulo 3 se discuten los modelos de masa que utilizaremos y se presenta una de las evidencias principales acerca de la existencia de materia oscura en galaxias espirales, esta evidencia se describe para una galaxia perteneciente a la muestra THINGS la cual también es detallada en ese capítulo, una vez esclarecida la forma de calcular las contribuciones de cada componente a la curva de rotación total y conociendo las peculiaridades de cada galaxia estamos en condiciones de aplicar los métodos descritos, los resultados para cada galaxia se presentan en el

## CAPÍTULO 0. INTRODUCCIÓN

---

capítulo 4. Finalmente en el capítulo 5 se muestran a manera de conclusiones algunos de los aspectos más importantes al determinar los modelos de masa, así como algunos resultados generales.

# Capítulo 1

## Teoría de Potenciales gravitacionales Newtonianos

El descubrimiento de las leyes que gobiernan el movimiento de los cuerpos fue un momento dramático en la historia de la física. Antes de la formulación de las Leyes de Newton, los movimientos de los astros y algunos fenómenos terrestres parecían ser un misterio, el cual se esclareció después de que Newton enunciara sus leyes. Por ejemplo, a escalas terrestres fue posible describir el comportamiento de las oscilaciones en un péndulo o el de sistemas formados por un resorte y una masa; a escalas del sistema solar fue posible determinar de forma satisfactoria el movimiento de la luna alrededor de la tierra, así como las órbitas de las lunas de Júpiter, y no sólo eso, sino que, además, un estudio realizado donde se utilizaron todos los planetas descubiertos y sus trayectorias alrededor del sol permitió la predicción de la existencia de un planeta hasta entonces desconocido (Urano). Continuando con la validez de La Ley de Gravitación Universal, la siguiente prueba provino del hecho de preguntarse si las estrellas también se mueven bajo los efectos de dicha ley, la respuesta es sí, observacionalmente se han descubierto ciertos sistemas de estrellas binarias, las cuales giran una en torno a la otra de acuerdo a las leyes de Newton. Si vamos un poco más allá y centramos nuestra atención en las galaxias, vemos que en su centro existe una mayor concentración de estrellas y gas lo cual indica que los objetos dentro de ellas tienen una tendencia a aglomerarse. Desafortunadamente no podemos probar que la ley de atracción sea exactamente la ley de gravitación de Newton pero podemos asumirla como verdadera y realizar un análisis a fin de determinar si es válida ó no; por otro lado sabemos que las galaxias tienden a agruparse en cúmulos, lo cual indica que existe una fuerza de atracción entre ellas, esto nos lleva a preguntarnos si es válido utilizar la ley de gravitación de Newton en estas escalas.

Sabemos que la fuerza de atracción gravitacional no es la única fuerza responsable para describir los movimientos de las partículas, sin embargo, en nuestro caso (escalas galácticas) es la fuerza que tiene el papel más importante y la única que será considerada

# CAPÍTULO 1. TEORÍA DE POTENCIALES GRAVITACIONALES NEWTONIANOS

---

en esta tesis. Una forma de expresar algunas de las fuerzas que gobiernan el movimiento de los cuerpos es a través de potenciales, tal es el caso de la fuerza electromagnética y de la fuerza de gravedad Newtoniana, las cuales tienen una formulación en términos de “potenciales”. En este capítulo se establecen un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales para el potencial gravitacional Newtoniano cuyas soluciones han sido ampliamente estudiadas en la literatura del tema. En particular, se estudian y resuelven los potenciales gravitacionales asociados tanto a distribuciones de masa esféricas como a distribuciones axialsimétricas, producidas por discos delgados y anchos de materia.

## 1.1. Resultados generales

El propósito de esta sección es calcular la fuerza  $F(\vec{r})$  que actúa sobre una partícula de masa  $m_s$  y posición  $\vec{r}$ , la cual es generada por la atracción gravitacional de una distribución de masa con densidad  $\rho(\vec{r}', t)$ . Esta descripción se hará partiendo de la ley de gravitación universal, la cual, nos dice que cada objeto en el Universo atrae a otro objeto con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los une, matemáticamente, en el caso de partículas puntuales de masa  $M$  y  $m_s$ , la fuerza de atracción es dada por la siguiente expresión:

$$F(\vec{r}) = -Gm_sM \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (1.1)$$

El signo “-” de la expresión anterior proviene del hecho de que a diferencia de la fuerza eléctrica, la fuerza de gravedad entre dos objetos siempre es atrayente.

La Ley de Gravitación Universal puede extenderse al caso en que las partículas no son puntuales y así calcular la fuerza  $\vec{F}(\vec{r})$  que ejerce una distribución de masa  $\rho(t, \vec{r}')$  sobre la partícula de masa  $m_s$ , la cual de forma diferencial es expresada como :

$$d\vec{F}(\vec{r}) = -Gm_s\rho(t, \vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \quad (1.2)$$

La fuerza total sobre la partícula se obtiene integrando la expresión anterior en el volumen que ocupa la distribución total de masa  $\rho(t, \vec{r}')$ , es decir,

$$\vec{F}(\vec{r}) = -Gm_s \int \rho(t, \vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \equiv m_s \vec{g}(\vec{r})$$

donde  $\vec{g}(\vec{r})$  es el campo gravitacional generado por la distribución de masa y  $\vec{r}'$  es la posición del diferencial de masa  $dM'$  perteneciente a la distribución  $\rho(t, \vec{r}')$ .

Explícitamente,  $\vec{g}(\vec{r})$  es dado por la expresión:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -G \int \rho(t, \vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \equiv m_s \vec{g}(\vec{r}) \quad (1.3)$$

# CAPÍTULO 1. TEORÍA DE POTENCIALES GRAVITACIONALES NEWTONIANOS

---

Si definimos el potencial gravitacional  $\Phi(t, \vec{r})$  por:

$$\Phi(t, \vec{r}) = -G \int dV' \frac{\rho(t, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.4)$$

podemos notar que  $\vec{g}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(\vec{r}, t)$ . Si además calculamos la divergencia de  $g(\vec{r}, t)$ , obtenemos:

$$\nabla \cdot g(\vec{r}) = -G \int \rho(t, \vec{r}') \nabla \cdot \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) dV' \quad (1.5)$$

Ahora

$$-\nabla \cdot \left( \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) = \nabla \cdot \left( \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \right) = -\frac{3}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} + \frac{3(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot (\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^5} \quad (1.6)$$

Si  $\vec{r}' \neq \vec{r}$  podemos cancelar el factor  $|\vec{r}' - \vec{r}|^2$  de arriba y abajo del último término en (1.6) y concluir que:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \right) = 0 \quad \text{Si } \vec{r}' \neq \vec{r}$$

Para realizar la integral en la ecuación (1.5) notemos entonces, que la única contribución proviene del punto  $\vec{r}' = \vec{r}$ , en este caso podemos restringir el volumen de integración a una esfera pequeña de radio  $h$  centrada en este punto, tomando el límite  $h \rightarrow 0$  es posible tomar la densidad como constante y colocarla fuera de la integral, a continuación simplificamos esta ecuación reemplazando  $\nabla \rightarrow -\nabla'$  y haciendo uso del teorema de la divergencia, obtenemos:

$$\nabla \cdot g(\vec{r}) = -G\rho(t, \vec{r}) \int_{|\vec{r}' - \vec{r}|=h} d^2\vec{S}' \cdot \left( \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \right)$$

Sobre la esfera  $|\vec{r}' - \vec{r}| = h$  tenemos:  $d^2\vec{S}' = (\vec{r}' - \vec{r})h d^2\Omega$ , por lo que finalmente obtenemos:

$$\nabla \cdot g(\vec{r}) = -G\rho(t, \vec{r}) \int d^2\Omega = -4\pi G\rho(t, \vec{r}) \quad (1.7)$$

Recordando que  $\vec{g}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(\vec{r}, t)$  y con ayuda de la ecuación (1.7) obtenemos la conocida ecuación de Poisson que relaciona el potencial  $\Phi$  con la densidad de materia  $\rho(t, \vec{r})$ :

$$\nabla^2\Phi(\vec{r}) = 4\pi G\rho(t, \vec{r}) \quad (1.8)$$

La ecuación de Poisson se puede resolver si imponemos condiciones de frontera apropiadas. Para un sistema aislado con densidad  $\rho(\vec{r})$  imponemos la condición  $\Phi \rightarrow 0$  cuando  $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ . Se puede notar que el potencial dado por la expresión (1.4) automáticamente satisface esta condición.

# CAPÍTULO 1. TEORÍA DE POTENCIALES GRAVITACIONALES NEWTONIANOS

---

Un resultado útil se obtiene si integramos ambos miembros de la ecuación (1.8), sobre un volumen arbitrario, con lo cual obtenemos la conocida Ley de Gauss gravitacional:

$$4\pi GM = \int d^2\vec{S} \cdot \nabla\Phi(\vec{r}) \quad (1.9)$$

siendo  $M$  la masa contenida en el volumen integrado  $M \equiv \int \rho(t, \vec{r})dV$ .

## 1.1.1. Cinemática de partículas de prueba

La posición de una partícula a un tiempo fijo  $t_0$  es descrita por un vector  $\vec{r}(t_0)$  que va del origen de un sistema coordenado al punto donde se encuentra la partícula. Si conecemos este vector a diferentes tiempos obtenemos la trayectoria. El método más simple para localizar una partícula en el espacio es dando las componentes cartesianas de su vector posición, existen muchos problemas en los que resulta más conveniente trabajar con sistemas de coordenadas no cartesianas. Algunos de los sistemas de coordenadas más usados, son el esférico y el cilíndrico, debido a la simetría que representan. En la práctica, podemos pasar de un sistema coordenado a otro mediante una transformación de las coordenadas.

a) En el caso de coordenadas cartesianas tenemos simplemente;

$$\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad (1.10)$$

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \quad (1.11)$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} \quad (1.12)$$

b) En coordenadas esféricas tenemos las transformaciones;

$$x = r \sen \theta \cos \phi \quad r \in (0, \infty) \quad (1.13)$$

$$y = r \sen \theta \sen \phi \quad \theta \in [0, \pi]$$

$$z = r \cos \theta \quad \phi \in [0, 2\pi)$$

Haciendo los cambios pertinentes en (1.10), (1.11) y (1.12) obtenemos los siguientes resultados:

$$\vec{r}(t) = r \cdot \hat{r} \quad (1.14)$$

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r \sen \theta \dot{\phi}\hat{\phi} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) = & [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sen \theta] \hat{r} + [2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r \sen \theta \cos \theta \dot{\phi}^2] \hat{\theta} + \\ & + [2\dot{r} \sen \theta \dot{\phi} + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta + r \sen \theta \ddot{\phi}] \hat{\phi} \end{aligned} \quad (1.16)$$

En el caso particular de órbitas ecuatoriales esféricas nos situamos en el plano ecuatorial  $\theta = \frac{\pi}{2}$  y a un radio  $r$  fijo ( $\dot{r} = 0$ ) por lo que obtenemos de (1.16) :

$$\vec{a} = -r\dot{\phi}^2 \hat{r} + r\ddot{\phi} \hat{\phi} \quad (1.17)$$

# CAPÍTULO 1. TEORÍA DE POTENCIALES GRAVITACIONALES NEWTONIANOS

---

Definimos :  $v_c = v_\phi = r\dot{\phi}$  como la velocidad circular con la cual 1.17 se ve como:

$$\vec{a} = -\frac{v_\phi^2}{r}\hat{r} + r\ddot{\phi}\hat{\phi} \quad (1.18)$$

c) Un análisis similar puede ser realizado en el caso de las coordenadas cilíndricas, donde tenemos:

$$\begin{aligned} x &= R \cos \phi & R &\in (0, \infty) \\ y &= R \sin \phi & \phi &\in [0, 2\pi) \\ z &= z \end{aligned} \quad (1.19)$$

por lo que en este sistema:

$$\vec{v}(t) = \dot{R}\hat{R} + R\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k} \quad (1.20)$$

$$\vec{a} = [\ddot{R} - R\dot{\phi}^2]\hat{R} + [2\dot{R}\dot{\phi} + R\ddot{\phi}]\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k} \quad (1.21)$$

$R$  representa a la coordenada radial. En el caso particular de órbitas circulares usamos  $R = \text{cte.}$  y  $z = 0$ , por lo que obtenemos de (1.21)

$$\vec{a} = -R\dot{\phi}^2\hat{R} + R\ddot{\phi}\hat{\phi} \quad (1.22)$$

si ahora usamos  $v_\phi = R\dot{\phi}$  obtenemos:

$$\vec{a} = -\frac{v_\phi^2}{R}\hat{R} + R\ddot{\phi}\hat{\phi} \quad (1.23)$$

## 1.2. Sistemas esféricos

Usando (1.4) como solución a la ecuación (1.8) en el caso de una distribución  $\rho(\vec{r}, t)$  con simetría esférica y a la vez expresando la integral en coordenadas esféricas e integrando sobre el ángulo sólido, obtenemos:

$$\Phi(t, r) = -4\pi G \left(\frac{1}{r}\right) \int_0^r r'^2 \rho(t, r') dr' - 4\pi G \int_r^\infty r' \rho(t, r') dr' \quad (1.24)$$

Si además definimos:

$$M(r, t) \equiv 4\pi \int_0^r r'^2 \rho(t, r') dr' \quad (1.25)$$

entonces podemos interpretar el primer término de la ecuación (1.24) como la suma de los potenciales de cascarones esféricos con radio inferior a  $r$  y el segundo término como la contribución de las capas externas al radio  $r$ .

# CAPÍTULO 1. TEORÍA DE POTENCIALES GRAVITACIONALES NEWTONIANOS

---

Para la fuerza que actúa sobre la partícula de masa  $m_s$  obtenemos simplemente la expresión:

$$\vec{F}(r) = -m_s \nabla \Phi(t, r) = -4\pi G m_s \frac{1}{r^2} \int_0^r r'^2 \rho(t, r') dr' \hat{r} \quad (1.26)$$

Con ayuda de la ecuación (1.25) obtenemos:

$$\vec{F}(r) = -\frac{G m_s M(r)}{r^2} \hat{r} \quad (1.27)$$

De la segunda Ley de Newton  $\vec{F} = m_s \vec{a}$ , obtenemos una ecuación para la aceleración:

$$\vec{a}(r) = -\frac{G m_s M(r)}{m_s r^2} \hat{r} = -\frac{GM(r)}{r^2} \hat{r} \quad (1.28)$$

Una propiedad importante de una distribución de materia esférica es su velocidad circular  $v_c(r)$ , definida a ser la velocidad de una partícula de prueba en una órbita circular de radio  $r$ . Comparando (1.18) con (1.28) y (1.26) obtenemos las condiciones del movimiento para partículas de prueba bajo la influencia de un campo gravitacional simétricamente esférico con  $\phi = 0$ :

$$v_c^2 = \frac{GM(r)}{r} = r |\vec{F}| = r \frac{d\Phi}{dr} \quad (1.29)$$

En la literatura existen diferentes modelos para la densidad de distribuciones esféricas, los cuales pretenden describir el comportamiento de una determinada situación. Tal es el caso de la materia oscura. Para nuestros propósitos de interés tomaremos el modelo de Navarro-Frenk-White (NFW) [20], [21] y el modelo de Burkert [22] como modelos de distribuciones de materia oscura, los cuales desarrollaré continuación a manera de ejemplo de lo expuesto en esta sección.

## 1.2.1. Modelo de Navarro-Frenk-White

Entre 1996 y 1997 Navarro et al. dieron una prescripción para la distribución de materia oscura hecha con simulaciones numéricas, basadas en el paradigma de CDM. Este modelo es conocido también como “perfil de densidad universal”, el cual tiene un pico característico hacia el centro de la galaxia.

El perfil NFW tiene la siguiente distribución de materia oscura:

$$\rho_{NFW} = \frac{\rho_0}{\frac{r}{r_s} \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2} \quad (1.30)$$

# CAPÍTULO 1. TEORÍA DE POTENCIALES GRAVITACIONALES NEWTONIANOS

---

Donde  $r_s$  es el radio característico del Halo y  $\rho_0$  es la densidad inicial del Universo al momento del colapso de el halo.

Las distribuciones asintóticas de este modelo son:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_{NFW} \rightarrow 0$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \rho_{NFW} \rightarrow \infty$$

Como primer paso para calcular la velocidad circular, y de acuerdo a la ecuación (1.29), calculamos primero la masa del halo oscuro partiendo de la ecuación (1.25):

$$M(r) = 4\pi\rho_0 \int_0^r \frac{1}{\frac{r'}{r_s} \left(1 + \frac{r'}{r_s}\right)^2} r'^2 dr' \quad (1.31)$$

Se resuelve esta ecuación usando fracciones parciales y se obtiene el resultado:

$$M(r) = 4\pi\rho_0 r_s^3 \left[ \ln\left(\frac{r_s + r}{r_s}\right) - \frac{r}{r + r_s} \right] \quad (1.32)$$

La masa del halo (1.32) tiene los límites asintóticos:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M(r) \rightarrow \infty$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(r) \rightarrow 0$$

Notemos que aunque la masa diverge cuando  $r \rightarrow \infty$ , en la práctica el cálculo de la masa se realiza hasta un radio máximo que es definido por las observaciones de las curvas de rotación.

Ahora sustituimos las expresiones anteriores en (1.29) y obtenemos:

$$v_c^2(r) = \frac{4\pi G\rho_0 r_s^3}{r} \left[ -\frac{r}{r + r_s} + \ln\left(\frac{r_s + r}{r_s}\right) \right] \quad (1.33)$$

La función (1.33) tiene los límites asintóticos:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v_c^2(r) \rightarrow 0$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} v_c^2(r) \rightarrow 0$$

### 1.2.2. Modelo de Burkert

Un perfil de densidad fue propuesto por Burkert (1995), quien trató de encontrar el perfil que mejor se ajustara a las curvas de rotación de galaxias enanas, las cuales se sabe que están mayormente compuestas por materia oscura. El perfil de Burkert es una ley empírica. En contraste con los perfiles de CDM, tiene una densidad central y lo caracteriza un radio  $r_s$ .

El perfil de densidad de este Halo y sus límites asintóticos están dados por las siguientes expresiones:

$$\rho_B = \frac{\rho_0}{\left(1 + \frac{r}{r_s}\right) \left[1 + \left(\frac{r}{r_s}\right)^2\right]} \quad (1.34)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_B \rightarrow 0$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \rho_B = \rho_0$$

Una vez conocida la distribución de masa procedemos igual que en el ejemplo anterior y obtenemos los siguientes resultados:

$$M(r) = \pi \rho_0 r_s^3 \left( \ln \left[ \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2 \left(1 + \frac{r^2}{r_s^2}\right) \right] - 2 \arctan \left[ \frac{r}{r_s} \right] \right) \quad (1.35)$$

los límites asintóticos correspondientes a la función de masa encontrada son los siguientes:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} M(r) \rightarrow \infty$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(r) \rightarrow 0$$

al igual que en el modelo NFW la masa diverge en radios infinitos, esto no representa un problema en nuestro caso ya que nuestro radio máximo es determinado por la observación más lejana del centro de la galaxia.

$$v_c^2(r) = \frac{\pi G \rho_0 r_s^3}{r} \left( \ln \left[ \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2 \left(1 + \frac{r^2}{r_s^2}\right) \right] - 2 \arctan \left[ \frac{r}{r_s} \right] \right) \quad (1.36)$$

los límites asintóticos de la velocidad del halo de Burkert son:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v_c^2(r) \rightarrow 0$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} v_c^2(r) \rightarrow 0$$

### 1.3. Potenciales de Discos

- Hoy en día, sabemos que la luz emitida por una galaxia espiral típica proviene en su mayor parte de un disco delgado ó grueso.

Si la masa de tal galaxia está concentrada en un disco luminoso es una cuestión que puede solamente ser contestada por un estudio de la dinámica gravitacional del sistema.

Sin embargo, podemos anticipar que una fracción substancial de la masa de la galaxia espiral está concentrada en el disco luminoso, y es por lo tanto necesario calcular el campo gravitacional generado por un disco idealizado de ancho cero ó finito.

En la primera parte, comenzaremos estudiando como caso particular el pontencial de un disco delgado axialsimétrico de ancho cero.

Existen, en general, tres técnicas diferentes para calcular el potencial de un disco. Una consiste en tratar el disco como un esferoide aplanado, otra es vía integrales elípticas y la tercera vía funciones de Bessel. Ésta última técnica es la más adecuada por lo que será desarrollada en las siguientes secciones.

#### 1.3.1. Potenciales gravitacionales de discos delgados vía funciones de Bessel.

Consideremos un disco delgado con potencial gravitacional axialsimétrico  $\Phi(R, z)$ , [Toomre (1962)], Toomre desarrolló un método vía la solución de la ecuación de Laplace,  $\nabla^2\Phi = 0$ , sujeta a condiciones de frontera adecuadas sobre el disco, situado en  $z = 0$  y en infinito  $R \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty$ .

Partimos de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas  $(R, z)$  sobre un sistema axialsimétrico:

$$\nabla^2\Phi = 0 \Rightarrow \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left[ R \left( \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) \right] + \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (1.37)$$

Para resolver (1.37) usamos la técnica de separación de variables para el potencial  $\Phi$ :

$$\Phi(R, z) = J(R) \cdot Z(z) \quad (1.38)$$

Introduciendo (1.38) en (1.37) y separando las variables obtenemos una ecuación para cada variable:

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - K^2 \cdot Z(z) = 0, \quad (1.39)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left[ R \frac{dJ(R)}{dR} \right] + K^2 \cdot J(R) = 0 \quad (1.40)$$

## CAPÍTULO 1. TEORÍA DE POTENCIALES GRAVITACIONALES NEWTONIANOS

---

donde  $K$  es un número complejo ó real arbitrario, conocido como la constante de separación. La ecuación (1.39) se integra fácilmente y obtenemos la solución:

$$Z(z) = S e^{[\pm Kz]} \quad (1.41)$$

donde  $S$  es una constante.

La ecuación para la variable  $R$  (1.40) se simplifica usando una nueva variable  $u = KR$ :

$$\frac{1}{u} \frac{d}{du} \left[ u \frac{dJ(u)}{du} \right] + J(u) = 0 \quad (1.42)$$

Ésta última es una ecuación de Bessel de orden  $\nu = 0$ .

La solución general a (1.42) es una combinación lineal de funciones de Bessel de primera clase  $J_0(u)$  y de segunda clase  $N_0(u)$  conocida también como función de Neumann:

$$J(u) = AJ_0(u) + BN_0(u)$$

Las soluciones particulares a ésta ecuación se encuentran implementando las condiciones de frontera deseadas. En nuestro caso, la solución de interés y adecuada al problema que estamos tratando es la solución que satisface las condiciones de frontera:  $J(0) \equiv (finita)$ , por lo que hemos de elegir  $B = 0$  y obtener:

$$J(u) = AJ_0(u) = A \cdot J_0(KR) \quad (1.43)$$

Finalmente, la solución de interés a la ecuación radial (1.42) es una función de Bessel de orden cero  $\nu = 0$  (1.43).

Una vez obtenidas las soluciones particulares para cada variable podemos formular las soluciones particulares para el potencial gravitacional  $\Phi$ :

$$\Phi_{\pm}(R, z) = e^{(\pm Kz)} \cdot J_0(K) \quad (1.44)$$

Consideremos ahora la siguiente solución particular:

$$\Phi_K(R, z) = e^{(-K|z|)} \cdot J_0(KR) \quad (1.45)$$

donde  $K$  es real y positivo. Esta solución satisface las condiciones de frontera:

$$\Phi_K \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad |z| \rightarrow \infty$$

$$\Phi_K \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad R \rightarrow \infty$$

puesto que  $J_0(KR) \rightarrow 0$  cuando  $R \rightarrow \infty$ .  $\Phi_K$  satisface todas las condiciones requeridas para ser el potencial generado por una distribución de densidad aislada.

Además:

## CAPÍTULO 1. TEORÍA DE POTENCIALES GRAVITACIONALES NEWTONIANOS

---

- (i) Para  $z > 0$ ,  $\Phi_K$  coincide con  $\Phi_-(R, z)$ .
- (ii) Para  $z < 0$ ,  $\Phi_K$  coincide con  $\Phi_+(R, z)$ .

Los incisos (i) y (ii) implican que  $\Phi_K(R, z)$  resuelve la ecuación de Laplace  $\nabla^2\Phi_K = 0$  en todos los puntos arriba y debajo del plano  $z = 0$  excepto en el mismo plano  $z = 0$ .

En  $z = 0$ ,  $\Phi_K(R, z)$  no satisface la ecuación de Laplace porque su gradiente sufre una discontinuidad, sin embargo, podemos usar el teorema de Gauss para evaluar la densidad superficial  $\Sigma_K(R)$  de la hoja (disco infinitamente delgado) que genera dicha discontinuidad.

La ley de Gauss se enuncia como:

$$4\pi GM = (4\pi G) \cdot \int_V d^3x \cdot \rho(\vec{x}) = \int (\nabla\Phi) \cdot d^2\vec{s} \quad \text{Ley de Gauss}$$

Para el disco infinitamente delgado axialsimétrico tenemos la densidad de materia  $\rho(\vec{x}) = \Sigma(R, \phi) \cdot \delta(z)$ , la cual sustituiremos en la parte de la ley de Gauss que contiene a dicha densidad y por separado se desarrollará el término que contiene al potencial:

$$\begin{aligned} \int_V d^3x \cdot \rho(\vec{x}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int dA \cdot \Sigma(R, \phi) \cdot \delta(z) dz = \int dA \cdot \Sigma(R, \phi) \\ \int_{caja} (\nabla\Phi) \cdot d^2\vec{s} &= \int (\nabla\Phi_-) \cdot \hat{n} dA + \int (\nabla\Phi_+) \cdot -\hat{n} dA \end{aligned}$$

Cuando el área es pequeña ( $dA \rightarrow 0$ ) tenemos: (*de la ley de Gauss*): ( $z = 0$ )

$$4\pi G \cdot \Sigma_K(R, \phi) = (\nabla\Phi_- \cdot \hat{n} - \nabla\Phi_+ \cdot \hat{n}) = \left( \frac{\partial\Phi_-}{\partial z} \right) \Big|_{z=0^+} - \left( \frac{\partial\Phi_+}{\partial z} \right) \Big|_{z=0^-}$$

$$\begin{aligned} 4\pi G \cdot \Sigma_K(R) &= \lim_{z \rightarrow 0^+} \left( \frac{\partial\Phi_K}{\partial z} \right) - \lim_{z \rightarrow 0^-} \left( \frac{\partial\Phi_K}{\partial z} \right) \\ &= -K J_0(KR) - K J_0(KR) = -2K J_0(KR) \end{aligned}$$

donde usamos que:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0^+} \left( \frac{\partial\Phi_K}{\partial z} \right) &= \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial z} \left[ e^{-Kz} \cdot J_0(KR) \right] = -K J_0(KR), \\ \lim_{z \rightarrow 0^-} \left( \frac{\partial\Phi_K}{\partial z} \right) &= +K J_0(KR) \end{aligned} \quad (1.46)$$

Entonces:

$$(4\pi G) \cdot \Sigma_K(R) = -2K J_0(KR) \Rightarrow \Sigma_K(R) = -\left( \frac{K}{2\pi G} \cdot J_0(KR) \right) \quad (1.47)$$

# CAPÍTULO 1. TEORÍA DE POTENCIALES GRAVITACIONALES NEWTONIANOS

---

Las ecuaciones (1.45) y (1.47) proporcionan un par potencial-densidad simple:

$$\Phi_K(R, z) = e^{(-K|z|)} \cdot J_0(KR) \quad (1.48)$$

$$\Sigma_K(R) = -\frac{K}{2\pi G} \cdot J_0(KR) \quad (1.49)$$

Para generar el potencial de un disco de densidad superficial arbitraria  $\Sigma(R)$  realizamos una superposición de la ecuación (1.47) para todos los valores de  $K$ ,  $S(K) \equiv$  coeficiente dependiente de  $K$ .

$$\Sigma(R) = \int_0^\infty S(K) \cdot \Sigma_K(R) \cdot dK = -\left(\frac{1}{2\pi G}\right) \cdot \int_0^\infty S(K) \cdot J_0(KR) K dK \quad (1.50)$$

Debido a que la relación entre la densidad  $\Sigma(R)$  y el potencial  $\Phi(R)$  es lineal por la ecuación de Poisson ó por la ley de Gauss tenemos:

$$\Phi(R, z) = \int_0^\infty S(K) \Phi_K(R, z) dK = \int_0^\infty S(K) \cdot J_0(KR) e^{-K|z|} K dK \quad (1.51)$$

La ecuación (1.50) establece que  $S(K)$  es la transformada de Hankel de  $(-2\pi\Sigma)$ . Las transformadas de Hankel se definen por las expresiones:

$$f(R) = \int_0^\infty g(K) \cdot J_\nu(KR) K dK \quad (1.52)$$

$$g(K) = \int_0^\infty f(\rho) \cdot J_\nu(KR) R \cdot dR \quad (1.53)$$

En virtud de la ecuación (1.53) tenemos:

$$S(K) = -(2\pi G) \int_0^\infty J_0(KR) \cdot \Sigma(R) \cdot R \cdot dR \quad (1.54)$$

Introducimos (1.54) en (1.51) para obtener:

$$\Phi(R, z) = -(2\pi G) \int_0^\infty dK e^{-K|z|} \cdot J_0(KR) \cdot \int_0^\infty \Sigma(R') \cdot J_0(KR') \cdot R' dR' \quad (1.55)$$

Calculamos ahora la velocidad circular  $v_c(R)$  de órbitas esféricas con radio  $R$  en  $z = 0$ , usando el potencial (1.55),

$$\begin{aligned} v_c^2(R) &= R \left( \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) \Big|_{z=0} \\ &= \left[ - (2\pi G) R \int_0^\infty dK e^{-K|z|} \frac{dJ_0(KR)}{dR} \int_0^\infty \Sigma(r') J_0(KR') R' dR' \right] \Big|_{z=0} \\ &= -(2\pi G) R \int_0^\infty dK \left[ \frac{dJ_0(KR)}{d\rho} \right] \int_0^\infty \Sigma(R') J_0(KR') R' dR' \\ &= -R \int_0^\infty S(K) J_1(KR) K dK \end{aligned} \quad (1.56)$$

## CAPÍTULO 1. TEORÍA DE POTENCIALES GRAVITACIONALES NEWTONIANOS

---

Donde hemos usado las identidades:

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dJ_0(KR)}{dR} = -KJ_1(KR)$$

### Curva de rotación para un disco exponencial:

Los discos cuyo perfil de densidad de masa se modela con un comportamiento radialmente exponencial son de particular interés debido a la similitud que presentan con los perfiles obtenidos de forma observacional, motivo por el cual en la presente sección se desarrollan las curvas de rotación para discos exponenciales. Usando como densidad superficial  $\Sigma(R) = \Sigma_0 \cdot e^{-R/R_d}$  y con ayuda de la fórmula (6.623.2) del libro de fórmulas: Gradshteyn and Ryzhik (1965) [23] obtenemos de la ecuación (1.54) :

$$S(K) = -(2\pi G) \cdot \int_0^\infty J_0(KR) \cdot \Sigma_0 e^{-R/R_d} R \cdot dR \quad (1.57)$$

$$S(K) = -(2\pi G \Sigma_0) \cdot \frac{R_d^2}{[1 + (KR_d)^2]^{3/2}} \quad (1.58)$$

Introducimos (1.58) en la ecuación (1.51) y obtenemos el potencial gravitacional correspondiente a un disco con perfil de densidad exponencial:

$$\Phi(R, z) = -(2\pi G \Sigma_0 R_d^2) \int_0^\infty \frac{J_0(kR) \cdot e^{-K|z|} dK}{[1 + (KR_d)^2]^{3/2}} \quad (1.59)$$

Para  $z = 0$ , tenemos:

$$\Phi(R, 0) = -(2\pi G \Sigma_0 R_d^2) \int_0^\infty \frac{J_0(KR)}{[1 + (KR_d)^2]^{3/2}} dK \quad (1.60)$$

La solución a esta integral se tiene usando las fórmulas (6.552.1) del libro de Gradshteyn y Ryzhik y la (9.6.27) del libro de Abramowitz. Obteniendo la evaluación:

$$\Phi(R, 0) = -\pi G \Sigma_0 R \cdot \left[ I_0\left(\frac{R}{2R_d}\right) \cdot K_1\left(\frac{R}{2R_d}\right) - I_1\left(\frac{R}{2R_d}\right) \cdot K_0\left(\frac{R}{2R_d}\right) \right] \quad (1.61)$$

En la ecuación (1.61)  $I_n$  y  $K_n$  son funciones de Bessel modificadas de primera y segunda clase respectivamente. Diferenciamos (1.61) con respecto a  $\rho$ , aplicando las relaciones de recurrencia conocidas para las funciones de Bessel y sus derivadas, obteniendo así la velocidad circular (1.56) del disco exponencial [Freeman, 1970]:

$$v_c^2(R) = \pi G \Sigma_0 \left(\frac{R^2}{R_d}\right) \cdot \left[ I_0\left(\frac{R}{2R_d}\right) K_0\left(\frac{R}{2R_d}\right) - I_1\left(\frac{R}{2R_d}\right) K_1\left(\frac{R}{2R_d}\right) \right] \quad (1.62)$$

# CAPÍTULO 1. TEORÍA DE POTENCIALES GRAVITACIONALES NEWTONIANOS

---

La masa encerrada en el radio  $R$  de acuerdo a la densidad del disco es:

$$\begin{aligned} M_d(R) &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \Sigma(R') R' \cdot dR' d\phi = 2\pi \int_0^R \Sigma_0 e^{-R'/R_d} R' \cdot dR' \quad (1.63) \\ &= (2\pi \Sigma_0 R_d^2) \cdot \left[ 1 - e^{-R/R_d} \left( \frac{R}{R_d} + 1 \right) \right] \end{aligned}$$

en el caso en que  $R \rightarrow \infty$  tenemos:  $M_d = 2\pi \Sigma_0 R_d^2$ . De manera que para la densidad del disco se obtiene:

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 e^{-R/R_d} = \frac{M_d}{2\pi R_d^2} e^{-R/R_d} \quad (1.64)$$

Sustituyendo (1.64) en (1.62) obtenemos una versión alternativa para la velocidad circular:

$$v_c^2(R) = \left( \frac{GM_d}{2R_d} \right) \left( \frac{R^2}{R_d^2} \right) \cdot \left[ I_0 \left( \frac{R}{2R_d} \right) K_0 \left( \frac{R}{2R_d} \right) - I_1 \left( \frac{R}{2R_d} \right) K_1 \left( \frac{R}{2R_d} \right) \right] \quad (1.65)$$

Notemos que tanto para la velocidad circular del disco como para la densidad superficial hemos de especificar un par de parámetros,  $(M_d, R_d)$  o  $(\Sigma_0, R_d)$ , los cuales se fijan de acuerdo a datos observacionales o de alguna otra manera.

## 1.3.2. Discos Gruesos

Aunque el disco exponencial infinitesimalmente delgado es usado extensivamente para modelar curvas de rotación y formación de discos [15], es generalmente inadecuado para describir modelos dinámicos más detallados. Después de todo, discos luminosos realistas tienen un ancho vertical no nulo. En principio, es fácil construir modelos de discos gruesos si la distribución de densidad es separable. En el caso de un disco infinitesimalmente delgado usamos para la densidad de masa la expresión:

$$\rho(R, z) = \Sigma(R) \delta(z)$$

Para darle grosor a este disco hemos de reemplazar la función delta de Dirac, por cualquier otra función  $h(z)$  que describa la distribución de densidad vertical. Una función comunmente usada para describir la densidad de luminosidad en la dirección  $\hat{z}$  es:

$$h_n(z) = \operatorname{sech}^{2/n} \frac{n|z|}{2z_d}$$

Donde  $n$  es un parámetro que controla el perfil cerca de  $z = 0$  y  $z_d$  es llamado el factor de escala de altura del disco. En la literatura tres valores de  $n$  han sido utilizados ampliamente:

# CAPÍTULO 1. TEORÍA DE POTENCIALES GRAVITACIONALES NEWTONIANOS

---

$$h_n(z) = \begin{cases} \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{2z_d}\right) & n = 1 \\ \operatorname{sech}\left(\frac{z}{z_d}\right) & n = 2 \\ e^{-|z|/z_d} & n \rightarrow \infty \end{cases}$$

La forma  $\operatorname{sech}^2$  corresponde a una hoja isotérmica autogravitante. Este modelo ha sido usado extensivamente para modelar galaxias espirales ya que provee un buen ajuste al perfil de densidad de brillo luminoso observado. Para propósitos de cálculo se utilizará el factor de escala de altura del disco <sup>1</sup> de acuerdo a [17]:

$$z_d = \frac{1}{5}R_d.$$

Puesto que los potenciales son aditivos (linealidad de la ecuación de Poisson), el potencial de un disco grueso se sigue directamente de sumar los potenciales de un número infinito de discos infinitesimalmente delgados, pesados propiamente por la función  $h(z)$ :

$$\Phi(R, z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(R, z - z')h(z')dz' \quad (1.66)$$

La función  $g(R, z - z')$  es la solución para el potencial en el caso de discos delgados, de modo que (1.66) satisface la ecuación de Poisson con densidad  $\Sigma(R)h(z)$ :

$$\nabla^2\Phi(R, z) = (4\pi G)\Sigma(R)h(z) \quad (1.67)$$

Introduciendo la solución para  $g(R, z - z')$  en la ecuación (1.66) obtenemos:

$$\Phi(R, z) = -(2\pi G) \int_0^{\infty} dk J_0(kR) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dz' \tilde{\rho}(k, z') e^{-k|z-z'|} \quad (1.68)$$

Se ha definido  $\tilde{\rho}(k, z') \equiv \tilde{\Sigma}(k)h(z')$ , notemos que  $\tilde{\rho}(k, z')$  es la transformada de Hankel de  $\rho(R, z)$  en la variable  $R$  solamente. En nuestro análisis se usará la función de densidad:

$$\rho(R, z) = \frac{\Sigma(R)}{4z_d} \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{2z_d}\right) \quad (1.69)$$

La cual indica que para la estructura vertical hemos utilizado el modelo de hoja isotérmica y hemos añadido un factor por propósitos de normalización.

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4z_d} \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{2z_d}\right) dz = 1$$

Tenemos entonces que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(R, z)dz = \Sigma(R) \quad (1.70)$$

---

<sup>1</sup>Este radio canónico  $R_d/z_d = 5$  ha sido confirmado en [16], quienes para una muestra de 34 galaxias encontraron el valor  $R_d/z_d = 4.8 \pm 1.3$ , lo cual es consistente con nuestra elección.

## CAPÍTULO 1. TEORÍA DE POTENCIALES GRAVITACIONALES NEWTONIANOS

---

El cálculo de la velocidad circular en discos luminosos gruesos es completamente análogo a los casos anteriores, en este caso se obtiene derivando (1.68) con respecto a  $R$ :

$$v_c^2(R) = R \left( \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) \Big|_{z=0} = (2\pi G) R \int_0^\infty dk J_1(kR) \tilde{\Sigma}(k) F(k, z_d) k \quad (1.71)$$

Donde la función  $F(k)$  es definida por la expresión:

$$F(k, z_d) = \int_{-\infty}^\infty dz' h(z') e^{-k|z-z'|} \Big|_{z=0} \quad (1.72)$$

La solución de esta expresión no es dada en términos de funciones elementales, para resolverla hemos usado el programa *Mathematica* y encontrado la solución:

$$F(k, z_d) = 1 + z_d k \left[ \text{HN} \left( \frac{1}{2} [z_d k - 1] \right) - \text{HN} \left( \frac{z_d k}{2} \right) \right] \quad (1.73)$$

HN es conocido como número armónico, cuya fórmula es:

$$\text{HN}_x = x \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(x+i)} \quad (1.74)$$

Introduciendo la densidad superficial del disco delgado y (1.73) en (1.71) obtenemos una forma más explícita para la velocidad circular debida a discos gruesos:

$$v_c^2(R) = (2\pi G) R \Sigma_0 \int_0^\infty dk J_1(kR) k \frac{R_d^2}{(1 + (kR_d)^2)^{3/2}} F(k, z_d) \quad (1.75)$$

# Estadística Bayesiana

Con la finalidad de describir el Universo a escalas cosmológicas y galácticas, es necesario crear modelos que den una interpretación razonable a los datos recolectados por los diferentes experimentos. Por un lado se busca que los modelos sean capaces de reproducir lo que se observa y, por otro, las mismas observaciones sirven para poner cotas a los valores de los parámetros libres de tales modelos. En términos matemáticos esta interpretación de datos se traduce en realizar un análisis estadístico Bayesiano, en el cual se confronta una hipótesis o modelo contra las observaciones. Típicamente los datos observacionales nunca se ajustan de forma exacta al modelo, incluso cuando el modelo es correcto, en términos de la estadística frecuentista, es necesario conocer las barras de error asociadas a las mejores estimaciones para dar una mejor descripción de los datos. En este capítulo, se presentan y revisan las ideas y principios fundamentales de la Estadística Bayesiana.

## 2.1. Teoremas de probabilidad

La Estadística Bayesiana se basa principalmente en los siguientes dos Axiomas:

- **Axioma de Suma de probabilidades:**

$$\text{Prob}(X|I) + \text{Prob}(\bar{X} | I) = 1, \quad (2.1)$$

donde  $\bar{X}$  significa la negación de la proposición  $X$ .

- **Axioma del Producto de probabilidades:**

$$\text{Prob}(X, Y | I) = \text{Prob}(X | Y, I) \cdot \text{Prob}(Y | I). \quad (2.2)$$

---

## CAPÍTULO 2. ESTADÍSTICA BAYESIANA

---

Los axiomas (2.1) y (2.2) constituyen el álgebra básica de la probabilidad. Múltiples resultados se derivan de ellos. Lo que se desea es calcular probabilidades de la certeza ó no de las proposiciones<sup>1</sup> Esto se traduce primeramente en calcular cierta probabilidad llamada comúnmente “*probabilidad posterior*”, que se define como:

$$\text{Prob}(X | Y, I).$$

Esta expresión se lee como: “*probabilidad de que los valores asumidos para la proposición o variable  $X$  sean ciertos, asumiendo cierta proposición o datos  $Y$  como verdaderos, así como también alguna otra información de fondo  $I$  como cierta*”.

La idea es calcular la probabilidad posterior para cada posible valor de  $X$ , buscando el valor  $X = X_0$  que tiene la máxima probabilidad de ser cierto. A este valor  $X_0$  se le denomina “*la mejor estimación de  $X$* ”.

Desafortunadamente es difícil poder calcular la probabilidad posterior directamente, pero a través del **Teorema de Bayes** se puede hacer este cálculo.

### Teorema de Bayes

$$\text{Prob}(X | Y, I) = \frac{\text{Prob}(Y | X, I) \cdot \text{Prob}(X | I)}{\text{Prob}(Y | I)}, \quad (2.3)$$

donde, cada uno de estos factores tienen un nombre particular:

- $\text{Prob}(X | Y, I)$  = Probabilidad posterior.
- $\text{Prob}(Y | X, I)$  = Función de probabilidad.
- $\text{Prob}(X | I)$  = Probabilidad previa.

El teorema de Bayes se demuestra fácilmente de los axiomas (2.1) y (2.2). Este teorema se puede generalizar directamente al caso en que las proposiciones o parámetros  $X$  y  $Y$  pueden tomar más que solo dos valores (falso o verdadero), sino todo un conjunto discreto de valores, o más aún, un *continuo* de valores. Además, se generaliza al caso cuando se tienen más que solo dos parámetros ( $X, Y$ ).

Para el caso continuo, el teorema de Bayes toma la forma

$$\text{fdp}(X|Y, I) = \frac{\text{fdp}(Y|X, I) \cdot \text{fdp}(X|I)}{\text{fdp}(X, Y|I)}, \quad (2.4)$$

donde ahora  $X$  y  $Y$  toman valores continuos. Las expresiones “ **fdp** ” se denominan ahora como *funciones de densidad de probabilidad* (FDP) para  $X$  y  $Y$ .

---

<sup>1</sup>Más adelante se verá que estas *proposiciones* usualmente corresponderán a un conjunto de valores de parámetros libres de un modelo o teoría dada.

Un resultado útil es la marginalización y se utiliza cuando en un modelo teórico tenemos varios parámetros libres y es necesario reducir eliminar la dependencia del modelo con respecto a algunos de dichos parámetros, para después calcular los valores más probables de los restantes, en el caso continuo la ecuación de marginalización tiene la forma:

$$\text{fdp}(X|I) = \int \text{fdp}(X, Y|I) dY \quad (2.5)$$

## 2.2. La Prueba $\chi^2$

Pretendemos conocer los parámetros de los modelos de materia oscura los cuales permiten un ajuste con los datos observacionales, para encontrarlos usaremos la técnica estadística de estimación de parámetros llamada **prueba  $\chi^2$** , la cual se describe a continuación.

Sean:

$X \equiv$  Vector cuyas componentes son el conjunto de los parámetros a estimar su valor [por ejemplo,  $X = (r_s, \rho_0)$ ].

$D \equiv$  Vector cuyas componentes son el conjunto de datos observacionales [por ejemplo, la velocidad circular a cierto radio,  $D = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ].

$I \equiv$  Información de fondo que se asume como verdadera (por ejemplo, La Ley de Gravitación Universal).

Entonces, el teorema de Bayes se escribe como:

$$\text{Prob}(X | D, I) \propto \text{Prob}(D | X, I) \cdot \text{Prob}(X | I). \quad (2.6)$$

Se ha omitido el denominador que aparecía en el teorema de Bayes (2.3), debido a que no es un factor relevante<sup>2</sup>, lo importante son los otros dos factores: la *función de probabilidad*  $\text{Prob}(D | X, I)$ , y la *probabilidad previa*  $\text{Prob}(X | I)$ . Debido a que se ha omitido “ $\text{Prob}(D|I)$ ” en la expresión (2.6), es por eso que en lugar del símbolo de “igualdad” aparece el de “proporcional” ( $\propto$ ).

El cálculo de la *probabilidad posterior* se basa en tres suposiciones. La primera es sobre la forma de la *probabilidad previa*. La cual asumiremos es *constante*, sin embargo, se pueden estudiar otras posibilidades. Entonces, asumiendo una probabilidad previa *constante*, se tiene

$$\text{Prob}(X | I) = \text{cte.} \quad (2.7)$$

---

<sup>2</sup>El factor que iría como denominador sería:  $\text{Prob}(D|I) =$  *probabilidad de que los datos sean ciertos asumiendo que la teoría es válida*. Este término no depende de  $X$  y se utiliza principalmente solo para normalizar el valor de la probabilidad posterior

---

## CAPÍTULO 2. ESTADÍSTICA BAYESIANA

---

Esta expresión indica que todos los valores posibles para la proposición  $X$  son *igualmente probables a priori*, lo cual hace que su probabilidad previa sea una constante.  $\text{Prob}(X | I)$  es la probabilidad de que los parámetros  $X$  tengan cierto valor, asumiendo a la teoría e información de fondo como verdaderas. Pero de la pura teoría e información de fondo, los parámetros  $X$  *no logran preferir* algún valor en particular *a priori*, sino que son los datos  $D$  quienes permiten escoger cuáles valores de  $X$  dan la mayor probabilidad de ser los verdaderos. Por tanto, la suposición “ $\text{Prob}(X | I) = \text{cte}$ ” indica que *a priori* no se está asignando alguna probabilidad mayor para algún valor particular de  $X$  sino que se les está asignando la misma probabilidad de ser, a cada uno de ellos.

Dado que la probabilidad previa es una constante, entonces todo el peso de calcular la probabilidad posterior recae sobre la *función de probabilidad*, esto es:

$$\text{Prob}(X | D, I) \propto \text{Prob}(D | X, I). \quad (2.8)$$

Ahora, tomemos dos datos cualesquiera  $x_k$  y  $x_l$  del conjunto de datos  $D$ . Del axioma (2.2) tenemos que:

$$\text{Prob}(x_k, x_l | X, I) = \text{Prob}(x_k | x_l, X, I) \cdot \text{Prob}(x_l | X, I). \quad (2.9)$$

En este momento conviene establecer la segunda suposición, esta es: “*La medición observacional de cada dato  $x_k$  es independiente de la medición de cualquier otro dato  $x_l$* ”.

Esta suposición es muy razonable, ya que por ejemplo, medir la velocidad circular  $v_c(R)$  a un radio fijo, no influye en la medición que se obtiene al medir la velocidad circular a algún otro radio.

Aplicando esta suposición, obtenemos:

$$\text{Prob}(x_k | x_l, X, I) = \text{Prob}(x_k | X, I),$$

de aquí que:

$$\text{Prob}(x_k, x_l | X, I) = \text{Prob}(x_k | X, I) \cdot \text{Prob}(x_l | X, I). \quad (2.10)$$

Aplicando la propiedad (2.10) a todos los datos, la *función de probabilidad* se vuelve:

$$\text{Prob}(D | X, I) = \prod_{k=1}^n \text{Prob}(x_k | X, I). \quad (2.11)$$

La tercera suposición es: “*La distribución de probabilidad de cada dato  $x_k$ , generada a partir de su medición observacional, es en una buena aproximación, una distribución*

---

## CAPÍTULO 2. ESTADÍSTICA BAYESIANA

---

*Gaussiana*". Esta suposición se basa sobre el hecho *experimental* de que en la naturaleza al tomar  $l$ -mediciones de un mismo fenómeno bajo las mismas condiciones, la distribución histográfica de estas mediciones es Gaussiana.

Considerando esto, la distribución de probabilidad del dato  $x_k$ , toma la forma:

$$\text{Prob}(x_k|X, I) = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(m_k(X) - x_k)^2}{2\sigma_k^2} \right], \quad (2.12)$$

donde:

$m_k(X)$  es un *modelo* funcional entre los parámetros  $X$  y los datos ideales teóricos  $m$  sin error, esto para el dato  $x_k$ . De aquí en adelante  $m_k(X) = m_k$ .

$\sigma_k$  es la desviación estándar que se obtiene de las multiples observaciones del dato  $x_k$ .

Combinando (2.11) y (2.12), la función de probabilidad toma la forma:

$$\text{Prob}(D|X, I) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(m_k - x_k)^2}{2\sigma_k^2} \right]. \quad (2.13)$$

Definiendo la constante  $A$  como

$$A \equiv \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}}, \quad (2.14)$$

y a la *función*  $\chi^2$  como

$$\chi^2 \equiv \sum_{k=1}^n \frac{(m_k - x_k)^2}{\sigma_k^2}. \quad (2.15)$$

obtenemos que la *función de probabilidad* del teorema de Bayes (2.6) adquiere la forma:

$$\text{Prob}(D|X, I) = A \exp \left[ -\frac{\chi^2}{2} \right]. \quad (2.16)$$

Por tanto, de acuerdo a la igualdad (2.8), hemos hallado la expresión para la *probabilidad posterior*:

$$\text{Prob}(X|D, I) = B \exp \left[ -\frac{\chi^2}{2} \right], \quad (2.17)$$

donde  $B$  es una constante de proporcionalidad (y normalización), en ella ya va incluida la constante  $A$ . Observe que la función  $\chi^2$  solo depende del conjunto de parámetros  $X$ .

---

## CAPÍTULO 2. ESTADÍSTICA BAYESIANA

---

Para el caso continuo, la expresión de la *función de probabilidad* (2.16) puede expresarse en términos de una función de densidad de probabilidad como

$$\mathbf{fdp}(D|X, I) = cte \cdot e^{-x^2/2}, \quad (2.18)$$

donde “*cte*” es una constante de normalización. Con esta expresión, y para el caso más general en el cual *no se asume* necesariamente que la probabilidad previa sea una constante, el teorema de Bayes toma la forma [ver (2.6) y (2.4)] es importante mencionar que a medida que el número de datos observacionales es más grande, la elección de la probabilidad previa tiene menos peso en la probabilidad posterior, la cual termina siendo prácticamente independiente de dicha elección [24].

$$\mathbf{fdp}(X|D, I) = cte \cdot e^{-x^2/2} \cdot \mathbf{fdp}(X|I). \quad (2.19)$$

es importante mencionar que a medida que el número de datos observacionales es más grande, la elección de la probabilidad previa tiene menos peso en la probabilidad posterior, la cual termina siendo prácticamente independiente de dicha elección [24].

Con la expresión general (2.19) para la FDP posterior, es posible *redefinir* una nueva función  $\chi^2$  como

$$\mathbf{fdp}(X|D, I) \equiv cte \cdot e^{-\chi_n^2/2}, \quad (2.20)$$

donde  $\chi_n^2$  es la nueva función  $\chi^2$ , el subíndice “n” indica que es la *nueva* función. Resolviendo para  $\chi_n^2$  obtenemos

$$\chi_n^2(X) = -2 \ln \left( \frac{\mathbf{fdp}(X|D, I)}{cte} \right). \quad (2.21)$$

Las mejores estimaciones de cierto conjunto de parámetros,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , son los valores  $x_i^0$  de los parámetros  $x_i$ , los cuales *en conjunto* forman un vector  $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  con la característica tal que *maximiza* la probabilidad posterior, es decir, que tienen el *máximo* de probabilidad de ser ciertos. A partir de la ecuación (2.18) puede verse que los valores  $x_i$  que maximizan a  $\mathbf{fdp}(X|D, I)$  a su vez *minimizan* la función  $\chi_n^2(X)$ . Usualmente se trabaja sobre la función  $\chi_n^2(X)$  en lugar de la FDP posterior. Calcular el vector  $X^0$  es esencialmente un trabajo de calcular el *mínimo* de una función  $[\chi_n^2(X)]$  de varias variables, cuyo sistema de ecuaciones simultáneas a resolver es:

$$\left. \frac{\partial \chi_n^2}{\partial x_i} \right|_{\{x_j^0\}} \quad (2.22)$$

donde  $i = 1, 2, \dots$ , hasta el número de parámetros a inferir. Estrictamente hablando, también necesitamos una prueba que nos diga si realmente nos encontramos en un

mínimo y no en un máximo, la prueba puede hacerse usando el criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos.

Nuestro caso de interés contiene dos parámetros a estimar, cuyos valores encontraremos haciendo uso del programa *Mathematica* e implementando 3 métodos diferentes para cálculos de máximos y mínimos: *Nelder Mead*, *Differential Evolution* y *Simulated Annealing*.

### 2.2.1. La prueba $\chi^2$ como medida de calidad de ajuste

Una vez que se tiene un modelo teórico con ciertos parámetros libres  $X$  que se desean estimar a través de datos observacionales, se busca el mínimo de la función  $\chi_n^2(X)$ , con lo cual se logran dos cosas:

**Estimación de parámetros.** La prueba da como resultado *la mejor estimación* de los valores de los parámetros libres,  $X_0$ , del modelo teórico, en relación al conjunto de datos observacionales utilizados.

**Calidad de ajuste.** La misma prueba determina qué tan bueno es el ajuste del modelo teórico a los datos. Mientras más pequeño sea el valor de  $\chi_n^2$ , mejor ha sido el ajuste de la teoría a los datos.

Una manera burda de estimar si un modelo ajusta razonablemente a los datos es que el valor obtenido para  $\chi_n^2(X)$  sea del mismo orden que el número de datos utilizados para la prueba.

### 2.2.2. La prueba $\chi^2$ por grados de libertad

El mínimo de la función  $\chi^2$  por *grados de libertad* se suele denotar como  $\chi_{d.o.f.}^2$  o  $\chi_{red}^2$  y es definida por:

$$\chi_{d.o.f.}^2 \equiv \frac{\chi_{min}^2}{n - p} \tag{2.23}$$

donde  $\chi_{min}^2$  denota el valor mínimo de la función  $\chi_n^2$ ,  $n$  corresponde al número de datos observacionales utilizados para acotar y calcular los  $p$  parámetros libres de la teoría.

La ventaja y utilidad de calcular el valor de  $\chi_{red}^2$  consiste en que su magnitud es más independiente del número de datos observacionales utilizados para estimar valores de parámetros libres de un modelo, en comparación al valor de  $\chi_{min}^2$ . Debido a que el valor del mínimo de la función  $\chi_n^2$  permite medir la calidad de ajuste del modelo en cuestión a los datos observacionales, resulta muy útil tener un valor del mínimo de  $\chi_n^2$  *independiente* del número de datos utilizados, ya que esto permite *comparar* entre diferentes mínimos

de  $\chi_n^2$ , obtenidos a partir de *diferentes muestras* de datos observacionales que contienen *diferentes cantidades* de números de datos  $n$ , para observar la calidad de ajuste del modelo a los diferentes grupos de datos utilizados para probarlo y poder comparar entre ellos.

### 2.3. Intervalos de confianza y barras de error

Usualmente, necesitamos conocer la precisión con la cual han sido determinados los valores del vector  $X^0$ , es decir las mejores estimaciones de los parámetros libres de la teoría, esto nos dice, que además de los valores que minimizan a la  $\chi^2$  ( $x_i^0$ ) tenemos que dar una descripción más completa de la distribución total ó al menos, debemos dar un grado de confianza a nuestras estimaciones.

La **fdp** es una función definida en el espacio de parámetros, donde, cada parámetro tiene un rango de validez, en nuestro caso los parámetros pueden tomar valores en el intervalo  $(0, \infty)$ . Un intervalo de confianza es justamente una región del espacio de parámetros  $p$ -dimensional, que contiene un cierto porcentaje de la distribución de probabilidad total. Nosotros hemos de representar gráficamente la región en el espacio e indicar a que porcentaje corresponde, diciendo por ejemplo, “existe un 68 % de probabilidad de que el valor real del parámetro estimado se encuentre dentro de esta región, alrededor del valor ya estimado”. Típicamente se suelen indicar las regiones con un: 68.3 %, 90 %, 95.47 %, 99 % y 99.73 % de probabilidad. Lo ideal, es que las regiones obtenidas sean compactas y bastante centradas alrededor de la mejor estimación, ya que lo que queremos es generar confianza en la medición.

#### Valores constantes de la función $\chi^2$ como límites de confiabilidad

En secciones anteriores hemos denotado por  $\chi_{min}^2$  al valor que toma la función  $\chi^2$  en  $X^0$ . Si el vector de parámetros  $X$  es perturbado alrededor del mínimo  $X^0$ , entonces el valor de la  $\chi^2$  tenderá a aumentar. La región dentro de la cual  $\chi^2$  se incrementa (no más de una cantidad fija  $\Delta\chi^2$ ) define una región en el espacio  $p$ -dimensional alrededor de  $X^0$ . Para  $\Delta\chi^2$  grande, corresponde una región grande, en cambio, si  $\Delta\chi^2$  es pequeño, la región también lo será. Un incremento  $\Delta\chi^2$  intermedio debe contener a las regiones correspondientes al 68.3 %, 90 %, etc. de probabilidad de distribución. Estas regiones intermedias son tomadas como las regiones de confianza de los parámetros  $X^0$ , una pregunta natural en este punto es; ¿Cuál es el valor exacto del incremento  $\Delta\chi^2$  que corresponde a las regiones deseadas?, para contestar a esta pregunta, existen una serie de teoremas [25], los cuales nos permiten fijar fronteras  $\Delta\chi^2$  a fin de calcular elipses de confianza, elipsoides, u objetos de más grandes dimensiones, dependiendo de el número de parámetros de la teoría. Para aplicar dichos teoremas, tenemos que establecer el valor de probabilidad deseado  $\nu$ , por ejemplo  $\nu = 0.68$ . En el cuadro 2.1 se muestran

Cuadro 2.1:  $\Delta\chi^2$  como función del nivel de confianza  $\nu$  y del número de parámetros de interés.

$\nu$	$p$					
	1	2	3	4	5	6
68.27 %	1.00	2.30	3.53	4.72	5.89	7.04
90 %	2.71	4.61	6.25	7.78	9.24	10.6
95.45 %	4.00	6.18	8.02	9.72	11.3	12.8
99 %	6.63	9.21	11.3	13.3	15.1	16.
99.73 %	9.00	11.8	14.2	16.3	18.2	20.1
99.99 %	15.1	18.4	21.1	23.5	25.7	27.9

valores fijos para el incremento que debe implementarse dependiendo del número de parámetros  $p$  y de la región de probabilidad que deseemos englobar.

### Aproximación Cuadrática media

Las medidas y formas de las barras de error pueden ser calculadas de diferentes maneras, lo cual puede depender del comportamiento observado en las **fdp's**, en esta sección se presenta el método de la aproximación cuadrática media, el cual es ampliamente usado en la literatura del tema, a la vez, se presenta el resultado obtenido con el método usual para encontrar las medidas de tendencia central de una distribución cualquiera, en el cual se calculan los valores de expectación.

En algunas ocasiones resulta más conveniente trabajar con el logaritmo de la probabilidad que con la **fdp** posterior, por lo que definimos:

$$L \equiv \text{Ln}[Prob(X|D, I)] \tag{2.24}$$

como la función logaritmo es una función monótona creciente, el máximo de  $L$  ocurre precisamente en el mismo punto que el de la **fdp** posterior, por lo que, en el caso de dos parámetros  $(X, Y)$ , el sistema (2.22) para la función  $L$  se convierte en:

$$\left. \frac{\partial L}{\partial X} \right|_{(X_0, Y_0)} = 0 \quad \left. \frac{\partial L}{\partial Y} \right|_{(X_0, Y_0)} = 0 \tag{2.25}$$

Para obtener los niveles de confianza de las mejores estimaciones es necesario analizar la dispersión de la distribución alrededor del punto mínimo  $(X_0, Y_0)$ . El comportamiento local de la función  $L$  se puede realizar utilizando su expansión en serie de Taylor, la cual es útil para calcular valores aproximados de funciones, para este caso particular a segundo orden se obtiene la aproximación:

$$L = L(X_0, Y_0) + \frac{1}{2} \left[ \left. \frac{\partial^2 L}{\partial X^2} \right|_{(X_0, Y_0)} (X - X_0)^2 + \left. \frac{\partial^2 L}{\partial Y^2} \right|_{(X_0, Y_0)} (Y - Y_0)^2 \right] \tag{2.26}$$

$$+2 \frac{\partial^2 L}{\partial X \partial Y} \Big|_{(X_0, Y_0)} (X - X_0)(Y - Y_0) \Big] + \dots,$$

dado que  $X_0$  y  $Y_0$  son definidos por las ecuaciones (2.25) es que en la serie de Taylor (2.26) no aparecen los términos correspondientes a las primeras derivadas de la función  $L$ . Para simplificar un poco la expresión (2.25), notemos que el primer término es simplemente una constante, por lo que no contiene información acerca de la distribución y hace que los tres términos cuadráticos sean los dominantes, son precisamente ellos los que contienen la información sobre el ancho de la **fdp** y los que juegan un papel fundamental en el análisis de confiabilidad, por simplicidad, los renombraremos de la siguiente forma:

$$A \equiv \left( \frac{\partial^2 L}{\partial X^2} \right) \Big|_{(X_0, Y_0)}, \quad B \equiv \left( \frac{\partial^2 L}{\partial Y^2} \right) \Big|_{(X_0, Y_0)}, \quad C \equiv \left( \frac{\partial^2 L}{\partial X \partial Y} \right) \Big|_{(X_0, Y_0)} \quad (2.27)$$

sustituyendo estas simplificaciones y cambios de notación en (2.26) obtenemos la aproximación cuadrática:

$$L(X, Y) = \frac{1}{2} \left[ A(X - X_0)^2 + B(Y - Y_0)^2 + 2C(X - X_0)(Y - Y_0) \right] \equiv \frac{1}{2} Q(X, Y) \quad (2.28)$$

el criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos dicta algunas propiedades para los coeficientes  $A$ ,  $B$  y  $C$ :

$$A < 0, \quad B < 0, \quad AB - C^2 > 0.$$

Si nos interesamos en el caso de conocer el valor solamente de la variable  $X$ , tendríamos que integrar sobre el rango de  $Y$  a la probabilidad conjunta  $Prob(X, Y|D, I)$  para obtener la **fdp** de una variable:

$$Prob(X|D, I) = \int Prob(X, Y|D, I) dY. \quad (2.29)$$

Mediante el uso de la aproximación cuadrática se puede resolver esta integral de forma analítica y demostrar que la distribución marginal para  $X$  es simplemente una *fdp* Gaussiana [24] cuya mejor estimación sigue siendo  $X_0$  y su barra de error asociada es dada por:

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{-B}{AB - C^2}}. \quad (2.30)$$

De forma análoga se obtiene una expresión para la dispersión en la variable  $Y$ :

$$\sigma_Y = \sqrt{\frac{-A}{AB - C^2}}. \quad (2.31)$$

Otra forma de encontrar las barras de error es en términos de la varianza de la **fdp** posterior para cada parámetro, la cual también nos da una medida de su dispersión.

Formalmente la varianza es definida a ser el valor de expectación del cuadrado de las desviaciones de la mejor estimación, asumiendo una **fdp** normalizada, en el caso de dos variables tenemos:

$$\sigma_X^2 \equiv \langle (X - X^0)^2 \rangle \equiv \int \int (X - X^0)^2 \text{Prob}(X, Y | D, I) dX dY, \quad (2.32)$$

la raíz cuadrada de la varianza es llamada la desviación estándar del parámetro  $X$ , en el caso de la aproximación cuadrática las expresiones (2.30) y (2.31) para la desviación estándar coinciden con las obtenidas del cálculo de valores esperados. La expresión para  $\sigma_Y$  se obtiene de la misma forma que (2.32) cambiando unicamente  $X$  por  $Y$ . A demás de las desviaciones particulares de cada parámetro, se pueden calcular las desviaciones simultáneas de  $X$  y  $Y$  y dar así una medida de la correlación entre parámetros inferidos, la covarianza  $\sigma_{XY}^2$  está dada por la expresión:

$$\sigma_{XY}^2 \equiv \langle (X - X^0)(Y - Y^0) \rangle \equiv \int \int (X - X^0)(Y - Y^0) \text{Prob}(X, Y | D, I) dX dY, \quad (2.33)$$

si evaluamos la integral (2.33) usando la aproximación cuadrática se obtiene el resultado:

$$\sigma_{XY}^2 = \frac{C}{AB - C^2} \quad (2.34)$$

Es importante mencionar que no hay una convención sobre como cuantificar las barras de error. Algunas veces se usa la desviación  $1 - \sigma$  del ajuste  $\chi^2$ , la cual puede obtenerse mediante el uso del cuadro 2.1. En nuestro análisis definiremos las incertidumbres de los parámetros como la raíz cuadrada de la dispersión de los datos a partir de la mejor estimación, es decir, las barras de error serán simétricas y su expresión formal es dada por la ecuación (2.32).

# Capítulo 3

## Curvas de Rotación y Modelos de masa

En astronomía, la mayor parte de la información respecto a la presencia de diferentes tipos de masas proviene de la medición de fotones a diversas longitudes de onda, por ejemplo, los gases muy calientes emiten rayos X, mientras que las estrellas producen la mayor parte de su energía a longitudes de onda ópticas. Algunos gases atómicos o moleculares en el medio interestelar exhiben líneas de emisión a longitudes de onda de radio. En adición, hay objetos no luminosos cuya existencia puede ser inferida de otras consideraciones. Por ejemplo el número de remanentes estelares no luminosos pueden ser estimados de la población estelar y de la teoría de la evolución estelar.

En algunas ocasiones, la presencia de alguna cantidad de materia se manifiesta únicamente a través de efectos gravitacionales. Usaremos el término materia oscura (DM) para denotar materia cuya existencia se basa en que únicamente interactúa con la materia por medio de la fuerza de gravedad. Por lo tanto, la forma más adecuada de estudiar a la materia oscura es determinando la masa total de objetos astronómicos partiendo de su dinámica observada y comparando esta masa “dinámica” con la masa inferida de la cantidad de luz emitida por ellos. Una discrepancia entre ambas masas indicaría la presencia de materia oscura.

La forma en que se determinan las masas dinámicas de los objetos, sin embargo, no es una tarea trivial, la dificultad consiste en que incluso observaciones perfectas no pueden siempre proveer información suficiente y necesaria para construir de forma completa modelos teóricos que las describan. Parte de la importancia de construir modelos de masa es notable si tomamos en cuenta que la distribución de materia en estructuras cosmológicas es una propiedad fundamental, que dicta la evolución de dichas estructuras, este hecho es especialmente cierto para las estrellas, cuya evolución depende casi completamente de su masa inicial (y composición química). En la evolución de galaxias la distribución de masa también tiene un papel fundamental; en los primeros tiempos del universo la formación estelar era más eficiente en galaxias masivas, sin embargo, ha medida que el universo ha ido envejeciendo la formación de estrellas ha ido extin-

### CAPÍTULO 3. CURVAS DE ROTACIÓN Y MODELOS DE MASA

guiéndose en sistemas masivos y pasando a ser más eficiente en galaxias pequeñas, éste es un fenómeno llamado “downsizing”. La presencia de este fenómeno nos permite saber que las estrellas más viejas se encuentran en los sistemas más masivos, donde la formación estelar se ha ido frenando. La relación de eficiencia de formación y extinción de estrellas es entonces modulada por la masa total de la galaxia.

Las estrellas y el gas que se encuentran en las galaxias espirales se mueven sobre un disco plano en órbitas aproximadamente circulares. La cinemática de un disco está fuertemente determinada por su curva de rotación  $V_c(R)$ , la cual expresa la velocidad de rotación como función de una distancia  $R$  del centro de la galaxia. Curvas de rotación para múltiples galaxias han sido medidas usando una gran variedad de técnicas, las más comunes se basan en espectroscopía de líneas de emisión de HII, interferometría de las líneas de emisión de gas frío o en las galaxias como la vía láctea y Andrómeda es posible obtener las curvas de rotación que describen las estrellas en su interior. En nuestros análisis utilizaremos las mediciones de HI de la muestra THINGS, cuyas características principales serán mencionadas en secciones posteriores. La figura (3.1) muestra dos ejemplos de curvas de rotación de HI en galaxias espirales, en las que se puede observar que al principio (para radios pequeños) la velocidad crece rápidamente y comienza a ser casi constante en el resto del disco. Este es el comportamiento más común que ha sido observado en las mediciones de HI y en las curvas de rotación de estrellas, por lo que, actualmente representa una de las características de galaxias espirales.

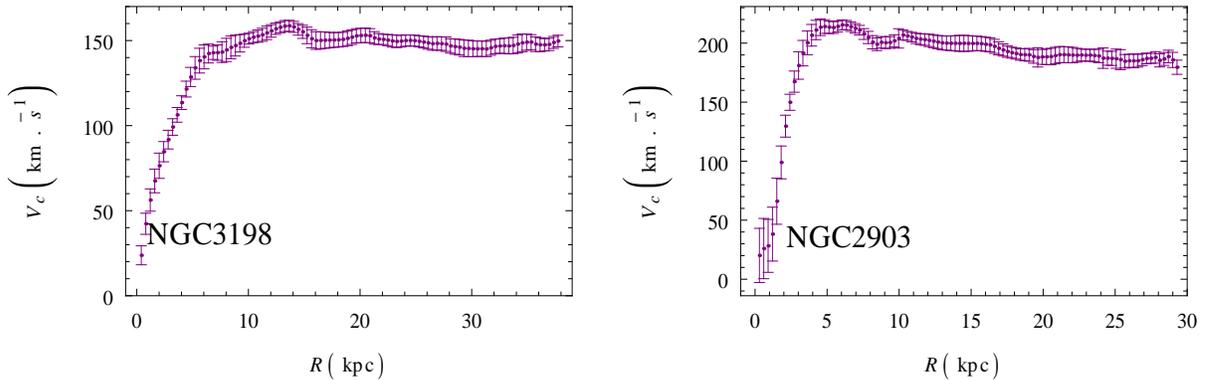


Figura 3.1: La gráfica izquierda es la curva de rotación medida para la galaxia NGC3198, y la del lado derecho corresponde a la galaxia NGC2903

La curva de rotación es una medida directa de la fuerza gravitacional que actúa sobre una partícula que se encuentra en el plano galáctico, para determinar las características de esta fuerza es necesario conocer la distribución de la masa que la produce, para lo cual existen diversos métodos. Hay algunos que son capaces de medir la masa de las galaxias únicamente a grandes escalas, otras técnicas permiten la descomposición en componentes individuales de masa, tales como; distribución de gas, disco estelar y un

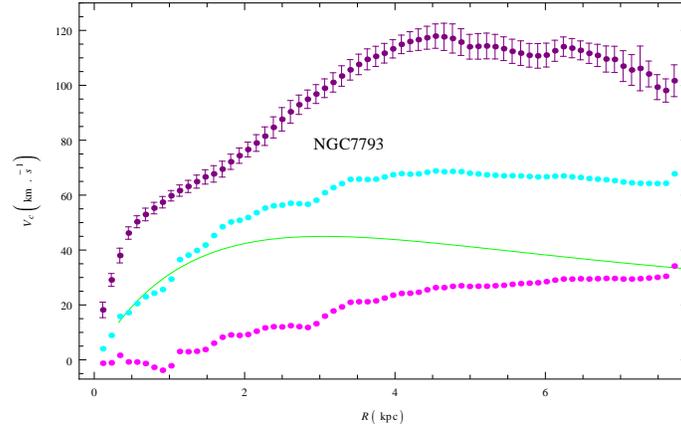


Figura 3.2: La curva verde corresponde al disco luminoso, la línea punteada color magenta representa el gas, la cian es la suma de estas dos componentes, mientras que la morada representa la velocidad observada, todas ellas para la galaxia NGC7793.

halo de materia oscura <sup>1</sup>. Cada componente de la galaxia tiene sus propios modelos para determinar su distribución de masa y sus curvas de rotación asociadas, uno de los problemas al determinar los modelos de masa de la componente estelar en galaxias espirales radica en que los movimientos estelares únicamente pueden ser estudiados con precisión en las galaxias más cercanas, tales como Andrómeda y la propia Vía Láctea; en el caso de galaxias distantes se tiene que usar el espectro integrado de energía y modelar la curva de rotación asumiendo algún modelo. Una forma de estimar la masa de la componente estelar consiste en convertir el perfil de brillo superficial observado en un perfil de densidad superficial de masa, lo cual es posible, mediante el uso de una relación masa-luminosidad ( $\gamma_*$ ) apropiada, sobre la cual discutiremos más adelante. El modelo de masa para la distribución de gas asume que este se distribuye en un disco de ancho cero, la forma exacta de obtener el perfil de densidad superficial de gas HI será detallada en la siguiente sección.

Una aproximación más general, para derivar la masa de las galaxias utiliza efectos de lentes gravitacionales (*lensing*), tanto débiles como fuertes, estos efectos son importantes cuando la teoría de gravitación utilizada no es la de Newton. En nuestro caso asumiremos que las galaxias espirales se componen de las tres componentes antes mencionadas, para las cuales se calcularán sus contribuciones individuales y conjuntas a las curvas de rotación para cada galaxia. En la gráfica (3.2) se muestran las curvas de rotación en la galaxia NGC7793 generadas por las dos componentes luminosas, por propósitos de comparación también se incluye la curva de rotación observada.

De la gráfica (3.2) podemos notar aspectos que no se observan únicamente en las curvas de rotación de esta galaxia, por ejemplo, si consideramos la curva de rotación generada

---

<sup>1</sup>Por el momento no consideraremos esta componente, únicamente motivaremos su existencia.

únicamente por el disco estelar y por separado la curva asociada a la distribución de gas observamos que individualmente no son capaces de reproducir la curva de rotación observada, incluso, la suma de estas dos curvas se encuentra muy por debajo de la curva medida, la contribución faltante ha sido el motivo principal para proponer la existencia de materia oscura (al menos a nivel galáctico), ya que esta discrepancia entre velocidades circulares nos invita a pensar que en la galaxia hay más masa de la que hemos tomado en consideración. De aquí en adelante se añadirá a la galaxia una componente de materia oscura, denominada “Halo de Materia Oscura” cuyos perfiles de densidad y curvas de rotación ya han sido mencionados.

### 3.1. La Distribución de gas

En las galaxias espirales el gas contenido es principalmente Hidrógeno neutral (HI) e Hidrógeno molecular (HII), afortunadamente a partir de la detección de la línea de emisión de HI los estudios y resultados en esta área se han incrementado; hoy en día, existen observaciones en diferentes longitudes de onda y se han producido mapas de la distribución de estas componentes. Una de las ventajas al estudiar las líneas de emisión de HI es que, a diferencia de la luz visible o la radiación ultravioleta, la emisión de fotones por parte de HI no se extingue a causa del polvo interestelar, adicionalmente, su corrimiento al rojo y al azul (efecto Doppler) provee información acerca de la velocidad del gas. Por ejemplo, se dice que la línea de emisión de 21 cm es (bajo ciertas circunstancias) visiblemente delgada, es decir, la cantidad total de HI detectada con un rango de visión particular puede convertirse directamente en su densidad de masa e integrarse sobre toda la galaxia para obtener la masa total de HI contenida en ella. La derivación de la curva de rotación asociada con el hidrógeno neutral se realiza asumiendo que el gas se distribuye en un disco delgado de ancho cero cuyo perfil de brillo radial decae exponencialmente, por lo que podemos hacer uso de la ecuación (1.65) en la cual hemos de especificar la masa o la densidad del gas. Las densidades superficiales de las diferentes galaxias deben corregirse por un factor<sup>2</sup> igual a 4/3 para tomar en cuenta la contribución del Helio (He), es necesario recalcar que en las distribuciones de masa axialsimétricas, las leyes que gobiernan a las distribuciones esféricas no son aplicables en general, por ejemplo, uno de los resultados más importantes en el caso esféricamente simétrico nos dice que la distribución de masa fuera de un radio particular no afecta la fuerza efectiva que experimenta una partícula de prueba en ese punto [ver ecuación (1.27)], lo cual no es universalmente válido en el caso de un disco. En el caso específico de una distribución de masa sobre un disco con una prominente depresión central, una partícula de prueba localizada en, o cerca de, ella puede sentir una fuerza neta hacia

---

<sup>2</sup>El factor 4/3 se deriva utilizando la relación de abundancia helio-hidrógeno:  $\frac{n_{He}}{n_{HI}} = \frac{1}{12}$  y tomando en cuenta la relación entre sus masas atómicas  $\frac{m_{He}}{m_{HI}} \approx 4$ , entonces, para obtener la relación entre las masas totales basta con multiplicar el número de átomos de un cierto elemento por su masa correspondiente, obteniendo;  $M_{He} = m_{He}n_{He} = \frac{1}{3}m_{HI}n_{HI} = \frac{1}{3}M_{HI}$ .

---

## CAPÍTULO 3. CURVAS DE ROTACIÓN Y MODELOS DE MASA

---

afuera. Una interpretación literal en el contexto de gravedad Newtoniana debería implicar una masa negativa y una velocidad de rotación imaginaria, y entonces un valor negativo para el cuadrado de la velocidad. Aquí, seguiremos la convención utilizada en la literatura de curvas de rotación: graficaremos las velocidades de rotación imaginarias como velocidades negativas teniendo en mente que, de hecho, es la velocidad al cuadrado la que es negativa y recordando que no representa una contrarotación o la presencia de materia repulsiva o algún otro fenómeno exótico. Un buen ejemplo de este fenómeno se aprecia en la curva de rotación de la galaxia NGC3031.

Finalmente, la forma práctica de modelar la curva de rotación asociada a la distribución de gas se hace usando lo descrito en los párrafos anteriores, utilizando los datos contenidos en el cuadro 3.1 y las rutinas de GIPSY; ELLINT y ROTMOD, las cuales son apropiadas par distribuciones axialsimétricas con las características que necesitamos. La manera de realizar este procedimiento consiste en los siguientes pasos:

- 1.- Descargar la imagen a analizar en formato .FITS.
- 2.- Convertir a esta imagen en dos archivos, uno .image y el otro .descr, esto es a fin de tener una imagen y un descriptor, este procedimiento se hace con la rutina RFITS y es necesario especificar algunos parámetros de la galaxia, tales como la posición del centro.
- 3.- Utilizar la rutina ELLINT para obtener la distribución de masa superficial, en este paso necesitamos los dos archivos del punto anterior. La rutina ELLINT descompone el disco en anillos, es suficiente con especificarle el número de anillos en que queremos que divida la imagen e indicar el ancho de cada uno, los cuales se especifican manualmente, para cada anillo la rutina ELLINT nos da la opción de especificar un ángulo de inclinación diferente, en nuestro caso consideraremos que todos los anillos recaen sobre el mismo plano, por lo que se utiliza una inclinación constante. Esta rutina nos permite apreciar gráficamente la distribución de masa a lo largo de la galaxia, la figura 3.3, presenta dos gráficas obtenidas con los datos tabulados por ELLINT.
- 4.- Una vez obtenida la distribución de masa, tenemos todos los ingredientes para calcular la velocidad circular, lo cual se hace mediante la rutina ROTMOD.

### 3.2. La Distribución estelar

La distribución estelar es una de las componentes visibles más notorias de una galaxia espiral. Las galaxias brillan debido a que sus estrellas radían la energía que producen vía reacciones nucleares, emitiendo fotones con diferentes longitudes de onda, modelando

### CAPÍTULO 3. CURVAS DE ROTACIÓN Y MODELOS DE MASA

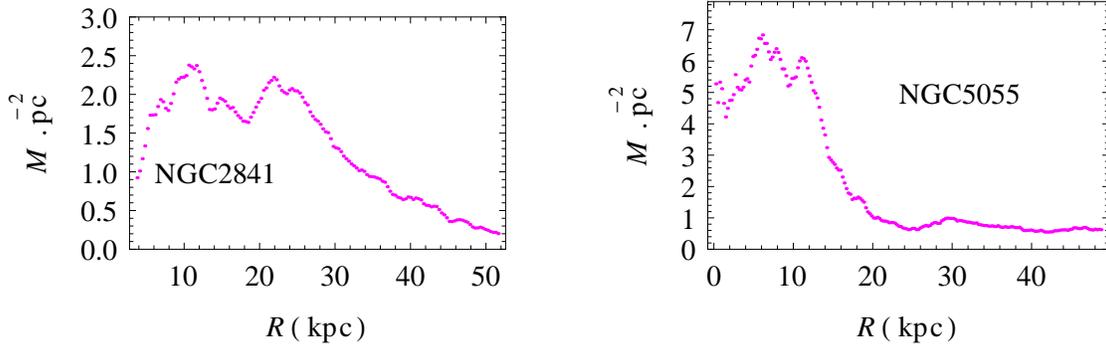


Figura 3.3: Densidad superficial de gas HI en las galaxias NGC2841 y NGC5055, ambas son medidas en  $M_{\odot} \cdot pc^{-2}$

la luz emitida por todas las estrellas contenidas en una galaxia, en principio, es posible determinar la masa estelar responsable de tal radiación.

La teoría de la evolución estelar describe la cantidad de energía liberada por una estrella como función de su masa inicial, sin embargo, determinar la masa total de la galaxia no es una tarea sencilla, ya que no todas las estrellas brillan con la misma intensidad, una cierta fracción de estrellas evolucionadas han ido dejando de brillar pero no de contribuir a la masa de la galaxia ya que ahora se encuentran en forma de remanentes estelares, tal es el caso de, las enanas blancas, estrellas de neutrones y hoyos negros. La suma total de estrellas “vivas” y de los remanentes estelares forman la masa estelar total de la galaxia.

Para modelar el disco estelar, nosotros usaremos el perfil de brillo superficial emitido, modelándolo como un disco radial con caída exponencial de ancho  $z_d = \frac{1}{5}R_d$ , en algunos artículos modelan la componente estelar como una distribución axialsimétrica de ancho cero argumentando que la corrección al ancho no afecta de manera significativa los resultados [29]. En el capítulo 1 hemos deducido que la velocidad de rotación que experimenta una partícula de prueba, que se encuentra dentro de una distribución de masa axialsimétrica de ancho no nulo, es descrita por la ecuación (1.75) donde hemos de especificar la densidad superficial central  $\Sigma_0$  y el factor de escala  $R_d$ , en particular, la densidad de masa superficial puede especificarse, bajos ciertas suposiciones, convirtiendo el perfil de brillo observado en un perfil de masa, el propósito de esta sección es desarrollar el método que nos permite realizar dicha conversión.

El perfil de brillo superficial del disco luminoso tiene usualmente una caída exponencial dada por la expresión:

$$I(R) = I_0 e^{-R/R_d} \quad (3.1)$$

donde,  $R \equiv$  coordenada en el plano del disco,  $I_0$  es la densidad central del brillo superficial y  $R_d$  es el factor de escala del disco.

---

### CAPÍTULO 3. CURVAS DE ROTACIÓN Y MODELOS DE MASA

---

Integrando (3.1) sobre el radio  $R$  obtenemos la luminosidad total del disco:

$$L_{tot} \equiv \int_0^\infty \int_0^{2\pi} I(R) d\theta dR = 2\pi I_0 R_d^2$$

Los astrónomos observan y miden el “brillo superficial proyectado sobre el firmamento”,  $\mu(R)$ , el cual es usualmente medido en la banda  $V$  (visual) en unidades de magnitud por arco-segundo al cuadrado, es necesario establecer una relación entre el brillo superficial y el brillo superficial proyectado.

Si la densidad de brillo superficial es  $I$ , que se mide en unidades de  $L_{V\odot}$  por parsec cuadrado (donde  $L_{V\odot}$  es la luminosidad en la banda visual del sol), entonces la relación entre  $I_V$  y  $\mu$  es definida por:

$$I_V(R) \equiv 10^{(2/5)(26.4-\mu(R))} \cdot L_{V\odot}/pc^2 \quad (3.2)$$

$I_V(R)$  es un brillo superficial arbitrario, medido en la banda visual. En nuestro caso trabajaremos en la banda de  $3.6\mu m$ , cuya relación para el perfil de brillo es totalmente análoga al caso de la banda visual:

$$I_{3.6}(R) \equiv 10^{(2/5)(C^{3.6}-\mu_{3.6}(R))} \cdot L_{\odot}^{3.6}/pc^2 \quad (3.3)$$

donde  $C^{3.6}$  es una constante para convertir  $\text{mag} \cdot \text{arcseg}^{-2}$  a  $L_{\odot}pc^{-2}$ , su valor es determinado en el artículo de Se-Heong [26] y es:

$$C^{3.6} = 24.80 \quad \text{mag} \cdot \text{arcseg}^{-2} \quad (3.4)$$

La relación (3.3) es general para cualquier función  $\mu_{3.6}(R)$ , además si quisiéramos obtener el perfil de brillo en alguna otra banda, es suficiente cambiar el valor de 3.6 por el de la banda deseada y obtener el valor apropiado para la constante  $C$ , en el caso del visual  $C = 26.4$ .

El brillo superficial del disco (3.1), en la banda de  $3.6\mu m$ , toma la expresión:

$$I_{3.6}(R) = I_0^{3.6} \cdot e^{-R/R_d} \quad (3.5)$$

En algunas ocasiones será necesario utilizar  $I_{3.6}$  y en otras utilizaremos  $\mu_{3.6}$  por lo que es útil establecer la forma de encontrar cada uno en términos del otro; utilizando la ecuación (3.3), encontramos la relación:

$$\mu_{3.6}(R) = C^{3.6} - \left(\frac{5}{2}\right) \text{Log}_{10} \left[ \frac{I_{3.6}(R)}{L_{\odot}^{3.6}/pc^2} \right] \quad (3.6)$$

las relaciones (3.3) y (3.6) son fórmulas generales para relacionar los dos brillos superficiales, sin importar si  $I_{3.6}(R)$  tiene un comportamiento exponencial o algún otro, para

---

### CAPÍTULO 3. CURVAS DE ROTACIÓN Y MODELOS DE MASA

---

el caso particular en el que su comportamiento es exponencial, sustituimos la ecuación (3.5) en (3.6) y obtenemos:

$$\mu_{3.6}(R) = C^{3.6} - \left(\frac{5}{2}\right) \frac{\text{Ln}(I_0^{3.6})}{\text{Ln}(10)} + \left(\frac{5}{2}\right) \frac{1}{\text{Ln}(10)} \left(\frac{R}{R_d}\right) \quad (3.7)$$

Usualmente uno de los parámetros observados para cada galaxia es la componente central de brillo superficial proyectado ( $\mu_0$ ), por lo cual es conveniente expresar (3.7) en términos de dicha componente:

$$\mu_{3.6}(R) = \mu_0^{3.6} + \left(\frac{5}{2}\right) \frac{1}{\text{Ln}(10)} \left(\frac{R}{R_d}\right) \quad (3.8)$$

donde,

$$\mu_0^{3.6} \equiv C^{3.6} - \left(\frac{5}{2}\right) \frac{\text{Ln}(I_0^{3.6})}{\text{Ln}(10)} \quad (3.9)$$

La relación general entre la densidad superficial de masa  $\Sigma(R)$  y el brillo superficial  $I(R)$  a cualquier longitud de onda,  $\lambda$ , está dada por el factor  $\gamma_\star^\lambda$ :

$$\Sigma(R) = \gamma_\star^\lambda \cdot I^\lambda(R) \quad (3.10)$$

notemos que el factor  $\gamma_\star^\lambda$  tiene unidades<sup>3</sup> de  $M_\odot/\text{luminosidad}$ , además tiene un perfil asociado que lo describe a lo largo de un objeto astronómico, que puede ser descrito como función del radio, aunque por lo general se considera constante. En nuestro análisis se usan los perfiles obtenidos para la banda de  $3.6\mu m$ .

La expresión (3.10) puede ser descrita en términos de las componentes centrales, en nuestro caso de interés toma la forma:

$$\Sigma(R) = \gamma_\star^{3.6} \cdot I_0^{3.6} e^{-R/R_d} = \Sigma_0 e^{-R/R_d} \quad (3.11)$$

El factor  $\Sigma_0 = \gamma_\star^{3.6} \cdot I_0^{3.6}$  representa la misma información que el utilizado en el capítulo 1, para la descripción de discos delgados y anchos, por lo que en el caso  $R \rightarrow \infty$ , la masa total del disco es:

$$M_d = 2\pi \Sigma_0 R_d^2 = 2\pi R_d^2 \gamma_\star^{3.6} \cdot I_0^{3.6} \quad (3.12)$$

Con esta forma de relacionar la masa podemos expresar la velocidad circular en términos de los nuevos parámetros, lo cual es importante, ya que son estos parámetros son los que usualmente se conocen mediante las observaciones, las expresiones para la velocidad circular en los casos de discos delgados (1.65) y achos (1.75) se convierten respectivamente en;

$$v_c^2(R) = G\pi \gamma_\star^{3.6} \cdot I_0^{3.6} \left(\frac{R^2}{R_d}\right) \cdot \left[ I_0\left(\frac{R}{2R_d}\right) K_0\left(\frac{R}{2R_d}\right) - I_1\left(\frac{R}{2R_d}\right) K_1\left(\frac{R}{2R_d}\right) \right] \quad (3.13)$$

---

<sup>3</sup>De aquí en adelante no mencionaremos las unidades de  $\gamma_\star^\lambda$ .

$$v_c^2(R) = (2\pi G)\gamma_\star^{3.6}I_0^{3.6}R \int_0^\infty dk J_1(kR)k \frac{R_d^2}{(1 + (kR_d)^2)^{3/2}} F(k, z_d) \quad (3.14)$$

En general, las mediciones de  $\gamma_\star^\lambda$  a diferentes longitudes de onda son afectadas por múltiples factores, tales como, polvo, edad, metalicidad, función de masa inicial (IMF) y formación estelar reciente, los cuales generan incertidumbre en el valor inferido para  $\gamma_\star$ , con el propósito de eliminar algunos de éstos problemas, han sido hechas algunas suposiciones para el valor de  $\gamma_\star$ , por ejemplo, modelos de disco mínimo o máximo nos permiten acotar la contribución de la distribución estelar y a la vez nos dan cotas para las propiedades del halo oscuro.

Una de las principales incertidumbres al momento de determinar el valor  $\gamma_\star^\lambda$  es la función de masa inicial para la cual han sido construidos distintos modelos, por mencionar algunos de lo más usados; Kroupa, Salpeter y diet Salpeter.

Usando modelos de síntesis de población estelar Bell y Jong [27] mostraron que los resultados de la función de masa inicial de Salpeter para las masas de discos estelares son demasiado grandes para ser coherentes con las restricciones dinámicas provenientes de las curvas de rotación, para hacer que los resultados sean consistentes con las curvas de rotación ellos hicieron un escalamiento de la masa del disco estelar abajo de un factor de 0.7, introduciendo así una función de masa inicial equivalente a la de Salpeter pero con un número reducido de estrellas y denominada “diet” Salpeter. Esta función diet Salpeter es la función de masa inicial con la mayor cantidad de masa permitida por los estudios de dinámica galáctica. Estudios sobre la población de estrellas en la vía láctea sugieren un modelo de función de masa inicial (Kroupa) que produzca masas más bajas [31]. La función de diet Salpeter es más masiva que la de Kroupa por un factor de 1.4. Una discusión acerca de las funciones iniciales de masa puede consultarse en los artículos de Leroy [32] y Bell [33].

En nuestro caso la elección de  $\gamma_\star$  asume como función de masa inicial la de diet Salpeter y usa una aproximación empírica basada en los resultados derivados por el experimento “Two Micron All Sky Survey (2MASS)” [34] en el cual están contenidas todas las galaxias de la muestra THINGS, además se utilizan las relaciones derivadas por Se-Heon [26].

### 3.3. La Distribución de materia oscura

Como se ha mencionado a lo largo de la tesis, observaciones recientes de curvas de rotación de galaxias espirales indican la presencia de materia oscura en estos objetos [36],[8]. En el presente, el modelo cosmológico del universo más aceptado es el llamado modelo “ $\Lambda$  Cold Dark Matter ( $\Lambda$ -CDM)”, el cual involucra una constante cosmológica,

### CAPÍTULO 3. CURVAS DE ROTACIÓN Y MODELOS DE MASA

---

$\Lambda$ , y propone que el universo está constituido por materia oscura fría <sup>4</sup> sin colisiones. Simulaciones hechas con este modelo cosmológico han tenido gran éxito en la descripción de estructuras a gran escala en el universo [37], sin embargo, presenta algunos problemas a escalas pequeñas del tamaño de galaxias. Resultados provenientes de simulaciones cosmológicas que usan el modelo  $\Lambda$ -CDM sugieren que los perfiles de densidad de halos de materia oscura deben ser casi universales, independientes de la masa del halo. Uno de los perfiles más usados proveniente de estas simulaciones es el perfil de NFW (cuya descripción fue dada en la sección 1.2.1) el cual predice que el perfil de densidad de materia oscura tiene un incremento cerca del centro galáctico que puede ser aproximado por una ley de potencias  $\rho \sim R^\alpha$  con  $\alpha \sim -1 - \sim 1.5$ , dando lugar a un pico característico en el centro de las galaxias, sin embargo, extensas determinaciones observacionales de la densidad central indican que las halos de materia oscura pueden ser mejor descritos por un perfil de densidad constante en la parte interna ( $\rho \sim R^\alpha$  con  $\alpha \approx 0$ ). El estudio de curvas de rotación galácticas ha tomado un papel fundamental en el debate de este problema, una parte del debate se centra en los posibles errores sistemáticos en las observaciones, resolución de los datos, precisión de los centros de las galaxias así como la presencia de movimientos no circulares.

Otro de los modelos de halo oscuro que se utiliza ampliamente es el modelo de Burkert, el cual es un modelo fenomenológico que contiene una densidad central constante, este modelo ha sido descrito en la sección 1.2.1, a diferencia del modelo de Navarro-Frenk-White, el modelo de Burkert tiene una densidad constante en la parte interna de la galaxia.

Una forma de ilustrar la distribución de materia oscura dentro de una galaxia es utilizando un perfil de densidad para el cual hemos de inferir sus parámetros libres, la forma de realizar este procedimiento es, como primer paso, calcular la contribución bariónica (estrellas y gas) a la curva de rotación observada. La componente de gas puede ser descrita directamente de las regiones integradas de HI, la descripción del disco estelar luminoso resulta menos trivial, ya que requiere el conocimiento previo del factor de conversión masa-luminosidad,  $\gamma_*$ , el cual depende de múltiples factores y utiliza una función de conversión entre la luminosidad y la masa de una galaxia.

Una manera de acotar la cantidad máxima y mínima de materia oscura contenida en una galaxia espiral es asumir un modelo de disco mínimo y máximo respectivamente; en el caso del modelo de disco mínimo, se asume solamente una distribución esférica de materia oscura, un factor de conversión  $\gamma_* = 0$  para el disco luminoso y se omite la presencia del disco de gas HI, usando la ecuación encontrada en el capítulo 1 (1.29) obtenemos la masa total bajo la suposición de que la velocidad observada se debe completamente a la materia oscura [28]. En general, el modelo de disco mínimo es una buena descripción de galaxias enanas y de galaxias con perfil de brillo superficial bajo. El modelo de disco mínimo da un excelente límite superior a la cantidad de materia oscura en cada galaxia. En el caso del modelo de disco máximo (halo mínimo), cuya

---

<sup>4</sup>Materia formada por partículas no relativistas.

### CAPÍTULO 3. CURVAS DE ROTACIÓN Y MODELOS DE MASA

---

hipótesis maximiza la contribución del disco estelar a la curva de rotación, notamos que se impone un límite superior a  $\gamma_*$  o, equivalentemente, un límite inferior a la contribución de masa del halo oscuro. Sin embargo, estos dos modelos, no son capaces de determinar de manera precisa la cantidad total de materia oscura galáctica, solo son útiles para fijar las contribuciones máximas y mínimas de ella en cada galaxia.

Los modelos que usaremos para describir la curva de rotación generada por los halos de materia oscura son los modelos de NFW y de Burkert, la derivación de sus expresiones respectivas para la velocidad circular generada por sus distribuciones esféricas de masa es dada en las secciones 1.2.1 y 1.2.2 del capítulo 1, las cuales tienen las formas:

$$v_{cNFW}^2(r) = \frac{4\pi G\rho_0 r_s^3}{r} \left[ -\frac{r}{r+r_s} + \ln\left(\frac{r_s+r}{r_s}\right) \right],$$

$$v_{cBur}^2(r) = \frac{\pi G\rho_0 r_s^3}{r} \left( \ln\left[\left(1+\frac{r}{r_s}\right)^2 \left(1+\frac{r^2}{r_s^2}\right)\right] - 2 \arctan\left[\frac{r}{r_s}\right] \right).$$

La velocidad circular generada por cada halo oscuro tiene dos parámetros libres,  $r_s$  y  $\rho_0$ , que pueden ser inferidos utilizando las observaciones y un ajuste estadístico  $\chi^2$ .

### 3.4. La muestra THINGS

En capítulos y secciones anteriores se han presentado curvas de rotación galácticas y distribuciones de gas para diferentes galaxias, todo esto, sin mencionar debidamente la fuente de donde fueron extraídos los datos para cada galaxia ni sus propiedades particulares. En este capítulo, se detalla brevemente la muestra de galaxias analizada en esta tesis, los detalles técnicos y sistemáticos sobre la muestra y sus mediciones pueden ser consultados en la referencia [19].

En décadas anteriores, estudios del medio interestelar atómico, realizados utilizando la emisión de fotones por hidrógeno neutral en la longitud de onda de 21 cm, han demostrado ser fundamentales para el entendimiento de los procesos que dan lugar a la formación estelar, a la dinámica y estructura del medio interestelar y la distribución de materia oscura en galaxias espirales, abordando así las cuestiones principales relacionadas con la evolución de las galaxias. A partir de la detección de la línea de emisión de fotones por HI (cuyas restricciones dictadas por la estructura hiperfina, fueron predichas en 1945 por Van de Hulst), esta longitud de onda ha sido utilizada como base para los estudios de gas atómico, tanto en nuestra galaxia como en otras, sin embargo, fue hasta después de que los interferómetros de radio entraron en operación cuando comenzó a ser factible obtener imágenes detalladas espacialmente resueltas de HI de galaxias externas.

Después de las primeras observaciones hechas con grandes interferómetros (al final de la década de 1970), múltiples galaxias han sido analizadas cada vez con una mayor resolución y sensibilidad y, debido a esto, el progreso en la forma de obtener mediciones de HI ha sido notable, sin embargo, antes de las observaciones realizadas en el experimento THINGS, la carencia de alta resolución en las observaciones previas de HI para muestras significativas de galaxias cercanas hacía que resultara imposible realizar un estudio sistemático de las características físicas y dinámicas del medio interestelar atómico. Un problema adicional se debía a que el brillo superficial emitido por HI es muy bajo y por lo tanto es necesario recolectar información de áreas extensas.

El experimento “The HI Nearby Galaxy Survey” (THINGS) es un estudio realizado con una alta resolución espectral y espacial de las líneas de emisión generadas por HI en 34 galaxias cercanas, obtenidas en el “Very Large Array (VLA)” del Observatorio Nacional de Radioastronomía NRAO. El objetivo central del experimento THINGS fue obtener observaciones con una alta resolución del medio interestelar atómico de una muestra substancial de galaxias cercanas y de este modo obtener características fundamentales del medio interestelar relacionado con la morfología de galaxias, con tasas de formación estelar, luminosidades absolutas, distribuciones de masa y metalicidades.

Algunas características fundamentales de la base de datos recolectados por el experimento THINGS son su sensibilidad homogénea y su alta resolución espacial y de velocidad, las cuales constituyen el límite alcanzado por estudios de hidrógeno neutral extragaláctico hechos con el VLA. Estas propiedades hacen que las curvas de rotación de HI en las galaxias pertenecientes a la muestra sean las de más alta calidad disponibles. La



Figura 3.4: Compendio de las regiones integradas de HI de todas las galaxias de la muestra THINGS. Todas a la misma escala, es decir, 1 kpc es lo mismo en cm para todas las galaxias.

mayoría de las galaxias de THINGS fueron extraídas del experimento “Spitzer Infrared Nearby Galaxies Survey (SINGS)”, un proyecto diseñado para estudiar las propiedades del medio interestelar en galaxias cercanas a múltiples longitudes de onda del cual tomaremos la longitud de  $3.6\mu\text{m}$ .

La figura 3.4 contiene los mapas integrados de HI observados para cada galaxia de la muestra completa, en cada una el color representa la intensidad de emisión producida por HI, todas las imágenes fueron hechas utilizando la misma escala física. Es importante notar en cada galaxia la complejidad de la distribución del medio interestelar atómico cerca del centro.

Con el propósito de describir de forma apropiada cada componente de la galaxia y sus perfiles de brillo superficial luminoso hemos de especificar una serie de parámetros propios de cada una de ellas, tales como su inclinación, posición del centro galáctico,

## CAPÍTULO 3. CURVAS DE ROTACIÓN Y MODELOS DE MASA

Cuadro 3.1: Parámetros de la muestra THINGS

Galaxia	$\alpha$ (2000.0)	$\delta$ (2000.0)	Distancia	$\langle i \rangle$	$\langle P.A. \rangle$	$R_d$	$M_{HI}$
	( <i>hms</i> )	( <i>o''</i> )	(Mpc)	$^\circ$	$^\circ$	kpc	$10^8 M_\odot$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
NGC925	02 27 16.5	+33 34 43.5	9.2	66.0	286.6	3.30	45.8
NGC2366	07 28 53.4	+69 12 51.1	3.4	63.8	39.8	1.76	6.49
NGC2403	07 36 51.1	+65 36 02.9	3.2	62.9	123.7	1.81	25.8
NGC2841	09 22 02.6	+50 58 35.4	14.1	73.7	152.6	4.22	85.8
NGC2903	09 32 10.1	+21 30 04.3	8.9	65.2	204.3	2.4	43.5
NGC2976	09 47 15.3	+67 55 00.0	3.6	64.5	334.5	0.91	1.36
NGC3031	09 55 33.1	+69 03 54.7	3.6	59.0	330.2	1.93	36.4
NGC3198	10 19 55.0	+45 32 58.9	13.8	71.5	215.0	3.18	101.7
IC2574	10 28 27.7	+68 24 59.4	4.0	53.4	55.7	2.56	14.8
NGC3521	11 05 48.6	-00 02 09.2	10.7	72.7	339.8	3.09	80.2
NGC3621	11 18 16.5	-32 48 50.9	6.6	64.7	345.4	2.61	70.7
NGC4736	12 50 53.0	+41 07 13.2	4.7	41.4	296.1	2.61	4.00
DDO154	12 54 05.7	+27 09 09.9	4.3	66.0	229.7	0.72	3.58
NGC5055	13 15 49.2	+42 01 45.3	10.1	59.0	101.8	3.68	91.0
NGC6946	20 34 52.2	+60 09 14.4	5.9	32.6	242.7	2.97	41.5
NGC7331	22 37 04.1	+34 24 56.5	14.7	75.8	167.7	2.41	91.3
NGC7793	23 57 49.7	-32 35 27.9	3.9	49.6	290.1	1.25	8.88

(1) nombre de la galaxia; (2) ascensión recta; (3) declinación; (4) distancia [19]; (5) Valor promedio de la inclinación; (6) valor promedio de P.A., medido de norte a este y en el plano del firmamento; (7) Radio característico del disco estelar; (8) masa del HI.

radio característico, etc.; en el cuadro 3.1 se muestran algunos de los parámetros más relevantes cuyos valores numéricos es necesario conocer para los propósitos de los análisis realizados en capítulos posteriores.

Para restringir y modelar la contribución de la componente estelar a la cinemática total de la galaxia se usan los datos correspondientes a la banda de  $3.6\mu\text{m}$  obtenidos por el “Spitzer Infrared Array Camera (IRAC)”, el cual forma parte de SINGS. Uno de los parámetros más importantes para describir el disco estelar luminoso es  $\gamma_*$ , el cual, no es dado en el cuadro 3.1, sino en la sección de resultados concernientes a cada galaxia, ésto con el fin de explicar el porqué de la elección tomada al fijarlo, la cual se basa en un análisis de las gráficas correspondientes a este parámetro, las cuales se encuentran en [3].

## Modelos de masa de galaxias espirales

Hemos analizado las curvas de rotación de 16 galaxias de la muestra THINGS, usando 2 modelos para los halos de materia oscura (NFW y Burkert) cuyos parámetros han sido determinados asumiendo dos modelos de masa diferentes, en la primera parte se infieren bajo la suposición de que las galaxias se componen únicamente de materia oscura (modelo de disco mínimo). Un segundo análisis contempla como componentes de la galaxia el disco luminoso, el gas y el halo oscuro, en este caso la contribución de materia oscura a cada galaxia es calculada como la contribución no bariónica faltante para obtener la curva de rotación observada. El cálculo de las curvas de rotación asociadas al gas y a la componente estelar se hace tomando en cuenta los valores del cuadro 3.1 y las ecuaciones (1.65) y (3.14). Los parámetros para cada halo se obtienen usando su expresión correspondiente para la velocidad circular, (1.33) en el caso del modelo NFW y (1.36) para el modelo de Burkert, y realizando un ajuste  $\chi^2$ . Las barras de error asociadas a cada parámetro inferido se obtienen del cálculo del valor esperado de la varianza y su raíz cuadrada (2.32).

La velocidad de rotación total correspondiente al mejor ajuste se define como la suma de las tres contribuciones:

$$V_c^2(R) = \frac{4}{3}V_{HI}^2(R) + V_\star^2(R) + V_{halo}^2(R) \quad (4.1)$$

donde  $V_{HI}$  representa la velocidad circular debida a la distribución superficial de HI,  $V_\star$  se usa para denotar la contribución del disco estelar y  $V_{halo}$  es usado para agregar la velocidad de rotación generada por el halo oscuro de acuerdo al modelo asumido.

Dado que tenemos un gran número de figuras, las tablas 4.1 y 4.2 sintetizan los valores obtenidos de los ajustes para cada galaxia para ambos modelos de halos oscuros. La tabla 4.1 se refiere al caso del disco mínimo, mientras que la 4.2 se refiere al caso en que se utilizan todas las componentes.

## CAPÍTULO 4. MODELOS DE MASA DE GALAXIAS ESPIRALES

Cuadro 4.1: Valores de los parámetros en el modelo de disco mínimo

Galaxia	Disco mínimo							
	NFW				Burkert			
	$r_s$ Kpc	$\rho_0$ $10^7 M_\odot/\text{pc}^2$	$\chi^2$	Masa $M_\odot$	$r_s$ Kpc	$\rho_0$ $10^7 M_\odot/\text{pc}^2$	$\chi^2$	Masa $M_\odot$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
DDO154	$14.455 \pm 1.94$	$0.161 \pm 0.026$	87.529	$6.112 * 10^9$	$2.439 \pm 0.098$	$3.273 \pm 0.208$	33.701	$4.713 * 10^9$
NGC2841	$4.665 \pm 0.101$	$40.764 \pm 1.863$	80.189	$8.216 * 10^{11}$	$3.225 \pm 0.049$	$87.739 \pm 2.793$	212.713	$7.5795 * 10^{11}$
NGC3031	$1.858 \pm 0.054$	$145.22 \pm 8.957$	483.219	$1.540 * 10^{11}$	$1.353 \pm 0.027$	$2788.322 \pm 11.88$	499.171	$1.481 * 10^{11}$
NGC3621	$7.893 \pm 0.494$	$3.066 \pm 0.335$	244.802	$1.308 * 10^{11}$	$3.330 \pm 0.038$	$17.958 \pm 0.406$	960.602	$1.165 * 10^{11}$
NGC4736	$0.334 \pm 0.033$	$2896.47 \pm 821.6$	133.28	$3.35 * 10^{10}$	$0.293 \pm 0.914$	$3742.4 \pm 3592.69$	138.385	$3.275 * 10^{10}$
NGC7793	$8.677 \pm 0.454$	$1.863 \pm 0.137$	247.757	$2.656 * 10^{10}$	$1.902 \pm 0.037$	$28.923 \pm 0.903$	403.195	$2.221 * 10^{10}$
NGC2366	$18.615 \pm 5.08$	$0.138256 \pm 0.039$	324.523	$6.379 * 10^9$	$1.920 \pm 0.033$	$6.424 \pm 0.154$	118.889	$5.051 * 10^9$
NGC2903	$3.911 \pm 0.113$	$23.781 \pm 1.492$	229.37	$2.280 * 10^{11}$	$2.546 \pm 0.052$	$58.867 \pm 2.641$	135.445	$2.157 * 10^{11}$
NGC2976	$192538 \pm \sim 10^5$	$7.736 * 10^{-5} \pm 0.397$	114.262	$3.935 * 10^9$	$1.77 \pm 1.522$	$25.080 \pm 9.08$	37.875	$4.149 * 10^9$
NGC3198	$9.021 \pm 0.23$	$2.442 \pm 0.13$	166.018	$1.975 * 10^{11}$	$4.496 \pm 0.11$	$10.387 \pm 0.54$	61.4018	$1.794 * 10^{11}$
NGC3521	$6.776 \pm 0.199$	$9.990 \pm 0.579$	702.704	$4.347 * 10^{11}$	$3.015 \pm 0.15$	$51.726 \pm 5.66$	123.337	$3.383 * 10^{11}$
NGC925 <sup>b</sup>	4622.237	0.00089	137.907	$4.699 * 10^{10}$	$7.975 \pm 0.30$	$2.229 \pm 0.09$	18.165	$4.715 * 10^{10}$
NGC2403	$6.943 \pm 0.161$	$3.237 \pm 0.136$	224.952	$7.974 * 10^{10}$	$2.784 \pm 0.467$	$20.575 \pm 5.606$	1237.87	$7.1534 * 10^{10}$
NGC5055	$4.031 \pm 1.04$	$23.912 \pm 8.946$	270.126	$3.288 * 10^{11}$	$2.264 \pm 0.026$	$81.137 \pm 1.935$	1248.52	$2.786 * 10^{11}$
NGC7331	$3.562 \pm 0.13$	$46.025 \pm 3.68$	87.203	$3.23 * 10^{11}$	$2.360 \pm 0.058$	$110.03 \pm 5.736$	151.911	$3.099 * 10^{11}$

(1) nombre de la galaxia; (2-5) muestran los resultados para el modelo NFW; (6-9) exhiben los valores para el modelo de Burkert.  
<sup>b</sup> Las incertidumbres en los parámetros de esta galaxia tal como se aprecia de la figura 4.1 son cantidades muy grandes.

Como se apreciará en las gráficas de velocidad circular, para cada galaxia, la materia oscura contribuye de formas distintas, en algunas galaxias la curva de rotación producida por la materia bariónica es dominante y en otras es justamente la materia oscura la que contribuye de forma más significativa a la curva de rotación total. La cantidad de masa con la que contribuye cada una de las componentes a la masa total de la galaxia se encuentra en el cuadro 4.3 donde además se indica la razón entre materia oscura y materia bariónica de acuerdo a cada modelo de halo oscuro.

### NGC925

Para esta galaxia se dispone de un total de 96 mediciones. El ajuste de parámetros  $\chi^2$  para el modelo de halo oscuro de NFW en el caso de esta galaxia presenta una peculiaridad, dado que existen más de un par de valores para los parámetros libres que minimizan a la función  $\chi^2$ , este comportamiento no se presenta en el modelo de halo de Burkert, donde se nota claramente que hay un mínimo. Las gráficas (4.1) muestran el

## CAPÍTULO 4. MODELOS DE MASA DE GALAXIAS ESPIRALES

Cuadro 4.2: Valores de los parámetros de los halos de materia oscura en el caso en que se consideran las 3 componentes de la galaxia.

Modelos de galaxias con tres componentes						
Galaxia	NFW			Burkert		
	$r_s$ Kpc	$\rho_0$ $10^7 M_\odot / \text{pc}^2$	$\chi^2$	$r_s$ Kpc	$\rho_0$ $10^7 M_\odot / \text{pc}^2$	$\chi^2$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
DDO154	29.051295 ± 22.35	0.11248 ± 0.0677	0.26	0.414215 ± 2.96	2.94345 ± 2.59	0.39
NGC2841 <sub>int</sub>	3.393 ± 0.091	50.113 ± ~ 0	151.386	2.637 ± 3.86	83.913 ± 70.7	118.239
NGC2841 <sub>ext</sub>	2.207 ± 0.94	57.579 ± 31.75	430.488	1.730 ± 4.11	94.731 ± 87.73	496.98
NGC3031	1.459 ± 5.05	57.295 ± 54.30	1362.46	1.274 ± ~ 0	74.190 ± ~ 0	1274.3
NGC3621	27.694 ± 13.522	0.006 ± 0.011	859.393	0.348	46.551 ± 32.968	988.149
NGC4736 <sub>int</sub>	3.02 * 10 <sup>-9</sup> ± 0.005	2.479 * 10 <sup>-7</sup> ± 1.48	26576.1	8.22 * 10 <sup>-9</sup> ± 0.004	2.780 * 10 <sup>-7</sup> ± 1.47	26576.1
NGC4736 <sub>ext</sub> <sup>a</sup>	0.001 ± 0.004	1.518 * 10 <sup>6</sup>	8151.22	0.002 ± 0.009	662594	8148.94
NGC7793	1.997 ± 0.214	2.404 ± 0.481	229.684	0.723 ± 0.388	18.392 ± 10.036	340.595
NGC2366	0.396 ± 0.148	1.655 ±	103.421	0.236 ± 0.055	6.214 ± 476.1	96.124
NGC2903	3.806 ± 0.531	10.887 ± 2.715	536.069	2.532 ± 0.220	25.788 ± 27.168	362.135
NGC2976	5.860 ± 12.01	0.161 ± 0.14	39.107	0.940 ± 0.144	3.517 ± 0.873	46.889
NGC3198 <sub>int</sub>	1.325 ± 0.45	6.361 ± 0.83	822.302	3.536 ± 0.11	4.660 ± 0.31	467.142
NGC3198 <sub>ext</sub> <sup>a</sup>	58.72 ± 33.07	0.00007 ± ~ 104	321.953	38921.6	0.0003 ±	244.383
NGC3521	4.619 ± 2.099	2.35 ± 0.414	409.745	1.829 ± 0.589	16.421 ± 2.44	299.573
NGC925	34.73 ± 11.125	0.003 ± 0.004	317.76	5.96 ± 0.92	0.069 ± 0.016	290.78
NGC2403	4.395 ± 0.156	3.180 ± 0.246	407.788	1.972 ± 0.198	17.198 ± 3.251	635.426
NGC5055	28.91 ± 1.137	0.108 ± 0.007	3121.31	7.89 ± 0.50	1.311 ± 0.164	2389.87
NGC7331	2.109 ± 0.26	39.077 ± 7.62	235.707	1.761 ± 0.458	56.137 ± 22.776	201.899

(1) nombre de la galaxia; (2-4) muestran los resultados para el modelo NFW; (5-7) exhiben los valores para el modelo de Burkert. <sup>a</sup>En el caso de estas galaxias no se incluyen las barras de error encontradas para los parámetros inferidos debido a que son de un orden mucho más grande que los valores estimados.

comportamiento de dicha función en ambos modelos para el caso de disco mínimo, sin embargo, el comportamiento es similar para el modelo que contempla las 3 componentes.

Los perfiles de brillo y de  $\gamma_{\star}^{3.6}$  no muestran un gradiente muy marcado, asumiremos  $\gamma_{\star}^{3.6} = 0.65$  para el disco estelar, el perfil de brillo superficial luminoso de éste se modela usando una función con caída exponencial con parámetros  $\mu_0 = 18.89 \text{ mag} \cdot \text{arcsec}^{-2}$  y  $R_d = 3.3 \text{ kpc}$ . Las curvas de rotación se muestran en la figura (4.2), éstas muestran que la contribución más grande es dada por el disco estelar.

## CAPÍTULO 4. MODELOS DE MASA DE GALAXIAS ESPIRALES

Cuadro 4.3: Valores de las contribuciones individuales a la masa total de la galaxia.

Modelo de tres componentes						
Galaxia	$M_{gas}$		NFW		Burkert	
	$10^8 M_\odot$	$10^8 M_\odot$	$M_{halo}$	$M_{halo}/M_{bar}$	$M_{halo}$	$M_{halo}/M_{bar}$
(1)	(2)	(3)	$M_\odot$	(5)	$M_\odot$	(7)
DDO154	3.58	0.415	$1.15572 * 10^9$	2.22	$6.14915 * 10^7$	0.118
NGC3031	36.4	344.47	$3.379 * 10^{10}$	0.86	$3.404 * 10^{10}$	0.86
NGC3621	70.7	481.19	$2.844 * 10^9$	0.05	$8.715 * 10^8$	0.015
NGC4736 <sub>int</sub>	4.00	471.22	$1.79 * 10^{-23}$	$3.7 * 10^{-33}$	$3.487 * 10^{-21}$	$7.3 * 10^{-32}$
NGC4736 <sub>ext</sub>	4.00	542.05	$0.253 * 10^7$	$4.6 * 10^{-5}$	$0.272 * 10^7$	$4.9 * 10^{-5}$
NGC7793	8.88	27.54	$1.951 * 10^9$	0.49	$1.493 * 10^9$	0.38
NGC2366	6.49	7.72	$2.693 * 10^7$	0.016	$2.8 * 10^7$	0.016
NGC2976	1.36	17.78	$22.922 * 10^7$	0.12	$20.744 * 10^7$	0.10
NGC3198 <sub>int</sub>	101.7	82.77	$4.813 * 10^{10}$	2.20	$4.47 * 10^{10}$	2.20
NGC3198 <sub>ext</sub>	101.7	1296.32	$2.148 * 10^8$	0.001	$8.5 * 10^8$	0.005
NGC925	45.8	103.45	$8.41 * 10^8$	0.056	$8.576 * 10^8$	0.057
NGC2403 <sub>int</sub>	25.8	11.01	$2.916 * 10^{10}$	6.42	$2.624 * 10^{10}$	5.78
NGC2403 <sub>ext</sub>	25.8	4.58	$3.044 * 10^{10}$	7.81	$2.75 * 10^{10}$	7.06
NGC5055	91.0	363.29	$12.146 * 10^{10}$	2.5	$9.863 * 10^{10}$	2.03
NGC7331	91.3	848.16	$7.668 * 10^{10}$	0.79	$7.602 * 10^{10}$	0.78

(1) nombre de la galaxia; (2) masa debida al hidrógeno neutral; (3) masa correspondiente al disco estelar; (4) masas obtenidas para el modelo NFW; (5) relación entre la masa del halo y la masa bariónica para el modelo NFW; (6) masa del halo oscuro para el modelo de Burkert; (7) relación entre la masa del halo de Burkert y la masa bariónica.

### NGC2403

Para esta galaxia se dispone de un total de 288 mediciones, el perfil de brillo superficial del disco luminoso se modela usando dos discos exponenciales, uno interno y otro externo, para el disco interno se tienen los parámetros  $\mu_0 = 16.7 \text{ mag} \cdot \text{arcseg}^{-2}$  y un factor de escala  $R_d = 0.41 \text{ kpc}$  y para el disco externo;  $\mu_0 = 16.9 \text{ mag} \cdot \text{arcseg}^{-2}$ ,  $R_d = 1.81 \text{ kpc}$ . El perfil de  $\gamma_\star^{3.6}(R)$  permite aproximar  $\gamma_\star^{3.6} = 0.6$  cuando se modela el perfil de disco con los parámetros de la parte interna y  $\gamma_\star^{3.6} = 0.3$  para el disco externo.

La figura (4.3) contiene las curvas de rotación para los diferentes modelos considerados. Podemos apreciar que para NGC2403 la diferencia entre modelar el disco como interno ó externo no presenta diferencias significativas, ya que la contribución de materia oscura de ambos halos y para los dos discos tiene prácticamente la misma magnitud. En las gráficas también se puede observar que el disco estelar y la densidad de masa superficial de HI contribuyen muy poco a la curva de rotación, lo cual hace que sea necesaria la presencia de gran cantidad de materia oscura, tal como se indica en el cuadro 4.3 es necesario que la masa del halo sea mayor que la masa bariónica por un factor de 6

## CAPÍTULO 4. MODELOS DE MASA DE GALAXIAS ESPIRALES

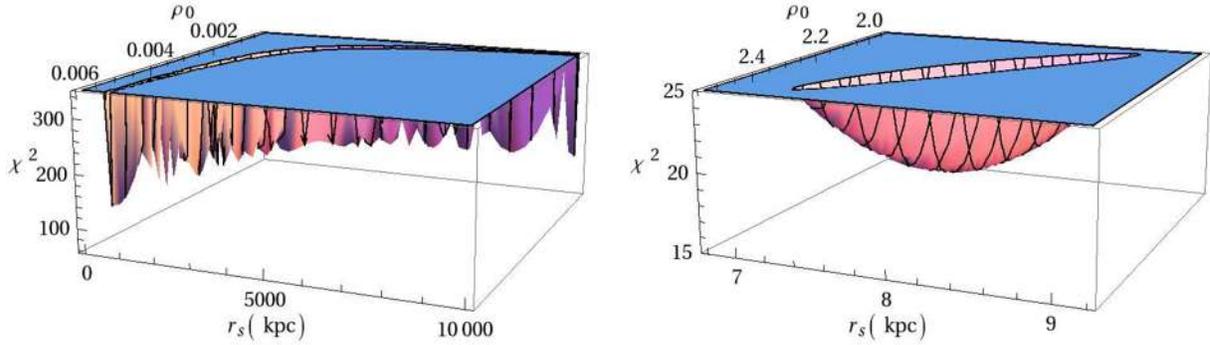


Figura 4.1: La gráfica de la izquierda es para el modelo NFW, podemos apreciar varios picos, lo cual indica que existen muchos pares  $(\rho_0, r_s)$  que minimizan la función y son un buen ajuste para el modelo. En la parte derecha, tenemos la gráfica correspondiente al modelo de Burkert, en la cual se aprecia claramente un mínimo.

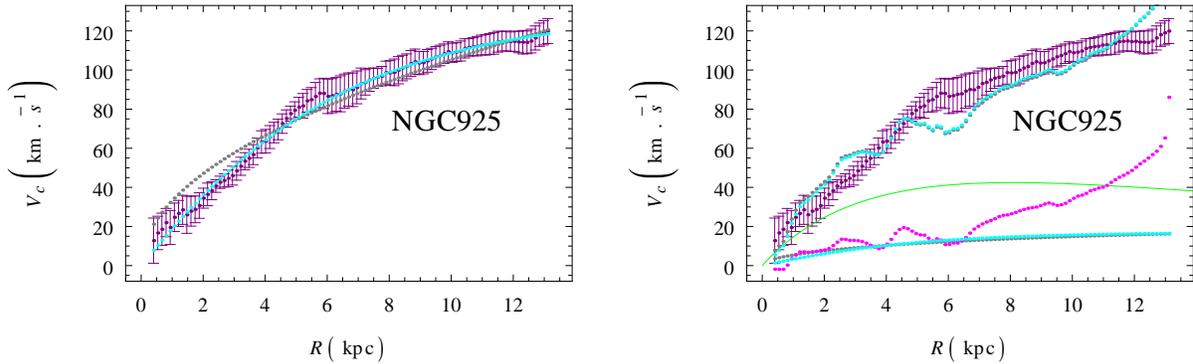


Figura 4.2: NGC925. En ambas gráficas los colores representan la siguiente información: morado para la curva de rotación medida, gris para el ajuste hecho con el modelo NFW, cian para el modelo de Burkert, verde para el disco luminoso y magenta para el gas. El gráfico izquierdo corresponde al caso de disco mínimo, en tanto que el derecho contempla todas las componentes de la galaxia, donde las líneas punteadas superiores representan la suma de todas las componentes para su modelo de materia oscura correspondiente.

veces, aproximadamente.

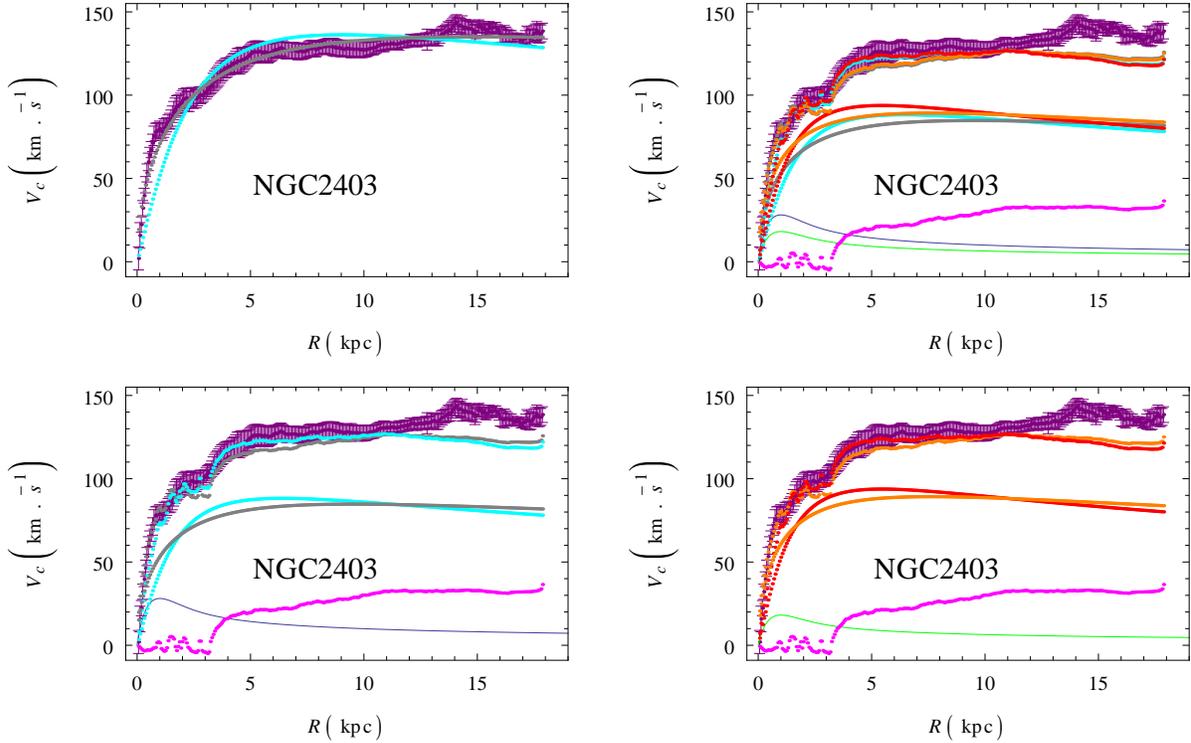


Figura 4.3: Galaxia NGC2403. La gráfica superior izquierda es el caso de disco mínimo, mientras que la superior derecha es el caso en que se consideran las 3 componentes, contiene además los dos discos; interno y externo. La gráfica inferior izquierda es para el disco interno, en ella la línea azul es la velocidad del disco. La gráfica inferior derecha es para el disco externo, para este disco los colores; verde representa al disco externo, naranja es para el modelo NFW y el rojo para Burkert. Los colores gris y cyan se utilizan para el disco interno para los modelos NFW y Burkert. El magenta y morado son como en (4.2).

## NGC2841

El perfil de brillo superficial de NGC2841 muestra que se puede aproximar con dos discos exponenciales, uno interno y otro externo. Descompondremos éstos perfiles usando  $\mu_0 = 15.7 \text{ mag arcseg}^{-2}$ ,  $R_d = 4.20 \text{ kpc}$  para el disco externo y  $\mu_0 = 13.5 \text{ mag arcseg}^{-2}$ ,  $R_d = 0.72 \text{ kpc}$ . Modelaremos el disco con estos dos perfiles. El gradiente de color no es muy variado, lo cual nos permite usar  $\gamma_{\star}^{3.6} = 0.8$  en la parte interna y  $\gamma_{\star}^{3.6} = 0.5$  para el disco externo. Las curvas de rotación para los diferentes modelos se encuentran en la figura

## CAPÍTULO 4. MODELOS DE MASA DE GALAXIAS ESPIRALES

(4.4), donde se observa que el modelo de disco externo provee un mejor ajuste a la curva de rotación observada que el modelo de disco interno. La forma de la contribución a la curva de rotación es distinta para ambos discos, sin embargo, la cantidad de materia oscura requerida para ajustar las observaciones tiene una contribución mayor a la del disco estelar.

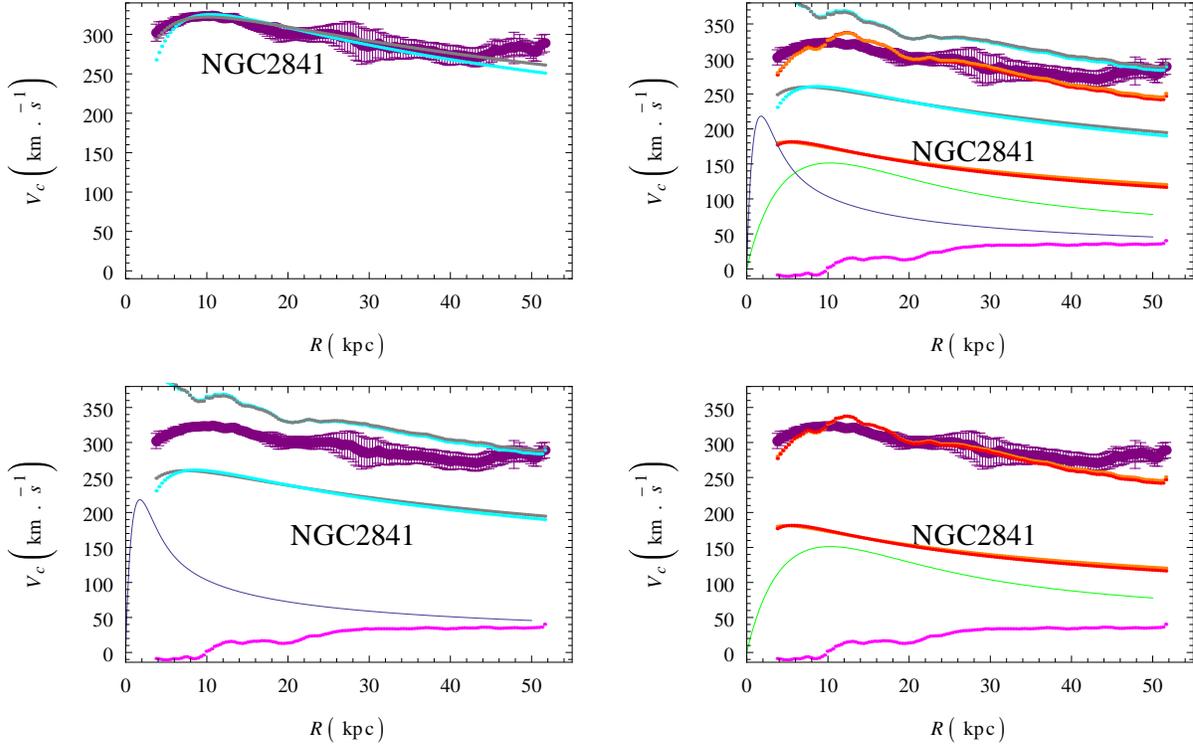


Figura 4.4: NGC2841. Los colores y gráficos son como en la gráfica (4.3).

## NGC2903

Su perfil de brillo superficial puede aproximarse por una sola componente con parámetros  $\mu_0 = 13.6 \text{ mag arcsec}^{-2}$ ,  $R_d = 0.17 \text{ kpc}$ ,  $\gamma_\star^{3.6} = 1.3$ , en particular, el valor usado para  $\gamma_\star^{3.6}$  es un promedio de su perfil observado.

Las curvas de rotación para los diferentes modelos de esta galaxia se encuentran en la gráfica (4.5). Podemos apreciar que la parte interna no se ajusta bien con los modelos considerados, una disminución en el parámetro  $\gamma_\star^{3.6}$  reduce la contribución total del disco estelar, por ejemplo, si lo fijamos igual a cero en los radios internos [3], entonces, es posible ajustar esta parte de la curva. Este comportamiento cercano al centro de la

## CAPÍTULO 4. MODELOS DE MASA DE GALAXIAS ESPIRALES

galaxia puede atribuirse a la presencia de una barra en el centro o a movimientos no circulares.

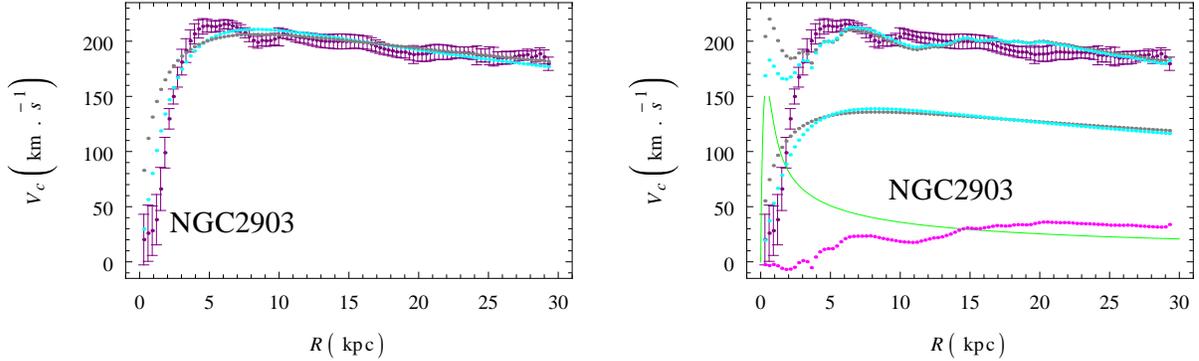


Figura 4.5: NGC2903. Los colores y gráficos son como en (4.2).

### NGC2976

La galaxia muestra un gradiente de color bien definido, donde  $\gamma_{\star}^{3.6}$  tiene una variaci3n de 0.75 a 0.3. Usaremos en nuestro caso  $\gamma_{\star}^{3.6} = 0.55$ . El ajuste de parámetros del halo oscuro en el modelo de NFW (Figura 4.6) muestra que la mejor estimaci3n no corresponde a un par de parámetros único, sino que diferentes pares  $(r_s, \rho_0)$  dan la misma aproximaci3n. La figura 4.7 contiene las curvas de rotaci3n obtenidas para esta galaxia en las cuales se aprecia que la contribuci3n del disco estelar es mayor a la de las otras componentes. NGC2976 representa un ejemplo al caso en que la curva de rotaci3n asociada al halo oscuro es más débil que la generada por la masa bari3nica.

### NGC3031

El perfil de brillo superficial de NGC3031 se puede modelar usando un disco exponencial con parámetros  $\mu_0 = 12.2$  mag arcseg $^{-2}$  y  $R_d = 0.25$  kpc y asumimos un valor constante  $\gamma_{\star}^{3.6} = 0.8$ . Las curvas de rotaci3n para los modelos de masa se muestran en la figura (4.8), en ellas se aprecia claramente que cuando consideramos las tres componentes de la galaxia el ajuste describe bien la tendencia general de la curva observada, pero, se desvía de forma significativa de las mediciones, sobre todo en el centro galáctico. Las discrepancias observadas en estas curvas pueden estar indicando la presencia de movimientos no circulares importantes.

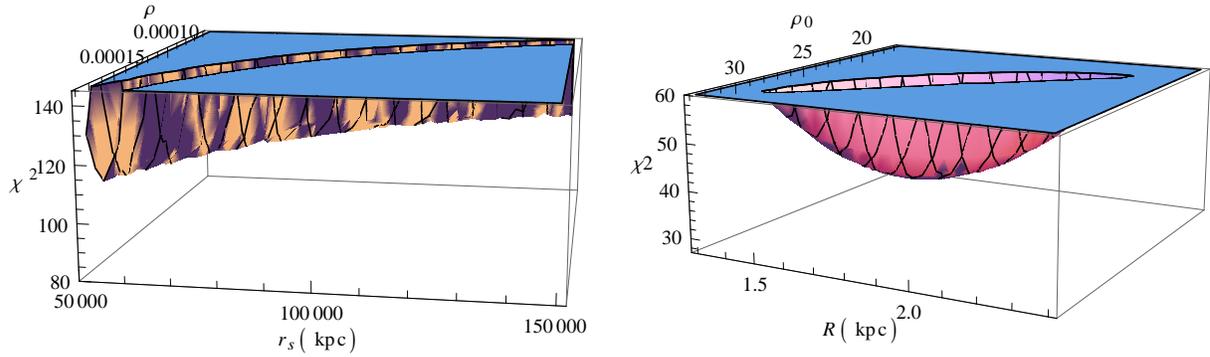


Figura 4.6: NGC2976. Función  $\chi^2$  para los modelos NFW y Burkert.

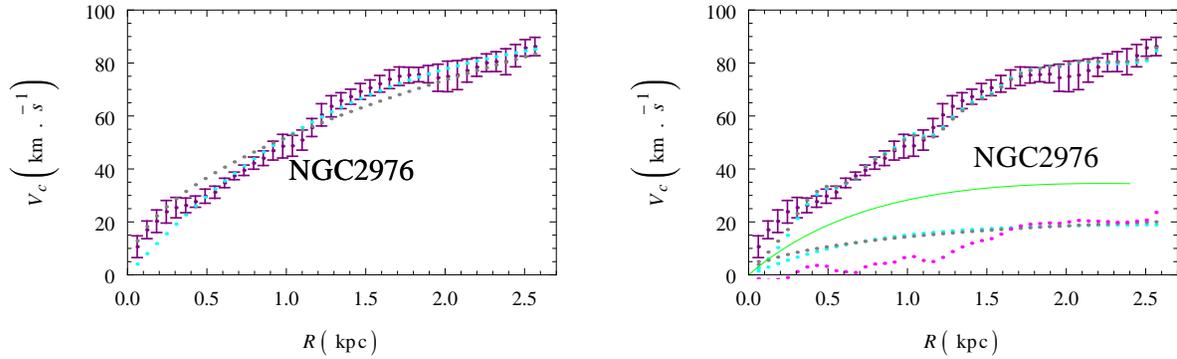


Figura 4.7: NGC2976. Los colores y líneas son como en la figura 4.2.

## NGC3198

En este caso el perfil de brillo superficial se descompone en dos discos exponenciales. La componente más interna se describe con los parámetros  $\mu_0 = 15.4 \text{ mag arcseg}^{-2}$ ,  $R_d = 0.56 \text{ kpc}$ , mientras que el disco exponencial externo lo representan mejor los parámetros  $\mu_0 = 16.2 \text{ mag arcseg}^{-2}$ ,  $R_d = 3.06 \text{ kpc}$ . En el caso del disco externo su curva de rotación asociada es de magnitud comparable a la observada, al menos para radios pequeños, este hecho, hace que la contribución del halo de materia oscura tenga

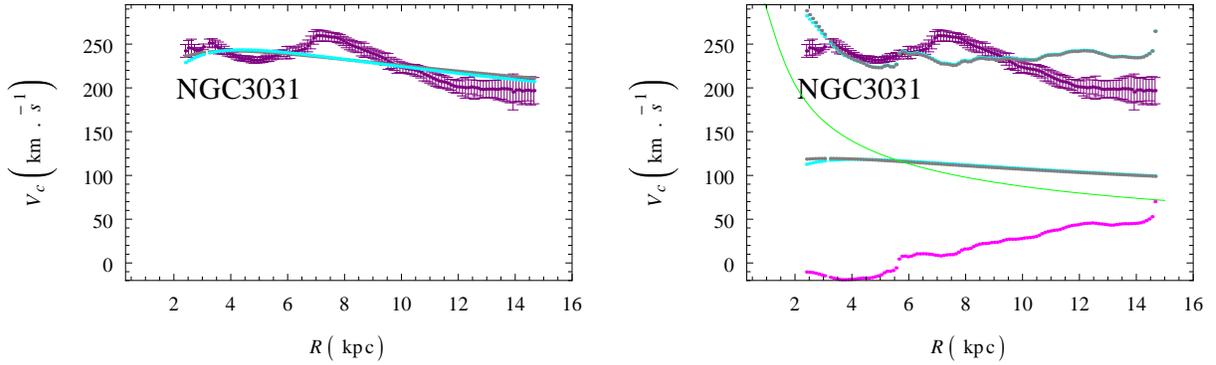


Figura 4.8: NGC3031. Los colores y gráficos son como en (4.2).

una contribución nula a la curva de rotación total, si en vez de modelar el disco estelar con el perfil externo lo modelamos con los parámetros que describen al disco interno, entonces, los halos de materia oscura contribuyen de forma significativa e incluso sus curvas de rotación asociadas rebasan en magnitud a la curva de rotación debida a la componente estelar.

## NGC3521

Trataremos el disco estelar como simple. Un cambio en el gradiente de color es presente. El valor para  $\gamma_{\star}^{3.6}$  cambia de 1 en el centro a 0.6 en las partes externas, asumiremos un valor constante  $\gamma_{\star}^{3.6} = 0.6$ . Las curvas de rotación se presentan en la figura 4.10, en ellas se observa que la componente estelar es la que tiene mayor contribución a la curva de rotación total derivada, donde, además los modelos NFW y Burkert no presentan diferencias significativas en sus curvas de rotación.

## NGC3621

El perfil de brillo superficial se modela con un disco con parámetros  $\mu_0 = 16.6 \text{ mag arcsec}^{-2}$ ,  $R_d = 2.61 \text{ kpc}$ ,  $\gamma_{\star}^{3.6} = 0.59$ . Las curvas de rotación se presentan en la figura 4.11 en estas gráficas podemos apreciar que la curva de rotación generada por el disco estelar rebasa de forma significativa a la generada por los halos de materia oscura, incluso la curva de rotación debida a la distribución superficial de HI tiene una contribución más importante que la del halo.

## CAPÍTULO 4. MODELOS DE MASA DE GALAXIAS ESPIRALES

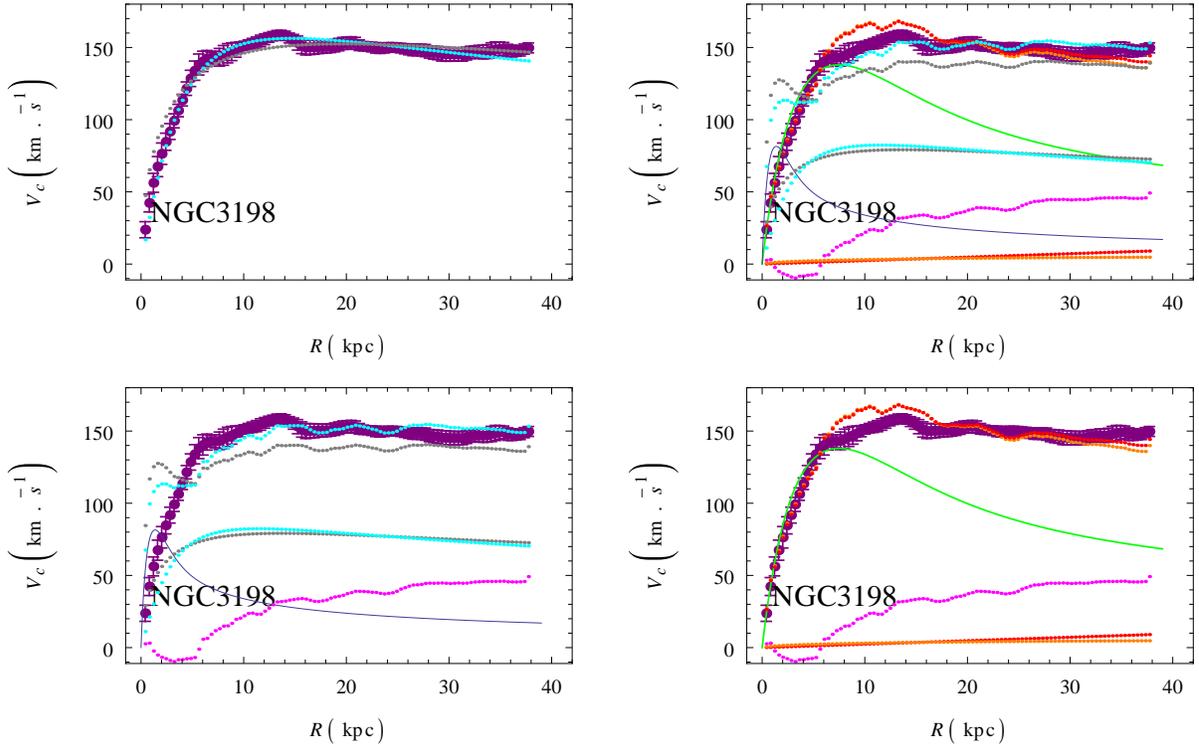


Figura 4.9: NGC3198. Los colores y gráficos son como en (4.3).

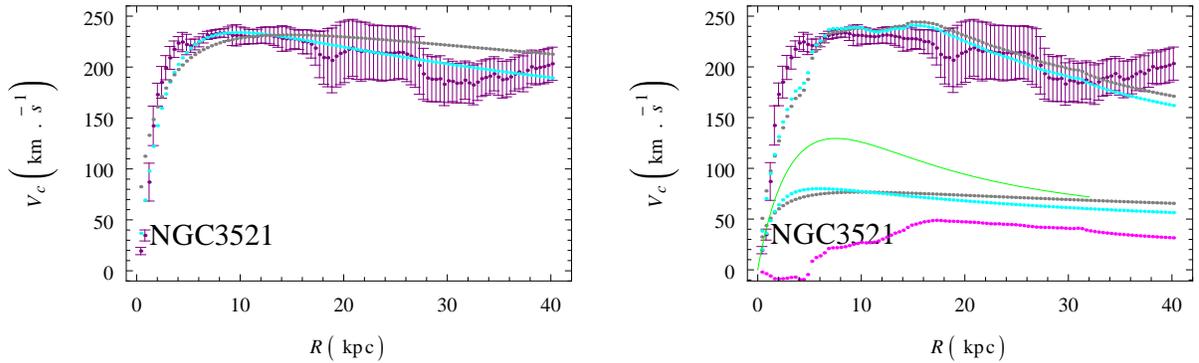


Figura 4.10: NGC3521. Los colores y gráficos son como en la figura 4.2.

## NGC4736

Esta galaxia se modela con dos discos, uno con parámetros  $\mu_0 = 11.8 \text{ mag arcsec}^{-2}$ ,  $R_d = 0.26 \text{ kpc}$ ,  $\gamma_{\star}^{3.6} = 0.7$ . Para modelar el otro disco usamos  $\mu_0 = 15.9 \text{ mag arcsec}^{-2}$ ,  $R_d = 1.99 \text{ kpc}$ ,  $\gamma_{\star}^{3.6} = 0.6$ . Las curvas de rotación se muestran en la figura 4.12 donde se

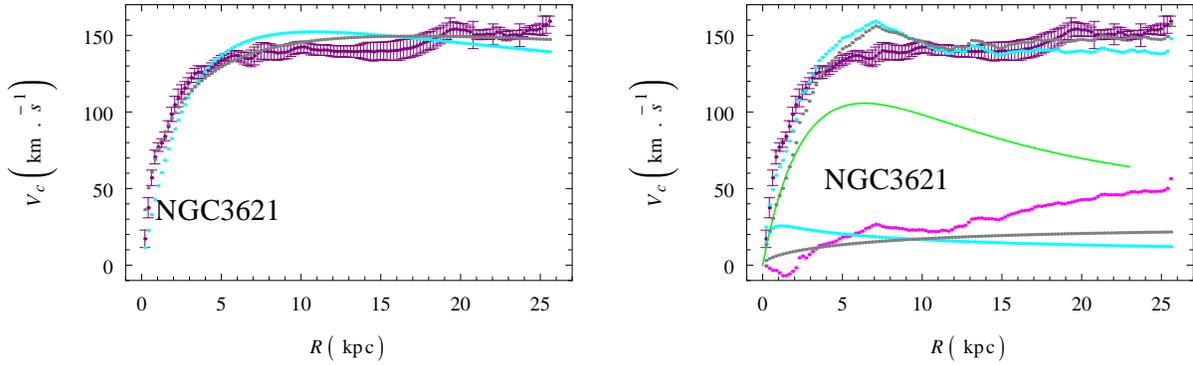


Figura 4.11: NGC3621. Los colores y gráficos son como en la figura 4.2.

hace obvio que la curva de rotación de NGC4736 está dominada por la contribución del disco estelar. Los valores usados para  $\gamma_{\star}^{3.6}$  en ambos discos nos dan una curva de rotación que sobrepasa a la observada, sin embargo, estos valores son extraídos directamente de las observaciones. Dadas las incertidumbres y los grandes movimientos no circulares en esta galaxia [38] es imposible decir algo definitivo acerca de la distribución de materia oscura en ella, basándonos únicamente en su curva de rotación.

## DDO154

Para esta galaxia adoptamos  $\gamma_{\star}^{3.6} = 0.32$ . Su perfil de brillo en la banda de  $3.6\mu m$  puede ser descrito por un disco exponencial simple con parámetros;  $\mu_0 = 20.8 \text{ mag arcseg}^{-2}$  y  $R_d = 0.72 \text{ kpc}$ . Las curvas de rotación se muestran en la figura (4.13). En esta galaxia la diferencia entre los modelos de halo es más notoria, siendo el modelo de NFW el que mejor se ajusta a las observaciones, las contribuciones de cada componente a la curva de rotación muestran que el disco estelar contribuye incluso menos que la distribución de gas, también la curva de rotación derivada del modelo de Burkert tiene una contribución menor a la del gas.

## NGC5055

NGC5055 tiene un perfil de brillo superficial descrito por un disco exponencial con parámetros  $\mu_0 = 13.4 \text{ mag arcseg}^{-2}$ ,  $R_d = 0.35 \text{ kpc}$ , el perfil de  $\gamma_{\star}^{3.6}$  indica que al considerarse como constante hemos de elegir el valor 1.3, lo cual hace que la curva asociada al disco luminoso sobrepase al menos, en la parte interna a la curva de rotación total observada [ver figura 4.14]. Otra forma de tomar los valores de  $\gamma_{\star}^{3.6}$  es tomarlos como

## CAPÍTULO 4. MODELOS DE MASA DE GALAXIAS ESPIRALES

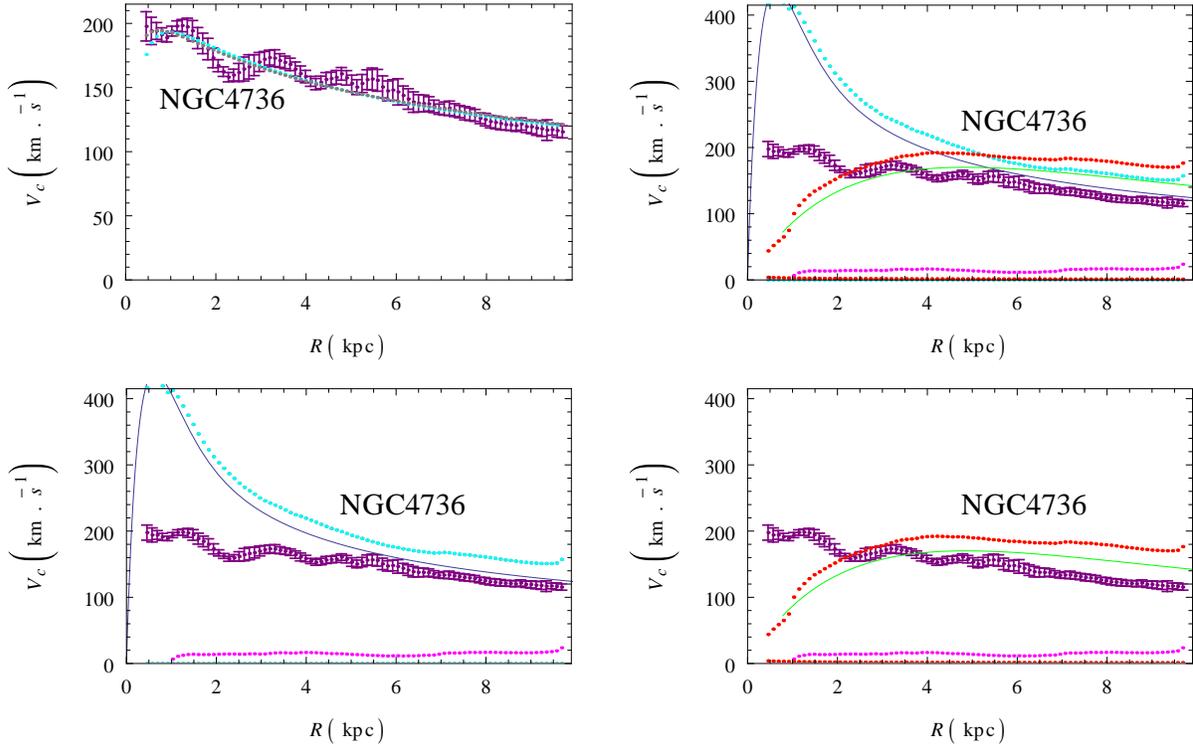


Figura 4.12: NGC4736. Los colores y gráficos son como en la figura 4.3.

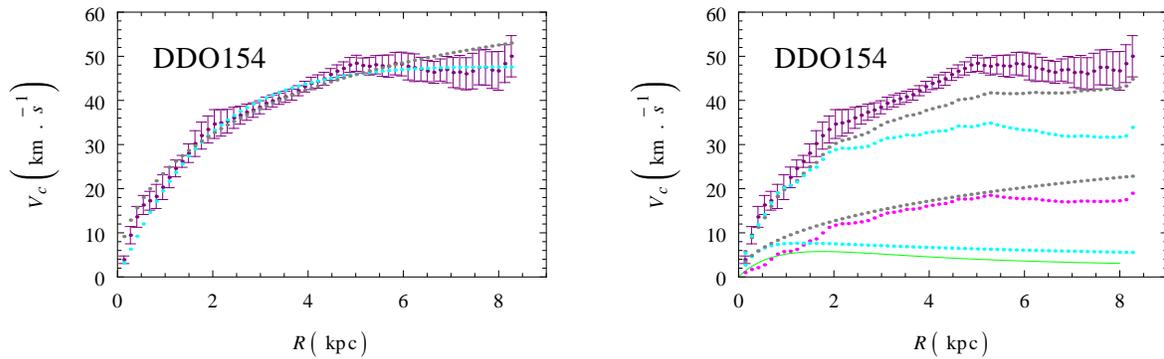


Figura 4.13: DDO154. Los colores y gráficos son como en (4.2).

parámetros libres y ajustarlos con algún modelo, esta ajuste ha sido realizado por De Blok et al, donde se encontró que la elección favorable corresponde a  $\gamma_{\star}^{3.6} = 0.2$  un valor muy por debajo del observado.

## CAPÍTULO 4. MODELOS DE MASA DE GALAXIAS ESPIRALES

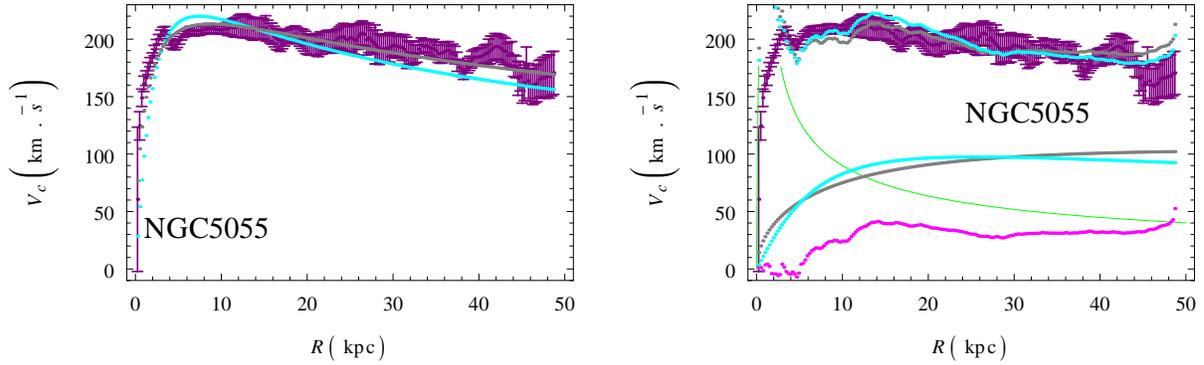


Figura 4.14: NGC5055. Los distintos colores y gráficos contienen la misma información que la figura (4.2).

### NGC7331

El perfil de brillo superficial de NGC7331 se descompone usando un disco exponencial, con parámetros  $\mu_0 = 12.0 \text{ mag arcseg}^{-2}$ ,  $R_d = 0.32 \text{ kpc}$ . El valor de  $\gamma_*^{3.6}$  es fijado a 1, aunque en el centro el valor observado es más alto, lo cual podría estar indicando la presencia de un anillo de polvo.

Las curvas de rotación obtenidas para esta galaxia en los casos de halo máximo y mínimo se muestran en la figura 4.15, donde se puede apreciar que la diferencia entre los modelos de halo oscuro NFW y Burkert ajustan prácticamente igual a la curva de rotación observada.

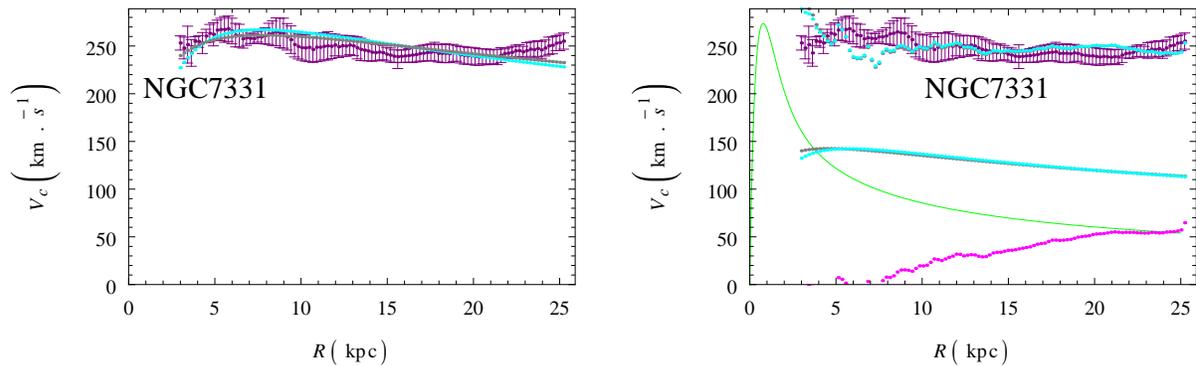


Figura 4.15: NGC7331. Los colores y gráficos son como en la figura (4.2).

## NGC7793

Las curvas de rotación para los modelos de masa, se encuentran en la figura (4.16), vemos que en el caso que se consideran las 3 componentes, la que más contribuye a la curva de rotación es la componente de disco luminoso, para el cual se ha utilizado  $\gamma_{\star}^{3.6} = 0.31$ , ésta elección se hizo en base a que su perfil muestra un ligero cambio, toma un valor más grande en las partes internas  $\approx 0.4$  y en las partes más externas  $\approx 0.2$ .

Los modelos NFW y Burkert se aproximan prácticamente igual a la curva de rotación observada, esto es consistente con las tablas de resultados 4.1 y 4.2, en las cuales se aprecia que ambos modelos tienen masas del mismo orden de magnitud.

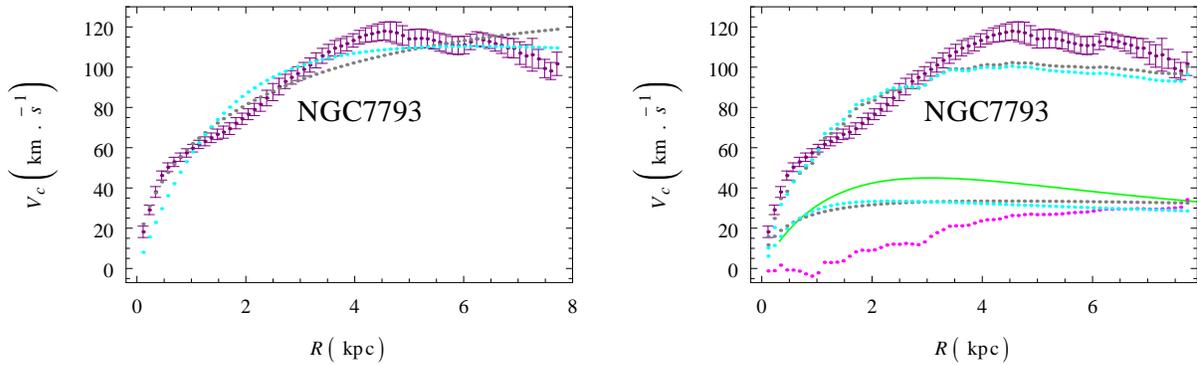


Figura 4.16: NGC7793. Los colores son como se indica en la figura (4.2).

## NGC2366

El disco estelar luminoso de la galaxia NGC2366 se modela usando los parámetros:  $\gamma_{\star}^{3.6} = 0.33$ ,  $\mu_0 = 19.56$  mag arcseg<sup>-2</sup>,  $R_d = 1.76$  kpc. La curva de rotación observada de esta galaxia tiene un comportamiento ligeramente distinto a las demás, lo cual es debido a la presencia de movimientos no circulares. En la figura 4.17 se muestran las curvas de rotación asociadas a cada componente y modelo de NGC2366.

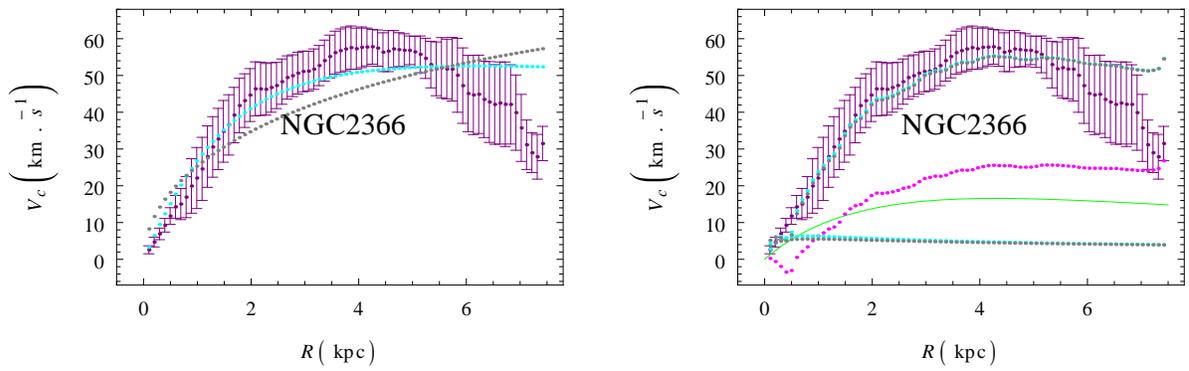


Figura 4.17: NGC2366. Los colores y gráficos son como en (4.2).

## Conclusiones

Hemos presentado los modelos de masa de 16 galaxias cercanas a la vía láctea, derivados usando los datos de la muestra THINGS. La alta resolución espacial y de velocidad de las mediciones de la muestra permiten que los datos no se vean afectados por pequeñas desviaciones en el haz de fotones emitidos por HI por lo que es posible derivar los parámetros de cada galaxia usando únicamente observaciones de HI, otra característica importante es que las galaxias analizadas tienen un centro dinámico bien definido. Todas las características propias de la muestra hacen que constituya la más precisa hasta el momento y nos permiten analizar a detalle la distribución de materia oscura en estas galaxias.

Las conclusiones principales se enuncian a continuación:

- Hemos determinado la relación estelar masa-luz  $\gamma_*$  en la banda de  $3.6\mu\text{m}$ , basados en la función de masa inicial de diet Salpeter y sus perfiles mostrados en [3]. Se asumió esta relación como constante, sin embargo, es preciso mencionar que, una elección diferente puede ser considerada, por ejemplo, modelar el perfil de  $\gamma_*$  como una función radial que se ajuste a las mediciones en los diferentes radios.
- Ajustamos los modelos de Burkert y de NFW a nuestras curvas de rotación, infiriendo los parámetros libres en cada uno usando la técnica estadística  $\chi^2$  la cual es la más utilizada en estos tipos de análisis. Los ajustes realizados a ambos modelos de halos y sus gráficas correspondientes no nos permiten elegir que halo es el más adecuado para describir la contribución de materia oscura en galaxias espirales, ya que gráficamente muestran una gran similitud y apenas sufren desviaciones uno del otro.
- Nuestros resultados concuerdan en su mayor parte con los encontrados originalmente en [3], las principales diferencias radican en que en nuestro caso asumimos  $\gamma_*$  como una constante a lo largo de cada galaxia y en el artículo

mencionado se usa el perfil completo para modelar el perfil de la relación masa-luminosidad, además ellos desarrollan el caso en que  $\gamma_*$  es considerada como un parámetro constante libre y lo ajustan a las observaciones haciendo nuevamente un ajuste  $\chi^2$ . Cabe mencionar que en cualquiera de los modelos elegidos para  $\gamma_*$ , la contribución del disco luminoso a la curva de rotación no es significativamente distinta.

- Es importante notar que la contribución del halo oscuro a las curvas de rotación galácticas no tiene la misma importancia en todas las galaxias, este hecho también puede notarse en el cuadro 4.3 donde se aprecia que la relación entre las masas de los halos y las masas de la materia bariónica es muy variable: para algunas galaxias el halo prácticamente no contribuye mientras que para otras su contribución rebasa a la masa debida a las componentes bariónicas.
- Es preciso mencionar que, salvo en dos galaxias de la muestra THINGS, es necesario asumir la existencia de materia oscura para realizar un excelente ajuste a las curvas de rotación observadas de la muestra. Estos resultados se obtuvieron asumiendo la validez de la interacción gravitacional Newtoniana a escalas galácticas.
- Por último, los resultados de este estudio no nos permiten inferir las propiedades físicas de la materia oscura, pero sí nos permite establecer cotas a la cantidad máxima y mínima de ella en cada galaxia de la muestra.

## Galaxias

Observando el cielo se han podido distinguir enormes nubes luminosas, que miden miles de años luz. Cada nube contiene entre un millón y  $10^{12}$  estrellas; éstas estrellas permanecen unidas gracias a la fuerza de gravedad, la cual determina su movimiento y evita que vaguen libremente, dichas nubes son las denominadas galaxias. No fue hasta la década de 1920 con la clasificación de Hubble de estrellas en la entonces Nebulosa de Andrómeda que la mayoría de los astrónomos se convencieron de que las nebulosas catalogadas por John Dreyer en su Nuevo Catálogo General de Nebulosas y cúmulos de estrellas son de hecho galaxias. Entonces, por simplicidad diremos que una galaxia es un sistema dinámico, acotado, que contiene muchas estrellas, una galaxia típica como la Vía Láctea contiene aproximadamente  $10^{10}$  estrellas y tiene un diámetro ( 20 kpc). Para caracterizar una galaxia se requieren una gran cantidad de parámetros, algunos de ellos ya han sido descritos anteriormente debido a su relevancia para los cálculos y análisis presentados.

Algunas de las características y parámetros principales de una galaxia son:

- a) **Morfología.** Una de las propiedades más notorias de una galaxia es la existencia de dos formas geométricas básicas: galaxias espirales y galaxias elípticas. Las galaxias elípticas son sistemas elipsoidales ligeramente aplanados que se mantienen así por el movimiento aleatorio de sus estrellas. Las galaxias espirales por su lado contienen discos planos que son soportados por la rotación, el nombre, espiral proviene de que las estrellas y el gas del disco revelan un claro patrón de espiral.

Estas dos estructuras son muy generales, sin embargo, algunas galaxias no muestran claramente una estructura elipsoidal ó espiral, sino que su forma corresponde a una combinación de ambas.

- b) **Luminosidad y masa estelar.** La luz emitida por las galaxias abarca un amplio espectro de luminosidad. El brillo de las galaxias, el cual se mide

luminosidades, es del orden de  $10^{10}L_{\odot}$ . Hasta el momento no se tiene una definición para el límite inferior de luminosidad que puede emitir una galaxia. La luminosidad total de una galaxia está relacionada con el número total de estrellas y el total de estrellas obviamente se relaciona con la masa estelar de la galaxia, sin embargo, como se ha mencionado la relación entre masa estelar y luminosidad es un parámetro variable entre galaxias ya que contienen poblaciones estelares diferentes.

- c) **Tamaño y brillo superficial.** Resulta difícil definir la frontera de una galaxia, como consecuencia de ello, existen en la literatura diferentes definiciones de tamaño. Como se espera, galaxias más brillantes son más grandes, sin embargo, para una luminosidad fija el tamaño y masa de la galaxia son muy variables, ya que el brillo superficial se define como luminosidad por unidad de área. Para las galaxias espirales, las cuales son soportadas por la rotación el tamaño es importante para medir su momento angular.
- d) **Fracción de gas** Una parte significativa de la masa de una galaxia es producida por la fracción de gas contenida en ella. Para las galaxias elípticas la cantidad de gas contenido es despreciable, mientras que para las galaxias espirales esta fracción incrementa sistemáticamente con el decrecimiento del brillo superficial y en algunas ocasiones, incluso puede ser la componente dominante.
- e) **Color.** El color refleja el radio de luminosidad de las galaxias en dos bandas fotométricas, se dice que una galaxia es roja si su luminosidad en la banda roja es relativamente alta comparada con la azul. Galaxias elípticas generalmente tienen colores más rojos que las espirales y las irregulares. El color se relaciona con la edad y metalicidad de la población de estrellas.
- f) **Medio.** Las galaxias no se distribuyen en el espacio de manera aleatoria, sino que se agrupan en una gran variedad de estructuras. Algunas galaxias forman cúmulos muy densos que contienen miles de ellas, otras en se agrupan en estructuras más pequeñas que contienen apenas algunas decenas de galaxias y otras que se distribuyen en estructuras huecas. Estas estructuras formadas por la agrupación de galaxias se mantienen gracias a la fuerza de gravitación y pueden jugar un papel importante en la formación y evolución de galaxias. Las galaxias elípticas prefieren agruparse en cúmulos y las espirales se encuentran principalmente aisladas.
- g) **Actividad Nuclear.** Para la mayoría de las galaxias la luz observada es consistente con lo que se espera de una colección de estrellas y gas, sin embargo, una pequeña fracción de todas las galaxias, llamadas galaxias activas, muestran una componente no estelar en su espectro de emisión de energía. Esta emisión genera una pequeña región en el centro de las galaxias, llamado núcleo de galaxias activo (AGN) y es asociado con la acreción de materia en un agujero negro supermasivo.

- h) **Redshift.** Debido a la expansión del universo un objeto que se encuentra lejano puede tener una velocidad recedente muy grande y un corrimiento al rojo o al azul grande. Dado que la luz proveniente de galaxias con un alto corrimiento fue emitida cuando el universo era más joven es que podemos estudiar la evolución de galaxias mediante la observación de su población estelar a diferentes longitudes de onda. De hecho, en un sentido estadístico, las galaxias con un alto corrimiento son los antecesores de las galaxias presentes hoy en día, el estudio de las propiedades intrínsecas de galaxias con un alto corrimiento nos da una ventana de información sobre la formación y evolución de la población de galaxias.

Aún con estos parámetros es difícil dar una clasificación de galaxias que las contemple a todas. Hubble clasifica las galaxias en cuatro clases muy generales:

- i) **Galaxias Elípticas.** como ya hemos mencionado muestran una geometría casi elíptica y se dividen en subtipos E0,E1,...,E7, donde el entero se relaciona con los semiejes mayor y menor.
- ii) **Galaxias Espirales.** Éstas tienen discos delgados con estructura de brazos espirales. Se dividen en dos tipos, espirales con barra y espirales normales, asociados con la presencia o no de una estructura tipo barra en la parte central de la galaxia. Cada subtipo se divide a su vez en tres clases de acuerdo a los siguientes criterios:
- \* La fracción de luz en el bulbo.
  - \* La estrechez con la que se enrollan los brazos espirales.
  - \* El grado con el cual los brazos espirales son compuestos por estrellas, regiones HII y el ordenamiento de las líneas de polvo.

La correlación de estas tres propiedades da origen a otra clasificación, sin embargo para los propósitos de esta tesis no es relevante.

- iii) **Lenticular o galaxias SO** Esta clase es intermedia entre elípticas y espirales.
- iv) **Galaxias irregulares.** Estos objetos no tienen un bulbo dominante o una simetría rotacional. Hubble no incluye esta clase en su clasificación original por considerarla una extensión de algún otro tipo. A veces se incluye como una extensión de galaxias espirales.

Galaxias elípticas y lenticulares son referidas algunas veces como galaxias de tipo temprano, mientras que las espirales e irregulares forman el tipo tardío.

## Galaxias espirales

Típicamente consisten de un disco delgado soportado por la rotación con brazos espirales y a veces una barra, más una componente central comunmente llamada bulbo. La estructura espiral se aprecia mejor en sistemas denominados *face-on* y está compuesta principalmente por estrellas jóvenes, regiones de HI, gas molecular y absorción de polvo. Por otro lado, los sistemas *edge-on* denotan mejor la estructura vertical del disco, la cual puede revelar dos componentes: *disco delgado* y *disco grueso*. Adicionalmente, hay indicativos de que las galaxias espirales también contienen un halo estelar esférico que se extiende a radios largos.

# Bibliografía

- [1] Zwicky, F., 1933, *Helv. Phys. Acta* 6, 110.
- [2] Zwicky, F., 1937, *Astrophys. J.* 86, 217.
- [3] De Blok et al., 2008, *Astronomical Journal*, 136, 2648-2719.
- [4] Famaey, B., S. S. McGaugh, 2012, *Living Rev. Relativity* 15, 10.
- [5] Jeans, J. H., 1922, *MNRAS*, 82, 122.
- [6] Kapteyn J. C., 1922, *ApJ*, 55, 302.
- [7] Faber, S. M. J. S. Gallagher, 1979, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 17, 135.
- [8] Rubin, V. C., D. Burstein, W.K. Ford, Jr., N. Thonnard, 1985, *Astrophys. J.* 289, 81.
- [9] Bartelmann, M., P. Schneider, 2001, *Phys. Rep.* 340, 291.
- [10] Bartelmann, M., 2010, *Rev. of Mod. Phys.* 82, 331.
- [11] Feng, J. L., 2010, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 48, 495.
- [12] Jaan Einasto, 2010, arXiv:0901.0632v2.
- [13] Stéphane Cordeau, et al., 2014, *Rev. Mod.Phys.*, 86, 47-73.
- [14] Casertano, s., 1983, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 203, 735
- [15] Houjun Mo et al., *Galaxy Formation and Evolution*. Cambridge Press, 2010.
- [16] Kregel M., van der Kruit, P. C., de Grijs, R. 2002, *MNRAS*, 334, 646.
- [17] van der Kruit, P. C., Searle, L. 1981a, *AA*, 95, 105.
- [18] van der Kruit, P. C., K. C. Freeman, 2011, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 49, 301.
- [19] Fabian Walter et al., 2008, *Astronomical Journal*, 136, 2563-2647.
- [20] J.F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M.White, *Astrophys. J.* 462,563 (1996).
- [21] J.F. Navarro, C.S. Frenk, and S.D.M.White, *Astrophys. J.* 490,493 (1997).

- [22] A. Burkert, *Astrophys. J.* 447,L25 (1995).
- [23] Gradshteyn and Ryzhik's Table of Integrals, Series, and Products Alan Jeffrey (ed.), Fifth edition (January 1994).
- [24] D. S. Sivia J. S. Skilling, 2006, *Data Analysis* 2nd. Edition. Oxford University Press.
- [25] William H. Press et al., *Numerical Recipes*, 2007, 3rd. Edition, Cambridge University Press.
- [26] Se-Heong, et al., 2008, *Astronomical Journal*, 136:2761-2781.
- [27] Bell, E. F., de Jong, R.S. 2001, *ApJ*, 550, 212.
- [28] van Aldaba, T. S., Sancisi, R. 1986, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 320, 447.
- [29] Jorge Mastache, Axel de la Macorra Jorge Cervantes, 2012, *Phys. Rev. D*, 85, 123009.
- [30] Salpeter, E. E. 1955, *ApJ*, 121, 161.
- [31] Kroupa, P., 2001, *MNRAS*, 322, 231.
- [32] Leroy, A., et al., 2008, *AJ*, 136, 2782.
- [33] Bell, E.F., McIntosh, D.H., Katz, N., Weinberg, M.D. 2003, *ApJS*, 149, 289.
- [34] T. H. Jarrett. T. Chesters R. Cutri, 2003, *Astronomical Journal*, 125, 525.
- [35] <http://www.mpia-hd.mpg.de/THINGS/Data.html>
- [36] Bosma, A., 1978, Ph.D. thesis (University of Groningen).
- [37] Spergel, D. N., et al., 2007, *ApJS*, 170, 377.
- [38] Trachternach, C., de Blok et al., 2008, *AJ*, 136, 2720.
- [39] <http://www.astro.rug.nl/gipsy/>