Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

DISTINTOS ASPECTOS DE LA UNICIDAD DE LOS REALES

TESIS

que para obtener el título de:

Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

presenta:

William Vázquez Ramírez

dirigida por:

Dr. Fernando Hernández Hernández

Morelia, Michoacán. Agosto de 2018

Agradecimientos.

Primeramente, quiero agradecer a mi madre Araceli. Sin duda alguna nada de esto se pudo haber realizado sin ella, sin todo ese sacrificio que ha tenido que sobrellevar. Por todo tu apoyo y el cariño que me has dado. Te agradezco con toda mi alma mamá.

Le agradezco a Fer, primero por aceptar que trabajara con él y segundo por tenerme mucha paciencia y siempre estar tan entusiasmado durante nuestras reuniones. Además de ser un gran profesor y más aún un amigo. También por dedicar su tiempo para guiarme y ayudarme a que aprendiera un poquito de matemáticas.

A todos todos mis profesores que durante este tiempo me transmitieron algo de su conocimiento y por invertir su tiempo en servir de guías en esto tan maravilloso que son las matemáticas.

A todos mis amigos, gracias por su amistad y todos los momentos juntos sin importa cuan triviales hayan sido. Una disculpa por no mencionarlos a todos, pero si hay alguna queja favor de mandarla por escrito sin remitente.

Agradezco principalmente a Jean Brandon, por ser una gran persona y uno de mis grandes amigos durante todo este tiempo. Por ayudarme en todo momento pues siempre estuvo ahí para resolver las dudas que me surgían inclusive aún a estas alturas.

A Eva y a Jesús les agradezco de manera muy especial por haber estado siempre ahí para escucharme y darme consejos, de verdad gracias por su confianza y su apoyo.

Quiero agradecer a todos aquellos que directa o indirectamente me ayudaron en la elaboración de este trabajo.

¡Gracias a todos!

Índice general

Resumen V

Abstract VII

Introducción IX

1. Campos ordenados completos 1

1.1. Campos 1
1.2. Dos conjuntos ordenados 4
1.3. Una construcción de $\mathbb{R}$ 7
1.4. Un único campo ordenado completo 24
1.5. Algunas propiedades sobre números reales. 29

2. Espacios $T_{3\frac{1}{2}}$ y productos de rectas 35

2.1. Recordando la topología producto 36
2.2. Espacios completamente regulares 38
2.3. El Teorema del Encaje 39

3. El Teorema de Kuratowski 43

3.1. Espacios polacos 43
3.2. Espacios estándar de Borel 51
3.3. El Teorema de Kuratowski 56

4. Espacios de Hilbert y $\ell_2(X)$ 59

4.1. El espacio $\ell_2(X)$ 59
4.2. Espacios de Hilbert 61
4.3. Conjuntos ortogonales y ortonormales 63

Bibliografía 73

Resumen

Este trabajo está enfocado en cuatro teoremas importantes, los cuales tienen como protagonista principal a $\mathbb{R}$, el campo de los números reales, ya sea implícita o explícitamente. La motivación es entonces mostrar cómo los números reales tienen un papel relevante en donde podría pensarse que no los encontraría. Para cada uno de los teoremas importantes, se desarrolla primero la teoría necesaria para presentar las demostraiones de los mismos. Dichos teoremas corresponden respectivamente a cuatro áreas: Álgebra, Topología, Teoría de la Medida y Análisis Funcional.

Palabras clave: Campo ordenado completo, completamente regular, Espacio polaco, Espacio estándar de Borel, Espacio de Hilbert.

Abstract

This work is focused in four important theorems in which the set of real numbers, $\mathbb{R}$, are the principal character in a explicit or implicit way. The motivation is to show how the real numbers have a protagonic rolll where one can think we will not find them. For each one of the four important theorems we present, we first develop necessary theory for their proofs. The four diferent branches in wich those theorems take place are respectively Algebra, Topology, Measure Theory and Functional Analysis.

Introducción

El objetivo principal de esta tesis es resaltar la importacia que tiene el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, al comparar los objetos que se estudian en la misma. A manera de adelanto, $\mathbb{R}$ nos servirá cuando dos objetos (por supuesto del "mismo tipo") pueden considerarse en esencia idénticos. Aunque el título sugiere aspectos de la unicidad de $\mathbb{R}$, la cual pudiera considerarse un tanto laxa.

En el Capítulo 1 se estudia un poco lo relacionado con *campos ordenados* y la forma en la que éstos se comparan, introducimos después la noción de *completez* la cual dice que un *campo ordenado* se considerará *completo* si el Axioma del Supremo vale. Luego, se presenta una construccón de $\mathbb{R}$ usando las llamadas *cortaduras de Dedekind* y por último se establece la relación que existe entre los *campos ordenados completos* y los números reales.

Por otra parte, en el Capítulo 2, se trabaja con los llamados espacios completamente regulares, es decir, aquellos en los que los cerrados y los puntos "fuera" de éstos últimos se pueden "separar completamente" mediante funciones continuas. El objetivo del Capítulo es hacer notar que los espacios completamente regulares son aquellos subespacios de "productos de rectas reales".

Para el Capítulo 3 primero se introduce la noción de *espacios polacos* y se estudian de manera somera algunas de sus propiedades. Además se recuerdan los conceptos de *σ-álgebra*, *función medible* y se hace énfasis en la *σ-álgebra de Borel*. Por último se habla acerca de los espacios *estándar de Borel* los cuales en esencia son los *subconjuntos de Borel* de espacios polacos, concluyendo después con una herramienta que sirve para alistar todos los espacios de este tipo.

Por último en el Capítulo 4, se recuerdan la noción de *espacios de Hilbert* y los llamados subconjuntos *ortogonales* y *ortonormales*. Presentamos también una serie de resultados que cumplen dichos subconjuntos todo esto con la finalidad de ver la relación entre los espacio de Hilbert y un espacio de sucesiones muy particular y por supuesto conocido.

Capítulo 1

Campos ordenados completos

Introducción

En este capítulo se presentan las definiciones básicas sobre los objetos a estudiar, los *campos ordenados completos*, (ver la Definición 1.3).

Se presenta después una construcción de los números reales, usando la técnica denominada *cortaduras de Dedekind*, la cual consiste de manera somera en partir de los racionales y de ahí extenderlos a un conjunto que cumpla con los axiomas de *campo ordenado completo*. Dicha construcción está hecha con la finalidad de responder las preguntas ¿Existen *campos ordenados completos*? y ¿Cuántos hay de ellos?

Después se presenta el teorema principal del capítulo, que en esencia establece la unicidad de $\mathbb{R}$ como *campo ordenado completo*. La razón principal por la cual se da la unicidad de dichos campos, es que si se tienen cualesquiera dos de ellos, éstos deben de contener una copia de los racionales y además "actúa" como lo hacen los racionales dentro de $\mathbb{R}$; es decir, existe un *isomorfismo* que respeta tanto la estructura algebraica como el orden de $\mathbb{Q}$. Y además, que cada elemento de los campos en cuestión "corta" a la respectiva copia de $\mathbb{Q}$ en dos partes, donde "la parte inferior" tiene *una mínima cota superior*. Esto da la pauta para establecer una correspondencia con $\mathbb{R}$ y dichos campos.

1.1. Campos

Presentamos solamente las definiciones necesarias para estar en contexto, no se profundiza debido a que nos alejaríamos de la labor principal del capítulo.

DEFINICIÓN 1.1. Un *campo* es un conjunto $\mathbb{F}$ junto con dos operaciones binarias denotadas por $+$, $\cdot$; tal que para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{F}$ se cumple

S1 (Asociatividad) $a + (b + c) = (a + b) + c$.

S2 (Neutro aditivo) Existe un $0 \in \mathbb{F}$ tal que $a + 0 = a$.

S3 (Inverso aditivo) Dado $a \in \mathbb{F}$ existe un único $b \in \mathbb{F}$ tal que $a + b = 0$.

S4 (Conmutatividad) $a + b = b + a$.

P1 (Asociatividad) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

P2 (Neutro aditivo) Existe un $1 \in \mathbb{F}$ tal que $a \cdot 1 = a$.

P3 (Inverso aditivo) Dado $a \in \mathbb{F}$ existe un único $b \in \mathbb{F}$ tal que $a \cdot b = 1$.

P4 (Conmutatividad) $a \cdot b = b \cdot a$.

D (Distributividad) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + b \cdot c$.

En adelante denotaremos el producto $a \cdot b$ solamente por ab. Además, para $a \in \mathbb{F}$ se denota su inverso aditivo como $-a$; si $a \neq 0$, a^{-1} denotará su inverso multiplicativo.

EJEMPLO 1.2. Los siguientes son ejemplos de algunos campos conocidos.

1. El campo de los números racionales $\mathbb{Q}$. Este campo nos ayudará para la construcción de un objeto interesante.

2. El conjunto $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\,\right] = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Tendremos entonces que dados $(a + b\sqrt{2}), (c + d\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\,\right]$ se efectúa su suma y el producto de la siguiente manera
$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2},$$
$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac) + (bd)\sqrt{2}.$$

3. $\mathbb{Z}_k = \{\bar{0}, \bar{1}, \cdots, \bar{k}\}$ (los enteros módulo k) forman un campo cuando k es primo.

4. El campo de las funciones racionales, $R(x)$, donde cada $r(x) \in R(x)$ es el cociente de dos polinomios $r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, con coeficientes racionales. La suma y el producto en $R(x)$ se realiza de la manera usual.

DEFINICIÓN 1.3. Un *campo ordenado*, es un campo $\mathbb{F}$ el cual contiene un subconjunto distinguido $\mathbf{P}$ con las siguientes propiedades.

O1 Para cada $a \in \mathbb{F}$ se satisface una y sólo una de las siguientes

(I) $a = 0$, (II) $a \in \mathbf{P}$, (III) $-a \in \mathbf{P}$.

O2 Si $a, b \in \mathbf{P}$ entonces $a + b \in \mathbf{P}$.

O3 Si $a, b \in \mathbf{P}$ entonces $ab \in \mathbf{P}$.

a los elementos de $\mathbf{P}$ se les acostumbra llamar *elementos positivos* de $\mathbb{F}$.

En base al conjunto $\mathbf{P}$ se define una *relación de orden* $<$ sobre $\mathbb{F}$ de la siguiente manera, dados $a, b \in \mathbb{F}$, se dice $a < b \Leftrightarrow b - a \in \mathbf{P}$. Se define también la relación $\leq$ en $\mathbb{F}$ como; $a \leq b \Leftrightarrow b - a \in \mathbf{P}$ o $a = b$. La relación $\leq$ resulta ser reflexiva, antisimétrica y transitiva. Además define un *orden total* (o *lineal*) en $\mathbb{F}$; es decir dados cualesquiera dos elementos de $\mathbb{F}$ éstos son $\leq -$*comparables*.

Ejemplo 1.4. Algunos ejemplos conocidos de campos ordenados son.

(I) El campo $\mathbb{Q}$ con $\mathbf{P} = \mathbb{Q}^+$, donde la relación $\leq$ es la usual.

(II) $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\,\right]$; en este caso, con $\mathbf{P} = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\,\right] : a + b\sqrt{2} > 0\}$.

(III) El campo $\mathbb{Z}_p$ con p número primo, no es campo ordenado. En efecto ya que si $1 \in \mathbb{Z}_p$, entonces $1 + 1 \in \mathbb{Z}_p$, $1 + 1 + 1 \in \mathbb{Z}_p$ así sucesivamente hasta tener $1 + 1 + \cdots + 1 = 1 + p - 1 = 0 \in \mathbb{Z}_p$, contradiciendo la tricotomía.

(IV) Un elemento de $R(x)$, $r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ es positivo si el producto de los coeficientes principales de $f(x)$ y $g(x)$ es mayor que cero. De aquí que $R(x)$ resulte ser un campo ordenado.

Definición 1.5. Sea $\leq$ un orden en A y $B \subseteq A$, decimos que

(a) $b \in B$ es el *elemento mínimo de* B respecto al orden $\leq$, si para todo $x \in B$, $b \leq x$.

(b) $a \in A$ es una *cota superior* de B en el conjunto ordenado $(A, \leq)$ si para cada $b \in B$, $b \leq a$.

(c) $a \in A$ se llama *supremo de* B en $(A, \leq)$ si es el mínimo elemento del conjunto de todas las cotas superiores de B en $(A, \leq)$. A dicho elemento también se le llama *mínima cota superior*.

Definición 1.6. Dado un campo $\mathbb{F}$, se dice que es *campo ordenado completo* si para cualquier $A \subseteq \mathbb{F}$ no vacío y acotado superiormente tiene supremo.

Para presentar un ejemplo de uno de dichos campos, trabajaremos un poco en la siguiente sección. Y más adelante nos haremos preguntas sobre cuáles y quiénes son dichos campos.

DEFINICIÓN 1.7. Dados $\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2$ campos ordenados. Un *homomorfismo de campos* es una aplicación $f : \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_2$ que para $x, y \in \mathbb{F}_1$, satisface las siguientes propiedades:

CO 1. $f(0_{\mathbb{F}_1}) = 0_{\mathbb{F}_2}$,

CO 2. $f(1_{\mathbb{F}_1}) = 1_{\mathbb{F}_2}$,

CO 3. $f(x +_{\mathbb{F}_1} y) = f(x) +_{\mathbb{F}_2} f(y)$,

CO 4. $f(x \cdot_{\mathbb{F}_1} y) = f(x) \cdot_{\mathbb{F}_2} f(y)$,

CO 5. Si $x <_{F_1} y \Rightarrow f(x) <_{F_2} f(y)$.

Un *homomorfismo de campos* (a secas) será un homomorfismo f que cumpla las propiedades *CO1* a *CO4*. Un homomorfismo de campos ordenados que sea biyectivo, se le llama *isomorfismo de campos ordenados*. De aquí en adelante nos referiremos por por isomorfismo a un isomorfismo de campos ordenados a menos que se especifique lo contrario.

1.2. Dos conjuntos ordenados

Los siguientes dos teoremas son caracterizaciones de los enteros $\mathbb{Z}$ y los racionales $\mathbb{Q}$ vistos como conjuntos ordenados. La finalidad de presentar dichos teoremas es tener de cierta manera un punto de partida para la construcción que se hará en la siguiente sección.

DEFINICIÓN 1.8. Un *isomorfismo* entre dos conjuntos ordenados $(A, \leq)$ y $(B, \preceq)$ es una función biyectiva $h : A \to B$ tal que para todo $a, a' \in A$ se cumple,

$$a \leq a' \text{ si y sólo si } h(a) \preceq h(a')$$

Si existe un isomorfismo entre $(A, \leq)$ y $(B, \preceq)$, entonces se dice que son *isomorfos* lo cual se denota como $A \approx B$. Además, a la función h se le llama *isomorfismo* ente $(A, \leq)$ y $(B, \preceq)$.

Otro cosa que hay que tener presente, es el Teorema de Recursión el cual enunciamos a continuación.

Teorema 1.9 (de Recursión)**.** *Para cualquier conjunto A, cualquier $a \in A$ y cualquier función $g : A \times \mathbb{N} \to A$, existe una única función $f : \mathbb{N} \to A$ tal que* *(a)* $f(0) = a$,

(b) $f(s(n)) = g(f(n), n)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

La demostración del Teorema de Recursión no la presentamos aquí, pero puede consultarse en el Capítulo 5 de [1].

Teorema 1.10. *Sea* $(X, \leq)$ *un conjunto linealmete ordenado tal que:*

(a) X *no tiene elemento máximo ni mínimo.*

(b) Cualquier subconjunto acotado es finito.

Entonces, $(X, \leq)$ *es isomorfo a* $(\mathbb{Z}, \leq)$.

Lema 1.11. *Sea* $(X, \leq)$ *conjunto linealmente ordenado y* $A \subseteq X$ *finito entonces,* A *tiene elemento máximo y mínimo.*

Demostración: Para la demostración de este lema, solamente consideraremos el caso del mínimo, ya que el otro caso es análogo.

Tome $a_0 \in A$ si pasa que para toda $y \in A$, $a_0 < y$ entonces, $a_0 = \min A$ si no, hay un $a_1 \in A$ tal que $a_1 < a_0$ si para este a_1 pasa que para toda $y \in A$, $a_1 < y$ entonces $a_1 = \min A$ si no, es porque hay $a_2 \in A$ tal que $a_2 < a_1$. Repitiendo ese proceso sucesivamente debemos de terminar con algún $a_n \in A$ y $n \in \mathbb{N}$ esto por la finitud de A y así, tenemos que $a_n = \min A$. ❑

Lema 1.12. *Sean* $(X, \leq)$ *un conjunto linealmente ordenado y* $f : \mathbb{N} \to X$ *entonces,* f *es estrictamente creciente, (respectivamente decreciente) si y sólo si para toda* $n \in \mathbb{N}$, $f(n) < f(n+1)$, *(respectivamente* $f(n) > f(n+1)$*).*

Demostración: Veamos el caso en que f es estrictamente decreciente, para el caso en que f es estrictamente creciente la idea es análoga.
$\Rightarrow$] Es claro, ya que para cada natural n, ocurre que $n < n+1$ y así, $f(n) < f(n+1)$.
$\Leftarrow$] Hay que ver que dados $n, m \in \mathbb{N}$ digamos con $n < m$ entonces, $f(n) < f(m)$. Como $n \leq m$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n+p = m$ así, tenemos las siguientes relaciones:

$$f(n) < f(n+1) < f(n+1+1) < \cdots < f(n+\underbrace{1 + \cdots + 1}_{p \text{ veces}}) = f(n+p) = f(m)$$

con las cuales se concluye la demostración. ❑

Demostración: (Del Teorema 1.10) Fijemos $x_0 \in X$ y consideremos los siguientes subconjuntos.

$$A^+ = \{y \in X : x_0 \preceq y\} \quad \text{y} \quad A^- = \{y \in X : y \preceq x_0\}.$$

Es claro que $A^+, A^- \neq \emptyset$. Vamos a ver que $A^+, A^- \approx \mathbb{N}$.

Para ver que $A^+ \approx \mathbb{N}$, considere una función, $h^+ : X \to X$ tal que $h^+(x) \succeq x$ y sea $g^+ : A^+ \times \mathbb{N} \to A^+$ tal que $g^+(x, n) = \text{mín}(x, h^+(x))$. Por el Teorema de Recursión, existe una única $f^+ : \mathbb{N} \to A^+$ tal que

(I) $f^+(0) = x_0$,

(II) $f^+(s(n)) = g^+(f^+(n), n)$.

Así, $f^+(s(n)) = \text{mín}(x_n, h^+(x_n))$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, es claro que el rango de f^+ está contenido en A^+.

Hay que ver que f^+ es biyectiva y que además respeta el orden. Veamos que f^+ respeta el orden, para ello primero notemos que $f^+(n) \preceq f^+(n+1)$ esto se sigue de que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \text{mín}\{y \in A^+ : x_n \prec y\}$; por tanto, $x_n \prec x_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora sean $m, n \in \mathbb{N}$ digamos con $m \leq n$, hay que ver que $f^+(m) \preceq f^+(n)$. Como $m \leq n$ hay $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$ y así, tenemos

$$f^+(m) \preceq f^+(m+1) \preceq \cdots \preceq f^+(m + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{p \text{ veces}}) = f^+(m+p) = f^+(n).$$

Por lo tanto, $f^+(m) \preceq f^+(n)$ de donde se sigue que f^+ respeta el orden. Esto último implica la inyectividad de f^+.

Veamos ahora que f^+ es suprayectiva; es decir, dado $x \in A^+$ hay que encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^+(n) = x$. Consideremos el intervalo $[x_0, x)$ éste es finito por tanto, tiene elemento máximo digamos $x_m = \text{máx}(x_0, x)$, con $m \in \mathbb{N}$. Podemos suponer que el intervalo $[x_0, x)$ está contenido en el rango de la función; sino, al ser un subconjunto finito de un linealmente ordenado es por lo tanto bien ordenado y podemos escoger el mínimo elemento de él que no esté en el rango de la función. La argumentación será similar a la que se presenta a continuación.

Observe que $f^+(s(m)) = x$, $f^+(s(m)) = \text{mín}(x_m, h^+(x_m)$ así, basta con tomar $n = s(m)$. Esto concluye la demostración de que f^+ es biyectiva. Análogamente se demuestra que $f^- : \mathbb{N} \to A^-$ es biyectiva y que preserve el orden. Defina ahora $f : \mathbb{Z} \to X$ de la siguiente manera

$$f(n) = \begin{cases} f^+(n) & \text{si } n \geq 0 \\ f^-(n) & \text{si } n \leq 0, \end{cases}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$. Note que f está bien definida ya que $f^+(0) = x_0 = f^-(0)$, también es claro que f es biyectiva y que respeta el orden. Así, f es el isomorfismo buscado. ❑

Definición 1.13. Un subconjunto D de un conjunto ordenado $(A, \leq)$ se llama *denso* si para cualesquiera $x, y \in A$ existe $z \in D$ tal que $x < z < y$.

Teorema 1.14 (Cantor)**.** *Cualesquiera dos conjuntos numerables, linealmente ordenados, sin elemento máximo ni mínimo y densos en sí mismos son isomorfos.*

Demostración: Sin pérdida de la generalidad, suponga que uno de dichos conjuntos son los racionales. Sea X un conjunto que cumpla con todas la propiedades enunciadas. Enumere a $\mathbb{Q}$ y a X, $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$, $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Recursivamente se va a definir $f : \mathbb{Q} \to X$ cumpliendo las siguientes propiedades $f(q_0) = x_0$; la idea es como sigue, suponga que f ya se ha definido en $\{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$ y en $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ (donde los índices de cada elemento tanto de $\mathbb{Q}$ como de X no necesariamente coinciden con los de la enumeración que se dio al principio); hay que tomar un elemento "no usado" digamos de $\mathbb{Q}$ que denotaremos por q_{n+1} de tal manera que sea el de índice menor; entonces, hay varios casos en como se relaciona (respecto al orden) q_{n+1} con los primeros n elementos "ya usados", a saber

(i) Que q_{n+1} sea menor (o mayor) que todos los $\{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$ entonces, sea k el mínimo índice tal que x_k es menor (o mayor respectivamente) que todos los $f(q_i)$, para $i \leq n$ y defínase $f(q_{n+1}) = x_k$.

(ii) Que existan "únicos" $i, j \leq n$ tales que $q_i < q_{n+1} < q_j$ entonces, se define $f(q_{n+1}) = x_k$, donde $k = \min\{n \in \mathbb{N} : f(q_i) < x_n < f(q_i)\}$. Por "únicos" queremos decir que no hay i', j' tales que $q_i < q_{i'} < q_{n+1} < q_{j'} < q_j$.

En caso de tomar un elemento "no usado" de X, se tienen casos análogos a los anteriores. De la construcción de f, tenemos que es inyectiva, sobreyectiva y que preserva el orden, por tanto f es isomorfismo como se deseaba. ❑

1.3. Una construcción de $\mathbb{R}$

En lo que sigue consideraremos al campo $\mathbb{Q}$ junto con sus propiedades campo ordenado. También daremos por hechos resultados como el principio del buen orden de los naturales.

Más que una construcción rigurosa, se hará un bozquejo de la construcción. La idea es sin embargo muy sencilla y fácil de imaginar. Si uno se detiene a pensar un poco en los racionales en términos del orden usual, no tardará en convencerse de que los racionales son como una recta “con muchos hoyos”. La idea que presentamos a continuación es una más de las tantas maneras de “llenar esos hoyos”.

Si alguno de los lectores está interesado en conocer una construcción distinta de los números reales, puede consultar el Capítulo 6 de [1].

Definición 1.15. Una *cortadura* de números racionales es una pareja (A, B) de subconjuntos de $\mathbb{Q}$, tales que se cumple

1. $A, B \neq \emptyset$.
2. $A \cup B = \mathbb{Q}$.
3. Para cada $a \in A$ y cada $b \in B$ se tiene $a < b$.
4. Para cada $a \in A$ existe $x \in A$ tal que $a < x$ es decir, A no tiene elemento máximo.

De aquí en adelante nos referiremos simplemente por cortadura a una cortadura de números racionales a menos que se especifique lo contrario. Al conjunto de todas las cortaduras lo denotaremos como $Cuts(\mathbb{Q})$.

Observación 1.16. Ya que estamos trabajando sobre $\mathbb{Q}$ resultará que habrá algunas cortaduras para las cuales $\inf B$ exista (en $\mathbb{Q}$) y para las que no. Así entonces, tendremos que para cada $r \in \mathbb{Q}$, la pareja (A_r, B_r) donde $A_r = \{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$ y $B_r = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq r\}$ constituye una cortadura para la cual resulta que $\inf B$ existe. A las cortaduras de este tipo las llamaremos *cortaduras racionales*. Por otro lado, a las cortaduras en las que $\inf B$ no exista (en $\mathbb{Q}$) las llamaremos *cortaduras irracionales*.

El siguiente es un ejemplo de una cortadura (A, B) para la cual $\inf B \notin \mathbb{Q}$, es decir, (A, B) es una cortadura irracional. No se sorprenda el lector si adivina a que cortadura nos referiremos.

Ejemplo 1.17. Considere la pareja (A, B) donde

$$A = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq 0 \text{ o } q^2 < 2\} \quad \text{y} \quad B = \{q \in \mathbb{Q} : 0 < q \text{ y } q^2 > 2\}.$$

Ésta resulta ser una cortadura ya que se cumplen todas las propiedades de la definición de cortadura las cuales se pueden verificar con un poco de calma.

Falta ver que en efecto $\inf B \notin \mathbb{Q}$. Note que $B \neq \emptyset$ ya que $2 \in B$; por otro lado también se tiene que B está acotado inferiormente por 1. Para la parte restante, daremos un argumento recursivo es decir daremos una cota inferior de B y construiremos otra de manera que esta última sea mayor que la primera.

Sea $u \in \mathbb{Q}$ cota inferior de B, es claro que $u^2 < 2$. Considere $v = \frac{2u+2}{u+2}$ no es muy complicado ver que v es como deseamos. En efecto, solamente es cuestión de paciencia para calcular dos cosas; primero $0 < v - u$ y segundo, $v^2 < 2$. Por lo que concluimos que B no tienen una mínima cota inferior en $\mathbb{Q}$.

También veremos que A no tiene elemento máximo; esto es equivalenete a preguntarse si $\sup A$ existe en $\mathbb{Q}$. La argumentación es completamente análoga a la de la parte anterior. Sea entonces $u \in \mathbb{Q}$ tal que $u > 0$ y $u^2 > 2$, entonces $v = \frac{u+2/u}{2}$ es tal que $0 < v < u$, y además, se tiene

$$v^2 = \left[\frac{u - \frac{2}{u}}{2}\right] + 2$$

es decir, $v^2 > 2$ por lo que A no tiene supremo en $\mathbb{Q}$.

Observación 1.18. Para cualquier $(A, B) \in Cuts(Q)$ se cumple también que, si $a \in A$ y $x \leq a$ entonces $x \in A$; si $a \notin A$ y $a \leq x$ entonces $x \notin A$; si $a \in A$ y $x \notin A$ entonces $a < x$. Las propiedades análogas se cumplen para B a saber, si $b \in B$ y $b \leq y$ entonces $y \in B$; si $b \notin B$ y $y \leq b$ entonces $y \notin B$; si $b \in B$ y $y \notin B$ entonces $y < b$. Las demostraciones de estos hechos las omitimos.

Es posible definir un orden en $Cuts(\mathbb{Q})$ como sigue, dadas (A, B) y (C, D) cortaduras, se define $(A, B) \leq (C, D)$ si $A \subset C$. Decimos que dos cortaduras $(A, B), (C, D)$ son iguales si son iguales como conjuntos es decir, ocurre $A = C$ y $B = D$. De lo anterior, defina $(A, B) < (C, D)$ si $(A, B) \leq (C, D)$ y ellas son diferentes.

Proposición 1.19. *La relación $\leq$ define un orden total sobre $Cuts(\mathbb{Q})$; es decir, $\leq$ cumple con las siguientes propiedades. Para cualesquiera (A, B), (C, D) y $(E, F) \in Cuts(\mathbb{Q})$,*

1. $(A, B) \leq (A, B)$.
2. *Si* $(A, B) \leq (C, D)$ *y* $(C, D) \leq (A, B)$ *entonces,* $(A, B) = (C, D)$.
3. *Si* $(A, B) \leq (C, D)$ *y* $(C, D) \leq (E, F)$ *entonces,* $(A, B) \leq (E, F)$.
4. *Siempre ocurre que* $(A, B) \leq (C, D)$ *o bien* $(C, D) \leq (A, B)$.

Demostración: Las demostraciones de (1), (2) y (3) se omiten dado que son consecuencia inmediata de la definición de $\leq$.

Para la demostración de (4), suponga $(A,B) \nleq (C,D)$ entonces, se tiene $A \not\subset C$ así, hay al menos un $a \in A$ tal que $a \notin C$; tome ahora un $c \in C$ cualquiera, de lo anterior tenemos que $c < a$; dado que (A,B) es cortadura tenemos que $c \in A$ y así $C \subset A$ como se quería. ❑

Proposición 1.20. *Para cualesquiera $(A,B),(C,D) \in Cuts(\mathbb{Q})$ se tiene que $(A,B) = (C,D)$ si y sólo si $A \subset C$ y $B \subset D$.*

Demostración: La ida es clara. Para el regreso, suponga que $A \subsetneq C$ y $B \subsetneq D$ entonces hay racionales p, q tales que $p \in C$ y $p \notin A$; $q \in D$ y $q \notin B$, como la pareja (C,D) es cortadura, se tiene que $p < q$. Ahora como $p \notin A$ entonces $q \notin A$ pues $p < q$ de manera análoga se tiene $q \notin B$ y $q \notin D$. Así, tenemos $A \cup B = \mathbb{Q} \setminus \{p,q\}$ lo cual es una contradicción ya que (A,B) es cortadura y por ende $A \cup B = \mathbb{Q}$. ❑

En lo siguiente dotaremos a $Cuts(\mathbb{Q})$ de estructura algebraica es decir, definieremos operaciones binarias a saber una suma y un producto de cortaduras.

Proposición 1.21. *Para cualesquiera $(A,B),(C,D) \in Cuts(\mathbb{Q})$ se define su suma como la pareja (E,F) donde $E = \{a+c : a \in A$ y $c \in C\}$, $F = \{b+d : b \in B$ y $d \in D\}$. Además, resulta que la pareja (E,F) es una cortadura.*

Demostración: Dado que $A,B,C,D \neq \emptyset$ entonces hay $a \in A, b \in B, c \in C, d \in D$ y así, $a + c \in E$ y $b + d \in F$ por tanto $E, F \neq \emptyset$. Consideremos ahora $e \in E$ y $f \in F$ entonces, $e = a + c$, $f = b + d$ para ciertas $a \in A, b \in B, c \in C, d \in D$; como las parejas $(A,B),(C,D)$ son cortaduras se tiene que $a < b$ y $c < d$ y así, $a + c < b + c < b + d$. Veamos por último que E no tiene elemento máximo. Sea $e \in E$ se tiene que $e = a + c$ para ciertas $a \in A$ y $c \in C$; como tanto A como C no tienen elemento máximo entonces existen $x \in A$, $y \in C$ de tal suerte que $a < x$ y $c < y$. Note que $x+y \in E$ y además $a+c < x+y$; tome entonces $e' = x+y$ y así $e < e'$. ❑

Así que la suma de cortaduras es una operación binaria y cerrada en $Cuts(\mathbb{Q})$. Una consecuencia importante de la definición de la suma de cortaduras es que ésta se realiza coordenada a coordenada es decir, para cualesquiera cortaduras (A,B), (C,D) se tiene que $(A,B)+(C,D) = (A+C, B+D)$.

Más aún, la suma de cortaduras cumple las propiedades *S1* a *S4* de la Definición 1.1, las cuales enunciamos a continuación.

Proposición 1.22. *Para cualesquiera (A, B), (C, D), $(E, F) \in Cuts(\mathbb{Q})$, se cumplen las siguientes:*

S1 $(A, B) + [(C, D) + (E, F)] = [(A, B) + (C, D)] + (E, F)$.

S2 *Existe una cortadura* $(\mathbb{Q}^-, \mathbb{Q}^+ \cup \{0\})$ *tal que* $(A, B) + (\mathbb{Q}^-, \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}) = (A, B)$.

S3 *Para* (A, B) *existe una única cortadura* (C, D) *tal que* $(A, B) + (C, D) = (\mathbb{Q}^-, \mathbb{Q}^+ \cup \{0\})$. *Resulta que* $(C, D) = (-B, -A)$.

S4 $(A, B) + (C, D) = (C, D) + (A, B)$.

A la pareja $(\mathbb{Q}^-, \mathbb{Q}^+ \cup 0)$ de la propiedad *S2*, la llamaremos *cortadura cero*. Para cualquier conjunto $S \subset \mathbb{Q}$, se define $-S = \{-s : s \in S\}$.

Demostración: Las demostraciones de *S2* y *S4* son inmediatas.

Para *S2*, basta con probar que $A + \mathbb{Q}^- \subset A$ y $B + \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$. Para la primer contención, tome $z \in A + \mathbb{Q}^-$ así $z = a + q$, como $q < 0$ tenemos $0 < -q$ sumando a y q al mismo tiempo en la desigualdad anterior obtenemos $a + q < a$ ya que (A, B) es cortadura concluimos que $z = a + q \in A$. Ahora la segundad contención considere $y \in B + \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$, así $y = b + p$ con $0 \leq p$; sumando b en esta última desigualdad, tenemos que $b \leq b + p$, de nueva cuenta ya que la pareja (A, B) es cortadura tenemos que $b + p \in B$.

Antes de la demostración de la propiedad *S3*, veamos primero que para cualquier cortadura (A, B), la pareja $(-B, -A)$ también es cortadura. Es claro que $-B, -A \neq \emptyset$ ya que $A, B \neq \emptyset$. Ahora verifiquemos que $-B \cup -A = \mathbb{Q}$, la contención $(\subseteq)$ es clara; para la otra tome $q \in \mathbb{Q}$ ya que $\mathbb{Q} = A \cup B$, tenemos $q \in A$ o bien $q \in B$ así, $-q \in -A$ o $-q \in -B$ respectivamente para cada uno de los casos y ya que todo número racional tiene a su negativo, $-q \in \mathbb{Q} \subset -B \cup -A$. Por último verifiquemos que $-B$ no tienen elemento máximo para ello, sea $b \in -B$ entonces $b' \in B$ tal que $-b' = b$, ya que B no tiene elemento mínimo, es posible encontrar $y \in B$ tal que $y < b'$ y de aquí $-b' < -y$ esto es $b < -y$, note que $-y \in -B$ por lo tanto, $-B$ no tiene elemento máximo. La denostración de que $-A$ no tiene elemento mínimo es análoga. Ahora no queda duda de que la pareja $(-B, -A)$ es una cortadura.

Ahora, veamos que se cumple la propiedad *S3* es decir, $(A, B) + (-B, -A) = (\mathbb{Q}^-, \mathbb{Q} \cup \{0\})$ esto es $(A - B, B - A) = (\mathbb{Q}^-, \mathbb{Q} \cup \{0\})$ gracias a la Proposición 1.20 será suficiente con ver que $A - B \subset \mathbb{Q}^-$ y $B - A \subset \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$. Para la primer contención tome $x \in A - B$ entonces $x = a - b$. Ya que $a < b$ tenemos $-b < -a$ sumando a en ambas partes de la desigualdad obtenemos $a - b < a - a = 0$ por tanto la contención se da. Para la segunda contención, tome $y \in B - A$ de donde $y = b - a$. Como $a < b$, tenemos $-b < -a$

sumando b en la desigualdad anterior obtenemos $0 = b - b < b - a$ es decir, $b - a \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ como se quería.

Note que en la demostración anterior $0 \notin B - A$. ❑

Continuando con la labor de dotar de estructura algebraica a $Cuts(\mathbb{Q})$, definiremos un “producto” el cual resultará ser una operación binaria en $Cuts(\mathbb{Q})$ pero para ello, introduciremos varios conceptos; el primero de ellos, la noción de “signo” y el segundo el de “cortadura positiva” (cortadura sobre $\mathbb{Q}^+$) y veremos después que toda cortadura a excepción de la cortadura cero, puede de cierta forma ser “representada” por una “cortadura positiva”. Dicha idea es algo parecido a la de valor absoluto.

Definición 1.23. Dada una cortadura (A, B), diremos que su *signo* es

(i) *positivo* si $A \cap \mathbb{Q}^+ \neq \emptyset$.

(ii) *negativo* si $B \cap \mathbb{Q}^- \neq \emptyset$.

Observe que el signo de la cortadura cero no está definido, es decir no es ni positivo ni negativo.

Definición 1.24. Una *cortadura positiva* de números racionales es un par (A, B) de subconjuntos $A, B \subseteq \mathbb{Q}^+$ de tal suerte que:

1. $A, B \neq \emptyset$.
2. $A \cup B = \mathbb{Q}^+$.
3. Para cada $a \in A$ y cada $b \in B$, se cumple que $a < b$.
4. Para cada $a \in A$ existe $x \in A$ tal que $a < x$.

Note que la definición anterior es muy similar igual a la Definición 1.15 esto de cierta manera nos hace intuir que la idea de cortadura puede definirse en cualquier conjunto sobre el cual esté definido un orden. Más adelante inclusive, veremos que la idea de cortadura se extiende de $\mathbb{Q}$ a un conjunto conocido.

Observación 1.25. Si (A, B) es una cortadura (positiva), son equivalentes las siguientes propiedades:

1. Para toda $a \in A$ y toda $b \in B$, se cumple $a < b$.
2. Para toda $a \in A$ y toda $q \in \mathbb{Q}\,(\mathbb{Q}^+)$ tal que $q < a$ se cumple $q \in A$.

Demostración: $(1 \Rightarrow 2)$ Sean $a \in A$ y $q \in Q$ tales que $q < a$ entonces, si ocurriera que $q \notin A$ se tendría $q \in B$ de donde $a < q$ pero eso es una contradicción.

$(2 \Leftarrow 1)$ Considere $a \in A$ y $b \in B$. Suponga que no ocurre $a < b$, entonces tenemos dos casos $b = a$ o $b < a$, note que el caso $b \neq a$ es imposible; así se tiene que $b < a$ esto implica $b \in A$ y por ende tendríamos $b \in A$, de nuevo una contradicción. ❑

De la observación anterior, y la defición de cortadura (positiva), obtenemos la siguiente.

Observación 1.26. Para probar que una pareja (A, B) es una cortadura (positiva), bastará con ver que se cumplen las siguientes condiciones:

1. $A, B \neq \emptyset$.
2. Para cada $a \in A$, y todo $x \in \mathbb{Q}$ tales que $x < a$, se tiene que $x \in A$.
3. Para cada $a \in A$, existe $x \in A$ tal que $a < x$.

El siguiente lema es una propiedad interesante que tienen las cortaduras positivas. Será de utilidad más adelante para una de las pruebas del "producto de cortaduras positivas".

Lema 1.27. *Dados cualesquiera $q \in \mathbb{Q}^+$ y (A, B) cortadura positiva, existen $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ tales que $q = b_0 - a_0$.*

Demostración: Tomemos $a \in A$ cualquiera y consideremos el conjunto $C = \{a + nq : n \in \mathbb{N}\}$, note que $C \subseteq \mathbb{Q}^+$. Se afirma que $B \cap C \neq \emptyset$; en efecto ya que para $b \in B$ se cumple que $a < b$ esto es, $0 < b - a$ entonces, por la propiedad arquimediana (en $\mathbb{Q}$) existe un $m \in \mathbb{N}$ de tal suerte que $mq > b - a$, de esta última obtenemos $mq + a > b$ de aquí que $mq + a \in B$. Consideremos ahora $M = \{m \in \mathbb{N} : mq + a \in B\}$, así que $M \subset \mathbb{N}$ y por lo dicho anteriormente $M \neq \emptyset$ entonces, por el principio del buen orden, M tiene un elemento mínimo, digamos m_0. Luego, tenemos los siguientes casos:

Caso 1: Si $m_0 = 1$; entonces, bastará con tomar $a_0 = a$ y $b_0 = a + q$. Note que en efecto se cumple $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ y $q = b_0 - a_0$.

Caso 2: Si $m_0 > 1$; aquí bastará con tomar $a_0 = a + (m_0 - 1)q$ y $b_0 = a + m_0 q$. De nueva cuenta se cumple que $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ y $q = b_0 - a_0$. ❑

Se puede definir una suma para cortaduras positivas de manera completamente análoga a como se hizo anteriormente sobre $Cuts(\mathbb{Q})$. Esto lo establecemos en la siguiente definición.

Definición 1.28. Dadas $(A, B), (C, D)$ cortaduras positivas, se define la suma $(A, B) \oplus (C, D)$ como la pareja (E, F) donde $E = \{a + c : A \in A, c \in C\}$.

La suma de cortaduras positivas cumple con las propiedades *S1* a *S4* de la Definición 1.1. Procure tener muy presentes la asociatividad y la conmutatividad.

El siguiente lema servirá para poder simplificar la labor cuando se defina el "producto de cortaduras". Es lo análogo a la idea del valor absoluto.

Lema 1.29. *Dada $(A, B) \in Cuts(\mathbb{Q})$ distinta a la cortadura cero, ésta puede representarse por una cortadura positiva (A', B').*

Demostración: Caso 1: Si (A, B) tiene signo positivo. Basta con tomar $A' = A \cap \mathbb{Q}^+$ y $B' = B$; así, la pareja (A', B') resulta ser cortadura positiva. En efecto, dado que $A \cap \mathbb{Q}^+ \neq \emptyset$ se tiene $A' \neq \emptyset$; $B' \neq \emptyset$ pues $B \neq \emptyset$. Dados $a' \in A'$ y $b' \in B'$ se tiene $a' \in A$ y como $B' = B$, se tiene $a' < b'$. Por último, verifiquemos que A' no tiene elemento máximo. Sea $a' \in A'$, entonces $0 < a'$ y además $a' \in A$ entonces es posible encontrar $x \in A$ tal que $0 < a' < x$ así, $0 < x$ y por tanto, $x \in A \cap \mathbb{Q}^+ = A'$.

Caso 2: Si (A, B) tiene signo negativo. Considere la pareja (A', B') donde $A' = -B \cap \mathbb{Q}^+$ y $B' = -A$. Así entonces, (A', B') resulta ser cortadura positiva. En efecto, A' es no vacío ya que (A, B) tiene signo negativo es decir, $B \cap \mathbb{Q}^- \neq \emptyset$ luego, existe $r \in B \cap \mathbb{Q}^-$ el cuál resulta ser negativo y por tanto, $-r \in \mathbb{Q}^+$ note además que $-r \in -B$ de donde se concluye $B' \neq \emptyset$.

Veamos que para cada $a' \in A'$ y $b' \in B'$, $a' < b'$. Es posible encontrar racionales $a \in B$ y $b \in A$ tales que $-a = a'$, $-b = b'$, pues (A, B) es cortadura se tiene que $b < a$ y así $-a < -b$ es decir, $a' < b'$.

Por último verifiquemos que A' no tienen elemento máximo. Sea $a' \in A' = -B \cap \mathbb{Q}^+$, entonces hay $b \in B$ tal que $-b = a'$. Como B no tiene elemento mínimo, es posible encontrar x tal que $x < b$ y así $a' = -b < -x$; note que $-x \in -B$. Falta ver que $x \in \mathbb{Q}^+$, pero esto se sigue de que $0 < a'$ y de lo anterior $0 < a' = -b < -x$ por lo tanto, $-x \in A'$ y es tal que $a' < -x$. ❑

Para cualesquiera $A, B \subseteq \mathbb{Q}$ se define $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$ es decir, todos los posibles productos de elementos de A con elementos de B. También para cualquier $A \subseteq \mathbb{Q}^+$, se define $A^{-1} = \{\frac{1}{a} : a \in A\}$.

Proposición 1.30. *Dadas $(A, B), (C, D)$ cortaduras positivas, se define su producto como $(E, F) = (A, B) \otimes (C, D)$, donde $E = AC$ y más aún, ningún elemento de E se puede escribir como producto de elementos de B y D. Además, la pareja (E, F) es una cortadura positiva.*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que $E, F \neq \emptyset$. Sean $e \in E$ y $q \in \mathbb{Q}^+$ tales que $q < e$ debemos probar que $q \in E$. Tenemos $e = ac$ para ciertos $a \in A$ y $c \in C$ fijos, dado que $q < ac$ se tiene $\frac{1}{a}a < \frac{1}{a}ac = c$ y dado que la pareja (C, D) es cortadura se debe cumplir ${}^{q}/_{a} \in C$. Luego entonces $q = ({}^{q}/_{a})a$ y por ende $q \in E$.

Por último, veremos que E no tienen elemento máximo. Considere $e \in E$, con $e = ac$, para ciertos $a \in A$ y $c \in C$ fijos. Dado que A no tiene elemento máximo es posible encontrar $x_a \in A$ tal que $a < x_a$, y así multiplicando la última desigualdad por c obtenemos $e = ac < x_a c$. Es claro que $x_a c \in E$ y así, se concluye que E no tiene elemento máximo. ❑

Resulta que así definido el producto de cortaduras positivas, eśte cumple con las propiedades *P1* a *P4* y *D* de la Definición 1.1, las cuales enunciamos a continuación.

Proposición 1.31. *Para cuales quiera cortaduras positivas $(A, B), (C, D)$ y (E, F), se cumplen las siguientes:*

P1 $(A, B) \otimes [(C, D) \otimes (E, F)] = [(A, B) \otimes (C, D)] \otimes (E, F)]$.

P2 *Existe una única cortadura positiva (A_1, B_1) tal que $(A_1, B_1) \otimes (C, D) = (C, D)$.*

P3 *Existe una única cortadura positiva $(C*, D*)$ tal que $(C*, D*) \otimes (C, D) = (A_1, B_1)$.*

P4 $(A, B) \otimes (C, D) = (C, D) \otimes (A, B)$.

D $(A, B) \otimes [(C, D) \oplus (E, F)] = (A, B) \otimes (C, D) \oplus (A, B) \otimes (E, F)$.

DEMOSTRACIÓN: Las propiedades *P1* y *P4* son consecuencia inmediata de la definición.

Para la propiedad *P2*, veremos solamente que $A = \{ax : a \in A, x < 1\}$. Primero $(\supseteq)$. Note que para cada $a \in A$, $ax < a$ y como (A, B) es cortadura positiva se tiene que $ax \in A$. Ahora para $(\subseteq)$, tome $a, a' \in A$ tales que $a < a'$, entonces eligiendo $x = {}^{a}/_{a'}$, se tiene $x = {}^{a}/_{a'} < {}^{a'}/_{a'} = 1$ y así $a = a'x$.

Para la propiedad *P3*, se propone $(C*, D*)$ con $C* = \{{}^{1}/_{b} : b \in B, b \neq \text{ínf } B\}$ y $D* = A^{-1}$. Para fines prácticos denotaremos a la pareja $(C*, D*)$ como (B^{-1}, A^{-1}). Note que el símbolo B^{-1} representa un conjunto diferente al establecido en la definición que previamente se dio a dicho símbolo. Veamos ahora que la pareja (B^{-1}, A^{-1}) es en efecto una cortadura positiva.

Es claro que $B^{-1}, A^{-1} \neq \emptyset$ ya que $A, B \neq \emptyset$. Sean $x \in B^{-1}$ y $q \in \mathbb{Q}^+$ tales que $q < x$ veremos que $q \in B^{-1}$. Como $x \in B^{-1}$ entonces hay $b \in B$

($b \neq \text{ínf}\, B$ en caso de existir) tal que $x = {}^{1}/_{b}$; teniendo así que $q < \frac{1}{b}$ esto implica $b < \frac{1}{q}$ y $\frac{1}{q} \in B$, note que en caso de existir $\text{ínf}\, B$, $\frac{1}{q} \neq \text{ínf}\, B$ ya que $\text{ínf}\, B < b < \frac{1}{q}$; por lo cual, ${}^{1}/_{({}^{1}/_{q})} = q \in B^{-1}$.

Por último veremos que B^{-1} no tiene elemento máximo. Sea $x \in B^{-1}$ entonces hay $b \in B$ tal que $x = {}^{1}/_{b}$, y aquí $b \neq \text{ínf}\, B$ por la densidad de $\mathbb{Q}^{+}$ se puede tomar $q \in \mathbb{Q}^{+}$ tal que $q < b$ y de nueva cuenta debido a la densidad se puede encontrar $q' \in \mathbb{Q}^{+}$ tal que $\text{ínf}\, B < q < q' < b$, multiplicando la última parte de la desigualdad anterior por $\frac{1}{b}$, tenemos $q'\frac{1}{b} < b\frac{1}{b} = q'\frac{1}{q'}$ obteniendo $x = \frac{1}{b} < \frac{1}{q'}$. Note que $\frac{1}{q'} \in B^{-1}$ con lo que se conluye que B^{-1} no tiene elemento máximo.

Ahora veamos que $(B^{-1}, A^{-1}) \otimes (A, B) = (A_1, B_1)$ para ello, será suficiente probra que $B^{-1}A = A_1$.

($\subseteq$) Considere $x \in B^{-1}A$, entonces hay $a \in A$, $b \in B$ con $b \neq \text{ínf}\, B$ en caso de existir, tales que $x = \frac{a}{b}$, ya que la pareja (A, B) es cortadura positiva, se tiene $a < b$, multiplicando por $\frac{1}{b}$ tenemos $a\frac{1}{b} < \frac{1}{b}b = 1$ y así, $x < 1$.

($\supseteq$) Considere ahora $q \in \mathbb{Q}^{+}$ tal que $q < 1$, hay que ver que q se puede escribir como producto de un $a \in A$ y un $x \in B^{-1}$. Considere $a \in A$ fijo, entonces para el racional $(1-q)a \in \mathbb{Q}^{+}$ es posible encontrar $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$ tales que $b_0 - a_0 = (1-q)a$ (esto gracias a el Lema 1.27) por otro lado, ya que $a < b_0$, $b_0 - a_0 < (1-q)b_0$ de esta última desigualdad se deduce que $b_0 < {}^{a_0}/_{q}$ esto implica ${}^{a_0}/_{q} \in B$ (note que en caso de existir $\text{ínf}\, B$, se tendría $\text{ínf}\, B \neq {}^{a_0}/_{q}$ ya que $\text{ínf}\, B < b < {}^{a_0}/_{q}$) luego entonces, ${}^{1}/_{({}^{a_0}/_{q})}$. Por último, notemos que $q = a_0\left(\frac{1}{({}^{a_0}/_{q})}\right)$, esto concluye la demostración.

Para la propiedad D bastará con ver que

$$(A(C \oplus E), B(D \oplus E)) = (AC \oplus AE, BD \oplus BF).$$

($\subseteq$) Sea $x \in A(C \otimes E)$, entonces x es de la forma $x = a(c+e)$ con $a \in A$, $c \in C$ y $e \in E$. De la distributividad en $\mathbb{Q}$, tenemos que $x = a(c+e) = ac+ae$, notemos que $ac \in AC$, $ae \in AE$ así entonces, $ac + ae \in AC \otimes AE$.

($\supseteq$) Sea $y \in AC \oplus AE$, entonces $y = ac + a'e$, con $a, a' \in A$, $c \in C$ y $e \in E$. Sin pérdida de la generalidad, suponga que $a < a'$; ya que (A, B) es cortadura positiva existe $a'' \in A$ de tal manera que $a < a' < a''$. De lo anterior, se sigue que

$$ac < a''c \quad \text{y} \quad a'e < a''e$$

sumando estas desigualdades, obtenemos $ac + ae' < a''c + a''e = a''(c+e)$; note que $a''(c+e) \in A(C \oplus E)$ y así, dado que la pareja $(A(C \oplus E), B(D \oplus E))$ es cortadura positiva, se cumple que $ac + a'e \in A(C \oplus E)$. ❑

De manera análoga al Lema 1.29, podemos de cierta manera "extender" las cortaduras positivas (aquellas sobre $\mathbb{Q}^+$) a cortaduras sobre todo $\mathbb{Q}$ de la siguiente manera.

Lema 1.32. *Toda cortadura positiva (A', B') puede llevarse a una cortadura $(\overline{A'}, \overline{B'}) \in Cuts(\mathbb{Q})$ donde $\overline{A'} = A' \cup \mathbb{Q}^- \cup 0$ y $\overline{B'} = B$.*

Dicho lo anterior, definamos el producto de cortaduras (sobre $\mathbb{Q}$).

DEFINICIÓN 1.33. Dadas cortaduras (A, B), (C, D) sean (A', B'), (C', D') sus representaciones como cortaduras positivas respectivamente. Se define su *producto* $(A, B)(C, D)$ de la siguiente manera.

Caso 1: (A_0, B_0) si alguna de ellas es la cortadura (A_0, B_0).

Caso 2: $(\overline{A'C'}, \overline{B'D'})$ si ambas tienen signo positivo o bien negativo.

Caso 3: $(\overline{-B'D'}, \overline{-A'C'})$ si tienen signos diferentes.

Resulta que el producto de cortaduras es una operación binaria en $Cuts(\mathbb{Q})$ que así definido, también cumple las propiedades *P1* a *P4* y *D* de la Definición 1.1. Las demostraciones de las propiedades *P1* a *P4* las omitiremos, pero sí presentaremos un bozquejo de la demostración de la distributividad en $Cuts(\mathbb{Q})$.

Proposición 1.34. *Dadas cualesquiera (A, B), (C, D) y $(E, F) \in Cuts(\mathbb{Q})$ se cumple que*

$$(A, B)\left[(C, D) + (E, F)\right] = (A, B)(C, D) + (A, B)(E, F).$$

Para la demostración de la proposición primero presentaremos varios lemas que serán de utilidad para la misma.

Lema 1.35. *Dada $(C, D) \in Cuts(\mathbb{Q})$, resulta que el inverso aditivo de (C, D) es igual a $(A_{-1}, B_{-1})(C, D)$.*

DEMOSTRACIÓN: Dependiendo del signo de (C, D) tenemos los siguientes casos.

Caso 1: Si $(C, D) = (A_0, B_0)$ es inmediato de la definición del producto.

Caso 2: Si (C, D) tiene signo positivo. Sea (C', D') la representación positiva de (C, D).

$$\begin{gathered}(A_{-1}, B_{-1})(C, D) = (A'_{-1}, B'_{-1})(C', D') = \\ (\overline{-C'}, \overline{-D'}) = (-D, -C) = -(C, D).\end{gathered}$$

Caso 3: Si (C, D) tiene signo negativo, la prueba es análoga a la del Caso 2. ❑

Lema 1.36. *Para cualquier $(C, D) \in Cuts(\mathbb{Q})$ se cumple la siguiente relación.*

$$-(C, D) = (A_{-1}, B_{-1})(C, D).$$

DEMOSTRACIÓN: Observe que del lema anterior y de las propiedades del producto, obtenemos las siguientes relaciones.

$$\begin{aligned}-(C,D) &= -(C,D) + (A_{-1},B_{-1})(C,D) + (A_1,B_1)(C,D)\\ &= -(C,D) + (A_{-1},B_{-1})(C,D) + (C,D) = (A_{-1},B_{-1})(C,D).\end{aligned}$$

❑

Lema 1.37. *Cualquier cortadura (C,D) puede representarse como diferencia de dos cortaduras positivas.*

DEMOSTRACIÓN: De acuerdo a la relación que puede haber entre (C,D) y (A_0,B_0), tenemos los siguientes casos.

Caso 1: Si $(A_0,B_0) \leq (C,D)$, entonces se cumple $[(C,D)+(A_1,B_1)] - (A_1,B_1)$.

Caso 2: Si $(C,D) = (A_0,B_0)$, entonces $(C,D) = (A_1,B_1) - (A_1,B_1)$.

Caso 3: Si $(C,D) \leq (A_0,B_0)$. Note que $-(C,D) = (\overline{C'},\overline{D'}) \geq (A_0,B_0)$. Entonces por Caso 1 tenemos

$$(\overline{C'},\overline{D'}) = \left[(\overline{C'},\overline{D'}) + (A_1,B_1)\right] - (A_1,B_1).$$

Esta última relación implica

$$(C,D) = (A_1,B_1) - \left[(\overline{C'},\overline{D'}) + (A_1,B_1)\right].$$

Lo que concluye con la demostración del lema. ❑

Lema 1.38. *Dadas (C,D), (E,F) cualesquiera cortaduras y suponga que sus representaciones como diferencias de cortaduras positivas está dada por*

$$(C,D) = (\tilde{C},\tilde{D}) - (\hat{C},\hat{D}) \quad y \quad (E,F) = (\tilde{E},\tilde{F}) - (\hat{E},\hat{F})$$

entonces la siguiente relación se cumple

$$(C,D) + (E,F) = \left[(\tilde{C},\tilde{D}) + (\tilde{E},\tilde{F})\right] - \left[(\hat{C},\hat{D}) + (\hat{E},\hat{F})\right].$$

La demostración del último lema se omite debido a la diversa cantidad de casos existentes entre las cortaduras (C,D), (E,F) y la cortadura (A_0,B_0). Para aquellos lectores interesados en leer la demostración, ésta pueden encontrarla en [4] (ver Teorema 185).

Lema 1.39. *Para cualesquiera (A,B), (C,D), (E,F) cortaduras sobre $\mathbb{Q}^+$ (positivas), se cumple la relación*

$$(A,B)\left[(C,D) - (E,F)\right] = (A,B)(C,D) - (A,B)(E,F).$$

Demostración: Para la demostración consideraremos los distintos casos que puede haber en cuanto al orden entre (C, D) y (E, F).

Caso 1: Si $(E, F) \leq (C, D)$, notemos que $(C, D) - (E, F) \geq (A_0, B_0)$ mientras que por otro lado, $[(C, D) - (E, F)] + (E, F) = (C, D)$ multiplicando esta última igualdad por (A, B) y por la distributividad del porducto sobre la suma de las cortaduras sobre $\mathbb{Q}^+$ obtenemos

$$\begin{aligned}(A, B)(C, D) &= (A, B)\,[(C, D) - (E, F) + (E, F)] \\ &= (A, B)\,[(C, D) - (E, F)] + (A, B)(E, F),\end{aligned}$$

así entonces, $(A, B)\,[(C, D) - (E, F)] = (A, B)(C, D) - (A, B)(E, F)$.

Caso 2: Si $(E, F) = (C, D)$ es directo, no hay nada por hacer.

Caso 3: Si $(C, D) \leq (E, F)$, notemos que del Caso 1 se tiene que

$$(A, B)\,[(E, F) - (C, D)] = (A, B)(E, F) - (A, B)(C, D)$$

Además, por el Lema 1.36 $(C, D) - (E, F) = (A_{-1}, B_{-1})\,[(E, F) - (C, D)]$.

Haciendo uso de las igualdades anteriores obtenemos

$$\begin{gathered}(A, B)\,[(C, D) - (E, F)] = (A, B)\,[(A_{-1}, B_{-1})\,((E, F) - (C, D))] = \\ (A_{-1}, B_{-1})\,[(A, B)\,[(E, F) - (C, D)]] = \\ (A_{-1}, B_{-1})\,[(A, B)(E, F) - (A, B)(C, D)] = (A, B)(C, D) - (A, B)(E, F).\end{gathered}$$

Completando de esta forma la demostración. ❑

Equipados con nuestro arsenal de lemas estamos listos para demostrar la propiedad de distributividad para cortaduras.

Demostración: (Distributividad) Recordemos, para cualesquiera cortaduras (A, B), (C, D) y $(E, F) \in Cuts(\mathbb{Q})$, se cumple

$$(A, B)\,[(C, D) + (E, F)] = (A, B)(C, D) + (A, B)(E, F)$$

Tenemos diferentes casos de acuerdo a la relación entre (A, B) y (A_0, B_0).

Caso 1: Si $(A, B) = (A_0, B_0)$. Tanto el lado izquierdo como los sumandos del lado derecho son iguales a (A_0, B_0) entonces no hay nada por hacer ya que la conclusión es directa.

Caso 2: Si $(A, B) \geq (A_0, B_0)$. Por el Lema 1.37 podemos escribir tanto a (C, D) como a (E, F) como diferencia de cortaduras positivas.

$$(C, D) = (\tilde{C}, \tilde{D}) - (\hat{C}, \hat{D}) \quad \text{y} \quad (E, F) = (\tilde{E}, \tilde{F}) - (\hat{E}, \hat{F});$$

así, por el Lema 1.38 tenemos la siguiente igualdad

$$(C, D) + (E, F) = \left[(\tilde{C}, \tilde{D}) + (\tilde{E}, \tilde{F})\right] - \left[(\hat{C}, \hat{D}) + (\hat{E}, \hat{F})\right]$$

multiplicando la última igualdad por (A, B), tenemos

$$(A, B)\left[(C, D) + (E, F)\right] = (A, B)\left\{\left[(\tilde{C}, \tilde{D}) + (\tilde{E}, \tilde{F})\right] - \left[(\hat{C}, \hat{D}) + (\hat{E}, \hat{F})\right]\right\}$$

dado que cada una de las cortaduras de la igualdad anterior son positivas, podemos hacer uso del Lema 1.39 obteniendo así

$$\begin{aligned}&(A, B)\left[(C, D) + (E, F)\right] = \\ &\qquad (A, B)\left[(\tilde{C}, \tilde{D}) + (\tilde{E}, \tilde{F})\right] - \left[(A, B)\left[(\hat{C}, \hat{D}) + (\hat{E}, \hat{F})\right]\right]\end{aligned}$$

luego, por la distributividad de las cortaduras positivas (aquellas sobre $\mathbb{Q}^+$), la igualdad anterior de convierte en

$$\begin{aligned}&(A, B)\left[(C, D) + (E, F)\right] = \\ &\qquad \left[(A, B)(\tilde{C}, \tilde{D}) + (A, B)(\tilde{E}, \tilde{F})\right] - \left[(A, B)(\hat{C}, \hat{D}) + (A, B)(\hat{E}, \hat{F})\right]\end{aligned}$$

asociando los términos adecuados de la parte derecha de la igualda anterior, y de nueva cuenta, por la distributividad de cortaduras positivas

$$\begin{gathered}(A, B)\left[(C, D) + (E, F)\right] = \\ (A, B)(\tilde{C}, \tilde{D}) - (A, B)(\hat{C}, \hat{D}) + (A, B)(\tilde{E}, \tilde{F}) - (A, B)(\hat{E}, \hat{F}) = \\ (A, B)\left[(\tilde{C}, \tilde{D}) - (\hat{C}, \hat{D})\right] + (A, B)\left[(\tilde{E}, \tilde{F}) - (\hat{E}, \hat{F})\right] = \\ (A, B)(C, D) + (A, B)(E, F).\end{gathered}$$

Caso 3: Si Si $(A, B) \leq (A_0, B_0)$. Tenemos entonces que $-(A, B) \geq (A_0, B_0)$; así entonces del Caso 2, obtenemos

$$\left[-(A, B)\right]\left[(C, D) + (E, F)\right] = \left[-(A, B)\right](C, D) + \left[-(A, B)\right](E, F)$$

haciendo uso de las propiedades de la suma de cortaduras, obtenemos de la igualdad anterior

$$(A, B)\left[(C, D) + (E, F)\right] = (A, B)(C, D) + (A, B)(E, F)$$

Concluyendo así la demostración de la proposición. ❑

Recapitulemos lo que tenemos construido hasta este punto. Hemos dotado de estructura algebraica al conjunto $Cuts(\mathbb{Q})$ de manera que resulta cumplir con los axiomas de campo (ver Definición 1.1). Pero para nuestros fines, esto no está terminado dado que nos gustaría ver que el orden denfinido en $Cuts(\mathbb{Q})$ sea "compatible" con las operaciones algebraicas es decir, queremos que $Cuts(\mathbb{Q})$ sea un campo ordenado (ver Definición 1.3). Tenemos así la siguiente proposición.

Proposición 1.40. *El conjunto $Cuts(\mathbb{Q})$ es un campo ordenado.*

Demostración: Sea $\mathbf{P} = \{(A, B) \in Cuts(\mathbb{Q}) : A \cap \mathbb{Q}^+ \neq \emptyset\}$ es decir, $\mathbf{P}$ es el conjunto de todas las cortaduras con signo positivo. Vamos a verificar que $\mathbf{P}$ satisface las propiedades de la Definición 1.3.

(*O1*). Sea $(A, B) \in Cuts(\mathbb{Q})$, si $(A, B) = (A_0, B_0)$ (es decir, igual a la cortadura cero), entonces terminamos. Ahora bien, si (A, B) es tal que $A \cap \mathbb{Q}^+ \neq \emptyset$ entonces $(A, B) \in \mathbf{P}$ y también terminamos. Por último, supongamos que ninguno de los anteriores es el caso, es decir $(A, B) \neq (A_0, B_0)$ y $A \cap \mathbb{Q}^+ = \emptyset$ esta última igualdad implica que $A \subset \mathbb{Q}^-$ así, $B \cap \mathbb{Q}^- \neq \emptyset$ esto a su vez quiere decir que $-B \cap \mathbb{Q}^+ \neq \emptyset$ por lo tanto $-(A, B) = (-B, -A) \in \mathbf{P}$.

(*O2*). Sean $(A, B), (C, D) \in \mathbf{P}$ tome $a \in A \cap \mathbb{Q}^+$ y $c \in C \cap \mathbb{Q}^+$ es claro que $a + c \in \mathbb{Q}^+$ y que $a + c \in A + C$ por lo tanto, $(A + C, B + D) \in \mathbf{P}$.

(*O3*). Sean $(A, B), (C, D) \in \mathbf{P}$ y (A', B'), (C', D') sus representaciones como cortaduras positivas respectivamente; sean $a \in A \cap \mathbb{Q}^+$ y $c \in C \cap \mathbb{Q}^+$ note que $a \in A'$ y $c \in C'$, luego, $ac \in A'C'$. Luego, de la Definición 1.33, tenemos que $ac \in \overline{A'C'}$ y ya que $0 < ac$, $(A, B)(C, D) \in \mathbf{P}$. ❑

Así, entonces en base a $\mathbf{P}$, se define un "nuevo" orden sobre $Cuts(\mathbb{Q})$ de la siguiente manera. Dadas $(A, B), (C, D) \in Cuts(\mathbb{Q})$, diremos que (A, C) *es menor que* (C, D) $((A, B) < (C, D))$ si y sólo si $(C, D) - (A, B) \in \mathbf{P}$, es decir si $(C - B) \cap \mathbb{Q}^+ \neq \emptyset$.

Más nos vale que este nuevo orden sobre $Cuts(\mathbb{Q})$ sea compatible con el que se estableció en la Proposición 1.19, recordemos que dicho orden es el determinado por la contención; es decir, para (A, B) $(C, D) \in Cuts(\mathbb{Q})$ se dice que $(A, B) < (C, D)$ si y solo si $A \subseteq C$. La equivalencia entre estás dos maneras de definir un orden "bueno" sobre $Cuts(\mathbb{Q})$ se estable en la siguiente proposición.

Proposición 1.41. *Para cualesquiera $(A, B), (C, D) \in Cuts(\mathbb{Q})$ las siguientes son equivalentes*

(i) $A \subseteq C$.

(ii) $(C - B) \cap \mathbb{Q}^+ \neq \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN: $\Rightarrow]$ Note que $A \subseteq C$ implica que $C \cap B \neq \emptyset$; sea entonces $q \in C \cap B$, dado que C no tiene elemento máximo, existe $q' \in C$ tal que $q < q'$ de aquí, tenemos $0 < q' - q$; además, es claro que $q' - q \in C - B$ por lo tanto, $(C - B) \cap \mathbb{Q}^+ \neq \emptyset$.

$\Leftarrow]$ Sean $a \in A$ y $q \in (C - B) \cap \mathbb{Q}^+$. Recuerde que $q = c_q - b_q$, además dado que (A, B) es cortadura se tiene que toda elemento de A es menor que cualquier elemento de B, en particular se cumple $a < b_q$ de aquí, $-b_q < -a$ sumando c_q tenemos $0 < c_q - b_q < c_q - a$ y así, $a < c_q$ entonces por la parte (2) de la Observación 1.25 se tiene $a \in C$ por lo tanto $A \subseteq C$. ❑

DEFINICIÓN 1.42. Se define al conjunto de los números reales

$$\mathbb{R} = \{x : x \in Cuts(\mathbb{Q})\}.$$

Así entonces, cuando se piense en un número real x, deberá de tenerse muy en cuenta que éste se identifica con una pareja de subconjuntos de $\mathbb{Q}$ a saber (A_x, B_x) de tal manera que dicha pareja resulta ser un elemento de $Cuts(\mathbb{Q})$.

Además, si $x, y \in \mathbb{R}$ con $x = (A_x, B_x)$, $y = (A_y, B_y)$ la suma y el producto se efectúan en términos de las cortaduras que los determinan; diremos también que $x < y$ si ocurre $A_x \subseteq A_y$.

Aclarada la forma en la que se operan y comparan elementos de $\mathbb{R}$, dicho conjunto es entonces un campo ordenado, es decir cumple las propiedades de la Definición 1.3. Todo esto se esableció en la Proposición 1.40.

Por último, para ver que en realidad el objeto que hemos construido realmente son los números reales, solamente falta ver que $\mathbb{R}$ tiene la propiedad del supremo es decir, dado $A \subseteq \mathbb{R}$, no vacío y acotado superiormente admite una mínima cota superior. Para ello probaremos primero una serie de resultados los cuales harán un poco más sencilla la prueba de la completez de $\mathbb{R}$.

Teorema 1.43 (Teorema Fundamental de Dedekind). *Dados $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$ de manera que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$, para cada $a \in \mathcal{A}$, y cada $b \in \mathcal{B}$ se tiene $a < b$. entonces existe un único número real x de tal suerte que*

(I) *Para cada $a \in \mathbb{R}$ tal que $a < x$ entonces, $a \in \mathcal{A}$.*

(II) *Para cada $b \in \mathbb{R}$ tal que $x < b$ entonces, $b \in \mathcal{B}$.*

Observe que de la condición para cada $a \in \mathcal{A}$ y cada $b \in \mathcal{B}$ se debe cumplir $a < b$ implica $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

Demostración: Verifiquemos primero la unicidad. Si ocurriera que existen dos números reales x_1, x_2 de manera que ambos cumplen las propiedades enunciadas en el teorema, entonces el número real $m = \frac{x_1+x_2}{2}$ es tal que pertenece tanto a $\mathcal{A}$ como a $\mathcal{B}$; en efecto, ya que

$$\begin{aligned} x_1 &< x_2 \\ x_1 + x_1 < x_1 &+ x_2 < x_2 + x_2 \\ x_1 &< \frac{x_1+x_2}{2} < x_2; \end{aligned}$$

en la última relación, una desigualdad dice que $m \in \mathcal{B}$ mientras que la otra dice $m \in \mathcal{A}$ contradiciendo que dichos conjuntos son ajenos.

Para probar la existencia de un x adecuado, procedemos de la siguiente manera. Considere los conjuntos $\bigcup_{a\in\mathcal{A}} A_a$ y $\bigcup_{b\in\mathcal{B}} B_b$. Denotaremos como m a el elemento máximo de $\bigcup_{a\in\mathcal{A}} A_a$ en caso de existir. Sean los subconjuntos de racionales

$$E = \bigcup_{a\in\mathcal{A}} A_a \setminus \{m\} \quad \text{y} \quad F = \bigcup_{b\in\mathcal{B}} B_b \cup \{m\}.$$

Vamos a probar que la pareja (E, F) forma una cortadura en $\mathbb{Q}$. Notemos que $E \neq \emptyset$, $F \neq \emptyset$ ya que tanto $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son no vacíos.

Tome ahora $q \in E$ y $q' \in F$ entonces existen $a \in \mathcal{A}$ y $b \in \mathcal{B}$ tales que $q \in A_a$ y $q' \in B_b$. Debe ocurrir $A_a \subseteq A_b$, pues de lo contrario, podrían encontrarse $b \in \mathcal{B}$ y $a \in \mathcal{A}$ tal que $b < a$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $q < q'$.

Veamos ahora que $\mathbb{Q} = E \cup F$. Una de las contenciones es clara. Para la otra, sea $q \in \mathbb{Q}$ note que q se identifica con la cortadura (A_q, B_q) entonces, para q visto como número real puede ocurrir que $q \in \mathcal{A}$ o bien $q \in \mathcal{B}$. Si $q \in \mathcal{B}$ es claro que $q \in F$; supóngase entonces que $q \notin \mathcal{B}$. Si ocurriera $q \in \bigcup_{a\in\mathcal{A}} A_a$ también terminamos; si no, no existe $a \in E$ tal que $q < a$ ya que de otro modo, $q \in \bigcup_{a\in\mathcal{A}} A_a$. En particular, para cada $a \in (\bigcup_{a\in\mathcal{A}} A_a) \cap \mathbb{Q}$ ocurriría $q \leq a$ y ya que $q \notin \mathcal{B}$ entonces $q = a$ y así, $q \in F$.

Por tanto, $(E, F) \in Cuts(\mathbb{Q})$. Sea ahora $x \in \mathbb{R}$ tal que $x = (E, F)$; veremos que x cumple con las condiciones del teorema. Sea $a \in \mathcal{A}$ es claro que $A_a \subseteq E$ así, $a \leq x$; por otro lado, si $b \in \mathcal{B}$ se tiene $B_b \subseteq F$ o bien $E = \mathbb{Q} \setminus F \subseteq \mathbb{Q} \setminus B_b = A_b$ y así, $x \leq b$. ❑

Ahora sí estamos listos para probar la completez de $\mathbb{R}$, la cual resultará ser corolario del Teorema Fundamental de Dedekind.

Corolario 1.44. *Dado $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente, entonces A tiene supremo en $\mathbb{R}$.*

Demostración: Considere los subconjuntos de $\mathbb{R}$

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} : (\exists a \in A)(x \leq a)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R} : (\forall a \in A)(a \leq x)\}.$$

Es claro que tanto $\mathcal{A}$ como $\mathcal{B}$ son no vacíos, en efecto ya que en el primer caso ocurre $A \subseteq \mathcal{A}$ mientras que el segundo caso se da porque A está acotado superiormente. Note también que dados cualesquiera $x \in \mathcal{A}$ y $y \in \mathcal{B}$, se cumple $x < y$. Así entonces, se cumplen las condiciones del Teorema anterior. Por lo tanto, existe un único $z \in \mathbb{R}$ de tal suerte que para cada $a \in \mathcal{A}$, resulta $a \leq z$ y para cada $b \in \mathcal{B}$, $z \leq b$. De lo anterior, se tiene que z es cota superior de A y además, z es menor que cualquier otra cota superior de A, así entonces tome $\sup A = z$. ❑

1.4. Un único campo ordenado completo

Veremos ahora que $\mathbb{R}$ es el único campo ordenado salvo isomorfismo. Esto quiere decir que no importa que tan extraña o exigente sea la manera en la que se puedan construir campos ordenados completos al final resultan ser en esencia el campo de los número reales.

Teorema 1.45. *Si $\mathbb{F}$ es un campo ordenado completo, entonces $\mathbb{F}$ y $\mathbb{R}$ son isomorfos.*

Demostración: Construiremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$ isomorfismo, por pasos, primero sobre $\mathbb{N}$ después lo extenderemos a $\mathbb{Z}$, después a $\mathbb{Q}$ y finalmente a todo $\mathbb{R}$. Denotaremos como $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, etcétera a los elementos de $\mathbb{F}$. Además, se denotarán por $+$, $\cdot$ y $<$ a la suma, el producto y el orden respectivamente tanto de $\mathbb{R}$ como de $\mathbb{F}$.

Primero defina f_1 sobre $\mathbb{N}$ y ya que debemos de tener un isomorfismo, es claro que $f_1(0) = \mathbf{0}$. Ahora para $m \in \mathbb{N}$, defina $f_1(s(m)) = f_1(m) + \mathbf{1}$, donde $s(m)$ denota al sucesor de m. Veamos que $\mathbb{F}$ cumple con las propiedades 3, 4 y 5 de la definición 1.7.

Probemos que *CO 3* se cumple mediante inducción sobre m. Si $m = 0$, entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$f_1(m + n) = f_1(0 + n) = f_1(n) = \mathbf{0} + f_1(n) = f_1(0) + f_1(n).$$

Suponga que para cierta $m \in \mathbb{N}$, con $m \geq 0$ y para toda $n \in \mathbb{N}$, $f(m + n) = f(m) + f(n)$. Hay que ver que para $s(m)$, f abre sumas,

$$\begin{aligned} f_1(s(m) + n) =& f_1(m + 1 + n) = f_1(m + s(n)) = f_1(m) + f(s(n)) \\ &= f_1(m) + f_1(n) + \mathbf{1} = f_1(s(m)) + f_1(m). \end{aligned}$$

De manera análoga veamos que f_1 cumple *CO 4*. Para $m = 0$ y para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$f_1(m \cdot n) = f_1(0 \cdot n) = f_1(0) = \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot f_1(n) = f_1(0) \cdot f_1(n).$$

Suponga que para cierta $m \in \mathbb{N}$, con $m \geq 0$ y para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$f_1(m \cdot n) = f_1(m) \cdot f_1(n).$$

Hay que ver que para $s(m)$, f_1 también abre productos.

$$f_1(s(m) \cdot n) = f_1((m+1)n) = f_1(m \cdot n + n) = f_1(m \cdot n) + f_1(n)$$

y ya que f_1 abre sumas tenemos que

$$f_1(m \cdot n) + f_1(n) = f_1(m) \cdot f_1(n) + f_1(n) = (f(m) + \mathbf{1}) \cdot f_1(n) = f_1(s(m)) \cdot f_1(n).$$

Veamos que f_1 cumple *CO 5*. Para ello sean $m, n \in \mathbb{N}$, y suponga que $m < n$ entonces, hay un $k \in \mathbb{N}$, con $k \geq 1$ y tal que $n = m + k$ entonces,

$$f_1(n) = f_1(m + k) = f_1(m) + f_1(k)$$

como $k \neq 0$, $f_1(k) \neq \mathbf{0}$

$$f_1(m) < f_1(m) + f_1(k) = f_1(n).$$

Observación 1.46. El conjunto $\mathbf{N}_{\mathbb{F}} = \{\mathbf{n} \in \mathbb{F} : n \in \mathbb{N}\}$ es no acotado superiormente en $\mathbb{F}$ es decir, el campo $\mathbb{F}$ es arquimediano. Para demostrar este hecho suponga que $\mathbf{N}_{\mathbb{F}}$ es acotado, dado que $\mathbf{N}_{\mathbb{F}} \neq \emptyset$ y por la completes de $\mathbb{F}$ se tiene que hay $\alpha \in \mathbb{F}$ tal que $\alpha = \sup \mathbf{N}_{\mathbb{F}}$, note que $\alpha - 1$ no es cota superior, sea entonces $\mathbf{m} \in \mathbf{N}_{\mathbb{F}}$ testigo de ello, esto es, $\alpha - 1 \leq \mathbf{m} < \alpha$ pero esto implica que $\alpha < \mathbf{m} + \mathbf{1}$ y como $\mathbf{m} + \mathbf{1} \in \mathbf{N}_{\mathbb{F}}$ y así α no es cota superior de $\mathbf{N}_{\mathbb{F}}$.

Extendamos ahora f_1 a $\mathbb{Z}$ de la siguiente manera. Para $n \in \mathbb{Z}$, defínase

$$f_2(n) = \begin{cases} (\underbrace{\mathbf{1} + \mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1}}_{n \text{ veces}}) & ,\text{si } n > 0 \\ \\ -(\underbrace{\mathbf{1} + \mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1}}_{|n| \text{ veces}}) & ,\text{si } n < 0. \end{cases}$$

Veamos ahora que esta nueva forma de definir a f_2 conincide con la que se dio definida solamente sobre $\mathbb{N}$ para ello, utilizaremos inducción.

Para $n = 1$ es claro ya que,

$$f_2(n) = f_2(1) = \mathbf{1} = \mathbf{0} + \mathbf{1} = f_2(s(0)) = f(1).$$

Supóngase que para cierta $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 1$, se cumple que

$$(n) = (\underbrace{\mathbf{1} + \mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1}}_{n \text{ veces}}) = f_2(s(n-1)).$$

Hay que ver, que para $n+1$, $f(n+1) = f(s(n))$.

$$\begin{aligned} f_2(n+1) = &(\underbrace{\mathbf{1} + \mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1}}_{n+1 \text{ veces}}) = (\underbrace{\mathbf{1} + \mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1}}_{n \text{ veces}}) + \mathbf{1} = f_2(s(n-1)) + \mathbf{1} = \\ &f_2(s(n-1)+1) = f_2(n-1+1+1) = f_2(n+1) = f_2(s(n)). \end{aligned}$$

Veamos que f_2, también cumple con *CO 3*, *CO 4* y *CO 5* de la definición 1.7.

Para *CO 3*. Sean $m, n \in \mathbb{Z}$, tenemos varios casos, pero solamente probaremos el caso cuando $m, n > 0$ ya que los otros casos pueden llevarse (con mucho cuidado) a este caso.

Suponga $m, n > 0$ entonces,

$$f_2(m+n) = (\underbrace{\mathbf{1} + \mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1}}_{n+m \text{ veces}}) = f_2(n) + f_2(m).$$

Para ver que f_2 también cumple con *CO4*, tenemos de nueva cuenta varios casos, pero solamente provaremos el caso en que $m, n > 0$. Suponga que $m, n > 0$ entonces,

$$f_2(m \cdot n) = (\underbrace{\mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1}}_{|m \cdot n| \text{ veces}}) = (\underbrace{\mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1}}_{m \text{ veces}}) \cdot (\underbrace{\mathbf{1} + \cdots + \mathbf{1}}_{n \text{ veces}}) = f_2(m) \cdot f_2(n).$$

Por último veamos que f_2 cumple con *CO 5*, para ello sean $m, n \in \mathbb{Z}$ y suponga $m < n$ entonces, hay $k \in \mathbb{Z}$ con $k > 0$ tal que $m + k = n$, de ahí que $f_2(n) = f_2(m+k) = f_2(m) + f_2(k) > f_2(m)$ pues $f_2(k) \neq \mathbf{0}$ y más aún, $f_2(k) > \mathbf{0}$ dado que $k \in \mathbb{N}$ y ya vimos que f_2 y f_1 coinciden en $\mathbb{N}$ entonces, $f_2(k) > \mathbf{0}$ implica que $f_1(k) > \mathbf{0}$ y por tanto la desigualdad se sigue.

Recuerde que a los elementos de $\mathbb{F}$ los denotamos como $\mathbf{0}$, así para cada $n \in \mathbb{Z}$, denotaremos su imagen bajo f_2 como $\mathbf{n} = f_2(n)$. Ahora extendamos f_2 a $\mathbb{Q}$, de la siguiente manera. Dado $r \in \mathbb{Q}$, con $r = \frac{m}{n}$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$, defina $f_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{F}$ como $f_3(r) = f_3(\frac{m}{n}) = \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}^{-1}$, donde $\mathbf{n}^{-1}$ representa al inverso de $\mathbf{n}$ bajo el producto de $\mathbb{F}$.

Veremos ahora que f_3 cumple con las propiedades *CO 3*, *CO 4* y *CO 5*. Pero primero verifiquemos $f_3 \upharpoonright \mathbb{Z} = f_2$ para ello, tome $n \in \mathbb{Z}$ y note que $n = \frac{n}{1}$ visto en $\mathbb{Q}$ luego, $f_3(n) = f_3(\frac{n}{1}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{1}^{-1} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{n} = f_2(n)$.

También hay que ver que f_3 esté bien definida, pero esto se sigue de que f_3 coincide con f_2 en los enteros y además ésta respeta la estructura.

Verifiquemos que f_3 cumple con *CO 3*, *CO 4* y *CO 5*; para ello sean r_1, $r_2 \in \mathbb{Q}$ con $r_1 = \frac{m}{n}$ y $r_2 = \frac{p}{q}$.

Para *CO 3*, tenemos las siguientes igualdades.

$$\begin{aligned} f_3(r_1 + r_2) &= f_3\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) = f_3\left(\frac{mq + np}{nq}\right) = f_2(mq + np)(f_2(nq))^{-1} \\ &= f_2(mq)(f_2(nq))^{-1} + f_2(np)(f_2(nq))^{-1} = \mathbf{mq}(\mathbf{nq})^{-1} + \mathbf{np}(\mathbf{nq})^{-1} \\ &= \mathbf{mqn}^{-1}\mathbf{q}^{-1} + \mathbf{npn}^{-1}\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{mqq}^{-1}\mathbf{n}^{-1} + \mathbf{pnn}^{-1}\mathbf{q}^{-1} \\ &= \mathbf{mn}^{-1} + \mathbf{pq}^{-1} = f_3\left(\frac{m}{n}\right) + f_3\left(\frac{p}{q}\right) = f_3(r_1) + f_3(r_2). \end{aligned}$$

Verifiquemos ahora la propiedad *CO 4* para f_3,

$$\begin{aligned} f_3(r_1 r_2) &= f_3\left(\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}\right) = f_3\left(\frac{mp}{np}\right) = f_2(mp)(f_2(nq))^{-1} \\ &= \mathbf{mpn}^{-1}\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{mn}^{-1}\mathbf{pq}^{-1} f_3(\frac{m}{n}) f_3(\frac{p}{q}) = f_3(r_1) f_3(r_2). \end{aligned}$$

Para ver que f_3 cumple con *CO 5*, suponga que $r_1 < r_2$, entonces hay $r \in \mathbb{Q}$, con $r > 0$ tal que $r_1 + r = r_2$ así, $f_3(r_2) = f_3(r_1 + r) = f_3(r_1) + f_3(r) > f_3(r_1)$ pues $f_3(r) \neq \mathbf{0}$ y $f_3(r) > 0$.

Observación 1.47. Los raciones de $\mathbb{F}$ son densos, es decir para $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{F}$ con $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ hay $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\mathbf{a} < f_3(r) < \mathbf{b}$. Sin pérdida de generalidad suponga que $\mathbf{0} < \mathbf{a} < \mathbf{b}$. Entonces, $\mathbf{b} - \mathbf{a} \in \mathbb{F}^+$, más aún, $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) - 1 \in \mathbb{F}^+$.

Sean $A = \{n \in \mathbb{N} : (\mathbf{a} - \mathbf{b})^{-1} < f_3(n)\}$, $B = \{m \in \mathbb{N} : \mathbf{n_0 a} \leq \mathbf{f_3(m)}\}$. Note que ambos son no vacíos, sean entonces $n_0 = \min A$ y $m_0 = \min B$. Las siguientes desigualdades se siguen de la elección de n_0 y m_0.

$$\begin{aligned} &f_3(m_0 - 1) = f_3(m_0) - \mathbf{1} < f_3(n_0)\mathbf{a} < f_3(m_0), \\ &(\mathbf{b} - \mathbf{a})^{-1} < f_3(n_0) \Rightarrow \mathbf{1} + \mathbf{a} f_3(n_0) < \mathbf{b} f_3(n_0). \end{aligned}$$

Se cumple $f_3(n_0)\mathbf{a} < f_3(m_0) < f_3(n_0)\mathbf{b}$, por lo cual $\mathbf{a} < f_3(m_0) f_3(n_0)^{-1} < \mathbf{b}$; y así $r = \frac{m_0}{n_0}$ hace que la observación se siga.

Por último extendamos f_3 a todo $\mathbb{R}$ de la siguiente manera. Sea $x \in \mathbb{R}$ y considere el conjunto $A_x = \{f_3(r) : r \in \mathbb{Q} \text{ y } r \leq x\}$, se sigue de la propiedad arquimediana que A_x es no vacío. Además está acotado superiormente dado que si r_0 es un racional tal que $r_0 > x$ entonces, $f_3(r_0) > f_3(r)$ para cada $f_3(r) \in A_x$. Dado que $\mathbb{F}$ es un campo ordenado completo, A_x tiene cota superior mínima; así pues, defina

$$f(x) = \sup A_x.$$

De nueva cuenta, debemos demostrar que la función $f \restriction \mathbb{Q}$ coincide con f_3; para ello, sea $r \in \mathbb{Q}$, con $r = \frac{m}{n}$ y veamos que en efecto ocurre que

$$f_3(r) = f_3\left(\frac{m}{n}\right) = \mathbf{mn}^{-1} = \sup A_r = f(r).$$

Veamos que $f_3(r)$ es cota superior de A_r, para ello, tome $\mathbf{x} \in A_r$, entonces existe un $s_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Q}$ tal que $f_3(s_{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}$ y además, $s_{\mathbf{x}} < r$ por tanto, $f_3(s_{\mathbf{x}}) < f_3(r)$ por tanto, $f_3(r)$ es una cota superior para A_r. Veamos ahora que $\sup A_r \geq f_3(r)$, dado que $r \leq r$, entonces $f_3(r) \in A_r$ y por tanto, $f_3(r) \leq \sup A_r$.

Por último verifiquemos que f satisface todas las propiedades de homomorfismo de campos y que además es biyectiva.

Primero *CO 5*, sean $x, y \in \mathbb{R}$ y suponga $x < y$ de esto se sigue que $A_x \subseteq A_y$ y consecuentemente $f(x) \leq f(y)$; para ver que la igualdad no se da, note que existen $r, s \in \mathbb{Q}$ tales que $x < r < s < y$ y dado que f respeta el orden en $\mathbb{Q}$, $f(x) \leq f(r) < f(s) \leq f(y)$. Una consecuencia de lo anterior es la inyectividad de f.

Para ver que f es suprayectiva; sean $\mathbf{a} \in \mathbb{F}$ y $B = \{r \in \mathbb{Q} : f(r) < \mathbf{a}\}$. Se afirma que $B \neq \emptyset$ ya que $\mathbf{N}_{\mathbb{F}}$ no está acotado superiormente en $\mathbb{F}$. También se tiene que B está acotado superiormente, pues existe un racional s tal que $\mathbf{a} < f(s)$, así para $r \in B$, $f(r) < f(s)$ en consecuencia $r < s$. Sea $x = \sup B$.

Afirmación $f(x) = \mathbf{a}$. Si ocurriera que $f(x) < \mathbf{a}$, sería posible encontrar $r \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) < f(r) < \mathbf{a}$ esto implicaría que $r \in B$ y que además $\sup B = x < r$, lo cual contradiría la elección de x. Por otro lado, si ocurriera que $\mathbf{a} < f(x)$, entonces sería posible encontrar $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\mathbf{a} < f(r) < f(x)$ luego, $r < x$ y así existiría un $s \in \mathbb{Q}$ con $r < s$ y tal que $s \in B$ esto a su vez implicaría que $f(r) < f(s) < \mathbf{a}$ contradiciendo la elección de r.

Verifiquemos que f cumple *CO 3*; para ello sean $x, y \in \mathbb{R}$ y suponga además que $0 < x < y$ (para el caso $x = 0$ la propiedad es obvia). Supóngase que la igualdad no fuese cierta, luego se tendrían los siguientes casos.

$$f(x+y) < f(x) + f(y) \quad \text{o} \quad f(x) + f(y) < f(x+y).$$

Para el caso $f(x+y) < f(x) + f(y)$ es posible encontrar $r \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x+y) < f(r) < f(x) + f(y)$ esto implica $x + y < r$. Se afirma que es posible hallar $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tales que $x < r_1$, $y < r_2$ y $r_1 + r_2 = r$. En efecto como

$0 < x + y < r$ implica que $x < r - y$ tome entonces r_1 tal que $x < r_1 < r - y$, luego $y < r - r_1$; considere entonces $r_2 = r - r_1 \in \mathbb{Q}$ y así, r_1, r_2 son como se deseaba. Dada la forma en que se escogieron r_1 y r_2, tenemos que

$$f(r) = f(r_1) + f(r_2) > f(x) + f(y),$$

contradiciendo la elección de r. El segundo caso es análogo.

Por último verifiquemos que f cumple con *CO 4*; para ello, al igual que se hizo para la suma, suponga que $0 < x < y$ (el caso $x = 0$ es consecuencia de la definición de f). Supóngase que la igualdad no fuese cierta, luego se tendrían los siguientes casos.

$$f(xy) < f(x)f(y) \quad \text{o} \quad f(x)f(y) < f(xy).$$

Para el primer caso, es posible encontrar $r \in \mathbb{Q}$ tal que $f(xy) < f(r) < f(y)$ esto implica $xy < r$. Existen $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tales que $x < r_1$, $y < r_2$ y además $r_1 r_2 = r$. En efecto, ya que $f(xy) < f(r)$ se tiene $xy < r$, luego $x < {}^{r}/_{y}$ tomando r_1 tal que $x < r_1 < {}^{r}/_{y}$, de aquí, $y < {}^{r}/_{r_1}$ tome entonces $r_2 = {}^{r}/_{r_1} \in \mathbb{Q}$; es claro que $r_1 r_2 = r$. Por como se eligieron r_1 y r_2, implica que $f(x) < f(r_1)$ y $f(y) < f(r_2)$ y así

$$f(r) = f(r_1 r_2 =) f(r_1) f(r_2) > f(x) f(y),$$

lo cual contradice la elección de r. El otro caso es análogo.

Con todo, f determina isomorfismo de campos ordenados completos entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{F}$. ❑

1.5. Algunas propiedades sobre números reales.

Bien conocida es la forma de representar números reales mediante expresiones decimales (que bien sabido no son las únicas), el siguiente teorema establece con precisión cómo hacer la representación decimal (y en cualquier "base") de cualquier número real.

Definición 1.48. Para cada real no negativo x, se define *el mayor entero menor o igual a* x, (que denotaremos por $\lfloor x \rfloor$) como

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}.$$

Definición 1.49. Una sucesión de números reales $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, se llama *de Cauchy* si para todo $\epsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq n_0$, $|x_m - x_n| < \epsilon$.

Teorema 1.50. *Sea $r \in \mathbb{Z}$, con $r \geq 2$. A cada número real no negativo x, le corresponde una sucesión $(d_n)_{n=0}^{\infty}$ de enteros, los cuales están unívocamente determinado por x (relativo a r), tales que:*

(a) $d_0 = \lfloor x \rfloor$,

(b) $0 \leq d_n < r$, *para* $n \geq 1$,

(c) la sucesiíon $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ *definida recursivamente por*

$$y_0 = d_0$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{d_{n+1}}{r^{n+1}}$$

es una sucesión de Cauchy y $\lim_{n\to\infty} y_n = x$

Demostración: Sean r un entero mayor o igual que 2 y sea x un número real no negativo y defina $d_0 = \lfloor x \rfloor$ entonces,

$$xr = rd_0 + x_1$$

donde x_1 es un número real tal que $0 \leq x_1 < r$, esto último ya que $x - d_0 < 1$. Aplicando la misma idea a x_1, defina $d_1 = \lfloor x_1 \rfloor$ y así

$$x_1 r = rd_1 + x_2$$

donde x_2 es tal que $0 \leq x_2 < r$.

En general, defínase para $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n-1} r = rd_{n-1} + x_n$$

donde $x_0 = x$, $d_0 = \lfloor x \rfloor$ y adeás para $n \geq 1$, se tiene $0 \leq x_n < r$. Es facíl ver que conocidos los primeros x_{n+1} reales, se cumple que

$$x = d_0 + \frac{d_1}{r} + \frac{d_2}{r^2} + \cdots + \frac{d_n}{r^n} + \frac{x_{n+1}}{r^{n+1}}$$

Sea $y_n = d_0 + \frac{d_1}{r} + \cdots + \frac{d_n}{r^n}$ el n-ésimo termino de la sucesión $(y_n)_{n=0}^{\infty}$, entonces

$$|x - y_n| = \left|\frac{x_{n+1}}{r^{n+1}}\right| < \left|\frac{r}{r^{n+1}}\right| = \frac{1}{r^n}$$

Note que el paso de la desigualdad se da por construcción, ya que $0 \leq x_{n+1} < r$.

Así, $\lim_{n\to\infty} y_n = x$, por tanto $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ es sucesión de Cauchy.

Para la unicidad suponga que hay dos sucesiones como las del enunciado del teorema, $(d_n)_{n=0}^{\infty}$, $(d'_n)_{n=0}^{\infty}$ distintas. Sea n_0 el menor natural tal que $d_{n_0} \neq d'_{n_0}$, entonces, por construcción tendríamos que $d_{n_0-1} \neq d'_{n_0-1}$ lo cual es una contradicción. ❑

Incluimos el siguiente resultado porque además de presentar un hecho curioso también pone de manifiesto que todas las propiedades obtenidas para $\mathbb{R}$ tienen poderosas consecuencias si son utilizadas de manera conveniente.

Recuerde que una serie se llama convergente si existe el límite de sus sumas parciales. Una serie es absolutamente convergente si la serie formada por los valores absolutos de sus términos es convergente. El ejemplo típico de una serie convergente pero no absolutamente convergente es

$$1 - {}^1/_2 + {}^1/_3 - {}^1/_4 + {}^1/_5 - \cdots .$$

El que esta serie sea convergente se deduce, por ejemplo, del Teorema de Leibniz que afirma que si se tiene una sucesión decreciente de términos positivos, entonces la serie formada al alternar los signos de sus términos es una serie convergente. Ver [6].

Teorema 1.51. $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *es una serie convergente pero no absolutamente convergente; entonces, dado* $x \in \mathbb{R}$, *hay un reordenamiento de la sucesión original* $\langle a_n : n \in \mathbb{N}\rangle$, *digamos* $\langle b_n : n \in \mathbb{N}\rangle$, *tal que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n = x$.

Demostración: Primero sea $k_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0\}$ y defina $p_0 = a_{k_0}$; en general, si p_n ha sido definido, defina $k_{n+1} = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0 \text{ y } n \geq k_n\}$ y $p_{n+1} = a_{k_{n+1}}$. En otras palabras, $\langle p_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ es la sucesión de términos no negativos de $\langle a_n : n \in \mathbb{N}\rangle$, conservando el orden en que aparecen. Del mismo modo defina $\langle q_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ la sucesión de términos negativos de $\langle a_n : n \in \mathbb{N}\rangle$.

Observe que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = +\infty \quad \text{y} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} q_n = -\infty.$$

Sea $x \in \mathbb{R}$, podemos suponer que $x \geq 0$, de otro modo se procede de manera muy similar. Puesto que $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = \infty$, es posible tomar $k(0) = \min\{n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} p_i \geq x\}$. Observe que

$$\sum_{i=0}^{k(0)-1} p_i < x \leq \sum_{i=0}^{k(0)} p_i.$$

Del mismo modo, es posible tomar

$$l(0) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} q_i < x - \sum_{i=0}^{n} p_i\}.$$

También se debe notar que

$$0 < x - \sum_{i=0}^{k(0)-1} p_i < p_{k(0)};$$

$$0 < \sum_{i=0}^{l(0)-1} q_i - \Big(x - \sum_{i=0}^{k(0)} p_i\Big) < -q_{l(0)}.$$

Defina $b_0 = p_0$, $b_1 = p_1, \ldots$, $b_{k(0)} = p_{k(0)}$, $b_{k(0)+1} = q_0$, $b_{k(0)+2} = q_1, \ldots$, $b_{k(0)+l(0)+1} = q_{l(0)}$. En general, suponga que ya se han definido $k(n)$, $l(n)$ y b_i para $i \leq k(n) + l(n) + 1$ de modo que

$$\sum_{i=0}^{m(n)} b_i < x \leq \sum_{i=0}^{k(n)},$$

donde $m(n) = k(n) + l(n) + 1$. Se definen

$$k(n+1) = \text{mín}\Big\{j \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{m(n)} b_i + \sum_{i=k(n)+1}^{j} p_i > x\Big\},$$

$$l(n+1) = \text{mín}\Big\{j \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{m(n)} b_i + \sum_{i=k(n)+1}^{k(n+1)} p_i + \sum_{i=l(n)}^{j} q_i\Big\},$$

y defina $b_{m(n)+1} = p_{k(n)+1}$, $b_{m(n)+2} = p_{k(n)+2}$, $\ldots$, $b_{m(n)+k(n+1)} = p_{k(n+1)}$, $b_{m(n)+k(n+1)+1} = q_{l(n)+1}$, $b_{m(n)+k(n)+2} = q_{l(n)+2}$, $\ldots$, $b_{m(n)+k(n+1)+l(n+1)} = q_{l(n+1)}$. Observe que

$$0 < x \ - \sum_{i=0}^{m(n)+k(n+1)-1} b_i < b_{m(n)+k(n+1)} = p_{k(n+1)},$$

y que

$$q_{l(n+1)} = b_r < x - \sum_{i=0}^{m(n)+m(n+1)-1} b_i < 0,$$

donde $r = m(n) + k(n+1) + l(n+1) + 1$. Esto termina con la definición del reordenamiento.

Puesto que $k(n)$ y $l(n)$ definen sucesiones crecientes, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $m(n) = k(n) + l(n) + 1 \geq n$; esto implica que si $b_i = p_n$ y $n \geq k$; entonces $i \geq k$. Obsévese que, para cada $n \in \mathbb{N}$, si $i < j < l(n)$, entonces

$$\sum_{i=0}^{m(n)+k(n)-1} b_i < x \leq \sum_{i=0}^{m(n)+k(n)+j} b_i < \sum_{i=0}^{m(n)+k(n)} b_i \tag{1.1}$$

porque si $i = m(n) + k(n) + j$, para algún j, entonces $b_i < 0$. Del mismo modo,

$$\sum_{i=0}^{m(n)+k(n)+l(n)} b_i < \sum_{i=0}^{m(n)+k(n)+l(n)+j} b_i \leq x < \sum_{i=0}^{m(n)+k(n)+l(n)+k(n+1)} b_i \tag{1.2}$$

para cuando $i < j < k(n+1)$.

Sea $\varepsilon > 0$, $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n \geq n_0$, $-\varepsilon < q_n < p_n < \varepsilon$. Como $\langle k(n) : n \in \mathbb{N}\rangle$ y $\langle l(n) : n \in \mathbb{N}\rangle$ son sucesiones crecientes, si $n \geq n_0$ así también son $k(n)$ $l(n)$; o sea $k(n)$, $l(n) \geq n_0$.

Sea $s \geq k(n_0) + l(n_0)$. Si es posible, escoja $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$m(n) + k(n) < s < m(n) + k(n) + l(n);$$

si no, escoja $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$m(n) + k(n) + l(n) \leq s < m(n) + k(n) + l(n) + k(n) + 1.$$

En el primer caso, debido a la desigualdad (1.3) se sigue que

$$\left| x - \sum_{i=0}^{s} b_i \right| < \sum_{i=0}^{m(n)+k(n)} b_i - \sum_{i=0}^{m(n)+k(n)-1} b_i = b_{m(n)+k(n)} = p_{k(n+1)} < \epsilon. \tag{1.3}$$

y en el segundo caso, se sigue de la desigualdad (2)

$$|x - \sum_{i=0}^{s} b_i| < b_{m(n)+k(n)+l(n)+1} = q_{l(n+1)} < \epsilon.$$

Esto concluye la demostración. ❏

Capítulo 2

Espacios $T_{3\frac{1}{2}}$ y productos de rectas

Introducción

La clase de los espacios completamente regulares es la más importante de los espacios topológicos ya que ella contiene a la clase de los espacios métricos que son de vital importancia para el Análisis Real, al igual que una amplia gama de espacios con características peculiares para el estudio de la topología. Algo que es importante notar es que los espacios completamente regulares tienen muchas propiedades deseadas; como por ejemplo, este tipo de espacios son precisamente los subespacios de los espacios compactos. Más aún, por el *Teorema del Encaje de Tychonoff*, todo espacio completamente regular se puede encajar en algún *cubo*.

Dicha clase también se puede considerar como aquella en la que los espacios cuentan con "muchas" funciones continuas. Ya que en lo que compete al estudio de *Anillos de Funciones Continuas*, ésta es una clase lo suficientemente amplia para incluir todos los espacios "interesantes" y además es lo suficientemente restrictiva como para desarrollar dicha teoría.

El objetivo del capítulo, es el siguiente teorema el cual establece que todo espacio *completamente regular* es subespacio de un *producto de rectas reales*.

Teorema 2.1 (Del encaje). *Un espacio topológico X es completamente regular si y sólo si es un subespacio de algún producto de rectas,* $\mathbb{R}^{\kappa}$.

Para la demostración del teorema anterior, haremos uso de algunos lemas preliminares los cuales facilitarán nuestra labor. Pero antes de ello, recordemos algunas propiedades elementales sobre los espacios completamente regulares y algunos hechos básicos de la topología producto. Para aquellos lectores que quieran profundizar en el estudio de los mismos, puede consultar [8].

2.1. Recordando la topología producto

Sea $\{X_s : s \in S\}$ una familia de conjuntos. El *producto cartesiano* de los conjuntos X_s, es el conjunto de todas las funciones

$$\prod_{s\in S} X_s = \left\{ x : S \to \bigcup_{s\in S} X_s : \text{ para cada } s \in S,\ x(s) \in X_s \right\}$$

Generalmente se escribe $x(s) = x_s$ y se denota a x mediante (x_s).

Un hecho que aceptaremos (ya que de otro modo nos alejaríamos de nuestro propósito) es que si $X_s \neq \emptyset$, para cada $s \in S$, entonces $\prod_{s\in S} X_s \neq \emptyset$. La afirmación anterior aunque aparentemente inofensiva resulta ser de hecho equivalente al *Axioma de Elección*.

En el caso en que los conjuntos X_s sean un mismo conjunto X, el producto $\prod_{s\in S} X_s$ es simplemente el conjunto de todas las funciones de S en X, el cual se denota por X^S; nos referiremos a ese conjunto como el producto de S copias de X.

La función $\pi_t : \prod_{s\in S} X_s \to X_t$, definida por $\pi_t(x) = x_t$, es llamada *la función proyección* de $\prod_{s\in S} X_s$ en X_t.

Definición 2.2. Sea S un conjunto y X_s un espacio topológico para cada $s \in S$. La *topología producto* (o *topología de Tychonoff*) sobre $\prod_{s\in S} X_s$, es la que tiene por base a la familia de todos los conjuntos de la forma

$$\prod_{s\in S} U_s$$

donde cada U_s es un subconjunto abierto de X_s, para $s \in S$ y $U_s \neq X_s$ únicamente para una cantidad finita de elementos de S.

Haciendo uso de las proyecciones podemos representar los subconjuntos abiertos básicos para la topología producto en la forma

$$\prod_{s\in S} U_s = \pi_{s_0}^{-1}[U_{s_0}] \cap \pi_{s_1}^{-1}[U_{s_1}] \cap \cdots \cap \pi_{s_n}^{-1}[U_{s_n}],$$

donde para cada $i \leq n$, U_{s_i} es un subconjunto abierto (propio) de X_{s_i}. Así resulta que la topología producto es de hecho la topología que tiene por subbase la colección

$$\left\{ \pi_s^{-1}[U_s] : S \in S \text{ y } U_s \text{ es abierto en } X_s \right\}.$$

De aquí en adelante si para cada $s \in S$ con S una familia de índices, X_s es un espacio topológico (no necesariamente el mismo), $\prod_{s\in S} X_s$ se supondrá siempre dotado con la topología producto.

Teorema 2.3. *Sean $S \neq \emptyset$, $\{X_s : s \in S\}$ una familia de espacios. Entonces,*

1. *Para cada $t \in S$, la función $\pi_t : \prod_{s\in S} X_s \to X_t$ es continua.*

2. *También, resulta que π_t es una función abierta.*

3. *Una función $f : Y \to \prod_{s\in S} X_s$ es continua si y sólo si para cada $t \in S$, $\pi_t \circ f$ es continua.*

4. *La topología producto es la $\subseteq$-mínima topología sobre $\prod_{s\in S} X_s$ que hace continua a cada una de las proyecciones.*

Demostración: (1) Esta demostración es clara por como se ha definido la topología producto.

(2) Tome $A \subseteq \prod_{s\in S} X_s$ abierto y considere $y \in \pi_t[V]$ entonces existe $x \in V$ tal que $\pi_t(x) = x_t = y$. Por otro lado, como V es abierto, puede encontrarse vecindad básica $W = \pi_{s_0}^{-1}[U_{s_0}] \cap \pi_{s_1}^{-1}[U_{s_1}] \cap \cdots \cap \pi_{s_n}^{-1}[U_{s_n}]$ de manera que $W \subseteq V$. Sin pérdida de la generalidad puede suponerse que $t = s_j$ para cierta $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$; luego entonces $U_{s_j} = \pi_t[W] \subseteq \pi_t[V]$ y como $\pi_t(x) = \pi_{s_j}(x) = x_{s_j}$ entonces y es punto interior de $\pi_t[V]$.

(3) El regreso es claro ya que la composición de funciones continuas es continua.

Para la otra implicación, observe que para cada $s \in S$ y $U_s \subseteq X_s$ abierto se tiene que $\pi_s^{-1}[U_s]$ es abierto subbásico de $\prod_{s\in S} X_s$. Entonces por la continuidad de $\pi_t \circ f$ se tiene que $(\pi_t \circ f)^{-1}[U_s]$ es abierto en Y, pero $(\pi_t \circ f)^{-1}[U_s] = f^{-1}[\pi_s^{-1}[U_s]]$ por lo cual las imágenes inversas bajo f de abiertos subbásicos del producto son abiertos en Y y así f es continua.

(4) Denotemos como τ_p a la topología producto. Sea τ una topología sobre $\prod_{s\in S} X_s$ de manera que para cada $t \in S$, la función proyección π_t sea continua. Considere $n \in \mathbb{N}$ y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ escoja $U_{s_i} \subseteq X_{s_i}$ abierto y defínase $U = \bigcap_{i\leq n} \pi_{s_i}^{-1}[U_{s_i}]$ note que U resulta ser abierto básico en τ_p. Por otro lado ya que cada π_t es continua respecto a τ, se tiene que para cada $i \leq n$, $\pi_{s_i}^{-1}[U_{s_i}]$ es abierto en $\prod_{s\in S} X_s$ por lo cual para cada $i \leq n$ se cumple que $\pi_{s_i}^{-1}[U_{s_i}] \in \tau$ consecuentemente $U \in \tau$ y así, $\tau_p \subseteq \tau$. ❑

2.2. Espacios completamente regulares

Definición 2.4. Un espacio topológico X es *completamente regular* si para cada $F \subseteq X$ cerrado y $x \in X \backslash F$, hay una función continua $f : X \to [0,1]$ de manera que $f[F] = 0$ y $f(x) = 1$. Un espacio que sea T_1 y completamente regular se dice que es un espacio *Tychonoff*.

Recuerde que un espacio topológico X se llama espacio T_1 o simplemente T_1, si para cualquier par de puntos distintos de $x, y \in X$ existe un abierto $U \subset X$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$. Recuerde también que la propiedad de ser espacio T_1 es equivalente a que para cada $x \in X$, $\{x\}$ sea cerrado en X. En ocasiones los espacios Tychonoff son denotados como *espacios* $T_{3\frac{1}{2}}$.

Lema 2.5. *Sean X un espacio topológico, y $f_1, f_2, \ldots, f_n$ funciones de X en $\mathbb{R}$ de manera que para cada f_i sea continua entonces, la función $h : X \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \text{mín}\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ es también continua.*

Demostración: Probaremos el resultado solamente para dos funciones. Considérense $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Veamos primero que los conjuntos

$$A = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\} \quad \text{y} \quad B = \{x \in X : g(x) \leq f(x)\}$$

son subconjuntos cerrados en X. Para A, bastará con ver que $X \backslash A = \{x \in X : g(x) < f(x)\}$ es abierto; sea entonces $x_0 \in X \backslash A$, es posible encontrar $a, b, c \in \mathbb{R}$ de manera que $a \leq g(x_0) < b \leq f(x_0) < c$. Recuerde que los intervalos de la forma (a, b) son abiertos en la topología usual de $\mathbb{R}$, luego de la continuidad de f y g, $f^{-1}[(a,b)], g^{-1}[(b,c)] \subseteq X$ son abiertos, más aún su intersección no es vacía y además es una vecindad abierta de x_0 que está completamente contenida en $X \backslash A$ por lo tanto $X \backslash A$ es abierto. La demostración de que B es cerrado es análoga.

Nótese que $X = A \cup B$ y además, $h \restriction A = f \restriction A$, $h \restriction B = g \restriction B$ y más aún para cada $x \in A \cap B$, $h(x) = f(x) = g(x)$. Luego, para un subconjunto cerrado F,

$$h^{-1}[F] = (f \restriction A)^{-1}[F] \cup (g \restriction B)^{-1}[F],$$

de donde se sigue que h es continua. ❑

Habiendo hablado ya sobre la topología producto podemos establecer la siguiente propiedad que cumplen los espacios completamente regulares (respectivamente Tychonoff). En esencia lo que estable el teorema es que la propiedad de ser espacio completamente regular (respectivamente Tychonoff), se preserva para subespacios y bajo productos arbitrarios.

Teorema 2.6. *(a) Todo subespacio de un espacio completamente regular (o Tychonoff) es completamente regular (respectivamente Tychonoff).*

(b) El producto de una familia de espacios completamente regulares (o Tychonoff) es también completamente regular (respectivamente Tychonoff).

Demostración: (a) Sea $A \subseteq X$ subespacio de X, y tome $F \subseteq A$ cerrado en A, entonces se tiene que $F = A \cap C$ con C cerrado en X. Tome $x \in A \backslash F$, es claro que $X \notin C$; entonces para el punto x y el cerrado C hay una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f[C] = 0$ y $f[x] = 0$. Entonces es claro que $f \upharpoonright A$ es continua y además separa a x de F.

(b) Sea $\prod_{s \in S} X_s$ donde para cada $s \in S$, X_s es completamente regular. Tome un $F \subseteq \prod_{s \in S} X_s$ cerrado y $x \in \prod_{s \in S} X_s \backslash F$. Entonces hay una vecindad básica de x, digamos $U = \prod_{s \in S} U_s$ donde $U_s = X_s$ excepto para una cantidad finita $\{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$ de elementos de S. Por otro lado, note que para cada s_i con $i \leq n$, $x_{s_i} \notin X_{s_i} \backslash U_{s_i}$ entonces hay funciones $f_{s_i} : X_{s_i} \to [0,1]$ de manera que $f_{s_i}[X_{s_i} \backslash U_{s_i}] = 0$ y $f_{s_i}[x_{s_i}] = 1$. Además, observe que $f_{s_i} \circ \pi_{s_i}$ se anula fuera de $\pi_{s_i}^{-1}[U_{s_i}]$ y también se cumple que $(f_{s_i} \circ \pi_{s_i})(x) = 1$. Defínase $g : \prod_{s \in S} X_s \to [0,1]$ de manera que para cada $y \in \prod_{s \in S} X_s$, $g(y) = \min\{f_{s_i} \circ \pi_{s_i}(y) : i \leq n\}$; entonces gracias a el Lema anterior g es continua y además, $g(x) = 1$ y $g[F] = 0$. ❑

2.3. El Teorema del Encaje

Observación 2.7. Si $f : X \to Y$ es una función inyectiva, continua y cerrada entonces, define un homeomorfismo sobre su imagen. En efecto, veamos que toda función continua y cerrada es también abierta; para ello sea $A \subseteq X$ abierto entonces, $X \backslash A$ es cerrado y así, $f[X \backslash A]$ también es cerrado, pero de la inyectividad de f se tiene que $f[X \backslash A] = f[X] \backslash f[A]$ nótese que $f[X] \backslash (f[X] \backslash f[A]) = f[A]$ el es un abierto por tanto f es abierta.

Solo falta ver que f^{-1} continua. Para ello, sea $A \subseteq X$ abierto, hay que ver que $f^{-1}[A]$ es abierto, pero $(f^{-1})^{-1}[A] = f[A]$ el cual es abierto.

Definición 2.8. Sea $\mathscr{F}$ una familia de funciones de un espacio topológico X en espacios Y posiblemente distintos. Diremos que

1. La familia $\mathscr{F}$ *separa puntos* si para cualesquiera $x,\ x' \in X$, con $x \neq x'$ existe una función $f \in \mathscr{F}$ tal que $f(x) \neq f(x')$.

2. La familia $\mathscr{F}$ *separa puntos de conjuntos cerrados* si para cualesquiera $F \subseteq X$ cerrado y $x \in X \backslash F$ existe una $f \in \mathscr{F}$ tal que $f(x) \notin \overline{f[F]}$.

Teorema 2.9 (Encaje en Productos)**.** *Sea $\mathscr{F} = \{f_s : s \in S\}$ una familia de funciones continuas $f_s : X \to Y_s$. Considere la función $f : X \to \prod_{s\in S} Y_s$ dada por $f(x) = \{f_s(x) : s \in S\}$. Entonces, si $\mathscr{F}$ separa puntos se tiene que f es inyectiva y si además $\mathscr{F}$ separa puntos de conjuntos cerrados se tiene que f es un encaje.*

Demostración: Para la demostración de la primera parte, tome $x, y \in X$ distintos entonces como $\mathscr{F}$ separa puntos, hay $s_0 \in S$ de manera que $f_{s_0}(x) \neq f_{s_0}(y)$.

Para la segunda parte, hay que ver que X es homeomorfo a $f[X]$. La función f es inyectiva por la primera parte del teorema y por supuesto que es sobreyectiva sobre su imagen. Por último veamos que f es cerrada. Para ello sea $F \subseteq X$ cerrado y considere $y \in f[X] \backslash f[F]$. Existe $x \in X$ de manera que $f(x) = y$; más aún, $x \notin F$. Como la familia $\mathscr{F}$ separa puntos de cerrados entonces, para x y F hay $s_0 \in S$ tal que $\underline{f_{s_0}(x)} \notin \overline{f_{s_0}[F]}$ luego, hay una vecindad U de $f_{s_0}(x)$ de manera que $U \cap \overline{f_{s_0}[F]} = \emptyset$; así el abierto $W = \pi_{s_0}^{-1}[U] \subseteq \prod_{s\in S} Y_s$ es vecindad de $y = f(x)$ y además, $(f[X] \cap W) \cap f[F] = \emptyset$. Por tanto, $f[X] \backslash f[F]$ es abierto y así, $f[F]$ resulta cerrado por lo cual f en efecto determina un encaje. ❏

Ahora, gracias al teorema anterior, es posible establecer la demostración del Teorema principal de la sección. Antes, recuerde que $C(X)$ representa el conjunto de todas las funciones continuas de X a $\mathbb{R}$.

Teorema 2.10 (Del encaje)**.** *Un espacio topológico X es completamente regular si y sólo si es un subespacio de algún producto de rectas $\mathbb{R}^\kappa$.*

Demostración: Sea X espacio completamente regular y considérese $C(X)$ entonces resulta que dicha familia separa puntos de cerrados ya que en particular contiene a todas las funciones continuas de X en el intervalo $[0, 1]$. Así, por el teorema anterior se tiene que X se encaja en $\mathbb{R}^{C(X)}$.

La otra parte se deduce del Teorema 2.6 ya que si X es subespacio de $\mathbb{R}^\kappa$ para cierto conjunto κ se tiene que X es completamente regular. ❏

Para cualquier conjunto de índices S, el espacio $\prod_{s\in S}[0, 1]_s$ dotado con la topología producto, es decir, el producto de S copias del intervalo $[0, 1]$ se le llama *cubo* y se denota como $[0, 1]^S$.

Observe que si se tiene un espacio completamente regular X y se considera la familia $\mathscr{F}$ de todas las funciones continuas de X en el intervalo

$[0,1]$ entonces, $\mathscr{F}$ satisface las hipótesis del Teorema 2.9. Se sigue entonces que un espacio completamente regular X es homeomorfo a un subespacio del cubo $[0,1]^{\mathscr{F}}$. Por otro lado, si X es subespacio de algún cubo (el cual es completamente regular), entonces X debe de ser completamente regular ya que dicha propiedad se hereda a subespacios. Lo anterior demuestra el siguiente resultado.

Teorema 2.11 (Teorema del Encaje de Tychonoff). *Un espacio topológico X es completamente regular si y sólo si es homeomorfo a un subespacio de algún cubo.*

Capítulo 3

El Teorema de Kuratowski

Introducción

La clase de espacios con la *σ-álgebra de Borel* la cual es la $\subseteq$-mínima de las *σ-álgebras* que contienen a los subconjuntos abiertos de un espacio topológico es quizá la clase de espacios más importante ya que dicha *σ-álgebra* se relaciona de manera íntima con las funciones continuas. Los espacios *estándar de Borel* son la parte central de lo anterior y aunque aparentemente dichos espacios pueden llegar a ser demasiado abstractos y complicados, al final de cuentas resultan ser subconjuntos de reales.

3.1. Espacios polacos

Comenzamos esta sección presentando una serie de resultados básicos de topología. Recuerde que un espacio topológico X se dice de *Hausdorff* si para cualesquiera $x, y \in X$ hay vecindades abiertas ajenas que los contengan respectivamente. También recuerde que un subconjunto A de un espacio topológico X se dice *subconjunto G_δ* si es intersección numerable de conjuntos abiertos.

Un *espacio métrico* es una pareja (X, d) donde d es una *métrica* sobre X. Si (X, d) es un espacio métrico y $Y \subseteq X$, entonces la función d restringida a Y denotada como $d \upharpoonright Y$ es una métrica sobre Y; a la pareja $(Y, d \upharpoonright Y)$ se le llama *subespacio* de (X, d). Si (X, d) es un espacio métrico, $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$, entonces al conjunto $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ la llamamos la *bola abierta* con centro en x y radio r.

Dado un espacio métrico (X, d), es posible definir una métrica d' sobre X de manera que d' sea acotada y que además genere la misma topología que d genera. Dos de las maneras más comunes de hacer lo anterior es considerando

$d'(x,y) = \text{mín}\{d(x,y),1\}$ o bien $d'(x,y) = {}^{d(x,y)}/_{d(x,y)+1}$. Recuérdese que un espacio topológico X se dice *metrizable* si existe una métrica d que induzca la misma topología.

Teorema 3.1. *Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ subespacio cerrado, entonces A es un subconjunto G_δ de X.*

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$, sea $B_n = \bigcup_{x \in X} B(x, \frac{1}{n})$, note que para cada n, B_n es abierto y además $A \subset B_n$ así $A \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Veamos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \subseteq A$.

Considere $b \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ y un $\epsilon > 0$ entonces pueden encontrarse un $a \in A$ y un $n \in \mathbb{N}$ tales que $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$ y $b \in B(a, \frac{1}{n})$ esto implica $d(a,b) < \frac{1}{n} < \epsilon$ es decir, b es un punto límite de A entonces $b \in A$. Por lo tanto, $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$. ❑

Observación 3.2. Sean $A, B \subseteq X$ subconjuntos G_δ, entonces $A \cap B$ es G_δ. Es decir la intersección finita de conjuntos G_δ es G_δ. Esto es consecuencia directa de la distributividad de la intersección.

Definición 3.3. Un *espacio polaco* es un espacio topológico X que es separable y completamente metrizable.

Recuerde que un espacio métrico (X,d) se llama *métrico completo* si toda sucesión de Cauchy tiene límite en X. Recuerde también que un espacio topológico X es *completamente metrizable* si su topología puede ser inducida por una métrica d y de modo que (X,d) resulte ser un espacio métrico completo.

Otro hecho que hay que recordar es que un espacio topológico es *separable* si contiene un subconjunto denso numerable. Esta propiedad, en el caso de los espacios métricos es equivalente a tener una base numerable para su topología.

Algunas de las propiedades de los espacios polacos son las siguientes. Los subsespacios abiertos, los que sean G_δ y los que sean cerrados resultan heredar la propiedad de ser polaco. Otro hecho importante es que el producto de una cantidad numerable de espacios polacos es también polaco. Las demostraciones de estas propiedades los omitimos.

Ejemplo 3.4. Algunos ejemplos de espacios polacos clásicos son $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

También cualquier conjunto finito dotado con la topología discreta. Uno que cabe resaltar y que nos será de mucha ayuda en lo sucesivo es $2^{\mathbb{N}}$ conocido como el *Conjunto de Cantor*.

Dado que la propiedad de ser polaco se hereda a los subespacios abiertos, a los cerrados y a los subconjuntos G_δ, tenemos que todos los subespacios de $\mathbb{R}$ de alguno de los tipos mencionados, son también espacios polacos.

DEFINICIÓN 3.5. Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ definimos el *diámetro* de A como

$$diam(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

DEFINICIÓN 3.6. Sean X un espacio topológico, (Y, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $f : A \to Y$. Se define la *oscilación* de f en x como:

$$osc(f, x) = \text{ínf}\{diam(f[U]) : \text{U es vecindad abierta de } x\}.$$

OBSERVACIÓN 3.7. Si $x \in A$ entonces x es punto de continuidad de f si y sólo si $osc(f, x) = 0$.

En efecto; para la implicación de ida sea $\epsilon > 0$ y considere $B(f(x), \frac{\epsilon}{2})$ de la continuidad de f es posible encontrar un $\delta > 0$ tal que $f[B(x, \delta)] \subset B(f(x), \frac{\epsilon}{2})$ así, $diam(f[B(x, \delta)) \leq diam(B(f(x), \frac{\epsilon}{2})) = \epsilon$ y dado que la elección de ϵ fue arbitraria se sigue que $osc(f, x) = 0$. Para el regreso, sea $\epsilon > 0$ y considere $B(f(x), \epsilon)$ como $osc(f, x) = 0$ puede encontrarse una vecindad (bola) abierta $B(x, r)$ con $r > 0$ tal que $diam(f[B(x, r)]) < \epsilon$, esto implica que para cualesquiera $y, z \in f[B(x, r)]$ se cumple $d(y, z) < \epsilon$ en particular para $y = f(x)$, por tanto $f[B(x, r)] \subseteq B(f(x), \epsilon)$.

Lema 3.8 (Kuratowski). *Sean X un espacio metrizable, Y un espacio completamente metrizable, $A \subseteq X$ y $f : A \to Y$ una función continua entonces f puede extenderse continuamente a un subconjunto G_δ que contiene a A.*

DEMOSTRACIÓN: Sean d', d métricas compatibles con las topologías de X y Y respectivamente. Para cada $a \in \overline{A}$, considere la oscilación de f en a. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defínase $B_n = \left\{x \in \overline{A} : osc(f, x) < \frac{1}{n+1}\right\}$. Nótese que para cada, B_n es abierto en $\overline{A}$ ya que dado $z \in B_n$ puede encontrarse una vecindad abierta V tal que $diam(f[V]) < \frac{1}{n+1}$ entonces, si se toma $z' \in V$ con $z \neq z'$ se tiene que V también es vecindad de z' y así $z' \in B_n$ y $V \subseteq B$.

Defina $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$; note que $A \subseteq B$ y además, $B = \{x \in \bar{A} : osc(f, x) = 0\}$ el cual es G_δ en $\overline{A}$ que también es G_δ (pero en X) y dado que intersección finita de conjuntos G_δ es de nuevo G_δ se tiene que B es G_δ en X.

Para extender f a B, tome $x \in B$ y una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que converja a x. Observe que $osc(f, x) = 0$, implica que la sucesión $\{f(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sea una sucesión de Cauchy en Y; ya que dado cualquier $\epsilon > 0$ para $\frac{\epsilon}{2}$ existe vecindad abierta V de x tal que $diam(f[V]) < \frac{\epsilon}{2}$. Por otro lado, para $\frac{\epsilon}{2}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$, $d'(a, x) < \frac{\epsilon}{2}$ luego, si se toman n, m con $n, m > n_0$ se tiene $f(a_n), f(a_m) \in f[V]$ y así, $d(f(a_n), f(a_m)) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Entonces por la completez de Y, la sucesión $\{f(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en Y.

De lo anterior, defina la extensión de f, como $g : B \to Y$ dada por

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n).$$

Veamos que g está bien definida; para ello considere $x \in B$ y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de elementos de A que converjan a x. Entonces ocurre que $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = 0$ ya que si se toma $\epsilon > 0$ entonces para $B(x, \frac{\epsilon}{2})$ existen $M, N \in \mathbb{N}$ de manera que para cada $m \geq M$ y $n \geq N$ ocurre $a_m, b_n \in B(x, \frac{\epsilon}{2})$. Si se toma $n \geq \max\{M, N\}$ entonces, $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x)+d(x, y_n) \leq \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Por otro lado, de la continuidad de f se cumple que $lim_{n\to\infty} d(f(a_n), f(b_n)) = 0$ por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$ y así g está bien definida.

Para la continuidad de g, basta ver que para $x \in B$, $osc(g, x) = 0$. Sea $U \subseteq X$ abierto entonces $g[U] \subseteq \overline{f[U]}$ y así, $diam(g[U]) \leq diam(f[U])$ lo que implica $osc(g, x) \leq osc(f, x) = 0$.

Por último, es claro que la función g extiende continuamente a f pues si se toma $x \in A$ entonces existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de elementos de A de manera que converja a x. Como f es continua, se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ luego entonces $g(x) = f(x)$ por lo que g extiende a f. ❑

Observación 3.9. Si $f : X \to Y$ es una función continua tal que Y es un espacio Hausdorff entonces, la *gráfica de* f, $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ es un cerrado en $X \times Y$.

En efecto, veamos que el complemento de G_f es abierto. Para ello, sean $(x, y) \in (X \times Y)\backslash G_f$ y $(x', f(x')) \in G_f$ y proyecte ambos puntos a Y. Entonces, existen vecindades abiertas U, V de y y $f(x')$ respectivamente y tales que $U \cap V \neq \emptyset$. Por otro lado, por la continuidad de f es posible encontrar una vecindad abierta W de x' de manera que $f[W] \subseteq V$. Note que $U \times W$ es una vecindad abierta de (x, y) que no intersecta a G_f.

Recuerde que dados un espacio métrico (X, d), $H \subseteq X$ y $x \in X$, la distancia de x a H está dada por

$$d(x, H) = \inf\{d(x, y) : y \in H\}.$$

Lema 3.10. *Sea (X, d) un espacio métrico si A es un subespacio G_δ de X, entonces A es homeomorfo a un subespacio cerrado de $X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

Demostración: Sea A subespacio G_δ de X, se tiene que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ donde $A_n \subseteq X$ es abierto para cada n. Para cada natural, $F_n = X\backslash A_n$ es cerrado y además,

$$X\backslash A = X\backslash \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X\backslash A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset.$$

Considere ahora para cada natural la función $f_n : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_n(x) = d(x, F_n).$$

Es claro que las f_n son continuas y además cumplen que $f_n(x) = 0$ si y sólo si $x \in F_n$. En efecto, supóngase primero que $f_n(x) = d(x, F_n) = 0$ entonces, para $\epsilon > 0$ existe un $y_\epsilon \in F_n$ tal que $d(x, y_\epsilon) < \epsilon$ esto implica que $B(x, \epsilon) \cap F_n \neq \emptyset$, pero para cada bola abierta $B(x, r)$ puede encontrarse un ϵ' de manera que $B(x, \epsilon') \subseteq B(x, r)$ por lo tanto $B(x, r) \cap F_n \neq \emptyset$ lo que implica x es punto límite de F_n y como F_n es cerrado se tiene $x \in F_n$. Para la segunda parte, considere $x \in F_n$. Dado que F_n es cerrado se cumple que para cada $\epsilon > 0$ $F_n \cap B(x, \epsilon) \neq \emptyset$ sea y_ϵ un elemento de dicha intersección y note que $d(x, F_n) \leq d(x, y_\epsilon) < \epsilon$ pero como ϵ fue arbitrario se tiene que $d(x, F_n) = 0$.

Sea $G = \{\langle x, f_0(x), f_1(x), \cdots \rangle : x \in X\} \subseteq X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Observe que G es la gráfica una función continua a saber $\varphi : X \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donde $\varphi(x) = \langle f_0(x), f_1(x), \cdots \rangle$. Dado que $X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es Hausdorff se tiene que G es cerrado en $X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Observe que X es homeomorfo a G; en efecto, la función $g : X \to X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que $g(x) = \langle x, \varphi(x) \rangle$ es continua y biyectiva y su inversa resulta ser la proyección π_X (en el factor X) que claramente es continua.

Defínase $R_0 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (\forall n \in \mathbb{N})(x_n > 0)\}$ y observe que $g[A] = g[X] \cap (X \times R_0)$ ya que dado $a \in A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ entonces $a \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, además se cumple que $f_n(a) > 0$ pues si resultara $f_n(a) = 0$ tendríamos $a \in F_n$ pero A_n y F_n son ajenos.

Observe también que $g[A]$ es cerrado en $X \times R_0$ ya que $g[X]$ es cerrado en $X \times R_0$ por ser $g[X]$ homeomorfo a G el cual es cerrado en $X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Además $X \times R_0$ es homeomorfo a $X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ por tanto $g[A]$ es cerrado en $X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. ❑

Lema 3.11. *Considere X un espacio completamente metrizable y $F \subseteq X$ un subespacio cerrado de X entonces, F es completamente metrizable.*

Demostración: Sea d una métrica compatible con la topología de X. Dado que la topología que hereda F de X es la generada por las bolas abiertas que intersectan a F, bastará entonces con ver que F es completo con la métrica d.

Tome $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F$ sucesión de Cauchy, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es también de Cauchy en X .Luego, por la completez de X, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente a algún $x \in X$esto implica x es punto de acumulación de F y como F es cerrado, $x \in F$. ❑

Teorema 3.12. *Sea X un espacio completamente metrizable y Y un subespacio no vacío de X, entonces Y es completamente metrizable si y sólo si Y es un subconjunto G_δ de X.*

DEMOSTRACIÓN: Para la implicación de ida, sea d una métrica compatible con la topología de X y considere $Y \subseteq X$ completamente metrizable entonces por el Lema de Kuratowski 3.8, para la función $id : Y \to Y$ hay B subconjunto de X tal que es G_δ y $Y \subseteq B$ además de una función $g : B \to Y$ que es extensión continua de id.

Sin pérdida de la generalidad puede suponerse que $B \subseteq \overline{Y}$ ya que $\overline{Y}$ es cerrado en X por tanto es G_δ; luego $B \cap \overline{Y}$ es también G_δ y además, $A \subseteq B \cap \overline{Y}$.

Veamos que $B \subseteq Y$. Para ello, sean $b \in B$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de Y que converja a x. De la continuidad de g se obtiene que $\{g(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y además por la propiedad de extensión para cada $n \in \mathbb{N}$, $g(y_n) = y_n$; entonces como $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x$ y $\{g(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to g(x)$ se cumple que $g(x) = x$ y por ende $g(x) \in Y$.

Para el regreso, considere $Y \subseteq X$ un G_δ, por el Lema 3.10 se tiene que Y es un subespacio cerrado de $X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ que es completamente metrizable (recuerde que el producto numerable de espacios completamente metrizables es completamente metrizable) por tanto Y es completamente metrizable. ❑

El cubo de Hilbert, $[0,1]^{\mathbb{N}}$ resulta tener la siguiente propiedad. Los espacios polacos son salvo homeomorfismo los subespacios G_δ del cubo de Hilbert; esto se establece en el siguiente corolario.

Corolario 3.13. *Todo espacio polaco es homeomorfo a un subconjunto G_δ de $[0,1]^{\mathbb{N}}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean X un espacio polaco y d una métrica compatible con su topología. Sean también $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso numerable de X y $d'(x,y) = \text{mín}\{d(x,y), 1\}$ (o bien $d'(x,y) = {}^{d}/_{d+1}$). Defínase $f : X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ mediante $f(x) = \langle d'(x, a_n) : n \in \mathbb{N}\rangle$.

Se afirma que f define homeomorfismo sobre su imagen. En efecto, es claro que f es continua; también que es inyectiva, ya que si se consideran $x, y \in X$ distintos entonces para $r = d'(x,y) > 0$, $B(x, \frac{r}{4}) \cap B(y, \frac{r}{4}) = \emptyset$; pues por la densidad de A puede tomarse un $a_n \in B(x, \frac{r}{4})$ y es claro que $d'(x, a_n) \neq d'(x, a_n)$.

Veamos ahora que f es cerrada. Sea $C \subseteq X$ cerrado; vamos a probar que $f[X] \backslash f[C]$ es abierto. Tome $z \in f[X] \backslash f[C]$ y considere $x \in X$ de manera que $f(x) = z$; es claro que $x \notin C$ ahora tome $\epsilon > 0$ tal que $B(x, 3\epsilon) \cap C = \emptyset$.

Para $B(x,\epsilon)$ hay $a_k \in A$ tal que $d'(x,a_k) < \epsilon$. Sea $W = \pi_k^{-1}[(z_k - \epsilon', z_k + \epsilon')]$ veremos que

$$(f[X] \cap W) \cap f[C] = \emptyset.$$

Si $y \in C$ entonces, $3\epsilon \leq d'(x,y) \leq d'(x,a_k) + d'(a_k,y)$ así, $2\epsilon \leq d'(a_k,y)$; por otro lado, $y' \in X$ tal que $f(y') \in W$ entonces, $|d'(y',a_k) - z_k| < \epsilon$; observe que $z_k = d'(x,a_k)$. De la desigualdad anterior, $d'(y',a_k) < 2\epsilon$ y como $2\epsilon \leq d'(a_k,y)$ se tiene $y \neq y'$ por lo que $W \cap f[C] = \emptyset$.

Por la Observación 2.7, X y $f[X]$ son homeomorfos, y del teorema anterior se tiene que $f[X]$ es subespacio G_δ de $[0,1]^{\mathbb{N}}$. ❑

Teorema 3.14 (Encaje de Cantor)**.** *Si (X,d) es un espacio métrico completo y $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de cerrados de X y tales que la sucesión $\{diam(C_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero entonces, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ consta de un solo punto.*

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$ escójase $x_n \in C_n$. Como $\{diam(C_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, para cualquier $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, $diam(C_n) < \epsilon$. Considere $n, m \geq n_0$ con $m > n$ entonces para los respectivos x_n, x_m se cumple $d(x_n, x_m) \leq diam(C_n) < \epsilon$ ya que la sucesión de cerrado es decreciente. Así, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión Cauchy y por tanto converge a algún $x \in X$.

Veamos que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Supóngase por un momento que no fuera así entonces, hay un $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin C_m$; defínase $r = d(x, C_m) > 0$. Entonces $B(x, \frac{r}{2}) \cap C_m = \emptyset$; luego si se toma $n > m$ debería de ocurrir que $x_n \in C_m$ lo cual implicaría $x_n \notin B(x, \frac{r}{2})$ lo que contradice la convergencia de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Por último suponga que x no fuera el único elemento de $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Tome $y \in \bigcap C_n$ distinto de x. Note que para cada $n \in \mathbb{N}$, debe ocurrir $d(x,y) \leq diam(C_n)$, pero $\{diam(C_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ teniéndose que $d(x,y) \leq 0$ y dado que d es distancia, $d(x,y) = 0$ y así $x = y$. ❑

Del siguiente resultado se deduce que los espacios polacos son o bien finitos, numerables o tienen cardinalidad el continuo $\mathfrak{c}$.

Algo que se usará en el siguiente es la llamada *concatenación de sucesiones*. Si $s, t \in A^{<\mathbb{N}}$ con A cualquier conjunto; digamos que $s = \{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$ y $t = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$, se define la *concatenación* de s con t como la sucesión

$$s^\frown t = \{s_0, s_1, \ldots, s_n, t_0, t_1, \ldots, t_m\}.$$

En particular para $s \in A^{<\mathbb{N}}$ y $a \in A$, $s^\frown\{a\}$ representará a la sucesión $\{s_0, s_1, \ldots, s_n, a\}$ que simplemente escribiremos como $s^\frown a$.

Teorema 3.15. *Sea X un espacio polaco no numerable entonces, X contiene un subconjunto homeomorfo al conjunto de Cantor.*

Demostración: Sea A el conjunto de todos los $x \in X$ de manera que todas las vecindades de x son no numerables. Se afirma que A es cerrado y perfecto.

Sea $x \in X \backslash A$ y V_x vecindad abierta de x entonces V_x es numerable luego, si se toma $y \in V_x$ con $y \neq x$ se tiene que V_x es también vecindad abierta de y lo que implica $y \notin A$ y así $V_x \subseteq X \backslash A$.

Para ver que A es perfecto, tome $a \in A$ y V_a vecindad abierta de a. Si resultara que $A \cap (V_a \backslash \{a\}) = \emptyset$ se tendría que V_a es numerable y así, $a \notin A$.

Como consecuencia de la forma en que se vio que $X \backslash A$ era abierto, se tiene que si se considera una base numerable $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ para la topología de X. Es posible encontrar para cada $x \in X \backslash A$ un U_{n_x} donde $n_x \in \mathbb{N}$ de manera que U_{n_x} sea numerable. Entonces,

$$X \backslash A \subseteq \bigcup \{U_{n_x} : x \in X \backslash A\}$$

esta última unión es numerable ya que es unión numerable de conjuntos numerables; por lo cual $X \backslash A$ es a lo más numerable y así, sin pérdida de la generalidad se puede considerar $X = A$.

Ahora, para cada $s \in 2^{<\mathbb{N}}$ escoja una bola abierta B_s de manera que

(i) $B_\emptyset = X$.

(ii) Para $n \geq 1$, $diam(B_s) < \frac{1}{n}$.

(iii) Para $s \in 2^{<\mathbb{N}}$ y $i \in \{0, 1\}$ $\overline{B_{s^\frown i}} \subseteq B_s$.

(iv) Para $s \in 2^{<\mathbb{N}}$, $B_{s^\frown 0} \cap B_{s^\frown 1} = \emptyset$.

Para cada $x \in 2^{\mathbb{N}}$ considere la sucesión de cerrados $\{\overline{B_{x \restriction n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Luego, dado que X es completamente metrizable se tiene por el Teorema del Encaje de Cantor, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\overline{B_{x \restriction n}}\}$ consta de un único punto. Así entonces,

$$\mathcal{C} = \bigcup_{x \in 2^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\overline{B_{x \restriction n}} : n \in \mathbb{N}\}$$

es homeomorfo a $2^{\mathbb{N}}$. En efecto, defínase $f : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{C}$ donde a cada $x \in 2^{\mathbb{N}}$ se le asocia

$$f(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\overline{B_{x \restriction n}} : n \in \mathbb{N}\}.$$

La propiedad (iv) de la construcción garantiza la inyectividad de f.

Para ver la continuidad de f, considere $x \in 2^{\mathbb{N}}$ y $\epsilon > 0$; para $B(f(x), \epsilon)$ por como se hizo la construcción es posible encontrar un natural n de manera que

$diam(\overline{B_{x\restriction n}}) < \frac{\epsilon}{2}$. Considere $y \in 2^{<\mathbb{N}}$ extensión de $x \restriction n$ entonces, de nuevo por la construcción se tiene que

$$\overline{B_{y\restriction n+1}} \subseteq B_{x\restriction n} \subseteq \overline{B_{x\restriction n}}$$

lo cual implica que $diam(\overline{B_{y\restriction n+1}}) \leq diam(\overline{B_{x\restriction n}}) < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. ❑

3.2. Espacios estándar de Borel

DEFINICIÓN 3.16. Si X es cualquier conjunto, a una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X se le llama *σ-álgebra* si cumple con las siguientes propiedades:

(I) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(II) Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $X \setminus A \in \mathcal{A}$.

(III) Para cualquier colección $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$, se tiene que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Al par $(X, \mathcal{A})$ se le llama *espacio medible*.

EJEMPLO 3.17. 1. Para cualquier conjunto, la pareja $(X, \emptyset)$ se conoce como σ-álgebra trivial.

2. Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra sobre un conjunto X y $Y \subseteq X$, entonces la σ-álgebra restringida a Y es $\mathcal{A} \restriction Y = \{Y \cap A : A \in \mathcal{A}\}$.

3. $\mathcal{P}(X)$ el conjunto potencia de X, es la llamada σ-álgebra discreta.

4. Si X es un conjunto y $\mathscr{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$, entonces la σ-álgebra generada por $\mathscr{G}$ es
$$\mathcal{A}(\mathscr{G}) = \bigcap\{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{A} \text{ es } \sigma\text{-álgebra y } \mathscr{G} \subseteq \mathcal{A}\}$$
Observe que $\mathcal{A}(\mathscr{G})$ es la $\subseteq$-mínima σ-álgebra sobre X que contiene a $\mathscr{G}$.

Por último presentamos un ejemplo de una σ-álgebra de relevante importancia.

EJEMPLO 3.18. Sea X un espacio topológico. La *σ-álgebra de Borel* sobre X, denotada por $\mathcal{B}(X)$ es la σ-álgebra generada por los subconjuntos abiertos de X. A los elementos de $\mathcal{B}(X)$ se les llama *subconjuntos de Borel de X*.

OBSERVACIÓN 3.19. En la sección anterior solamente hemos trabajado exclusivamente con tres tipos de subconjuntos de un espacio polaco a saber, los abiertos, los cerrados y los conjuntos G_δ. Implícitamente hemos trabajado también con conjuntos F_σ, es decir, aquellos que son uniones numerables de cerrados. Todos estos conjuntos son casos particulares de subconjuntos de Borel.

EJEMPLO 3.20. Sea X un espacio topológico que sea Hausdorff y numerable, entonces todo subconjunto de X es un conjunto F_σ. En efecto si $A \subseteq X$ entonces A es igual a la unión de los puntos que lo conforman los cuales son cerrados. Se deduce entonces que $\mathcal{B}(X) = \mathcal{P}(X)$.

DEFINICIÓN 3.21. Si $(X, \mathcal{A})$ y $(Y, \mathcal{B})$ son espacios medibles, decimos que una función $f : X \to Y$ es *medible* si $f^{-1}[B] \in \mathcal{A}$ para toda $B \in \mathcal{B}$. Decimos que $(X, \mathcal{A})$ y $(Y, \mathcal{B})$ son *medible isomorofs* (o simplemente *isomorfos*) si y sólo si hay una biyección medible con inversa medible entre ellos.

En particular, en la definición anterior cuando Y es un espacio polaco, se considera que $\mathcal{B} = \mathcal{B}(Y)$. Y a las funciones medibles de este útimo tipo también se les conoce como *funciones de Borel.*

DEFINICIÓN 3.22. Un *isomorfismo de Borel* entre dos espacios X, Y es una función biyectiva $f : X \to Y$ tal que

(I) Para todo $B \in \mathcal{B}(Y)$, $f^{-1}[B] \in [B](X)$.

(II) Para todo $B \in \mathcal{B}(X)$, $f[B] \in [B](Y)$.

En tal caso, los espacios se llaman *isomorfos de Borel* o bien *Borel isomorfos.*

EJEMPLO 3.23. El intervalo cerrado $[0, 1]$ y el conjunto de Cantor $2^{\mathbb{N}}$ son isomorfos de Borel.

En efecto, denotemos por $D \subseteq [0, 1]$ los racionales diádicos y $E \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ el conjunto de todas las sucesiones que son eventualmente constantes. La función $f : 2^{\mathbb{N}} \backslash E \to [0, 1] \backslash D$ definida mediante

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x(n)}{2^{n+1}}$$

determina un homeomorfismo. La biyectividad de f se sigue de la forma como se construye la expansión binaria de los reales en $[0, 1]$. Para la continuidad, sean $x_0 \in 2^{\mathbb{N}} \backslash E$ y $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{x(n)}{2^{n+1}} < \epsilon$ y además, $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} < \epsilon$. Si $x \in [x_0 \upharpoonright n_0]$ (el cono determinado por los primeros n_0

términos de x_0), entonces

$$|f(x_0) - f(x)| = \left| \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{x_0(n) - x(n)}{2^{n+1}} \right| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{|x_0(n) - x(n)|}{2^{n+1}} \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} < \epsilon,$$

por lo que la continuidad se sigue. Además, si se define

$$\delta = \frac{1}{2} \text{mín} \left\{ \left| f(x) - \frac{j}{2^i} \right| : i \leq n_0 \text{ y } j < 2^i \right\}.$$

Se afirma que para $t \in (f(x) - \delta, f(x) + \delta)$ existe $x_t \in [x_0 \upharpoonright n_0]$ tal que $f(x_t) = t$. Obsérvese que si $\frac{j}{2^i} < f(x) < \frac{j+1}{2^i}$ para alguna $i \leq n_0$ y $j < 2^i$, y si además se toma $t \in (f(x) - \delta, f(x) + \delta)$ entonces debe de ocurrir

$$\frac{j}{2^i} < f(x) - \delta < t < f(x) + \delta < \frac{j+1}{2^i};$$

es decir, los primeros n_0 dígitos de las expansiones binarias de $f(x)$ y de t son iguales y ellos son exactamente $x \upharpoonright n_0$; luego, si $t = 0.t_1t_2\ldots$ es la expansión binaria de t, defínase $x_t \in 2^{\mathbb{N}}$ como $x_t = x \upharpoonright n_0^\frown t_{n_0+1}^\frown t_{n_0+2}^\frown \cdots$, por lo tanto es claro que $f(x_t) = t$.

Observe que D y E son numerables por lo cual existe biyección entre ellos digamos $g : E \to D$. Entonces, la función $h = f \cup g : 2^{\mathbb{N}} \to [0, 1]$ determina un isomorfismo de Borel ya que es biyectiva pues tanto f como g lo son y además, si se toma $B \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ abierto entonces, $B = (B \backslash E) \cup (B \cap E)$ note que ambos uniendos de la igualdad anterior son subconjuntos de Borel y así, $h[B] = f[B \backslash E] \cup g[B \cap E]$ es un subconjunto de Borel de $[0, 1]$. Para ver que la inversa de h sea medible según Borel se hace algo análogo.

Teorema 3.24. *Sean $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ espacios medibles. Considere $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ funciones medibles e inyectivas, tales que para cada $A \in \mathcal{A}$ y cada $B \in \mathcal{B}$, $f[A] \in \mathcal{B}$ y $g[B] \in \mathcal{A}$ entonces, $(X, \mathcal{A})$ y $(Y, \mathcal{B})$ son isomorfos.*

Demostración: Probaremos que hay un subconjunto $E \subseteq X$ que sea medible y tal que

$$g^{-1}[X \backslash E] = Y \backslash f[E]. \tag{3.1}$$

Para ello, sea $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ de manera que $\varphi[A] = X \backslash g[Y \backslash f[A]]$ para $A \in \mathcal{A}$. La función φ cumple las siguientes propiedades:

1. Si $A \subseteq B$ entonces, $\varphi[A] \subseteq \varphi[B]$.

2. $\varphi[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi[A_n]$.

Construyamos ahora una familia adecuada de la siguiente manera.

1. Defínase $A_0 = \emptyset$.
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_{n+1} = \varphi[A_n]$.

Obsérvese que para cada natural n, $A_n \subseteq A_{n+1}$. Sea entonces $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, note que $E \in \mathcal{A}$ y

$$\varphi\left[E\right] = \varphi\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi[A_n] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n+1} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E.$$

Por otro lado, $\varphi[E] = X\backslash g[Y\backslash f[E]] = E$, lo que implica $g[Y\backslash f[E]] = X\backslash E$ entonces, por la inyectividad de g, se tiene $Y\backslash f[E] = g^{-1}[X\backslash E]$ y así, E cumple con la relación 3.1.

Ahora, defina la función $h : X \to Y$ como

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \notin E, \end{cases}$$

Verifiquemos que h determina el isomorfismo buscado. Para ver que h es inyectiva, hay varios casos, si se toman elementos distintos $x, y \in E$ o bien $x, y \in X\backslash E$ es clara la inyectividad. Si ocurriera que $x \in E$ y $y \in X\backslash E$ entonces, $h(x) \neq h(y)$ ya que E cumple con la relación 3.1. La suprayectividad de h es también clara ya que si se toma $y \in f[E]$ entonces hay $f^{-1}[y] \subseteq E$ consta de un sólo punto por la inyectividad de f, por otro lado si $y \in Y\backslash f[E]$ entonces $g(y)$ es un único elemento de X de donde se sigue la suprayectividad de h.

Sea ahora $B \in \mathcal{B}$ y considere el caso general es decir, que B intersecte a $f[E]$ como a su complemento, entonces $B \cap f[E]$ y $B \cap Y\backslash f[E]$ son medibles ya que $f[E]$ lo es entonces,

$$h^{-1}[B] = h^{-1}[B \cap f[E] \cup B \cap Y\backslash f[E]] = f^{-1}[B \cap f[E]] \cup g[B \cap Y\backslash f[E]]$$

y dado que f es medible y g manda medibles en medibles, se tiene que $h^{-1}[B]$ es medible. De manera análoga se verifica que la inversa de h es medible. ❑

Observación 3.25. Si se tiene una sucesión $\{\tau_n : n \in \mathbb{N}\}$ de topologías polacas sobre un espacio X de manera que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$ sea topología Hausdorff, entonces la topología generada por $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$ también es polaca.

En efecto, definiendo la función $h : X \to X^{\mathbb{N}}$ de manera que $h(x)(n) = x$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces h define un homeomorfismo. En efecto, claramente

h es biyectiva. Verifiquemos la continuidad de manera puntual. Sean $x \in X$ y $A \subseteq h[X]$ vecindad abierta de $h(x)$, sean $U_0, U_1, \cdots, U_n$ los abiertos propios "asociados" a A. Note que $\bigcap_{i=0}^n U_i \neq \emptyset$ ya que x pertenece a dicha intersección, además $\bigcap_{i=0}^n U_i$ es abierto por lo que hay $V \subseteq X$ abierto tal que $x \in V$ y $V \subseteq \bigcap_{i=0}^n U_i$ y así es claro que $h[V] \subseteq A$.

Para ver que $h[X]$ es cerrado, tome $y \in X^{\mathbb{N}} \backslash h[X]$ entonces, hay almenos dos naturales m y n de manera que $y_m \neq y_n$ por otro lado, hay abiertos U_m, U_n ajenos que continen a y_m y a y_n respectivamente así, $\pi_m^{-1}[U_m] \cap \pi_n^{-1}[U_n]$ define un abierto en el porducto que contiene a y y además, no intersecta a $h[X]$.

Recuerde que a un subconjunto de un espacio topológico que sea tanto abierto como cerrado, se le conoce como conjunto *clopen*.

Teorema 3.26. *Si (X, τ) es un espacio polaco y A un conjunto de Borel de X, entonces hay una topología τ_A más fina que τ ($\tau \subseteq \tau_A$) con la que A es un subconjunto clopen y de modo que ambas topologías generan la misma σ-álgebra de Borel.*

Demostración: Considere $\mathcal{A}$ la familia de todos los conjuntos de Borel que cumplen con el teorema. Veremos que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra tal que $\tau \subseteq \mathcal{A}$.

Si $A \in \tau$ entonces $A \in \mathcal{A}$ en efecto, como A es abierto entonces hay topología τ_A completamente metrizable ya que A es G_δ. Por otro lado, $\tau \restriction X \backslash A$ es también completamente metrizable. Defínase $\tilde{\tau} = \tau \cup \tau_A \oplus \tau \restriction X \backslash A$ (es decir $\tilde{\tau}$ es la topología de la unión ajena de $\tau \cup \tau_A$ y $\tau \restriction X \backslash A$), nótese que A es clopen en $\tilde{\tau}$.

También note que $\tilde{\tau}$ es metrizable ya que es regular y segundo numerable. Considere ahora la métrica $\tilde{d} = \text{mín}\{d_\tau, d_A \oplus d_{X\backslash A}\}$; donde d_τ es una métrica compatible con τ y d_{τ_A}, $d_{\tau_{X\backslash A}}$ son métricas acotadas por 1 y compatibles con τ_A y $\tau_{X\backslash A}$ respectivamente. Además $d_A \oplus d_{X\backslash A}$ está dada por

$$d_A \oplus d_{X\backslash A}(x,y) = \begin{cases} d_A(x,y) & \text{si } x, y \in A \\ d_{X\backslash A}(x,y) & \text{si } x, y \notin A \\ 2 & \text{si no.} \end{cases}$$

La función $\tilde{d}$ es métrica para $\tilde{\tau}$ y además es completa.

Veamos por último que $\mathcal{A}$ es σ-álgebra. Es claro que tanto $\emptyset$, $X \in \mathcal{A}$ ya que τ testifica. Tome $A \in \mathcal{A}$ entonces $X \backslash A \in \mathcal{A}$ ya que la misma τ_A que testificaba para A también testifica para $X \backslash A$.

Considere ahora $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}$ y para cada A_n, sea (X, τ_n) el respectivo testigo de que $A_n \in \mathcal{A}$. Note que $\tau \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$ y así, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \tau_n$ es Hausdorff; luego, $\tau' = \langle \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n \rangle$ es topología polaca además, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es abierto en τ' entonces de lo anterior, hay topología τ'' que hace que $A \in \mathcal{A}$.

Por último, $\mathcal{B}(X, \tilde{\tau}) = \mathcal{B}(X)$ ya que $\tilde{\tau} \subseteq \mathcal{B}(X, \tilde{\tau})$ y como la σ-álgebra de Borel es la mínima que contiene a los abiertos lo deseado se sigue. ❑

Consecuencia del teorema anterior es que los subconjuntos de Borel de un espacio polaco son también espacios polacos dichos espacios se denominan de la siguiente manera.

Definición 3.27. Un *espacio estándar de Borel* es un espacio que es medible isomorfo a un subconjunto de Borel de un espacio polaco.

En particular, un espacio X que es metrizable es estándar de Borel si $(X, \mathcal{B}(X))$ es un espacio estándar de Borel.

Corolario 3.28. *Si $(X, \mathcal{A})$ es un espacio estándar de Borel y si $Y \subseteq X$ es no vacío y tal que $Y \in \mathcal{A}$ entonces $(Y, \mathcal{A} \upharpoonright Y)$ también es un espacio estándar de Borel.*

Demostración: Primeramente, nótese que como $Y \in \mathcal{A}$ se cumple que $\mathcal{A} \upharpoonright Y = \{A \in \mathcal{A} : Y \subseteq A\} = \{A \in \mathcal{A} : A \subseteq Y\}$. Puede suponerse que X es polaco y además $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ entonces por ser Y subconjunto Borel de X, por el teorema anterior puede suponerse sin pérdida de la generalidad que Y es clopen y por ende polaco y como $\mathcal{B} \upharpoonright (Y) = \mathcal{B}(Y)$ se cumple la conclusión del enunciado. ❑

3.3. El Teorema de Kuratowski

Con la ayuda del siguiente lema podremos establecer que $2^{\mathbb{N}}$ y $[0,1]^{\mathbb{N}}$ son ismorofos de Borel.

Lema 3.29. *Si $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de espacios metrizables y segundo numerables y $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ con su topología producto entonces la σ-álgebra de Borel de X es igual a la σ-álgebra producto de las σ-álgebra de Borel de los espacios X_n.*

Observación 3.30. En el ejemplo 3.23 se estableció que los espacios $[0,1]$ y $2^{\mathbb{N}}$ son ismorfos de Borel. Luego, gracias a el lema anterior, se puede obtener que $[0,1]^{\mathbb{N}}$ y $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ son espacios ismoformos de Borel, pero por otro lado recuerde que $(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ es homeomorfo a $2^{\mathbb{N}}$; por lo tanto $[0,1]^{\mathbb{N}}$ es isomorfo de Borel a $2^{\mathbb{N}}$.

Teorema 3.31 (Kuratowski)**.** *Cualesquiera dos espacios estándar de Borel no numerables son ismorfos de Borel.*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que la pareja $(2^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(2^{\mathbb{N}}))$ es un espacio estándar de Borel. Así entonces, es suficiente con demostrar que cualquier espacio estándar de Borel no numerable $(X, \mathcal{A})$ es isomorfo a $(2^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(2^{\mathbb{N}}))$. Gracias al Teorema 3.24 bastará con mostrar que existen funciones inyectivas $f : 2^{\mathbb{N}} \to X$ y $g : X \to 2^{\mathbb{N}}$ tales que cada una establece un ismorfismo de espacios medibles sobe su respectiva imagen.

De el Teorema 3.26 se tiene que puede fijarse una topología τ sobre X la cual resulte ser polaca y además se cumpla que $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X, \tau)$. Por el Teorema 3.15 hay un homeomorfismo digamos f de $2^{\mathbb{N}}$ sobre un subespacio cerrado A de (X, τ); así f define un isomorfismo de Borel entre $(2^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(2^{\mathbb{N}}))$ y $(A, \mathcal{A} \restriction A)$.

Considere ahora una función $\varphi : X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ la cual defina un encaje y además resulte que su imagen sea un subconjunto G_δ de $[0,1]^{\mathbb{N}}$ dicha función existe gracias al Corolario 3.13. Resulta entonces que φ define un isomorfismo de Borel entre $(x, \mathcal{A})$ y $\varphi[X]$. Por la observación hecha antes del enunciado del teorema, existe también un isomorfismo de Borel ψ entre $[0,1]^{\mathbb{N}}$ y $2^{\mathbb{N}}$. Así entonces, considere la función g como $g = \psi \circ \varphi$ la cual claramente es inyectiva y define ismorfismo de Borel en su imagen.

Entonces, por el Teorema 3.24 se tiene que $(2^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(2^{\mathbb{N}}))$ y $(X, \mathcal{A})$ son espacios isomorfos de Borel. ❑

Corolario 3.32. *Dos espacios estándar de Borel son isomorfos si y sólo si tienen la misma cardinalidad.*

La demostración se sigue del Teorema de Kuratowski en caso de que los espacios sean no numerables. En caso de ser espacios numerables, se sigue del Ejemplo 3.20.

Un resultado realmente interesante pero que no se demostrará aquí pero que se puede consultar en [7] es que cualquier espacio polaco es imagen continua del conjunto de los irracionales $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, dotados con su topología usual. Y por el teorema de Kuratowski se puede concluir que todo subconjunto de Borel en un espacio polaco es también imagen continua de los irracionales.

Capítulo 4

Espacios de Hilbert y $\ell_2(X)$

Introdución

El análisis funcional es una rama de las matemáticas que usa la intuición y el lenguaje de la geometría en el estudio de las funciones. La clase de funciones con la estructurara más amplia es la definida sobre los espacios de Hilbert. El estudio de dichos espacios es el núcleo alrededor del cual el análisis funcional se ha desarrollado. Ya que su teoría es muy amplia y además conservan muchas características de los espacios Euclidianos, por ejemplo un concepto central como lo es la *ortogonalidad*. Los espacios con producto interno son la manera más natural de generalizar los espacios Euclidianos.

Por otro lado, $\ell_2(\mathbb{N})$ es el prototipo de un espacio de Hilbert. Introducido y estudiado por vez primera por David Hilbert en su estudio de ecuaciones integrales. Una de las tendencias matemáticas de la época era la de axiomatizar los objetos de estudio. Para el caso de los espacios de Hilbert no fue sino hasta que J. von Neumann junto con M. H. Stone quienes introdujeron una definición axiomática de los espacios de Hilbert, pero ella incluía la noción de *separabilidad* la cual fue eventualmente excluida por algunos matemáticos de la época entre ellos F. Riesz quienes mostraron que para la mayor parte de la teoría la *separabilidad* era una condición innecesaria.

4.1. El espacio $\ell_2(X)$

Recuerde que un espacio de *Banach* X es un espacio vectorial normado que es completo con la métrica inducida por la norma; es decir, que toda sucesión de Cauchy converge y tiene límite en X

EJEMPLO 4.1. Para todo $p \in [1, +\infty)$, el espacio $\ell_p(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de todas las sucesiones de reales $\{x(n) : n \in \mathbb{N}\}$ tales que $|x_0|^p + |x_1|^p + \cdots$

converge; esto es

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < +\infty.$$

Al espacio $\ell_p(\mathbb{N})$ lo denotaremos simplemente por ℓ_p. El espacio ℓ_p es un espacio de Banach con la norma dada por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$$

El caso en que $p = 2$, sin lugar a dudas es el más importante, de ello hablaremos más adelante.

Dados X un espacio de Banach y $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de elementos de X. Entonces, la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n$ es convergente si la sucesión de sumas parciales $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge y si ese es el caso su límite es el valor de la serie. Recuerde que la sucesión de sumas parciales $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ es tal que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n.$$

Recuerde que en un espacio de Banach si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ se dice *absolutamente convergente.*

Una generalización más profunda de todo lo anterior es la siguiente. Si $\{x_s : s \in S\} \subseteq \mathbb{R}$ entonces,

$$\sum_{s\in S} x_s = \sup\left\{\sum_{s\in F} x_s : F \in [S]^{<\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\}\right\}. \tag{4.1}$$

Observe que en caso de que $S = \mathbb{N}$ la definición anterior coincide con la estándar y que si $\sum_{s\in S} x_s < +\infty$, entonces debe ocurrir que el conjunto $S_0 = \{s \in S : x_s \neq 0\}$ es a lo más numerable. Más aún en este último caso se tiene que para cualquier enumeración de S_0 se cumple

$$\sum_{s\in S} x_s = \sum_{s\in S_0} x_s.$$

Por ello, si X es un espacio de Banach y $\{x_s : s \in S\} \subseteq X$ se dice que la serie $\sum_{s\in S} x_s$ converge en X si a lo más una cantidad numerable de los x_s no son nulos y dada cualquier enumeración de ellos la serie $\sum_{s\in S_0} x_s$ converge en el sentido estándar.

Con todo lo anterior presentamos la definición general del espacio $\ell_2(X)$ para cualquier conjunto de índices X,

$$\ell_2(X) = \left\{a : X \to \mathbb{R} : \sum_{x\in X} |a(x)|^2 < +\infty\right\}.$$

En donde $\sum_{x\in X}|a(x)|^2$ se calcula como en la Ecuación 4.1.

4.2. Espacios de Hilbert

DEFINICIÓN 4.2. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un *producto interno* sobre X es una función $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X \to \mathbb{R}$ de manera que para cualesquiera $x, y, z \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se cumple

(a) $\langle x, x\rangle \geq 0$.

(b) $\langle x, x\rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

(c) $\langle \lambda x + y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

(d) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

A un $\mathbb{R}$ espacio vectorial dotado de un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ lo llamaremos *espacio con producto interno.*

Para nuestros fines solamente trataremos con espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$. Además, por como se considera en la definición anterior, los productos internos en los que nos enfocaremos son aquellos llamados *definidos positivos.*

Dado un espacio con producto interno X, se define la *norma* de un elemento $x \in X$ mediante

$$\|x\|= \sqrt{\langle x, x\rangle};$$

así entonces, es posible definir una métrica d sobre X de la siguiente manera, para $x, y \in X$,

$$d(x, y) = \|x - y\|= \sqrt{\langle x - y\rangle\langle x - y\rangle}.$$

Por lo tanto, los espacios con producto interno son espacios normados.

DEFINICIÓN 4.3. Un *espacio de Hilbert* es un espacio con producto interno que es completo con la métrica inducida.

Note que los espacios de Hilbert son espacios de Banach.

DEFINICIÓN 4.4. Para $x, y \in X$ con X un espacio con producto interno, diremos que son *ortogonales* si $\langle x, y\rangle = 0$.

Las siguientes dos identidades se siguen directo de la definición de la norma. En un espacio con producto interno X, la norma inducida siempre satisface dichas igualdades. Para cualesquiera $x, y \in X$,

(a) *Teorema de Pitágoras.* Si x, y son ortogonales, $\|x + y\|^2= \|x\|^2+\|y\|^2$.

(b) *Igualdad del paralelogramo.* $\|x + y\|^2+\|x - y\|^2= 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$.

Teorema 4.5 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Sean X un espacio con producto interno y $x, y \in X$ entonces, se cumple*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Demostración: Si ocurriera que $x = 0$ o bien $y = 0$, la desigualdad claramente se cumple. Suponga entonces que $x, y \neq 0$, para $\alpha = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}$ se cumple

$$0 \leq \langle \alpha x + y, \alpha x + y\rangle.$$

Y así, solamente es cuestión de hacer los cálculos necesarios para obtener lo deseado. ❑

Una de las consecuencias importantes de la desigualdad de Cauchy-Schwarz es que en un espacio con producto interno X, dicha función es continua respecto de la norma inducida. Esto lo establecemos en el siguiente teorema.

Teorema 4.6. *Sea X un espacio con producto interno, y sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones convergentes en X, con $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\
&\leq |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| \\
&= |\langle x_n, (y_n - y)\rangle| + |\langle (x_n - x), y\rangle| \\
&\leq \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\|,
\end{aligned}$$

entonces dado que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces $\|x_n\|$ es acotada así que el lado derecho de la igualdad anterior tiende a cero cuando $n \to \infty$. Y así, $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle$. ❑

Ejemplo 4.7. El espacio ℓ_2, es un espacio de Hilbert con producto interno definido por,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} x(n)y(n).$$

La convergencia de la serie del lado derecho está garantizada gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz. La completez la tomamos por cierta.

EJEMPLO 4.8. Para $p \neq 2$, el espacio ℓ_p no es un espacio con producto interno, y por ende no es espacio de Hilbert. Bastará con ver que la norma no satisface la igualdad del paralelogramo. Considere $x = (1, 1, 0, \dots) \in \ell_p$ y $y = (1, -1, 0, \dots) \in \ell_p$, entonces

$$\|x\|_p = \|y\|_p = 2^{1/p} \quad \text{mientras que} \quad \|x + y\|_p = \|x - y\|_p = 2.$$

4.3. Conjuntos ortogonales y ortonormales

DEFINICIÓN 4.9. Sea X un espacio con producto interno, $E \subseteq X$ se llama *conjunto ortogonal* si sus elementos son ortogonales dos a dos, es decir para cualesquiera $x, y \in E$ distintos, $\langle x, y \rangle = 0$. Si además, para cada $x \in E$ ocurre que $\|x\| = 1$, E se llama *conjunto ortonormal*.

OBSERVACIÓN 4.10. Cualquier conjunto ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ en un espacio con producto interno X, es linealmente independiente.

En efecto, si se toman $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ escalares y suponga que $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$. Entonces para $m \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, e_m \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \lambda_i e_i, e_m \rangle = t_m \langle e_m, e_m \rangle = \lambda_m \|e_m\|^2 = \lambda_m,$$

la igualdad anterior es igual a cero si y sólo si $\lambda_m = 0$, pero como m fue arbitrario la observación se sigue.

El siguiente lema en esencia determina la distancia de cualquier elemento x de un espacio con producto interno X a el espacio generado por un subconjunto ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\} \subseteq X$.

Lema 4.11. *Sean X un espacio con producto interno, $\{e_1, \dots, e_n\}$ un conjunto ortonormal en X. Entonces la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida mediante*

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \|x - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\|,$$

para x fijo, alcanza un único valor mínimo a saber en $(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle) \in \mathbb{R}^n$. Además, se cumple la siguiente desigualdad

$$\sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Demostración: Solamente es cuestión de cálculos directos, en efecto

$$\begin{aligned}0 \leq \|x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\|^2 &= \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x, e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \\ &= \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle - \lambda_i|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2.\end{aligned}$$

Así que para que f alcance su valor mínimo es necesario y suficiente que $\lambda_i = \langle x, e_i\rangle$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por otro lado se deduce que

$$0 \leq \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2;$$

por lo que la segunda parte también se cumple. ❑

Teorema 4.12 (Desigualdad de Bessel)**.** *Sean X un espacio con producto interno y $E \subseteq X$ un conjunto ortonormal no vacío. Entonces, para cualquier $x \in X$ se tiene*

$$\sum_{e \in E} |\langle x, e\rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

consecuentemente $E_0 = \{e \in E : \langle x, e\rangle \neq 0\}$ es a lo más numerable.

Demostración: Para cualquier $F \subseteq E$ finito, se tiene de la desigualdad del lema anterior, $\sum_{e \in F} |\langle x, e\rangle|^2 \leq \|x\|^2$; por lo que para cualquier $F \subseteq E$ finito, $\|x\|^2$ es cota superior para la suma en cuestón. Por lo tanto,

$$\sum_{e \in E} |\langle x, e\rangle|^2 = \sup \left\{ \sum_{s \in F} x_s : F \in [E]^{<\mathbb{N}} \backslash \{\emptyset\} \right\} \leq \|x\|^2.$$

Para ver que E_0 es numerable, sean para $x \in X$ fijo y $n \in \mathbb{N}$,

$$E_x = \{e \in E : \langle x, e\rangle \neq 0\} \quad \text{y} \quad E_{x,n} = \{e \in E : |\langle x, e\rangle| \geq {}^1/_n\}.$$

Para $F \subseteq E_{x,n}$ finito se cumple que $|F|\left(\frac{1}{n}\right)^2 \leq \sum_{e \in F} |\langle x, e\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ esto implica que $|F| \leq \|x\|^2 n^2 < +\infty$. Entonces $E_{x,n}$ es finito y además, su cardinalidad es menor o igual a $\|x\|^2 n^2$; ya que de lo contrario existiría $F \subseteq E_{x,n}$ finito cuya cardinalidad sería mayor a $\|x\|^2 n^2$. Por otro lado, obsérvese que $E_0 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_{x,n}$ y así, E_0 es unión numerable de conjuntos finitos por lo tanto numerable. Nótese que E_0 depende del $x \in X$ escogido. ❑

OBSERVACIÓN 4.13. Una generalización del Teorema de Pitágoras es la siguiente. Para cualquier conjunto ortogonal finito $\{e_1, \ldots, e_n\}$ se cumple que $\|\sum_{i=1}^n e_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2$.

Teorema 4.14. *Sean X un espacio de Hilbert y $E = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto ortogonal en X entonces, $\sum_{n\in\mathbb{N}} e_n$ converge si y sólo si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|e_n\|^2 < +\infty$.*

DEMOSTRACIÓN: Para la suficiencia, denotemos por $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} e_n$. Bastará con demostrar que $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy en X. Tome n, m con $n > m$ entonces,

$$\|s_n - s_m\|^2 = \|\sum_{i\leq n} e_i - \sum_{i\leq m} e_i\|^2 = \|\sum_{m<i\leq n} e_i\|^2 = \sum_{m<i\leq n} \|e_i\|^2$$

de donde se obtiene que $\|s_n - s_m\| = \sqrt{\sum_{m<i\leq n} \|e_i\|^2}$; entonces dado que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|e_n\|^2$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ tenemos que dado $\epsilon > 0$, para ϵ^2 es posible encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m > N$ digamos con $n > m$, ocurra $\sum_{m<i\leq n} \|e_i\|^2 < \epsilon^2$. Por lo tanto, $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de Cauchy en X y así, $\sum_{n\in\mathbb{N}} e_n$ converge.

Para la necesidad, denotemos por $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|e_n\|^2$. Bastará con ver que la sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ es de Cauchy. Consideremos $n, m \in \mathbb{N}$ y sin pérdida de la generalidad suponga que $n > m$, hay que acotar $|z_n - z_m|$.

$$|z_n - z_m| = \sum_{m<i\leq n} \|e_i\|^2 = \|\sum_{m<i\leq n} e_i\|^2 = \|s_n - s_m\|^2,$$

entonces como $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X por lo tanto converge; así, dado $\epsilon > 0$, para $\sqrt{\epsilon}$ hay $N \in \mathbb{N}$ de manera que si $n, m > N$ supongamos además que $n > m$ entonces $(\|s_n - s_m\|)^2 < (\sqrt{\epsilon})^2 = \epsilon$. De donde se sigue que $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. ❑

DEFINICIÓN 4.15. Dado un espacio con producto interno X, un *conjunto total* en X es un subconjunto E de manera que para cualquier $x \in X$, si x es ortogonal a todos los elementos de E entonces, $x = 0$. Un conjunto *total ortonormal* es un subconjunto total que es ortonormal.

Una observación que se debe resaltar, es que todo espacio de Hilbert siempre tiene un subconjunto total ortonormal. Para el caso de espacios de dimensión finita el resultado es claro, ya que toda base (lineal) puede llevarse a una base ortonormal. Para el caso general, puede hacerse uso del Lema de Kuratowski-Zorn.

Observación 4.16. Sea X un espacio de Hilbert y sea $\mathscr{F} = \{A \subseteq X : A \text{ es ortonormal}\}$ es claro que $\mathscr{F} \neq \emptyset$ ya que para $x \in X$ no nulo, $\left\{{}^{x}/_{\|x\|}\right\} \in \mathscr{F}$. Es claro también que la inclusión de conjuntos define un orden parcial en $\mathscr{F}$; además para cada cadena $\mathscr{C}$ en $\mathscr{F}$, ésta tiene una cota superior a saber $\bigcup_{C\in\mathscr{C}} C$. Es claro que dicha unión está en $\mathscr{F}$ pues si se toman x, y en ella, hay $C_0, C_1 \in \mathscr{C}$ tal que $x \in C_0$ y $y \in C_1$; sin pérdida de la generalidad puede suponerse $C_0 \subseteq C_1$ y como C_1 es conjunto ortonormal se tiene lo deseado. Luego, por el Lema de Kuratowski-Zorn, $\mathscr{F}$ tiene un elemento maximal M. Se afirma que M es un conjunto total ortonormal en X; si no fuese así existiría un $y \in X$ no nulo de manera que y sería ortogonal a todo elemento de M entonces $M_0 = M \cup \left\{{}^{y}/_{\|y\|}\right\}$ sería conjunto ortonormal y además $M \subseteq M_0$ contradiciendo la maximalidad de M.

El siguiente teorema es una caracterización de los conjuntos totales ortonormales en los espacios de Hilbert.

Teorema 4.17. *Sea X un espacio de Hilbert. Para cualquier conjunto ortonormal E en X, las siguientes propiedades son equivalentes.*

(a) El conjunto E es total,

(b) Para cada $x \in X$ se tiene que $x = \sum_{e\in E}\langle x, e\rangle e$, la cual se conoce como la serie de Fourier,

(c) Para todo $x \in X$ se tiene que $\|x\|^2 = \sum_{e\in E}\langle x, e\rangle^2$,

(d) Para cualesquiera $x, y \in X$, se tiene que $\langle x, y\rangle = \sum_{e\in E}\langle x, e\rangle\langle y, e\rangle$, conocida como la identidad de Parseval,

(e) El $\subseteq$-mínimo subespacio de X que contiene a E es denso.

Demostración: (a)$\Rightarrow$(b) Observe primero que para $x \in X$, el conjunto $\{e \in E : \langle x, e\rangle \neq 0\}$ es a lo más numerable, fijemos una enumeración para dichos elementos, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por otro lado, observe también que el conjunto $E_0 = \{\langle x, e_n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ es también ortogonal, ya que el producto interno saca escalares.

Defina $y = \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle x, e_n\rangle e_n$; se afirma que $y \in X$ y que además $y = \sum_{e\in E}\langle x, e\rangle e$. Que la última igualdad sea cierta es claro, pues los elementos de E cuyo producto interno con x es nulo no aportan nada a la serie. Para ver que $y \in X$ hagamos uso del Teorema 4.14 es decir, bastará ver que

$\sum_{n\in\mathbb{N}}\langle x, e_n\rangle e_n$ converge, lo que es equivalente a $\sum_{n\in\mathbb{N}}\|\langle x, e_n\rangle e_n\|^2 < +\infty$.

$$\sum_{e\in E_0}\|\langle x, e\rangle e\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}}\|\langle x, e_n\rangle e_n\|^2 =$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}|\langle x, e_n\rangle|\|e_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}}|\langle x, e_n\rangle| \leq \|x\|^2 < +\infty.$$

La última desigualdad en la relación anterior se da gracias a la Desigualdad de Bessel y por ende $y \in X$.

Veamos que para cada $e \in E$, $\langle (x-y), e\rangle = 0$.

Caso 1, que e sea ortogonal a x entonces $\langle (x-y), e\rangle = \langle x, e\rangle - \langle y, e\rangle = 0$, note que la última igualdad se da gracias a que $e \notin \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ por lo tanto ya que E es total, se tiene que $x - y = 0$ y así $x = y$.

Caso 2, si $e \in \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, haremos uso del Teorema 4.6 entonces

$$|\langle (x-y), e\rangle| = |\langle x, e\rangle - \langle y, e\rangle| = \left|\langle x, e\rangle - \left\langle \lim_{n\to\infty}\sum_{i\leq n}\langle x, e_i\rangle e_i, e\right\rangle\right|$$

$$= |\langle x, e\rangle| - \lim_{n\to\infty}\left|\left\langle \sum_{i\leq n}\langle x, e_i\rangle e_i, e\right\rangle\right| = |\langle x, e\rangle| - \lim_{n\to\infty}\sum_{i\leq n}|\langle x, e_i\rangle||\langle e_i, e\rangle|$$

$$= |\langle x, e\rangle| - |\langle x, e\rangle| = 0,$$

por lo tanto $x - y$ es ortogonal a todo elemento de E y así $x = y$.

(b)⇒(d) Considere $x, y \in X$ y enumere los elementos de E cuyo producto interno con x o bien y sea no nulo, digamos $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Considere además las siguientes aproximaciones a x y a y respectivamente, es decir, para $n \in \mathbb{N}$ sean

$$x_n = \sum_{i\leq n}\langle x, e_i\rangle e_i \quad \text{y} \quad y_n = \sum_{i\leq n}\langle y, e_i\rangle e_i$$

Note que $\langle x_n, y_n\rangle = \sum_{i\leq n}\langle x, e_i\rangle\langle y, e_i\rangle$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\left|\langle x, y\rangle - \sum_{i\leq n}\langle x, e_i\rangle\langle y, e_i\rangle\right| &= |\langle x, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| \\
&= |\langle x, y\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| \\
&\leq |\langle x, y\rangle - \langle x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y\rangle - \langle x_n, y_n\rangle| \\
&= |\langle (x - x_n), y\rangle| + |\langle x_n, (y - y_n)\rangle| \\
&\leq \|x - x_n\|\|y\| + \|x_n\|\|y - y_n\| \to 0,
\end{aligned}$$

ya que cuando $n \to \infty$ entonces $\|x - x_n\| \to 0$ por lo cual $\|x_n\| \to \|x\|$, y además $\|y - y_n\| \to 0$. Obteniendo así que

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle x, e_n\rangle\langle y, e_n\rangle = \sum_{e\in E}\langle x, e\rangle\langle y, e\rangle.$$

(c)⇒(a) Si se cumple que para todo $e \in E$, $\langle x, e\rangle = 0$ entonces es claro que

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{e\in E} |\langle x, e\rangle|^2} = 0,$$

por lo cual se deduce $x = 0$ lo que implica que E sea total.

(e)⇒(a) Sea S el $\subseteq$-mínimo subespacio conteniendo E. Considere $x \in X$ y suponga que para cada $e \in E$ ocurre $\langle x, e\rangle = 0$. Sea $y \in S$, con $y = \sum_{i\in} \lambda_i e_i$ entonces, y es ortogonal a x pues $\langle x, y\rangle = \langle x, \sum_{i\in} \lambda_i e_i\rangle = 0$ esto último por la linealidad y la continuidad del producto interno. Por otro lado, ya que S es denso, escoja una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ de manera que $\|x - y_n\| \to 0$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle - \langle x, y_n\rangle = \langle x, (x - y_n)\rangle \leq \|x\|\|x - y_n\|$$

y ya que $\|x - y_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por lo cual $\|x\|^2 = 0$ y así $x = 0$ por lo tanto E es total.

(b)⇒(e) Es claro ya que para $x \in X$, $x = \sum_{e\in E} \langle x, e\rangle e$ pero dicha suma es un límite de sumas de elementos de el $\subseteq$-mínimo subespacio que continen a E.

(d)⇒(c) Esta implicación es completamente clara. ❑

Teorema 4.18. *Cualesquiera dos conjunto totales ortonormales en un espacio de Hilbert tienen la misma cardinalidad.*

Demostración: Considere $A, B \subseteq X$ conjuntos totales ortonormales cuales quiera.

Para el caso finito, demostremos que todo conjunto total ortonormal determina una base (lineal). Sea $A \subseteq X$ total ortonormal con n elementos y suponga por un momento que A no fuese base. Extiéndase A a una base, digamos $A_0 = A \cup \{a_{n+1}, \ldots, a_m\}$ con $m > n$. Es posible llevar a A_0 a una base que sea ortonormal (ver [5] Corolario 2.2, pp. 104-105) A_0' de manera que los elementos de A no se vean afectados es decir lo único que se ortonormalizó fueron los elementos que se agregaron a A. Entonces, para $a_j \in A_0'$ con $j \geq n + 1$, se tiene que a_j es ortogonal a todo elemento de A por lo cual $a_j = 0$ por ser A total es decir, solamente se agregaron elemento nulos para que A fuera base.

Para el caso en que ambos A y B sean infinitos, observe que para cada $a \in A$, el conjunto $B_a = \{b \in B : \langle a, b\rangle \neq 0\}$ es a lo más numerable. Por otro lado, para $b \in B$ tenemos por la parte (c) del Teorema 4.17 que

$\|b\|^2 = \sum_{a\in A}|b,a|^2$, pero $\|b\|^2 = 1$, por lo cual existe al menos un $a \in A$ tal que $\langle b, a\rangle \neq 0$ lo que implica $b \in B_a$. Así, $B = \bigcup_{a\in A} B_a$ y por ende

$$|B| \leq |B_a \times A| = \aleph_0 \cdot |A| = |A|.$$

Para ver que $|A| \leq |B|$ solamente se deben de cambiar los papeles de A y B en lo anterior. ❑

Definición 4.19. Para cualquier espacio de Hilbert X no trivial, se define la *dimensión ortogonal* de X como la cardinalidad de cualquier subconjunto total ortonormal. En particular, la dimensión ortogonal del espacio $\{0\}$ es cero.

Recuerde que un espacio de Hilbert se dice *separable* si contiene un subconjunto denso numerable.

Ejemplo 4.20. Para $p \in [1, +\infty)$, el espacio ℓ_p es separable. En particular, ℓ_2 es separable.

En efecto, sea D el conjunto de todas las sucesiones no nulas que sean finalmente cero. Es claro que D es numerable.

Sean $x \in \ell_p$ y $\epsilon > 0$ dado que $\sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n|^p < +\infty$ puede encontrarse $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{N<n}|x_n|^p < \epsilon/2$. Para cada $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$ tome $r_k \in \mathbb{Q}$ tal que $|x_k - r_k|^p < \epsilon/2N$. Defina $y = (r_0, r_1, \ldots, r_n, 0, \ldots)$ es claro que $y \in D$. Y además,

$$\|x-y\|^p = \sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n - y_n|^p = \sum_{n\leq N}|x_n - y_n + \sum_{n>N}|x_n - y_n|^p \leq N\left(\frac{\epsilon}{2N}\right) + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Teorema 4.21. *Sea X un espacio Hilbert separable, entonces todo subconjunto ortonormal es numerable. En particular, todo espacio Hilbert separable tiene dimensión ortogonal $\aleph_0$.*

Demostración: Sean X espacio de Hilbert separable, $D \subseteq X$ denso numerable y E cualquier subconjunto ortonormal de X.

Obsérvese que para cualesquiera $e, e' \in E$ distintos, se cumple que

$$\|e - e'\| = \langle e - e', e - e'\rangle = \sqrt{2}.$$

Entonces, si se consideran las bolas abiertas $B(e, \frac{\sqrt{2}}{4})$ y $B(e', \frac{\sqrt{2}}{4})$ éstas son ajenas y más aún, por la densidad de D, es posible encontrar elementos de D tal que $d \in B(e, \frac{\sqrt{2}}{4})$ y $d' \in B(e', \frac{\sqrt{2}}{4})$. Luego, si E no fuera numerable, tendríamos tantas bolas ajenas centradas en elementos de E como parejas de elementos distintos de E, es decir, una cantidad no numerable de ellas.

Así tendríamos una cantidad no numerable de elementos de D esto quiere decir que X no contendría un subconjunto denso numerable ya que D era arbitrario, contradiciendo así la separabilidad. ❑

Definición 4.22. Un *isomorfismo* T de un espacio con producto interno X sobre un espacio con producto interno $\tilde{X}$ sobre el mismo campo, es un operador lineal biyectivo $T : X \to \tilde{X}$, el cual preserva el producto interno, esto es, para todo $x, y \in X$,

$$\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle,$$

por simplicidad denotamos el producto interno de X y $\tilde{X}$ con el mismo símbolo. En tal caso X y $\tilde{X}$ son llamados *espacios con producto interno isomorfos*.

Por otro lado, note que la biyectividad y la linealidad de T garantizan que T sea *isomorfismo de espacios vectoriales* de X en $\tilde{X}$ preservándose así toda la estructura del producto interno. T es también una *ismometría* (es decir, preserva distancias) entre X y $\tilde{X}$ pues las respectivas distancias están determinadas por las normas, las cuales a su vez estan definidas por los productos internos de X y $\tilde{X}$.

Contamos ya con lo necesario para presentar el Teorema principal de esta sección. Dicho teorema establece la *universalidad* del espacio $\ell_2(X)$ para los espacios de Hilbert. Cabe aclarar que para cada espacio de Hilbert existe una relación intrínseca entre el conjunto X y el espacio en cuestión.

Teorema 4.23. *Sea X un espacio de Hilbert no trivial. Entonces existe un conjunto E y una transformación lineal biyectiva $T : X \to \ell_2(E)$ que preserva productos internos (y por lo tanto la norma) y tal que $|E|$ coincide con la dimensión ortogonal de X.*

Demostración: Tome un E un subconjunto ortonormal de X. Para cada $x \in X$ fijo, defina $T_x : E \to \mathbb{R}$ de manera que para todo $e \in E$, $T_x(e) = \langle x, e\rangle$ defina ahora $T : X \to \mathbb{R}^E$ dada por

$$T(x) = T_x(e),$$

es decir, a cada x se le asocia una sucesión de reales de longitud $|E|$. Observe que en realidad T asocia a cada x un elemento de $\ell_2(E)$ ya que gracias a la desigualdad de Bessel, se sigue

$$\|T(x)\|^2 = \sum_{e\in E} |\langle x, e\rangle|^2 \leq \|x\| < +\infty.$$

Se afirma que T es lineal; en efecto ya que para $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos

$$T(x+y) = T_{x+y}(e) = \langle (x+y), e\rangle = \langle x, e\rangle + \langle y, e\rangle =$$
$$T(x)(e) + T_y(e) = T(x) + T(y);$$
$$T(\lambda x) = T_{\lambda x}(e) = \langle \lambda x, e\rangle = \lambda\langle x, e\rangle = \lambda T_x(e) = \lambda T(x).$$

Además, T respeta el producto interno, es decir, se cumple que $\langle x, y\rangle = \langle T(x), T(y)\rangle$; en efecto esto se deduce de la identidad de Parseval.

$$\langle T(x), T(y)\rangle = \sum_{e\in E} T_x(e) T_y(e) = \sum_{e\in E} \langle x, e\rangle\langle y, e\rangle = \langle x, y\rangle.$$

por lo cual T también preserva la norma, es decir $\|T(x)\|= \|x\|$.

Es claro que T es inyectiva pues $ker(T) = \{0\}$ ya que para cualquier $x \in X$ que sea ortogonal a todos los elementos de E debe ocurrir que $x = 0$ por ser E total.

Por último veamos que T es suprayectiva. Sea $f \in \ell_2(E)$ entonces, $\|f\|^2 = \sum_{e\in E}|f(e)|^2 < +\infty$; sea $x = \sum_{e\in E} f(e)e$ se sigue del Teorema 4.14 que $x \in X$. Fije una enumeración de los elementos de $e \in D$ tal que $\langle x, e\rangle \neq 0$ digamos $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces para $k \in \mathbb{N}$ fijo y $m \geq k$, estimemos

$$|\langle x, ek\rangle - f(e_k)| = \left|\langle x, e_k\rangle - \sum_{i\leq n} f(e_i)\langle e_i, e_k\rangle\right| = \left|\left\langle x - \sum_{i\leq m} f(e_i)\langle e_i, e_k\rangle, e_k\right\rangle\right|$$
$$\leq \left\|x - \sum_{i\leq m} f(e_i)e_i\right\| \|e_k\| = \left\|x - \sum_{i\leq m} f(e_i)e_i\right\| \to 0;$$

note que la útlima igualdad tiende a cero cuando $m \to \infty$. Por lo tanto, $f(e) = \langle x, e\rangle$, para todo $e \in E$ ya que $\|f\|^2 < +\infty$; entonces, $f(e) = T_(x)$.

Con todo, se cumple que T es un isomorfismo.❑

Bibliografía

[1] Hernández Hernández, Fernando. *Teoría de Conjuntos una Introducción.* Sociedad Matemática Mexicana, Serie Textos, Vol.13, 2003.

[2] Hernández Hernández, Fernando; Ibarra Contreras, Manuel. *Intrducción a Teoría de la Medida.* Aportaciones Matemáticas, Textos. Vol. 13, 2018.

[3] Kreyszing, Erwin. *Introductory Functional Analysis with Aplications* John Wiley and Sons. Inc., 1978.

[4] Landau, Edmund. *Fundations of Analysis.* Chelsea Publishing Company, Third Edition 1966.

[5] Lang, Serge. *Linear Algebra.* Springer, Undergraduate Texts in Mathematics, Third Edition, 1987.

[6] Spivak, Michael. *Calculus.* Editorial Reverté, S.A. Segunda Edición, 1992.

[7] Srivastava, Shami M. *A Course on Borel Sets.* Springer, Graduate Text in Mathematics, 180. New York, 1998.

[8] Willard, Stephen. *General Topology* Addison-Wesley Publishinng Company, 1970