UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
FACULTAD DE CIENCIAS FISICO MATEMÁTICAS
"LUIS MANUEL RIVERA GUTIERREZ"

T E S I S

ESTUDIO DE FAMILIAS CASI AJENAS, APLICACIONES A LA TOPOLOGÍA Y AL ANÁLISIS

Que para obtener el título de:
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

P R E S E N T A:
Jean Brandon Ramírez Chávez

Dirigida por:
Dr. Fernando Hernández Hernández
Dr. Ulises Ariet Ramos García

Morelia, Michoacán. Marzo del 2018.

Agradecimientos.

Quiero agradecer a mi familia, por el apoyo incondicional y todo el amor que siempre he recibido de ellos, sus palabras y su cario hacía mi, porque siempre han estado ahí cuando los he necesitado y sé que será siempre así, sin ellos yo sería nada, mil gracias.

Agradezco a Fer, que ha además de ser mi profesor es también un amigo, por toda su ayuda y sus consejos, agradezco también a Malú por todas sus enseñanzas durante mi estancia en fismat, a Ariet por su importante ayuda durante la realización de mi tesis, y a todos mis demás profesores porque cada uno se encargo de transmitirme algo de su conocimiento. Gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigacíín e Innovación tecnológica (PAPIIT) por la financiación al proyecto: Grupos extremadamente disconexos y teora de conjuntos, con clave: IA100517, del cual forma parte esta tesis.

Quiero agradecer a todos mis amigos que me han acompañado a lo largo de mi carrera, por todos los momentos que he pasado junto a ellos, a todas las princesas cuya amistad he disfrutado tanto, a Gil, Eve, Rubas, Pablito, Atziri, Sofi, Ada y especialmente a Eva que ha sido tan importante para mí, por sus palabras, su apoyo y confianza que siempre están cuando lo necesito. Agradezco también a William que ha sido uno de mis grandes amigos durante estos años y a Piter cuya compañía ha sido siempre grata.

Doy gracias a Dios por permitirme llegar a este punto de mi vida, es gracias a él que he tenido la dicha de conocer tanta gente maravillosa, de haber cursado esta hermosa carrera y de tener la gran familia que tengo.

Gracias a todos.

Índice general

Resumen.

Enfocamos nuestro trabajo al estudio de familias casi ajenas, estudiamos de alguna forma el cómo se comportan, es decir, cómo se intersectan entre sí sus elementos, pues esto nos da información valiosa. Luego para una familia casi ajena $\mathcal{A}$ definimos los espacios $\Psi(\mathcal{A})$, $K_{\mathcal{A}}$ y $C(K_{\mathcal{A}})$, es aquí donde sale a relucir la importancia que tienen ese tipo de detalles de la familia $\mathcal{A}$, y se refleja en la topología de los espacios mencionados. Por mencionar un ejemplo, cuando tenemos una familia casi ajena $\mathcal{A}$ y dicha familia es tal que las intersecciones de sus elementos son "pequeñas", podemos ajenizar por completo dicha familia sin alterar su esencia y en estos casos el espacio $C(K_{\mathcal{A}})$ resulta tener una estructura bastante conocida. Entonces el objetivo principal de este trabajo es el estudiar cómo pueden conectarse estas tres áreas: la combinatoria con la topología y el análisis.

Palabras clave: Combinatoria infinita, Álgebras Booleanas, compactación por un punto, Mrówka-Isbell, Teorema de Stone.

Abstract

This work focus on the study of almost disjoint families and the behavior of those objects. We analyze how their elements intersect, so that gives us valioius information. Then for and almost disjoint family $\mathcal{A}$ we define the spaces $\Psi(\mathcal{A})$, $K_{\mathcal{A}}$ and $C(K_{\mathcal{A}})$. It is here where the relevance of the details above appears and they are reflected on the topology of the spaces already mentioned. To illustrate the point, when we have an almost disjoint family such that the intersection of its elements are "small", without changing its fundamental structure, we can alienate it and in this case the space $C(K_{\mathcal{A}})$ results with a structure well known. As a result, the main goal of this work is the study of links between combinatory, topology and analysis.

Introducción

El objetivo principal de esta tesis es el estudio de familias casi ajenas y mostrar alguna aplicaciones a la topología principalmente y al análisis. Una familia casi ajena $\mathcal{A}$ es una colección de conjuntos tal que la intersección de cualesquiera dos elementos en $\mathcal{A}$ es finita. Comenzamos exponiendo de manera muy general algunas propiedadas de dichas familias y un par de ejemplos bastante sencillos.

En los capítulos 1 y 2 estudiamos un poco sobre álgebras booleanas y el Teorema de representación de Stone respectivamente, ambas herramientas que se usarán en algún punto del trabajo. En el cápitulo 3 entramos ya un poco más en materia y hablamos sobre las familias casi ajenas que son la base de esta tesis.

En el cápitulo 4 a partir de una familia casi ajena construimos un espacio topológico llamado Ψ-espacio o espacio de Mrówka-Isbell. Dichos espacios aparecieron por primera vez en 1926 en un trabajo de Alexandroff y Urysohn llamado: *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*, siendo redescubiertos independientemente más tarde por Mrówka en 1954. Luego a partir del capítulo 5 comenzamos a estudiar el espacio $K_{\mathcal{A}}$, que es la compactación por un punto de $\Psi(\mathcal{A})$, y el espacio de funciones continuas $C(K_{\mathcal{A}})$. Es importante recalcar que el objetivo principal de este trabajo es analizar cómo afectan las propiedades puramente combinatorias de $\mathcal{A}$ en las propiedades topológicas de $\Psi(\mathcal{A})$ y de $K_{\mathcal{A}}$ y a su vez de que manera afecta esto al espacio $C(K_{\mathcal{A}})$.

Capítulo 1

Álgebras Booleanas.

Definición 1.1. Una *álgebra booleana* es una tupla $\mathbb{A} = \langle A, +, \cdot, ^c, 0, 1\rangle$, donde A es un conjunto, 0 y 1 son dos elementos (distintos) de A, y $+$ y $\cdot$ son operaciones binarias sobre A y ^{c} es una operación unitaria sobre A, que satisfacen que para todos $a, b, c \in A$:

- (conmutatividad) $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$.
- (asociatividad) $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- (absorción) $(a + b) \cdot b = b$, $(a \cdot b) + b = b$.
- (complementos) $a + a^c = 1$, $a \cdot a^c = 0$.
- (distributividad) $(a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$, $(a \cdot b) + c = (a+c) \cdot (b+c)$.

Ejemplo 1.2. Un ejemplo de álgebras booleanas son las álgebras de conjuntos, es decir, la tupla $\langle \wp(A), \cup, \cap, A\setminus, \emptyset, A\rangle$ para cualquier conjunto A.

Ejemplo 1.3. Otro ejemplo de álgebra booleana es el conjunto de abiertos-cerrados de un espacio topológico. Ahondaremos un poco más en esta álgebra más adelante.

Podemos definir un orden parcial $\leq$ sobre una álgebra booleana $\mathbb{A}$ poniendo $a \leq b \Leftrightarrow a + b = b$ (o equivalentemente, $a \cdot b = b$) para cualesquiera a, b en A. En las álgebras de potencias de conjuntos esto resulta ser el orden de la contención $\subseteq$.

1.1. Filtros y ultrafiltros.

Definición 1.4. Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana. Un *filtro* en $\mathbb{A}$ es un subconjunto F de A que satisface las siguientes condiciones:

1. $1 \in F,\ 0 \notin F$.
2. Si $a, b \in F$ entonces $a \cdot b \in F$.
3. Si $a \in F$ y $a \leq b$, entonces $b \in F$.

De manera dual se define la noción de *ideal*, el cual es un subconjunto I de A que satisface:

1. $0 \in I,\ 1 \notin I$.
2. Si $a, b \in I$ entonces $a + b \in I$.
3. Si $a \in I$ y $b \leq a$, entonces $b \in I$.

Dado un filtro F en una álgebra booleana $\mathbb{A}$, se define el *ideal dual* de F como el conjunto $I_F = \{a \in A : a^c \in F\}$. De manera análoga, dado un ideal I, se define el filtro dual de I como $F_I = \{a \in A : a^c \in I\}$.

Dado un conjunto P, se define el *filtro generado por* P como el mínimo filtro que contiene a P y lo denotamos como $\langle P \rangle$; hablamos de mínimo en el sentido de la contención, es decir, si F es un filtro que contiene a P entonces $\langle P \rangle \subseteq F$.

Si F es un filtro tal que $F = \langle P \rangle$, decimos que P es *base* para F.

Se dice que un filtro F es *principal* si éste tiene una base que consta de un único elemento de $A \setminus \{0\}$, es decir, cuando existe $a \in A$ tal que $F = \{x \in A : a \leq x\}$.

Gracias al ***Teorema de representación de Stone***, siempre que hablemos de una álgebra booleana $\mathbb{A} = \{A, +, \cdot, ^c, 0, 1\}$ podemos suponer que se trata de una álgebra de conjuntos, en lo sucesivo, y esperando que no haya confusión, trataremos a A como un subconjunto del conjunto potencia de algún conjunto B, usaremos $\cup$ y $\cap$ como las operaciones binarias y además usaremos $0, 1$ y $\oslash, B$ de manera indistinta. Todo esto lo justificaremos más adelante cuando demostramos el teorema mencionado.

Un subconjunto P de A tiene la *propiedad de intesección finita* (pif) si todo subconjunto finito G de P cumple $\bigcap G \neq \oslash$.

Un resultado que nos dice cuando podemos encontrar un filtro que contenga a un subconjunto P de A es el siguiente:

Lema 1.5. Sea $P \subseteq A$, P está contenido en algún filtro si y sólo si P satisface la pif.

Demostración. Sea $P \subseteq A$ tal que existe F filtro con $P \subseteq F$. Por definición F es cerrado bajo intersecciones finitas, entonces para cualquier subconjunto G de P, $\bigcap G \in F$, también por definición $\oslash \notin F$, entonces $\bigcap G \neq \oslash$, así P satisface la pif.

Supongamos ahora que P que satisface la pif, sea

$$F = \{X \in A : (\exists G \in [P]^{<\omega}) \bigcap G \subseteq X\}$$

veamos que F es filtro. Como P satisface la pif entonces $\oslash \notin F$ y claramente $A \in F$; si $X, Y \in F$ es porque existen G_X, G_Y subconjuntos finitos de P tales que $\bigcap G_X \subseteq X$ y $\bigcap G_Y \subseteq Y$, entonces $\bigcap(G_X \cup G_Y) \subseteq X \cap Y$. Ahora, si $X \in F$ y $Y \in A$ son tales que $X \subseteq Y$, entonces $\bigcap G_X \subseteq X \subseteq Y$, es decir, $Y \in F$. Entonces F es filtro en A. $\square$

Definición 1.6. Un filtro F es un *ultrafiltro* si es un filtro maximal en $\mathbb{A}$, es decir, para cada filtro G tal que $F \subseteq G$ se tiene que $F = G$.

Algunos resultados clásicos y útiles sobre filtros son los siguientes.

Teorema 1.7 (Teorema del Ultrafiltro)**.** Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y F un filtro en $\mathbb{A}$. Existe un ultrafiltro U en $\mathbb{A}$ tal que $F \subseteq U$.

Demostración. Sea $X = \{G \subseteq A : G$ es filtro y $F \subseteq G\}$. $F \in X$ entonces es no vacío, sea $\mathcal{C} \subseteq X$ una cadena[1] no vacía. Veamos que $\bigcup \mathcal{C}$ también es un filtro; es claro que $\oslash \notin \bigcup \mathcal{C}$ pues para cualquier $C \in \mathcal{C}$, $\oslash \notin C$, igualmente es claro que $A \in \bigcup \mathcal{C}$. Sean $A, B \in \bigcup \mathcal{C}$, existen $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ tales que $A \in C_1$, $B \in C_2$, sin pérdida de generalidad supongamos $C_1 \subseteq C_2$, esto

[1] Esto quiere decir que para cualesquiera $a, b \in \mathcal{C}$ o bien $a \subseteq b$ o $b \subseteq a$.

quiere decir que $A, B \in C_2$ y por lo tanto $A \cap B \in C_2 \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. También si $A \in \bigcup \mathcal{C}$ y $B \in A$ son tales que $A \subseteq B$, existe $D \in \mathcal{C}$ tal que $A \in C$ y también $B \in C \subseteq \bigcup \mathcal{C}$, por lo tanto $\bigcup \mathcal{C}$ es filtro. Usando Lema de Zorn concluimos que X tiene elementos maximales, por lo tanto existe $U \in X$ ultrafiltro tal que $F \subseteq U$. □

Corolario 1.8. Si $\mathbb{A}$ es una álgebra booleana y $P \subset A$ satisface la pif, entonces existe ultrafiltro U en $\mathbb{A}$ tal que $P \subseteq U$.

Teorema 1.9. Sea F un filtro sobre una álgebra booleana $\mathbb{A}$. Son equivalentes:

(1) F es un ultrafiltro.

(2) F es un filtro *primo*, es decir, para cualesquiera $a, b \in A$ con $a \cup b \in F$ se tiene que o bien $a \in F$ o $b \in F$.

(3) Para cualquier $a \in A$, o bien $a \in F$ o $a^c \in F$.

Demostración. (1)⇒(3) Sea F ultrafiltro en $\mathbb{A}$ y $a \in A$ tal que $a, a^c \notin F$, veamos que $F \cup \{a\}$ satisface la pif. Basta ver que para cualquier $X \in F$, $X \cap a \neq \oslash$; supongamos que existe $X \in F$ tal que $X \cap a = \oslash$, entonces $X \subseteq a^c$, esto quiere decir que $a^c \in F$, esto es una contradicción, entonces $F \cup \{a\}$ satisface la pif, por el Lema 1.8 existe U ultrafiltro tal que $F \cup \{a\} \subseteq U$, lo cual es una contradicción, pues F es maximal.

(3)⇒(1)Sea F filtro en $\mathbb{A}$ que cumple (3) y supongamos que no es maximal, entonces existe filtro maximal U tal que $F \subseteq U$, sea $X \in U \setminus F$, entonces $X^c \in F \subseteq U$, esto quiere decir que $\oslash = X \cap X^c \in U$, lo cual es una contradicción. Entonces $F = U$.

(3)⇒(2)Sea F filtro en $\mathbb{A}$ y $a, b \in A$ tales que $a \cup b \in F$ y supongamos que $a, b \notin F$, entonces, por hipótesis $a^c, b^c \in F$, entonces $a^c \cap b^c = (a \cup b)^c \in F$, esto quiere decir que $\oslash = (a \cup b) \cap (a \cup b)^c \in F$, lo cual es una contradicción, entonces F es primo.

(2)⇒(3)Sea F filtro en $\mathbb{A}$ y supongamos que existe $a \in A$ tal que $a, a^c \notin F$, pero $A = a \cup a^c \in F$, entonces F no es primo. □

1.2. Homomorfismos

Definición 1.10. Sean $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ álgebras booleanas. Un *homomorfismo* de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$ es una función $f : A \to B$ tal que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$, además para todos $x, y \in A$,

- $f(x \cup y) = f(x) \cup f(y)$.
- $f(x \cap y) = f(x) \cap f(y)$.
- $f(x^c) = f(x)^c$.

Un *monomorfismo* es un homomorfismo inyectivo. Un *epimorfismo* es un homomorfismo suprayectivo. Un *isomorfismo* es un homomorfismo biyectivo.

Más adelante consideraremos un caso particular de álgebras generadas por conjuntos llamados *familias casi ajenas*, que definiremos luego, nos serviremos de isomorfimos entre estas álgebras para conocer más estos conjuntos y decir cuándo son "parecidos".

Sea $f : A \to B$ un homomorfismo de álgebras booleanas. Se define el *núcleo* de f por $nuc(f) = \{a \in A : f(a) = 0\}$.

El dual del núcleo de un homomorfismo f es conocido como la *coraza* de f, y se denota como $cor(f)$.

Proposición 1.11. 1. $nuc(f)$ es un ideal.

2. $cor(f)$ es un filtro.

3. $f(A)$ es una subálgebra de $\mathbb{B}$.

Demostración. 1. Por definición de homomorfismo $0 \in nuc(f)$ y $1 \notin nuc(f)$. Sean $a, b \in nuc(f)$, $f(a \cup b) = f(a) \cup f(b) = 0$, entonces $a \cup b \in nuc(f)$. Sea $x \in nuc(f)$ y $y \subseteq x$, esto quiere decir que $y = x \cap y$, entonces $f(y) = f(x) \cap f(y) = 0 \cap f(y)$, entonces $f(y) = 0$.

2. $cor(f)$ es el filtro dual de $nuc(f)$.

3. Por ser f homomorfismo tenemos que $f(0) = 0 \in f(A)$ y $f(1) = 1 \in f(A)$, ahora sean $x, y \in f(A)$ entonces existen $a, b \in A$ tales que $f(a) = x$, $f(b) = y$, entonces tenemos $x \cap y = f(a) \cap f(b) = f(a \cap b) \in f(A)$, también tenemos $x \cup y = f(a) \cup f(b) = f(a \cup b) \in f(A)$, por último tenemos $x^c = f(a)^c = f(a^c) \in f(A)$. Por lo tanto $f(A)$ es una subálgebra de $\mathbb{B}$.

□

Proposición 1.12. f es monomorfismo si y sólo si $nuc(f) = 0$.

Demostración. Sea f monomorfismo, $a \in nuc(f)$, $f(a) = 0 = f(0)$, entonces $a = 0$. Ahora supongamos que $nuc(f) = 0$, veamos que f es monomorfismo, supongamos que no y sean $a, b \in \mathbb{A}$ tales que $f(a) = f(b)$, entonces $f(a) \cap f(b)^c = f(b) \cap f(b)^c = \oslash$. Esto quiere decir que $f(a \cap b^c) = 0$, entonces $a \cap b^c = 0$, entonces $a \subseteq b$. Ahora, también tenemos que $f(a)^c \cap f(b) = f(b \cap a^c) = 0$, entonces $b \cap a^c = 0$, entonces $b \subseteq a$ y por lo tanto $a = b$. Entonces f es monomorfismo. □

Es es fácil demostrar que también f es monomorfismo si y sólo si $cor(f) = 1$.

A continuación hablaremos sobre una álgebra que será importante un poco más adelante en nuestro trabajo.

1.3. El álgebra de conjuntos cerrados-abiertos.

Damos por conocidas las nociones básicas de la topología general, sólo recordaremos algunas definiciones importantes que usaremos a lo largo de esta sección.

Definición 1.13. Un espacio topoógico X es *cerodimensional* si tiene una base de conjuntos abiertos y cerrados, también llamados *clopens.*

X es *booleano* si es compacto, Hausdorff y cerodimensional.

Proposición 1.14. Sea X un espacio topológico,

$$Clop(X) = \{A \subseteq X : A \text{ es clopen}\}$$

es una álgebra de conjuntos.

Demostración. $\oslash$, $X \in Clop(X)$. Las uniones e intersecciones finitas de abiertos/cerrados también son abiertos/cerrados. El complemento de un clopen también es clopen. □

Teorema 1.15. Sea X un espacio booleano. $Clop(X)$ es la única subálgebra de $\wp(X)$ que es base para la topología de X.

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ subálgebra de $\wp(X)$ que es base para X, $\mathcal{B}$ es cerrada bajo complementos, entonces todo elemento de $\mathcal{B}$ también es cerrado, entonces $\mathcal{B} \subseteq Clop(X)$. Ahora, sea $V \in Clop(X)$, por ser V abierto y $\mathcal{B}$ base, para cada $x \in V$ existe $U_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_x \subseteq V$. $\{U_x : x \in V\}$ es una cubierta abierta de V, por ser V cerrado y X compacto, entonces V también es compacto, existen $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ tales que $V = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup ... \cup U_{x_n}$. Esto nos dice que V es unión finita de elementos de $\mathcal{B}$, entonces $Clop(X) \subseteq \mathcal{B}$. Concluimos que $Clop(X) = \mathcal{B}$. $\square$

Capítulo 2

Teorema de representación de Stone.

En esta sección daremos un breve vistazo al Teorema de representación de Stone, que nos dice cómo dada una álgebra booleana $\mathbb{A}$, podemos obtener un espacio topoógico booleano, llamado *espacio de Stone*, denotado como $Ult(\mathbb{A})$ tal que $\mathbb{A}$ sea isomorfa a $Clop(Ult(\mathbb{A}))$; y viceversa, dado un espacio toplógico booleano X, entonces X es homeomorfo a $Ult(Clop(X))$. Esto nos será útil más adelante cuando estudiemos cómo la combinatoria de una familia casi ajena influye en la topología de un espacio creado a partir de ésta, que es a donde va encaminada una parte de nuestro trabajo. Cabe mencionar que el Teorema de Stone va más allá de esto y nos dice con el Teorema de Dualidad, que la categoría de las álgebras booleanas, comúnmente denotada como **BA**, es dualmente isomorfa a la categoría de los espacios topológicos booleanos, **BS**. El lector interesado en ahondar en esto puede consultar en [3].

2.1. El espacio de Stone de una álgebra booleana.

Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana. Llamaremos $Ult(\mathbb{A})$ al conjunto de ultrafiltros en A. Se define la función $s : A \to \wp(Ult(\mathbb{A}))$ (mapeo de Stone) por

$$s(a) = \{p \in Ult(\mathbb{A}) : a \in p\}$$

El conjunto $Ult(\mathbb{A})$ puede ser dotado de manera natural con una topología, llamada la *topología de Stone*, que tiene como base a $s[A] = \{s(a) : a \in A\}$.

Proposición 2.1. Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana y s el mapeo de Stone, entonces $s[A]$ es base para una topología de $Ult(\mathbb{A})$.

Demostración. Primero, sea $x \in Ult(\mathbb{A})$, es claro que para cualquier $a \in x \subseteq A$, $x \in s(a)$. Ahora, sean $a, b \in A$ tales que $s(a) \cap s(b)$ no es vacío; sea $y \in s(a) \cap s(b)$, entonces $a \cup b \in y$, vamos a ver que $s(a \cap b) \subseteq s(a) \cap s(b)$. Sea $z \in s(a \cap b)$, esto nos dice que $a \cap b \in z$ entonces $a \in z$ y $b \in z$, así $z \in s(a) \cap s(b)$. Concluimos que $s[A]$ es base. $\square$

Ahora, dada una álgebra booleana $\mathbb{A}$ podemos hablar del espacio topológico $Ult(\mathbb{A})$. Este espacio se conoce como *espacio de Stone* de $\mathbb{A}$.

Proposición 2.2. Sea $\mathbb{A}$ una álgebra booleana, entonces el espacio de Stone de $\mathbb{A}$ es booleano.

Demostración. Primero vamos a ver que $Ult(\mathbb{A})$ es cerodimensional. Sea $a \in A$ y $x \in Ult(\mathbb{A})$, veamos que $x \in s(a) \cup s(a^c)$. Supongamos que $a \notin x$, o sea $a \notin s(a)$, por ser x ultrafiltro (Teorema 1.9) tenemos que $a^c \in x$, entonces $x \in s(a^c)$. De esto tenemos que $Ult(\mathbb{A}) = s(a) \cup s(a^c)$. Ahora supongamos que existe $y \in s(a) \cap s(a^c)$, entonces $\oslash = a \cap a^c \in y$, lo que es una contradicción; así $s(a) \cap s(a^c) = \oslash$. Entonces las vecindades básicas de $Ult(\mathbb{A})$ son abiertas y cerradas, por lo tanto $Ult(\mathbb{A})$ es cerodimensional.

Veamos ahora que $Ult(\mathbb{A})$ es compacto. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $Ult(\mathbb{A})$, podemos pensar que los elementos de $\mathcal{U}$ son básicos, de este modo existe $B \subseteq A$ tal que $\mathcal{U} = \{s(b) : b \in B\}$, supongamos que ningún subconjunto finito de $\mathcal{U}$ cubre a $Ult(\mathbb{A})$, entonces para todo $\{b_1, b_2, ..., b_n\} \subseteq B$, $s(b_1) \cup s(b_2) \cup \cdots \cup s(b_n) \neq Ult(\mathbb{A})$, esto es, existe x ultrafiltro tal que $b_1, ..., b_2 \notin x$, por Teorema 1.9, $b_1 \cup \cdots \cup b_n \notin x$, en particular $b_1 \cup \cdots \cup b_n \neq 1$, de esto tenemos que $b_1^c \cap \cdots \cap b_n^c \neq \oslash$, es decir, el conjunto $-B = \{b^c : b \in B\}$ satisface la pif y por 1.8 existe ultrafiltro $y \in Ult(\mathbb{A})$ tal que $-B \subseteq y$. Obserevemos que para cada $b \in B$, $b^c \in y$, entonces $b \notin y$ (Teorema 1.9), es decir $y \notin s(b)$, lo que contradice que $\mathcal{U}$ sea cubierta.

Falta ver que $Ult(\mathbb{A})$ es Hausdorff, sean $x \neq y \in Ult(\mathbb{A})$, entonces existe $a \in A$ tal que $a \in x$ pero $a \notin y$, entonces $a^c \in y$, o sea que $x \in s(a)$, $y \in s(a^c)$, algunas líneas arriba observamos que para cualquier $a \in A$, $s(a) \cap s(a^c) = \oslash$, entonces $Ult(\mathbb{A})$ es Hausdorff. $\square$

Teorema 2.3 (Teorema de Representación de Stone, 1936)**.** Toda álgebra booleana es isomorfa al álgebra característica de un espacio booleano, concretamente, el espacio dual de $\mathbb{A}$; y el mapeo de Stone es un isomorfismo de $\mathbb{A}$ sobre $Clop(Ult(\mathbb{A}))$.

Demostración. Sea $\mathbb{A} = \langle A, +, \cdot, ^c, 0, 1\rangle$ una álgebra booleana, observemos primero que s es homomorfismo. Sean $a, b \in A$

$$\begin{aligned} s(a \cdot b) &= \{x \in Ult(\mathbb{A}) : a \cdot b \in x\} = \{x \in Ult(\mathbb{A}) : a \in x \text{ y } b \in x\} \\ &= s(a) \cap s(b). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} s(a + b) &= \{x \in Ult(\mathbb{A}) : a + b \in x\} = \{x \in Ult(\mathbb{A}) : a \in x \text{ o } b \in x\} \\ &= s(a) \cup s(b). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} s(a^c) &= \{x \in Ult(\mathbb{A}) : a^c \in x\} = \{x \in Ult(\mathbb{A}) : a \notin x\} = Ult(\mathbb{A}) \setminus s(a) \\ &= s(a)^c. \end{aligned}$$

Es claro que $s(0) = \oslash$ y $s(a) = Ult(\mathbb{A})$.

Veamos ahora que s es inyectiva. Sean $a \neq b \in A$. De aquí se tiene que, o bien $a \nleq b$ o $b \nleq a$. Supongamos que $a \nleq b$ (el otro caso es análogo). De este modo, $a \cdot b^c \neq 0$,es decir, el conjunto $\{a, b^c\}$ satisface la pif, por lo que existe ultrafiltro $p \in Ult(\mathbb{A})$ tal que $\{a, b^c\} \subseteq p$, por lo tanto, $a \cdot b^c \in p$. p satisface que $a \in p$ y $b \notin p$. Esto demuestra que $s(a) \neq s(b)$.

Finalmente recordemos la Proposición 2.1 y el Teorema 1.15; además, que la imagen bajo homomorfismo de una álgebra booleana es subálgebra del codominio. Todo esto nos dice que $s[\mathbb{A}] = Clop(Ult(\mathbb{A}))$. $\square$

Ahora nos ubicaremos en el contexto de los espacios booleanos y sus álgebras características. Consideremos la función $t : X \to \wp(Clop(X))$, dado por

$$t(x) = \{U \in Clop(X) : x \in U\}$$

donde X es un espacio booleano.

Lema 2.4. Sea X un espacio booleano. Para cada $x \in X$ el conjunto $t(x)$ es un ultrafiltro en el álgebra $Clop(X)$.

Demostración. Es claro que $\oslash \notin t(x)$ y $X \in t(X)$. Sean $U, V \in t(x)$, claramente $x \in U \cap V \in Clop(X)$. Si $W \in Clop(X)$ y $U \subseteq W$, es claro que $x \in W$, por lo tanto $W \in t(x)$.Todo esto prueba que $t(x)$ es un filtro. Ahora bien, dado $U \in Clop(X)$, es claro que $x \in U$ o $x \in X \setminus U \in Clop(X)$. En consecuencia $U \in t(x)$ o $X \setminus U \in t(x)$. $\square$

De este modo queda definido el mapeo $t : X \to Ult(Clop(X))$, que es conocido como *homeomorfismmo canónico de Stone*. A continuacón veremos que en efecto es un homeomorfismo.

Teorema 2.5. Para cada espacio booleano X, el mapeo $t : X \to Ult(Clop(X))$ es un homeomorfismo.

Demostración. Veamos que t es biyectiva. Sean $x \neq y \in X$. Como X es Hausdorff, existen $U, V \in Clop(X)$ ajenos tales que $x \in U,\ y \in V$. En consecuencia, $x \in U \subseteq X \setminus V$, por lo que $V \notin t(x)$, pero claramente $V \in t(y)$. Esto prueba que $t(x) \neq t(y)$ por lo que t es inyectiva. Sea p un ultrafiltro en $Clop(X)$. p es una familia de cerrados que satisface la pif en un compacto, entonces $\cap p \neq \oslash$ (ver[]). Sea $x \in \cap p$. claramente, $p \subseteq t(x)$ pero la maximalidad de p obliga que $p = t(x)$. Esto prueba que t es suprayectiva.

Ahora, sea V un abierto básico en $Ult(Clop(X))$, esto quiere decir que existe básico $W \in Clop(X)$ tal que

$$V = \{p \in Ult(Clop(X)) : W \in p\}$$

. Vamos a demostrar que $t^{-1}(V) = W$. Sea $x \in W$, entonces $W \in t(x)$, por tanto $t(x) \in V$ y así $W \subseteq t^{-1}(V)$. Observe ahora que si $x \in X$ es tal que $t(x) \in V$, entonces $W \in t(x)$ y por lo tanto $x \in W$. Esto demuestra que $t^{-1}(V) = W$, lo que prueba que t es continua. Ahora bien, si $U \subseteq X$ es abierto básico entonces

$$t[U] = \{t(x) : x \in U\} = \{p \in Ult(Clop(X)) : U \in p\}$$

es un abierto básico en $Ult(Clop(X))$. Esto prueba que t es abierta y por lo tanto un homeomorfismo. $\square$

Capítulo 3

Familias casi ajenas.

En este capítulo comenzaremos con definiciones básicas que iremos usando a lo largo de este trabajo. Hablaremos principalmente sobre familias casi ajenas y varios resultados importantes acerca de éstas. Es importante mencionar que se suponen conocidas nociones básicas sobre topología y conjuntos, asi que prescindimos de hacer definiciones básicas. El lector puede acudir a [7],[8] y [6], donde encontrará la ayuda necesaria para comprender las bases.

Sea X un conjunto y κ un cardinal, definimos los siguientes conjuntos:

- $[X]^{\kappa} = \{Y \subseteq X : |Y| = \kappa\}$.
- $[X]^{<\kappa} = \{Y \subseteq X : |Y| < \kappa\}$.

Definición 3.1. Sean A, B conjuntos, diremos que A *está casi contenido* en B, si $|A \setminus B| < \omega$; lo denotamos como $A \subseteq^* B$. $A =^* B$ quiere decir: $A \subseteq^* B$ y $B \subseteq^* A$, en otras palabras, $A \triangle B$ es finito.

Definición 3.2. Una *familia casi ajena* es una familia de conjuntos $\mathcal{A}$ que cumple que para todo par de elementos A, B distintos de $\mathcal{A}$ se tiene que $A \cap B$ es finito.

En este trabajo nos enfocaremos en aquellas familias que además cumplan $|\mathcal{A}| \geq \omega$, y para todo $A \in \mathcal{A}$, $|A| = \omega$. Si cada $A \in \mathcal{A}$ es tal que $A \subseteq X$ para algún conjunto X, diremos que $\mathcal{A}$ está "montada" sobre X.

Ejemplo 3.3. Comencemos enumerando los números primos, o sea, pongamos $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, ...$; ahora, sea $A_n = \{p_n^j : j \in \omega\}$. Entonces para $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \{1\}$; por lo tanto $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \omega\}$ es una familia casi ajena montada sobre los números naturales.

Ejemplo 3.4. $\mathcal{B} = \{(n, n+1) : n \in \omega\}$ es una familia ajena montada sobre los números reales.

Proposición 3.5. Existe una familia casi ajena $\mathcal{A} \subseteq [\mathbb{Q}]^\omega$ tal que $|\mathcal{A}| = 2^\omega$.

Demostración. Para cada $r \in \mathbb{R}$ sea $A_r = \{q_n^r : n \in \omega\} \subseteq \mathbb{Q}$ una sucesión de racionales estrictamente creciente convergente a r; sea $\mathcal{A} = \{A_r : r \in \mathbb{R}\}$. Sean $A_{r_1}, A_{r_2} \in \mathcal{A}$ con $r_1 \neq r_2$, como $\mathbb{R}$ es Hausdorff, existen abiertos U_1, U_2 tales que $U_1 \cap U_2$ y $r_1 \in U_1$, $r_2 \in U_2$. $A_{r_1} \setminus U_1$ y $A_{r_2} \setminus U_2$ son finitos, así $|A_{r_1} \cap A_{r_2}| < \omega$. Ası, $\mathcal{A}$ es casi ajena y $|\mathcal{A}| = |\mathbb{R}| = 2^\omega$. $\square$

Para $n \in \omega$, 2^n representa el conjunto de funciones $f : n \to 2$. Definamos $2^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} 2^n$. Además tenemos el conjunto 2^ω que son todas las funciones $g : \omega \to 2$.

Para $f \in 2^\omega$ pongamos $A_f = \{f \restriction n : n \in \omega\} \subseteq 2^{<\omega}$. Ahora para algún $X \subseteq 2^\omega$ pongamos

$$\mathcal{A}_X = \{A_f : f \in X\}$$

.

Proposición 3.6. Sea $X \subseteq 2^\omega$ infinito, entonces $\mathcal{A}_X$ es una familia casi ajena montada sobre el árbol binario $2^{<\omega}$.

Demostración. Sean $f, g \in X$ distintas, entonces existe $n \in \omega$ tal que $f(n) \neq g(n)$, esto significa que para todo $N > n$, $f \restriction N \neq g \restriction N$, entonces $|A_f \cap A_g| \leq n$, lo cual nos dice que $\mathcal{A}_X$ es una familia casi ajena. $\square$

La proposición anterior nos provee otro ejemplo de una familia casi ajena de tamaño no numerable, pero montada sobre un conjunto numerable, a saber, el conjunto A_{2^ω}.

Podemos también dotar a 2^ω de una topología. Sea $f \in 2^\omega$. $U \subseteq 2^\omega$ es vecindad básica de f si y sólo si existe $n \in \omega$ tal que

$$U = \{f \in 2^\omega : f \restriction_n = g \restriction_n\}.$$

Esto nos será útil un poco más adelante.

A continuación definiremos algunos conjuntos que usaremos a lo largo de esta capítulo.

Definición 3.7. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena y sea $X = \bigcup \mathcal{A}$.

- $\mathcal{I}(\mathcal{A}) = \{Y \in \wp(X) : (\exists \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A})\ |\mathcal{B}| < \omega\ \wedge\ Y \subseteq^* \bigcup \mathcal{B}\}$.
- $\mathcal{I}^+(\mathcal{A}) = \wp(X) \setminus \mathcal{I}(\mathcal{A})$.
- $\mathcal{I}^*(\mathcal{A}) = \{Y \in \wp(X) : X \setminus Y \in \mathcal{I}(\mathcal{A})\}$.
  Sea $Z \subseteq X$, $|Z| \geq \omega$.
- $\mathcal{A} \restriction Z = \{A \cap Z : A \in \mathcal{A}\ \wedge\ |A \cap Z| \geq \omega\}$.
- $\mathcal{I}^{++}(\mathcal{A}) = \{Y \in \wp(X) : |\mathcal{A} \restriction Y| \geq \omega\}$.

Lema 3.8. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena, $X = \bigcup \mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$, entonces $X \nsubseteq^* \bigcup \mathcal{B}$.

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{A_0, A_1, ..., A_n\} \subseteq \mathcal{A}$, supongamos que $X \subseteq^* \bigcup \mathcal{B}$, esto quiere decir que existe un conjunto finito $F \subseteq X$ tal que $X = F \cup (\bigcup \mathcal{B})$; sea $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, como $A \subseteq X$, entonces (principio de casillas) existe $j \in \omega,\ j \leq n$ tal que $A \subseteq^* A_j$; esto contradice que $\mathcal{A}$ sea casi ajena. $\square$

Proposición 3.9. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena, $X = \bigcup \mathcal{A}$; entonces $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ es un ideal sobre X.

Demostración. Claramente $\emptyset \subseteq^* A$, para cualquier $A \in \mathcal{A}$; por lema anterior $X \notin \mathcal{I}(\mathcal{A})$. Sean $X, Y \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$, esto quiere decir que existen $\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ tales que $X \subseteq^* \bigcup \mathcal{B}_X$ y $Y \subseteq^* \bigcup \mathcal{B}_Y$; es claro que $X \cup Y \subseteq^* \bigcup (\mathcal{B}_X \cup \mathcal{B}_Y)$; así $X \cup Y \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$. Sea $X \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$ y $Y \subseteq X$; existe $\mathcal{B} \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ tal que $X \subseteq^* \bigcup \mathcal{B}$; es claro que también $Y \subseteq^* \bigcup \mathcal{B}$. Con esto probamos que $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ es un ideal. $\square$

Corolario 3.10. $\mathcal{I}^*(\mathcal{A})$ es un filtro sobre X y $\mathcal{I}^*(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$.

Demostración. Por definición, $\mathcal{I}^*(\mathcal{A})$ es el filtro dual de $\mathcal{I}(\mathcal{A})$. Sea $A \in \mathcal{I}^*(\mathcal{A})$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$, entonces $A \in \wp(A) \setminus \mathcal{I}(\mathcal{A})$, así $A \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$. $\square$

3.1. Familias casi ajenas maximales.

Lema 3.11. Si $\mathcal{F} = \{\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in I\}$ es una colección de familias casi ajenas tales que para todo $\alpha \in I$, $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{A}_{\alpha+1}$, entonces $\mathcal{A} = \bigcup \mathcal{F}$ es una familia casi ajena.

Demostración. Sean $A, B \in \mathcal{A}$, existen $\alpha_A, \alpha_B \in I$ tales que $A \in \mathcal{A}_{\alpha_A}$ y $B \in \mathcal{A}_{\alpha_B}$; sea $\alpha = \text{máx}\{\alpha_A, \alpha_B\}$, entonces $A, B \in \mathcal{A}_\alpha$, entonces $A \cap B$ es finito. $\square$

Definición 3.12. Una familia casi ajena $\mathcal{A}$ se dice que es *maximal* si dada cualquier familia casi ajena $\mathcal{A}'$ tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$.

Proposición 3.13. Toda familia casi ajena $\mathcal{A}$ montada sobre X se puede extender a una familia casi ajena maximal también montada sobre X.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena; sea $\mathcal{M} = \{\mathcal{B} : \mathcal{B}$ es casi ajena, está montada sobre X y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}$, $\mathcal{M} \neq \oslash$ pues $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$ y, claramente, $\subseteq$ define un orden parcial para $\mathcal{M}$. Sea $\mathcal{C} \subseteq (\mathcal{M}, \subseteq)$ una cadena, $\mathcal{C}$ tiene como cota superior a $\bigcup \mathcal{C}$; entonces, por Lema de Zorn, $\mathcal{M}$ tiene elementos maximales. $\square$

A partir de ahora cuando hablemos de una familia $\mathcal{A}$ casi ajena maximal, se entenderá que $\mathcal{A}$ es maximal dentro del conjunto de familias casi ajenas montadas sobre $\bigcup \mathcal{A}$ o sobre algún conjunto fijado de antemano.

Proposición 3.14. Si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena maximal, entonces $|\mathcal{A}| > \omega$.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena maximal y supongamos que es numerable, pongamos $\mathcal{A} = \{A_j : j \in \omega\}$.

Sea $x_0 \in A_0$; para $n > 0$, sea $x_n \in A_n \setminus (A_0 \cup ... \cup A_{n-1})$, el cual existe porque $A_n \cap (A_0 \cup ... \cup A_{n-1}) = (A_n \cap A_0) \cup ... \cup (A_n \cap A_{n-1})$ el cual es finito por ser $\mathcal{A}$ casi ajena. Sea $A' = \{x_j : j \in \omega\}$; por cómo está definida A', es fácil ver que para todo $n \in \omega$, $A_n \cap \{x_{n+1}, x_{n+2}, ...\} = \oslash$, y por lo tanto, $|A_n \cap A'| < \omega$; entonces $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup A'$ es familia casi ajena que contiene a $\mathcal{A}$, lo que es una contradicción pues $\mathcal{A}$ era maximal. Entonces $\mathcal{A}$ no es numerable. $\square$

Lema 3.15. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena maximal montada sobre X; entonces, $X \subseteq^* \bigcup \mathcal{A}$.

Demostración. Si $X \setminus \bigcup \mathcal{A}$ fuera infinito entonces $\mathcal{A} \cup \{X \setminus \bigcup \mathcal{A}\}$ es casi ajena y contiene a $\mathcal{A}$, contradiciendo la maximalidad de $\mathcal{A}$. $\square$

Proposición 3.16. Si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena maximal, entonces $\mathcal{I}^+(\mathcal{A}) = \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena maximal.

Sea $A \in \mathcal{I}^+(\mathcal{A})$; supongamos que $|\mathcal{A} \restriction A| < \omega$, como $A \notin \mathcal{I}(\mathcal{A})$, entonces $\bigcup(\mathcal{A} \restriction A) \not\supseteq^* A$, entonces se tiene que $\mathcal{A} \cup \{\bigcup(\mathcal{A} \restriction A) \setminus A\}$ es familia casi ajena, contradiciendo la maximalidad de $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{I}^+(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$.

Ahora sea $A \in \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$; supongamos $A \notin \mathcal{I}^{+}(\mathcal{A})$, es decir, $A \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$, entonces existe $\mathcal{B} = \{A_1, .., A_n\} \subseteq \mathcal{A}$ finito tal que $A \subseteq^* \bigcup \mathcal{B}$, para cada $B \in \mathcal{B}$, $|A \cap B| = \omega$ y para cada $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, $A \nsubseteq^* \bigcup \mathcal{C}$; sea $C \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, si $|A \cap C| \geq \omega$, entonces, por principio de casillas, existe j tal que $|C \cap A_j| \geq \omega$ contradiciendo que $\mathcal{A}$ sea casi ajena. Entonces $|\mathcal{A} \upharpoonright A| < \omega$, por lo tanto $A \notin \mathcal{I}^{++}(\mathcal{A})$, lo cual es una contradicción, entonces $A \in \mathcal{I}^{+}(\mathcal{A})$. Entonces $\mathcal{I}^{++}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{I}^{+}(\mathcal{A})$ y así demostramos que $\mathcal{I}^{++}(\mathcal{A}) = \mathcal{I}^{+}(\mathcal{A})$. $\square$

Capítulo 4

Espacios de Mrówka-Isbell.

Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena, definimos el espacio

$$\Psi(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A} \cup \{I_A : A \in \mathcal{A}\}$$

llamado espacio de *Mrówka-Isbell* o Ψ*-espacio*. La topología de $\Psi(\mathcal{A})$ dada como sigue:

* Para cada $x \in \bigcup \mathcal{A}$, $\{x\}$ es una base local para x.

* Para cada $A \in \mathcal{A}$ el conjunto $\{\{I_A\} \cup A \setminus F : F \in [A]^{<\omega}\}$ es una base local para I_A.

Verifiquemos que, en efecto, el conjunto de vecindades dadas arriba forman una base para una topología. Sean U, V dos vecindades y $x \in U \cap V$. Si $x \in \bigcup \mathcal{A}$ entonces $\{x\} \subseteq U \cap V$ para cualesquiera vecindades u, V, entonces supongamos que $x = I_A$ para algún $A \in \mathcal{A}$, existen $F, G \in [A]^{<\omega}$ tales que $U = \{I_A\} \cup A \setminus F$ y $V = \{I_A\} \cup A \setminus G$ y entonces tenemos $x \in \{I_A\} \cup A \setminus (F \cup G) \subseteq U \cap V$. Así podemos hablar del espacio topológico $\Psi(\mathcal{A})$.

A continuaciíon hablaremos sobre algunos resultados topológicos a cerca de los Ψ-espacios.

Proposición 4.1. $\bigcup \mathcal{A}$ es denso en $\Psi(\mathcal{A})$.

Demostración. Solamente tenemos que observar que para cualquier vecindad básica su intersección con $\bigcup \mathcal{A}$ es no vacía. Para cualquier $A \in \mathcal{A}$ y $F \in [A]^{<\omega}$, $(\{I_A\} \cup F \setminus A) \cap \bigcup \mathcal{A} = F \setminus A \neq \oslash$. y para cualquier $x \in \mathcal{A}$, $\{x\} \cap \bigcup \mathcal{A} = \{x\}$. $\square$

Corolario 4.2. $\Psi(\mathcal{A})$ es separable si y sólo si $|\bigcup \mathcal{A}| = \omega$.

Proposición 4.3. Si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena con elementos numerables entonces $\Psi(\mathcal{A})$ es cero dimensional.

Demostración. Veamos que las vecindades básicas son cerradas. Sea U una vecindad básica y sea $y \in \Psi(\mathcal{A}) \setminus U$, si $y \in \bigcup \mathcal{A}$ entonces $y \in \{y\} \subseteq \Psi(\mathcal{A}) \setminus U$. Si $y = I_A$ para algún $A \in \mathcal{A}$ tenemos dos casos, el primero es si $U = \{x\} \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, entonces $y \in \{I_A\} \cup (A \setminus \{x\}) \subseteq \Psi(\mathcal{A}) \setminus U$. El segundo caso es si $U = \{I_B\} \cup B \setminus F$ para algún $B \in \mathcal{A}$ y $F \in [B]^{<\omega}$, entonces $y \in \{I_A\} \cup A \setminus (A \cap B) \subseteq \Psi(\mathcal{A}) \setminus U$.

Entonces la base formada por las vecindades locales de $\Psi(\mathcal{A})$ es una base de abiertos que también son cerrados. □

Proposición 4.4. Si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena con elementos numerables entonces $\Psi(\mathcal{A})$ es Hausdorff.

Demostración. Sean $x, y \in \Psi\mathcal{A},\ x \neq y$. Es claro que si $x \in \bigcup \mathcal{A}$ entonces los abiertos $\{x\}$ y $\Psi(\mathcal{A}) \setminus \{x\}$ son dos abiertos que separan a x y a y, mismo caso si $y \in \bigcup \mathcal{A}$. Supongamos entonces que existen $A, B \in \mathcal{A}$ distintos tales que $x = I_A,\ y = I_B$, entonces los abiertos $\{I_A\} \cup A \setminus (A \cap B)$ y $\{I_B\} \cup B \setminus (A \cap B)$ los separan. □

Proposición 4.5. $\Psi(\mathcal{A})$ es localmente compacto.

Demostración. Sea $x \in \Psi(\mathcal{A})$. Si $x \in \bigcup \mathcal{A}$, entonces $\{x\}$ es una vecindad compacta de x. Supongamos entonces que existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x = I_A$, sea V una vecindad básica de x, es decir, existe $F \subseteq A$ finito tal que $V = \{x\} \cup (A \setminus F)$ la cual es cerrada, veamos que es compacta. Sea $\mathcal{U}$ cubierta abierta de V, existe $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_0$, existe $F_1 = \{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq A$ finito tal que $\{x\} \cup (A \setminus F_1) \subseteq U_0$, para cada $i \leq n$ sea $U_i \in \mathcal{U}$ tal que $x_i \in U_i$. Entonces la familia $\{U_0, U_1 \cdots, U_n\}$ es una cubierta finita de V. □

Proposición 4.6. Si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena con elementos numerables entonces el espacio $\Psi(\mathcal{A})$ es primero numerable.

Demostración. Sea $x \in \Psi(\mathcal{A})$. Si $x \in \bigcup \mathcal{A}$, entonces $\{x\}$ es una base local numerable para x. Si $x = I_A$ para algún $A \in \mathcal{A}$, entonces $\{\{I_A\} \cup (A \setminus F) : F \in [A]^{<\omega}\}$ es base local numerable. □

Estos espacios resultan también ser completamente regulares, solamente tenemos que recordar que todo espacio Hausdorff y localmente compacto es completamente regular.

Para estos espacios el tema de la normalidad es algo más complicado. A continuación hablaremos brevemente sobre este problema, para ello definiremos el concepto de separador para una familia casi ajena.

Definición 4.7. Si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, entonces $I_{\mathcal{B}} = \{I_B : B \in \mathcal{B}\} \subseteq \Psi(\mathcal{A})$.

Definición 4.8. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena con elementos numerables y $S \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, decimos que S es un *separador* de $\mathcal{A}$ si para todo $A \in \mathcal{A},\ A \subseteq^* S$ o $S \subseteq^* \bigcup \mathcal{A} \setminus S$. S un *separador trivial* si existe $B \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$ tal que $S =^* \bigcup B$.

Ejemplos de separadores:

1. $\bigcup \mathcal{A}$ y $\emptyset$ son separadores de $\mathcal{A}$.

2. Cualquier $A \in \mathcal{A}$ es separador.

3. Si S es separador, entonces $R =^* S$ también es separador.

4. Si $S,\ S'$ son separadores, entonces $S \cup S',\ S \cap S',\ S \setminus S'$ también son separadores.

4.1. Normalidad de los Ψ-espacios

Proposición 4.9. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena; $\Psi(\mathcal{A})$ es normal si y sólo si para todo $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ existe S separador de $\mathcal{A}$ tal que: para todo $A \in \mathcal{B},\ A \subseteq^* S$ y para todo $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B},\ A \subseteq^* \bigcup \mathcal{A} \setminus S$.

Demostración. [$\Rightarrow$] Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$; el conjunto $I_{\mathcal{B}}$ es un conjunto cerrado, al igual que $I_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}}$ y son ajenos, como estamos suponiendo que $\Psi(\mathcal{A})$ es normal, entonces, existen conjuntos abiertos $U_{\mathcal{B}},\ U_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}}$ tales que $I_{\mathcal{B}} \subseteq U_{\mathcal{B}},\ I_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}} \subseteq U_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}}$ y $U_{\mathcal{B}} \cap U_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}} = \emptyset$. Sea $S = U_{\mathcal{B}} \cap \bigcup \mathcal{A}$, veamos que S es un separador adecuado; sea $B \in \mathcal{B}$, como $U_{\mathcal{B}}$ es un abierto que contiene a I_B entonces existe $F \subset \bigcup \mathcal{A}$ finito tal que $\{I_B\} \cup (B \setminus F) \subseteq U_{\mathcal{B}}$, entonces $B \setminus F \subseteq S$ y así, $B \subseteq^* S$.

Ahora, sea $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, existe $G \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ finito tal que $\{I_A\} \cup (A \setminus G) \subseteq U_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}}$, entonces $A \subseteq^* U_{\mathcal{A}\setminus\mathcal{B}} \cap \bigcup \mathcal{A}$ y así, $A \subseteq^* \bigcup \mathcal{A} \setminus S$.

[$\Leftarrow$] Sean $F_1, F_2 \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ dos cerrados ajenos, existen $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ y $B, C \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ tales que $F_1 = I_{\mathcal{B}} \cup B$ y $F_2 = I_{\mathcal{C}} \cup C$; podemos suponer que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son distintos del vacío, pues, por ejemplo, si $\mathcal{B} = \oslash$, entonces $F_1 \subseteq B$ y $F_2 \subseteq \Psi(\mathcal{A}) \setminus B$.

Para $\mathcal{B}$ existe $S \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ separador tal que para todo $B \in \mathcal{B},\ B \subseteq^* S$, y para todo $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B},\ A \subseteq^* \bigcup \mathcal{A} \setminus S$. Sea $U = F_1 \cup (S \setminus C)$, veamos que U es abierto y cerrado. Sea $I_B \in I_{\mathcal{B}}$, como $B \subseteq^* S$, entonces existe $F \subseteq B$ finito tal que $\{I_B\} \cup (B \setminus F) \subseteq U$; es claro que para los puntos en $U \cap \bigcup \mathcal{A}$ no hay problema pues son puntos aislados, entonces U es abierto.

Ahora, sea $I_A \in \Psi(\mathcal{A}) \setminus U$, $A \notin \mathcal{B}$, entonces $A \subseteq^* \bigcup \mathcal{A} \setminus S$, es decir, existe $G \subseteq A$ tal que $\{I_A\} \cup (G \setminus F) \subseteq \Psi(\mathcal{A}) \setminus U$, así $\Psi(\mathcal{A}) \setminus U$ es abierto. Entonces U y $\Psi(\mathcal{A})$ son dos abiertos ajenos que separan a F_1 y F_2, por lo tanto $\Psi(\mathcal{A})$ es normal. □

Corolario 4.10. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena,

- Si $2^{|\mathcal{A}|} > 2^{|\bigcup \mathcal{A}|}$, entonces $\Psi(\mathcal{A})$ no es normal.

  Demostración. Sea $\mathcal{S} = \{S \subseteq \bigcup \mathcal{A} : S \text{ es separador de } \mathcal{A}\}$ y sea

  $$f : \mathcal{S} \to \wp(\mathcal{A})$$

  definida como $f(S) = \{A \in \mathcal{A} : A \subseteq^* S\}$; $|S| \leq 2^{\bigcup \mathcal{A}} < 2^{|\mathcal{A}|} = |\wp(\mathcal{A})|$, entonces f no puede ser suprayectiva, esto quiere decir que existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tal que no existe separador que separe a $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, entonces $\Psi(\mathcal{A})$ no es normal. □

- Si $\mathcal{A}$ es maximal, entonces $\Psi(\mathcal{A})$ no es normal.

  Demostración. Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $|\mathcal{B}| = \omega$ y supongamos que existe S separador tal que para todo $B \in \mathcal{B},\ B \subseteq^* S$ y para todo $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B},\ A \subseteq^* \bigcup \mathcal{A} \setminus S$. Pongamos $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \omega\}$, sean $x_0 \in S \cap B_0,\ x_1 \in S \cap B_1 \setminus B_0,\ \ldots, x_n \in S \cap B_n \setminus \bigcup_{j<n} B_j$.

  Sea $A = \{x_n : n \in \omega\} \subseteq S$, para cada $n \in \omega,\ |B_n \cap A| < \omega$ y para cada $C \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B},\ |C \cap A| < \omega$; entonces $\mathcal{A} \cup \{A\}$ es familia casi ajena, contradiciendo la maximalidad de $\mathcal{A}$, entonces $\Psi(\mathcal{A})$ no es normal. □

Regresando al caso de familias $\mathcal{A}_X$ para algún $X \subseteq 2^\omega$, podemos de igual forma construir el espacio $\Psi(\mathcal{A}_X)$, cada $\sigma \in 2^\omega$ será un punto aislado y para cada $f \in X$ tendremos el punto I_{A_f} cuyas vecindades serán de la forma $\{I_{A_f}\} \cup (A_f \setminus F)$ para algún $F \in [A_f]^{<\omega}$. Respecto a estos espacios hablaremos sobre algunos resultados bastante interesantes, específicamente sobre la normalidad de estos.

Definición 4.11. Un conjunto infinito $X \subseteq$ es un Q-conjunto si para cada $Y \subseteq X$, Y es F_σ en X.

Dada la definición anterior podemos enunciar el siguiente Teorema.

Teorema 4.12. $\Psi(\mathcal{A}_X)$ es normal si y sólo si X es un Q-conjunto.

Dada una familia casi ajena $\mathcal{A}$ diremos que es $\mathbb{R}$-encajable si existe función continua $f : \Psi(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ tal que para cada $A \in \mathcal{A}$, $f(I_A)$ sea un número irracional y para cada $x \in \bigcup \mathcal{A}$, $f(x)$ sea un número racional. Dada una familia casi ajena $\mathcal{A}$ $\mathbb{R}$-encajable, denotaremos como $X_\mathcal{A}$ al conjunto $\{x_A : A \in \mathcal{A}\}$ donde $x_A = f(I_A)$ siendo f testigo de que $\mathcal{A}$ es $\mathbb{R}$-encajable. Surge la siguiente pregunta: Si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena no numerable $\mathbb{R}$-encajable, se cumple que $\Psi(\mathcal{A})$ es normal si y sólo si $X_\mathcal{A}$ es un Q-conjunto?. Resulta que existen modelos donde ninguna implicación se cumple. No ahondaremos más sobre este tema, el lector interesado puede acudir a [5].

Capítulo 5

El espacio $K_{\mathcal{A}}$

Dada una familia casi ajena con elementos numerables $\mathcal{A}$, definimos el espacio $K_{\mathcal{A}}$ como la compactación por un punto del espacio $\Psi(\mathcal{A})$, es decir $K_{\mathcal{A}} = \Psi(\mathcal{A}) \cup \{\infty\}$, cabe mencionar que no hay ningún problema sobre la existencia de dicho espacio pues $\Psi(\mathcal{A})$ es Hausdorff y localmente compacto. A continuación hablaremos sobre algunos resultados acerca de dichos espacios.

5.1. El espacio $K_{\mathcal{A}}$ y sus propiedades topológicas.

Proposición 5.1. El espacio $K_{\mathcal{A}}$ es cero dimensional

Demostración. Como ya sabemos que $\Psi(\mathcal{A})$ es cero dimensional, basta ver que las vecindades básiccas del punto ∞ son cerradas también. Observemos que una vecindad básica U del punto ∞ es de la forma $\{\infty\} \cup \bigcup_{A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{F}} (\{I_A\} \cup A)$ para algún $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ finito. Fijemos $x \notin U$, entonces $x \in \bigcup \mathcal{F}$ o $x = I_A$ para algún $A \in \mathcal{F}$, en el primero caso tenemos $x \in \{x\} \subseteq K_{\mathcal{A}} \setminus U$, en el segundo caso $x \in \{I_A\} \cup A \subseteq K_{\mathcal{A}} \setminus U$. □

Definición 5.2. Un espacio topológico es Booleano si es Hausdorff, compacto y cero dimensional.

Corolario 5.3. $K_{\mathcal{A}}$ es un espacio Booleano.

Recordemos el siguiente resultado: Si un espacio topológico es Hausdorff y compacto, entonces es normal.

Lo anterior nos dice que $K_{\mathcal{A}}$ es normal.

Corolario 5.4. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena con elementos numerables tal que $|\mathcal{A}| = \omega$, entonces $K_{\mathcal{A}}$ es segundo numerable.

Demostración. $|K_{\mathcal{A}}| = |\bigcup \mathcal{A}| + |\mathcal{A}| + 1 = \omega$; y cada punto tiene base local numerable. $\square$

Gracias al Teorema de metrización de Urysohn: Un espacio topológico regular y segundo numerable es metrizable. Tenemos el siguiente Corolario.

Corolario 5.5. Si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena tal que $|\mathcal{A}| = \omega$, entonces $K_{\mathcal{A}}$ es metrizable.

Capítulo 6

Álgebras de Boole en el análisis.

6.1. Álgebra booleana generada por una familia casi ajena.

Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena, denotaremos como $\langle\mathcal{A}\rangle$ al álgebra booleana generada por $\mathcal{A}$ y los subconjuntos finitos de $\bigcup\mathcal{A}$.

Definición 6.1. Decimos que dos familias casi ajenas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son *equivalentes* si $\langle\mathcal{A}\rangle$ es isomorfa a $\langle\mathcal{B}\rangle$. Decimos que una familia casi ajena $\mathcal{A}$ es *ajenizable* si es equivalente a una familia ajena.

A continuación enunciaremos dos lemas que nos darán una idea de cómo es el álgebra boolena generada por una familia casi ajena.

Lema 6.2. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena, $A \in \mathcal{A}$ y $C \subset^* A$ tal que C y $A \setminus C$ son infinitos, entonces $C \notin \langle\mathcal{A}\rangle$.

Demostración. Como C esta casi contenido A sólo hay dos formas de generarlo en $\langle\mathcal{A}\rangle$, una es mediante uniones finitas de subconjuntos finitos de $\bigcup\mathcal{A}$ lo que es imposible pues $|C| = \omega$, otra es quitando/agregando a A intersecciones con otros elementos de $\mathcal{A}$ o uniones finitas de elementos de $\bigcup\mathcal{A}$, lo que también es imposible pues $|A \setminus C| = \omega$ y $\mathcal{A}$ es casi ajena. $\square$

Lema 6.3. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena, $A \in \mathcal{A}$ y $C \in \langle\mathcal{A}\rangle$ tal que $A \subseteq^* C$ y $C \setminus A$ es infinito. Entonces existe $B \in \mathcal{A}$ distinto que A tal que $B \subseteq^* C$.

Demostración. Con un argumento similar al del lema anterior, es fácil darse cuenta que si C fuera generado solamente por A, tendriamos que C es una variación finita de A, es decir $A =^* C$, por lo tanto es claro C fue generado por al menos algún otro elemento $B \in \mathcal{A}$ y entonces $B \subseteq^* C$. □

Ahora, con el fin de entender cómo son dos familias casi ajenas equivalentes, un par de resultados que nos darán un panorama bastante claro sobre esto.

Proposición 6.4. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ familias casi ajenas, $\varphi : \langle\mathcal{A}\rangle \to \langle\mathcal{B}\rangle$ isomorfismo. Entonces para cada $A \in \mathcal{A}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $\varphi(A) \triangle B$ es finito.

Demostración. $\varphi(A) \in \langle\mathcal{B}\rangle$. Es claro que $\varphi(A)$ no forma parte del álgebra generada por los subconjuntos finitos de $\bigcup\mathcal{B}$, entonces debe ser generado por elementos de $\mathcal{B}$, más aún, es generado por un único elemento. Supongamos que existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $B_1 \cup B_2 \subseteq^* \varphi(A)$, entonces $\varphi^{-1}(B_1) \cup \varphi^{-1}(B_2) \subseteq^* A$ lo que, por Lema 6.2, es imposible. Todo esto demuestra que para cada $A \in \mathcal{A}$ existe único $B \in \mathcal{B}$ tal que $\varphi(A) =^* B$. □

Corolario 6.5. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ familias casi ajenas montadas sobre un mismo conjunto, en otras palabras $\bigcup\mathcal{A} = \bigcup\mathcal{B}$. $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son equivalentes si y sólo si para cada $A \in \mathcal{A}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $A \triangle B$ es finito.

Demostración. Gracias a la proposición anterior es suficiente demostrar la implicación de regreso. Supongamos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son tales que para cada $A \in \mathcal{A}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $F_A = A \setminus B$ y $F_B = B \setminus A$ son finitos, basta definir $\varphi : \langle\mathcal{A}\rangle \to \langle\mathcal{B}\rangle$ con $\varphi(A) = (B \setminus F_B) \cup F_A$ y esto nos genera un ismorfismo entre las álgebras booleanas. □

Corolario 6.6. $\mathcal{A}$ es ajenizable si y sólo si para todo $A \in \mathcal{A}$ existe un conjunto finito $F_A \subset A$ tal que $\{A \setminus F_A : A \in \mathcal{A}\}$ es familia ajena.

Lema 6.7. Si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena tal que $|\mathcal{A}| = \omega$ entonces $\mathcal{A}$ es ajenizable.

Demostración. Pongamos $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \omega\}$. Sea $B_0 = A_0$ y para $n \geq 1$ sea $F_n = A_n \bigcap(\bigcup_{k<n} A_k)$ el cual es finito para todo $n \in \omega$. Pongamos $B_n = A_n \setminus F_n$ y veamos que $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \omega\}$ es ajena. Sea $x \in B_i \cap B_j$, sin pérdida de generalidad, supongamos $i < j$. Como $x \in B_j$ entonces $x \in A_j$ y $x \notin F_j$, entonces $x \notin \bigcup_{k<j} A_k$ lo cual es una contradicción pues $x \in B_i \subseteq A_i$; así por el corolario anterior $\mathcal{A}$ es ajenizable. □

Definición 6.8. Una familia casi ajena $\mathcal{A}$ se dice que es *punto numerable* si cada $x \in \bigcup \mathcal{A}$ pertenece a lo más a una cantidad numerable de elementos de $\mathcal{A}$.

Proposición 6.9. Supongamos que $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena con elementos numerables.

(1) Si $\mathcal{A}$ es punto numerable, entonces es ajenizable.

(2) Suponga que $\mathcal{A} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{A}_n$ es una familia casi ajena y cada $\mathcal{A}_n$ es ajenizable, entonces $\mathcal{A}$ es ajenizable.

Demostración. (1) Para $A, B \in \mathcal{A}$ diremos que A está relacionado con B ($A \sim B$) si existen $A = A_0, .., A_n = B$ tales que $A_i \cap A_{i+1} \neq \varnothing$ para $0 \leq i \leq n$. Diremos que existe camino de A a B de longitud n y denotaremos como $\alpha(A, B)$ a la longitud del camino más corto a A a B. Es fácil darse cuenta que $\sim$ es relación de equivalencia. Veamos que para $A \in \mathcal{A}$, $[A]_\sim = \{B \in \mathcal{A} : A \sim B\}$ es numerable. Sea

$$A_n = \{B \in \mathcal{A} : B \sim A \ \wedge \ \alpha(A, B) = n\}$$

es claro que $[A]_\sim = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, entonces basta probar que cada A_n es numerable. Supongamos que $|A_0| > \omega$, se tiene que $|\bigcup_{B\in A_0} A \cap B| \leq |A| = \omega$, por principio de casillas existe $x \in A$ tal que x está en una cantidad no numerable B's en A_0, lo que contradice que $\mathcal{A}$ es punto numerable, por lo tanto $|A_0| = \omega$. Supongamos ahora que $|A_n| = \omega$, para cada $B \in A_n$ existe una cantidad a lo más numerable de elementos de $\mathcal{A}$ que lo intersecan, los cuales forman caminos de longitud $n + 1$, así

$$|A_{n+1}| \leq |A_n| \times \omega = \omega.$$

Así, para cada $A \in \mathcal{A}$, $[A]_\sim$ es ajenizable y si $a \in [A]$ y $b \in [B]$ son tales que $a \cap b \neq \oslash$, entonces $a \sim b$ y $[A]_\sim = [B]_\sim$, es decir, elementos de distintas clases no se intersecan. Todo lo anterior nos dice que $\mathcal{A}$ es ajenizable.

(2) Podemos suponer que los $\mathcal{A}_n$ no tienen elementos en común y sin pérdida de generalidad que cada $\mathcal{A}_n$ es ajena, por (1) bastará demostrar que $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{A}_n$ es punto numerable. Sea $x \in \bigcup \mathcal{A}$ y sea

$$m = \text{mín}\{j \in \omega : (\exists A \in \mathcal{A}_j) \ x \in A\}.$$

Para cada $k \geq m$ a lo más existe un $j \in \omega$ tal que $A_j \in \mathcal{A}_k$ y $x \in A_j$ dada la ajenización de cada $\mathcal{A}_k$. Así $\mathcal{A} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{A}_n$ es punto numerable y por lo tanto ajenizable.

□

6.2. Relación entre $K_{\mathcal{A}}$ y $\langle\mathcal{A}\rangle$.

Haciendo uso del Teorema de Representación de Stone, nos dedicaremos a destapar la relación existente entre el espacio topológico y el álgebra booleana generados a partir de una familia casi ajena, que en realidad es bastante natural y obvia.

Proposición 6.10. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena. $\langle\mathcal{A}\rangle$ es isomorfa a $Clop(K_{\mathcal{A}})$.

Demostración. Sea $\varphi : Clop(K_{\mathcal{A}}) \to \langle\mathcal{A}\rangle$ definida para $x \in \bigcup\mathcal{A}$ como $\varphi(\{x\}) = \{x\}$, para $A \in \mathcal{A}$ y $F \subseteq A$ finito como $\varphi(\{I_A\} \cup (A \setminus F)) = A \setminus F$. φ está bien definida y se extiende de manera natural a un isomorfismo de $Clop(K_{\mathcal{A}})$ en $\langle\mathcal{A}\rangle$. □

Corolario 6.11. (1) $K_{\mathcal{A}}$ es el espacio de Stone de $\langle\mathcal{A}\rangle$.

(2) $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son equivalentes si y sólo si $K_{\mathcal{A}}$ y $K_{\mathcal{B}}$ son homeomorfos.

Demostración. (1) $\langle\mathcal{A}\rangle$ es isomorfa a $Clop(K_{\mathcal{A}})$, entonces $Ult(\mathcal{A})$ es homeomorfo a $Ult(Clop(K_{\mathcal{A}}))$ el que, según el teorema de representación de Stone, es homeomorfo a $K_{\mathcal{A}}$.

(2) [⇒] Si $\langle\mathcal{A}\rangle$ es isomorfa a $\langle\mathcal{B}\rangle$ entonces $Clop(K_{\mathcal{A}})$ es isomorfa a $Clop(K_{\mathcal{B}})$, entonces

$$K_{\mathcal{A}} \simeq Ult(Clop(K_{\mathcal{A}})) \simeq Ult(Clop(K_{\mathcal{B}})) \simeq K_{\mathcal{B}}$$

donde $\simeq$ indica homeomorfismo.

[⇐] Si $K_{\mathcal{A}}$ es homeomorfo a $K_{\mathcal{B}}$, entonces $Clop(K_{\mathcal{A}})$ es isomorfa a $Clop(K_{\mathcal{B}})$, de lo cual

$$\langle\mathcal{A}\rangle \sim Clop(K_{\mathcal{A}}) \sim Clop(K_{\mathcal{B}}) \sim \langle\mathcal{B}\rangle$$

donde $\sim$ indica isomorfismo.

□

6.3. La combinatoria de $\mathcal{A}$ y la topología de $K_{\mathcal{A}}$.

Como el título lo indica, daremos algunos resultados donde se deja ver cómo los aspectos combinatorios de una familia casi ajena repercuten en la topología del espacio generado a partir de ésta.

Definición 6.12. Un espacio compacto K es llamado *de Eberlein* si existe un conjunto Γ tal que K es homeomorfo a un subespacio débilmente compacto[1] de $c_0(\Gamma)$.

Teorema 6.13 (Rosenthal)**.** Un espacio compacto K es de Eberlein si y sólo si contiene una familia σ-punto-finita $\mathcal{F}$ de conjuntos cocero tal que $\mathcal{F}$ separa puntos de K, esto es, dados x_1, x_2 en K, $x_1 \neq x_2$, existe $U \in \mathcal{F}$ tal que $x_1 \in U$ y $x_2 \notin U$ o bien $x_1 \notin U$ y $x_2 \in U$.

No demostraremos aquí este teorema, el lector interesado en ello puede acudir a [2], página 393.

Lema 6.14. Sea K un espacio compacto y $S \subseteq K$. S es cocero si y sólo si es abierto y F_σ.

Demostración. Primero supongamos que S es un conjunto cocero, es decir, existe una función continua $f : K \to \mathbb{R}$ tal que $S = \{k \in K : f(k) \neq 0\}$, entonces $S = K \setminus f^{-1}(\{0\})$ y por lo tanto S es abierto. Ahora solo notemos que $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}[\mathbb{R} \setminus (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})]$, así vemos que S es un conjunto F_σ. Ahora supongamos que S es un conjunto abierto y F_σ, pongamos $S = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ donde para cada n, F_n es un cerrado, definamos $f_n : K \to \mathbb{R}$ como $f_n(x) = \frac{1}{2^n}$ si $x \in F_n$ y $f_n(x) = 0$ en otro caso, sea $f : K \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \Sigma_{n\in\omega} f_n(x)$, esta función es continua gracias al criterio M de Weierstrass y es fácil darse cuenta que para todo $x \in S$ $f(x) \neq 0$ y para todo $x \in K \setminus S$ $f(x) = 0$. Así S es un conjunto cocero. $\square$

Proposición 6.15. $K_{\mathcal{A}}$ es compacto de Eberlein si y sólo si $\mathcal{A}$ es ajenizable.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ ajenizable, es decir existe $\mathcal{B}$ ajena tal que $K_{\mathcal{A}}$ es homeomorfo a $K_{\mathcal{B}}$. Para $B \in \mathcal{B}$, sea $\varphi_B : \mathbb{N} \to [B]^{<\omega}$ una enumeración para los subconjuntos finitos de B. Definamos $\mathcal{B}_0 = \{\{x\} : x \in \bigcup \mathcal{B}\}$ y para $n \geq 1$

$$\mathcal{B}_n = \{\{I_A\} \cup (A \setminus \varphi_A(n)) : A \in \mathcal{B}\}.$$

[1] Compacto con la topología débil de K.

Veamos que $\mathcal{F} = \bigcup_{k\in\omega} \mathcal{B}_k$ es σ-punto-finita y separa puntos. Es claro que cada $\mathcal{B}_k$ es punto-finita pues $\mathcal{B}$ es ajena. Ahora sean x, y en $K_{\mathcal{B}}$, $x \neq y$.

Caso 1: x y y están en $\bigcup \mathcal{B}$, es claro que $\{x\} \in \mathcal{B}_0$ los separa.

Caso 2: $x = I_B$ para algún $B \in \mathcal{B}$ y $y \in \bigcup \mathcal{B}$.

Caso 2.1: $y \in B$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_B(i) = \{y\}$. Entonces $\{I_B\} \cup (B \setminus \varphi_B(i)) \in \mathcal{B}_i$ los separa.

Caso 2.2: $y \notin B$. Entonces $\{y\} \in \mathcal{B}_0$ los separa.

Caso 3: $x = I_A$ y $y = I_B$ para algunos A, B en $\mathcal{B}$, en este caso para cualquier k natural el abierto $\{I_A\} \cup A \setminus \varphi_A(k) \in \mathcal{B}_k$ los separa.

Caso 4: $x = \infty$, en este caso cualquier abierto que contenga a y los separa. Lo mismo si $y = \infty$.

Claramente los elementos de $\mathcal{F}$ son abiertos. También son F_σ pues son unión numerable de sus puntos, los cuales son cerrados. Así $\mathcal{F}$ es la familia que necesitamos.

Ahora sea $\mathcal{A}$ familia casi ajena con elementos numerables tal que $K_{\mathcal{A}}$ es un compacto de Eberlein, entonces existe una familia σ-punto-finita $\mathcal{B}$ de abiertos F_σ que separa puntos. Pongamos $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\omega} B_n$ donde para cada n, B_n es punto-finita, sea $A_n = \{A \in \mathcal{A} : (\exists u \in B_n)\ I_A \in u\}$, dado que para todo $n \in \omega$, B_n es punto-finita, es fácil darse cuenta que A_n será tambíen punto finita y por lo tanto ajenizable. Solo tenemos que observar que los abiertos que contengan al punto ∞ contiene, salvo una cantidad finita, a todos los elementos de la forma I_A, entonces podemos poner $\mathcal{A} = \bigcup_{n\in\omega} A_n \cup A$, donde A contiene a los elementos que pudieran no estar en ningún A_n, A debe ser numerable, por lo tanto ajenizable. Entonces $\mathcal{A}$ es ajenizable. $\square$

Proposición 6.16. Si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena con elementos numerables y ajenizable, entonces $C(K_{\mathcal{A}}) \sim c_0(\bigcup \mathcal{A}) \oplus c_0(\mathcal{A}) \oplus \mathbb{R}$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos $\mathcal{A}$ ajena y para cada $A \in \mathcal{A}$ pongamos $A = \{x_n^A : n \in \omega\}$. Definamos

$$\alpha : C(K_{\mathcal{A}}) \to c_0(\bigcup \mathcal{A})$$

$$\alpha(f) : \bigcup \mathcal{A} \to \mathbb{R}$$

como $\alpha(f)(x_n^A) = f(x_n^A) - f(I_A)$. Notemos que $\alpha(f)$ puede extenderse a todo $K_{\mathcal{A}}$. Para cualquier A en $\mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} \alpha(f)(I_A) &= \alpha(f)(\lim_{n\to\infty} x_n^A) = \lim_{n\to\infty} \alpha(f)(x_n^A) = \lim_{n\to\infty} (f(x_n^A) - f(I_A)) \\ &= f(\lim_{n\to\infty} x_n^A) - f(I_A) = f(I_A) - f(I_A) = 0. \end{aligned}$$

Por continuidad tenemos $\alpha(f)(\infty) = 0$. Así para cada $\epsilon > 0$, $\{\infty\} \cup I_{\mathcal{A}} \subseteq \alpha(f)^{-1}[(-\epsilon, \epsilon)]$, por lo tanto solamente una cantidad finita de elementos en $\bigcup \mathcal{A}$ se quedan fuera de dicha vecindad. Con esto tenemos que α está bien definida. Además es continua pues

$$\|\alpha\| = \sup\{\|\alpha(f)\| : \|f\| = 1\} = \sup_{\|f\|=1} \sup\{|f(x_n^A) - f(I_A)| : x_n^A \in \bigcup \mathcal{A}\} \leq 2.$$

De hecho si ponemos

$$X = \{f \in C(K_{\mathcal{A}}) : (\forall A \in \mathcal{A})\ f(I_A) = 0 = f(\infty)\}$$

es fácil darse cuenta que $\alpha : C(K_{\mathcal{A}}) \to X$ es una proyección y X es isométricamente isomorfo a $c_0(\bigcup \mathcal{A})$. También podemos ver que α es lineal. Sean $f, g \in C(K_{\mathcal{A}})$, $c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \alpha(cf+g)(x_n^A) =& (cf+g)(x_n^A) - (cf+g)(I_A) \\ =& cf(x_n^A) - cf(I_A) + g(x_n^A) - g(I_A) = cf(x_n^A) + g(x_n^A). \end{aligned}$$

Ahora definamos

$$\beta : C(K_{\mathcal{A}}) \to c_0(\mathcal{A})$$
$$\beta(f) : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$$

como $\beta(f)(A) = f(I_A) - f(\infty)$. De manera similiar a la función α, podemos verificar fácilmente que β puede extenderse a todo $K_{\mathcal{A}}$ poniendo $\beta(f)(x_n^A) = \beta(f)(A)$. Es fácil ver que $\beta(f)(\infty) = 0$. Por cómo están definidas las vecindades de ∞ resulta claro que $\beta(f) \in c_0(\mathcal{A})$. También es fácil ver que β es continua y lineal.

Sea

$$\varphi : C(K_{\mathcal{A}}) \to\ c_0(\bigcup \mathcal{A}) \oplus c_0(\mathcal{A}) \oplus \mathbb{R}$$

definida como

$$\varphi(f) = \langle \alpha(f), \beta(f), f(\infty) \rangle$$

Resulta claro que φ es continua y lineal, así que solo nos falta ver que es biyectiva. Sea $f \in C(K_{\mathcal{A}})$ tal que $\varphi(f) = 0$. De entrada se tiene que $f(\infty) = 0$. También para todo $A \in \mathcal{A}$, $n \in \omega$

$$\beta(f)(A) = f(I_A) - f(\infty) = f(I_A) = 0$$

y

$$\alpha(f)(x_n^A) = f(x_n^A) - f(I_A) = f(x_n^A) = 0.$$

Entonces $f = 0$ y así φ es inyectiva.

Para $f \in c_0(\bigcup \mathcal{A}),\ g \in c_0(\mathcal{A}),\ r \in \mathbb{R}$, sea la función $\phi : K_{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}$ definida como $\phi(x_n^A) = f(x_n^A) + g(A) + r$. Para cada $A \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}\phi(I_A) =& \phi(\lim_{n\in\omega} x_n^A) = \lim_{n\in\omega} \phi(x_n^A) \\ &= \lim_{n\in\omega} f(x_n^A) + g(A) + r = f(I_A) + g(A) + r = g(A) + r.\end{aligned}$$

Sea $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{A}$. Es claro que $\infty = \lim_{n\in\omega} I_{A_n}$. Entonces

$$\phi(\infty) = \lim_{n\in\omega} \phi(I_{A_n}) = \lim_{n\in\omega} g(A_n) + r = g(\infty) + r = r.$$

Con todo lo anterior queda claro que

$$\varphi(\phi) = \langle f, g, r\rangle.$$

Entonces φ es biyectiva. $\square$

Definición 6.17. Decimos que una familia casi ajena con elementos numerables $\mathcal{A}$ es *localmente pequeña* si para cualquier $B \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ numerable el conjunto

$$\{A \in \mathcal{A} : |A \cap B| \geq \omega\}$$

es a lo más numerable.

Si $\mathcal{A}$ es una familia numerable entonces es localmente pequeña.

Si $\mathcal{A}$ es ajena entonces es localmente pequeña. De no ser así existe $A \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ numerable tal que para algún $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ con $|\mathcal{B}| > \omega$, se tendría

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} A \cap B \subseteq A$$

. Por principio de casillas, existe $a \in A$ tal que para muchos $B \in \mathcal{B},\ a \in B$. Esto nos indica que muchos elementos de $\mathcal{B}$ se intersecan, esto contradice que $\mathcal{A}$ sea ajena.

Definición 6.18. Un espacio compacto K es *monolítico* si todos sus subconjuntos separables son también segundo numerables.

Proposición 6.19. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena con elementos numerables. $K_{\mathcal{A}}$ es monolítico si y sólo si $\mathcal{A}$ es localmente pequeña.

Demostración. Sea $E \subseteq K_{\mathcal{A}}$ separable. Existe $B \subseteq E$ numerable tal que $\overline{B} = E$; pongamos $B = S_0 \cup S_1$ donde $S_0 \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ y $S_1 \subseteq I_{\mathcal{A}}$, ambos numerables. Por ser $\mathcal{A}$ localmente pequeña tenemos que $\overline{S_0}$ es numerable, S_1 es un subsconjunto discreto, entonces $\overline{S_1}$ es numerable también, entonces E es numerable y, por lo tanto, segundo numerable. Supongamos ahora que $K_{\mathcal{A}}$ es monolítico y sea $E \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ numerable. Entonces $\overline{E} \subseteq K_{\mathcal{A}}$ es separable y por lo tanto, numerable. Entonces es claro que $\overline{E} \cap I_{\mathcal{A}}$ es a lo más numerable. $\square$

6.4. La combinatoria en el análisis.

Definición 6.20. Sea X un espacio de Banach y F subespacio de X, decimos que F es *complementado* si existe un operador lineal acotado $P : X \to X$ que satisfaga $P^2 = P$ y $Im(P) = F$, se dice que P es una proyección.

Proposición 6.21. Sea X un espacio de Banach y F subespacio de X. F es complementado si y sólo si existe G subespacio de X tal que $X = F \oplus G$.

Demostración. Primero supongamos que F es complementado. Existe proyección $P : X \to F$ tal que $Im(P) = F$ y $P^2 = P$, sea $G = Ker(P) = \{x \in X : P(x) = 0\}$. Veamos que $X = F \oplus G$. Supongamos que existe $x \in F \cap G$, entonces existe $y \in X$ tal que $P(y) = x$, además $P(x) = 0$. Entonces $x = P(y) = P^2(y) = P(P(x)) = P(0) = 0$. Por lo tanto $F \cap G = \{0\}$. Para cada $x \in X,\ x = P(x) + (x - P(x))$, esto demuestra que $X = F \oplus G$.

Supongamos ahora que $X = F \oplus G$, entonces para cada $x \in X$, existen únicos $f \in F,\ g \in G$ tales que $x = f + g$. Sea $P : X \to X$, definida como $P(x) = f$. Resulta claro que P es proyección. $\square$

Definición 6.22. Sea X un espacio de Banach.

1. X tiene la *propiedad de complementación separable* (SCP)[2] si cada subespacio de X separable está contenido en un subespacio separable complementado.

2. X tiene la SCP *controlada* si para todo F subespacio de X separable y para todo subespacio G de X^* separable existe una proyección $P : X \to X$ tal que $F \subseteq Im(P),\ G \subseteq Im(P^*)$ e $Im(P)$ es separable.

Lema 6.23. Si X es un espacio de Banach separable y $E \subseteq X^*$ es acotado con la norma de X^*, entones E es metrizable con la topología débil-*.

[2]Del inglés, Separable Complementation Property.

Puede consultarse la demostración de este Lema en [2].

Proposición 6.24. Sea E un espacio de Banach con la SCP controlada. Entonces $\overline{B}_{E^*}$ es monolítico en su topología débil-$*$.

Demostración. Sea B subespacio de $\overline{B}_{E^*}$ separable. Escojamos una proyección $P : E \to E$ tal que PE es separable y $B \subseteq P^*E^*$. Por el Lema 6.23 $\overline{B}$ es metrizable y además compacto, por lo tanto es segundo numerable. $\square$

Notemos que un espacio topológico K podemos encajarlo en $C(K)^*$ de la siguiente forma. Sea
$$f : K \to C(K)^*$$
definida como $f(k)(g) = g(k)$.

Dicho esto, es fácil ver que si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena tal que $C(K_{\mathcal{A}})$ tiene la SCP controlada, entonces $K_{\mathcal{A}}$ es monolítico. Esto pues $K_{\mathcal{A}}$ está encajado en un múltiplo de $B_{C(K_{\mathcal{A}})^*}$, el cual es monolítico.

Lema 6.25. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena con elementos numerables localmente pequeña, $X = \bigcup \mathcal{A}$. Sean $S \subseteq X$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ numerables tales que $\overline{S} \cap I_{\mathcal{A}} \subseteq I_{\mathcal{B}}$. Entonces existe $N \subseteq X$ numerable tal que $S \subseteq N$, para todo $B \in \mathcal{B}$, $B \subseteq^* N$ y para todo $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, $A \cap N$ es finito.

Demostración. Sea $T = \bigcup \mathcal{B}$ y $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ tal que $\overline{T} = T \cup I_{\mathcal{B} \cup \mathcal{D}} \cup \{\infty\}$. Dado que $K_{\mathcal{A}}$ es monolítico $\mathcal{D}$ necesariamente es numerable, incluso finito o vacío. Pongamos $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \omega\}$, $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\}$. Sea $C_n = B_n \setminus (D_0 \cup D_1 \cup \cdots \cup C_n)$. Sea
$$N = S \cup \bigcup_{n \in \omega} C_n.$$
Veamos que N es el conjunto que necesitamos. Sea $B \in \mathcal{B}$, entonces existe $n \in \omega$ tal que $B = B_n$ y $B \subseteq^* C_n \subseteq N$. Sea $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, si $A \in \mathcal{D}$ entonces existe $n \in \omega$ tal que $A = D_n$, además $A \cap S$ es finito y $A \cap C_m$ es vacío para cada $m \geq n$. Si $A \in \mathcal{A} \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{D})$ entonces $A \cap S$ es finito y $A \cap \bigcup_{n \in \omega} C_n \subseteq A \cap T$ es finito porque $I_A \notin \overline{T}$. $\square$

Gracias al Teorema de Representación de Riesz, a cada funcional $f \in C(K_{\mathcal{A}})^*$ podemos asignarle una medida μ que actúa sobre la sigma álgebra de Borel de $K_{\mathcal{A}}$. Esta medida cumple que para todo $g \in C(K_{\mathcal{A}})$
$$f(g) = \int_{K_{\mathcal{A}}} g d\mu.$$

Definición 6.26. Se define el soporte de una medida μ en un espacio topológico (X, T) como

$$supp(f) = \{x \in X : (\forall V \in T)(x \in V)\ \mu(V) > 0\}.$$

Lema 6.27. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena localmente pequeña con elementos numerables y $f \in C(K_{\mathcal{A}})^*$, entonces μ, la medida correspondiente a f, tiene soporte numerable.

Demostración. Primero veamos que

$$X = \{x \in \bigcup \mathcal{A} : x \in supp(\mu)\}$$

es numerable. Supongamos que $|X| > \omega$, hagamos

$$X_n = \{x \in X : \mu(\{x\}) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Es fácil ver que $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$ pues cada X_n está contenido en X y si $x \in X$, como $x \in supp(\mu)$ entonces $\mu(\{x\}) > 0$, por lo tanto, existe $n \in \omega$ tal que $\mu(\{x\}) \geq \frac{1}{n}$ y así, $x \in X_n$. Ahora, como estamos suponiendo que $|X| > \omega$, entonces existe $m \in \omega$ tal que $|X_m| > \omega$ y así,

$$\mu(K_{\mathcal{A}}) \geq \sum_{x\in X_m} \mu(\{x\}) \geq \infty$$

lo cuál es una contradicción. Ahora pongamos

$$Y = \{A \in \mathcal{A} : \mu(\{I_A\}) > 0\}$$

y supongamos $|Y| > \omega$; del mismo modo que el caso anterior, hacemos

$$Y_n = \{A \in Y : \mu(\{I_A\}) \geq \frac{1}{n}\}$$

y llegamos a que existe $m \in \omega$ tal que $|Y_m| > \omega$ y de nuevo, tenemos que

$$\mu(K_{\mathcal{A}}) \geq \sum_{A\in Y_m} \mu(\{I_A\}) = \infty$$

entonces concluimos que el conjunto Y es numerable y entonces podemos concentrarnos sólo en los elementos $A \in \mathcal{A}$ tales que $\mu(\{I_A\}) = 0$. Sea

$$C = \{A \in \mathcal{A} : \mu(\{I_A\}) = 0\ \wedge\ I_A \in supp(\mu)\}.$$

Sea $A \in C$, para todo $F \subseteq A$ finito $\mu(\{I_A\} \cup A \setminus F) > 0$, es decir, existe $a \in A$ tal que $\mu(\{a\}) > 0$. En otra palabras $C \subseteq \overline{X}$, o sea, C es numerable pues $\mathcal{A}$ es localmente pequeña. Así $supp(f)$ es numerable. $\square$

Lema 6.28. Sea $f \in C(K_{\mathcal{A}})$, existe $S_f \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ numerable tal que f es constante en $K_{\mathcal{A}} \setminus \overline{S_f}$.

Demostración. Sea $r = f(\infty)$ y para cada $n \in \omega$ sea $V_n = (r - \frac{1}{n+1}, r + \frac{1}{n+1}) \subseteq \mathbb{R}$ y $S_n = f^{-1}[V_n]$. S_n es una vecindad del infinito, entonces $T_n = (K_{\mathcal{A}} \setminus S_n) \cap \bigcup \mathcal{A}$ es numerable, entonces

$$S_f = \bigcup_{n\in\omega} T_n$$

es el conjunto que necesitamos. Es claro que para todo $x \in K_{\mathcal{A}} \setminus \overline{S_f},\ f(x) = f(\infty)$. $\square$

Proposición 6.29. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi ajena localmente pequeña. Entonces $C(K_{\mathcal{A}})$ tiene la SCP controlada.

Demostración. Sean $A \subseteq C(K_{\mathcal{A}}),\ B \subseteq C(K_{\mathcal{A}})^*$ numerables. Sea $S \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ numerable tal que $\bigcup_{f\in A} S_f \subseteq S$ y $\bigcup_{\mu\in B} supp(\mu) \subseteq \overline{S}$. Como $K_{\mathcal{A}}$ es monolítico, $\overline{S}$ es numerable, entonces existe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ numerable tal que $\overline{S} = S \cup I_{\mathcal{C}} \cup \{\infty\}$. Por el Lema 6.25 existe $N \subseteq \bigcup \mathcal{A}$ numerable tal que $S \subseteq N$ y para todo $A \in \mathcal{C},\ A \subseteq^* N$ y para todo $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{C},\ A \cap C$ es finito. Sean $V = \overline{N},\ W = \overline{\bigcup \mathcal{A} \setminus N}$. Note que Vy W son cerrados y $V \cap W = \{\infty\}$. Defina una retracción

$$r : K_{\mathcal{A}} \to V$$

definida como $r(v) = v$ para todo $v \in V$ y $r(w) = \infty$ par todo $w \in W$. Ahora defina

$$p : C(K_{\mathcal{A}}) \to C(K_{\mathcal{A}})$$

como

$$pf = (f \restriction_V) \circ r.$$

Es fácil darse cuenta que ImP es el conjunto de funciones continuas de $K_{\mathcal{A}}$ en $\mathbb{R}$ que son constantes en W. Veamos que es lineal. Sean $f, g \in C(K_{\mathcal{A}}), c \in \mathbb{R},\ p(cf+g) = (cf+g\restriction_V)\circ r = (cf\restriction_V + g\restriction_V)\circ r = c(f\restriction_V)\circ r + (g\restriction_V)\circ r = cp(f) + p(g)$. Para confirmar que p es continua observemos lo siguiente

$$\|P\| = \sup_{\|f\|=1} \|pf\| \leq \sup_{\|f\|=1} \|f\| = 1.$$

Finalmente debemos ver que se cumplan $A \subseteq ImP$, $B \subseteq ImP^*$ y que ImP es separable. Sea $f \in A,\ S_f \subseteq N$, es decir, f es constante en W y por lo tanto $f \in ImP$. Ahora veamos cómo es ImP^*. Sea $f \in C(K_{\mathcal{A}})^*$ y $P^*(f) = f^*$

$$f^* : C(K_{\mathcal{A}}) \to \mathbb{R}$$

está definida como $f^*(g) = f(P(g)) = f(g \restriction_V \circ r)$. Ahora sea μ la medida correspondiente a f^*, entonces notemos que

$$f^*(g) = \int_V g d\mu.$$

Es decir, el soporte de μ está contenido en V. Así es fácil notar que dado $\mu \in B,\ supp(\mu) \subseteq V$ y por lo tanto, $\mu \in ImP^*$.

Finalmente notemos que cada $f \in ImP$ tiene su parte esencial concentrada en V, el cual es numerable y por lo tanto $\{A \in \mathcal{A} : I_A \in V\}$ es ajenizable. Entonces por Proposición 6.16, es fácil darse cuenta que ImP es separable. $\square$

Bibliografía

[1] Marián Fabian, Petr Habala, Petr Hájek, Vicente Montesinos Santalucía, Jan Pelant and Václav Zizler. *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry.* Springer, 2001.

[2] Jesús Ferrer, Piotr Koszmider and Wieslaw Kubis. *Almost disjoint families of countable sets and separable complementation properties.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2013.

[3] Fernando Hernández-Hernandéz, David Meza-Alcántara. *Dualidad topológica de las álgebras booleanas.* Topologa y sus aplicaciones 4, Textos Cientficos BUAP (2016) 81-102.

[4] Fernando Hernández-Hernández and Michael Hrušák. *Topology of Mrówka-Isbell spaces.* Por aparecer en Pseudocompact Topological Spaces. Springer, 2018.

[5] Fernando Hernández-Hernández and Michael Hrušák. *Q-sets and normality of Ψ-spaces.* Topology Proceedings, volume 29, No. 1 (2005) 155-165.

[6] Karel Hrbacek and Thomas Jech. *Introduction to set theory* Marcel Dekker. 1999.

[7] Erwin Kreyszig *Introductory functional analysis with applications.* John Wiley and sons. 1978.

[8] James R. Munkres *Topology.* Prentice Hall. 2nd ed. 2000.