Universidad Michoacana De San Nicolás De Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez "

Agujeros de Gusano en Teoria $f(T)$ con Curvatura Escalar Cero

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

Licenciado En Ciencias Físico Matemáticas

PRESENTA:

Martín Onofre Monroy Ramírez

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Joaquin Estevez Delgado

Morelia Mich. marzo de 2018

A mi padre Joé Luz Monroy Jiménez que gracias a sus incansables fuerzas y a su incondicional apoyo eh logrado concluir esta etapa de mi vida.

AGRADECIMIENTOS

Dedicado a mis padres que gracias a su amor y paciencia me mostraron como ser una persona de bien, les agradezco que en todo memento de mi vida estén a mi lado mostrándome como seguir adelante, gracias a sus palabras y consejos eh logrado superar los momentos difíciles de mi vida, a regirme con los valores que herede directamente de ustedes gracias desde el fondo de mi corazón .

A mis hermanos Luz y José María ya que con su ejemplo y ayuda eh logrado concluir una etapa más de mi vida, les agradezco el enseñarme a levantar aún en los momentos difíciles que se presentan en el día a día de nuestras vidas, a no detenerme, ser paciente y perseverar para lograr mis metas. A mi hermano José maría ya que gracias a la ayuda incansable que dio a mi padre pude estudiar en la UMSNH lejos de mi hogar.

Gracias a mi tío Gregorio por los consejos y sabiduría que me ah brindado en todo momento, por mostrame que lo más valioso que tenemos como seres humanos es nuestra familia.

A mi tía Josefa Cid que sin su apoyo nada de esto habría sido posible ya que gracias a usted obtuve conocimiento de la UMSNH lo cual abrió una de las puertas más importantes de mi vida, conocí un mundo nuevo junto a su cultura, tal vez para usted solo fue un pequeño gesto de ayuda pero el impacto en mi vida fue gigantesco me enseño que la vida puede dar grandes vueltas de un día a otro y que las cosas no siempre salen como uno quiere.

Para mis maestros por la infinita paciencia que me tuvieron y por el conocimiento que me brindaron para lograr ser un profesionista que no es indiferente ante los problemas que aquejan a nuestra sociedad y entorno, mis más profundos agradecimientos al Mtro José Vega, Mtro Jesús Ortiz, Mtro Arroyo, Dr Mota y al Dr Petr Zhevandrov.

En especial gracias al Dr. Joaquín Estevez ya que sin su apoyo y guiá durante la elaboración de este trabajo de tesis no había sido capaz de concluirlo, es una persona a la que debo mi admiración ya que personas como usted son muy pocas, en verdad es un ejemplo a seguir en todos los aspectos.

Quiero agradecer también a todos mis amigo que siempre estuvieron para apoyarme en especial a Ana Karen, Cithia y Daniel que durante los 5 años de licenciatura nunca me abandonaron, gracias por todo el apoyo emocional y académico que me brindaron sin esperar nada a cambio, personas a mi alrededor hubo muchas pero ustedes fueron los únicos que se quedaron y se quedaran siempre en mi corazón .

Agradezco al Dr. Julio cesar Magaña por su amistad, su orientación y ayuda desinteresada que me ah brindado durante los últimos años. En verdad lo admiro mucho y no tengo palabras para agradecerle su infinito apoyo.

También deseo agradecer a Francisco Peña por ser una especie de guiá y aconsejarme en momentos complicados. A Vega(hijo), Samuel(Chiapitas), José Trinidad, Maria Otilia, Azucena Moreno, Chamo, Reyes, Niño, Rivas, Tatis , Julio, Gabo, Denisse, Daniel y Esau gracias por todos aquellos momentos inolvidables que pase su lado.

Gracias a mi primo Aáron que siempre esta ahí escuchando todas las locuras que salen de mi mente.

Por ultimo quiero agradecer a Liliana Ivette que durante tantos años estuvo a mi lado, procurandome para que estuviera bien, el estar junto a ti ah sido una de las mejores épocas de mi vida gracias por todo.

Morelia MEX., 7 de marzo de 2018

RESUMEN

La concepción actual que tenemos del entendimiento de nuestro universo ha sido en parte lograda gracias a áreas de la física teórica como la Relatividad General de Einstein. Aunque esta puede llegar a ser en algunos de los caso no suficiente, por ejemplo en el caso de fenómenos cuánticos esta teoría no es adecuada para dar explicación a fenómenos a esta escala. Recientemente [33] un experimento ha mostrado la posibilidad de la existencia de una cuarta dimensión espacial y algunos análisis teóricos muestran la existencia de campos no conservativos, es decir que el tensor de momento energía no satisface $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$. Por lo que algunas investigaciones teóricas se han basado en hechos como este para la propuestas de teorías alternativas a la teoría de la relatividad general de Einstein. Una de estas teorías es la llamada teoría $f(T)$ que consiste en la modificación del funcional de acción para la gravedad. El estudiar fenómenos desde teorías de gravedad modificada, en vez de la perspectiva clásica de la relatividad ayuda a tener un mejor entendimiento sobre el comportamiento y las condiciones necesarias para generar agujeros de gusano más realistas que minimizan la utilización de materia y energía exótica.

Por otro lado la fascinación por los viajes en el tiempo ha llevado a la propuesta teórica de entes geométricos que pueden permitir esto en el marco de la teoría de la relatividad general. Aunque para tal caso se requiera de la violación de la condición nula de energía. Estos objetos conocido como agujeros de gusano se plantearon desde hace décadas, aunque su auge ocurrió luego de la propuesta de Thorne resultado del dialogo con Carl Sagan. En este trabajo se presenta la construcción de un agujero de gusano con curvatura escalar cero en teoría $F(T)$, la construcción de esto se lleva a cabo mediante la solución de las ecuaciones para un espacio tiempo estático y esfericamente simétrico . Es mostrado que las regiones asintóticas del espacio tiempo que conecta el agujero de gusano es asintóticamente plano, aun que la densidad y las presiones radial y tangencial son constantes, no cero, en la región infinita. Adicionalmente se deducen ecuaciones de estado $P_r = P_r(\rho)$ y $P_t = P_t(\rho)$ para la materia que puede formar el agujero de gusano.

Palabras clave: Regiones asintóticas, presión radial y tangencial, espacio-tiempo esferico, materia exótica y geodesicas.

ABSTRACT

The current conception we have of the knowledge of our universe has been partly achieved thanks to the areas of theoretical physics such as Einstein's General Relativity. Although this may become in some cases not enough, for example in the case of quantum phenomena this theory is not adequate to give effect to phenomena on this scale. Recently [33] an experiment has shown the possibility of the existence of a fourth spatial dimension and some theoretical analyzes show the existence of non-conservative fields, that is to say that the moment tensor energy does not satisfy $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$. So some theoretical investigations have been based on facts like this for the proposals of alternative theories to the theory of the general relativity of Einstein. one of these theories is the so-called theory $F(T)$ consisting of the modification.

Studying phenomena from theories of modified gravity, instead of the classical perspective of relativity, helps to have a better understanding of the behavior and conditions necessary to generate more realistic wormholes that minimize the use on matter and exotic energy.

On the other hand, the fascination with time travel has led to the theoretical proposal of geoemetric entities that can allow this within the framework of the theory of general relativity. Although for such a case the violation of the null energy condition is required. These objects known as wormholes were raised decades ago, although its boom occurred after Thorne's proposal resulted from the dialogue with Carl Sagan. In this paper we present the construction of a wormhole with zero scalar curvature in theory $f(T)$, The construction of this is carried out by solving the equations for a static time and spherically symmetric space. It is shown that the asymptotic regions of the space-time that connects the wormhole is asymmetrically flat, even though the density and the radial and tangential pressures are constant, I do not think, in the infinite region. Additionally, state equations $P_r = P_r(\rho)$ and $P_t = P_t(\rho)$ are deducted for the matter that can be formed by the wormhole.
Keywords: Asymptotic regions, radial and tangential presures and wormhole, space-time spherical, exotic matter and geodesic.

Índice general

Capítulo 1

Introdución

Los agujeros de gusano transitables en el espacio tiempo son soluciones al campo de ecuaciones de Einstein que violan las condiciones clásicas de energía y son primeramente usados como una prueba teórica de los fundamentos de la relatividad general. Los agujeros son obtenidos por resolver el campo de ecuaciones de Einstein, consideramos una interesante y exótica métrica del espacio-tiempo, entonces se encuentra la fuente responsable de la materia exótica para la respectiva geometría y es interesante notar que esto permite el viaje efectivo super luminal a pesar de que la velocidad de la luz no ha sido sobrepasada localmente y genera curvas de tiempo cerradas con las casualmente asociadas violaciones de las condiciones de energía.

Los agujeros de gusano físicos fueron originalmente tratados por Flamm en 1916 donde da conclusiones a las soluciones de Schwarzschild. Flamm lo primero que hace de acuerdo con [10] es relacionar las soluciones del exterior vació estático y esfericamente simétrico y lo segundo es relacionado a las soluciones del interior de un fluido incompresible relativista, el muestra que atraves de un plano equatorial la sección espacial de las soluciones interiores de Schwarzschild posee la geometría de una porción de la esfera. Flamm también muestra que la superficie de revolución es isométrica a una sección plana de la solución exterior de Schwarzschild y considera que las curvas meridionales son parábolas cuya superficie de revolución une dos planos asintóticamente, sin embargo el no contemplaba la posibilidad de que la solución fuese un puente o agujero de gusano.

El concepto de puente conectando dos espacios-tiempo se remonta a los trabajos de Einstein y Rossen en 1935 cuando publicaron un articulo titulado El problema de la partícula en la teoría general de la relatividad. En donde mostraron un modelo geométrico de una partícula física elemental y representaron el espacio físico por un espacio de dos hojas idénticas y así la partícula era representada por un puente conectando las hojas lo cual dio lugar al primer modelo de agujero de gusano llamado puente Rosen-Einstein, fueron quienes construyeron una solución exacta a las ecuaciones correspondientes de los espacios-tiempo unidos por un túnel, esto también puede ser relacionado con los trabajos de Flamm quien como ya mencionamos fue el primero en construir una isometria unida de la solución de Schwarzschild. La motivación de Eintein-Rosen fue construir un modelo de partículas elementales que uniera dos laminas idénticas por un puente. En particular Einstien y Rosen propusieron que cierto cambio de sistema de coordenadas cubre solo dos regiones planas asintóticamente del espacio tiempo maximal extendido de Schwarzschild. El puente es teóricamente un artefacto coordinado de cambio de coordenadas en los parches o laminas que es definido en una doble cubierta de regiones asintóticamente planas al exterior.

En 1955 Wheeler en su trabajo acerca de los geones adjunta el primer diagrama de un agujero de gusano. Jhon Wheeler junto a Misner fueron los primeros en mostrar interés en topologia y formas diferenciales asociadas a la relatividad general, específicamente en múltiples conexiones del espacio-tiempo donde dos regiones separadas son unidas por un puente e introducen el termino con el que se les conoce a estos túneles, los llamaron agujeros de gusano haciendo una analogía entre nuestro universo y la superficie de una manzana enunciando que el gusano viaja más rápido entre dos puntos de la manzana haciendo un agujero que viajando sobre la superficie.

Los agujeros de gusano tomaron auge a raíz de las soluciones propuestas por Morris y Thorne quienes analizaron las condiciones que deberían cumplirse para tener un agujero de gusano con la geometría que permita el paso entre las regiones asintóticamente planas del agujero. Aunque las soluciones de Morris y Thorne son perfectamente validas para el campo de ecuaciones de Einstein causan controversia ya que dependen de la violación de las condiciones de energía es decir usan materia exótica, cuyo requerimiento reduce la probabilidad de la existencia natural de que ocurra un agujero de gusano si nos adherimos a la relatividad general, entonces la alternativa más natural serian las teorías de gravedad modificada. El agujero de gusano Morris-Thorne son analizados en diversas teorías Onur et al. [5] investiga un ecuación general de movimiento para la geometría del agujero de gusano Morris-Thorne, utilizando el campo de ecuaciones de Einstein y las ecuaciones de Gordon-Klain para el análisis en la teoría tensorial escalar mediante cálculos directos, en una distribución anisotropica de energía-materia y determina la relación entre los componentes de la presión radial y tangencial , expresando la energía anisotropica en términos del tensor momento-energía, concluyendo que no es un agujero de gusano transitable los cuales son discutidos y utilizados ampliamente como un ejemplo teórico de la relatividad y en modelos de gravedad modificada Kuhfitting en [9] discute la posibilidad de que existan agujeros de gusano transitables en gravedad $f(R)$ asumiendo una geometría no conmutativa con una función forma especifica para determinar la solución correspondiente al agujero y sus propiedades, también deriva las funciones de gravedad modificada y muestra la violación de las condiciones de energía que puede ser atribuido a los efectos combinados de la gravedad $f(R)$ y el tipo de geometría que utiliza.

Analizaremos lo agujeros de gusano estáticos y esféricamente simétricos, sin embargo en la literatura encontramos publicaciones cuyas soluciones son para agujeros dinámicos tal como en [15] donde trabajan con una solución para estos agujeros dinámicos en gravedad Einstein-Cartan con una función de corrimiento al rojo gravitación constante, cuya materia contenida es un fluido de Wyssenhoff con materia anisotropica que generalizan al tensor de energía-momento anisotropico en relatividad general. El espacio que consideran es una generalización del Friedmann-Robertson-Walker y derivan analíticamente la envolvente de la geometría del agujero asumiendo una ecuación particular de estado para la densidad de energía y presión, para los espacios-tiempo asintóticamente planos que admiten agujeros transitables.

Agujeros de gusano de los cuales los esféricamente transitables son analizados en presencia de materia exótica la cual tiene energía negativa y violan todas las condiciones de energía . La existencia de este tipo de materia comienza a ser discutible dada la observación de la expansión acelerada del universo la cual es explicada mediante efectos antigravitacionales de la energía obscura que también viola las condiciones de energía . Nuestro universo nos maravilla con fenómenos sorprendentes que frecuentemente nos dejan cuestiones abiertas debido a su naturaleza misteriosa. La existencia de geometrías hipotéticas es considerada la parte más debatible de la geometría del agujero de gusano. Un agujero de gusano es es estructura definida a través de un puente hipotético que conecta suavemente dos regiones de un universo o conecta dos distintos universos solo si existe la materia exótica. La existencia de agujero de gusano físicamente viables es cuestionable dada la presencia de materia exótica es decir para un modelo realista de agujero de gusano el uso de materia exótica debería de ser minimizado, por otro lado el problema más crucial es el análisis de estabilidad que define su comportamiento bajo perturbaciones.

La teoría $f(T)$ es la generalización de la teoría tlelparallela, que atrajo gran cantidad de investigadores para explorar estos objetos en diferentes escenarios cosmologicos . Böhmer estableció soluciones de agujeros de gusano estáticos transitables en gravedad $f(T)$, encontró algunas condiciones generales en la garganta del agujero de gusano e investigó el comportamiento de las condiciones de energía para un particular modelo $f(T)$ con funciones forma y de corrimiento al rojo gravitacional para la geometría del agujero de gusano. El concluyo que las soluciones estáticas del agujero de gusano existen en gravedad $f(T)$ donde las condiciones de energía se mantienen.

Jamil estudia las soluciones del agujero de gusano estático y esfericamente simétrico en los casos barotropico, isotropico y anisotropico. Obtiene que las condiciones de energía son violadas en el caso anisotropico mientas esto se satisface para los otros dos casos. También formula soluciones viables para un agujero de gusano en un modelo $f(R)$ considerando una función forma particular en una geometría no conmutativa.

Existe una amplia literatura científica sobre el estudio de los agujeros de gusano en teorías de gravedad modificada en [11] consideran que las observaciones modernas cosmologicas así como la teoría existente hacen posible creer en la expasión acelerada del universo, así como recientes experimentos indican que la expansión debería estar dada por alguna enigmática fuerza con efectos antigravitacionales conocida como energía obscura, de las que hay una gran cantidad de propuestas para explicar su naturaleza ambigüa. La gravedad $f(R)$ establece una de las muchas propuestas reemplazando la parte geométrica de la acción de Hilbert-Einstein cuya función depende del escalar de Ricci R lo que da un campo de ecuaciones no lineal en donde se pueden evaluar soluciones exactas.

El estudio de soluciones exactas para ciertos escenarios es utilizado para explorar aspectos de la evolución cósmica. Sharif y Shamir construyeron soluciones exactas para el no vació tan bueno como el vació para un modelo de universo de Bianchi en gravedad $f(R)$. Gutiérres-Piñeres y López-Monsalvo evaluaron soluciones exactas del vació para un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico en alguna gravedad y encontraron la solución correspondiente a una singularidad. Por otro lado Gao y shen encontraron un nuevo método para formular soluciones exactas de una métrica estática y esfericamente simétrica y analizaron horizontes, singularidades y marcos de Einstein. Mazharimousavi y Halilsoy encontraron una solución cerca de la graganta del agujero de gusano de un modelo $f(R)$ que admite expansión polinomial y también satisface las condiciones necesarias para el agujero de gusano.

La investigación en el campo de los agujeros de gusano en modelos de gravedad modificada atrajo una gran cantidad de investigadores desde la aparición de los primeros artículos, podemos encontrar todo tipo de variantes en [22] Moraes y sus colegas analizan un agujero de gusano cargado en teoría $f(R, T)$ extendida de gravedad, muestran las condiciones de estabilidad respecto a la métrica junto con las condiciones de energía y así presentar una aproximación. Por otro lado Shamir y Zia en [26] estudian la existencia de geometrías para agujeros de gusano transitables en teoría $f(R, G)$ de gravedad modificada donde R, G es el escalar de Ricci y el escalar de Gauss-Bonnet respectivamente para fluido anisotropico, fluido isotropico y barotropico al igual que discuten las condiciones de energía para pequeñas regiones donde existen las soluciones del agujero, M. Zubair y sus colegas en [12] igualmente analizan los tres tipos de fluido considerados por Shamir, para un agujero de gusano estático y esfericamente simétrico en gravedad generalizada $f(R, \phi)$.

La existencia de agujeros de gusano transitables es tratada en gran parte de la literatura para estos objetos como en [14] que analizan las soluciones de Schwarzschild junto con las condiciones necesarias para su transitabilidad o en [7] en cuyo articulo examinan la existencia de soluciones para agujeros transitables en gravedad modificada y encuentran soluciones no triviales en ausencia de superficies de materia lo que se opone a la relatividad general donde las superficies de materia violan las condiciones de energía.

La esencia de la teoría de la relatividad contiene afirmaciones que formulamos a inicio del capitulo 2. El espacio tiempo es una carta cuatro dimensional en que se define una métrica g_{ab} que es la métrica de Lorentz como es mostrado en [30], esta métrica es relacionada a una distribución de materia en el espacio tiempo por la ecuación de Einstein $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$. Una de las cuestiones de esta teoría es decir que soluciones de las ecuaciones de Einstein describe el espacio-tiempo observado, estas soluciones nos ayudan a hacer observaciones concernientes a la dinámica de evolución de nuestro universo, también ayuda a investigar la estructura del mismo en relatividad general se asume que el universo es homogéneo e isotropico. En cosmologia es muy difícil formular teorías que apelen solo a los datos observacionales, el tiempo de vida de nuestra civilización tiene acceso observacional solo a una pequeña región de nuestro universo en palabras de Robert Wald [30], mas sin embargo los telescopios nos proporcionan observaciones a otras escalas en términos cósmicos pero solo proporcionan observaciones de una porción de nuestro cono de luz del pasado. Desde los tiempos de Copernico se asumió que no tenemos una posición privilegiada de en el universo, si nos localizamos en una región diferente del universo es decir que es natural asumir que nuestro universo es isotropica, no hay direcciones preferenciales en el espacio, así las observaciones gran escala no deberían depender de la dirección en que se ve. La homogeneidad e isotropia esta fuertemente confirmadas de las observaciones modernas de las distribuciones de galaxias que forman cúmulos estas distribuciones son homogéneas e isotropicas. una formulación mas precisa de esto es lo siguiente tomado de [30]: un espacio-tiempo es espacialmente homogéneo si existe una familia de parámetros de hypersuperficies espaciales Σ_t, así para cada t y para cualesquiera puntos $p, q \in \Sigma_t$ existe una isometria de la métrica del espacio-tiempo g_{ab} que toma p en q. Un espacio-tiempo se dice que es isotropico en cada punto si existe una congruencia de las curvas de tiempo con tangentes denotadas por u^a.

1.1. Puente de Einstein Rosen

El puente de Einstein Rosen sin carga no es más que la observación de situar la carga en una coordenada para hacer que la singularidad desaparezca. Ahora el tiempo de Einstein Rossen donde escribimos la noción de singularidad coordenada y singularidad física. Entendemos el comportamiento de la geometría de Schwarzchild en la vecindad del horizonte de eventos. Algunos sistemas de coordenadas naturalmente cubren sollas dos regiones asintóticamente planas del espacio-tiempo maximal extendido de Schwarzschild. La región interior contiene la singularidad de la curvatura de Schwarzschild y esta no es cubierta por el sistema de coordenadas isotropicas. Consideremos la geometría ordinaria de Schwarzschild adoptando unidades geometrodinamicas. En coordenadas Schwarzschild

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2 d\Omega^2 \tag{1.1}$$

haciendo el cambio de coordenadas $u^2 = r - 2M$ esto puede ser puesto en la forma de Einstein Rosen

$$ds^2 = -\frac{u^2}{u^2 + 2M}dt^2 + 4(u^2 + 2M)du^2 + (u^2 2M)d\Omega^2 \tag{1.2}$$

con $u \in (-\infty, \infty)$. Este cambio de coordenada descarta la región que contiene la singularidad $r \in [0, +\infty]$ y dos cubiertas de regiones asintóticamente planas, $r \in [2M, +\infty]$. La región cerca de $u = 0$ es interpretada como un puente que conecta las dos regiones asintóticamente planas cerca de $u = +\infty$ con la región asintoticamente plana cerca de $u = -\infty$. Para justificar esta apelación consideremos una superficie esférica tomando la coordenada u como una constante, el área de esta superficie es $A(u) = 4\pi(2M + u^2)^2$ esta área es un mínimo en $u = 0$ con $A(0) = 4\pi(2M)^2$ uno define esta parte de la geometría como la garganta mientras que la región cercana es llamada el puente. Notamos que la construcción de Einstein Rosen no trabaja si $M < 0$. La construcción requiere la existencia de un horizonte para el conjunto de transformación de coordenadas. La masa negativa para la solución de Schwarzschild tiene una singularidad y la construcción del puente falla este es el puente neutral de Einstein Rosen, también llamado agujero de gusano de Schwarzschild ya que es idéntico a la parte maximal de la geometría extendida de Schwarzschild. La coordenada u de Einstein Rosen es una mala coordenada en el horizonte. Para cruzar el horizonte tomamos $u = +\epsilon, u = -\epsilon$ y forzamos al parche de coordenadas en la singularidad Kruskal-Szekeres.

Para generalizar las construcción del puente, meramente consideramos una geometría simétrica arbitraria que posee un horizonte de eventos y no tiene una forma especifica de materia en el horizonte, entonces la métrica puede ser escrita en la forma:

$$ds^2 = -e^{\phi(r)}[1 - b(r)/r]dt^2 + \frac{dr^2}{1 - b(r)/r} + r^2 d\Omega^2 \tag{1.3}$$

El horizonte ocurre en $r = r_H$ donde r_H es definida por la ecuación $b(r_H) = r_H$, ahora introducimos la coordenada u por $u^2 = r - r_H$

$$ds^2 = -e^{-\phi(r_h+u^2)}\frac{r_H + u^2 - b(r_H + u^2)}{r_H + u^2}dt^2 + 4\frac{r_H + u^2}{r_H + u^2 - b(r_H + u^2)}u^2 du^2 + (r_H + u^2)^2 d\Omega^2$$

cerca de la región $u = 0$ es la conexión del puente a la región asintóticamente plana cerca de $u = \pm\infty$. Cerca del horizonte puente uno tiene $r \approx r_H$, y $u \approx 0$ así que:

$$ds^2 - e^{-\phi(r_H)}\frac{u^2[1 - b'(r_H)]}{r_H}dt^2 + 4\frac{r_H + u^2}{1 - b'(r_H)}du^2 + (r_H + u^2)^2 d\Omega^2 \tag{1.4}$$

esta métrica es cualitativamente de la misma forma como el puente neutral de Rosen Einstein, fácilmente podemos introducir constantes A, B y reescribir la métrica como:

$$ds^2 \approx -A^2u^2dt^2 + 4B^2(u^2 + r_H)du^2 + (u^2 + r_H)^2 d\Omega^2 \tag{1.5}$$

Esto muestra que el ingrediente clave para construcción de puentes es meramente la existencia de un horizonte. Lejos del puente $u \to \pm\infty$, asintóticamente plano implica que $\phi(r) \to 0$ y $b(r) \to 2m$

$$ds^2 \approx -\frac{r_H - 2m + u^2}{r_H + u^2}dt^2 + \frac{4(r_H + u^2)u^2}{r_H - 2m + u^2}du^2 + (r_H + u^2)^2 d\Omega^2 \tag{1.6}$$

El puente de Einstein Rosen solo es un artefacto de cambio de parches de coordenadas especiales. Este parche de coordenadas es definido como una doble cubierta a la región exterior asintóticamente plana al horizonte de eventos del agujero negro. Este es el primer ejemplo de una geometría que conecta dos regiones.

Por otro lado el caso de teorías $f(T)$ ha sido aplicado en diferentes áreas de gravitación, por ejemplo en modelos cosmologicos podemos hacer mención del trabajo de Behrouz Mirza y Fatemeh Oboudiat [16] quienes formulan su modelo en gravedad $f(T)$ y muestran que la construcción de una teoría memetica en gravedad teleparalela requiere una transformación en la métrica de Minkowsky del espacio tangente. Argumentando que el grado de libertad comforme en esta teoría mimetica teleparallela viene dada dinamicamente cuyo comportamiento describiría la materia obscura. También muestran que es posible emplear el método de los multiplicadores de Lagrange para formular la teoría mimetica en una teoría $f(T)$ sin cualquier métrica auxiliar. La teoría $f(T)$ mimetica es examinado por el método de sistemas dinámicos y encuentran que tiene cinco puntos fijos representando la inflación, radiación, materia, mimetica de la materia obscura y la energía obscura también comprueban que algunas condiciones son satisfechas.

Examinado el trabajo de Emmanuel N. Saridakis y sus colegas vemos que utilizan la teoría $f(T)$ en retratos de fase de cosmologia general $f(T)$ [6] en el articulo utilizan métodos de sistemas dinámicos para explorar el comportamiento general de cosmologia $f(T)$, en contraste a las aplicaciones de análisis dinámico y presentan la transformación de ecuaciones en un sistema autónomo uno-dimensional tomando la propiedad de torsión escalar en una geometría plana que es solo una función en función de la de Hubble así el campo de ecuaciones incluye solo primeras derivadas y por lo tanto en un escenario cosmologico general $f(T)$ cualquier cantidad es expresada solo en términos de la función de Hubble. Podemos ver que la mayor ventaja de un sistema uno-dimensional que es fácilmente construir el retrato del espacio fase y así extraer información para explorar a detalle el posible comportamiento de cosmologia $f(T)$. Utilizan el retrato del espacio fase y muestran que las cosmologia $f(T)$ puede describir la evolución del universo de acuerdo a las observaciones llamando al inicio del big-bang como una singularidad, envuelto en suubsecuente historia térmica y el dominio de materia entrando en un retardo del tiempo acelerado la expansión y resulta en modelo de fase en un futuro lejano. La cosmologia $f(T)$ puede presentar una rica clase de comportamientos mas exóticos, así como un rebote cosmologico y un giro de vuelta, una división fantasma cruzada, el Big-brake y el big-crunch, esto debería exhibir varias singularidades.

Oikonomou en [20] estudia la viabilidad de un escenario de inflación intermedia con gravedad $f(T)$ examina esta viabilidad calculando el espectro de poder de las perturbaciones primordiales de curvatura y el correspondiente indice espectral, demuestra que es posible para los resultados del indice espectral que son compatibles con los datos observacionales, al igual que investiga el parámetro espacial en orden para ver cuando la compatibilidad con los datos es posible.

Por otro lado en la literatura existen estudios sobre agujeros negros en teorías $f(T)$

por ejemplo [18] estudia los agujeros negros esfericamente simétricos (1 + 4)-dimensional en teoría $f(T)$, considera soluciones del no-vació esfericamente simétricas en un espacio-tiempo (1 + 4) dimensional, las cuales son derivadas usando el campo de ecuaciones de la teoría $f(T)$ donde T es la torsión escalar definida como $T = T^{\mu}_{\nu\rho}S_{\mu}^{\ \nu\rho}$. Las densidades de energía, la presión radial y tangencial en estas soluciones se muestra que satisfacen las condiciones de energía. Obtienen interesantes soluciones bajo la restricción de la presión radial para diferentes cambios en $f(T)$, estas imposiciones proveen una reproducción de las soluciones de Schwarzschild $(1+4)$ dimensionales. También analizan el caso cuadrático es decir $f(T) \approx T^2$.

Otro modelos cosmologico $f(T)$ es propuesto por [3] cuyo modelo de gravedad $f(T)$ teleparallela es utilizado para tratar de explicar la núcleo síntesis que ocurrió en el big-bang, usan los datos experimentales de esta núcleo síntesis donde primordialmente abunda el He, para construir la gravedad $f(T)$. estudian tres variedades de modelos $f(T)$ leyes de potencias, la exponencial y la raíz cuadrada de la exponencial son considerados y las cotas de la núcleo síntesis del big bang son adoptados en orden para extraer las restricciones en sus parámetros libres.

Múltiples y muy variados son el tipo de escenarios cosmologicos que son analizados en teorías $f(T)$ citando a Ayman [1] sobre el comportamiento del modelo $f(T)$ de energía obscura en cosmologia fractal donde en el modelos de gravedad modificada es considerado en un marco de referencia de un espacio-tiempo fractal, asume que solo el tiempo es fractal mientras que las coordenadas espaciales tienen su descripción geométrica normal, el parámetro de Hubble H, la densidad de energía obscura ρ, el parámetro de des aceleración q, la presión P y el parámetro de estados encontrados r y s en cuyo trabajo muestra que sus resultados son congruentes con observaciones recientes. por otra parte Yi-Fu [32]y su equipo analizan un escenario cosmologico con gravedad teleparallela $f(T)$ revisan varias construcciones de torsión de teleparallel a Einstein-Cartan adjuntas a diversas métricas resultando en diversas gravedades torsionales extendidas en los paradigmas de la gravedad $f(T)$. basados en esta teoría realizan una correpondencia para aplicaciones cosmologicas y astrofisicas , en particular estudian soluciones cosmologicas en gravedad $f(T)$ con diferentes niveles de perturbación en las lineas temporales de la expansión cósmica . Obtienen que su construcción en gravedad $f(T)$ puede proveer de una interpretación teórica a la aceleración temporal del universo que es alternativo a la constante cosmologica esto puede fácilmente encajar con la historia térmica de la expansión , radiación y puede dominar fases de la materia obscura, al igual que en este trabajo analizan de espacio-tiempo esfericamente simétrico y agujeros negros y discuten la extensión del paradigma $f(T)$ con otras teorías de gravedad modificada basadas en curvatura en especial $f(R)$. Podemos encontrar en la literatura variados escenarios como la de agujeros negros en teorías de gravedad $f(T)$ junto con análisis termodinámicos como en el articulo publicado por Nashed [19] al igual que nosotros utilizan un campo de ecuaciones modificado para gravedad $f(T)$ haciendo un análisis similar sustituyen las soluciones en el campo tetrad y hacen un cambio de coordenadas para calcular la torsión escalar asumiendo que es constante y así muestra que el valor de $N(r,\theta,\phi)$ es una solución de de las teorías de gravedad $f(T)$ con algunas restricciones en sus primeras derivadas. En la literatura podemos encontrar estudios de la interacción de algún fluido con energía obscura en teoría $f(T)$, como podemos ver en [24]. Otro ejemplo de la amplia gama de aplicación de teoría $f(T)$ lo podemos observar en la solución de agujeros negros citando a Rodriguez [23].

Un tema relevante que debemos de entender son los agujeros de gusano en anti de Sitter citando a Liat Maoz [13] donde trata unos pocos ejemplos de agujeros de gusano euclidianos con anti de Sitter asintótico en geometrías completamente regulares y cuyas soluciones son de diez a once dimensiones de super gravedad. Donde para entender estas geometrías se adentra en entender la naturaleza cuántica de la gravedad para dar nuevas interpretaciones de la cosmologia. En [8] Subeom y Yeom desarrollan una investigación de agujeros de gusano euclidianos hechos por un borrado instantáneo, también investiga un parche integral en el espacio anti de Sitter y en gravedad de Einstein introducen un campo escalar con un potencial no trivial, después de la continuidad analítica para el tiempo Lorentziano, entonces la garganta de agujero de gusano se debería expandir al infinito. Sharif en [27] investiga Schwarzschild- de Sitter, anti de Sitter y su estabilidad, desarrollan la construcción mediante el corte y pegado de Visser. Para el análisis de las condiciones de energía nulas y débiles con características repulsivas y atractivas, concluyendo que el tensor de momento-energía viola las condiciones de energía indicando la existencia de materia exótica en la garganta del agujero de gusano. Por otro lado Garay [2] explica los efectos asintóticamente anti-de Sitter de los agujero de gusano en campo de bajas energías que calculan con completo detalle para tres diferentes componentes de materia.

Motivados por lo anterior en este trabajo nos centramos en la construcción de un agujero de gusano en un espacio-tiempo estático y esfericamente simétrico con fluido anisotropico en teoría $f(T)$. La existencia de agujeros de gusano requiere de la violación de la condición nula de energía en la vecindad de la garganta, este tipo de comportamiento también esta presente en el caso de cosmologia, que como se sabe de datos observacionales, para el modelo que describe la aceleración del universo requiere la existencia de materia o energía exótica. Esto implica que tengamos la posibilidad de existencia de agujeros de gusano dada la existencia cosmologica de materia o energía exótica. Por otro lado la teoría de la relatividad de Einstein no es la única que ha pasado la serie de predicciones y pruebas a las que se ha sometido a través de observaciones. Incluso su idea de un espacio-tiempo de cuatro dimensiones esta en discusión, en un experimento reciente [33] se ha abierto la posibilidad de que local mente existan cuatro dimensiones espaciales y una temporal. Lo anterior seria más consistente con teorías de dimensiones extras. En este trabajo abordamos la construcción de un agujero de gusano a través de la teoría $f(T)$. El trabajo es organizado como sigue en el capitulo dos sobre las ecuaciones de campo comenzamos dando una breve introducción a la relatividad general comenzando por recordar los marcos de referencia inerciales y sus ecuaciones para poder enunciar y entender los postulados de la relatividad general y así poder describir mejor la teoría $f(T)$ y hacer una comparación del alcance de esta con la teoría de la relatividad. Posteriormente comenzamos a escribir la ecuaciones que describen la geometría de nuestro espacio-tiempo y hacer la relación entre las propiedades del la geometría y el tensor de momento-energía que nos proporciona el campo de ecuaciones para nuestro problema. Para este campo de ecuaciones tomamos la curvatura escalar cero. En el tercer capitulo describimos la construcción de nuestro agujero de gusano, continuamos con la poniendo nuestras ecuaciones en un espacio tiempo estático y esfericamente simétrico, transformando las ecuaciones en para la densidad, presión radial y tangencia en al campo de ecuaciones de la teoría $f(T)$, para resolver este sistema de ecuaciones utilizamos paquetera para calculo tensorial (Maple). una vez que obtenemos las soluciones empezamos a analizar las condiciones de regularidad, para nuestro problema ya que no interesa explicar el comportamiento de nuestro sistema, más concretamente tratamos de explicar cuando las solución tiene singularidad u horizonte para saber si es transitable y así saber si se puede usar para viajes interestelares. Por ultimo se demuestra la existencia de la garganta analizando las condiciones de energía necesarias para que la garganta se mantenga abierta aun cuando tenga perturbaciones de materia no exótica. Terminamos describiendo la importancia de las regiones asintóticas para nuestro agujero de gusano. Un ejemplo visual de los agujeros de gusano transitables lo podemos observar en la película interestelar cuyas animaciones visuales fueron fabricadas en un contexto teórico fuerte cuyo análisis esta en [21].

Capítulo 2

Las Ecuaciones de Campo

Estudiamos las soluciones de un agujero de gusano estático y esfericamente simétrico en gravedad $f(T)$ donde T representa la torsión escalar. se presenta la expresión para los componentes de materia así como la densidad de energía, la presión radial y la presión tangencial del campo de ecuaciones. Discutimos el comportamiento de las condiciones de energía para las soluciones del agujero de gusano con la conocida $f(T)$ y la función forma para ver cuales son las soluciones físicamente aceptables del agujero de gusano estático . La construcción teórica de los agujeros puede hacerse por copias de regiones asintóticas, el otro tipo de construcción es mediante la conexión de regiones asintoticas por una garganta En este capitulo describimos brevemente la teoria de la Relatividad General de Einstein y damos algunos elementos de la teoría $f(T)$

2.1. Postulados de la Relatividad General

Consideramos dos eventos tal como en [25] cap 1, las diferencias $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ entre cualesquiera coordenadas de $\mathcal{E}$ y $\mathcal{P}$ en algún marco satisface la relación $-(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = 0$ entonces la velocidad de la luz es 1, pero por la universalidad de la velocidad de la luz las diferencias entre coordenadas de cualesquiera dos eventos en las coordenadas de $\hat{O}(\Delta\hat{t}, \Delta\hat{x}, \Delta\hat{y}, \Delta\hat{z})$ también satisfacen $-(\Delta\hat{t})^2 + (\Delta\hat{x})^2 + (\Delta\hat{y})^2 + (\Delta\hat{z})^2 = 0$. para definir el intervalo entre cualesquiera dos eventos deberíamos de definirlo por

$$\Delta s^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \tag{2.1}$$

para algunos dos eventos usamos las coordenadas en O y $\hat{O}$ y asumimos que la relación entre las coordenadas de O y $\hat{O}$ en lineal es decir que los eventos $\hat{t} = \hat{x} = \hat{y} = \hat{z} = 0$ y $t = x = y = z0$ es el mismo entonces la expresión para $\Delta\hat{s}^2$ y los números $(\Delta\hat{t}\cdots)$ son combinación lineal de sus contrapartes sin barra lo que significa que $\Delta\hat{s}^2$ es una función cuadrática de los incrementos de las coordenadas sin barra entonces podemos escribir

$$\Delta\hat{s}^2 = \sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta}^{3} M_{\alpha\beta}(\Delta x^{\alpha})(\Delta x^{\beta}) \tag{2.2}$$

para algúnos números $M_{\alpha\beta}; \alpha\beta = 0, \cdots, 3$ que son funciones de la velocidad relativa de dos marcos. Si suponemos que $M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}$ entonces la suma $M_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta}$ nunca aparece en la ecuación (1.2) para el caso en que $\alpha \neq \beta$ suponemos que $\Delta s^2 = 0$, así que de la ecuación (1.1) tenemos

$$\Delta t = \Delta r \tag{2.3}$$

para $\Delta t > 0$ y sustituyendo en la ecuación (1.2)

$$\Delta\hat{s}^2 = M_{00}(\Delta r)^2 + 2(\sum_{i=1}^{3} M_{0i}\Delta x^j)\Delta r + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} M_{ij}\Delta x^i \Delta x^j \tag{2.4}$$

Es fácil ver que $M_{0j} = 0$ y $M_{ij} = -(M_{00}\delta_{ij})$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. De esto y de la ecuación (1.2) concluimos que

$$\Delta\hat{s}^2 = M_{00}[(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2] \tag{2.5}$$

Si definimos la función $\phi(v) = -M_{00}$ lo que de acuerdo con [25], cap 1.

La universalidad de la velocidad de la luz implica que los intervalos Δs^2 y $\Delta\hat{s}^2$ entre cualesquiera dos eventos como computados por diferentes observadores satisface la relación.

$$\Delta\hat{s}^2 = \phi(v)\Delta s^2 \tag{2.6}$$

Cuando $\phi(v) = 1$ estaríamos afirmando que el intervalo es independiente del observador. En particular una evento $\mathcal{A}$ al cual asociamos un cono de luz, todos los eventos de $\mathcal{A}$ en el cono de luz son separados por el tiempo los cuales pueden ser investigados,más sin embargo esto no es así fuera del cono. Los eventos en el cono de luz son las cotas del pasado y futuro absolutos. Así a través del espacio-tiempo pueden ser transformados en uno y otro.

Una importante propiedad de un marco inercial es que una partícula permanece en descanso si no actuá una fuerza sobre esta, ordinariamente la gravedad es considerada como una fuerza, todos los cuerpos dada la velocidad inicial siguen la misma trayectoria en un campo gravitacional.

Consideremos el espacio vació libre de gravedad, siguiendo las palabras de [25] cap 5, una aceleración uniforme de la partícula desde el punto de vista de un observador dentro de esta parece un campo gravitacional en la nave sin importar composición interna. La gravedad debe ser proporcional a la masa del objeto, de acuerdo con [25] los campos generacionales son verdaderos marcos inerciales y son equivalentes a marcos de aceleración relativa a marcos inerciales. Este es el principio de equivalencia entre gravedad y aceleración lo cual remontándonos Históricamente Newton y Galileo debieron usar diferentes palabras para los fundamentos de gravedad Newtoniana:

- Principio de equivalencia débil : las partículas en caída libre se mueven en una geodésica temporal del espacio-tiempo.
- Principio de equivalencia de Einstein: cualquier experimento físico local que no involucre gravedad debería tener el mismo resultado tal como en un marco inercial en caída libre en espacio-tiempo de relatividad especial.

Albert Einstein fue quien dedujo la relación entre la curvatura del espacio-tiempo y la distribución de masa-energia de un cuerpo en el espacio, las ecuaciones de campo explican este tipo de comportamiento las cuales son $G_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta}$, donde G es la constante cosmologica y $T_{\alpha\beta}$ es el tensor de momento energia:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} \tag{2.7}$$

aquí $R_{\alpha\beta}$ es el tensor de curvatura, R el escalar de Ricci. Tal como mencionamos en la introducción el espacio-tiempo es una carta cuatro dimensional equipada con una metrica Lorentziana $(-, +, +, +)$. Esto nos indica que podemos represntar el espacio-tiempo con diferentes formas geometricas de las que obtenemos un elemento de linea para operar en el espacio. Apoyandonos de un lenguaje más formal esto equivale a dar una variedad de Riemann M conexa completa, conexa con curvatura constante κ es isometrica a espacios eucludeanos cuando $\kappa = 0$, esferico si $\kappa > 0$ y hiperbolico si $\kappa < 0$. Por lo que es importante en relatividad general obtener la primera forma fundamental

$$I \equiv ds^2 \tag{2.8}$$

y para el caso eculideo la metrica inducida por el espacio ambiente en $\mathbb{R}^3$ en el que las superficies pueden ser embebidas a partir de su parametrización, una parametrización f es una union y g es la metrica del espacio ambiente entonces $f * g$ es una variedad proponemos el siguiente cambio de coordenadas:

$$S(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \tag{2.9}$$

para la primer forma fundamental obtenemos

$$I(u, v) = E(u, v) du \otimes du + F(u, v) du \otimes dv + G(u, v) dv \otimes du + H(u, v) dv \otimes dv \tag{2.10}$$

es lo mismo que

$$ds^2 = g_{00} du^2 + g_{10} dudv + g_{01} dvdu + g_{11} dv^2 \tag{2.11}$$

que se puede reducir a $ds^2 = \sum_{i=0}^{1} g_{ij}du^i dv^j$ y calculando el vector normal, la segunda forma fundamental obtenemos la curvatura escalar que para este espacio, nos resulta como dijimos anteriormente $\kappa = 0$

Que son todos estos alphas y betas?- Se que esto no puede ser tan simple como se mira.
Albert Einstein.

2.2. Espacio Tiempo Estático y Esfericamente Simétrico

Consideramos sistemas esfériacamente simétricos los cuales son razonablemente simples, muchos objetos anisotropicos parecen estar cerca de ser objetos esféricos por lo cual cambiamos el sistema de coordenadas para reflejar la simetría asumida.

Definido por las coordenadas usuales (r, θ, ϕ), el elemento de linea del espacio de Minkowski puede ser escrito como de acuerdo con Schutz [25] cap. 10

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{2.12}$$

cada superficie de r y t es un 2-esfera constantes es una 2-esfera o superficie dos dimensional esférica. Las distancias a través de las curvas confinadas en la esfera esta dada por la siguiente relación con $dt = dr = 0$

$$dl^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi) := r^2 d\Omega^2 \tag{2.13}$$

con r^2 independiente de θ y ϕ tiene la geometría intrínseca de la 2-esfera, así notamos que la esfera tiene una circunferencia $2\pi r$ y área $4\pi r$ es decir dos 2π veces la raíz cuadrada de los coeficientes de $d\Omega^2$ y 4π veces los coeficientes de $d\Omega^2$ respectivamente. Cada 2-esfera con el elemento de linea en el cual r^2 es independiente de θ, ϕ y tiene la geometría intrínseca de la 2-esfera.

La afirmación que un espacio-tiempo es esfericamente simétrico implica que cada punto del espacio-tiempo es una 2-esfera es decir que el elemento de linea es

$$dl^2 = f(r', t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi) \tag{2.14}$$

donde $f(r', t)$ es una función desconocida y definimos la coordenada radial r de nuestra geometría esférica así que $f(r', t) := r^2$ esto representa una transformación de coordenadas de (r', t) a (r, t) a r la llamaremos coordenada de curvatura ya que define el radio de curvatura o el área de la esfera, esto no es una relación entre r y la distancia propia del centro de la esfera a la superficie esta r es definida solo por las propiedades de la esfera en si misma con sus centros en $r = 0$ en espacios planos no son puntos en la esfera misma. El espacio consiste de dos lados que son unidos por una garganta pero los puntos en este eje que son los centros de los círculos no son parte de la superficie 2-dimensional.

Consideremos la esfera en r y $r + dr$, cada una tiene su sistema de coordenadas (θ, ϕ). Concebimos que el polo para la esfera en r tiene una orientación, mientras que para $r + dr$ maneja otra orientación entonces podemos decir que las lineas de $\theta = const$, $\phi = const$ son ortogonales a las dos esferas así que tienen por definición tangente $\vec{e}_r$, entonces los vectores $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\phi$ en la esfera requieren $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\phi = 0$ vemos esto como $g_{r\theta} = g_{r\phi} = 0$ así definimos las coordenadas para la simetría esférica y restringimos la métrica a la forma

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{0r}drdt + 2g_{0\theta}d\theta dt + 2g_{0\phi}d\phi dt + g_{rr}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{2.15}$$

no solo los espacios $t = c$ donde c-cte son esfericamente simétricos también lo son r =cte, θ =cte y ϕ =cte esto hace pensar que $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\phi$ y $\vec{e}_t$ son ortogonales ó que $g_{t\theta} = g_{t\phi} = 0$ de donde obtenemos una métrica general para un espacio tiempo esfericamente simétrico

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{0r}drdt + g_{rr}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{2.16}$$

esta es la métrica general de un espacio-tiempo esfericamente simétrico, donde g_{00}, g_{0r} y g_{rr} son funciones de r, t, tenemos que usar nuestras coordenadas libres para reducir esto a la forma más simple posible. Un espacio tiempo es llamado estático si las componentes métricas no tienen dependencia la coordenada temporal t y si ademas las hipersuperficies $t = A$ constantes, son perpendiculares al vector de Killing. Lo que nos permite expresar la métrica en la siguiente forma:

$$ds^2 = e^{2\phi(r)}dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} - r^2 d\Omega^2 \tag{2.17}$$

donde $e^{\phi(r)}$ y $b(r)$ son la función del corrimiento al rojo y la función forma respectivamente.

2.3. La Teoría F(T)

El concepto de espacio-tiempo topologico ligado a parches separados del universo fue propuesto por Flamm, el puente usado para esta conexión es llamado agujero de gusano, el mismo tipo de conexión fue realizado por Einstein-Rosen cuyo puente más tarde se prueba que es un agujero negro. Morris y Throne métricas estáticas y esfericamente simétricas que conectan regiones planas asintóticamente. Algunas in homogeneidades en la distribución de materia son esenciales en la construcción de agujeros de gusano que violan las condiciones de energía y que equivalen a la materia exótica, una forma hipotética de materia con presíon negativa. La violación de la condición de energía nula da lado a la materia exótica para obtener soluciones del agujero de gusano de forma transversal del campo de ecuaciones de Einstein. Las condiciones de energía son satisfechas para una forma clásica de materia pero para algunos campos cuánticos como el efecto Casimir violan estas condiciones. Así que dada la naturaleza del debate es importante minimizar el uso de materia exótica. Esto da lado a explorar un modelo más realista en favor del agujero de gusano uno de los campos que viola la condición de energía nula es la teoría de gravedad modificada, uno de los argumentos es que el tensor de momento-energía es responsable de la violación de la condición. En estas teoría y con la existencia de materia normal el agujero de gusano satisface las condiciones de energía.

Esto conduce que las soluciones estáticas del agujero de gusano existen en gravedad $f(t)$ de acuerdo con [28] donde las condiciones de energía se mantienen para agujeros estáticos en teoría modificada. Para el caso anisotropico , donde las condiciones de energía son violadas. También se discute que uno de los ingredientes básicos es el tensor efectivo de momento-energía para las soluciones del agujero de gusano y una materia normal da alguna solución físicamente aceptable. El estudio de las soluciones estaticas para el agujero de gusano ayudándonos de la no diagonal tetrad y una distribución anisotropica de la materia en gravedad $f(T)$.

Sea e^i_μ es la base para desarrollar la teoría de gravedad teleparalela y su generalización. Este es un conjunto ortogonal de un campo de cuatro vectores cuyo dual es e_i, la métrica y el campo de la tetrada pueden ser relacionados como $g_{\mu\nu} = \nu_{ij} e^i_\mu e^j_\nu$ donde ν_{ij} denotan la métrica de Minkowski para el espacio tangente. La tetrada y su dual inducen una torsión no cero que puede ser escrita como la acción dada por Sharif y su colega en [28]

$$e_i = e^i_\mu \partial_\mu, e^j = e^j_\nu dx^\nu \tag{2.18}$$

satisfacen $e^i_\mu e^j_\mu = \delta^i_j, e^i_\mu e^\nu_i = \delta^\nu_\mu$

que el funcional de la gravedad $f(T)$ esta dada por

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x[ef(T) + L_m] \tag{2.19}$$

donde $\kappa^2 = 8\pi G$, G es la constate gravitacional, $e = \sqrt{-g} = \det(e^i_\mu)$, g es el determinante de los coeficientes de la métrica, e^i_μ denota la tetrada $\mathcal{L}_{\Updownarrow}$ es el lagrangiano de materia, la variación de esta acción da las siguiente ecuación de campo

$$[\frac{1}{e}\partial_\mu(e e^\gamma_i S^{\mu\nu}_\gamma) + e^\gamma_i T^\lambda_{\mu\gamma} S^{\nu\mu}_\lambda] f_T + e^\gamma_i S^{\mu\nu}_\gamma \partial_\mu(T) f_{TT} + \frac{1}{4} e^\nu_i f = \frac{1}{2}\kappa^2 e^\gamma_i \mathbb{T}^\nu_\gamma, \tag{2.20}$$

donde $f_T = df/dT, f_{TT} = d^2f/dT^2$ y T^ν_γ es el tensor de materia. La torsión escalar es definida por

$$T = T^\gamma_{\mu\nu} S^{\mu\nu}_\gamma \tag{2.21}$$

aquí la torsión antisimetrica y el tensor superpotencial son

$$T^\gamma_{\mu\nu} = \Gamma^\gamma_{\nu\mu} - \Gamma^\gamma_{\mu\nu} = e^\gamma_i(\partial_\nu e^i_\mu - \partial_\mu e^i_\nu) \tag{2.22}$$

$$S^{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\gamma}_{\nu\mu} + \Gamma^{\gamma}_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\delta^{\gamma}_{\mu}T^{\alpha}_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\gamma}_{\nu}T^{\alpha}_{\alpha\mu} \tag{2.23}$$

donde $\Gamma^{\gamma}_{\nu\mu}$ es la conexión de Waitzenböck. Las condiciones de energía son aplicadas para deducir un número de resultados generales en diferentes contextos físicos . En relatividad general la existencia de soluciones para el agujero de gusano requiere la violación de estas condiciones, las condiciones de energía vienen de la relación geométrica de la ecuación de Raychaudhuri con gravedad atractiva, también describe la relación entre el tiempo u^{α}, el campo de vectores nulos κ^{α}, el tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$, la expansión escalar θ, el corte $\sigma^{\alpha\beta}$ y el vórtice $\omega^{\alpha\beta}$. Para el tiempo y congruencias nulas estas ecuaciones toman la forma

$$\frac{d\theta}{d\pi} + \frac{1}{3}\theta^2 + \sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} = -R_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta} \tag{2.24}$$

$$\frac{d\theta}{d\epsilon} + \frac{1}{2}\theta^2 + \sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} = -R_{\alpha\beta}\kappa^{\alpha}\kappa^{\beta} \tag{2.25}$$

donde π y ϵ son parámetros positivos. La gravedad atractiva es adjuntada a través de la condición $\theta < 0$ para cualquier hypersuperficie ortogonal congruente con $\omega_{\alpha\beta} = 0$. Estas condiciones a través de la ecuación de de Raychaudhuri vienen dadas por

$$R_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta} \geq 0, R_{\alpha\beta}\kappa^{\alpha}\kappa^{\beta} \geq 0 \tag{2.26}$$

para las geodésicas del tiempo y el vector nulo respectivamente, reemplazando el tensor de Ricci por el tensor de energía-momento $T_{\alpha\beta}$ obtenemos la condiciones de energía.

Para nuestro espacio-tiempo estático y esfericamente simétrico en gravedad $f(T)$ la diagonal de la tetrada da una ecuación extra, así desacuerdo con [28] las componentes para la métrica dada el principio de esta sección están dadas por

$$e^{i}_{\mu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{b}{r}}}\sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{b}{r}}}\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\cos\phi \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{b}{r}}}\cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

donde b es el conjunto 0 y $b = b(r)$. La torsión escalar toma la forma

$$T = \frac{2}{r^2}(2 - 2\sqrt{1 - \frac{b}{r}} - \frac{b}{r}) \tag{2.27}$$

que da lado a

$$T' = -\frac{2}{r^3}[4(1 - \sqrt{1 - \frac{b}{r}}) - \frac{2b}{r} + \frac{rb' - b}{r}(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{b}{r}}})] \tag{2.28}$$

junto con su segunda derivada

2.4. Fluido Perfecto y Anisotropico

Gran cantidad de sistemas físicos, incluyendo tal vez el universo mismo, pueden ser aproximados recordando un fluido perfecto. Un fluido perfecto es definido como tener en cada puto una velocidad v, así que un observador se mueve con esta velocidad ve el fluido alrededor de el como isotropico, Así debería ser el caso del camino entre colisiones es pequeño comparado con la escala de longitudes usadas por el observador. Nosotros deberíamos transformar la definición de un fluido perfecto en afirmaciones de sobre el tensor de momento-energía tal como lo hace [30] y [31]. Primero suponemos que están en un marco de referencia en que el fluido esta en reposo en una posición particular del espacio-tiempo. en este punto de espacio-tiempo, el fluido perfecto toma la hipótesis que dice que el tensor de energía-momento toma la forma característica de ser esfericamente simétrico

$$\hat{T}^{ij} = p\delta_{ij} \tag{2.29}$$

$$\hat{T}^{i0} = T^{0i} = 0 \tag{2.30}$$

$$\hat{T}^{00} = \rho \tag{2.31}$$

el coeficiente P y *rho* son llamados la presión y la densidad de energía propia.

Definimos un fluido perfecto como una distribución continua de materia con el tensor de energía-momento

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(\nu_{ab} + u_a u_b) \tag{2.32}$$

donde u^a es la unidad de tiempo del campo de vectores representando la 4-velocidad del fluido. Acorde a la interpretación de T_{ab}, las funciones ρ y P son respectivamente la densidad de masa-energía y presión de el fluido como medida en el resto del marco. El fluido es llamado perfecto por la ausencia de términos de conducción de calor y los términos de momento correspondientes a viscosidad. La ecuación de movimiento de un fluido perfecto sujeto a una fuerza no externa es simplemente

$$\partial^a T_{ab} = 0 \tag{2.33}$$

escribiendo esta ecuación en términos de ρ, P y u^a y proyectando el resultado de la ecuación paralela y perpendicular a u^b encontramos

$$u^a \partial_a \rho + (\rho + P)\partial^a u_a = 0 \tag{2.34}$$

$$(P + \rho)u^a \partial_a u_b + (\nu_{ab} + u_a u_b)\partial^a P = 0 \tag{2.35}$$

Un fluido perfecto con presión isotropica es mayormente usado en un modelo idealizado de la distribución de materia en el universo. Sin embargo para un fluido real deberíamos incluir propiedades así como viscosidad, disipación de calor y propiedades de la componente direccional, etc. Una simple generalización de fluido perfecto envuelve componentes de la presión anisotropica, este considera que la presion radial y tangencial (tangentes a la superficie) no son iguales, condicion que es requerida para la existencia de agujeros de gusano [29]. Y el tensor de energía-momento para esta distribución esta dada por

$$T^{mu}_{\nu} = (\rho + p_t)U_\nu U^\mu - p_t \delta^\mu_\nu + (p_r + p_t)X^\mu x_\nu \tag{2.36}$$

donde $\rho(r)$,p_r,p_t es la densidad de energía y las componentes de presión radial, transversal, la cuatro velocidad U^μ del fluido y el vector de unidad del espacio X^μ es ortogonal a por lo tanto satisface $U^\mu U_\mu = 1$, $X^\mu X_\mu = -1$, $U^\mu X_\mu = 0$.

Esta sera la fuente de materia que consideraremos para la construcción de nuestro modelo de agujero de gusano. Otro elemento importante que se debe considerar es la estructura de la geometría, este punto será discutido en la siguiente sección.

2.5. Condiciones para La Existencia de Agujeros de Gusano

El elemento de linea para un agujero de gusano en un espacio-tiempo estático y esfericamente simétrico de acuerdo con [28] esta viene dado por

$$ds^2 = e^{2\phi(r)}dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \tag{2.37}$$

donde ϕ es tomada como la función de corrimiento al rojo gravitacional y Φ es referida como la función forma que especifica la forma espacial del agujero de gusano. La coordenada radial r posee un comportamiento no monótono así que esto incrementa el valor mínimo r_0 a infinito y entonces regresa a r_0 localizando la garganta del agujero de gusano por lo cual llamaremos al valor mínimos r_0 el radio de la garganta del agujero de gusano. El comportamiento del la coordenada radial indica que el agujero de gusano liga dos universos separados o algunas partes de un universo. Entonces si un agujero de gusano une dos diferentes parches representados por su espacio-tiempo entonces existen dos funciones de corrimiento al rojo ($\phi_\pm$) al igual que dos funciones de forma ($\Phi_\pm$) por lo tanto cada parche necesita una configuración diferente de coordenadas para el rango de r en cada parche que son unidos por $r = r_0$, por simplicidad asumimos $\phi_+ = \phi_-$ y $\Phi_+ = \Phi_-$. En la garganta $r = r_0$ la función forma satisface la condición $\Phi'(r_0) < 1$ con $\Phi(r_0) = r_0$, a grandes distancias el espacio-tiempo debería de cumplir la condición plana asintóticamente es decir $r \to \infty$ implica que $\frac{\Phi(r)}{r} \to 0$ para agujeros de gusano transversales. Asumimos que la función de corrimiento al rojo es constante para que $\phi' = 0$, también la distancia radial propia debería ser finita a través del espacio y esta dada por:

$$g(r) = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}}, r \leq r_0. \tag{2.38}$$

el signo $\pm$ relaciona las dos partes que son unidas por el agujero de gusano,

Generalmente un agujero de gusano es construido por la imposición de los requerimientos geométricos en el espacio-tiempo así existe una garganta pero no horizonte, esto sin embargo no es expresado en términos del tensor de momento-energía. Primeramente se propone la restricción del tensor de momento-energía, cuando se resuelven las ecuaciones de Einstein, automáticamente dan lado a una solución clásica del agujero de gusano de agujeros estáticos auto duales $\rho = \rho_t = 0$ aplicando estas condiciones más las ecuaciones de Einstein implica $R = 0$ la solución general de la estaciona automáticamente incorpora la caracterización básica de un agujero de gusano Lorentziano.

Las agujeros de gusano esfericamente estáticos soportados por energía oscura, es este caso la materia obscura enhebra los agujeros de gusano en un fluido anisotropico con una presión radial negativa muy fuerte que satisface la ecuación de estado $p_r/\rho < -1$ es decir $\rho + p_r < 0$ Para ilustrar lo anterior consideramos un espacio-tiempo con fuentes de materia un fluido perfecto y las ecuaciones que estás deben satisfacer descrita por las ecuaciones de Einstein, es decir

$$\kappa\rho(r) = \frac{b'}{r^2}, \tag{2.39}$$

$$\kappa p_r(r) = 2(1 - \frac{b}{r})\frac{\phi'}{r} - \frac{b}{r^3} \tag{2.40}$$

$$\kappa p_l(r) = (1 - \frac{b}{r}) \times [\phi'' + \phi'^2 - \frac{b'r + b - 2r}{2r(r-b)}\phi' - \frac{b'r - b}{2r^2(r-b)}] \tag{2.41}$$

adicionalmente tenemos la ecuación de conservación del tensor de momento energía

$$\tau' = (\rho - r)\psi' - 2\frac{(p-r)}{r} \tag{2.42}$$

donde la prima denota las derivadas parciales respecto de r, ρ denota la densidad de energía, p_r, p_l denotan la presión radial y tangencial respectivamente. Para construir agujeros de gusano deberíamos considerar ecuaciones de estado especificas para la presión radial y tangencial. La ecuación ρ para la densidad se puede integrar

$$b(r) = b(r_0) + \int_{r_0}^{r} 8\pi G\rho(r')r'^2 dr' = 2Gm(r) \tag{2.43}$$

de donde

$$m(r) = \frac{r_0}{2} + \int_{r_0}^{r} 4\pi\rho r^2 dr \tag{2.44}$$

que representa la masa efectiva. Se denomina agujero de gusano al espacio-tiempo formado por una especie de túneles conocida como garganta que conectan a través del espacio-tiempo diferentes regiones de un universo o universos distintos. Si las regiones que son conectadas son asintóticamente planas este se denomina agujero de gusano para que este se pueda representar de una manera adecuada es necesario que la geometría tenga propiedades adecuadas.

- La garganta conecta dos regiones del universo asintóticamente planas.
- No existe horizonte de eventos.
- La solución debe estar libre se singularidades y los componentes de la métrica no deben cambiar de signo.

En términos de las componentes de la métrica esto significa que $0 < 1 - \frac{b(r)}{r}, e^{\phi(r)}$ finito para todo $r > r_0$ donde r_0 es el valor de la garganta. En la garganta $\frac{b(r_0)}{r_0} = 1$ lo que implica que sobre la garganta se viola unas de las condiciones de energía dando como resultado

$$\rho(r_0) - \tau(r_0)] \leq 0 \tag{2.45}$$

que se obtiene de

$$8\pi G(\rho - \tau) = \frac{1}{r^2}(b' - \frac{b}{r}) + 2(1 - \frac{b}{r})\frac{\phi'}{r} = \\ - \frac{1}{r}[(1 - \frac{b}{r})' - \frac{2\phi'}{r}(1 - \frac{b}{r})] = -\frac{e^{-2\phi}}{r}[e^{-2\phi}(1 - \frac{b}{r})]$$

y puesto que

$$(1 - \frac{b}{r})|_{r_0} = 0 \tag{2.46}$$

del hecho de que $\forall r > r_0$, $e^{-2\phi}(1 - \frac{b}{r}) > 0$, entonces $\exists r_* | \forall \in (r_0, r_*)$, $[e^{-2\phi}(1 - \frac{b}{r})]' > 0$ Estas serian las condiciones genericas que la geometria debe satisfacer en la garganta.

2.6. Agujero con Curvatura Escalar Cero en Relatividad General

En esta seccion reescribimos la solucion de un agujero de gusano con curvatura escalar cero [29] debido a que nuestro interes coincide con la busqueda del caso con curvatura escalar cero pero en el contexto de teoria $f(T)$. Se propone una restricción en la forma de la energía-momento que cuando se resuelven las ecuaciones de Einstein da lado a una clase de soluciones de agujero de gusano. La clase que utilizaremos son los agujeros de gusano estáticos auto-duales si $\rho = \rho_t = 0$, donde ρ y ρ_t son la densidad medida por un observador estático y la densidad congruente a un tiempo t así que aplicaremos estas condición más las ecuaciones de Einstein implica que $R = 0$

El agujero de gusano Lorentziano a la Morris y Thorne es definido a través de la especificación de dos funciones arbitrarias $b(r)$ y $\phi(r)$ mediante la versión de un elemento de linea estático y esfericamente simétrico como

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)}dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{2.47}$$

las condiciones que hacen un agujero de gusano son

- Una condición de no horizonte $\rightarrow e^{2\phi}$ no tiene ceros y ϕ es la función de corrimiento al rojo.
- Una condición de forma del agujero de gusano $\rightarrow b(r = b_0) = b_0$; con $\frac{b_r}{r} \leq 1\ \forall r \gtrsim b_0$.
- Planitud asintótica: $\frac{b(r)}{r} \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$.

Siguiendo a [17] primero exigimos $\rho = 0$ y entonces resolvemos para $R = 0$ lo que debería de determinar ϕ y b. es importante remarcar que la solución más general de la ecuación $\rho = \rho_t = 0$ incorpora los requerimientos de la existencia de garganta sin horizonte. Por lo que esta es una caracterización de un agujero de gusano lorentziano. Definiendo las componentes de la diagonal del tensor de energía-momento como $T_{00} = \rho(r), T_{11} = \tau(r), T_{22} = T_{33} = p(r)$, usando las ecuaciones de Einstein y asumiendo que el elemento de linea esta dado:

$$\rho(r) = \frac{1}{8\pi G}\frac{b'}{r^2}; \tag{2.48}$$

$$\tau(r) = \frac{1}{8\pi G}[-\frac{b}{r^3} + 2\frac{\phi'}{r}(1 - \frac{b}{r})]; \tag{2.49}$$

$$p(r) = \frac{1}{8\pi G}(1 - \frac{b(r)}{r})[\phi'' - \frac{b'r - b}{2r(r-b)}\phi' + \phi'^2 + \frac{\phi'}{r} - \frac{b'r - b}{2r^2(r-b)}] \tag{2.50}$$

la condición $\rho = \phi_t$ lo que equivale a $R = T = 0$

$$\eta' + \eta^2 + (\frac{2}{r} - \frac{b'r - b}{2r(r-b)})\eta = \frac{b'}{r(r-b)} \tag{2.51}$$

donde $\eta = \phi'$ donde la prima denota la derivada con respecto de r. Dado un $b(r)$ podemos resolver la ecuación para obtener ϕ notamos que la ecuación con b dado es no lineal, es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden conocida como ecuación de Riccati. Esta ecuación es coovariante bajo transformaciones fraccionales lineales de la variable dependiente, esta ecuación es considerada como la ecuación diferencial maestra para todos los espacio-tiempos esfericamente simétricos estáticos con $R = 0$ algunos ejemplos los incluyen en las geometrías Schwarzschild y Reissner-Nordstrom. ahora resolvemos para $\rho = 0$ con un $b = 2m$ entonces nuestra ecuación se simplifica a

$$\eta' + \eta + \frac{\eta}{r}(\frac{2r - 3m}{r - 2m}) = 0 \tag{2.52}$$

esta admite la solución más general dada por

$$g_{00} = -(\kappa - \lambda\sqrt{1 - \frac{2m}{r}})^2 \tag{2.53}$$

donde κ y λ son constantes de integración. Claramente la geometría de Schwarzschild es la solución para cuando $R_{ij} = 0$, y la solución general se reduce cuando $\kappa = 0$. Esto nuestra que la solución de Schwarzschild es contenida en la solución general. Esto también contiene la parte espacial del agujero de gusano de Schwarzschild con $g_{00} = -1$ cuando $\lambda = 0$ entonces la solución no admite horizonte pero la garganta del agujero de gusano esta en $r = 2m$ donde así tenemos un agujero de gusano Lorentziano. Los componentes del tensor de momento energía para esta geometría tenemos

$$\rho = 0 \tag{2.54}$$

$$\tau = -\frac{1}{8\pi G}[\frac{2m\kappa}{r^2(\kappa + \lambda\sqrt{1 - \frac{2m}{r}})}] \tag{2.55}$$

$$P = \frac{1}{8\pi G}[\frac{m\kappa}{r^3(\kappa + \lambda\sqrt{1 - \frac{2m}{r}})}] \tag{2.56}$$

La condición débil de energía ($\rho \geq 0, \rho + \tau \geq 0, \rho + P \geq 0$) y la condición nula de energía ($\rho + \tau \geq 0, \rho + p >= 0$) son violadas. Notemos que el tensor de energía-momento dado debe de satisfacer $\rho + \tau = -2p$ que obviamente se sigue de $R = 0$. La violación de las condiciones de energía se sigue de la violación de la desigualdad $\rho + \tau \geq 0$, el grado de la violación es causada por el comportamiento $\frac{1}{r^3}$ que es grande en la vecindad de la garganta, uno tiene un parámetro de control κ que puede ser cambiado para ser muy pequeño en orden para restringir la cantidad de violación.

El elemento de linea completo para le geometría discutida es

$$ds^2 = -(\kappa + \lambda(\sqrt{1 - \frac{2m}{r}})^2)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2m/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{2.57}$$

también deberíamos de considerar el elemento de linea inverso reemplazando λ por $-\lambda$ que también tiene $R = 0$

$$ds^2 = -(\kappa - \lambda(\sqrt{1 - \frac{2m}{r}})^2)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2m/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{2.58}$$

note que esta métrica solo tiene sentido para $r >= 2m$, así para realmente hacer el agujero de gusano explicito, nosotros necesitamos dos parches coordenados, $r_1 \in (2m, \infty)$ y $r_2 \in (2m, \infty)$ que vemos juntos en $R = 2m$, en esta geometría particular es suave a través de la unión propuesta nosotros escogemos la raíz positiva en un lado y la raíz negativa en el otro extremo. Esto no es particularmente obvio y para hacer esto un poco más claro así que es conveniente cambiar a coordenadas isotropicas definidas por

$$r = \bar{r}(1 + \frac{m}{2\bar{r}})^2 \tag{2.59}$$

Entonces la parte espacial para la solución las métricas anteriores son idénticas a la parte espacial de la geometría de Schwarzschild, nosotros podemos usar la misma transformación para para cambiar las coordenadas de curvatura a coordenadas isotropicas como fue usado por Schwarzschild mismo, entonces es fácil ver que:

$$ds^2 = -\kappa + \lambda[\frac{1 - m/2\bar{r}}{1 + m/2\bar{r}}^2 dt^2 + (1 + \frac{m}{2\bar{r}})^4[d\bar{r}^2 + \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \tag{2.60}$$

La parte espacial de la geometría es invariante bajo inversión $\bar{r} \to m^2/(4\bar{r})$. La ventaja de las coordenadas isotropicas es que en todos los casos un parche de coordenadas cubre la geometría entera, $\bar{r} \approx 0$ es la segunda región asintóticamente plana. Cada vez que la geometría puede ser interpretada como un agujero de gusano lorentziano entonces el parche de coordenadas isotropicas es un parche global de coordenadas esto es solo para nuestras soluciones generales porque la parte espacial de las métricas es idéntica a la de Schwarzschild.

1. La geometría es invariante bajo cambios simultáneos de signo $\lambda \to -\lambda$, $\kappa \to -\kappa$, también es invariante bajo inversiones simultaneas $\bar{r} \to m^2/(4\bar{r})$ y signo $\lambda \to -\lambda$ dejando κ fijo.

2. $\kappa = 0$, $\lambda \neq 0$ es la geometría de Schwarzschild entonces no es transitable(este es un ejemplo de un caso cada sistema de coordenadas isotropicas no cubre la carta entera).

3. $\lambda = 0$, $\kappa \neq 0$ es la parte espacial-Schwarzschild del agujero de gusano transitable.(El sistema de coordenadas isotropicas no cubre la carta entera).

4. $\lambda = 0$, $\kappa = 0$ es singular.

5. en la garganta $g_{tt}(r = 2m) = -\kappa^2$, así $\kappa \neq 0$ es requerido para asegurar la transitavilidad .

Un Horizonte se formaría si g_{rr} tiene un cero, si esto es una solución físicamente aceptable

$$\kappa(1 + m/2r) + \lambda(1 - m/2r) = 0 \tag{2.61}$$

resolviendo esta ecuación obtenemos

$$r_H = \frac{m\lambda - \kappa}{2\lambda + \kappa} \tag{2.62}$$

es un horizonte si

$$\frac{\lambda - \kappa}{\lambda + \kappa} > 0 \tag{2.63}$$

también llamado una singularidad. Para ver esto calculamos

$$\tau = -\frac{128}{8\pi G}\frac{\kappa m r^3}{(2r + m)^5(2[\kappa + \lambda]r + [\kappa - \lambda]m)} \tag{2.64}$$

$$p = +\frac{64}{8\pi G}\frac{\kappa m r^3}{(2r + m)^5(2[\kappa + \lambda]r + [\kappa - \lambda]m)} \tag{2.65}$$

notamos que la presión radial y tangencial divergen cuando $g_{tt} \to 0$, reescribiendo las ecuaciones anteriores

$$\tau = -\frac{128}{8\pi G}\frac{\kappa m r^3}{(2r + m)^6\sqrt{-g_{tt}}}; \tag{2.66}$$

$$p = +\frac{64}{8\pi G}\frac{\kappa m r^3}{(2r + m)^6\sqrt{-g_{tt}}} \tag{2.67}$$

explícitamente mostramos que $g_{tt} \to 0$ es una singularidad, esto forma la curvatura de una singularidad si

$$\frac{\lambda - \kappa}{\lambda + \kappa} > 0 \tag{2.68}$$

esto ocurre si

$$\lambda + \kappa > 0 \lambda - \kappa > 0 \tag{2.69}$$

$$\lambda + \kappa < 0 \lambda - \kappa < 0 \tag{2.70}$$

fuera de estas regiones la curvatura de la singularidad no se forma los componentes de la métrica nunca se hacen cero y tenemos un agujero de gusano transitable. En el plano $\kappa - \lambda$ donde κ corre sobre el eje y y definimos $\lambda = Z \cos\theta, \kappa = Z \sin\theta$

- $\theta = 0$: espacio-tiempo de Schwarzschild.
- $\theta \in (0, \pi/4)$: singularidad.
- $\theta \in (\pi/4, 3\pi/4)$: agujero de gusano transitable.
- $\theta = \pi/2$ agujero de gusano en espacio de Schwarzschild .

para el caso donde $\theta = \pi/4$ y $\lambda = \kappa$ la geometría es

$$ds^2 = -\frac{2\kappa}{1 + m/2\bar{r}}^2 dt^2 + (1 + \frac{m}{2\bar{r}})^4[d\bar{r}^2 + \bar{r}^2(d\theta + \sin^2\theta d\phi)] \tag{2.71}$$

Cuando $\bar{r} \to 0$ no es plana es decir el espacio es asintóticamente plano, pero no el espacio-tiempo entonces $g_{tt} \to 0$ cuando $\bar{r} \to 0$.

cuando $\theta = 3\pi/4$ y $\lambda = -\kappa$ la geometría es

$$ds^2 = -\frac{2\kappa}{1 + m/2\bar{r}}^2 dt^2 + (1 + \frac{m}{2\bar{r}})^4[d\bar{r}^2 + \bar{r}^2(d\theta + \sin^2\theta d\phi)] \tag{2.72}$$

cuando $\bar{r} \to \infty$ la región no es plana, el espacio es asintóticamente plano pero el espacio-tiempo no lo es, entonces $g_{tt} \to 0$ cuando $\bar{r} \to \infty$.

Capítulo 3

Agujero de gusano en teoria $F(T)$

Estudiamos la soluciones de un agujero de gusano estático transitable que son la generalización de los agujeros de gusano de Schwarzschild. Asumimos que la función forma solo depende de la coordenada radial, para generar el agujero de gusano en el espacio-tiempo asintótico no plano, estos son localmente asinóticos cuando $r \to \infty$. En particular existen agujeros de gusano que conectan regiones no planas asintóticamente con un déficit de angulo solido. Para estos agujeros de gusano el tamaño de sus diagramas de unión en un espacio euclidiano de tres dimensiones se extiende de la garganta al infinito, también se discuten las condiciones de transitavilidad.

3.1. Condiciones de Regularidad

Siguiendo el razonamiento de [4] la regularidad implica que el escalar de Kreschman

$$K = \frac{[\phi'(1-\frac{b}{r})' + 2\phi''(1-\frac{b}{r})]^2}{\phi^2} + \frac{4[(1-\frac{b}{r}) - 1]^2}{r^4} + \frac{8[\phi'(1-\frac{b}{r})]^2}{\phi^2 r^2} + \frac{2[(1-\frac{b}{r})']^2}{r^2} \quad (3.1)$$

debe ser finito dada que la simetría es suficiente en este caso que se satisfaga que el escalar de Kreschman formado a través de la contracción de las componentes de Riemann consigo mismas sea regular.

La naturaleza y existencia de singularidades del espacio-tiempo en un espacio tiempo general son considerados. Einstein propuso la teoría general de la relatividad que describe las fuerzas gravitacionales en términos de la curvatura del espacio tiempo y propuso el campo de ecuaciones relacionando la geometría y el contenido de materia de la carta del espacio-tiempo, las soluciones encontradas al campo de ecuaciones donde la métrica de Schwarzschild representa el campo gravitacional de un cuerpo así como una estrella esféricamente simétrica y los modelos cosmologicos de Friedmann, cada una de estas soluciones contiene una singularidad del espacio tiempo donde las curvas y densidades son infinitas y la descripción física se debería de rompe. En la solución de Schwarzschild la singularidad se presenta en $r = 0$. Para los modelos de Friedmann esta singularidad significa en el tiempo $t = 0$, que es un universo que inicia y el origen del tiempo donde el factor de escala $S(T)$ esta claro y todos los objetos son reducidos a volumen cero dadas las fueras gravitacionales infinitas. Este fenómeno no fue tomado muy seriamente,la singularidad fue tomada generalmente como consecuencia de una muy alta simetría del espacio-tiempo mientras se derivan estas soluciones. La distinción entre singularidad genuina y mero singularidad coordenada viene dada claramente y fue realizado de que la singularidad en $r = 2m$ en el espacio de Schwarzschild tiene una singularidad coordenada que podría ser removible por una transformación coordenada situable, esto esta claro sin embargo que la curvatura de la singularidad genuina en $r = 0$ podría no ser removible por cualquier transformación coordenada, cuanto más general es la solución considerada con un requerimiento menor del grado de simetría, las singularidades podrían ser removibles. un estudio más completo sobre las simetrías del espacio-tiempo asociado a un problema de singularidades fue tomado por Hawking, Penrose, Geroch y Ellis, ellas muestran que un espacio tiempo admite singularidades trabajando con un marco muy general, provee que satisfaga ciertas condiciones supuestas, como la positividad de la energía y la existencia de superficies atrapadas. Estas consideraciones también encierran la existencia de singularidades en otras teorías de gravedad basadas en cartas de marcos de referencia del espacio-tiempo que satisfacen las condiciones generales.

Resulta que esto es la noción de la incompletitud de la geodésica que caracteriza la noción de una singularidad de una manera efectiva para un espacio-tiempo y habilita esta existencia para ser propuesta por teoremas. Los efectos gravitacionales causados por la curvatura del espacio-tiempo en congruencia con las geodésicas de tiempo y las geodésicas nulas resultan ser la principal causa de la existencia de una singularidad en la forma de una geodésica incompleta de un no-espacio en el espacio tiempo en el pasado o en el futuro.

Sin embargo esto no provee información de la naturaleza de estas singularidades o sus propiedades, en particular estas singularidades podrían ser cubiertas dentro de la gravedad de un horizonte de eventos, o podrían ser visibles a observadores externos si las superficies atrapadas son retrasadas mientras se forma la singularidad durante un proceso dinámico en el espacio-tiempo.

El criterio de Tipler, Clarke y Ellis para cuando una singularidad debería ser considerada físicamente importante en términos del crecimiento de curvatura a través de la geodésica singular. ¿Cuando deberíamos decir que una carta del espacio tiempo (M,g) es singular o que esta contiene un espacio tiempo singular? varios ejemplos de comportamientos singular en modelos de espacio tiempo de la relatividad general son conocidos, así como modelos cosmologicos (Friedmann-Roberson-Walker) y el espacio-tiempo de Schwarzschild estos contienen una singularidad del espacio-tiempo donde las densidades de energía o las curvaturas del espacio tiempo divergen fuertemente y las descripción usual del espacio tiempo se rompe. En el modelos re Friedmann Robertson Walker, la ecuación de Einstein implica que si $\rho + 3p > 0$ en todo el tiempo, esta es una singularidad en $t = 0$ que puede ser identificada como el origen del universo, sí $\rho + p > 0$ en todo el tiempo entonces vemos que a traves del las trayectorias del pasado directo conocemos esta singularidad $\rho \to \infty$ y también que la curvatura escalar $R = R_{ij}R^{ij} \to \infty$, nuevamente las geodésicas del no-espacio del pasado directo son incompletas en este sentido. Por lo tanto esta es una singularidad curvatura esencial en $t = 0$ esta no puede ser cambiada por cualquier transformación de coordenadas. Un comportamiento singular también puede ocurrir sin un mal comportamiento de la curvatura. Un ejemplo es el espacio-tiempo de Monkowsky con un punto retardado, algo así como un agujero en el espacio-tiempo esto debería ser por ejemplo una geodésica de tiempo corriendo en el agujero entonces esto debería de ser un futuro incompleto, el espacio es inextensible es decir no puede ser isometricamente unido en otra carta de espacio-tiempo más grande como un subconjunto propio. Sin embargo es posible dar un ejemplo trivial del comportamiento singular de algún otro tipo, donde una singularidad canónica existe en el espacio-tiempo como mostraron Ellis y Schmidt. Aquí el espacio-tiempo es inextensible y los componentes de curvatura no divergen en el limite de aproximación a la singularidad. La métrica dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{3.2}$$

con un rango de coordenadas dado por $-\infty < t < \infty$, $0 < r < \infty$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \phi < a$ con $a \neq 2\pi$ esta es una singularidad canónica en $r = 0$ entonces el espacio-tiempo no puede ser extendido y el limite de la singularidad es relacionado al 2-plano temporal a $r = 0$ del espacio-tiempo de Minkowsky.

3.2. Agujeros de Gusano AdS

Formalismo general siguiendo a Mumtaz [27], el espacio-tiempo estático y esfericamente simétrico esta dado por con Λ no especifica

$$ds^2 = -G(r)dt^2 + G^{-1}(r)dr^2 + H(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{3.3}$$

donde $G(r) = 1-(2M/r)-(\Lambda r^2/3)$ y $H(r) = r^2$, para $\Lambda > 0$ esto da Schwarzschild-de sitter, $\Lambda < 0$ es el anti de sitter de Schwarzschild y $\Lambda = 0$ da lado a la métrica de Schwarzschild. Entonces $G(r) < 0$ para $\Lambda M^2 > 1/9$, así deberíamos tener $0 < \Lambda M^2 \leq 1/9$ de donde obtenemos dos raíces, el horizonte de eventos r_H y el horizonte cosmologico r_c para la geometría de Schwarzschild-de sitter

$$r_h = \frac{2}{\sqrt{\Lambda}}\cos(\frac{\alpha}{3}) \tag{3.4}$$

$$r_c = \frac{2}{\sqrt{\Lambda}}\cos(\frac{\alpha}{3} + \frac{4\pi}{3}) \tag{3.5}$$

donde $\cos\alpha = -3M\sqrt{\Lambda}$ con $\pi < \alpha < 3\pi/2$ y el dominio $2M < r_h < 3M$. La construcción del agujero de gusano no es posible para $\Lambda M^2 = 1/9$ porque el margen del horizonte esta en $r_h = r_c = 3M$ esto implica que el radio de la garganta a_0 debería tener el rango $r_h < a_0 < r_c$ y $0 < \Lambda M^2 < 1/9$ para la solución estática. El horizonte de eventos para la geometría de Schwarzschild-anti-de sitter esta dada por

$$\hat{r}_h = (\frac{3M}{|\Lambda|})^{1/3} \times [\sqrt[3]{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{9|\lambda|M^2}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{9|\Lambda|M^2}}}] \tag{3.6}$$

notamos que para la existencia de una configuración estática de agujero de gusano deberíamos tener $\hat{r}_h < a_0$ y $0 < \hat{r}_h < 2M$, Utilizamos la técnica de corte y pegado. En este contexto la región interior del espacio tiempo dado es cortado en $r < a$, obtenemos dos copias $4D$, $\mathbb{M}^{\pm}$ con $r \geq a$. Una nueva carta $\mathbb{M} = \mathbb{M}^{+} \cup \mathbb{M}^{-}$ es obtenida por unirlas en la hipersuperficie

$$\Sigma^{\pm} = \Sigma r = a \tag{3.7}$$

Las condiciones geométricas requeridas requeridas para la construcción del agujero de gusano es la condición de plenitud por el radio de la garganta, que es la función de unión $H(r)$ y satisface la relación $H'(a) = 2a > 0$. La distancia radial propia puede ser definida en la construcción del agujero como $s = \pm \int_a^r \sqrt{(1/G(r))}dr$. Si esta construcción completa la condición de planitud radial, entonces la nueva carta es llamada geodesicamente completa y se obtiene por unir dos regiones con radio a que corresponden al área mínima de la hipersuperficie. Para estudiar el interior de nuestro agujero de gusano no guiaremos por el trabajo de Subeom [8], donde exigen que la condición inicial sea una hipersuperficie de dos espacios completos anti-de sitter, si describimos el espacio anti-de Sitter como una coordenada estática

$$ds^2 = -(1 - \frac{r^2}{l^2})dt^2 + (1 + \frac{r^2}{l^2})^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{3.8}$$

con un l dado, entonces los dos espacio separados anti-de sitter pueden ser denotados por dos direcciones de r donde estos son separados en $r = 0$. Encontramos que es una Hipersuperficie que conecta dos espacio anti-de sitter asintóticos. Antes de tunelear los dos espacio anti-de Sitter esta separados, pero después de tunelear las dos superficies están conectadas por una garganta con un área radial no-cero. Para proporcionar un limite anti-de Sitter razonable a esta hipersuperficie del agujero de gusano e imponemos la condición clásica cuando $r \to \infty$

En el caso Lorentziano para espacios Ads asintóticos la topologia no dota de teoremas que básicamente nos ayudan a obtener los estados del sistema bajo ciertas condiciones físicamente razonables, la presencia de ciertas fuerzas acotadas de bulto separadas por un horizonte en el que las diferentes componentes no están conectadas a través del bulto. Más precisamente el teoremas de estados presentado en [13] nos dice que si $\mathbb{M}'$ es un espacio-tiempo globalmente hiperbólico con un tiempo acotado $\mathbb{I}$ satisface las condiciones de energía nulas, si $\mathbb{I}_0$ es un componente conectado de $\mathbb{I}$ podemos decir que

- $\mathbb{I}_0$ admite un espacio compacto cortado.
- $\mathbb{M}'$ satisface la condición genérica, entonces $\mathbb{I}_0$ no puede comunicar con otra componente es decir $J^+(I_0) \cap (I\ I_0) = \emptyset$.

seguimos considerando soluciones euclidianas para soluciones que son asintóticamente anti-de sitter, las soluciones tienen dos cotas desconectadas que son conectadas a través del interior en este sentido son similares a agujero de gusano euclidianos, estos de acuerdo con [23] conecta dos regiones asintóticamente planas, la forma típica de la métrica para esta solución es

$$ds^2 = d\rho^2 + w(\rho)^2 ds^2_{\Sigma_d} \tag{3.9}$$

donde σ es una superficie compacta y $w(\rho)\ e^{|\rho|}$ cuando $\rho \to \pm\infty$ las dos cotas desconectadas esta en $\pm\infty$, Las propiedades de estas soluciones son interesantes ya que son continuas y analíticas en un espacio de Lorentz remplazando ρ por it. Esto describe un universo continuo y cerrado con superficies espaciales dadas por Σ que se expande en el big bang y se colapsa en el big crunch

3.3. Solución de las Ecuaciones

Nuevamente iniciamos con el elemento de linea asociado al espacio tiempo estático y esfericamente simétrico

$$ds^2 = -e^{(2\Phi(r))}dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - b(r)/r)} + r^2 d\Omega^2 \tag{3.10}$$

Recordando que la torsión para la métrica (3.13) es

$$T(r) = (2(1 - \frac{b(r)}{r}))(\frac{2\Phi'(r)}{r}) + \frac{1}{r^2}). \tag{3.11}$$

Las ecuaciones de campo para un agujero de gusano en un espacio tiempo-estático y esfericamente simétrico asumiendo $\kappa^2 = 1$ viene dado por

$$2\rho = \frac{4}{r^2}(\sqrt{1 - \frac{b}{r}} - 1 + \frac{b}{r} + \frac{rb' - b}{2r})f_T + \frac{4}{r}(\sqrt{1 - \frac{b}{r}} - 1 + \frac{b}{r})T' f_{TT} + f, \tag{3.12}$$

$$2p_r = -\frac{4}{r^2}[2 + \frac{1}{1 - \frac{b}{r}} - \frac{3 - \frac{b}{r}}{\sqrt{1 - \frac{b}{r}}}]f_T - f \tag{3.13}$$

$$2p_t = \frac{1}{r^4}(4(1 - \sqrt{1 - \frac{b}{r}}) - \frac{b}{r} - b')f_T - \frac{2}{r}(\sqrt{1 - \frac{b}{r}} - 1 + \frac{b}{r})T' f_{TT} - f, \tag{3.14}$$

donde $f_T = \frac{1}{t'}f'$ y $f_{TT} = \frac{1}{T'^2}f'' - \frac{T''}{T'^3}f'$ en teorías de gravedad modificada $f(R)$ y $f(T)$

$$\frac{1}{2}\frac{cot(\theta)T'(r)f_2(r)}{r^2} = 0 \tag{3.15}$$

De este conjunto de ecuaciones la que inmediatamente puede resolverse es la ultima ecuación y esto implica:

$$f_2(r) = 0 \tag{3.16}$$

f_2 es la segunda derivada con respecto de t

$$f_1(r) = \nu \tag{3.17}$$

de donde $f(T) = \nu T + mu$ y dado que

$$T(r) = 2(1 - \frac{b(r)}{r})(\frac{2(\phi'(r)}{r} + \frac{1}{r^2}) \tag{3.18}$$

Entonces

$$f(r) = 2\nu(1 - \frac{b(r)}{r})(\frac{2\phi'(r)}{r}\frac{1}{r^2}) + \mu \tag{3.19}$$

Reemplazando en las otras ecuaciones

$$\kappa c^2\rho(r) = \frac{1}{2}\frac{\nu b'(r)}{r^2} + \frac{1}{4}\mu \tag{3.20}$$

$$\kappa P_r(r) = -\frac{\nu(-rb(r))\phi'(r)}{r^2} - \frac{1}{4}\frac{2\nu b(r) + \mu r^3}{r^3} \tag{3.21}$$

$$P_t(r) = -\frac{(-r + b(r))\nu(\phi(r))^2}{r} + (-\frac{1}{4}\frac{\nu b'(r)}{r} - \frac{1}{4}\frac{\nu(b(r) - 2r)}{r^2})\phi'(r) \\ - \frac{1}{4}\frac{\nu b'(r)}{r^2} - \frac{1}{2}\frac{(-r + b(r)\nu\phi''(r))}{r} + \frac{1}{4}\frac{\nu b(r) - \mu r^3}{r^3}$$

Puesto que queremos y deseamos construir soluciones que representen agujeros de gusano con curvatura escalar cero elegimos la forma de la función de forma como la del agujero de gusano de Thorne

$$b(r) = \frac{r_0^2}{r} \tag{3.22}$$

reemplazando en

$$R = \frac{-2([r^2 - rb]\phi'' + [2r - \frac{rb'}{2}]\phi'(r) + [r^2 - rb]\phi'^2 - b'(r))}{r^2} \tag{3.23}$$

esto nos genera una ecuación diferencia lineal de segundo orden y luego de la integración obtenemos

$$\phi(r) = ln(\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}} + \frac{M}{r}) \tag{3.24}$$

Con esto hemos logrado resolver el sistema de ecuaciones para la teoría $f(T)$ con curvatura escalar cero. Ahora debemos determinar la forma de las funciones hidrostaticas

$$\kappa c^2 \rho(r) = -\frac{\nu r_0^2}{r^4} + \frac{1}{4}\mu \tag{3.25}$$

la forma final de nuestras ecuaciones

$$kc^2\rho\,(r) = -\frac{1}{2}\,\frac{\nu\,{r_0}^2}{r^4} + \frac{1}{4}\,\mu \tag{3.26}$$

$$k\,\mathrm{Pr}\,(r) = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\sqrt{r^2 - {r_0}^2}{r_0}^2 + \left({r_0}^2 - 2\,r^2\right)M\right)\nu}{r^4\left(\sqrt{r^2 - {r_0}^2} + M\right)} - \frac{1}{4}\,\mu \tag{3.27}$$

$$kPt\,(r) = -\frac{1}{4}\,\mu + \frac{1}{2}\,\frac{\left(M\,\sqrt{r^2 - {r_0}^2} - {r_0}^2\right)\sqrt{r^2 - {r_0}^2}\nu}{r^4\left(\sqrt{r^2 - {r_0}^2} + M\right)} \tag{3.28}$$

Capítulo 4

Analisis de la Solución

De aqui a la eternidad y de regreso. Anonimo.

4.1. Existencia de la Garganta

De la sección 2.4 donde se impuso la condición para evitar la existencia de horizontes resulta que tenemos una región asintóticamen plana con masa asociada dada por -M es decir que tiene masa negativa en una de las regiones asintóticas. Para analizar el espacio tiempo total realizamos un cambio de coordenadas

$$dl = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{b(r)}{r}}} \tag{4.1}$$

la forma del elemento de linea en estas coordenadas es:

$$ds^2 = -\left(\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{l^2 + r_0^2}} + \frac{M}{\sqrt{l^2 + r_0^2}}\right)^2 dt^2 + dl^2 + (l^2 + r_0^2)d\Omega^2 \tag{4.2}$$

En estas coordenadas la garganta y l corresponden a $l = 0$ es decir la región donde se tiene la esfera de menor área, la primera de las regiones asintóticas corresponde a $l = +\infty$ mientas que la segunda región esta identificada con $l = -\infty$

$$ds^2 = -(1 - \frac{2M_\pm}{l}) + \frac{M^2 - r_0^2}{l^2} + \mathbb{O}(-\frac{1}{l^3})dt^2 + dl^2 + l^2 d\Omega^2 \tag{4.3}$$

lo que implica que la masa en la segunda región es positiva. La forma de la métrica cerca de la garganta esta dada por

$$ds^2 = -(\frac{(M+l)^2}{r_0^2} - \frac{l^2 M^2}{r_0^4} + O(l^3))dt^t + dl^2 + (l^2 + r_0^2)d\Omega^2 \tag{4.4}$$

Un análisis de la regularidad de la curvatura indica que el espacio-tiempo es regular en particular $K = 0$ en las dos regiones asintóticas y en la garganta es:

$$K = \frac{16}{r_0^4} \tag{4.5}$$

la densidad, presión radial y tangencial están dadas por:

$$kc^2\rho(l) = \frac{M(2l^2 + r_0^2 - r_0^2|l|)}{(M+|l|)(l^2+r_0^2)^2}, K\tau(l = \frac{r_0^2}{(l^2+r_0^2)^2}), kp = \frac{|l|(M|l| - r_0^2)}{(M+|l|)(l^2+r_0^2)^2} \tag{4.6}$$

estas se anulan cuando $l \to \pm\infty$, son regulares en toda la región, la presión radial y la presión tangencial son iguales en la garganta y la presión tangencial se anula sobre esta. En la construcción de la geometría de un agujero de gusano transitable, estamos interesados en soluciones especificas para imponer las condiciones de transitavilidad. Asumimos que un viajero de una civilización absurdamente avanzada empieza el viaje en una estación espacial en el universo inferior con distancia propia $l = -l_1$ y termina en el universo superior en $l = l_2$ y considerando que el viajero tiene una velocidad radial $v(r)$ medida por un observador estático posicionado en r, uno debería relacionar la distancia propia del viajero dl y el radio del viajero dr

Es de principales interés para nuestro trabajo es analizar el agujero de gusano con curvatura escalar cero para ello analizamos la siguiente solución partiendo de una forma explicita para la función $b(r) = r_0$ e integrando ($R = 0$) lo que da como resultado :

$$ds^2 = -(\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{r^2}})dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0^2}{r^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi) \tag{4.7}$$

para evitar la existencia de horizontes de killing la constante M dbe ser positiva, por otro lado del análisis de la región infinita $r \to \infty$

$$ds^2 = -(1 + \frac{2M}{r}) + \frac{M^2 - r_0^2}{r^2} + O(\frac{1}{r^3})dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0^2}{r^2}} + r^2 d\Omega^2 \tag{4.8}$$

cambio de coordenadas

$$r^2 = l^2 + {l_0}^2 \tag{4.9}$$

$$ds^2 = -\left(\sqrt{\frac{r^2 - r0^2}{r^2}}r + M\right)^2 dt^2 r^{-2} + dl^2 + \left(l^2 + {r_0}^2\right) d\Omega^2 \tag{4.10}$$

$$ds^2 = -\left(\sqrt{\frac{l^2}{l^2 + {r_0}^2}}\sqrt{l^2 + {r_0}^2} + M\right)^2 dt^2 \left(l^2 + {r_0}^2\right)^{-1} + dl^2 + \left(l^2 + {r_0}^2\right) d\Omega^2 \tag{4.11}$$

$$ds^2 = -\left(\sqrt{\frac{l^2}{l^2 + {r_0}^2}} + \frac{M}{\sqrt{l^2 + {r_0}^2}}\right)^2 dt^2 + dl^2 + \left(l^2 + {r_0}^2\right) d\Omega^2 \tag{4.12}$$

$$kc^2\rho\,(r) = -\frac{1}{2}\,\frac{\nu\,{r_0}^2}{(l^2 + {r_0}^2)^2} + \frac{1}{4}\mu \tag{4.13}$$

$$k\,\mathrm{Pr}\,(r) = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\sqrt{l^2}{r_0}^2 + \left(-{r_0}^2 - 2\,l^2\right)M\right)\nu}{(l^2 + {r_0}^2)^2\left(\sqrt{l^2} + M\right)} - \frac{1}{4}\mu \tag{4.14}$$

$$kPt\,(r) = -\frac{1}{4}\mu + \frac{1}{2}\,\frac{\left(M\sqrt{l^2} - {r_0}^2\right)\sqrt{l^2}\nu}{(l^2 + {r_0}^2)^2\left(\sqrt{l^2} + M\right)} \tag{4.15}$$

$$k\,\mathrm{Pr}\,(r) = \frac{1}{2}\,\frac{\left(|l|\,{r_0}^2 + \left(-{r_0}^2 - 2\,l^2\right)M\right)\nu}{(l^2 + {r_0}^2)^2\,(|l| + M)} - \frac{1}{4}\mu \tag{4.16}$$

$$kPt\,(r) = -\frac{1}{4}\mu + \frac{1}{2}\,\frac{\left(M\,|l| - {r_0}^2\right)|l|\,\nu}{(l^2 + {r_0}^2)^2\,(|l| + M)} \tag{4.17}$$

consideramos que la métrica debería de ser esfericamente simétrica y estática par simplificar los cálculos

$$ds^2 = -e^{2\Phi}c^2dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{b}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2) \tag{4.18}$$

donde c es la velocidad de la luz y las funciones Φ y b son funciones que solo dependen de el radio. Notemos que la coordenada radial r tiene un especial significado geométrico: $2\pi r$ es la circunferencia de un circulo centrado en la garganta del agujero de gusano, así r es igual a espacio-unión de la coordenada radial. Como un resultado r es no-monótono: esto decrece de $+\infty$ a un valor mínimo b_0 cuando uno se mueve a través del universo inferior hacia el agujero y en la garganta. se incrementa de b_0 a $+\infty$ cuando uno se mueve fuera de la garganta y en el universo superior.

en orden para imponer el campo de ecuaciones de Einstein para un viajero que cruza el agujero, deberíamos necesitar los tensores de Riemann y Einstein para la métrica anterior una bebe demostración . Escribimos nuestra métrica en la forma

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, x^0 = ct, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi \tag{4.19}$$

Los símbolos de Christoffel o coeficientes de conexión $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ y los componentes $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ del tensor de curvatura de Riemann son calculados con las formulas estándar

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(g_{\lambda\beta,\gamma} + g_{\lambda\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\lambda}), \tag{4.20}$$

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha_{\lambda\gamma}\Gamma^\lambda_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\lambda\delta}\Gamma^\lambda_{\beta\gamma} \tag{4.21}$$

donde la coma denota una derivada parcial $g_{\alpha\beta,\gamma} = \partial g_{\alpha\beta}/\partial x^\gamma$

4.2. Condiciones de Energía

para ganar un poco de visión en el enhebrado de materia del agujero de gusano Morris y Thorne definieron la función sin dimensión $\eta = (\tau - \rho)/|\rho|$ que se toma del conjunto de ecuaciones para ρ, p_r la densidad y presión radial respectivamente obtenemos

$$\eta = \frac{\tau - \rho}{|\rho|} = \frac{b/r - b' - 2r(1 - b/r)\phi'}{|b'|} \tag{4.22}$$

que combinado con la condición de planitud, la función exótica toma la forma

$$\eta = \frac{2b^2}{r|b'|}\frac{d^2r}{dz^2} - 2r(1 - \frac{b}{r})\frac{\phi'}{|b'|} \tag{4.23}$$

como ρ, b' y como $(1 - b/r)\phi' \to 0$ en la garganta

$$\eta(r_0) = \frac{\tau_0 - \rho_0}{|\rho_0|} > 0. \tag{4.24}$$

La restricción $\tau_0 > \rho_0$ el estado en que la tensión radial en la garganta debería de exceder la densidad de la energía, esto viola la condición de energía nula. La materia exótica es particularmente un problema para hacer medidas por observadores transitando a través de la garganta con una velocidad radial cercana a la velocidad de la luz. Consideremos una transformación de Lorentz, $x^{\hat{\mu}'} = \Lambda^{\hat{\mu}'}_{\hat{\nu}} x^{\hat{\nu}}$ con $\Lambda^{\hat{\mu}}_{\hat{\alpha}'}\Lambda^{\hat{\alpha}'}_{\hat{\nu}} = \delta^{\hat{\mu}}_{\hat{\nu}}$ donde $\Lambda^{\hat{\mu}}_{\hat{\nu}'}$ se define como

$$(\Lambda^{\hat{\mu}}_{\hat{\nu}'}) \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma v & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

la densidad de energía medida por este observador esta dada por $T_{\hat{0}'\hat{0}'} = \Lambda^{\hat{\mu}}_{\hat{0}'}\Lambda^{\hat{\nu}}_{\hat{0}'}T_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ es decir

$$T_{\hat{0}'\hat{0}'} = \gamma^2(\rho_0 - v^2\tau_0) \tag{4.25}$$

con $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ para velocidades suficientemente altas el observador debería de medir densidades de energía negativas, lo cual se mantiene para agujeros de gusano transitables, no-esféricos y no-estáticos .

La función exótica esta íntimamente relacionada con condición de energía nula, acertá que para cualquier vector nula κ^μ, tenemos $T_{\mu\nu}\kappa^\mu\kappa^\nu \geq 0$ para un tensor de momento-energía diagonal, esto implica $\rho - \tau \geq 0$ y $\rho + p \geq 0$ tomando el campo de ecuaciones de Einstein, evaluando en la garganta r_0 y tomando en cuenta el carácter finito de la función de corrimiento al rojo $1 - b(r)\phi'|_{r_0} < 0$ implica la violación de la condición de energía, las densidades de energía no son esenciales, pero las presiones negativas son necesarias para sostener la garganta del agujero de gusano.

$$kc^2\rho(r) + kPr(r) = -\frac{1}{2}\frac{\nu\, {r_0}^2}{r^4} + \frac{1}{2}\frac{\left(\sqrt{r^2 - {r_0}^2}\,{r_0}^2 + \left({r_0}^2 - 2\,r^2\right)M\right)\nu}{r^4\left(\sqrt{r^2 - {r_0}^2} + M\right)} \tag{4.26}$$

$$kc^2\rho(r) + kPr(r) = -\frac{1}{2}\frac{\nu\, {r_0}^2}{r^4} + \frac{1}{2}\frac{\left(M\sqrt{r^2 - {r_0}^2} - {r_0}^2\right)\sqrt{r^2 - {r_0}^2}\,\nu}{r^4\left(\sqrt{r^2 - {r_0}^2} + M\right)} \tag{4.27}$$

4.3. Existencia de Regiones Asintóticas

La solución de Schwarzschild debería ser interpretada como un agujero de gusano asintóticamente plano para el cual la función forma esta dada por $b(r) = r_0 = const$ sin embargo este no es un agujero transitable entonces este agujero posee un horizonte en la garganta. Esto es dado para la función de corrimiento al rojo que tiene la forma $e^{2\phi(r)} = 1 - r_0/r$. Uno puede construir agujero de gusano transitables pero demanda que la función de corrimiento al rojo no tenga horizontes y mantenga los componentes de la métrica radial in la forma $-g_{rr}^{-1} = 1 - r_0/r$

La noción de asintóticamente plano juega un papel importante en an las teorías gravitacionales. considerando un espacio esfericamente simétrico donde la métrica satisface el espacio vació las ecuaciones de Einstein $R_{ij} = 0$ dado por la solución de Schwarzschild entonces lejos del espacio esfericamente simétrico cuando $r \to \infty$ los componentes g_{ij} toman valores Minkowskianos, así el comportamiento del campo gravitacional de un sistema y los componentes de la métrica en el infinito son muy interesantes en teoría de relatividad general y en teorías de gravedad modificada. Nuestro actual universo no es asintóticamente plano como podríamos esperarlo para la materia presente a cualquier distancia así una aproximación es usada en un modelo geométrico esférico de un agujero o una estrella para estudiar su campo gravitacional, los primeros estudios que puntualizaron la importancia de este concepto fueron realizados por Bondi, van der Burg, Metzner y Sachs quienes enfatizaron la importancia que juegan las superficies nulas para entender las propiedades asintóticas de un campo gravitacional, ellos usaron la caracterización de superficies para estudiar los componentes métricos y las propiedades del tensor de curvatura en un limite asintótico. Una construcción de coordenadas libres de infinito nulo y la noción de asintóticamente plano para un espacio-tiempo general introducido por Penrose, la idea principal es adjuntar un limite al espacio-tiempo de tal manera que las propiedades coincidan con las propiedades geométricas en el limite $\mathbb{I}^{\pm}$ para un espacio-tiempo de Minkowski entonces es llamado un espacio asintóticamente plano, una transformación conforme Ω en el espacitiempo original M puede ser introducido tal que $\Omega \to 0$ cerca del infinito y el nuevo espacio tiempo no-físico $(\bar{M}, \Omega^2 g_{ij})$ es compactado. En $(\bar{M}, \Omega^2 g_{ij})$ la superficie acotada de $\bar{M}$ corresponde al infinito del del espacio-tiempo M. Específicamente un espacio-tiempo (M, g_{ij}) es llamado asintóticamente plano si un nuevo espacio-tiempo no físico $(\bar{M}, \bar{g})$ con una cota $\mathbb{I}$ existe tal que $\bar{M} - \mathbb{I}$ es difeomorfismo a M con $\Omega > 0$ y $\bar{g}_{ij} = \Omega^2 g_{ij}$ con las siguientes condiciones:

1. La nueva carta no física $\bar{M}$ es suave en todo lados incluyendo el limite.
2. El factor conforme Ω es suave en todos lados y $\omega = 0$ en $\mathbb{I}$.
3. Todas las geodésicas nulas maximalmente extendidas en $\bar{M}$ tienen un punto de terminación pasado y futuro en $\mathbb{I}$
4. Esta es una vecindad de $\mathbb{I}$ en M donde g_{ij} satisface la ecuación de Einstein en el vació R_{ij}

4.4. Ecuación de Estado

despejando r obtenemos la siguiente ecuación

$$r^2 = \frac{1}{2}\epsilon\sqrt{2}\sqrt{\frac{\nu r_0^2}{-\kappa c^2\rho + \frac{1}{4}\mu}} \tag{4.28}$$

sustituyendo esta ecuación en la presión radial y tangencial

$$\kappa P_r(r) = \frac{2(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\epsilon^2\nu r_0^2}{-\kappa c^2\rho+\frac{1}{4}\mu} - 4r_0^2}r_0^2 + (r_0^2 - \frac{\epsilon^2\nu r_0^2}{-\kappa c^2\rho+\frac{1}{4}\mu})M)(-\kappa c^2\rho + \frac{1}{4}\mu)^2}{\nu\epsilon^4 r_0^4(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\epsilon^2\nu r_0^2}{-\kappa c^2\rho+\frac{1}{4}-4r_0^2}} + M)} - \frac{1}{4}\mu \tag{4.29}$$

$$\kappa P_t(r) = -\frac{1}{4}\mu + \frac{(\frac{1}{2}M\sqrt{\frac{2\epsilon^2\nu r_0^2}{-\kappa c^2\rho+\frac{1}{4}\mu} - 4r_0^2} - r_0^2)\sqrt{\frac{2\epsilon^2\nu r_0^2}{-\kappa c^2\rho+\frac{1}{4}\mu} - 4r_0^2}(-\kappa c^2\rho + \frac{1}{4}\mu)^2}{\nu\epsilon^2 r_0^2(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\epsilon 2\nu r_0^2}{-\kappa c^2\rho+\frac{1}{4}\mu} - 4r_0^2} + M)} \tag{4.30}$$

Capítulo 5

Conclusiones

Se mostró la existencia de agujeros de gusano con curvatura escalar cero en la teoría $f(T)$ mediante la construcción de una solución. El espacio tiempo considerado es estático y esfericamente simétrico mientras que el tensor de energía-momento corresponde a un fluido anisotropico. La geometría y fuentes de materia de la solución construida son regulares y representa un agujero de gusano que conecta dos regiones asinptóticamente planas. A partir de la solución construida fue posible obtener una ecuación de estado para el tipo de materia que permite formar un agujero de gusano. Otra característica que tiene la solución construida es que esta se reduce al caso de la teoría de la Relatividad General de Einstein cuando $nu = 0$ y $mu = 1$. Mientras que para ρ la geometría coincide con la geometría del agujero de gusano de Thorne. Es importante resaltar que la solución construida tiene un efecto que refleja su origen dentro de teoría $f(T)$ que se puede manifestar porque aunque la geometría es asinptóticamente plana (y no asimptoticamente anti-de Sitter) existe un efecto asociado al parámetro ν que en las fuentes de materia funge como constante cosmologica.

Bibliografía

[1] Ayman A. Aly and M.M. Selim. Behavior of $f(t)$ dark energy model in fractal cosmology. *The European Physical plus*, 130:7, 2015.

[2] Carlos Barceló and Luis J. Garay. Wormhole effective interctions in anti-de sitter spacetime. *gr-qc*, 9803035, 1998.

[3] S. Capozziello. Constraining $f(t)$ teleparallel gravity by big bang nucleosynthesis. *astro-ph*, 1702, 2017.

[4] Itzia Alejandra Bonilla Paz Maria Magdalena Tinoco Villa José Vega Cabrera Gabino Estevez Delgado, Joaquin Estevez Delgado. Analisis de un agujero de gusano con curvatura escalar cero. *xii Encuentro Participacion de la Mujer En la Ciencia*, page 5, 2015.

[5] Onur Genc. Some aspects of morris-thorne wormhole in scalar tensor theory. *gr-qc*, 1709, 2017.

[6] A. Awad W. Hanif. Phase portrats of general $f(t)$ cosmology. *gr-qc*, 1710, 2017.

[7] A. Yu. Petrov J. R Nascimiento and P. J. Porfírio. Traversable wormholes in chern-simons modified gravity. *gr-qc*, 1712, 2018.

[8] SUBEOM KANG and DONG-HAN YEOM. Fuzzy euclidean wormhole in anti-de sitter. *gr-qc*, 1703, 2017.

[9] Peter K. F. Kuhfitting. Wormholes in $f(r)$ gravity with a nonconmmutative-geometry background. *gr-qc*, 1801, 2018.

[10] Francisco S.N Lobo. *Wormholes, Warp Drives and Energy Conditions*. Springer, first edition, 2017.

[11] Iqra Nawazish M. Sharif. Wormohole geometry and noether symetry in $f(r)$ gravity. *Elsevier, Annals of physics*, 389:23, 2018.

[12] Farzana Kousar M. Zubair and Sebastian Bahamonde. Static spherically symetric wormholes in generalized $f(r,\phi)$ gravity. *gr-qc*, 1712, 2017.

[13] Liat Maoz. Wormhole in ads. *Elsevier*, 6:11, 2005.

[14] Pablo Rodríguez Mauricio Cataldo, Luis Liempi. Traversable schwarzschild-like wormholes. *The Europena Physical Journal C*, 77:9, 2017.

[15] Mohammmad Reza Mehdizadeh and Amir Hadi Ziaie. Dynamic wormhole solutions in einstein-cartan garvity. *gr-qc*, 1709, 2017.

[16] Behrouz Mirza and Fatemeh Oboudia. Mimetic $f(t)$ teleparallel gravity and cosmology. *gr-qc*, 1712, 2017.

[17] Sailajanada Mukherjee Matt Visser Naresh Dadhich, Sayan Kar. $r = 0$ spacetimes and self-dual lorentzian wormholes. *Phys.Rev.D65:064004*, 65:8, 2001.

[18] Gamal G.L. Nashed. Karr-nut black hole thermodynamics in $f(t)$ gravity theories. *The European Physical plus*, 130:9, 2015.

[19] G.G.L. Nashed. $(1+4)$-dimensional spherically symetric black holes in $f(t)$. *pleiades Publishing*, 23:7, 2015.

[20] V.K Oikonomou. On the viability of the intermediate inflation scenario with $f(t)$ gravity. *gr-qc*, 1703, 2017.

[21] Paul Franklin Oliver James, Eugenie von Tunzelmann and Kip S. Thorne. Visualizing interstellar s wormhole. *American of Physics*, 83:15, 2015.

[22] R.A.C. Correa P.H.R.S. Moraes, W. de Paula. Charged wormholes in $f(r,t)$ extended theory of gravity. *gr-qc*, 1710, 2017.

[23] Manuel E. Rodriguez and Ednaldo L. B Junior. Spherical accertion of matter by charged black holes en $f(t)$ gravity. *gr-qc*, 1606, 2016.

[24] L.G Slako S.B Nassur, M.J.S Houndjo and J. Tossa. Interactions of some fluid with dark energy in $f(t)$ theory. *physics.gen-ph*, 1601, 2016.

[25] Bernard Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge university press, second edition, 2009.

[26] M. Shamir and Seeda Zia. Existence of static wormhole solutions in $f(r,g)$ gravity. *physics*, 1712, 2017.

[27] M. Sharif and Saadia Mumtaz. Schwarzschild- de sitter and anti-de sitter thini shell wormholes and their stability. *Hindawi*, 2014:13, 2014.

[28] Muhammad Sharif and Shamaila Rani. Gravity and static wormhole solutions. *World Scientific*, 29:14, 2014.

[29] Matt Visser. *LORENTZIAN WORMHOLES*. sPRINGER VERLAG, first edition, 1995.

[30] Robert Wald. *General Relativity*. The university of Chicago Press, first edition, 1984.

[31] Steven Weinberg. *GRAVITATION AND COSMOLOGY: PRINCIPLES AND APPLICATIONS OF THE GENERAL THEORY OF RELATIVITY*. John Wiley sons, first edition, 1972.

[32] Mariafelicia De Laurentis Yi-Fu Cai, Salvatore Capozziello and Emmanuel N Saridakis. $f(t)$ teleparallel gravity and cosmology. *gr-qc*, 1511, 2016.

[33] Michael Lohse. Christian Schweizer. Hannah M. Price. Oded Zilberberg and Immanuel Bloch. Exploring 4d quantum hall physics with a 2d topological charge pump. *Nature*, 8, 2017.