



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO Y UNIVERSIDAD
MICHUACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO



POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNAM-UMSNH

Realizaciones Regulares de Poliedros en el 3-Toro

T E S I S

que para obtener el grado de

Maestro en Ciencias Matemáticas

presenta

José Antonio Montero Aguilar

x

Asesor:

Doctor en Ciencias Matemáticas

Daniel Pellicer Covarrubias

MORELIA, MICHUACÁN

Junio 2015

La investigación de este trabajo se realizó gracias al apoyo económico de las siguientes entidades:

- Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM **IN101615**, “*Politopos altamente simétricos en espacios de dimensión tres y cuatro*”. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.
- Proyecto **166951** del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), “*Problemas algebraicos y combinatorios en la geometría discreta*”.
- Programa de Becas Nacionales del CONACyT, mediante el cual fui apoyado para realizar mis estudios de maestría.

Índice general

Agradecimientos	ix
Introducción	xi
1. Poliedros regulares en \mathbb{E}^3	1
1.1. Poliedros abstractos	1
1.2. Realizaciones euclidianas de poliedros regulares	9
2. El 3-Toro	29
2.1. Isometrías de \mathbb{E}^3	29
2.2. Grupos latiz y el 3-toro	35
2.3. Latices invariantes bajo isometrías.	43
3. Poliedros regulares en el 3-toro	49
3.1. Poliedros finitos	52
3.2. Poliedros infinitos planos y mezclados	53
3.3. Poliedros infinitos puros	65
4. Comentarios finales	69
Índice alfabético	77
Bibliografía	79

Resumen

Gracias al trabajo de Coxeter durante el siglo XX en el estudio de objetos combinatorios y geométricos con alto grado de simetría han surgido distintos problemas de clasificación. En los 70's y 80's Grünbaum y Dress generalizan los sólidos platónicos y elaboran una clasificación con 48 poliedros regulares en el espacio euclidiano \mathbb{E}^3 . Javier Bracho junto con otros autores encontró todos los poliedros regulares con caras planas en el espacio proyectivo \mathbb{P}^3 y unos años después Peter McMullen encontró una manera de clasificar los poliedros regulares finitos en el espacio euclidiano 4-dimensional \mathbb{E}^4 , de donde es posible desprender una clasificación de poliedros regulares en \mathbb{P}^3 . En este trabajo abordamos el problema análogo para el 3-toro \mathbb{T}^3 , el cual es una generalización tridimensional del 2-toro, encontrando todos los posibles poliedros regulares en \mathbb{T}^3 que son inducidos por poliedros regulares en \mathbb{E}^3 .

Palabras Clave: Sólidos platónicos, Poliedros regulares, 3-toro

Abstract

Thanks to Coxeter's work in the 20th century on highly symmetric combinatorial and geometrical objects several classification problems have arose. In the 70's and 80's Grünbaum and Dress generalize the Platonic Solids and give a classification of 48 regular polyhedra in Euclidean 3-space. Javier Bracho in joint work with other authors found the regular polyhedra with planar faces in the projective space \mathbb{P}^3 . A couple of years after Bracho's work, Peter McMullen gave a way to find all regular finite polyhedra in 4-dimensional Euclidean space which gives a way to find all regular polyhedra in the projective space. In this thesis we attack the analogous problem in the 3-torus \mathbb{T}^3 , which is a 3-dimensional generalization of the 2-torus. We find all regular polyhedra in \mathbb{T}^3 induced by regular polyhedra in \mathbb{E}^3 .

Keywords: Platonic Solids, Regular polyhedra, 3-torus

Agradecimientos

Quien me conoce un poco sabe que esto de las palabras no es exactamente lo mío, de modo que escribir estas pequeñas líneas no refleja del todo el sentimiento detrás de ellas. Con estas palabras pretendo agradecer a todos aquellos que de una u otra manera fueron parte importante durante mis estudios de maestría.

Primero que nada quiero agradecer a mis papás, Don Jorge y Doña Soco, por el incondicional apoyo que me han brindado en esta locura de estudiar matemáticas. Sin ellos, me queda más que claro que no habría llegado ni siquiera cerca de donde hoy me encuentro. No me alcanzan las páginas para decirles lo mucho que los amo y lo agradecido que estoy. También agradezco a mis hermanos, Sandra, Ulises y Vero, quienes de cerca o de lejos han sabido mostrarme su apoyo (o de menos me han sabido juzgar de loco sin que me dé cuenta). Ustedes han sido y serán siempre un ejemplo de lucha y perseverancia a seguir.

Palabras aparte merece mi muy querido amigo y asesor, Daniel Pellicer. Gracias por acercarme a tan bellas matemáticas alrededor de las cuales estoy decidido a continuar mi carrera. Gracias por todo el apoyo, por todos los consejos, por toda la diversión y las muestras de afecto y entendimiento. Gracias también por saber guiarme y orientarme. Gracias por ofrecerme la oportunidad de conocer gente y lugares que han marcado mi vida profesional y personal. Gracias por soportarme y estar dispuesto a seguir haciéndolo. En fin, gracias por todo.

También quiero agradecer a Andrea Sora, quien me acompañó durante todo el proceso de escritura de este trabajo. Gracias por mostrarme un lado muy bonito de la vida y por tenerme esa infinita paciencia en mis ratos difíciles. Gracias por todo el cariño y comprensión. Gracias también por animarme, apoyarme y acompañarme, estoy seguro que sin ti este proceso no habría sido el mismo.

Gracias a Malú, quién siempre ha sido y será para mí una segunda mamá. Gracias por enseñarme tantas cosas y por animarme a seguir haciendo matemáticas. Gracias por todo el cariño ofrecido y por seguir al pendiente de mí y mi carrera. Gracias también por animarte a revisar este trabajo a pesar de que la geometría y tú se llevan mejor a distancia positiva.

Gracias también a Miguel Raggi, por todo el apoyo y motivación que me ha dado. Gracias por enseñarme tantas cosas y apoyarme tanto. Gracias por tus comentarios a este trabajo. También quiero agradecer a Tere por sus consejos, su apoyo y todas esas pláticas no-necesariamente-chismosas dentro y fuera del infinito. Aprovecho para felicitarlos por Inés, quien es afortunada de tener unos papás tan divertidos.

Agradezco a Isabel Hubard y a Eugenia O'Reilly por tomarse el tiempo y las ganas de revisar este trabajo; sus comentarios fueron de vital importancia para que este trabajo llegara a su fin. Gracias también por todo lo que me han enseñado y por todo el aprecio mostrado.

Gracias a mis muy estimados amigos Ana, Yesenia, Lalo, Bere, Gaby, Griego y Bombón pues a pesar de que no nos vemos tanto como quisiéramos, sé que cuento con su apoyo. Agradezco de manera muy especial a mi cuate Pelayo, quien siempre me ha brindado apoyo y camaradería, en especial en los momentos más difíciles. También merecen una mención más que honorífica Héctor, Toño y Oscar porque siempre estuvieron para poner su camaradería y su hígado cuando más lo necesité. Sin ustedes cuatro la cosa no habría sido nada fácil ¡Infinitas (de esos infinitos grandes que ustedes conocen mejor que yo) gracias!

Gracias a Isa, Eugenia, Micael, Collins, Sara, Abú, Ían, Jana y todos los cuates del IM-UNAM por recibirme con los brazos abiertos mientras estuve en el DF. Muy especial agradecimiento para Tiko, Héctor, Fabi y Jimmy quienes me dieron un lugar para dormir en distintas ocasiones durante ese semestre. También quiero agradecer de manera muy especial a Haydeé por la compañía, el cariño y el aprecio mostrado. Gracias por esos ratos de café y matemáticas, por las películas y en general, por todos los momentos. Mi estancia en el DF hubiera sido un tanto solitaria de no haber sido por ti.

Quiero agradecer también a mis compañeros de posgrado. Claramente es imposible listarlos a todos y no pretendo herir sentimientos, pero mención honorífica merecen mis compañeros del infinito Enrique, Tere y Martha. Gracias por enseñarme tantas cosas y por hacer ameno el día a día. Gracias también a Fernando y Ariet por todo sus consejos y su apoyo ¡Salucita!

Finalmente y no por eso menos importante, quiero agradecer a Bosco, Naila, Manolo, Chava, Erick, Prima, Rob, Rubas, Jorch, Gasde y todos esos cuates de la cerradura de Fismat que me han brindado su cariño y amistad. Gracias porque muchos de ustedes me han acompañado en mis ratos más duros y han estado ahí cuando nadie más estaba.

Espero no haber dejado a nadie fuera de los agradecimientos, pero si creen que deban estarlo ¡Inclúyanse! pues si no aparecen es más bien por falta de memoria momentánea que por falta de aprecio. A todos ustedes **¡Gracias!**

Introducción

Las estructuras geométricas como los poliedros y las teselaciones han cautivado a la humanidad desde la antigüedad. De particular interés han sido aquellas que muestran un grado notable de simetría. Estos objetos se aprecian no sólo en la matemática y ciencia, sino también en el arte, pues resultan llamativos a simple vista.

Los *poliedros regulares convexos*, conocidos también como *sólidos platónicos*, se conocen desde siglos antes de los griegos. Sin embargo, como en muchos otros aspectos de la geometría, el mérito de los griegos, y en particular de Euclides, es darles un estudio desde una manera formal y rigurosa. El libro XIII de *Los Elementos* [10] trata esencialmente de estos objetos y de su clasificación.

La clasificación de poliedros regulares de Euclides usa fuertemente el hecho de que el poliedro es convexo. Sin embargo, en grabados y pinturas de la Edad Media aparecieron algunos objetos con un fuerte grado de simetría. Dos de estos objetos fueron estudiados por Johannes Kepler (1571–1630); ellos comparten propiedades combinatorias y de simetría con los sólidos platónicos, pero tienen la característica de tener caras estrelladas.

A principios del siglo XIX Louis Poincaré (1777-1859) redescubrió los sólidos de Kepler y dos sólidos más, cuyas caras son convexas pero están acomodadas de manera estrellada alrededor de cada vértice. En 1811 Augustin Louis Cauchy (1789–1857) probó que los cuatro poliedros regulares estrellados descubiertos por Kepler y Poincaré eran todos los que se pueden construir de esa manera.

Sin duda alguna las aportaciones de Coxeter (1907-2003) forman un pilar importante en la teoría de poliedros. Muchas de estas aportaciones culminaron en su famoso libro *Regular Polytopes* [5] cuya primera edición fue publicada en 1948. Sin embargo, una de sus aportaciones más relevantes vino en su época de estudiante, cuando él y J. F. Petrie (1907–1972) descubrieron tres objetos con propiedades de simetría similares a las de los poliedros regulares conocidos hasta ese entonces, pero con la característica de tener una infinidad de caras. Coxeter probó también que la lista de estos tres era completa [4].

La teoría tomó un nuevo aire cuando en 1975 Branko Grünbaum dio una lista de 47

objetos que tenían propiedades geométricas similares a los poliedros regulares (ver [11]). Esta lista incluía los sólidos platónicos, los sólidos de Kepler-Poinsot y los de Petrie-Coxeter; además incluía las teselaciones del plano con cuadrados, triángulos y hexágonos. Grünbaum permitió también que las caras no fueran planas e incluso que fueran infinitas.

En 1981 A. Dress encontró otro poliedro [8] para completar la lista de Grünbaum a 48, y en 1985, usando herramientas algebraicas y combinatorias probó que la lista era completa (ver [9]).

Justo entre los dos artículos de Dress, en 1982 Danzer y Schulte introdujeron el concepto de *politopo abstracto* (ver [7]), concepto que generaliza a los polígonos y poliedros geométricos, rescatando su estructura combinatoria. Finalmente en [15], Egon Schulte y Peter McMullen abordan el problema geométrico partiendo del concepto de poliedro abstracto y prueban, de una forma distinta, que la lista de 48 poliedros regulares es completa.

Una generalización natural es atacar el problema para otros espacios. En este sentido, algunos de los principales trabajos son los siguientes:

- Se conocen todos los mapas regulares en el 2-toro (ver [6] y [16, §1D]).
- En [3] Conder clasifica los mapas regulares en superficies de característica de Euler entre -200 y -1 .
- En [16, §6D,6E] Schulte y McMullen encuentran todas las teselaciones regulares del n -toro.
- En [1] y [2] Javier Bracho junto con otros autores encuentra todos los poliedros con caras planas en el espacio proyectivo \mathbb{P}^3 y finalmente, en [14] McMullen clasifica los poliedros regulares en \mathbb{S}^3 . De dicha clasificación es posible desprender una clasificación de los poliedros en \mathbb{P}^3 .

El 3-toro es una generalización tridimensional del 2-toro. En [18] abordamos el problema de determinar cuándo un poliedro regular en el espacio euclidiano induce un poliedro regular en el 3-toro, pudiéndolo resolver para los poliedros finitos y los poliedros de Petrie-Coxeter. En este trabajo refinamos las técnicas, lo cual nos permitió dar demostraciones más limpias que las dadas en [18] y extender los resultados a los 48 poliedros regulares de Grünbaum-Dress.

En el primer capítulo de este trabajo introducimos las nociones básicas acerca de la teoría de poliedros abstractos como generalización combinatoria de los poliedros convexos; además establecemos resultados básicos acerca del grupo de automorfismos de los poliedros regulares. Posteriormente estudiamos las realizaciones geométricas en \mathbb{E}^3 de los poliedros regulares, presentamos la clasificación de éstas y describimos brevemente cada uno de los poliedros. En el segundo capítulo definimos los *grupos latiz* para introducir el 3-toro \mathbb{T}^3 y estudiamos el grupo de isometrías de éste; para ello, estudiamos la estructura del grupo

de isometrías de \mathbb{E}^3 . Finalmente en el tercer capítulo abordamos el problema principal del trabajo, clasificando los grupos latiz Λ para los cuales un poliedro regular \mathcal{P} realizado en \mathbb{E}^3 induce un poliedro regular \mathcal{P}_Λ en \mathbb{T}_Λ^3 .

Capítulo 1

Poliedros regulares en el espacio euclidiano \mathbb{E}^3

En este capítulo se pretende que el lector se familiarice con los conceptos básicos de la teoría de poliedros regulares. Partiremos definiendo *poliedro abstracto* y trabajaremos algunas propiedades combinatorias de los mismos. Definiremos el grupo de automorfismos como generalización combinatoria del grupo de simetrías. Posteriormente entraremos a la parte geométrica de la teoría por medio del concepto de *realización* para concluir el capítulo con la clasificación de los poliedros regulares en el espacio euclidiano \mathbb{E}^3 .

1.1. Poliedros abstractos

En esta sección estudiaremos el concepto de poliedro abstracto, el cual es una generalización combinatoria de los poliedros convexos. Esta teoría se desprende de aquella de los politopos abstractos, y los conceptos aquí presentados se pueden generalizar a dicha teoría. Para fines de este trabajo, hemos adecuado algunos conceptos con la intención de hacer el material más comprensible. Sin embargo, si el lector está interesado en revisar la teoría general puede consultar [16].

La definición de poliedro abstracto rescata la estructura de incidencia de un poliedro clásico dejando de lado la parte geométrica. Más adelante se verá que, efectivamente, hablamos de una generalización de los poliedros convexos.

Definición 1.1. Un *poliedro abstracto* es un conjunto parcialmente ordenado (\mathcal{P}, \leq) (usualmente escribimos únicamente \mathcal{P}) con una *función de rango* $rk : \mathcal{P} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ suprayectiva

y estrictamente creciente. Con el fin de recordar el origen geométrico de la teoría, llamaremos *vértices*, *aristas* y *caras* a los elementos de rango 0, 1 y 2, respectivamente. Diremos que dos elementos $F, G \in \mathcal{P}$ son *incidentes* si $F \leq G$ o $G \leq F$. Una *bandera* es una cadena maximal de \mathcal{P} . Además, \mathcal{P} satisface las siguientes propiedades:

- (P1) Toda bandera consta de exactamente un vértice, una arista y una cara.
- (P2) \mathcal{P} es *fuertemente conexo por banderas*. Es decir, dadas dos banderas Φ y Ψ de \mathcal{P} existe una sucesión de banderas $\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_k = \Psi$ tales que para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, Φ_{i-1} y Φ_i son *adyacentes* (difieren exactamente por un elemento) y $\Phi \cap \Psi \subseteq \Phi_i$ para toda $i \in \{0, \dots, k\}$.
- (P3) \mathcal{P} satisface la *propiedad del diamante*. Es decir, cada arista es incidente a exactamente dos vértices y a dos caras; además, si un vértice F_0 es incidente a una cara F_2 , existen exactamente dos aristas incidentes tanto a F_0 como a F_2 .

En lo que resta de esta sección, usaremos indistintamente el término *poliedro* o el término *poliedro abstracto* para referirnos al mismo concepto.

Usualmente identificaremos una cara F_2 con el suborden de \mathcal{P} determinado por el conjunto $\{F \in \mathcal{P} : F \leq F_2\}$. Si F_0 es un vértice de \mathcal{P} , la *figura de vértice* es el suborden determinado por $\{F \in \mathcal{P} : F_0 \leq F\}$. Observe que las propiedades (P2) y (P3) implican que cada cara y cada figura de vértice es isomorfa a la latiz de incidencia de una gráfica conexa 2-regular, esto es, un ciclo o una trayectoria infinita en ambas direcciones.

El *1-esqueleto* de \mathcal{P} , denotado por $\text{Sk}^1(\mathcal{P})$, es la gráfica determinada por los vértices y las aristas de \mathcal{P} . En virtud de (P2) y (P3), $\text{Sk}^1(\mathcal{P})$ es una gráfica (y no una hipergráfica) conexa; además las caras de \mathcal{P} pueden ser pensadas como subgráficas de $\text{Sk}^1(\mathcal{P})$.

Ejemplo 1.2. A continuación listamos varios ejemplos de poliedros abstractos.

- (i) Naturalmente, los poliedros convexos son ejemplos de poliedros abstractos si se identifica cada uno con el orden parcial determinado por los vértices, aristas y caras del poliedro, ordenado por la contención (ver figura 1.1a para el caso del tetraedro).
- (ii) Las teselaciones del plano con cuadrados, hexágonos regulares y triángulos equiláteros son poliedros abstractos ordenando los vértices, aristas y teselas por contención.
- (iii) Muchos mapas en superficies pueden ser pensados como poliedros abstractos. En la figura 1.1b se muestra un mapa en el 2-toro \mathbb{T}^2 y en la figura 1.1d se muestra un mapa en el plano proyectivo \mathbb{P}^2 .
- (iv) Toda gráfica cúbica 3-coloreada propiamente por aristas da origen a un poliedro abstracto considerando como caras las componentes conexas que resultan al eliminar cualquier clase cromática. En la figura 1.1c se muestra una coloración propia de la

gráfica completa K_4 que induce un poliedro *isomorfo* (ver definición 1.3) al dado por el mapa de \mathbb{P}^2 de la figura 1.1d, los cuales a su vez son isomorfos al *Petrial* del tetraedro (ver construcción en página 11).

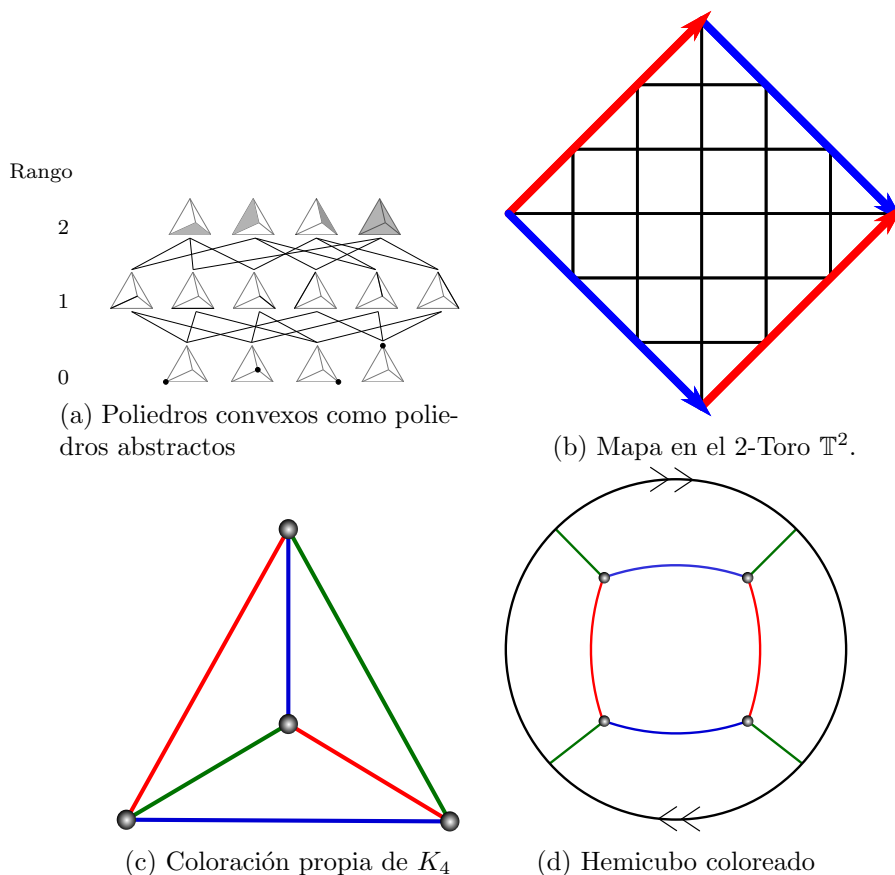


Figura 1.1

Denotaremos por $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ al conjunto de banderas del poliedro \mathcal{P} . Si $\Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ e $i \in \{0, 1, 2\}$, denotaremos por Φ^i a la bandera *i-adyacente* a Φ , es decir, la única bandera de \mathcal{P} que difiere de Φ únicamente en el elemento de rango i . Recursivamente definimos para $k \geq 2$, $\Phi^{i_1, i_2, \dots, i_k} = (\Phi^{i_1, i_2, \dots, i_{k-1}})^{i_k}$ siempre que $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{0, 1, 2\}$.

A continuación introduciremos el concepto de isomorfismo de poliedros, el cual nos permite considerar iguales dos poliedros que tienen la misma estructura combinatoria.

Definición 1.3. Si \mathcal{P} y \mathcal{Q} son poliedros, diremos que $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ es un isomorfismo de poliedros si ϕ es una biyección que preserve el orden. Es decir, $F \leq G$ implica $F\phi \leq G\phi$.

Si existe un isomorfismo entre \mathcal{P} y \mathcal{Q} , diremos que estos son isomorfos.

En este trabajo hablaremos de poliedros regulares, es decir, aquellos que tienen el mayor grado de simetría, para lo cual es importante introducir un concepto que nos permita hablar de simetría.

Definición 1.4. Si \mathcal{P} es un poliedro, un *automorfismo de \mathcal{P}* es un isomorfismo $\gamma : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$. El *grupo de automorfismos de \mathcal{P}* , denotado por $\Gamma(\mathcal{P})$, es el conjunto

$$\Gamma(\mathcal{P}) = \{ \gamma : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \mid \gamma \text{ es automorfismo} \}$$

dotado de la composición como operación.

Observe que para el caso de los poliedros convexos, las simetrías (isometrías del espacio que preservan al poliedro) se traducen en automorfismos del orden parcial correspondiente, de modo que los automorfismos son una generalización combinatoria de las simetrías. Lo mismo ocurre en las teselaciones del plano. En la sección 1.2 se discutirá el proceso inverso.

Observe que $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ por $\{F_0, F_1, F_2\}\gamma = \{F_0\gamma, F_1\gamma, F_2\gamma\}$ para $\{F_0, F_1, F_2\} \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$ y $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$. A continuación daremos algunos resultados acerca de esta acción.

Lema 1.5. Si γ es un automorfismo de un poliedro \mathcal{P} y $\Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$, entonces

$$(\Phi^i)\gamma = (\Phi\gamma)^i$$

para todo $i \in \{0, 1, 2\}$.

Demostración. Sea $i \in \{0, 1, 2\}$. Observamos que $\Phi\gamma$, $(\Phi^i)\gamma$ y $(\Phi\gamma)^i$ coinciden en todas las caras salvo tal vez la de rango i , sin embargo $(\Phi^i)\gamma \neq \Phi\gamma \neq (\Phi\gamma)^i$ de modo que, en virtud de (P3)

$$(\Phi^i)\gamma = (\Phi\gamma)^i. \quad \blacksquare$$

Recordemos que toda acción de un grupo G en un conjunto X induce una representación de G como permutaciones de X , es decir, un homomorfismo $\varphi : G \rightarrow S_X$. Si φ es inyectivo, la representación es *fiel* (también se dice que G actúa fielmente en X); en tal situación G es isomorfo a un subgrupo del grupo de permutaciones de X .

Observe que la acción de $\Gamma(\mathcal{P})$ en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ es fiel, pues si un automorfismo fija a toda las banderas, entonces fija a todos los elementos de \mathcal{P} . Además, en virtud del lema 1.5, cada automorfismo γ induce una permutación $\bar{\gamma}$ de banderas que preserva adyacencia, no es difícil probar que esto es de hecho una equivalencia, es decir, que toda permutación de banderas que preserve adyacencia induce un automorfismo.

El siguiente lema nos da una condición más fuerte que fidelidad acerca de la acción de $\Gamma(\mathcal{P})$ en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$.

Proposición 1.6. *Si \mathcal{P} es un poliedro abstracto, entonces $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa libremente en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$, es decir, $\text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(\Phi) = \{\varepsilon\}$ para toda $\Phi \in \mathcal{F}(\mathcal{P})$, con ε el automorfismo identidad.*

Demostración. Supongamos que γ es un automorfismo de \mathcal{P} que fija una bandera Φ . Sea Ψ una bandera arbitraria. Por (P2), existe una sucesión de banderas $\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_k = \Psi$ tal que Φ_{j-1} y Φ_j son i_j -adyacentes para cada $j \in \{1, \dots, k\}$; probemos que γ fija a Ψ por inducción sobre k . Si $k = 1$ entonces Φ y Ψ son adyacentes y el resultado se sigue del lema 1.5. Supongamos el resultado para toda $n < k$. Por hipótesis de inducción $\Phi_{k-1}\gamma = \Phi_{k-1}$, luego

$$\Psi\gamma = (\Phi_{k-1}^{i_k})\gamma = (\Phi_{k-1}\gamma)^{i_k} = \Phi_{k-1}^{i_k} = \Psi. \quad \blacksquare$$

Corolario 1.7. *Si \mathcal{P} es un poliedro abstracto, Φ una bandera de \mathcal{P} y $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$, entonces γ está determinado por la imagen de Φ .*

Los resultados anteriores muestran que los automorfismos en poliedros abstractos generalizan el comportamiento de las simetrías en poliedros convexos y en teselaciones del plano, donde las banderas pueden ser pensadas como triángulos determinados por el vértice, el punto medio de la arista y el centro de la cara. En el caso de los poliedros convexos la acción en las banderas es libre pues si una isometría de \mathbb{E}^3 fija una bandera, entonces fija 4 puntos no-coplanares (la bandera y el centro del poliedro) de modo que debe fijar todo punto. Algo similar sucede en las teselaciones del plano, pues si una isometría de \mathbb{E}^2 fija una bandera, entonces fija 3 puntos no-colineales.

En virtud del corolario 1.7, dadas dos banderas Φ y Ψ existe a lo más un automorfismo $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $\Phi\gamma = \Psi$. Intuitivamente, un poliedro es más simétrico entre más automorfismos tiene, lo cual motiva la definición de poliedro regular que usaremos en este trabajo.

Definición 1.8. Un poliedro \mathcal{P} es *regular* si $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa transitivamente en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$.

La definición clásica de poliedro convexo regular siempre ha incluido alguna noción de congruencia y regularidad para las caras, así como para la configuración de caras alrededor de cada vértice. De hecho, en [5, §2.1], Coxeter define un poliedro regular como aquel que tiene caras y figuras de vértice *geométricamente regulares*. Observemos que la definición 1.8 preserva esta noción clásica de regularidad, pues note que si F y G son elementos del mismo rango de un poliedro regular abstracto \mathcal{P} , entonces existe $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$ tal que $F\gamma = G$. En particular, cualesquiera dos caras son equivalentes bajo la acción de $\Gamma(\mathcal{P})$ (intuitivamente,

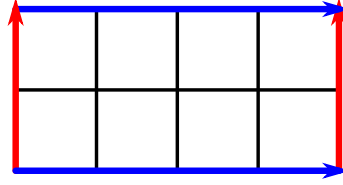


Figura 1.2

“congruentes”). Además, si F es una cara (resp. un vértice) y pensamos a F (resp. la figura de vértice de F) como gráfica, entonces $\text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(F) \leq \Gamma(\mathcal{P})$ actúa transitivamente en los *arcos* (parejas vértice-arista incidentes) de F . Por lo tanto, podemos decir que las caras y las figuras de vértice son regulares (en el sentido de que tienen máxima simetría posible), preservando la noción de regularidad de Coxeter.

Es importante mencionar que en el contexto de los poliedros abstractos no es suficiente que las caras y las figuras de vértice de un poliedro \mathcal{P} sean todas congruentes para que \mathcal{P} sea regular. Por ejemplo, el poliedro dado por el mapa en \mathbb{T}^2 de la figura 1.2 tiene caras y figuras de vértice isomorfas (todas son 4-ciclos) y no es regular, pues $\Gamma(\mathcal{P})$ no actúa transitivamente en aristas y por lo tanto no actúa transitivamente en banderas.

Ejemplo 1.9. A continuación se listan varios ejemplos clásicos de poliedros regulares abstractos sin argumentar la regularidad. En la sección 1.2 se describen a detalle muchos ejemplos más.

1. Los sólidos platónicos son regulares en el sentido abstracto.
2. Las teselaciones del plano con cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos regulares son poliedros regulares.
3. El poliedro abstracto determinado por el mapa en \mathbb{T}^2 de la figura 1.1b es regular.
4. El poliedro de la figura 1.1d es regular.

Concluiremos esta sección con algunos resultados concernientes al grupo de automorfismos de un poliedro regular.

Teorema 1.10. *Un poliedro \mathcal{P} es regular si y sólo si para alguna bandera Φ y para todo $i \in \{0, 1, 2\}$ existe un automorfismo ρ_i de \mathcal{P} tal que*

$$\Phi \rho_i = \Phi^i$$

Además, cada automorfismo ρ_i es una involución, es decir, $\rho_i^2 = \varepsilon$.

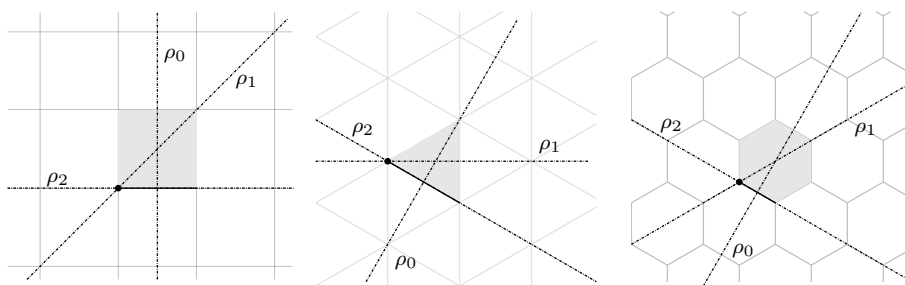


Figura 1.3: Teselaciones regulares del plano

Demostración. Supongamos que \mathcal{P} es regular, y sea $i \in \{0, 1, 2\}$. Dado que $\Gamma(\mathcal{P})$ actúa transitivamente en $\mathcal{F}(\mathcal{P})$, existe un automorfismo ρ_i de tal forma que $\Phi\rho_i = \Phi^i$. Observe que $\Phi\rho_i^2 = (\Phi^i)\rho_i = (\Phi\rho_i)^i = \Phi$ y en virtud de la proposición 1.6, $\rho_i^2 = \varepsilon$.

Supongamos ahora que para alguna bandera Φ y para todo $i \in \{0, 1, 2\}$ existe un automorfismo ρ_i de \mathcal{P} tal que $\Phi\rho_i = \Phi^i$. Sea Ψ una bandera de \mathcal{P} , probemos que existe un automorfismo γ de tal forma que $\gamma(\Phi) = \Psi$. Gracias a (P2), existe una sucesión de banderas adyacentes

$$\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_k = \Psi.$$

Procedamos por inducción sobre k . Si $k = 1$ entonces Φ y Ψ son i -adyacentes para alguna $i \in \{0, 1, 2\}$ y entonces $\Phi\rho_i = \Psi$. Supongamos cierto el resultado para toda $j < k$, entonces, por hipótesis de inducción existe un automorfismo χ de tal forma que $\Phi\chi = \Phi_{k-1}$. Sea $i \in \{0, 1, 2\}$ de tal forma que Φ_{k-1} y Ψ son i -adyacentes. Tomemos $\gamma = \rho_i\chi$ y tenemos

$$\Phi\gamma = \Phi\rho_i\chi = (\Phi^i)\chi = (\Phi\chi)^i = \Phi_{k-1}^i = \Psi. \quad \blacksquare$$

El siguiente ejemplo ilustra la regularidad de las teselaciones del plano en virtud del teorema 1.10.

Ejemplo 1.11. Las teselaciones del plano con cuadrados, triángulos y hexágonos regulares son poliedros abstractos regulares, pues basta considerar los automorfismos inducidos por las reflexiones indicadas en la figura 1.3.

De la prueba del teorema 1.10 se puede deducir que los automorfismos ρ_0, ρ_1, ρ_2 generan a $\Gamma(\mathcal{P})$. Llamaremos a dichos automorfismos *generadores distinguidos* respecto a la bandera base Φ .

Note que si \mathcal{P} es un poliedro regular, todas las caras (pensadas como subgráficas de $\text{Sk}^1(\mathcal{P})$) tienen el mismo número de aristas p (posiblemente infinito); de la misma manera, todos los vértices tienen el mismo grado q (posiblemente infinito) en $\text{Sk}^1(\mathcal{P})$. En tal situación diremos que el poliedro tiene *tipo de Schläfli* $\{p, q\}$.

El tipo de Schläfli determina por completo a los poliedros regulares convexos. Más aún, si \mathcal{P} es un poliedro convexo que tiene tipo de Schläfli, entonces \mathcal{P} es regular (ver [16, §1B]). En virtud de este resultado, normalmente se denota a los poliedros regulares convexos con sus tipos de Schläfli; esta convención será usada más adelante en este trabajo. En general, existen poliedros abstractos con tipo de Schläfli que no son regulares (ver el poliedro de la figura 1.2).

Observe que si $\Gamma(\mathcal{P})$ es el grupo de automorfismos de un poliedro regular \mathcal{P} de tipo de Schläfli $\{p, q\}$ y $\Phi = \{F_0, F_1, F_2\}$ es la bandera base, entonces los generadores distinguidos ρ_0, ρ_1 y ρ_2 satisfacen las relaciones

$$\rho_0^2 = \rho_1^2 = \rho_2^2 = (\rho_0\rho_2)^2 = (\rho_0\rho_1)^p = (\rho_1\rho_2)^q = \varepsilon. \quad (1.1)$$

Además, se puede probar que

$$\begin{aligned} \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(F_2) &= \langle \rho_0, \rho_1 \rangle \cong D_p, \\ \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(F_1) &= \langle \rho_0, \rho_2 \rangle \cong C_2 \times C_2, \\ \text{Stab}_{\Gamma(\mathcal{P})}(F_0) &= \langle \rho_1, \rho_2 \rangle \cong D_q, \end{aligned} \quad (1.2)$$

con D_p y D_q los grupos diédricos en p y q puntos, respectivamente, y C_2 el grupo cíclico de orden 2 (ver [16, Proposición 2B7]).

En virtud de la ecuación (1.1) el grupo de automorfismos de un poliedro regular de tipo de Schläfli $\{p, q\}$ es un cociente del grupo de Coxeter $[p, q]$ definido por

$$[p, q] = \langle r_0, r_1, r_2 : r_0^2 = r_1^2 = r_2^2 = (r_0r_2)^2 = (r_0r_1)^p = (r_1r_2)^q = \varepsilon \rangle.$$

De hecho, en el caso de los sólidos platónicos, los grupos $[3, 3]$, $[3, 4]$, $[4, 3]$, $[3, 5]$ y $[5, 3]$ son isomorfos a los grupos de automorfismos del tetraedro, octaedro, cubo, icosaedro y dodecaedro, respectivamente; de manera similar, los grupos de automorfismos de las teselaciones regulares del plano con cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos regulares tienen como grupo de automorfismos los grupos $[4, 4]$, $[3, 6]$ y $[6, 3]$, respectivamente. El isomorfismo mencionado viene dado por $\rho_i \mapsto r_i$ para $i \in \{0, 1, 2\}$ (ver [16, Teorema 3A5]). Además, es claro que $[p, q] \cong [q, p]$, de modo que usualmente trabajaremos únicamente con uno de los dos.

Una consecuencia de la ecuación (1.2) es la *propiedad de la intersección*:

$$\langle \rho_i : i \in I \rangle \cap \langle \rho_j : j \in J \rangle = \langle \rho_k : k \in I \cap J \rangle \quad (1.3)$$

para todos $I, J \subseteq \{0, 1, 2\}$.

Un grupo generado por involuciones ρ_0, ρ_1, ρ_2 que satisfacen las ecuaciones (1.1) y (1.3) es un *C-grupo lineal de rango 3*. Los grupos de Coxeter $[p, q]$ son C-grupos lineales. Todo grupo de automorfismos de un poliedro regular es un C-grupo lineal. Se puede probar que todo C-grupo lineal es el grupo de automorfismos de un poliedro regular abstracto, si el lector está interesado en esto, deberá consultar [16, §2E].

1.2. Realizaciones euclidianas de poliedros regulares

En esta sección revisaremos el concepto de realización euclidiana de un poliedro, el cual sirve para pasar del concepto abstracto de poliedro a un objeto geométrico. Daremos varios ejemplos y revisaremos algunas construcciones clásicas. Si el lector está interesado en profundizar en esta parte de la teoría deberá consultar [16, §5A, §7E]

Definición 1.12. Si \mathcal{P} es un poliedro abstracto y denotamos por \mathcal{P}_0 el conjunto de vértices, una *realización* de \mathcal{P} en el espacio euclidiano \mathbb{E}^3 es una función $\beta : \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathbb{E}^3$

Observe que no es claro que la definición anterior rescate por completo la estructura de \mathcal{P} pues no considera elementos de \mathcal{P} de rango distinto que 0. Sin embargo si $\beta_0 = \beta$ es una realización de \mathcal{P} , \mathcal{P}_i es el conjunto de elementos de rango i de \mathcal{P} y definimos V_0 como la imagen de \mathcal{P}_0 , es posible definir recursivamente, para $i \in \{1, 2\}$, $\beta_i : \mathcal{P}_i \rightarrow V_i$ con $V_i \subseteq 2^{V_{i-1}}$ dado por

$$F\beta_i = \{G\beta_{i-1} : G \in \mathcal{P}_{i-1} \text{ y } G \leq F\}.$$

Es decir, las aristas de \mathcal{P} se realizan como la pareja de vértices incidentes a ellas y las caras como el conjunto de aristas incidentes a ellas.

Definición 1.13. Si β es una realización de un poliedro \mathcal{P} diremos que β es *discreta* si V_0 es un conjunto discreto de \mathbb{E}^3 . La realización β es *fiel* si las funciones β_0 , β_1 y β_2 son inyectivas.

Cuando no haya posibilidad de confusión, si β es una realización fiel de \mathcal{P} nos referiremos indistintamente como los vértices de \mathcal{P} tanto a los elementos del orden parcial como a sus imágenes bajo β_0 . Dado que en \mathbb{E}^3 existe exactamente un segmento de recta entre dos puntos distintos, en el caso de que \mathcal{P} sea fielmente realizado, podemos identificar cada arista con el segmento determinado por sus vértices.

En el contexto anterior, las funciones β_0 y β_1 inducen una realización geométrica de la gráfica $\text{Sk}^1(\mathcal{P})$. Esta realización no necesariamente es un encaje, pues las aristas se pueden intersectar en puntos que no sean vértices. En el capítulo 3 se usará esta idea para generalizar el concepto de realización al 3-toro.

Además de la estructura combinatoria de un poliedro, nos interesa hablar de las simetrías geométricas del mismo. Para ello observe que si $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$, entonces γ induce una permutación de los vértices de \mathcal{P} y por lo tanto, de $V_0 := \mathcal{P}_0\beta$. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 1.14. Una realización β de un poliedro \mathcal{P} es *simétrica* si toda permutación de V_0 inducida por un automorfismo γ se extiende a una isometría de \mathbb{E}^3 .

Si se supone que $\text{Aff}(V_0)$, el casco afín de V_0 , es \mathbb{E}^3 entonces la manera de extender estas permutaciones a isometrías es única. En tal caso, las isometrías que preservan a \mathcal{P} forman su *grupo de simetrías*, denotado por $G(\mathcal{P})$. Observe que si la realización de \mathcal{P} es simétrica, $G(\mathcal{P})$ induce una representación euclidiana de $\Gamma(\mathcal{P})$, es decir, un homomorfismo de $\Gamma(\mathcal{P})$ en $\mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$, el grupo de isometrías de \mathbb{E}^3 . En el caso de que la realización sea fiel, dicho morfismo es inyectivo, es decir, la representación es *fiel*.

Si $\text{Aff}(V_0) \subsetneq \mathbb{E}^3$, se puede pensar que $\text{Aff}(V_0)$ está encajado en \mathbb{E}^3 y definir una manera canónica de extender las isometrías de $\text{Aff}(V_0)$ a isometrías de \mathbb{E}^3 (ver proposición 2.12) y así $G(\mathcal{P})$ está bien definido para toda realización β .

En el caso en que \mathcal{P} sea un poliedro regular realizado simétricamente, denotaremos por R_0 , R_1 y R_2 las isometrías correspondientes a los generadores ρ_0 , ρ_1 y ρ_2 , respectivamente.

Es importante mencionar que en este capítulo estamos interesados únicamente en realizaciones fieles, discretas y simétricas, de modo que en lo que resta de esta sección, a menos que se indique lo contrario, siempre que se use el término realización se entenderá realización fiel, discreta y simétrica.

Clasificación de poliedros regulares en \mathbb{E}^3

El problema de clasificar los poliedros regulares ha sido abordado desde la antigüedad y los resultados se han ido ampliando en función de la definición de poliedro regular que se use. La clasificación de los poliedros regulares en \mathbb{E}^3 presentada en este trabajo fue hecha por B. Grünbaum y A. Dress (ver [11, 8, 9]). A pesar de que Dress trabajó con los poliedros de una manera combinatoria en [8, 9], en este trabajo seguiremos las ideas de P. McMullen y E. Schulte, quienes en [15] llegan a los mismos resultados de Dress. Por tal motivo, este artículo junto con [16, §7E] deberán ser la principal referencia para esta sección.

La estrategia seguida por McMullen y Schulte en [15] para llegar a la clasificación consiste en listar varias familias de poliedros de acuerdo a sus propiedades geométricas y combinatorias. Finalmente estudian los posibles grupos de isometrías generados por involuciones hasta agotar las posibilidades y así concluir con la clasificación. En este trabajo no entraremos en todo detalle, simplemente describiremos los poliedros y sus propiedades, y daremos generadores para sus grupos de simetrías.

Antes de proceder con la descripción de los poliedros recordaremos dos construcciones clásicas: la *dualidad* y la construcción del *Petrial*. Estas (y otras) construcciones están descritas algebraicamente y a detalle en [16, §7B], sin embargo en este trabajo nos enfocaremos en las interpretaciones geométricas y combinatorias de dichas construcciones.

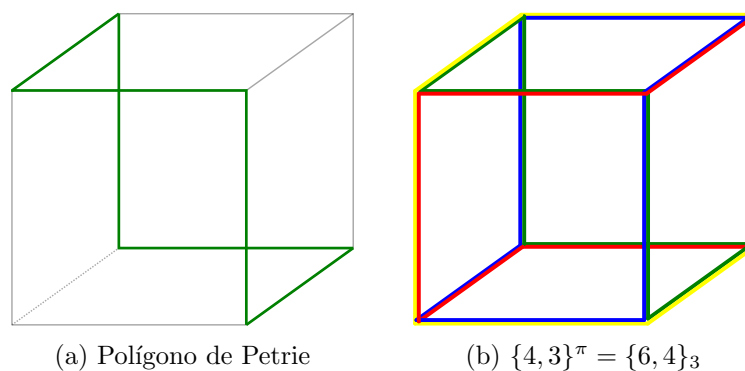


Figura 1.4

Dualidad (δ): En términos del orden parcial ésta es una construcción muy sencilla, los elementos de \mathcal{P}^δ son los mismos que los de \mathcal{P} , solo resta invertir el orden, es decir, $F \leq_\delta G$ en \mathcal{P}^δ si y solo si $F \geq G$ en \mathcal{P} . De esta manera los vértices de \mathcal{P}^δ corresponden a las caras de \mathcal{P} , las aristas de \mathcal{P}^δ y las de \mathcal{P} son las mismas y las caras de \mathcal{P}^δ corresponden a los vértices de \mathcal{P} . Observe que si \mathcal{P} es regular y (ρ_0, ρ_1, ρ_2) son los generadores distinguidos de $\Gamma(\mathcal{P})$ entonces \mathcal{P}^δ es regular y (ρ_2, ρ_1, ρ_0) son los generadores de $\Gamma(\mathcal{P}^\delta)$.

Construcción del Petrial (π): El *Petrial* de un poliedro \mathcal{P} , denotado \mathcal{P}^π se puede describir de manera sencilla en términos de $\text{Sk}^1(\mathcal{P})$. Los vértices y las aristas de \mathcal{P}^π coinciden con los vértices y las aristas de \mathcal{P} , sin embargo, las caras de \mathcal{P}^π son los *polígonos de Petrie* de \mathcal{P} , es decir, los caminos de aristas de $\text{Sk}^1(\mathcal{P})$ determinados por la propiedad de que cualesquiera dos pero no tres aristas consecutivas pertenecen a la misma cara de \mathcal{P} (ver ejemplo 1.2.(iv) y figura 1.4). Es importante mencionar que \mathcal{P}^π no siempre es un poliedro abstracto; sin embargo, en todas las situaciones en las que se mencione la construcción del Petrial en este trabajo el resultado es un poliedro. En términos del grupo de automorfismos, si \mathcal{P}^π es un poliedro regular y (ρ_0, ρ_1, ρ_2) son los generadores distinguidos de $\Gamma(\mathcal{P})$ entonces \mathcal{P}^π es regular y $(\rho_0\rho_2, \rho_1, \rho_2)$ actúan como generadores de $\Gamma(\mathcal{P}^\pi)$ y por lo tanto $\Gamma(\mathcal{P}) = \Gamma(\mathcal{P}^\pi)$.

Observe que el Petrial es una construcción no solo combinatoria, sino geométrica. Es decir, si \mathcal{P} es un poliedro tal que \mathcal{P}^π es un poliedro, toda realización fiel y discreta de \mathcal{P} induce una realización fiel y discreta de \mathcal{P}^π . En cambio la dualidad ofrece muy poco en el ámbito geométrico para poliedros no convexos, por ejemplo, el poliedro $\{\infty, 3\}^{(b)}$ descrito en la página 21 tiene realización geométrica fiel y discreta, sin embargo $(\{\infty, 3\}^{(b)})^\delta$ no tiene realización fiel y discreta (al menos, no simétrica) pues cada vértice tiene grado infinito, lo cual lleva a una cantidad infinita de puntos contenidos en una esfera y por lo tanto, el conjunto de vértices no puede ser discreto. Para detalles acerca del comportamiento

geométrico de la dualidad en poliedros convexos ver [12, §3.4].

Procedamos ahora a describir los poliedros regulares en \mathbb{E}^3 . Como se mencionó antes, los convexos regulares los identificaremos con su tipo de Schläfli. En general, seguiremos la manera en la que los dividieron McMullen y Schulte en [15] en familias de poliedros así como la notación que usaron para nombrar a cada uno, la cual generaliza el tipo de Schläfli y fue usada por Coxeter en [5] para algunos de los poliedros descritos en este trabajo. Si el lector está interesado en una descripción detallada de los símbolos, le sugerimos revisar [15, p. 457].

Poliedros Regulares Finitos

De los poliedros clasificados en [15], 18 de ellos son finitos. No entraremos en mucho detalle con ellos pues están descritos ampliamente en la literatura (ver, por ejemplo [5, p. 292]). Solo daremos coordenadas a sus vértices y los generadores de sus grupos de simetría, así como algunas figuras.

Naturalmente, los *Sólidos Platónicos* (figura 1.5) forman parte de la familia de poliedros regulares finitos. Como ya se mencionó antes, el tetraedro tiene grupo de simetrías isomorfo a $[3, 3]$; el grupo de simetrías del octaedro y del cubo es isomorfo a $[3, 4]$ y el del icosaedro y del dodecaedro a $[3, 5]$.

En lo sucesivo no haremos distinción entre los grupos abstractos de Coxeter finitos $[3, 3]$, $[3, 4]$, y $[3, 5]$ y sus representaciones euclidianas inducidas por las simetrías de los sólidos platónicos.

En la tabla 1.1 se dan explícitamente coordenadas a los vértices y los generadores del grupo de simetrías de los sólidos platónicos donde

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{2}(\tau x + y + \tau^{-1}z, x - \tau^{-1}y - \tau z, \tau^{-1}x - \tau y + z)$$

$$\text{y } \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Además de los sólidos platónicos, en la lista de poliedros regulares finitos están los *Sólidos de Kepler-Poinsot*: el *gran icosaedro* $\{3, \frac{5}{2}\}$ (figura 1.6a), el *gran dodecaedro* $\{5, \frac{5}{2}\}$ (figura 1.6b) y sus duales, el *gran dodecaedro estrellado* $\{\frac{5}{2}, 3\}$ (figura 1.6c) y el *pequeño dodecaedro estrellado* $\{\frac{5}{2}, 5\}$ (figura 1.6d), los cuales se derivan del dodecaedro y el icosaedro. Para detalles acerca de la construcción de estos poliedros ver [5, §6.2, §6.3].

Se puede probar que todos estos poliedros tienen como grupo de simetrías a $[3, 5]$.

Con los sólidos platónicos y los sólidos de Kepler-Poinsot hemos listado 9 poliedros regulares finitos. Durante buena parte del siglo XX estos fueron considerados todos los

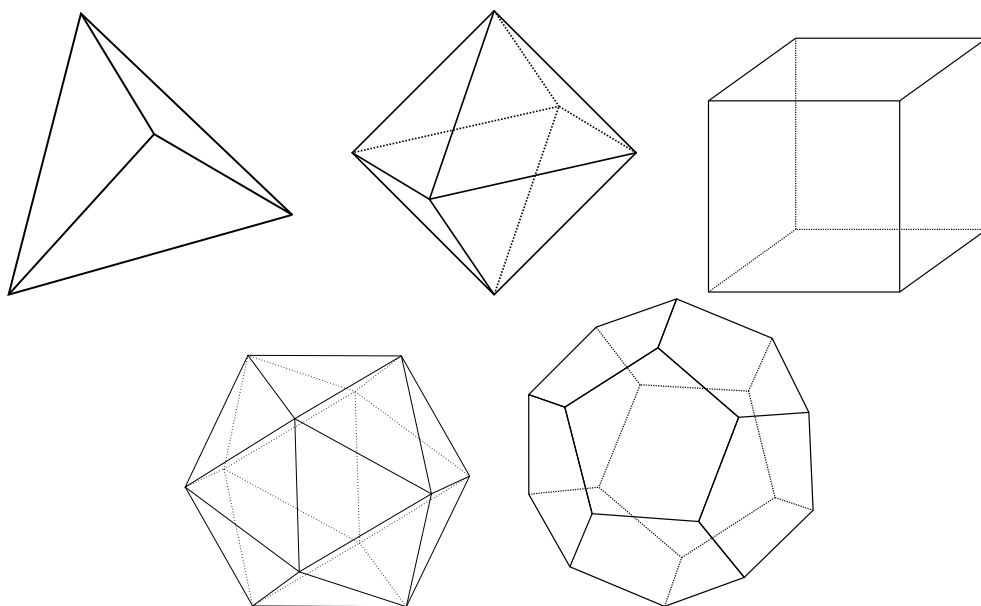


Figura 1.5: Sólidos Platónicos

Poliedro \mathcal{P}	Vértices	Vértice Base	Generadores de $G(\mathcal{P})$		
			$R_0 : (x, y, z) \mapsto$	$R_1 : (x, y, z) \mapsto$	$R_2 : (x, y, z) \mapsto$
$\{3, 3\}$	$\{(1, 1, 1), (-1, -1, 1),$ $(-1, 1, -1), (1, -1, -1)\}$	$(1, 1, 1)$	$(-y, -x, z)$	(z, y, x)	(y, x, z)
$\{3, 4\}$	$\{\pm(1, 0, 0), \pm(0, 1, 0), \pm(0, 0, 1)\}$	$(0, 0, 1)$	(z, y, x)	(y, x, z)	$(x, -y, z)$
$\{4, 3\}$	$\{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$	$(1, 1, 1)$	$(x, -y, z)$	(y, x, z)	(z, y, x)
$\{3, 5\}$	$\{(0, \pm 1, \pm \tau), (\pm \tau, 0, \pm 1), (\pm 1, \pm \tau, 0)\}$	$(\tau, 0, 1)$	$(x, y, -z)$	(ξ_1, ξ_2, ξ_3)	$(x, -y, z)$
$\{5, 3\}$	$\{(\pm 1, \pm 1, \pm 1), (0, \pm \tau, \pm \tau^{-1}),$ $(\pm \tau^{-1}, 0, \pm \tau), (\pm \tau, \pm \tau^{-1}, 0)\}$	$(\tau, \tau^{-1}, 0)$	$(x, -y, z)$	(ξ_1, ξ_2, ξ_3)	$(x, y, -z)$

Tabla 1.1: Vértices y grupo de simetrías de los sólidos platónicos

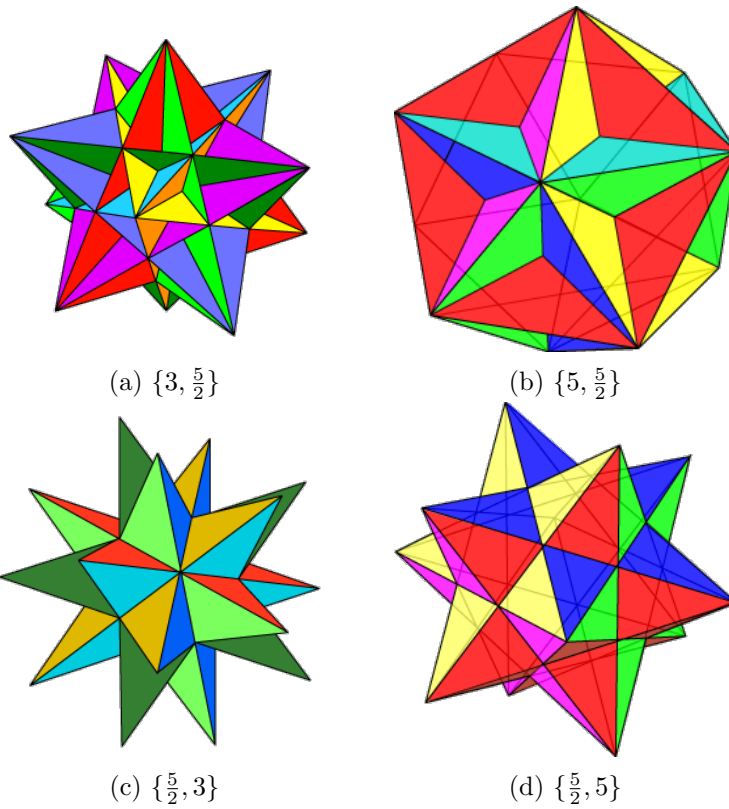


Figura 1.6: Sólidos de Kepler-Poinsot

poliedros regulares finitos en \mathbb{E}^3 (ver [5, Tabla I]). Fue hasta hasta que Grünbaum en [11] permitió que las caras de un poliedro no fueran planas e introdujo los Petriales, que aparecieron los restantes 9 poliedros regulares finitos, que son precisamente los Petriales de los 9 descritos anteriormente.

Concluimos con los poliedros regulares finitos en \mathbb{E}^3 con los diagramas de las ecuaciones (1.4) a (1.6), los cuales fueron introducidos por McMullen y Schulte en [15] y agrupan los 18 poliedros finitos de acuerdo a su grupo de simetrías. En estos diagramas δ y π relacionan los poliedros a través de las construcciones de dualidad y del Petrial descritas anteriormente. Además, φ_2 representa la construcción de *Facetting* usada por Coxeter en [5, §6.3] para construir los sólidos de Kepler-Poinsot y descrita algebraica y combinatoriamente en [16, §7B].

Simetría de [3, 3]

$$\{3, 3\} \xleftrightarrow{\pi} \{4, 3\}_3 \quad (1.4)$$

Simetría de [3, 4]

$$\{6, 4\}_3 \xleftrightarrow{\pi} \{3, 4\} \xleftrightarrow{\delta} \{4, 3\} \xleftrightarrow{\pi} \{6, 3\}_4 \quad (1.5)$$

Simetría de [3, 5]

$$\begin{array}{ccccccc} \{10, 5\} & \xleftrightarrow{\pi} & \{3, 5\} & \xleftrightarrow{\delta} & \{5, 3\} & \xleftrightarrow{\pi} & \{10, 3\} \\ \uparrow \varphi_2 & & \uparrow \varphi_2 & & & & \\ \{6, \frac{5}{2}\} & \xleftrightarrow{\pi} & \{5, \frac{5}{2}\} & \xleftrightarrow{\delta} & \{\frac{5}{2}, 5\} & \xleftrightarrow{\pi} & \{6, 5\} \\ & & & & \uparrow \varphi_2 & & \uparrow \varphi_2 \\ \{\frac{10}{3}, 3\} & \xleftrightarrow{\pi} & \{\frac{5}{2}, 3\} & \xleftrightarrow{\delta} & \{3, \frac{5}{2}\} & \xleftrightarrow{\pi} & \{\frac{10}{3}, \frac{5}{2}\} \end{array} \quad (1.6)$$

Es importante mencionar que en los diagramas de (1.4), (1.5) y (1.6) se usa una generalización del tipo de Schläfli distinta a la noción introducida en la página 7. Esta notación, así como la usada en los diagramas de (1.7),(1.8) y (1.9) fue tomada de [15], donde se explica a detalle. Para el caso de los sólidos de Kepler-Poinsot la notación coincide con la usada por Coxeter en [5, §6.2].

Finalmente enunciamos el teorema de clasificación de poliedros regulares finitos en \mathbb{E}^3 tal y como aparece en [15, p. 461].

Teorema 1.15. *La lista de 18 poliedros regulares finitos en (1.4), (1.5) y (1.6) es completa.*

Poliedro \mathcal{P}	Vértices	Vértice Base	Generadores de $G(\mathcal{P})$		
			$R_0 : (x, y) \mapsto$	$R_1 : (x, y) \mapsto$	$R_2 : (x, y) \mapsto$
$\{4, 4\}$	\mathbb{Z}^2	o	$(1 - x, y)$	(y, x)	$(x, -y)$
$\{3, 6\}$	X	o	$(1 - x, y)$	$\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)$	$(x, -y)$
$\{6, 3\}$	$\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) + X\right) \cup \left(\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}\right) + X\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$(x, -y)$	$\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)$	$(1 - x, y)$

Tabla 1.2: Vértices y grupo de simetrías de los poliedros regulares planos

Poliedros Regulares Planos y Mezclados

Como se mencionó en el ejemplo 1.2.(ii), las teselaciones del plano euclidiano \mathbb{E}^2 son poliedros abstractos. Además, en virtud del ejemplo 1.11, la teselación con cuadrados, que es auto dual, así como la teselación con triángulos equiláteros y su dual, la teselación con hexágonos regulares son poliedros regulares; de hecho, sus grupos de simetría son $[4, 4]$ y $[3, 6]$, respectivamente ([16, Teorema 3A5]).

Precisamente las 3 teselaciones regulares del plano, junto con sus Petriales, los cuales tienen caras infinitas, constituyen los 6 poliedros planos. De manera análoga a la sección anterior, resumimos esto en los siguientes diagramas.

Simetría de $[4, 4]$

$$\{4, 4\} \xleftarrow{\pi} \{\infty, 4\}_4 \quad (1.7)$$

Simetría de $[3, 6]$

$$\{\infty, 6\}_3 \xleftarrow{\pi} \{3, 6\} \xleftarrow{\delta} \{6, 3\} \xleftarrow{\pi} \{\infty, 3\}_6 \quad (1.8)$$

En la tabla 1.2 damos explícitamente coordenadas para los vértices de las teselaciones así como los generadores para su grupo de simetrías. En dicha tabla tenemos

$$X = \left\{ \left(a, 0 \right) + \left(\frac{b}{2}, \frac{\sqrt{3}b}{2} \right) : a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Es importante señalar que por ahora pensaremos los poliedros planos realizados en \mathbb{E}^2 , más adelante retomaremos el tema de encajar las realizaciones en \mathbb{E}^3 y extender las simetrías de los poliedros planos a isometrías de \mathbb{E}^3 , para ello en la sección 2.1 discutiremos de manera detallada la estructura de $\mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$.

Finalmente, concluimos con los poliedros planos enunciando el siguiente teorema del cual se puede encontrar una prueba en [15, p. 464].

Teorema 1.16. *La lista de 6 poliedros regulares planos de (1.7) y (1.8) es completa.*

Diremos que una realización β de un poliedro \mathcal{P} es *mezclada* si existen dos subespacios L y M complementarios y mutuamente ortogonales tales que $G(\mathcal{P})$ permuta los trasladados de L (y por lo tanto de M). Diremos simplemente que \mathcal{P} es *mezclado* si está realizado por una realización mezclada.

De acuerdo con [15] existen 12 poliedros mezclados en \mathbb{E}^3 . Los poliedros mezclados están relacionados con las teselaciones regulares del plano. Tres de ellos, los poliedros $\{4, 4\}\#\{\}$, $\{6, 3\}\#\{\}$ y $\{3, 6\}\#\{\}$, tienen caras finitas no-planas. Otros tres, los poliedros $\{4, 4\}\#\{\infty\}$, $\{6, 3\}\#\{\infty\}$ y $\{3, 6\}\#\{\infty\}$, tienen caras infinitas helicoidales. Los otros seis son simplemente los Petriales de los seis mencionados anteriormente y sus caras son zig-zags infinitos. A continuación describimos la construcción de dichos poliedros; la notación y nomenclatura ha sido tomada de [15].

Observe que $\text{Sk}^1(\{4, 4\})$ es una gráfica bipartita. El poliedro $\{4, 4\}\#\{\}$ se construye deformando los cuadrados de $\{4, 4\}$ en cuadrados no planos (los cuales serán las caras de $\{4, 4\}\#\{\}$) al levantar por un parámetro real α una de las partes de los vértices de $\text{Sk}^1(\{4, 4\})$ ortogonalmente respecto al plano que contiene a la teselación (figura 1.7a).

Dado que $\text{Sk}^1(\{6, 3\})$ es también una gráfica bipartita, podemos hacer la misma construcción que para $\{4, 4\}\#\{\}$. El poliedro resultante tendrá hexágonos no planos como caras (figura 1.7b).

En el caso de $\{3, 6\}$ no se puede usar la construcción anterior pues $\text{Sk}^1(\{3, 6\})$ no es una gráfica bipartita. Los vértices de $\{3, 6\}\#\{\}$ son dos copias paralelas de los vértices de $\{3, 6\}$ en planos a distancia $\alpha \in \mathbb{R}$. Las caras de $\{3, 6\}\#\{\}$ son hexágonos no planos que dan dos vueltas a cada uno de los prismas triangulares determinados por dos caras paralelas de las copias de $\{3, 6\}$ (figura 1.7c).

El poliedro $\{4, 4\}\#\{\infty\}$ tiene como caras hélices sobre cuadrados. Se puede construir a partir de la teselación con cuadrados levantando, sobre cada cuadrado, una torre de prismas de altura α y envolviendo sobre cada torre una hélice (figura 1.8a), de tal forma que dos hélices sobre torres adyacentes difieran por una reflexión en el plano que contiene a la pared de las torres. Con esta construcción, las hélices que quedan sobre cuadrados de la teselación que comparten arista giran en sentidos contrarios, de modo que el poliedro tiene tanto hélices derechas como hélices izquierdas (figura 1.8b).

Para el poliedro $\{3, 6\}\#\{\infty\}$ se puede realizar la misma construcción que para el poliedro $\{4, 4\}\#\{\infty\}$ pero esta vez tomando la teselación con triángulos equiláteros como base. El resultado es un poliedro cuyas caras son hélices sobre triángulos de tal manera que si dos hélices están sobre dos triángulos de la teselación que comparten arista, entonces difieren por una reflexión y por lo tanto giran en sentidos opuestos.

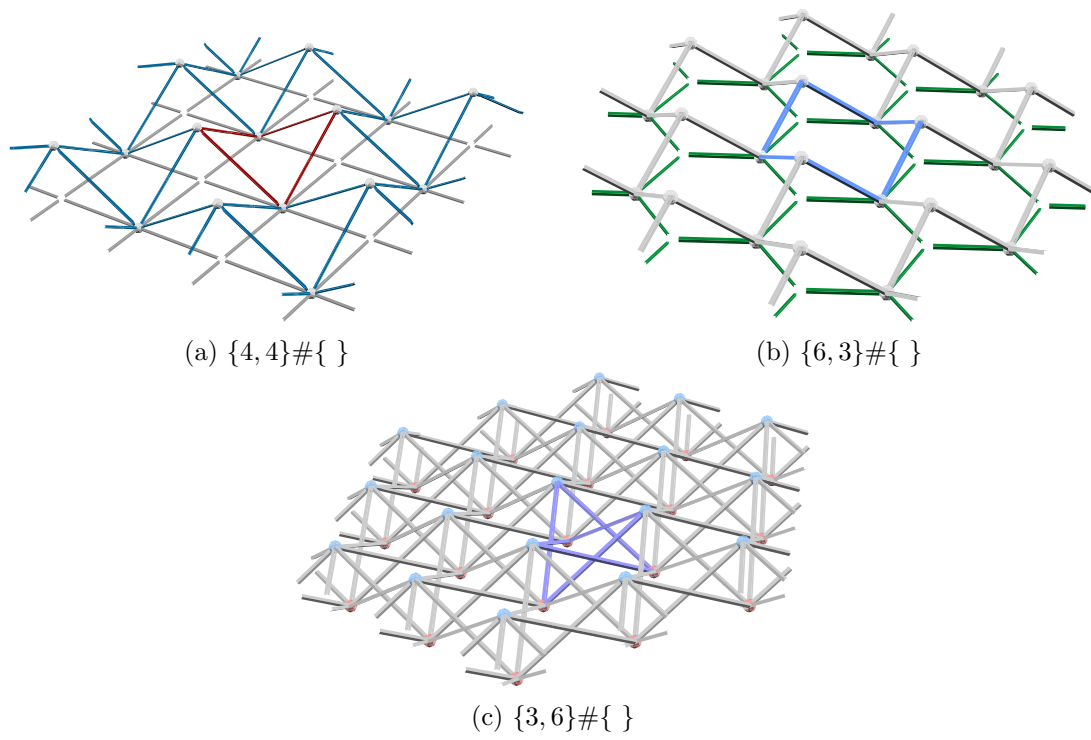


Figura 1.7

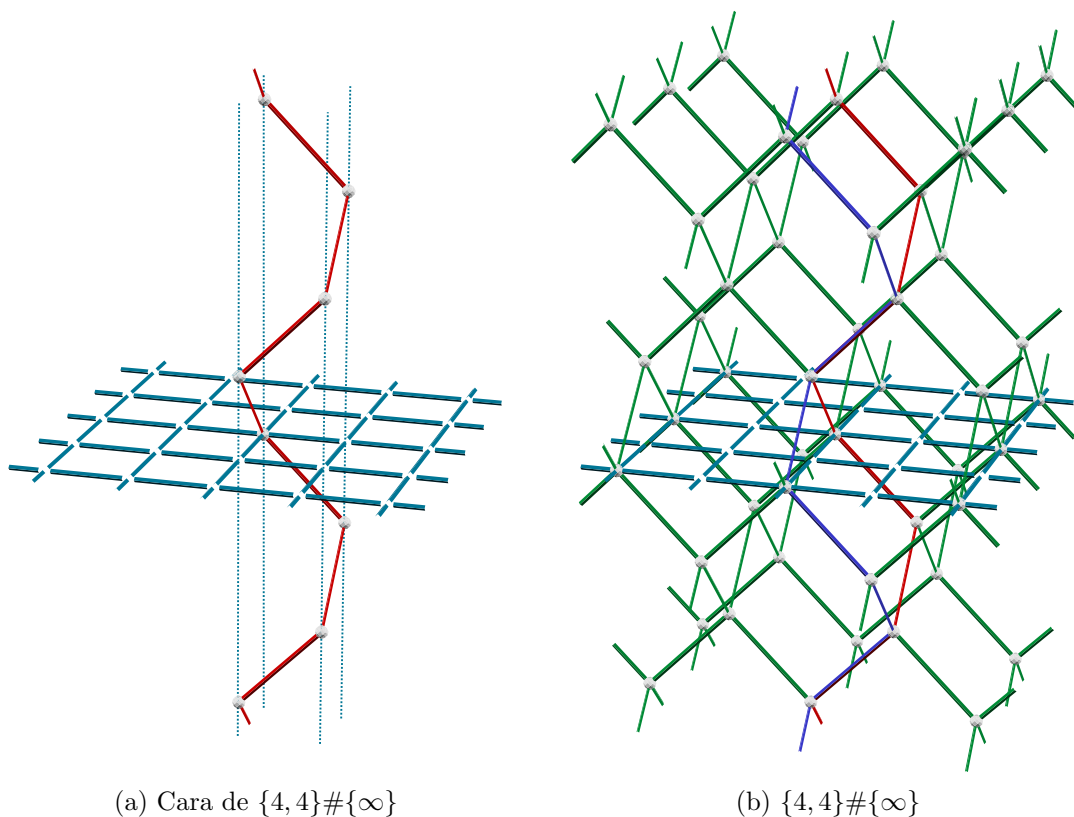


Figura 1.8

Realizar exactamente la misma construcción sobre la teselación de hexágonos es imposible, pues el conjunto de caras de esta teselación, a diferencia de las otras dos, no es bipartito; es decir, las caras de $\{6, 3\}$ no se pueden colorear con dos colores de tal manera que dos caras que comparten arista tengan distinto color. Esto se resuelve levantando una hélice en cada sentido sobre cada uno de los hexágonos de tal forma que las reflexiones por aristas de $\{6, 3\}$ se extiendan a reflexiones por planos ortogonales al plano que contiene a $\{6, 3\}$. El resultado es el poliedro $\{6, 3\} \# \{\infty\}$.

Como se mencionó antes, los otros 6 poliedros mezclados son los Petriales de los poliedros descritos en los párrafos anteriores. En la tabla 1.3 se muestran los generadores de los grupos de simetría de los poliedros regulares mezclados.

En [15, Teorema 5.7] McMullen y Schulte prueban que la lista de 12 poliedros mezclados mencionados anteriormente es completa.

Poliedro \mathcal{P}	Vértice Base	Generadores de $G(\mathcal{P})$		
		$R_0 : (x, y, z) \mapsto$	$R_1 : (x, y, z) \mapsto$	$R_2 : (x, y, z) \mapsto$
$\{4, 4\} \# \{ \}$	o	$(1 - x, y, \alpha - z)$	(y, x, z)	$(x, -y, z)$
$\{6, 3\} \# \{ \}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$	$(x, -y, \alpha - z)$	$\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, z\right)$	$(1 - x, y, z)$
$\{3, 6\} \# \{ \}$	o	$(1 - x, y, \alpha - z)$	$\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, z\right)$	$(x, -y, z)$
$\{4, 4\} \# \{\infty\}$	o	$(1 - x, y, \alpha - z)$	$(y, x, -z)$	$(x - y, z)$
$\{6, 3\} \# \{\infty\}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$	$(x, -y, \alpha - z)$	$\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, -z\right)$	$(1 - x, y, z)$
$\{3, 6\} \# \{\infty\}$	o	$(1 - x, y, \alpha - z)$	$\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, -z\right)$	$(x, -y, z)$

Tabla 1.3: Vértices y grupo de simetrías de los poliedros regulares mezclados

Poliedros Regulares Infinitos Puros

Como se mencionó antes, un poliedro es mezclado si es producto de una realización mezclada. Si este no es el caso, es decir, si la realización de un poliedro no es mezclada, diremos que la realización y el poliedro son *puros*.

Los poliedros finitos descritos anteriormente son poliedros puros. A continuación describiremos los poliedros infinitos puros de \mathbb{E}^3 de manera geométrica. Además en la tabla 1.4 se dan generadores para los grupos de simetría de dichos poliedros.

Comenzaremos la descripción por los *poliedros de Petrie-Coxeter* descubiertos precisamente por J.F. Petrie y H.S.M. Coxeter a principio del siglo XX y descritos a detalle en [4].

El poliedro $\{4, 6|4\}$ tiene como vértices y aristas los vértices y aristas de la teselación $\{4, 3, 4\}$ de \mathbb{E}^3 con cubos de lado 1 con vértices de coordenadas enteras. Las caras de $\{4, 6|4\}$ son cuadrados cuyo centro es de la forma $(\frac{1}{2} + m + n, \frac{1}{2} + m - n, k)$, $(\frac{1}{2} + m + n, k, \frac{1}{2} + m - n)$ o $(k, \frac{1}{2} + m + n, \frac{1}{2} + m - n)$ para algunos enteros m, n, k . De esta manera, alrededor de cada vértice hay 6 cuadrados acomodados a manera de zig-zag (figura 1.9a). Observe que con esta construcción, tres cuartas partes de los cubos de la teselación $\{4, 3, 4\}$ tienen 4 caras en $\{4, 6|4\}$, mientras que de la cuarta parte restante no se usa una sola cara para esta construcción.

El poliedro $\{6, 4|4\}$ es el dual de $\{4, 6|4\}$ y se puede construir como sigue: los vértices de $\{6, 4|4\}$ son los centros de las caras de $\{4, 6|4\}$, dos vértices de $\{6, 4|4\}$ forman una arista si las caras correspondientes comparten una arista en $\{4, 6|4\}$; las caras de $\{6, 4|4\}$ son los hexágonos determinados por los centros de las caras incidentes a un vértice en común de $\{4, 6|4\}$. El resultado de esta construcción es un poliedro cuyos elementos son los

vértices, las aristas y los hexágonos de la teselación uniforme de \mathbb{E}^3 con octaedros truncados (figura 1.9b).

El poliedro $\{6, 6|3\}$ puede ser descrito de manera similar a $\{6, 4|4\}$, pues consta de los vértices, las aristas y los hexágonos de la teselación uniforme de \mathbb{E}^3 con tetraedros regulares y tetraedros truncados. Así, alrededor de cada vértice hay 6 hexágonos acomodados a manera de zig-zag (figura 1.9c).

Las construcciones anteriores inducen otras tres realizaciones de poliedros infinitos puros: $\{\infty, 6\}_{4,4}$, $\{\infty, 4\}_{6,4}$ y $\{\infty, 6\}_{6,3}$. Estos poliedros son simplemente los Petriales de los poliedros de Petrie-Coxeter. Las caras de éstos son helices infinitas.

Además de los poliedros de Petrie-Coxeter y sus Petriales existen 6 poliedros infinitos puros más, tres con caras finitas y tres más con caras helicoidales. Estos son los poliedros $\{6, 6\}_4$, $\{4, 6\}_6$, $\{6, 4\}_6$, $\{\infty, 4\}_{*,*3}$, $\{\infty, 3\}^{(a)}$ y $\{\infty, 3\}^{(b)}$ los cuales describimos a continuación.

Construyamos el 1-esqueleto de $\{6, 6\}_4$ como sigue: para cada cara de $\{4, 6|4\}$ tracemos una diagonal en dirección $((-1)^k, 1, 0)$ si la cara está en el plano $z = k$, en dirección $((-1)^k, 0, 1)$ si la cara está en el plano $y = k$ y con dirección $(0, (-1)^k, -1)$ si la cara está en el plano $x = k$. Éstas diagonales serán las aristas de $\text{Sk}^1(\{6, 6\}_4)$ (figura 1.10). Los vértices son los vértices de $\{4, 6|4\}$ determinados por estas diagonales, es decir, los puntos de \mathbb{E}^3 cuya suma de coordenadas es par. Las caras de $\{6, 6\}_4$ son los hexágonos determinados por las 6 diagonales de las caras incidentes a los vértices de $\{4, 6|4\}$ que no son vértices de $\{6, 6\}_4$ (figura 1.11a).

El poliedro $\{4, 6\}_6$ es el Petrial del poliedro $\{6, 6\}_4$, de modo que comparte el 1-esqueleto ilustrado en la figura 1.10. Como se mencionó antes, los cuadrados de $\{4, 6|4\}$ son caras de tres cuartas partes de los cubos de la teselación de \mathbb{E}^3 . Luego de observar esto, se puede notar que las caras de $\{4, 6\}_6$ son precisamente los cuadriláteros determinados por las 4 diagonales de las caras de cada uno de los cubos de la teselación $\{4, 3, 4\}$ que tienen 4 caras en $\{4, 6|4\}$ (figura 1.11b).

Describiremos el poliedro $\{\infty, 3\}^{(b)}$ en términos de su proyección al plano $z = 0$. Consideremos la torre de cubos de la teselación $\{4, 3, 4\}$ que se levanta sobre el cuadrado de centro $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$. Construyamos sobre esta torre una hélice H de tal forma que los primeros vértices de esta hélice de coordenada z no negativa sean o , $(0, -1, 1)$, $(-1, -1, 2)$, $(-1, 0, 3)$ y $(0, 0, 4)$ (figura 1.12a). Traslademos H por el grupo generado por las traslaciones respecto a los vectores de la forma $(\pm 2, \pm 2, \pm 2)$, de tal manera que las aristas de las hélices se proyectan en los cuadrados de la figura 1.12b. Las aristas de $\{\infty, 3\}^{(b)}$ que no se proyectan sobre los cuadrados son aristas paralelas al plano $z = 0$ que “conectan” hélices cercanas (figura 1.12c).

Las caras del poliedro $\{\infty, 3\}^{(b)}$ son hélices sobre cuadrados de tal manera que hay tres

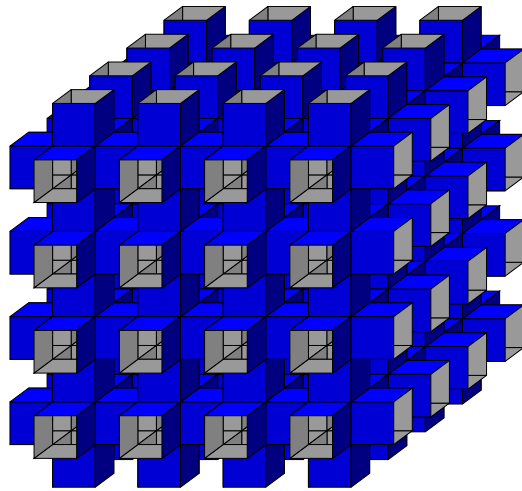
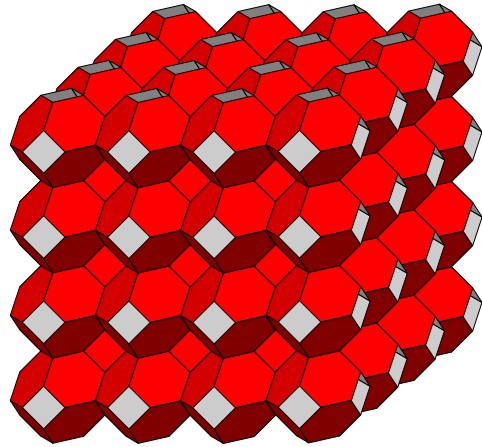
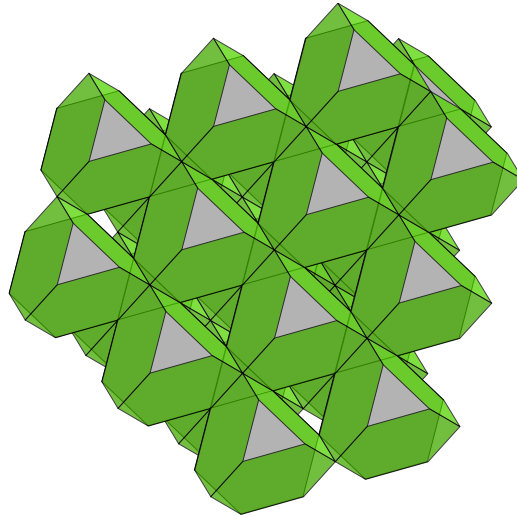
(a) $\{4, 6|4\}$ (b) $\{6, 4|4\}$ (c) $\{6, 6|3\}$

Figura 1.9: Poliedros de Petrie-Coxeter.

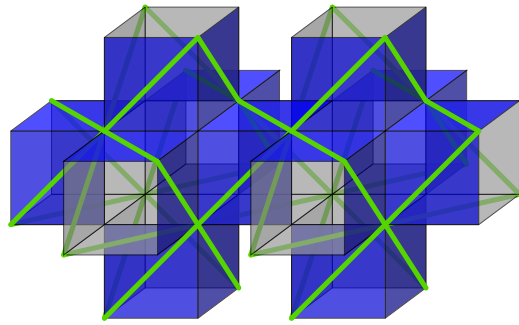
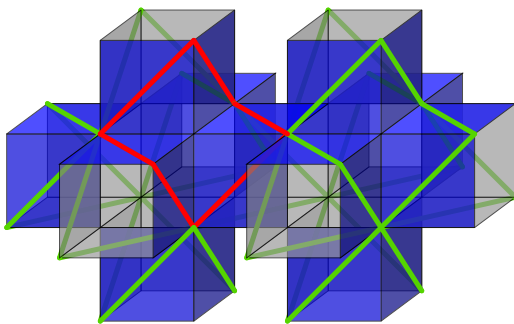
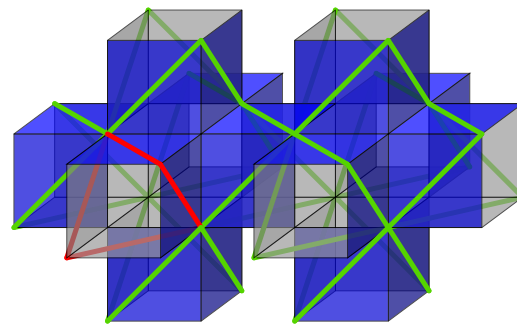


Figura 1.10: $Sk^1(\{6, 6\}_4) = Sk^1(\{4, 6\}_6)$

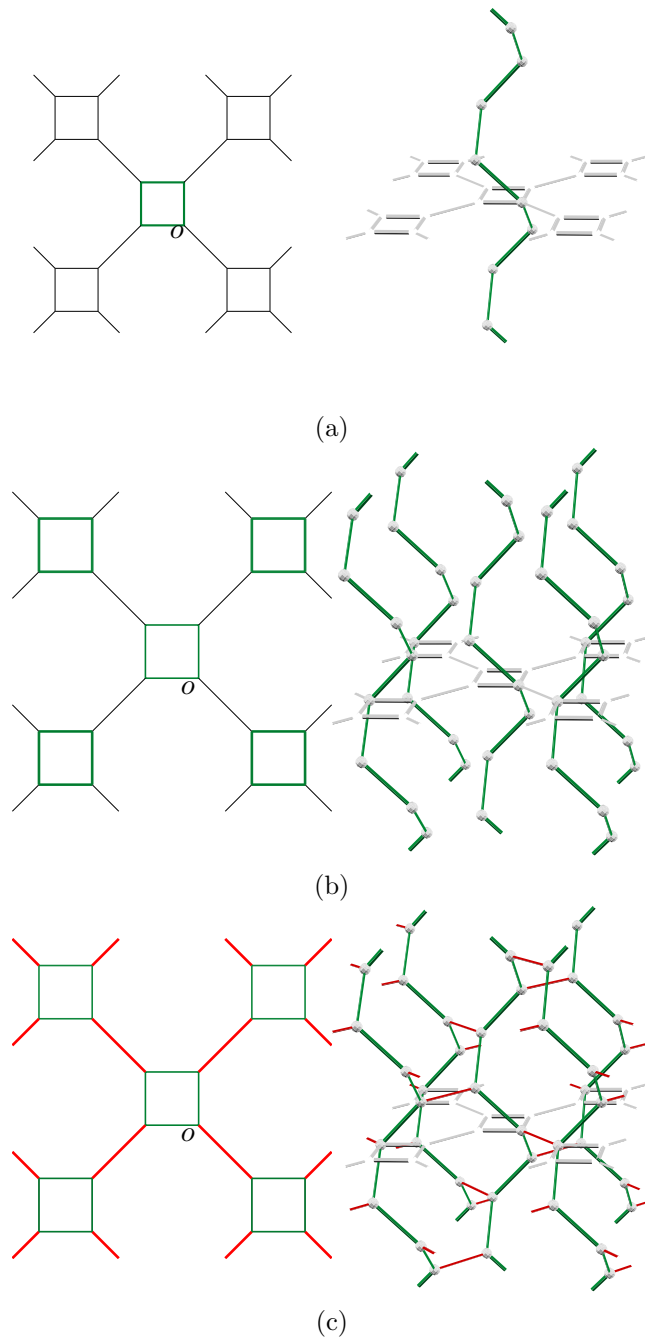


(a) $\{6, 6\}_4$



(b) $\{4, 6\}_6$

Figura 1.11

Figura 1.12: $\{\infty, 3\}^{(b)}$

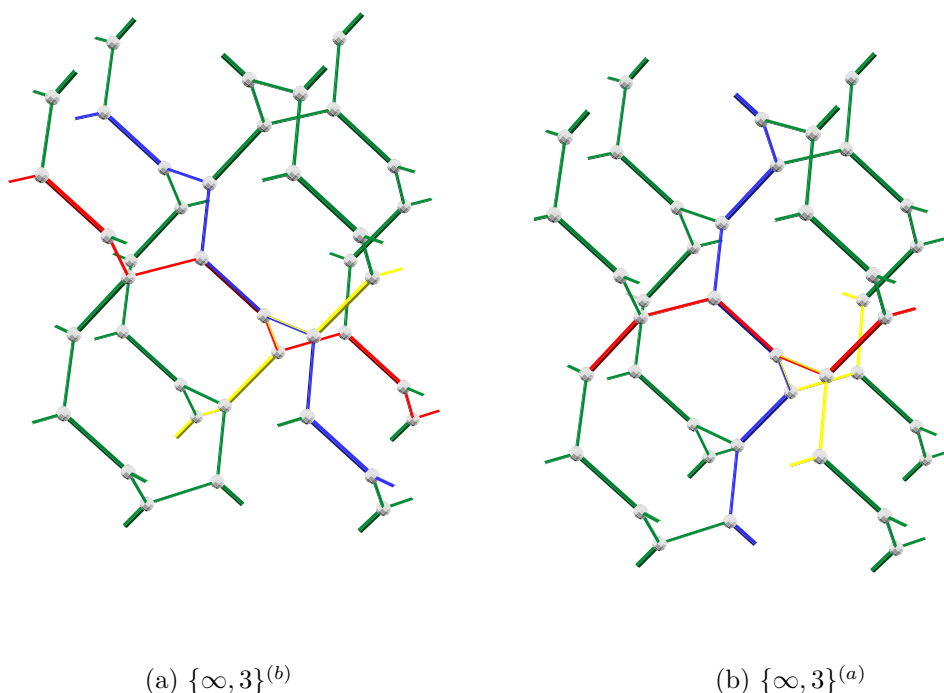


Figura 1.13

alrededor de cada uno de los vértices y cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados (figura 1.13a). A partir del poliedro $\{\infty, 3\}^{(b)}$ se puede construir el poliedro $\{\infty, 3\}^{(a)}$, el cual es Petrial de $\{\infty, 3\}^{(b)}$ y por lo tanto, tiene el mismo 1-esqueleto. Sus caras son hélices sobre triángulos de tal manera que hay 3 alrededor de cada vértice (figura 1.13b).

Los poliedros $\{6, 4\}_6$ y $\{\infty, 4\}_{*,*3}$ son *autopetrie*, es decir, cada uno es isomorfo a su Petrial, sin embargo tienen el mismo 1-esqueleto, el cual describiremos a continuación.

Como se mencionó anteriormente, en la construcción del poliedro $\{4, 6|4\}$ los cubos de la teselación $\{4, 3, 4\}$ se dividen en dos: aquellos donde 4 de sus caras son también caras del poliedro $\{4, 6|4\}$ y aquellos donde ninguna de las 6 caras están en el poliedro. Los vértices de $\text{Sk}^1(\{6, 4\}_6)$ son precisamente los centros de los cubos cuyos cuadrados son caras del poliedro. Las aristas se forman entre dos vértices cuyos cubos correspondientes comparten una cara en $\{4, 6|4\}$ (figura 1.14). La gráfica $\text{Sk}^1(\{6, 4\}_6)$ se puede pensar también como el trasladado de la gráfica G por el vector $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, donde G es la subgráfica de la gráfica $\text{Sk}^1(\{4, 3, 4\})$ inducida por los vértices en $\mathbb{Z}^3 \setminus X$ donde X es el conjunto de puntos de coordenadas enteras de la forma $(2m, 2n, 2k + 1)$ y $(2m + 1, 2n + 1, 2k)$.

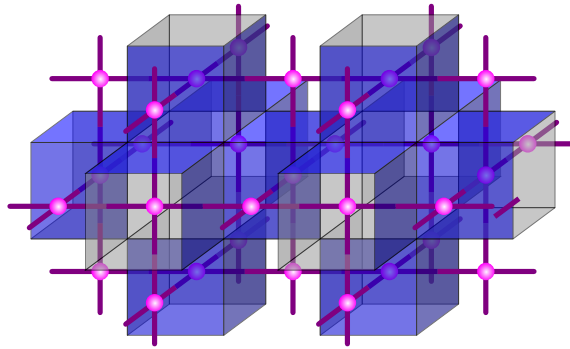


Figura 1.14: $\text{Sk}^1(\{6, 4\}_4) = \text{Sk}^1(\{\infty, 4\}_{\cdot, *3})$

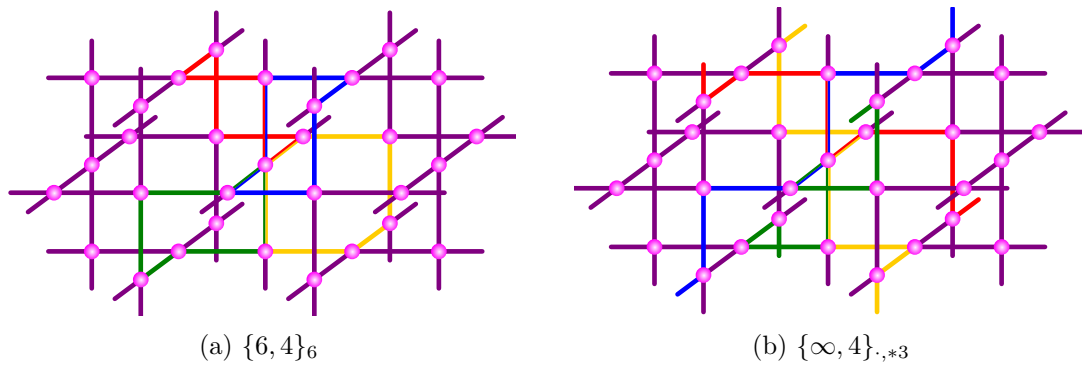


Figura 1.15

Las caras del poliedro $\{6, 4\}_6$ son hexágonos que coinciden con caminos de Petrie de la mitad de los cubos de la teselación $\{4, 3, 4\}$ (figura 1.15a). Por otro lado, las caras del poliedro $\{\infty, 4\}_{\cdot, *3}$ son hélices sobre triángulos cuyos ejes son rectas con dirección $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ de tal manera que hay cuatro hélices alrededor de cada vértice (figura 1.15b).

En [15] McMullen y Schulte clasifican éstos poliedros, dicha clasificación se resume en el diagrama de (1.9), donde π y δ son las construcciones descritas en la página 10 y φ_2 , σ y η se explican a detalle en [15, §3] y [16, §7B]. Además, en la tabla 1.4 se dan generadores explícitos para el grupo de simetrías de cada uno de los poliedros.

Poliedro \mathcal{P}	Vértice Base	Generadores de $G(\mathcal{P})$		
		$R_0 : (x, y, z) \mapsto$	$R_1 : (x, y, z) \mapsto$	$R_2 : (x, y, z) \mapsto$
$\{4, 6 4\}$	o	$(1 - x, y, z)$	$(y, x, -z)$	(x, z, y)
$\{6, 4 4\}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	(x, z, y)	$(y, x, -z)$	$(1 - x, y, z)$
$\{6, 6 3\}$	o	$(x, 1 - z, 1 - y)$	$(y, x, -z)$	(x, z, y)
$\{\infty, 6\}_{4,4}$	o	$(1 - x, z, y)$	$(y, x, -z)$	(x, z, y)
$\{\infty, 4\}_{6,4}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	$(1 - x, z, y)$	$(y, x, -z)$	$(1 - x, y, z)$
$\{\infty, 6\}_{6,3}$	o	$(x, 1 - z, 1 - y)$	$(y, x, -z)$	(x, z, y)
$\{6, 6\}_4$	o	$(1 - y, 1 - x, -z)$	(x, z, y)	$(y, x, -z)$
$\{4, 6\}_6$	o	$(1 - x, 1 - y, z)$	(x, z, y)	$(y, x, -z)$
$\{\infty, 3\}^{(b)}$	o	$(1 - y, 1 - x, -z)$	$(z, -y, x)$	$(y, x, -z)$
$\{\infty, 3\}^{(a)}$	o	$(1 - x, 1 - y, z)$	$(z, -y, x)$	$(y, x, -z)$
$\{6, 4\}_6$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(y, x, -z)$	(x, z, y)	$(1 - x, 1 - y, z)$
$\{\infty, 4\}_{*,*3}$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(y, x, -z)$	$(1 - x, z, y)$	$(1 - x, 1 - y, z)$

Tabla 1.4: Grupo de simetrías de los poliedros regulares infinitos puros

$$\begin{array}{ccccc}
 \{\infty, 4\}_{6,4} & \xleftarrow{\pi} & \{6, 4|4\} & \xleftarrow{\delta} & \{4, 6|4\} & \xleftarrow{\pi} & \{\infty, 6\}_{4,4} & (1.9) \\
 & & \downarrow \sigma & & \downarrow \eta & & & \\
 & & \{\infty, 4\}_{*,*3} & & \{6, 6\}_4 & \xrightarrow{\varphi_2} & \{\infty, 3\}^{(a)} & \\
 & & & & \uparrow \pi & & \uparrow \pi & \\
 & & & & \{6, 4\}_6 & \xleftarrow{\delta} & \{4, 6\}_6 & \xrightarrow{\varphi_2} & \{\infty, 3\}^{(b)} \\
 & & & & \downarrow \sigma\delta & & \downarrow \eta & & \\
 & & & & \{\infty, 6\}_{6,3} & \xleftarrow{\pi} & \{6, 6|3\} & &
 \end{array}$$

Capítulo 2

El 3-Toro

El 3-toro surge como generalización tridimensional del 2-toro, el cual tiene la topología que resulta al identificar por traslación lados opuestos de un cuadrado. Antes de definir formalmente al 3-toro \mathbb{T}^3 repasaremos algunos resultados acerca de isometrías del espacio euclidiano \mathbb{E}^3 , pues, como veremos más adelante, a través de ellas se pueden estudiar las isometrías de \mathbb{T}^3 . En las secciones 2.2 y 2.3 definiremos los grupos latiz y el 3-toro \mathbb{T}^3 , y entraremos en el estudio a detalle del grupo de isometrías de éste.

2.1. Isometrías de \mathbb{E}^3

En esta sección estudiaremos las isometrías del espacio euclidiano \mathbb{E}^3 . La mayoría de los resultados presentados en esta sección se extienden de manera sencilla al espacio n -dimensional \mathbb{E}^n ; sin embargo, para fines de este trabajo es suficiente restringir al caso $n = 3$ y ocasionalmente $n = 2$. Se procura que la teoría desarrollada en esta sección sea auto-contenida, sin embargo ésta se basa en los resultados desarrollados en [21, Ch. 2], de modo que si el lector está interesado en profundizar en este estudio se recomienda consultar esta referencia.

En este trabajo se piensa al espacio euclidiano \mathbb{E}^n con su métrica usual, la cual denotaremos por d . Por *isometría* se entiende una biyección $S : X \rightarrow X$ (donde X es usualmente \mathbb{E}^3 y ocasionalmente \mathbb{E}^2) que preserva la distancia, es decir $d(x, y) = d(xS, yS)$ para todo $x, y \in X$. Es importante mencionar que en este trabajo evaluaremos las isometrías por la derecha, esto con el fin de ser consistentes con el hecho de considerar acciones derechas en el capítulo anterior.

Comencemos por recordar una estructura familiar en la teoría de grupos.

Definición 2.1. Si $N, H \leq G$ son grupos tales que $N \triangleleft G$, $N \cap H = \{e\}$ y $NH = G$ decimos que G es el *producto semidirecto* de N y H y escribimos $G = N \rtimes H$.

La siguiente proposición describe propiedades elementales del producto semidirecto, si el lector está interesado en la prueba se recomienda ver [20, lema 7.20]

Proposición 2.2. Si $N, H \leq G$ son tales que $G = N \rtimes H$, entonces

1. $H \cong G/N$.
2. Dado $g \in G$ existen únicos $n, \bar{n} \in N$, $h \in H$ tales que $g = nh = h\bar{n}$.
3. Existe un homomorfismo $\lambda : G \rightarrow G$ tal que $\text{Ker}(\lambda) = N$ y $\lambda(h) = h$ para todo $h \in H$.

El objetivo de esta sección es demostrar que $\mathbf{I}(\mathbb{E}^3) = \mathbf{T}(\mathbb{E}^3) \rtimes \mathbf{O}(3)$, donde $\mathbf{O}(3)$ es el conjunto de isometrías lineales de \mathbb{E}^3 y $\mathbf{T}(\mathbb{E}^3)$ es el grupo de traslaciones de \mathbb{E}^3 . Comenzaremos entonces estudiando el grupo de isometrías lineales $\mathbf{O}(3)$ con la intención de llegar a la proposición 2.4, la cual clasifica éstas isometrías. Sin embargo, comenzaremos por entender el grupo $\mathbf{O}(2)$ de isometrías lineales de \mathbb{E}^2 .

Lema 2.3. Sea S una isometría lineal del plano euclidiano \mathbb{E}^2 , entonces S es la identidad, una reflexión respecto a una recta que contiene al origen o una rotación respecto al origen.

Demostración. Tome $\{e_1, e_2\}$ la base canónica de \mathbb{E}^2 . Dado que S es isometría, entonces $\{e_1S, e_2S\}$ es una base ortonormal de \mathbb{E}^2 , en particular $|e_1S| = 1$ y por lo tanto $e_1S = (\cos \theta, \sin \theta)$ para algún $\theta \in [0, 2\pi]$. Además $e_1S \perp e_2S$ de modo que $e_2S = \pm(-\sin \theta, \cos \theta)$. Si $e_2S = (-\sin \theta, \cos \theta)$, entonces S es la rotación en el origen por un ángulo θ , si $e_2S = (\sin \theta, -\cos \theta)$, entonces S es la reflexión respecto a una recta por el origen que forma un ángulo $\frac{\theta}{2}$ con el eje x . ■

Una vez probado el lema anterior, el resultado análogo para el caso 3-dimensional es sencillo. La proposición 2.4 ofrece la clasificación de las isometría de $\mathbf{O}(3)$, donde además de la identidad, las reflexiones en planos y las rotaciones respecto a rectas aparecen las *reflexiones rotatorias* alrededor del origen o , las cuales son la composición de una reflexión en un plano Π que contiene a o y una rotación respecto a la recta perpendicular a Π en o .

Proposición 2.4. Si S es una isometría lineal de \mathbb{E}^3 , entonces S es o bien la identidad, una reflexión respecto a un plano que contiene al origen o , una rotación respecto a una recta que contiene a o o una reflexión rotatoria alrededor de o .

Demostración. Dado que S es lineal y su polinomio característico tiene grado 3, entonces S tiene un valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$, y como S es isometría, $\lambda = \pm 1$. Sea v un vector propio para λ y L el subespacio generado por v . Note que L queda invariante respecto a S y por lo tanto, $\Pi := L^\perp$ es invariante bajo S . Por el lema 2.3, la restricción de S a Π , la cual denotamos por S_Π , es una rotación respecto al origen o una reflexión.

Resta analizar los posibles casos. Si $\lambda = 1$ y S_Π es rotación, entonces S es rotación respecto a L . Si $\lambda = 1$ y S_Π es reflexión respecto a una recta l , entonces S es la reflexión respecto al plano que contiene a l y L . Si $\lambda = -1$ y S_Π es rotación, entonces S es la composición de la reflexión respecto a Π y la rotación respecto a L con el mismo ángulo que S_Π . Finalmente, si $\lambda = -1$ y S_Π es reflexión respecto a la recta l , entonces S es el medio giro respecto a la recta l . ■

Una vez clasificadas las isometrías de $\mathbf{O}(3)$ comenzaremos a estudiar la estructura de $\mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$. El siguiente resultado es importante pues caracteriza las isometrías de $\mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$ que están en $\mathbf{O}(3)$ en términos de su acción en \mathbb{E}^3 .

Lema 2.5. *Si S es una isometría de \mathbb{E}^3 que fija el origen o , entonces S es una transformación lineal, es decir $S \in \mathbf{O}(3)$.*

Demostración. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de \mathbb{E}^3 . Dado que S es isometría, tenemos que

$$\|xS - e_iS\| = d(xS, e_iS) = d(x, e_i) = \|x - e_i\|$$

para todo $x \in \mathbb{E}^3$ y toda $i \in \{1, 2, 3\}$. Elevando al cuadrado la ecuación anterior tenemos

$$\begin{aligned} \|xS - e_iS\|^2 &= \|x - e_i\|^2, \\ \|xS\|^2 - 2(xS \cdot e_iS) + \|e_iS\|^2 &= \|x\|^2 - 2(x \cdot e_i) + \|e_i\|^2, \end{aligned}$$

de donde

$$xS \cdot e_iS = x \cdot e_i$$

para todo $x \in \mathbb{E}^3$ y toda $i \in \{1, 2, 3\}$. Esto es gracias a que $\|xS\| = \|x\|$ y $\|e_iS\| = \|e_i\|$ ya que S es una isometría que fija a o .

Dado que S es isometría, $\{e_1S, e_2S, e_3S\}$ es una base ortonormal de \mathbb{E}^3 y entonces

$$xS = \sum_{i=1}^3 (xS \cdot e_iS) e_iS = \sum_{i=1}^3 (x \cdot e_i) e_iS$$

para todo $x \in \mathbb{E}^3$.

Sea T la transformación lineal definida por $e_i T = e_i S$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Ya que $\{e_1, e_2, e_3\}$ es base ortonormal,

$$\begin{aligned} xT &= \left(\sum_{i=1}^3 (x \cdot e_i)(e_i) \right) T \\ &= \sum_{i=1}^3 (x \cdot e_i)(e_i T) \\ &= \sum_{i=1}^3 (x \cdot e_i)(e_i S) \\ &= xS \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{E}^3$ y por lo tanto $S = T$ y S es lineal. ■

Lema 2.6. *Si S es una isometría, existen únicos $S' \in \mathbf{O}(3)$ y $t \in \mathbf{T}(\mathbb{E}^3)$ tales que $S = S't$.*

Demostración. Sea $v = oS$ con o el origen de \mathbb{E}^3 y sea t la traslación por $-v$. Observe que $oS t = o$ y por el lema 2.5, $St = S' \in \mathbf{O}(3)$, de donde $S = S't$. Ahora, si $S'_1 t_1 = S = S'_2 t_2$, con $S_i \in \mathbf{O}(3)$ y $t_i \in \mathbf{T}(\mathbb{E}^3)$ para $i \in \{1, 2\}$, se tiene que $(S'_2)^{-1} S'_1 = t_2 t_1^{-1}$. Pero $(S'_2)^{-1} S'_1 \in \mathbf{O}(3)$ y $t_2 t_1^{-1} \in \mathbf{T}(\mathbb{E}^3)$; además $\mathbf{O}(3) \cap \mathbf{T}(E) = \{id\}$, pues los elementos de $\mathbf{O}(3)$ fijan a o y el único elemento de $\mathbf{T}(\mathbb{E}^3)$ que fija a o es id . De aquí se sigue que $S'_1 = S'_2$ y $t_1 = t_2$. ■

El siguiente lema nos permitirá probar la normalidad de $\mathbf{T}(\mathbb{E}^3)$ en $\mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$, de hecho, nos permita mostrar explícitamente la acción de conjugación de las isometrías lineales en el grupo de traslaciones, lo cuál será de suma importancia en la sección 2.3.

Lema 2.7. *Si t_v es la traslación por el vector v y $S \in \mathbf{O}(3)$, entonces $S^{-1} t_v S = t_{vS}$, la traslación por vS .*

Demostración. Para todo $x \in \mathbb{E}^3$ se tiene

$$\begin{aligned} (x)S^{-1} t_v S &= (xS^{-1}) t_v S \\ &= (xS^{-1} + v)S \\ &= x + vS. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $S^{-1} t_v S = t_{vS}$. ■

Del lema anterior, la normalidad de $\mathbf{T}(\mathbb{E}^3)$ es inmediata, pero podemos probar un resultado ligeramente más fuerte.

Corolario 2.8. Si $G \leq \mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$ y T es el subgrupo de traslaciones de G , entonces $T \triangleleft G$; en particular $\mathbf{T}(\mathbb{E}^3) \triangleleft \mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$.

Corolario 2.9. Si S es una isometría de \mathbb{E}^3 , entonces existe una única isometría $S' \in \mathbf{O}(3)$ y traslaciones t y \bar{t} tales que $S = S't = \bar{t}S'$.

Demostración. La existencia de S' y t tales que $S = S't$ se siguen del lema 2.6. En virtud del corolario anterior tome $\bar{t} = S't(S')^{-1}$, y se tiene que

$$S = S't = S't(S')^{-1}S' = \bar{t}S'.$$

La unicidad de \bar{t} se sigue de la unicidad de S' y t probada en el lema 2.6. ■

Observe que con los resultados a los que hemos llegado hasta ahora tenemos las herramientas necesarias para probar el siguiente teorema. Este teorema nos describe por completo la estructura del grupo $\mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$ y puede ser utilizado, por ejemplo, para clasificar las isometrías de \mathbb{E}^3 . Para fines de este trabajo dejaremos esta dirección hasta aquí, en secciones posteriores se usarán los resultados aquí desarrollados para estudiar a detalle el grupo de isometrías de \mathbb{T}^3 (definido en la sección 2.2) y los grupos de simetrías de los poliedros regulares.

Teorema 2.10. Si $\mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$ es el grupo de isometrías de \mathbb{E}^3 , $\mathbf{O}(3)$ es el grupo de isometrías lineales y $\mathbf{T}(\mathbb{E}^3)$ es el grupo de traslaciones de \mathbb{E}^3 , entonces $\mathbf{I}(\mathbb{E}^3) = \mathbf{T}(\mathbb{E}^3) \rtimes \mathbf{O}(3)$.

En virtud del teorema anterior y la proposición 2.2 tenemos un homomorfismo $\lambda : \mathbf{I}(\mathbb{E}^3) \rightarrow \mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$ tal que $\text{Ker}(\lambda) = \mathbf{T}(\mathbb{E}^3)$ y $\lambda(S') = S'$ para toda $S' \in \mathbf{O}(3)$. Se tiene entonces que $\lambda(tS') = S'$; a $\lambda(S)$ le llamaremos *parte ortogonal de S* . Este homomorfismo motiva la siguiente definición.

Definición 2.11. Si $G \leq \mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$ el *grupo especial de G* , denotado G_o es la imagen de G bajo el homomorfismo λ es decir,

$$G_o = \lambda(G) = \{S' \in \mathbf{O}(3) : \text{existe } t \in \mathbf{T}(\mathbb{E}^3) \text{ con } tS' \in G\} \leq \mathbf{O}(3).$$

Una vez determinada la estructura de $\mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$ es sencillo definir una manera canónica de encajar $\mathbf{I}(\mathbb{E}^2)$ en $\mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$. Es decir, si tenemos un encaje isométrico $\eta : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$ (en el sentido de que la métrica de \mathbb{E}^3 restringida a $\eta(\mathbb{E}^2)$ es la misma que la métrica en \mathbb{E}^2) nos

gustaría definir un homomorfismo inyectivo de grupos $\bar{\eta} : \mathbf{I}(\mathbb{E}^2) \rightarrow \mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$ tal que si S es una isometría de \mathbb{E}^2 , entonces el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}^2 & \xrightarrow{S} & \mathbb{E}^2 \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ \mathbb{E}^3 & \xrightarrow{\bar{\eta}(S)} & \mathbb{E}^3 \end{array} \quad (2.1)$$

Este homomorfismo se puede encontrar de manera sencilla si suponemos, sin pérdida de generalidad, que η manda el origen de \mathbb{E}^2 en el origen de \mathbb{E}^3 y que $(1, 0) \xrightarrow{\eta} (1, 0, 0)$ y $(0, 1) \xrightarrow{\eta} (0, 1, 0)$, de modo que $\mathbb{E}^2\eta$ es el plano $z = 0$ en \mathbb{E}^3 .

Las mismas técnicas usadas en los resultados de esta sección prueban que $\mathbf{I}(\mathbb{E}^2) = \mathbf{T}(\mathbb{E}^2) \rtimes \mathbf{O}(2)$, donde $\mathbf{T}(\mathbb{E}^2)$ y $\mathbf{O}(2)$ son las traslaciones y las isometrías lineales de \mathbb{E}^2 , respectivamente. Esto implica que si S es isometría de \mathbb{E}^2 , entonces existen únicos $t \in \mathbf{T}(\mathbb{E}^2)$ y $S' \in \mathbf{O}(2)$ tales que $S = tS'$. Una vez observado esto, resta definir el homomorfismo en las traslaciones y en las isometrías lineales de \mathbb{E}^2 .

Observe que hay un encaje natural de $\mathbf{T}(\mathbb{E}^2)$ en $\mathbf{T}(\mathbb{E}^3)$ que manda la traslación por x en la traslación por $x\eta$. Ahora, si $S \in \mathbf{O}(2)$, defina $\bar{\eta}(S)$ como la única transformación lineal de \mathbb{E}^3 que satisface $e_i\bar{\eta}(S) = e_iS\eta$, para $i \in \{1, 2\}$ y $e_3\bar{\eta}(S) = e_3$. Tenemos que $\{e_i\bar{\eta}(S)\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$ es una base ortonormal de \mathbb{E}^3 , de donde $\bar{\eta}(S)$ es una isometría, lo cual define el homomorfismo para las isometrías lineales. Con esta definición es claro que el diagrama de la ecuación (2.1) es conmutativo para traslaciones y para isometrías lineales.

Note que, en virtud de la definición de $\bar{\eta}$ para las isometrías lineales y del lema 2.7, si $S \in \mathbf{O}(2)$ y $t \in \mathbf{T}(\mathbb{E}^2)$ es la traslación por v , entonces

$$\bar{\eta}(S^{-1}tS) = \bar{\eta}(S^{-1})\bar{\eta}(t)\bar{\eta}(S),$$

pues el lado izquierdo esta igualdad es la traslación por $vS\eta$, que es igual a $(v\eta)\bar{\eta}(S)$, que es precisamente el vector de traslación del lado derecho de la igualdad.

Con lo dicho hasta ahora podemos probar la siguiente proposición, con la cual concluimos esta sección.

Proposición 2.12. *Sea $\mathbf{I}(\mathbb{E}^n) = \mathbf{T}(\mathbb{E}^n) \rtimes \mathbf{O}(n)$ el grupo de isometrías de \mathbb{E}^n , para $n \in \{2, 3\}$. Entonces existe un homomorfismo inyectivo $\bar{\eta} : \mathbf{I}(\mathbb{E}^2) \rightarrow \mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$ de tal manera que el diagrama de la ecuación (2.1) es conmutativo.*

Demostración. Defina $\bar{\eta}$ como se mencionó antes para las traslaciones y las isometrías lineales. Ahora si $S \in \mathbf{I}(\mathbb{E}^2)$ es una isometría con $S = tS'$, $t \in \mathbf{T}(\mathbb{E}^2)$, $S' \in \mathbf{O}(2)$, defina $\bar{\eta}(S) = \bar{\eta}(t)\bar{\eta}(S')$. Esta función está bien definida pues la manera de escribir a S como producto de una traslación por una isometría lineal es única. Observe además que si $S = S'\bar{t}$

entonces $\bar{\eta}(S) = \text{Probemos que } \bar{\eta} \text{ es homomorfismo. Sean } S_i = t_i S'_i, \text{ para } i \in \{1, 2\}, \text{ dos isometrías de } \mathbb{E}^2 \text{ con } t_i \in \mathbf{T}(\mathbb{E}^2) \text{ y } S'_i \in \mathbf{O}(2) \text{ y defina } \bar{t}_2 = S'_1 t_2 (S'_1)^{-1}, \text{ entonces}$

$$\begin{aligned}
 \bar{\eta}(S_1 S_2) &= \bar{\eta}(t_1 S'_1 t_2 S'_2) \\
 &= \bar{\eta}(t_1 \bar{t}_2 S'_1 S'_2) \\
 &= \bar{\eta}(t_1 \bar{t}_2) \bar{\eta}(S'_1 S'_2) \\
 &= \bar{\eta}(t_1) \bar{\eta}(\bar{t}_2) \bar{\eta}(S'_1) \bar{\eta}(S'_2) \\
 &= \bar{\eta}(t_1) \bar{\eta}(S'_1) \bar{\eta}(t_2) \bar{\eta}(S'_2) \\
 &= \bar{\eta}(S_1) \bar{\eta}(S_2).
 \end{aligned}$$

La inyectividad de $\bar{\eta}$ se sigue de la inyectividad de $\bar{\eta}$ restringida a las traslaciones y a las isometrías lineales. ■

Observe que, a pesar de que esta prueba se realizó para un encaje de \mathbb{E}^2 en \mathbb{E}^3 , la técnica se generaliza de manera sencilla para un encaje \mathbb{E}^n en \mathbb{E}^m con $n < m$, de modo que es posible pensar a los grupos de isometrías $\mathbf{I}(\mathbb{E}^n)$ anidados conforme n crece.

2.2. Grupos latiz y el 3-toro

En esta sección definiremos y estudiaremos los grupos latiz, que son ciertos subgrupos del grupo de traslaciones $\mathbf{T}(\mathbb{E}^3)$. A partir de éstos definiremos al 3-toro y estudiaremos su grupo de isometrías $\mathbf{I}(\mathbb{T}^3)$. En particular, daremos una caracterización de las involuciones en $\mathbf{I}(\mathbb{T}^3)$ en términos de la geometría de los grupos latiz. Estos resultados serán de vital importancia en el capítulo 3, pues como se vio en el capítulo anterior, los grupos de simetría de los poliedros regulares están generados por involuciones.

Comenzaremos la sección por estudiar los grupos latiz y sus propiedades elementales. Diremos que un conjunto de traslaciones es linealmente independiente si el conjunto de vectores asociado es linealmente independiente.

Definición 2.13. Sea $1 \leq d \leq 3$. Un *grupo latiz* Λ de rango d en \mathbb{E}^3 es un subgrupo de $\mathbf{T}(\mathbb{E}^3)$ generado por d traslaciones t_1, \dots, t_d linealmente independientes de \mathbb{E}^3 . Además, si v_i es el vector de traslación de t_i y $V = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_d)$ es el subespacio vectorial generado por los vectores v_1, \dots, v_d , entonces diremos que Λ es un grupo latiz en V y que el conjunto $\{v_1, \dots, v_d\}$ es una *base* para el grupo latiz Λ .

Observe que como grupo abstracto, todo grupo latiz de rango d es un grupo libre abeliano de rango d , es decir, isomorfo a \mathbb{Z}^d . Sin embargo, nuestro interés se centra en estudiar la

geometría de estos grupos, para lo cual introduciremos el concepto de *latiz de puntos*. Sin embargo, antes de ir en esa dirección enunciaremos el siguiente teorema, el cual nos da un primer acercamiento a la geometría de los grupos latiz. Una demostración del mismo se puede encontrar en [21, p. 192].

Teorema 2.14. *Si Λ es un grupo latiz, entonces Λ actúa discretamente en \mathbb{E}^3 , es decir, la órbita de cada punto es un subconjunto discreto.*

En particular, el teorema anterior nos dice que siempre es posible tomar una traslación en Λ cuyo vector tenga longitud mínima. Este hecho será de suma importancia al estudiar las latices de puntos, las cuales definimos a continuación.

Definición 2.15. Sea $\Lambda = \langle t_1, \dots, t_d \rangle$ un grupo latiz de rango d en el espacio d -dimensional V , para $1 \leq d \leq 3$, con t_i la traslación por el vector v_i , para $i \in \{1, \dots, d\}$. La *latiz de puntos* asociada a Λ , denotada por Λ , es la órbita del origen o bajo la acción de Λ , es decir, el conjunto

$$\Lambda = o\Lambda = \{m_1v_1 + \dots + m_dv_d : m_1, \dots, m_d \in \mathbb{Z}\}.$$

Usando la notación de la definición anterior, diremos que el conjunto $\{v_1, \dots, v_d\}$ es una *base para la latiz Λ* . Con esta convención, si v_1, \dots, v_d son vectores linealmente independientes, nos referiremos a la latiz *generada por v_1, \dots, v_d* como a la latiz asociada al grupo generado por las traslaciones respecto a los vectores v_1, \dots, v_d .

Mostraremos algunos ejemplos a continuación, los cuales usaremos para definir algunas latices de importancia para nuestro trabajo.

Ejemplo 2.16. En estos ejemplos, $\{e_1, \dots, e_n\}$ denotan la base estándar de \mathbb{E}^n . Seguiremos la notación de [16, §6D].

- (i) Denotaremos por $\Lambda_{(1,0)}$ la *latiz de cuadrados*, la cual es la latiz de \mathbb{E}^2 generada por $\{e_1, e_2\}$, es decir, el conjunto de puntos de \mathbb{E}^2 de coordenadas enteras.
- (ii) La *latiz de centros de cuadrados*, denotada por $\Lambda_{(1,1)}$, es la latiz de \mathbb{E}^2 generada por los vectores $e_1 + e_2$ y $e_1 - e_2$ y consta de los puntos de \mathbb{E}^2 de coordenadas enteras cuyas coordenadas tienen la misma paridad.
- (iii) De manera análoga al caso bidimensional, definimos la *latiz de cubos* o *latiz cúbica* como la latiz de \mathbb{E}^3 generada por $\{e_1, e_2, e_3\}$, es decir, el conjunto de puntos de coordenadas enteras de \mathbb{E}^3 . Denotamos esta latiz por $\Lambda_{(1,0,0)}$ (figura 2.1a).
- (iv) Definimos la *latiz de centros de cubos*, denotada por $\Lambda_{(1,1,1)}$, como la latiz generada por los vectores $2e_1, 2e_2$ y $e_1 + e_2 + e_3$. Consta de los puntos de \mathbb{Z}^3 cuyas coordenadas

tienen la misma paridad. Esta latiz se puede entender también como los vértices y los centros de los cubos de una teselación con cubos de lado 2 (figura 2.1b).

- (v) La *latiz de centros de caras*, la cual denotaremos por $\Lambda_{(1,1,0)}$, es la latiz de \mathbb{E}^3 generada por los vectores $e_1 + e_2$, $e_1 + e_3$ y $e_2 + e_3$. Consta de todos los puntos de \mathbb{Z}^3 cuya suma de coordenadas es par. Observe que esta latiz consta de los vértices y los centros de caras de una teselación de cubos de lado 2 (figura 2.1c).

Denotaremos por $\Lambda_{(1,0)}$, $\Lambda_{(1,1)}$, $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,1)}$ y $\Lambda_{(1,1,0)}$ los correspondientes grupos de traslaciones para las latices definidas en éstos ejemplos.

Observe que en virtud del teorema 2.14, toda latiz es un subconjunto discreto de \mathbb{E}^3 .

Con la notación de la definición 2.15, si $d < 3$ y $w \notin V$, denotaremos por $\Lambda \oplus w$ a la latiz asociada al grupo $\langle \Lambda, t_w \rangle$. Usualmente identificaremos la latiz $\Lambda_{(1,0)}$ con la sublatiz de $\Lambda_{(1,0,0)}$ generada por e_1 y e_2 . Así, por ejemplo, $\Lambda_{(1,0,0)} = \Lambda_{(1,0)} \oplus e_3$.

Si Λ es una latiz generada por los vectores v_1, \dots, v_d y $T \in GL_d(\mathbb{R})$ es una transformación lineal denotaremos por ΛT a la latiz generada por los vectores $v_1 T, \dots, v_d T$. Si T es la dilatación por un factor $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces denotaremos a ΛT como $\alpha \Lambda$; los correspondientes grupos de traslaciones serán denotados Λ^T y $a \Lambda$.

Observe que los grupos latiz tienen la propiedad de actuar *libremente* en \mathbb{E}^3 , es decir, el único elemento del grupo que deja fijo a un punto de \mathbb{E}^3 es *id*. En virtud del teorema 2.14, los grupos latiz son grupos discretos. Estas dos propiedades permiten construir variedades geométricas a partir de grupos de isometrías. En este trabajo nos concentraremos en el 3-toro, definido a continuación. A pesar de que muchos de los resultados aquí presentados provienen de resultados más generales, éstos salen de nuestro interés; si el lector está interesado en profundizar en esta dirección puede consultar [16, §6A] o [19, §8.1, §8.2].

En lo sucesivo, a menos que se indique explícitamente lo contrario, siempre que usemos el término *grupo latiz* nos referiremos a un grupo latiz de rango 3.

Definición 2.17. Si Λ es un grupo latiz de rango 3, el 3-toro \mathbb{T}_Λ^3 asociado a Λ es el espacio de órbitas de Λ , es decir,

$$\mathbb{T}_\Lambda^3 = \mathbb{E}^3 / \Lambda = \{x\Lambda : x \in \mathbb{E}^3\}$$

dotado de la *métrica cociente* d_Λ (ver lema 2.19). Si no hay ambigüedad respecto a Λ denotaremos a \mathbb{T}_Λ^3 simplemente \mathbb{T}^3 (como lo hemos venido haciendo hasta ahora).

Si denotamos por d a la métrica usual de \mathbb{E}^3 podemos definir la función $d_\Lambda : \mathbb{T}_\Lambda^3 \times \mathbb{T}_\Lambda^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_\Lambda(x\Lambda, y\Lambda) = \inf\{d(xt_1, yt_2) : t_1, t_2 \in \Lambda\}. \quad (2.2)$$

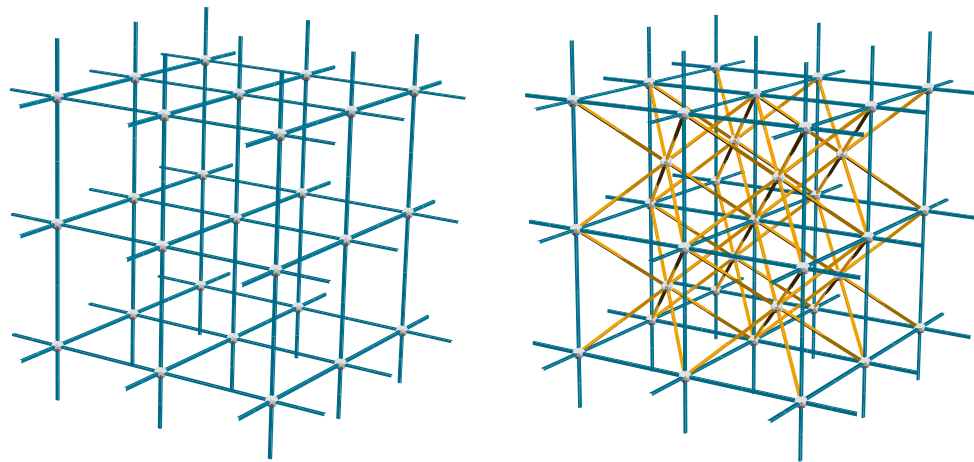
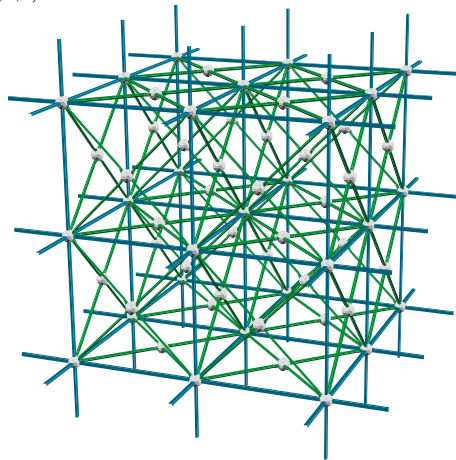
(a) $\Lambda_{(1,0,0)}$ (b) $\Lambda_{(1,1,1)}$ (c) $\Lambda_{(1,1,0)}$

Figura 2.1

Observe que esta función está bien definida pues si x', y' son tales que $x'\Lambda = x\Lambda$ y $y'\Lambda = y\Lambda$, entonces $\{d(xt_1, yt_2) : t_1, t_2 \in \Lambda\} = \{d(x't_1, y't_2) : t_1, t_2 \in \Lambda\}$.

El objetivo de los siguientes resultados es probar que d_Λ es una métrica para \mathbb{T}_Λ^3 .

Lema 2.18. *Si d_Λ es la función definida en la ecuación (2.2), entonces*

$$d_\Lambda(x\Lambda, y\Lambda) = \min\{d(x, yt) : t \in \Lambda\}$$

para todos $x\Lambda, y\Lambda \in \mathbb{T}_\Lambda^3$.

Demostración. Observe que si $t_1, t_2 \in \Lambda$, entonces $d(xt_1, yt_2) = d(x, yt_2t_1^{-1})$ y por lo tanto

$$d_\Lambda(x\Lambda, y\Lambda) = \inf\{d(x, yt) : t \in \Lambda\}.$$

Veamos que tal ínfimo se alcanza. Sea $r = \inf\{d(x, yt) : t \in \Lambda\}$, probemos que existe $s \in \Lambda$ tal que $d(x, ys) = r$. Dado que r es un ínfimo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in y\Lambda$ tal que $y_n \in B_{r+\frac{1}{n}}(x)$, la bola de radio $r + \frac{1}{n}$ con centro en x . De modo que, o bien existe $s \in \Lambda$ tal que $d(x, ys) = r$, o bien hay una infinidad de elementos de la órbita de y en el conjunto $K = \{z \in \mathbb{E}^3 : r \leq d(x, z) \leq r + 1\}$. Sin embargo, esto último es imposible pues el conjunto K es un subconjunto compacto de \mathbb{E}^3 , así que si hubiera una infinidad de puntos de $y\Lambda$ en K , la órbita de y tendría un punto de acumulación, contradiciendo el teorema 2.14. ■

Lema 2.19. *Si Λ es un grupo latiz de rango 3 en \mathbb{E}^3 y d es la métrica usual de \mathbb{E}^3 , la función $d_\Lambda : \mathbb{T}_\Lambda^3 \rightarrow \mathbb{T}_\Lambda^3$ definida en la ecuación (2.2) es una métrica para \mathbb{T}_Λ^3 .*

Demostración. Claramente $d_\Lambda \geq 0$. La simetría de d_Λ se sigue de la simetría de d y por el lema 2.18 $d_\Lambda(x\Lambda, y\Lambda) = 0$ si y solo si $x\Lambda = y\Lambda$. Sean $x\Lambda, y\Lambda, z\Lambda \in \mathbb{T}_\Lambda^3$, por el lema 2.18 se tiene que

$$d_\Lambda(x\Lambda, y\Lambda) + d_\Lambda(y\Lambda, z\Lambda) = d(x, yt_1) + d(yt_1, zt_2)$$

para algunos $t_1, t_2 \in \Lambda$, luego

$$d(x, yt_1) + d(yt_1, zt_2) \geq d(x, zt_2) \geq d_\Lambda(x\Lambda, z\Lambda),$$

lo cual prueba la desigualdad del triángulo. ■

Es posible demostrar que la métrica cociente d_Λ induce la topología cociente en \mathbb{T}_Λ^3 . Además, se puede probar que cada punto de \mathbb{T}_Λ^3 tiene una vecindad isométrica a un abierto de \mathbb{E}^3 , lo cual convierte a \mathbb{T}_Λ^3 en una 3-variedad con geometría euclidiana. De hecho, se puede hacer una visualización análoga a la clásica representación del 2-toro a partir de un paralelogramo identificando lados opuestos por traslación. Para ello introduciremos los siguientes conceptos :

Definición 2.20. Un subconjunto abierto $D \subseteq \mathbb{E}^3$ es una *región fundamental* para un grupo de isometrías $G \subseteq \mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$ si $\mathbb{E}^3 = \bigcup_{g \in G} (\bar{D})g$ y $Dg \cap Dg' = \emptyset$ si $g \neq g'$, donde \bar{D} denota la cerradura de D . Diremos que \bar{D} es un *dominio fundamental* si es una región fundamental conexa. Intuitivamente, en \bar{D} están representados todas las órbitas de tal manera que en D hay a lo más un punto de cada órbita.

Ejemplo 2.21.

- Si Λ es un grupo latiz con base $\{v_1, \dots, v_d\}$ entonces el interior del paralelepípedo $P(v_1, \dots, v_d)$ determinado por el origen y los puntos v_1, \dots, v_d es un dominio fundamental para el grupo Λ
- Si $\Lambda \subseteq \mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$ es un grupo latiz, el *dominio de Dirichlet* $\text{Dir}(\Lambda)$ (centrado en el origen o) es el conjunto de puntos $x \in \mathbb{E}^3$ cuya distancia al origen o es menor que a cualquier otro punto de la órbita de o . Es decir

$$\text{Dir}(\Lambda) = \{x \in \mathbb{E}^3 : d(o, x) < d(o, xt) \ \forall t \in \Lambda \setminus \{id\}\}.$$

Observe que si D es una región fundamental para un grupo discreto de isometrías G que actúa libremente en \mathbb{E}^3 , entonces $\bar{D} \cap \bar{D}g \subseteq \partial\bar{D}$ para todo $g \in G \setminus \{id\}$. Se puede probar que si D es un dominio fundamental (por ejemplo, el dominio de Dirichlet para los grupos latiz), entonces \mathbb{E}^3/G es isométrico a $\bar{D} \cup \partial\bar{D} / \sim$, donde \sim identifica dos puntos de $\partial\bar{D}$ si pertenecen a la misma órbita. De esta manera obtenemos un análogo a la representación clásica del 2-toro como un paralelogramo con lados identificados para los grupos latiz y el 3-toro. No entraremos en los detalles de estos resultados, más bien daremos algunos ejemplos ilustrativos. Si el lector está interesado en profundizar en esta dirección, puede consultar [19, §6.5].

Ejemplo 2.22.

- (i) Si $\Lambda = \Lambda_{(1,0,0)}$, entonces \mathbb{T}_Λ^3 es isométrico a un cubo identificando caras paralelas por traslación (figura 2.2a).
- (ii) Si $\Lambda = \Lambda_{(1,1,1)}$, entonces \mathbb{T}_Λ^3 se puede visualizar como un octaedro truncado identificando cuadrados opuestos por traslación y hexágonos opuestos por traslación (figura 2.2b).
- (iii) Si $\Lambda = \Lambda_{(1,1,0)}$, \mathbb{T}_Λ^3 es isométrico a un dodecaedro rómbico cuyas caras opuestas se identifican por traslación (figura 2.2c).

Una vez que hemos definido una métrica en \mathbb{T}_Λ^3 tiene sentido preguntarnos por las isometrías de \mathbb{T}_Λ^3 . El objetivo de lo que resta de esta sección es entender a profundidad el

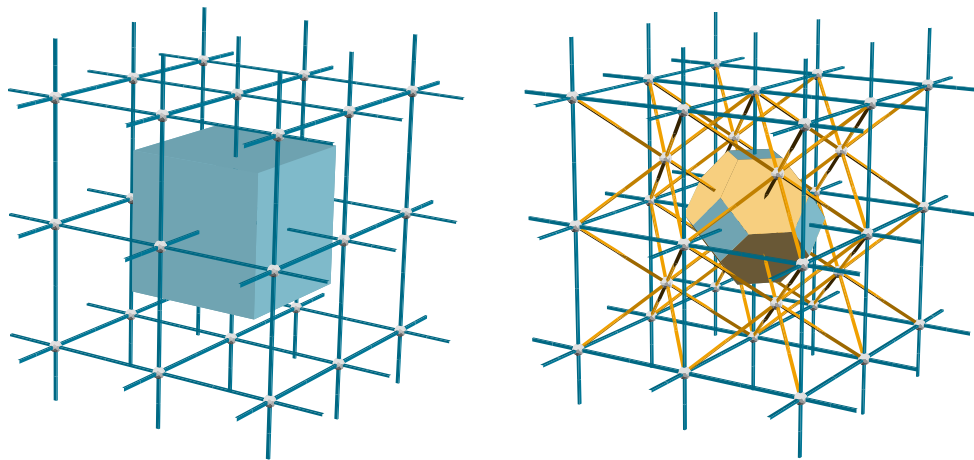
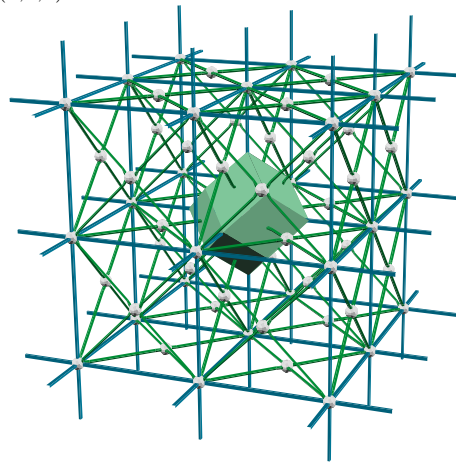
(a) $\text{Dir}(\Lambda_{(1,0,0)})$ (b) $\text{Dir}(\Lambda_{(1,1,1)})$ (c) $\text{Dir}(\Lambda_{(1,1,0)})$

Figura 2.2

grupo de isometrías del 3-toro \mathbb{T}_Λ^3 en términos de la geometría del grupo Λ . Una primera aproximación para buscar isometrías de \mathbb{T}_Λ^3 es estudiar las isometrías de \mathbb{E}^3 que inducen isometrías en \mathbb{T}_Λ^3 , es decir, las isometrías S de \mathbb{E}^3 tales que existe $\hat{S} \in \mathbf{I}(\mathbb{T}_\Lambda^3)$ de manera que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}^3 & \xrightarrow{S} & \mathbb{E}^3 \\ \pi_\Lambda \downarrow & & \downarrow \pi_\Lambda \\ \mathbb{T}_\Lambda^3 & \xrightarrow{\hat{S}} & \mathbb{T}_\Lambda^3 \end{array} \quad (2.3)$$

conmuta, donde π_Λ es la proyección al cociente.

El siguiente teorema describe la estructura de $\mathbf{I}(\mathbb{T}_\Lambda^3)$ en términos del grupo Λ . Enunciaremos el teorema sin demostración; una prueba se puede encontrar en [19, §8.1].

Teorema 2.23. *Sea Λ un grupo latiz. Sea $N_{\mathbf{I}(\mathbb{E}^3)}(\Lambda)$ el normalizador de Λ en $\mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$, entonces*

$$\mathbf{I}(\mathbb{T}_\Lambda^3) \cong N_{\mathbf{I}(\mathbb{E}^3)}(\Lambda)/\Lambda,$$

en particular, $S \in \mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$ induce una isometría $\hat{S} : \mathbb{T}_\Lambda^3 \rightarrow \mathbb{T}_\Lambda^3$ que hace conmutar el diagrama (2.3) siempre que $S \in N_{\mathbf{I}(\mathbb{E}^3)}(\Lambda)$.

El resultado anterior nos dice que las isometrías que hacen conmutar el diagrama (2.3) son precisamente aquellas que normalizan a Λ , y más aún, que toda isometría de \mathbb{T}_Λ^3 se construye de ésta manera, es decir, que toda isometría de \mathbb{T}_Λ^3 se puede “levantar” a \mathbb{E}^3 . Con este criterio, por ejemplo, podemos ver que todas las traslaciones de \mathbb{E}^3 inducen isometrías de \mathbb{T}_Λ^3 pues éstas conmutan con los elementos de Λ .

Determinar $N_{\mathbf{I}(\mathbb{E}^3)}(\Lambda)$ en términos algebraicos en general no es fácil. Sin embargo las latiz nos ofrecen una alternativa relativamente sencilla para determinar cuándo una isometría normaliza al grupo latiz.

Lema 2.24. *Sea Λ un grupo latiz con latiz Λ y sea $S = tS' \in \mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$ con $t \in \mathbf{T}(\mathbb{E}^3)$ y $S' \in \mathbf{O}(3)$. Si $N_{\mathbf{I}(\mathbb{E}^3)}(\Lambda)$ es el normalizador de Λ en $\mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$, entonces $S \in N_{\mathbf{I}(\mathbb{E}^3)}(\Lambda)$ si y sólo si S' preserva a Λ .*

Demostración. En virtud del lema 2.7, $S^{-1}t_v S$ es la traslación por vS' siempre que t_v sea la traslación por v . De modo $S^{-1}t_v S \in \Lambda$ para todo $v \in \Lambda$ si y solo si $vS' \in \Lambda$ para todo $v \in \Lambda$. ■

Gracias al lema anterior, la inversión central en el origen $-id$ induce una isometría en \mathbb{T}_Λ^3 para todo grupo latiz Λ , pues siempre preserva a la latiz Λ . Recuerde que si $G \leq \mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$, entonces el grupo especial de G (ver definición 2.11) es denotado por G_o . Dadas estas dos

observaciones, conviene definir para $G \leq \mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$ el *grupo especial aumentado*, denotado por \bar{G}_o como el grupo $\langle G_o, -id \rangle$. Combinando los resultados obtenidos en esta sección, podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 2.25. *Sea $S = tS' \in \mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$ una isometría de \mathbb{E}^3 con $t \in \mathbf{T}(\mathbb{E}^3)$ y $S' \in \mathbf{O}(3)$. Sea Λ un grupo latiz con latiz Λ , $N_{\mathbf{I}(\mathbb{E}^3)}(\Lambda)$ el normalizador de Λ en $\mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$ y $\pi_\Lambda : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{T}_\Lambda^3$ la proyección al cociente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *S induce una isometría $\hat{S} : \mathbb{T}_\Lambda^3 \rightarrow \mathbb{T}_\Lambda^3$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}^3 & \xrightarrow{S} & \mathbb{E}^3 \\ \pi_\Lambda \downarrow & & \downarrow \pi_\Lambda \\ \mathbb{T}_\Lambda^3 & \xrightarrow{\hat{S}} & \mathbb{T}_\Lambda^3 \end{array}$$

(ii) $S \in N_{\mathbf{I}(\mathbb{E}^3)}$.

(iii) $S' \in N_{\mathbf{I}(\mathbb{E}^3)}$.

(iv) S' preserva a Λ .

(v) $\langle S \rangle_o \leq N_{\mathbf{I}(\mathbb{E}^3)}$.

(vi) $\langle S \rangle_o$ preserva a Λ .

(vii) $\overline{\langle S \rangle_o}$ preserva a Λ .

En la sección 2.3 usaremos fuertemente el resultado anterior para clasificar los latices invariantes bajo involuciones de $\mathbf{I}(\mathbb{E}^3)$.

2.3. Latices invariantes bajo isometrías.

En virtud del teorema 2.25, estudiar las isometrías de \mathbb{T}_Λ^3 es equivalente a estudiar las isometrías de \mathbb{E}^3 que dejan invariante a Λ . En esta sección estudiaremos la estructura de los latices invariantes bajo isometrías, en particular de aquellas invariantes bajo involuciones, pues como se mencionó antes, los grupos de simetría de los poliedros regulares están generados por involuciones. Mucho del trabajo de esta sección fue desarrollado por Hubbard, Orbanić, Pellicer y Weiss en [13], de modo que seguiremos la notación y la nomenclatura usada por ellos.

Como ya se mencionó antes, $\mathbf{T}(\mathbb{E}^3)$ normaliza a todo grupo latiz Λ , de modo que podemos restringir nuestro trabajo a isometrías ortogonales. Además, la inversión central en el origen

$-id$ siempre preserva a las latices, de modo que si estamos interesados en involuciones ortogonales, resta restringir nuestro trabajo a reflexiones y medios giros en planos y líneas que contienen al origen, respectivamente, pues gracias a la proposición 2.4, además de $-id$, éstas son todas las isometrías ortogonales involutorias. Sin embargo, el siguiente lema muestra que podemos restringirnos únicamente a reflexiones.

Lema 2.26. *Sea R una reflexión respecto a un plano Π que contiene al origen o . Sea L la recta ortogonal a Π por o , y S el medio giro respecto a L . Entonces R preserva Λ si y solo si S preserva a Λ .*

Demostración. Se sigue del hecho de que $S = -R$ y de que $-id$ siempre preserva a Λ . ■

Antes de describir la estructura de las latices invariantes bajo reflexiones, observe que dada una latiz Λ , en general tiene más de una base. El trabajo de clasificar las latices invariantes bajo reflexiones se centrará en encontrar una base apropiada para Λ de tal manera que ésta se pueda entender en términos de algunas latices sencillas de describir, como las del ejemplo 2.16. De modo que sería útil tener un criterio para determinar cuándo un conjunto linealmente independiente de d vectores forma una base para una latiz de rango d . Dicho criterio lo ofrece el siguiente resultado.

Lema 2.27. *Si Λ es una latiz contenida en el espacio vectorial d -dimensional V tal que existen d vectores linealmente independientes en Λ , entonces Λ tiene rango d . Además, si $\{v_1, \dots, v_d\}$ es tal que el paralelepípedo P determinado por el origen y los puntos v_1, \dots, v_d tiene volumen mínimo en V , entonces $\{v_1, \dots, v_d\}$ es una base para Λ .*

Demostración. De todos los subconjuntos $\{y_1, \dots, y_d\}$ de vectores linealmente independientes de Λ tome $\{v_1, \dots, v_d\}$ tal que el paralelepípedo P determinado por el origen y los puntos v_1, \dots, v_d tiene volumen mínimo en V . Suponga que existe un punto $x \in \Lambda$ que no es combinación lineal entera de v_1, \dots, v_d y sean $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ tales que $x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_d v_d$. Sin pérdida de generalidad $\alpha_1 \notin \mathbb{Z}$ y de hecho, podemos suponer que $0 < \alpha_1 < 1$ y $0 \leq \alpha_i \leq 1$ si $i \neq 1$. De aquí se tiene que el paralelepípedo determinado por el origen y los vectores x, v_2, \dots, v_d tiene menor volumen en V , contradiciendo la elección de v_1, \dots, v_d . ■

Comencemos ahora a entender la estructura de las latices invariantes bajo reflexiones respecto a planos.

Lema 2.28. *Sea Λ una latiz de rango 3 invariante bajo la reflexión R respecto al plano Π que contiene al origen o . Entonces $\Lambda_0 := \Lambda \cap \Pi$ es una latiz de rango 2.*

Demostración. Sea x_1 un punto en $\Lambda \setminus \Pi^\perp$ y x_2 un punto de Λ que no esté en el plano determinado por Π^\perp y x_1 , entonces $x_1 + x_1 R$ y $x_2 + x_2 R$ son dos puntos en Λ_0 linealmente independientes. El resultado se sigue del lema 2.27. ■

Observe que una prueba idéntica se puede dar para ajustar el lema 2.28 al caso de que Λ sea una latiz de rango 2 en un plano y Π sea una línea contenida en dicho plano. En ese caso, $\Lambda \cap \Pi$ es una latiz de rango 1.

Note que si se está interesado en encontrar latices invariantes bajo reflexiones respecto a un plano Π se pueden construir ejemplos de manera sencilla. Tome Λ_0 una latiz en Π y un vector $w \in \Pi^\perp$, entonces la latiz $\Lambda_0 \oplus w$ es una latiz preservada por la reflexión en el plano Π . Esta construcción motiva la siguiente definición.

Definición 2.29. Si Λ es una latiz en \mathbb{E}^3 invariante bajo la reflexión respecto al plano Π de tal manera que existe $w \in \Pi^\perp$ con $\Lambda = \Lambda_0 \oplus w$ donde $\Lambda_0 = \Lambda \cap \Pi$, entonces diremos que Λ es de *traslación vertical respecto a Π* (o simplemente *de traslación vertical* si no hay confusión concerniendo a Π).

Note que en el caso de que Λ sea una latiz de traslación vertical respecto a un plano Π que contiene al origen, y $\Lambda_0 = \Lambda \cap \Pi$, entonces todo punto de Λ se proyecta ortogonalmente a Π en un punto de Λ_0 . Además si $\Lambda_k := \Lambda_0 + kw$ con $w \in \Pi^\perp \setminus \{o\}$ un punto de Λ de distancia mínima a Π entonces

$$\Lambda = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda_k.$$

En particular, si $\{v_1, v_2\}$ es una base para Λ_0 , entonces $\{v_1, v_2, w\}$ es una base para Λ .

Las latices invariantes bajo reflexiones comparten algunas de las propiedades descritas en el párrafo anterior para las latices de traslación vertical. Estas propiedades se describen en el siguiente resultado.

Proposición 2.30. *Sea Π un plano de \mathbb{E}^3 que contiene al origen o y Λ una latiz invariante bajo la reflexión R en Π . Suponga que Λ no es una latiz de traslación vertical respecto a Π . Entonces existe $w \in \Lambda \setminus \Pi$ un punto de distancia mínima a Π de modo que si $\Lambda_0 := \Lambda \cap \Pi$ y para $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\Lambda_k := \Lambda_0 + kw$, entonces*

$$\Lambda = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda_k.$$

Además, $2w$ se proyecta a Π en un punto de Λ_0 y w se proyecta en Π al punto medio entre dos puntos de Λ_0 .

Demostración. Sea w un punto de $\Lambda \setminus \Pi$ tal que $d := d(w, \Pi) \leq d(y, \Pi)$ para todo $y \in \Lambda \setminus \Pi$. Si $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda_k$ es una sublatiz propia de Λ , observe que los puntos de $\Lambda \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda_k$ no están en los planos $\Pi + kw$, $k \in \mathbb{Z}$; de modo existe un punto $x \in \Lambda$ entre los planos $\Pi + kw$ y $\Pi + (k+1)w$ para algún entero k y entonces $x - kw$ es un punto de Λ entre los planos Π y $\Pi + w$ contradiciendo la minimalidad de d .

Note que w no se proyecta ortogonalmente en un punto de Λ_0 , pues de lo contrario, Λ sería de traslación vertical. Finalmente note que $w + Rw \in \Lambda_0$ y es precisamente la proyección ortogonal de $2w$ en Π . ■

Observe que, con la notación del lema anterior, los puntos de Λ en la *capa* Λ_k se proyectan ortogonalmente en puntos de Λ si y solo si k es par. Si k es impar, todos los puntos de Λ_k se proyectan en puntos medios de segmentos con extremos en Λ_0 . Más aún, Λ_k y Λ_{k+2} difieren por una traslación ortogonal a Π . Finalmente, si $\{v_1, v_2\}$ es una base para Λ_0 , entonces usando una traslación apropiada de Λ_0 podemos elegir que w se proyecte o en alguno de $\frac{v_1}{2}$, $\frac{v_2}{2}$ o $\frac{v_1+v_2}{2}$.

Con los resultados obtenidos hasta ahora tenemos una descripción detallada de la estructura de una latiz de rango 3 invariante bajo la reflexión en un plano que contiene al origen. Como es de esperarse, se pueden obtener resultados similares para latices bidimensionales. En particular, la proposición 2.30 tiene su análogo bidimensional. Sin embargo, para las latices de rango 2 se puede obtener un resultado más detallado, con el cual concluimos esta sección.

Proposición 2.31. *Si Λ es una latiz de rango 2 invariante bajo la reflexión en una línea Π , entonces, salvo una reasignación de coordenadas, Λ es $\Lambda_{(1,0)}D$ o $\Lambda_{(1,1)}D$ para alguna transformación diagonal D .*

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que Π es la línea $y = 0$. Sea $\Lambda_0 := \Pi \cap \Lambda$ y v un generador de Λ_0 . Si Λ es de traslación vertical, sea $w \in \Pi^\perp$ tal que $\Lambda = \Lambda_0 \oplus w$. Si $d_1 = |v|$ y $d_2 = |w|$, defina D por $(x, y) \mapsto (d_1x, d_2y)$, entonces $\Lambda = \Lambda_{(1,0)}D$. Si Λ no es de traslación vertical, tome $w = (w_1, w_2) \in \Lambda \setminus \Lambda_0$ un punto de distancia mínima a Π ; podemos suponer que $w_1 = \frac{v}{2}$. Tome $d_1 = \frac{|v|}{2}$, $d_2 = w_2$ y defina la transformación D por $(x, y) \mapsto (d_1x, d_2y)$, con esto $\Lambda = \Lambda_{(1,1)}D$. ■

Con la notación del resultado anterior, si D_1 es la transformación $(x, y) \mapsto \left(\frac{1}{2}x, \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$, definimos la *latiz de triángulos* $\Lambda_{\{3,6\}}$ como

$$\Lambda_{\{3,6\}} := \Lambda_{(1,1)}D_1.$$

De manera análoga, si D_2 es la transformación $(x, y) \mapsto \left(\frac{1}{2}x, \frac{\sqrt{3}}{6}y\right)$, definimos la *latiz de centros de triángulos* $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}$ como

$$\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} := \Lambda_{(1,1)}D_2.$$

Observe que $\Lambda_{\{3,6\}}$ consta de los vértices de una teselación $\{3, 6\}$ de triángulos equiláteros de lado 1 y $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}$ está formada por dichos vértices y además los centros de los triángulos.

Observe que $\Lambda_{\{3,6\}}$ y $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}$ son latices *similares*, en el sentido que difieren de una similitud, a saber, la composición de una dilatación por un factor de $\frac{\sqrt{3}}{3}$ y una rotación de $\frac{\pi}{6}$ con centro en el origen, de modo que también podemos pensar a $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}$ como una latiz de los vértices de una teselación de triángulos equiláteros. Como ya es costumbre, denotaremos $\Lambda_{\{3,6\}}$ y $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}$ los grupos latiz asociados a $\Lambda_{\{3,6\}}$ y $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}$, respectivamente.

Capítulo 3

Poliedros regulares en el 3-toro

Comenzaremos este capítulo por introducir los conceptos generales acerca de las realizaciones de poliedros regulares en \mathbb{T}^3 . Posteriormente nos concentraremos en el siguiente problema: dado un poliedro regular \mathcal{P} realizado en \mathbb{E}^3 clasificaremos los grupos latice Λ para los cuales la aplicación cociente $\pi_\Lambda : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{T}_\Lambda^3$ induce una realización de un poliedro regular \mathcal{P}_Λ en \mathbb{T}_Λ^3 . Usando los resultados obtenidos en el capítulo 2 acerca del grupo de isometrías de \mathbb{T}^3 resolveremos este problema para cada uno de los 48 poliedros regulares en \mathbb{E}^3 . En la sección 3.1 atacamos el problema para los poliedros regulares finitos, dando solución para el mismo en los teoremas 3.5, 3.6 y 3.8. En la sección 3.2 desarrollamos las técnicas necesarias para resolver el problema para los poliedros planos y mezclados, asentando los resultados en los teoremas 3.11, 3.13 y 3.17 a 3.20. Finalmente, en la sección 3.3 usamos los resultados obtenidos para los poliedros finitos para probar el teorema 3.23, el cual resuelve el problema para los poliedros infinitos puros.

Observe que la definición de realización usada por McMullen y Schulte en [15, 16] e introducida en la sección 1.2 de este trabajo usa fuertemente el hecho de que en el espacio euclidiano existe exactamente un segmento de recta entre dos puntos. De esta manera, es posible definir realizaciones euclidianas en términos de los vértices del poliedro y reconstruir las aristas y las caras a partir de los segmentos determinados por los puntos. Si se pretende extender la idea de realización a otros espacios, no es suficiente trabajar únicamente con los vértices. Por ejemplo en el 3-toro y en el espacio proyectivo \mathbb{P}^3 existe más de un arco de geodésica entre dos puntos, de modo que no es posible recobrar la estructura del poliedro a partir de puntos en el espacio. Por esta razón, en este trabajo preferimos seguir la metodología introducida por Bracho y otros autores en [1] para generalizar el concepto de realización de poliedros abstractos a otros espacios.

Definición 3.1. Una *gráfica realizada en \mathbb{T}^3* es un conjunto finito V de puntos en \mathbb{T}^3 , llamados vértices junto con un conjunto de segmentos de líneas E , llamados aristas, que

conectan algunas parejas de puntos en V , de tal manera que los únicos puntos de V en cada elemento de E son sus extremos.

Es claro que toda gráfica realizada en \mathbb{T}^3 tiene asociada una gráfica combinatoria sin lazos pero con posibles aristas múltiples. La condición de que no haya vértices en el interior de las aristas de una gráfica realizada en \mathbb{T}^3 es motivada por el deseo de preservar la estructura combinatoria, es decir, que las únicas aristas incidentes a un vértice, en un sentido geométrico, sean aquellas que son incidentes al vértice en un sentido combinatorio. Fuera de esto, es posible que dos aristas de una gráfica realizada en \mathbb{T}^3 se intersecten en puntos que no son vértices de la gráfica. Usaremos las gráficas toroidales para introducir la noción de realización toroidal.

Definición 3.2. Sea \mathcal{P} es un poliedro abstracto. Una *realización toroidal* de \mathcal{P} es un homomorfismo de gráficas suprayectivo $\beta : \text{Sk}^1(\mathcal{P}) \rightarrow X$ con X una gráfica realizada en \mathbb{T}^3 .

Observe que la definición 3.2 es una generalización de la definición 1.12 de realización euclidiana, definiendo β_0 y β_1 como la restricción de β a los vértices y las aristas de \mathcal{P} , respectivamente, y definiendo β_2 como la función que a cada cara de \mathcal{P} le asocia la subgráfica correspondiente de X . De esta manera, podemos pensar la realización β como la terna de funciones $(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$.

Siguiendo la terminología usada en la sección 1.2, diremos que una realización toroidal es *fiel* si β es un homomorfismo inyectivo y cada cara de \mathcal{P} está determinada por la subgráfica de X correspondiente, o bien, alternativamente si las funciones β_i para $i \in \{0, 1, 2\}$ son inyectivas. Observe que dado que la gráfica X en \mathbb{T}^3 tiene un conjunto finito de vértices, éstos siempre forman un conjunto discreto, de esta manera las realizaciones toroidales son siempre discretas. Una realización de un poliedro \mathcal{P} en \mathbb{E}^3 es simétrica si todo automorfismo de \mathcal{P} se extiende a una isometría de \mathbb{E}^3 ; la siguiente definición generaliza ese concepto a realizaciones toroidales.

Definición 3.3. Sea \mathcal{P} un poliedro abstracto y $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ una realización toroidal de \mathcal{P} . Diremos que β es *simétrica* si existe un homomorfismo $\beta_* : \Gamma(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbf{I}(\mathbb{T}^3)$ tal que

$$(F_i \gamma) \beta_i = (F_i \beta_i)(\beta_*(\gamma))$$

para todo $\gamma \in \Gamma(\mathcal{P})$ y todo $F_i \in \mathcal{P}$ de rango i , $0 \leq i \leq 2$.

En lo sucesivo, a menos que se indique explícitamente lo contrario, siempre que usemos el término *realización toroidal* nos referiremos a *realización toroidal simétrica*.

A pesar de que el concepto de realización toroidal es muy general, nuestro trabajo se restringirá a la siguiente situación. Considere \mathcal{P} un poliedro regular abstracto realizado mediante una realización simétrica, fiel y discreta en \mathbb{E}^3 . Buscamos determinar para qué grupos latiz Λ la proyección al cociente $\pi_\Lambda : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{T}_\Lambda^3$ induce una realización toroidal simétrica de un poliedro regular finito \mathcal{P}_Λ de características combinatorias similares a \mathcal{P} . En particular si \mathcal{P} es un poliedro finito, nos interesa determinar aquellos grupos latiz tales que $\mathcal{P}_\Lambda \cong \mathcal{P}$.

Si nuestro interés es que el poliedro \mathcal{P}_Λ sea geoméricamente regular, una condición necesaria es que las simetrías de \mathcal{P} induzcan isometrías de \mathbb{T}_Λ^3 . Como se probó en la sección anterior, esto es equivalente a que el grupo especial $G_o(\mathcal{P})$ asociado al grupo $G(\mathcal{P})$ de simetrías de \mathcal{P} preserve a la latiz Λ . En este capítulo nos concentraremos en ese problema, retomando la discusión acerca de las realizaciones en el capítulo 4.

Comenzaremos a estudiar latices invariantes bajo grupos de isometrías conocidos. De particular interés es el grupo de rotaciones del tetraedro $[3, 3]^+$, el cual es un grupo de 12 elementos que tiene una presentación dada por

$$[3, 3]^+ := \langle \sigma_1, \sigma_2 : \sigma_1^3 = \sigma_2^3 = (\sigma_1\sigma_2)^2 = \varepsilon \rangle.$$

Además, $[3, 3]^+$ tiene una representación euclidiana inducida por una realización del tetraedro, la cual manda σ_i en S_i , donde S_1 es la rotación $(x, y, z) \mapsto (z, -x - y)$, es decir, una rotación de $\frac{2\pi}{3}$ respecto a la recta con dirección $(1, -1, 1)$; S_2 es la rotación $(x, y, z) \mapsto (y, z, x)$, es decir, una rotación respecto a la recta con dirección $(1, 1, 1)$ por un ángulo de $\frac{\pi}{3}$. Note que S_1S_2 es el medio giro respecto al eje z y conjugando este por S_2 y S_2^2 obtenemos los medios giros respecto al eje y y al eje x . Además, conjugando $\langle S_1 \rangle$ por éstos medios giros obtenemos las rotaciones respecto a las rectas con dirección $(-1, 1, 1)$ y $(-1 - 1, 1)$.

Como se puede apreciar en el siguiente resultado, a pesar de que el grupo $[3, 3]^+$ es un grupo pequeño ya ofrece suficientes restricciones para que una latiz quede invariante bajo sus elementos.

Lema 3.4. *Si Λ es un grupo latiz tal que Λ es preservado por $[3, 3]^+$, entonces Λ es un múltiplo escalar de $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,1)}$ ó $\Lambda_{(1,1,0)}$.*

Demostración. Por lo dicho anteriormente Λ es invariante bajo los medios giros respecto a los ejes coordenados, de modo que, por el lema 2.26, Λ es invariante bajo las reflexiones en los planos coordenados. Sea Π el plano $z = 0$ y $\Lambda_0 = \Pi \cap \Lambda$. Observe que Λ_0 , pensada como latiz bidimensional, es invariante bajo la reflexión en el eje $y = 0$, pues tanto Π como Λ se preservan por el medio giro en este eje, que restringido a Π se ve como la reflexión en esa línea. Por lo tanto, gracias a la proposición 2.31, existe una transformación diagonal D_0 de Π tal que $\Lambda_0 = \Lambda_{(1,0)}D_0$ o $\Lambda_0 = \Lambda_{(1,1)}D_0$. Note que, dado que Λ es invariante respecto a la rotación S_2 que permuta los ejes coordenados cíclicamente, entonces D_0 debe ser un múltiplo escalar de la identidad y por lo tanto $\Lambda = a\Lambda_{(1,0)}$ o $\Lambda = a\Lambda_{(1,1)}$ para algún $a \in \mathbb{R}$.

Si $\Lambda_0 = a\Lambda_{(1,0)}$, entonces ae_3 es un punto de Λ en $\Pi^\perp \setminus \{o\}$ de distancia mínima a Π . Si Λ_0 es de traslación vertical respecto a Π , entonces $\Lambda = a\Lambda_{(1,0,0)}$. Si no, por la proposición 2.30 existe $w \in \Lambda \setminus \Lambda_0$ de distancia mínima a Π tal que $2w \in \Lambda_0 + ae_3$ y w se proyecta en alguno de $\frac{a}{2}e_1$, $\frac{a}{2}e_2$ o $\frac{a}{2}(e_1 + e_2)$. En la primera situación tenemos que $wS_2^{-1} \in (\Lambda \cap \Pi) \setminus \Lambda_0$, en la segunda tenemos que $wS_2 \in (\Lambda \cap \Pi) \setminus \Lambda_0$, las cuales son imposibles. De modo que la única posibilidad es que w se proyecte en $\frac{a}{2}(e_1 + e_2)$, y como $2w \in \Lambda_0 \oplus ae_3$, entonces $w = \frac{a}{2}(e_1 + e_2 + e_3)$ y por lo tanto $\Lambda = \frac{a}{2}\Lambda_{(1,1,1)}$.

Si $\Lambda_0 = a\Lambda_{(1,1)}$ entonces $\{a(e_1 + e_2), a(e_1 - e_2)\}$ es una base para Λ_0 . Además $2ae_1$ es un punto en el eje x de distancia mínima positiva a o , de modo que $2ae_3$ debe ser un punto en $\Pi^\perp \setminus \{o\}$ de distancia mínima a Π . Dado que $a(e_1 + e_2)S_2 = a(e_3 + e_1)$ y $a(e_1 + e_2)S_2^{-1} = a(e_3 + e_2)$ son puntos de Λ , entonces $a\Lambda_{(1,1,0)} \subseteq \Lambda$. Note entonces que Λ no puede ser de traslación vertical respecto a Π , y que además $w := a(e_3 + e_1)$ es un punto de $\Lambda \setminus \Lambda_0$ con distancia mínima a Π de modo que

$$\Lambda = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\Lambda_0 + kw) = a\Lambda_{(1,1,0)}. \quad \blacksquare$$

La fuerza de este lema se verá reflejada en las siguientes secciones, pues nos permitirá clasificar las latiz invariantes bajo los grupo de simetría de los poliedros finitos de una manera sencilla. También será muy útil en la sección 3.3 para cuando atacemos el problema para los poliedros puros. A continuación comenzamos la enumeración de los poliedros \mathcal{P}_Λ , a partir de las familias de poliedros regulares en \mathbb{E}^3 .

3.1. Poliedros finitos

Como se mencionó en la sección 1.2, 18 de los 48 poliedros regulares en \mathbb{E}^3 son finitos. Dos de estos poliedros, incluyendo al tetraedro, tienen grupo de simetría $[3, 3]$; otros cuatro, incluyendo al octaedro y al cubo, tienen grupo de simetría $[3, 4]$ y los doce restantes, que incluyen al icosaedro, al dodecaedro y a los poliedros de Kepler-Poinsot, tienen grupo de simetría $[3, 5]$ (ver página 15).

El objetivo de esta sección es clasificar, para cada uno de los poliedros regulares finitos \mathcal{P} en \mathbb{E}^3 , los grupos latiz Λ tales que la proyección al cociente $\pi_\Lambda : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{T}_\Lambda^3$ induce una realización toroidal simétrica de un poliedro regular \mathcal{P}_Λ . En el caso particular de los poliedros finitos, nuestro interés se concentra en la situación en la que $\mathcal{P}_\Lambda \cong \mathcal{P}$.

Gracias a la descripción geométrica de $[3, 3]^+$ en la página 51, se puede probar que

$$[3, 3]^+ \leq [3, 3] \leq [3, 4].$$

De modo que si una latiz es invariante bajo el grupo $[3, 3]$, o bajo el grupo $[3, 4]$, entonces debe ser invariante bajo el grupo $[3, 3]^+$. Gracias al lema 3.4, las latices invariantes bajo el grupo $[3, 3]^+$ son $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,1)}$, $\Lambda_{(1,1,0)}$ y todo sus múltiplos escalares. Es sencillo revisar que éstas latices son invariantes bajo los grupos $[3, 3]$ y $[3, 4]$. De ésta discusión se desprenden los siguientes resultados.

Teorema 3.5. *Sea \mathcal{P} un poliedro regular finito cuyo grupo de simetrías es $[3, 3]$. Si Λ es un grupo latiz tal que la proyección $\pi_\Lambda : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{T}_\Lambda^3$ induce una realización toroidal de \mathcal{P} en \mathbb{T}_Λ^3 , entonces Λ es un múltiplo escalar de $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,1)}$ o $\Lambda_{(1,1,0)}$.*

Teorema 3.6. *Sea \mathcal{P} un poliedro regular finito cuyo grupo de simetrías es $[3, 4]$. Si Λ es un grupo latiz tal que la proyección $\pi_\Lambda : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{T}_\Lambda^3$ induce una realización toroidal de \mathcal{P} en \mathbb{T}_Λ^3 , entonces Λ es un múltiplo escalar de $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,1)}$ o $\Lambda_{(1,1,0)}$.*

Con los poliedros cuyo grupo de simetrías es $[3, 5]$ la situación es totalmente distinta, en virtud del siguiente teorema, el cual daremos sin demostración. Una prueba se puede encontrar en [21, p. 152].

Teorema 3.7 (Restricción Cristalográfica). *Si S es una rotación de \mathbb{E}^3 que deja invariante una latiz, entonces S tiene orden 1, 2, 3, 4 ó 6.*

De aquí se sigue que ningún poliedro con grupo de simetrías $[3, 5]$ puede ser realizado de manera simétrica en \mathbb{T}_Λ^3 para ningún grupo latiz Λ , pues $[3, 5]$ contiene rotaciones de orden 5. De modo que tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.8. *Si \mathcal{P} es un poliedro con grupo de simetrías isomorfo a $[3, 5]$, entonces no existe grupo latiz Λ tal que \mathcal{P} admita una realización toroidal en \mathbb{T}_Λ^3 .*

3.2. Poliedros infinitos planos y mezclados

En esta sección abordaremos el problema de determinar las latices invariantes bajo el grupo especial aumentado $\bar{G}_o(\mathcal{P})$ para un poliedro \mathcal{P} plano o mezclado en \mathbb{E}^3 . Como se mencionó en el teorema 2.25, esta es una condición necesaria para que la proyección $\pi_\Lambda : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{T}_\Lambda^3$ induzca una realización toroidal de un poliedro \mathcal{P}_Λ . En virtud de la compacidad de \mathbb{T}^3 , es imposible tener realizaciones fieles de poliedros infinitos. En el capítulo 4 se profundiza en esta dirección y se exhiben realizaciones de poliedros finitos inducidas por las realizaciones de los poliedros infinitos.

A pesar de que los poliedros planos tienen realización en \mathbb{E}^2 , es posible pensarlos realizados en \mathbb{E}^3 encajando \mathbb{E}^2 en \mathbb{E}^3 y extendiendo las isometrías de \mathbb{E}^2 como se menciona en la página 34.

En el contexto mencionado anteriormente, las reflexiones respecto a líneas en \mathbb{E}^2 se extienden a reflexiones en planos ortogonales al plano de \mathbb{E}^2 . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el plano en el que \mathcal{P} está realizado es el plano $z = 0$.

Recordemos que en la lista de 48 poliedros regulares en \mathbb{E}^3 , seis de ellos son planos: Dos de ellos son la teselación con cuadrados $\{4, 4\}$ y su Petrial $\{\infty, 4\}_4$, los cuales tienen grupo de simetrías $[4, 4]$. Además están la teselación con triángulos equiláteros $\{3, 6\}$, la teselación con hexágonos regulares $\{6, 3\}$ y sus Petriales $\{\infty, 6\}_3$ y $\{\infty, 3\}_6$, respectivamente. Estos últimos tienen grupo de simetrías isomorfo a $[3, 6]$. De esta manera, resta estudiar las latices invariantes bajo los grupos $[4, 4]$ y $[3, 6]$ pensando sus isometrías extendidas a \mathbb{E}^3 .

El siguiente resultado nos será útil para entender las latices invariantes bajo reflexiones respecto a dos planos ortogonales, el cual a su vez servirá para clasificar las latices de rango 3 invariantes bajo las reflexiones de $[4, 4]$.

Lema 3.9. *Sean Π y Π' los planos $x = 0$ y $y = 0$, respectivamente. Si Λ es una latiz invariante bajo las reflexiones en Π y Π' entonces existe una transformación diagonal D tal que*

$$\Lambda D^{-1} \in \{\Lambda_{(1,0,0)}, \Lambda_{(1,1,0)}, \Lambda_{(1,1,1)}, \Lambda_{(1,1)} \oplus e_3, 2\Lambda_{(1,0)} \oplus (e_1 + e_3), 2\Lambda_{(1,0)} \oplus (e_2 + e_3)\}.$$

Demostración. Sean R y R' las reflexiones en Π y Π' , respectivamente. Sea Σ el plano $z = 0$. Dado que Λ es invariante respecto a R y R' , entonces lo es respecto al medio giro RR' . Gracias al lema 2.26, Λ es invariante bajo la reflexión respecto a Σ .

Sea $\Lambda_0 = \Lambda \cap \Sigma$. Dado que Λ_0 es invariante bajo las reflexiones R y R' restringidas al plano Σ , por la proposición 2.31, existe una transformación diagonal $D_0 = \text{Diag}(d_1, d_2)$ tal que

$$\Lambda_0 D_0^{-1} \in \{\Lambda_{(1,0)}, \Lambda_{(1,1)}\}.$$

Suponga que $\Lambda_0 D_0^{-1} = \Lambda_{(1,0)}$. Si Λ_0 es de traslación vertical respecto a Σ tome $d_3 = \min\{d(x, \Sigma) : x \in \Lambda \setminus \Lambda_0\}$ y $D = \text{Diag}(d_1, d_2, d_3)$ y entonces $\Lambda D^{-1} = \Lambda_{(1,0,0)}$. Si Λ_0 no es de traslación vertical, entonces, por la proposición 2.30, existe $w \in \Lambda$ tal que

$$\Lambda = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\Lambda_0 + kw),$$

$2w$ se proyecta en Σ en un punto de Λ_0 y w se proyecta en alguno de $\frac{d_1}{2}e_1$, $\frac{d_2}{2}e_2$ y $\frac{d_1}{2}e_1 + \frac{d_2}{2}e_2$. Tome $d_3 = d(2w, \Sigma)$ y defina $D = \text{Diag}(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}, \frac{d_3}{2})$. Si w se proyecta en $\frac{d_1}{2}e_1$ o en $\frac{d_2}{2}e_2$,

entonces $\Lambda D^{-1} = 2\Lambda_{(1,0)} \oplus (e_1 + e_3)$ ó $\Lambda D^{-1} = 2\Lambda_{(1,0)} \oplus (e_2 + e_3)$, respectivamente; si w se proyecta en $\frac{d_1}{2}e_1 + \frac{d_2}{2}e_2$ entonces $\Lambda D^{-1} = \Lambda_{(1,1,1)}$.

Procedamos de manera análoga si $\Lambda_0 D_0^{-1} = \Lambda_{(1,1)}$. Si Λ_0 es de traslación vertical, tome $d_3 = \min\{d(x, \Sigma) : x \in \Lambda \setminus \Lambda_0\}$ y $D = \text{Diag}(d_1, d_2, d_3)$, entonces $\Lambda D^{-1} = \Lambda_{(1,1)} + e_3$. Si Λ_0 no es de traslación vertical tome w según la proposición 2.30. Observe que en este caso una base de Λ_0 es $\{d_1e_1 + d_2e_2, d_1e_1 - d_2e_2\}$, de modo que podemos suponer que w se proyecta en alguno entre $\frac{1}{2}(d_1e_1 + d_2e_2)$, $\frac{1}{2}(d_1e_1 - d_2e_2)$ y d_1e_1 . Si w se proyecta en $\frac{1}{2}(d_1e_1 + d_2e_2)$ o $\frac{1}{2}(d_1e_1 - d_2e_2)$, entonces $w - wR$ es un punto de Λ_0 en el eje x de longitud $\frac{d_1}{2}$, lo cual es imposible, de modo que w se debe proyectar en d_1e_1 . Defina $d_3 = d(2w, \Sigma)$ y $D = \text{Diag}(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}, \frac{d_3}{2})$. Entonces $\Lambda D^{-1} = \Lambda_{(1,1,0)}$. ■

Observación 3.10. Suponga que G es un grupo de isometrías de \mathbb{E}^3 tal que R y R' , las reflexiones del lema anterior, pertenecen a G ; suponga además que existe $S \in G$ tal que $R' = S^{-1}RS$. Si Λ es una latiz invariante bajo G , en particular es invariante bajo R y R' , y entonces aplica el lema anterior. Sin embargo, observe que en esta situación, S manda Π en Π' , de modo que $\Lambda \cap \Pi$ es una sublatiz de Λ isométrica a $\Lambda \cap \Pi'$, lo cual descarta las posibilidades de que ΛD^{-1} sea $2\Lambda_{(1,0)} \oplus (e_1 + e_3)$ o $2\Lambda_{(1,0)} \oplus (e_2 + e_3)$. Además también impone restricciones sobre D , pues obliga a que $d_1 = d_2$.

Con esta observación demostrar los siguientes resultados es sencillo.

Teorema 3.11. *Sea \mathcal{P} un poliedro plano en \mathbb{E}^3 cuyo grupo de simetrías es $[4, 4]$. Si Λ es un grupo latiz tal que la proyección $\pi_\Lambda : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{T}_\Lambda^3$ induce la realización de un poliedro regular \mathcal{P}_Λ , entonces existe una transformación diagonal $D = \text{Diag}(d, d, h)$ para algunos $d, h > 0$ tal que*

$$\Lambda^{D^{-1}} \in \{\Lambda_{(1,0,0)}, \Lambda_{(1,1,1)}, \Lambda_{(1,1,0)}, \langle \Lambda_{(1,1)}, t_3 \rangle\},$$

donde t_3 es la traslación por el vector e_3 .

Demostración. La prueba se sigue del lema 3.9 y la observación 3.10, pues de acuerdo a la proposición 2.12, \mathcal{P} puede ser realizado de tal manera que R_2 sea la reflexión en el plano $y = 0$ y R_1 la reflexión en el plano $x = y$. Luego, $R_1R_2R_1$ es la reflexión en el plano $x = 0$ y por lo tanto

$$\Lambda^{D^{-1}} \in \{\Lambda_{(1,0,0)}, \Lambda_{(1,1,1)}, \Lambda_{(1,1,0)}, \langle \Lambda_{(1,1)}, t_3 \rangle\}$$

para alguna transformación $D = \text{Diag}(d, d, h)$ con $d, h > 0$.

Probemos ahora que éstas latices son invariantes, para ello observe que si $S \in G_o(\mathcal{P})$ entonces S preserva el subespacio generado por e_3 y su complemento ortogonal, por lo tanto si D es una transformación diagonal de la forma $\text{Diag}(d, d, h)$, entonces $SD = DS$ y por lo tanto $SD^{-1} = D^{-1}S$. De aquí se tiene que

$$\Lambda D^{-1}S = \Lambda D^{-1} \text{ si y solo si } \Lambda S = \Lambda$$

por lo tanto, resta revisar que $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,1)}$, $\Lambda_{(1,1,0)}$ y $\Lambda_{(1,1)} \oplus e_3$ son invariantes bajo $G_o(\mathcal{P})$. Para ello observe que $G_o(\mathcal{P})$ está generado por R'_0 , R'_1 y R'_2 , las cuales son las reflexiones en los planos $x = 0$, $x = y$ y $y = 0$, respectivamente. Éstas sí preservan a las latices $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,1)}$, $\Lambda_{(1,1,0)}$ y $\Lambda_{(1,1)} \oplus e_3$ y por lo tanto $G_o(\mathcal{P})$ las preserva. ■

Observación 3.12. Note que la observación hecha al final de la prueba del teorema 3.11 es general. Es decir, suponga que G es un grupo de isometrías lineales y D es una transformación diagonal tal que, para todo $S \in G$, $SD = DS$. Si Λ es una latiz, entonces Λ es invariante bajo la acción de G si y solo si ΛD lo es.

Siguiendo las mismas ideas que la prueba anterior, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.13. *Sea $\mathcal{P} = \{4, 4\} \# \mathcal{Q}$ un poliedro regular mezclado de \mathbb{E}^3 o el Petrial de alguno de éstos, donde \mathcal{Q} es $\{ \}$ o $\{\infty\}$. Sea Λ un grupo latiz tal que $\pi_\Lambda : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{T}_\Lambda^3$ induce una realización de un poliedro regular \mathcal{P}_Λ , entonces existe una transformación diagonal $D = \text{Diag}(d, d, h)$ para algunos $d, h > 0$ tal que*

$$\Lambda^{D^{-1}} \in \{\Lambda_{(1,0,0)}, \Lambda_{(1,1,1)}, \Lambda_{(1,1,0)}, \langle \Lambda_{(1,1)}, t_3 \rangle\},$$

con t_3 la traslación por e_3 .

Demostración. La prueba es esencialmente la misma que del teorema 3.11. Si $\mathcal{Q} = \{ \}$, entonces R_1 es la reflexión respecto al plano $x = y$; si $\mathcal{Q} = \{\infty\}$, R_1 es el medio giro respecto a la recta por el origen con dirección $(1, 1, 0)$. En ambos casos R_2 es la reflexión en el plano $y = 0$ y $R_1 R_2 R_1$ es la reflexión en el plano $x = 0$ y por lo tanto existe una transformación diagonal $D = \text{Diag}(d, d, h)$ tal que $\Lambda D^{-1} \in \{\Lambda_{(1,0,0)}, \Lambda_{(1,1,1)}, \Lambda_{(1,1,0)}, (\Lambda_{(1,1)} \oplus e_3)\}$.

De manera similar a la demostración del teorema 3.11, probemos que las latices $\Lambda_{(1,0,0)}D$, $\Lambda_{(1,1,1)}D$, $\Lambda_{(1,1,0)}D$ y $(\Lambda_{(1,1)} \oplus e_3)D$ son invariantes bajo $G_o(\mathcal{P})$ para toda transformación diagonal $D = \text{Diag}(d, d, h)$. Para ello simplemente recurra a la observación 3.12 y note que las latices $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,1)}$, $\Lambda_{(1,1,0)}$ y $(\Lambda_{(1,1)} \oplus e_3)$ son invariantes bajo los generadores R'_0 , R'_1 y R'_2 . ■

Observe que en el contexto de los Teoremas 3.11 y 3.13, si $\Lambda D^{-1} \neq \Lambda_{(1,1)} \oplus e_3$, Λ consta de los vértices de una teselación con prismas de altura h sobre cuadrados cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados, de estos vértices y los centros de los prismas o bien de los vértices y los centros de las caras de estos prismas, dependiendo si ΛD^{-1} es $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,1)}$ o $\Lambda_{(1,1,0)}$, respectivamente. Si ΛD^{-1} es $(\Lambda_{(1,1)} \oplus e_3)$, entonces Λ consta de los vértices de una teselación de altura h sobre cuadrados cuyos lados forman un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con los ejes coordenados.

Procederemos de manera análoga para los poliedros planos con grupo de simetrías [3, 6] así como para los poliedros mezclados de tipo $\{3, 6\} \# \mathcal{Q}$ y $\{6, 3\} \# \mathcal{Q}$. Los siguientes resultados nos permiten entender la estructura de las latiz invariantes bajo algunas de las simetrías de los poliedros mencionados.

Lema 3.14. *Sea Λ una latiz de rango 3 invariante bajo una rotación S de ángulo $\frac{2\pi}{3}$ respecto a una recta L que contiene al origen o . Sea Σ el plano ortogonal a L por o , entonces $\Lambda_0 = \Lambda \cap \Sigma$ es una latiz de rango 2 y $\Lambda \cap L$ es una latiz de rango 1. Además, si $x \in \Lambda$, entonces $3x$ se proyecta en Σ en un punto de Λ_0 .*

Demostración. Tome $y \in \Lambda \setminus (L \cup \Sigma)$. Observe que $y - yS$ y $y - yS^2$ son dos vectores linealmente independientes en Λ_0 , además $y + yS + yS^2 \in (\Lambda \cap L) \setminus \{o\}$, y por lo tanto, gracias al lema 2.27, Λ_0 y $\Lambda \cap L$ son latices de rango 2 y 1, respectivamente.

Ahora, si $x \in \Lambda$, entonces $w := x + xS + xS^2 \in L$ y es tal que $d(w, \Sigma) = 3d(x, \Sigma)$. Por lo tanto $3x - w \in \Lambda_0$. ■

Lema 3.15. *Sean Π el plano $y = 0$ y sea Π' un plano de \mathbb{E}^3 que forma un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con Π tal que $\Pi \cap \Pi'$ es el eje z . Sean R y R' las reflexiones respecto a Π y Π' , respectivamente. Si Λ es una latiz invariante bajo R y R' , entonces existe una transformación diagonal $D = \text{Diag}(d, d, h)$ tal que*

$$\Lambda D^{-1} \in \left\{ (\Lambda_{\{3,6\}} \oplus e_3), (\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus e_3), (\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus u) \right\}$$

donde u es o bien $\frac{1}{3}(1, 0, 1)$ o bien $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$.

Demostración. Sea Σ el plano $z = 0$, $\Lambda_0 = \Sigma \cap \Lambda$ y $L = \Pi \cap \Pi'$. Note que RR' es una rotación alrededor de L de ángulo $\frac{2\pi}{3}$ y gracias al lema 3.14, Λ_0 es una latiz de rango 2. Tome $x \in \Lambda_0 \setminus \Pi^\perp$, observe que $x + xR$ es un punto en $\Lambda_0 \cap \Pi$, de modo que la recta $\Sigma \cap \Pi$ contiene una infinidad de puntos de Λ_0 ; de manera análoga, la recta $\Sigma \cap \Pi'$ contiene una infinidad de puntos de Λ_0 . Tome $v_1 \in \Lambda_0 \cap \Pi$ y $v_2 \in \Lambda_0 \cap \Pi'$ de norma mínima positiva y tales que el ángulo entre ellos sea $\frac{\pi}{3}$ (y no $\frac{2\pi}{3}$).

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $v_1 = |v_1|(1, 0)$ y $v_2 = |v_2|(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Luego $v_2 + v_2R = |v_2|(1, 0)$ de donde $|v_1| \leq |v_2|$. Además $v_1 + v_1R' = |v_1|(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, de donde $|v_2| \leq |v_1|$ y por lo tanto $|v_1| = |v_2|$ (figura 3.1). Si $\{v_1, v_2\}$ es una base para Λ_0 , entonces $\Lambda_0 = d\Lambda_{\{3,6\}}$ para $d = |v_1|$. Si $\{v_1, v_2\}$ no es base de Λ , entonces existe un punto x de Λ en el interior del paralelogramo determinado por o , v_1 , v_2 y $v_1 + v_2$, dado que x no puede estar en la frontera de dicho paralelogramo ya que esto contradice la minimalidad de $|v_1|$. Si x está en el triángulo determinado por v_1 , v_2 y $v_1 + v_2$, entonces $xR + (v_2 - v_1)$ está en el triángulo ov_1v_2 , de modo que podemos suponer de una vez que x está en dicho triángulo. Note que $x + xR$ es un múltiplo entero de v_1 , pero por minimalidad de $|v_1|$, $x + xR = v_1$

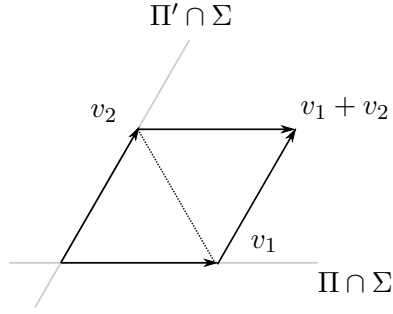


Figura 3.1

y entonces x está en la mediatriz de v_1 y o . De manera análoga, se tiene que $x + xR' = v_2$ y por lo tanto x es el centro del triángulo ov_1v_2 y entonces $\Lambda_0 = d\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}$.

Gracias al lema 3.14, $\Lambda \cap L$, es una latiz de rango 1, tome $w = he_3$ un generador de tal latiz. Defina $D = \text{Diag}(d, d, h)$.

Observe que si $\Lambda_0 = d\Lambda_{\{3,6\}}$, entonces $(0, \sqrt{3}d, 0)$, $(\frac{3d}{2}, -\frac{\sqrt{3}d}{2}, 0)$ y $(0, 0, h)$ son puntos de Λ de norma mínima en Π^\perp , Π'^\perp y Σ^\perp , respectivamente; si $\Lambda_0 = d\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}$ entonces éstos son $(0, \frac{\sqrt{3}d}{3}, 0)$, $(\frac{d}{2}, -\frac{\sqrt{3}d}{6}, 0)$ y $(0, 0, h)$.

Suponga que $\Lambda_0 = d\Lambda_{\{3,6\}}$, probemos entonces que $\Lambda = \Lambda_0 \oplus w$. Si $\Lambda \setminus (\Lambda_0 \oplus w) \neq \emptyset$, entonces existe un punto x de Λ que se proyecta a Σ sobre el triángulo ov_1v_2 y tal que $d(x, \Sigma) < h$. Note que gracias a la minimalidad de h , es imposible que $x \in \Pi \cap \Pi' = \Sigma^\perp$. Si $x \notin \Pi$, se tiene que $0 < |x - xR| \leq \sqrt{3}d$ y además $x - xR$ es un punto en Π^\perp , por lo tanto si $|x - xR| < \sqrt{3}d$ tenemos una contradicción, de modo que $|x - xR| = \sqrt{3}d$ y x se proyecta a Σ en v_2 , lo cual es una contradicción pues $x - v_2$ es un punto en Σ^\perp de norma menor que h . Se puede proceder de manera análoga si $x \notin \Pi'$. Por lo tanto $\Lambda D^{-1} = \Lambda_{\{3,6\}} \oplus e_3$.

La otra posibilidad es que $\Lambda_0 = d\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}$ y sea c_1 el centro del triángulo determinado por o , v_1 y v_2 ; sea c_2 el centro del triángulo determinado por o , v_1 y $v_1 - v_2$, de tal forma que $\{c_1, c_2\}$ es una base para Λ_0 (figura 3.2). Si Λ es de traslación vertical respecto a Σ , tenemos que $\Lambda D^{-1} = \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus e_3$. Suponga entonces que $\Lambda \setminus (\Lambda_0 \oplus w) \neq \emptyset$, en esta situación existe un punto $x \in \Lambda$ contenido en el prisma de altura h y con base el paralelogramo $oc_1v_1c_2$. Tome x de distancia mínima positiva a Σ , de tal manera que $\Lambda = \Lambda_0 \oplus x$.

Observe que $d(x, \Pi) \leq \frac{\sqrt{3}d}{6}$, y además $x - xR \in \Pi^\perp$, de modo que o bien $x \in \Pi$ o $d(x, \Pi) = \frac{\sqrt{3}d}{6}$. Sin embargo, si $x \notin \Pi$ la única posibilidad es que x se proyecte en c_1 , implicando que $x \in \Lambda_0 \oplus w$ lo cual es una contradicción. Suponga entonces que $x \in \Pi$, en virtud del lema 3.14, $3x$ se proyecta en un punto de Λ_0 , de modo que x se proyecta o bien en $\frac{1}{3}v_1$ o bien en $\frac{2}{3}v_1$; además $d(x, \Sigma)$ es o bien $\frac{h}{3}$ o bien $\frac{2h}{3}$; sin embargo, si $d(x, \Sigma) = \frac{2h}{3}$ entonces $d(2x - w, \Sigma) = \frac{h}{3}$ contradiciendo la elección de x , de modo que $d(x, \Sigma) = \frac{h}{3}$. Por

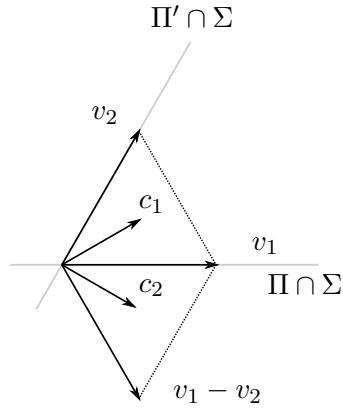


Figura 3.2

lo tanto,

$$x \in \left\{ \frac{1}{3}(v_1 + w), \frac{1}{3}(2v_1 + w) \right\}.$$

Finalmente observe que $\frac{1}{3}(2v_1 + w) = \frac{1}{3}(v_2 + w) + v_1 - c_1$. Por lo tanto podemos tomar

$$y \in \left\{ \frac{1}{3}(v_1 + w), \frac{1}{3}(v_2 + w) \right\}$$

tal que $\Lambda = \Lambda_0 \oplus x = \Lambda_0 \oplus y$. Definiendo $u = yD^{-1}$ tenemos el resultado. ■

Lema 3.16. Sea Π el plano $x = 0$ y Π' el plano $-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0$. Sean R y R' las reflexiones respecto a los planos Π y Π' , respectivamente. Si Λ es una latiz invariante bajo las reflexiones R y R' , entonces existe una transformación diagonal $D = \text{Diag}(d, d, h)$ tal que

$$\Lambda D^{-1} \in \left\{ \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus e_3, \Lambda_{\{3,6\}} \oplus e_3, \Lambda_{\{3,6\}} \oplus u \right\}$$

donde u es uno entre $\frac{1}{3}(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ y $\frac{1}{3}(0, \sqrt{3}, 1)$.

Demostración. Considere la transformación lineal T definida por

$$T : (x, y, z) \mapsto \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, z \right).$$

es decir, una rotación de $\frac{\pi}{6}$ respecto al eje z .

Sean $S = T^{-1}RT$ y $S' = T^{-1}R'T$ las reflexiones respecto a los planos ΠT y $\Pi' T$, respectivamente. Note que Λ es invariante bajo R y R' si y solo si ΛT es invariante bajo S

y S' . Observe ahora que S y S' satisfacen las hipótesis del lema 3.15, de modo que existe una transformación diagonal $D' = \text{Diag}(d', d', h)$ tal que

$$\Lambda TD'^{-1} \in \left\{ (\Lambda_{\{3,6\}} \oplus e_3), (\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus e_3), (\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus v) \right\}$$

donde v es $\frac{1}{3}(1, 0, 1)$ o $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$.

Tenemos que $TD'^{-1} = D'^{-1}T$, por lo tanto

$$\Lambda D'^{-1} \in \left\{ (\Lambda_{\{3,6\}} \oplus e_3)T^{-1}, (\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus e_3)T^{-1}, (\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus v)T^{-1} \right\}$$

para los valores antes mencionados de v .

Además observe que $\Lambda_{\{3,6\}}T^{-1} = \sqrt{3}\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}$ y $e_3T^{-1} = e_3$. Para el caso $\Lambda D'^{-1} = (\Lambda_{\{3,6\}} \oplus e_3)T^{-1}$ defina $d = \sqrt{3}d'$ y $D = \text{Diag}(d, d, h)$ y tenemos que $\Lambda D^{-1} = \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus e_3$.

Note que $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Lambda_{\{3,6\}}$. Además, $\frac{1}{3}(1, 0, 1)T^{-1} = \frac{1}{3}(\frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, 1)$ y $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)T^{-1} = \frac{1}{3}(0, 1, 1)$. Defina entonces $d = \frac{d'}{\sqrt{3}}$ y $D = \text{Diag}(d, d, h)$, y entonces

$$\Lambda D^{-1} = \begin{cases} \Lambda_{\{3,6\}} \oplus \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right) & \text{si } v = \frac{1}{3}(1, 0, 1), \\ \Lambda_{\{3,6\}} \oplus \frac{1}{3} (0, \sqrt{3}, 1) & \text{si } v = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right). \end{cases}$$

■

Las latices construidas en los lemas anteriores son más familiares de lo que parecen a primera vista. Las latices $\Lambda_{\{3,6\}} \oplus e_3$ y $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus e_3$ son latices formadas por los puntos de una teselación de prismas triangulares de altura h ; en el primer caso, uno de los lados de cada triángulo es paralelo al eje x , en el segundo uno de los lados es paralelo al eje y . La latiz $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} + u$, para los valores indicados de u en el lema 3.15, pudiera parecer complicada, sin embargo, para $D = \text{Diag}(\sqrt{6}, \sqrt{6}, \sqrt{3})$, $(\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} + u)D$ es una latiz determinada por los vértices de una teselación de cubos de lado 1, de tal manera que el eje z es paralelo a una de las diagonales de los cubos. Las latices $\Lambda_{\{3,6\}} \oplus u$ para los valores de u en el lema 3.16 son simplemente el resultado de rotar por $\frac{\pi}{6}$ respecto al eje z y dilatar en el plano $z = 0$ las del lema 3.15.

La figura 3.3a muestra la proyección de $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus u$ en el plano $z = 0$. Si $u = \frac{1}{3}(1, 0, 1)$ entonces los puntos de la forma $v + ku$ para $v \in \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}$ se proyectan en puntos negros si $k \equiv 0 \pmod{3}$, en puntos rojos si $k \equiv 1 \pmod{3}$ y en puntos azules si $k \equiv -1 \pmod{3}$. Los papeles de los puntos rojos y azules se invierten si $u = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$. De manera similar la figura 3.3b muestra la proyección de $\Lambda_{\{3,6\}} \oplus u$ en el plano $z = 0$. En el caso en el que $u = \frac{1}{3}(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$, entonces un punto de la forma $v + ku$ para $v \in \Lambda_{\{3,6\}}$, se proyecta en

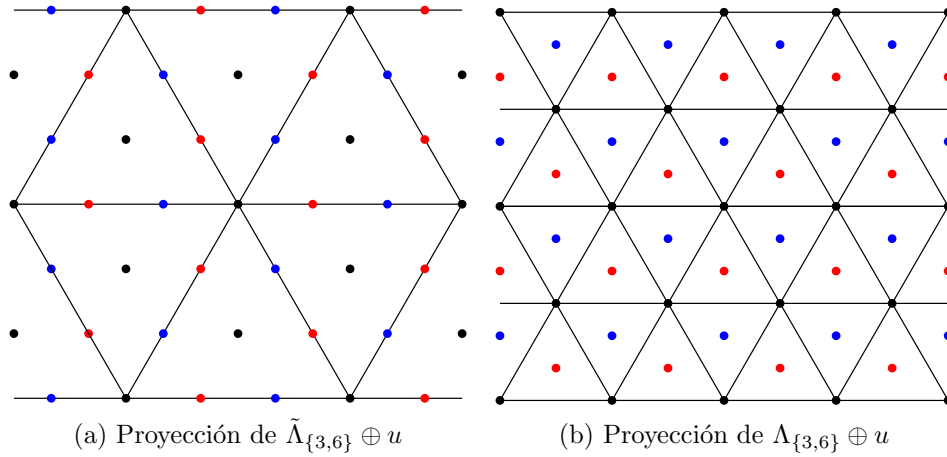


Figura 3.3

un punto negro si $k \equiv 0 \pmod{3}$, rojo si $k \equiv 1 \pmod{3}$ y azul si $k \equiv -1 \pmod{3}$. Si $u = \frac{1}{3}(0, \sqrt{3}, 1)$, el papel del rojo y el azul se invierte.

Los lemas 3.15 y 3.16 son análogos al lema 3.9 para los poliedros regulares planos y mezclados relacionados con el grupo $[3, 6]$. Observe que en el caso de $\{3, 6\}$, de acuerdo con la tabla 1.2 y la proposición 2.12, R_2 y $R_1R_2R_1$ son dos reflexiones que satisfacen las hipótesis del lema 3.15. Gracias a esto, el siguiente resultado es sencillo de demostrar.

Teorema 3.17. *Sea \mathcal{P} un poliedro regular plano en \mathbb{E}^3 cuyo grupo de simetrías es isomorfo a $[3, 6]$. Si Λ es un grupo latiz tal que la proyección $\pi_\Lambda : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{T}_\Lambda^3$ induce una realización de un poliedro regular en \mathbb{T}_Λ^3 , entonces existe una transformación diagonal $D = \text{Diag}(d, d, h)$ tal que*

$$\Lambda^{D^{-1}} \in \{ \langle \Lambda_{\{3,6\}}, t_3 \rangle, \langle \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}, t_3 \rangle \}$$

con t_3 la translación por e_3 .

Demostración. En virtud del teorema 2.25, debemos encontrar las latices invariantes bajo el grupo especial $G_o(\mathcal{P})$ asociado al grupo de simetrías $G(\mathcal{P})$ de \mathcal{P} . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que \mathcal{P} es el poliedro $\{3, 6\}$. Como se mencionó antes, R_2 y $R_1R_2R_1$ son reflexiones que satisfacen las hipótesis del lema 3.15, de modo que si Λ es la latiz asociada a Λ , entonces se debe satisfacer que

$$\Lambda^{D^{-1}} \in \{ (\Lambda_{\{3,6\}} \oplus e_3), (\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus e_3), (\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus u) \}$$

para $u \in \{ \frac{1}{3}(1, 0, 1), \frac{1}{3}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1) \}$. De tal manera que resta verificar que las primeras dos situaciones son posibles y que la tercera no lo es para ninguna elección de u .

Note que para todo $S \in G_o(\mathcal{P})$ se tiene que $SD = DS$, y gracias a la observación 3.12, resta determinar cuáles de las latices $\Lambda_{\{3,6\}} \oplus e_3$, $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus e_3$, $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus u$, para ambos valores de u , son preservadas por las partes lineales de los generadores R_0 , R_1 y R_2 de $G(\mathcal{P})$ descritos en la tabla 1.2. Note que R'_i , para $i \in \{0, 1, 2\}$ preserva a $\Lambda_{\{3,6\}}$ y a $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}$. Además, éstas isometrías fijan a e_3 , de modo que $G(\mathcal{P})$ preserva a $\Lambda_{\{3,6\}} \oplus e_3$ y $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus e_3$.

Finalmente, observe que

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(1, 0, 1)R'_0 &= \frac{1}{3}(-1, 0, 1) \text{ y} \\ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)R'_0 &= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right), \end{aligned}$$

y dado que

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(-1, 0, 1) &\notin \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus \frac{1}{3}(1, 0, 1) \text{ y} \\ \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) &\notin \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \end{aligned}$$

entonces ΛD^{-1} no puede ser ninguna de éstas latices, por lo tanto,

$$\Lambda D^{-1} \in \left\{ (\Lambda_{\{3,6\}} \oplus e_3), (\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus e_3) \right\},$$

lo cual concluye el resultado. ■

Tenemos un resultado similar para algunos de los poliedros mezclados.

Teorema 3.18. *Si \mathcal{P} es alguno de los poliedros $\{3, 6\} \# \{ \}$, $(\{3, 6\} \# \{ \})^\pi$, $\{6, 3\} \# \{ \infty \}$ o $(\{6, 3\} \# \{ \infty \})^\pi$ y Λ es un grupo latiz tal que la proyección $\pi_\Lambda : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{T}_\Lambda^3$ induce una realización de un poliedro regular en \mathbb{T}_Λ^3 , entonces existe una transformación diagonal $D = \text{Diag}(d, d, h)$ tal que*

$$\Lambda^{D^{-1}} \in \{ \langle \Lambda_{\{3,6\}}, t_3 \rangle, \langle \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}, t_3 \rangle \},$$

con t_3 la translación por e_3 .

Demostración. Dado que $G(\mathcal{P}) = G(\mathcal{P}^\pi)$, podemos trabajar únicamente con $\{3, 6\} \# \{ \}$ y $\{6, 3\} \# \{ \infty \}$, y usar los generadores de la tabla 1.3. De manera similar a la prueba del teorema 3.17 se puede recurrir al lema 3.15. Además, en ambos casos se tiene que el subespacio generado por e_3 y su complemento ortogonal son invariantes bajo $G_o(\mathcal{P})$, de modo que $SD = DS$ para todo elemento $S \in G_o(\mathcal{P})$. Sólo resta revisar cuáles de las latices $(\Lambda_{\{3,6\}} \oplus e_3)$, $(\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus e_3)$ y $(\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus u)$, con $u \in \{ \frac{1}{3}(1, 0, 1), \frac{1}{3}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1) \}$ son invariantes bajo R'_0 , R'_1 y R'_2 .

De nuevo, $\Lambda_{\{3,6\}}$ y $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}$ son preservadas por R'_0, R'_1 y R'_2 y $e_3 R'_i = \pm e_3$ para cualquiera de las elecciones de \mathcal{P} , de modo que las latices $(\Lambda_{\{3,6\}} \oplus e_3)$ y $(\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus e_3)$ son preservadas por ambos grupos.

Si $\mathcal{P} = \{3, 6\} \# \{ \}$, entonces R'_0 es la reflexión respecto al plano $x = 0$ y procediendo de la misma manera que en la prueba del teorema 3.17, se concluye que las latices $(\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus u)$ no son preservadas por $G_o(\mathcal{P})$, el grupo especial asociado a $G(\mathcal{P})$.

Ahora, si $\mathcal{P} = \{6, 3\} \# \{\infty\}$ y Λ es invariante bajo $G_o(\mathcal{P})$, entonces debe ser invariante bajo $\tilde{G}_o(\mathcal{P})$. Note que $-R'_1 R'_0 R'_1 R'_0 R'_1$ y $-(R'_1 R'_0)^2 R'_1 (R'_0 R'_1)^2$ son reflexiones como en el lema 3.15. Además R_0 es el medio giro respecto al eje x , de modo que Λ debe ser invariante respecto $-R_0$, que es la reflexión en el plano $x = 0$. Procedemos de la misma manera a como lo hemos hecho antes y concluimos que Λ no puede ser $(\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus u)$ para ninguna elección de u .

Por lo tanto, en cualquiera de los dos casos tenemos que

$$\Lambda D^{-1} \in \left\{ (\Lambda_{\{3,6\}} \oplus e_3), (\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus e_3) \right\},$$

tal como queríamos. ■

El siguiente resultado también es consecuencia del lema 3.15, sin embargo, ilustra una sutil diferencia con los teoremas 3.17 y 3.18. Esta diferencia está relacionada con el hecho de que las isometrías consideradas sean medios giros y no reflexiones.

Teorema 3.19. *Si \mathcal{P} es el poliedro $\{3, 6\} \# \{\infty\}$ o su Petrial y Λ es un grupo latiz tal que la proyección $\pi_\Lambda : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{T}_\Lambda^3$ induce una realización de un poliedro regular en \mathbb{T}_Λ^3 , entonces existe una transformación diagonal $D = \text{Diag}(d, d, h)$ tal que*

$$\Lambda^{D^{-1}} \in \{ \langle \Lambda_{\{3,6\}}, t_3 \rangle, \langle \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}, t_3 \rangle \langle \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}, t_u \rangle, \langle \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}, t_v \rangle \},$$

donde los vectores de traslación de t_3, t_u, t_v son $e_3, u = \frac{1}{3}(1, 0, 1)$ y $v = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$, respectivamente.

Demostración. De manera similar a lo hecho antes podemos suponer que \mathcal{P} es $\{3, 6\} \# \{\infty\}$ y usar los generadores de la tabla 1.3. Recurriendo al lema 3.15 y procediendo de manera análoga a los resultados anteriores, resta probar que las latices $\Lambda_{\{3,6\}} \oplus e_3, \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus e_3, \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus u$ y $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus v$ son invariantes bajo el grupo especial $G_o(\mathcal{P})$ generado por R'_0, R'_1, R'_2 . Observe que R'_i preserva a $\Lambda_{\{3,6\}}$ y a $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}$, además $e_3 R'_0 = e_3 R'_1 = -e_3$ y $e_3 R'_2 = e_3$, de modo que $G_o(\mathcal{P})$ preserva las latices $\Lambda_{\{3,6\}} \oplus e_3$ y $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus e_3$.

Tome $c = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0)$ y note que, de acuerdo a su definición en la página 46, $\{e_1, c\}$ es una base para $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}$. Luego

$$\begin{aligned} uR'_0 &= \frac{1}{3}(-1, 0, -1) = -u \\ uR'_1 &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right) = c - u \\ uR'_2 &= u \end{aligned}$$

de modo que $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus u$ es preservada por $G_0(\mathcal{P})$. De manera similar

$$\begin{aligned} vR'_0 &= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right) = 2c - e_1 - v \\ vR'_1 &= \frac{1}{3}(1, 0, -1) = c - v \\ vR'_2 &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) e_1 - 2c + v \end{aligned}$$

Por lo tanto $G_0(\mathcal{P})$ preserva a $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus v$ y tenemos el resultado. ■

Hasta ahora hemos resuelto nuestro problema para todos los poliedros mezclados de tipo $\{3, 6\} \# \mathcal{Q}$ y $\{6, 3\} \# \mathcal{Q}$ así como para sus Petriales, salvo para $\{6, 3\} \# \{ \}$ y $(\{6, 3\} \# \{ \})^\pi$. De manera similar a como el lema 3.15 se usó para demostrar los teoremas 3.17 a 3.19, usaremos el lema 3.16 para demostrar el siguiente resultado, pues para el caso de que \mathcal{P} sea $\{6, 3\} \# \{ \}$, R_1 y R'_2 son dos reflexiones que satisfacen las hipótesis del lema 3.16.

Teorema 3.20. *Si \mathcal{P} es el poliedro $\{6, 3\} \# \{ \}$ o su Petrial y Λ es un grupo latiz tal que la proyección $\pi_\Lambda : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{T}_\Lambda^3$ induce una realización de un poliedro regular en \mathbb{T}_Λ^3 , entonces existe una transformación diagonal $D = \text{Diag}(d, d, h)$ tal que*

$$\Lambda^{D^{-1}} \in \left\{ \langle \Lambda_{\{3,6\}}, t_3 \rangle, \langle \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}, t_3 \rangle, \langle \Lambda_{\{3,6\}}, t_u \rangle, \langle \Lambda_{\{3,6\}}, t_v \rangle \right\}$$

donde los vectores de traslación de t_3 , t_u y t_v son e_3 , $u = \frac{1}{3}(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ y $v = \frac{1}{3}(0, \sqrt{3}, 1)$, respectivamente.

Demostración. Podemos suponer que \mathcal{P} es $\{6, 3\} \# \{ \}$ y usar los generadores de la tabla 1.3. Gracias al lema 3.16, resta revisar que las latices $\Lambda_{\{3,6\}} \oplus e_3$, $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus e_3$, $\Lambda_{\{3,6\}} \oplus u$ y $\Lambda_{\{3,6\}} \oplus v$ son invariantes bajo el grupo especial $G_o(\mathcal{P})$. Para ello basta revisarlo en los generadores R'_0 , R'_1 y R'_2 .

Observe que para cada $i \in \{0, 1, 2\}$, R'_i preserva la teselación de triángulo, por lo tanto preserva a $\Lambda_{\{3,6\}}$ y a $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}$. Además, $e_3 R'_i = \pm e_3$ de modo que las latices $\Lambda_{\{3,6\}} \oplus e_3$ y $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}} \oplus e_3$ son preservadas por $G_o(\mathcal{P})$.

Como antes, tome $w = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ y recuerde que, según la definición de la página 46, $\{w, e_1\}$ es una base para $\Lambda_{\{3,6\}}$. Luego observe que

$$\begin{aligned} uR'_0 &= \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1 \right) = e_1 - u, \\ uR'_1 &= u, \\ uR'_2 &= \frac{1}{3} \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right) = u - e_1, \end{aligned}$$

de modo que $G_o(\mathcal{P})$ preserva a $\Lambda_{\{3,6\}} \oplus u$. De manera similar

$$\begin{aligned} vR'_0 &= \frac{1}{3} \left(0, -\sqrt{3}, -1 \right) = -v, \\ vR'_1 &= \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right) = e_1 - w + v, \\ vR'_2 &= v, \end{aligned}$$

de modo que $G_o(\mathcal{P})$ preserva también a $\Lambda_{\{3,6\}} \oplus v$ ■

En los teoremas 3.11, 3.13 y 3.17 a 3.20 hemos resuelto el problema a atacar para los poliedros infinitos puros planos y mezclados de \mathbb{E}^3 . En la siguiente sección atacaremos el problema para los poliedros infinitos puros.

3.3. Poliedros infinitos puros

En esta sección, \mathcal{P} es un poliedro regular infinito puro realizado en \mathbb{E}^3 , es decir, uno de los 12 de la ecuación (1.9) en la página 27; $G(\mathcal{P})$ es su grupo de simetrías, $G_o(\mathcal{P})$ el grupo especial asociado y $\tilde{G}_o(\mathcal{P})$ el grupo especial aumentado. En virtud del teorema 2.25, para clasificar los grupos latiz Λ tales que la proyección $\pi_\Lambda : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{T}_\Lambda^3$ induce una realización toroidal de un poliedro finito \mathcal{P}_Λ resta clasificar aquellas latices que son invariantes bajo el grupo $\tilde{G}_o(\mathcal{P})$. Por esta razón, nos concentraremos en estudiar las propiedades de éstos grupos.

El objetivo de esta sección es concluir con el teorema 3.23, para ello probemos primero el siguiente resultado, el cual muestra una parte de dicho teorema.

Lema 3.21. Si \mathcal{P} es un poliedro regular puro en \mathbb{E}^3 , $a \in \mathbb{R}$ y

$$\Lambda \in \{\Lambda_{(1,0,0)}, \Lambda_{(1,1,1)}, \Lambda_{(1,1,0)}\},$$

entonces $a\Lambda$ es invariante bajo $\bar{G}_o(\mathcal{P})$.

Demostración. Dado que $\bar{G}_o(\mathcal{P}) \leq \mathbf{O}(3)$ entonces basta probar que cada una de las latices es invariante bajo $\bar{G}_o(\mathcal{P})$. Observe que si S es una isometría lineal que preserva a $\Lambda_{(1,0,0)}$, entonces $e_i S \in \{\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3\}$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ y además, si $i \neq j$ entonces $e_i S \neq \pm e_j S$ de modo que S induce una permutación σ de $\{1, 2, 3\}$ dada por $e_i S = \pm e_{i\sigma}$. Gracias a esta observación tenemos que si S es una isometría que preserva a $\Lambda_{(1,0,0)}$, entonces S preserva a $\Lambda_{(1,1,0)}$ y a $\Lambda_{(1,1,1)}$, pues note que

$$\begin{aligned} (e_i + e_j)S &= \pm e_{i\sigma} \pm e_{j\sigma} \in \Lambda_{(1,1,0)} \\ (e_1 + e_2 + e_3)S &= \pm e_{1\sigma} \pm e_{2\sigma} \pm e_{3\sigma} = \pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \in \Lambda_{(1,1,1)} \end{aligned}$$

y recuerde que $\{e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1\}$ y $\{2e_1, 2e_2, e_1 + e_2 + e_3\}$ son bases de $\Lambda_{(1,1,0)}$ y $\Lambda_{(1,1,1)}$, respectivamente.

De modo que basta probar que $\bar{G}_o(\mathcal{P})$ preserva $\Lambda_{(1,0,0)}$ para cada poliedro \mathcal{P} . Observe que, de acuerdo a la tabla 1.4, para cada poliedro puro \mathcal{P} , R_i manda el al origen o en un punto de coordenadas enteras, para cada $i \in \{0, 1, 2\}$. Luego, en virtud del lema 2.6 $R'_i = R_i t_i$ donde t_i es la traslación por el vector oR_i , el cual tiene coordenadas enteras. Dado que tanto t_i como R_i preservan a $\Lambda_{(1,0,0)}$, entonces R'_i preserva a $\Lambda_{(1,0,0)}$, esto para cada $i \in \{0, 1, 2\}$. ■

El siguiente resultado será fundamental en la demostración del teorema 3.23.

Lema 3.22. Si \mathcal{P} es un poliedro regular puro en \mathbb{E}^3 , entonces $\bar{G}_o(\mathcal{P})$ contiene a $[3, 3]$ o a $[3, 4]$.

Demostración. Note que si R_i es alguno de los generadores de la tabla 1.4, entonces R'_i es un medio giro respecto a una recta que contiene al origen o o una reflexión respecto a un plano que contiene a o . Defina S_i como R'_i o $-R'_i$ según R'_i sea una reflexión o un medio giro, de tal suerte que S_i es una reflexión en un plano. Note que $H := \langle S_0, S_1, S_2 \rangle$ es un grupo finito generado por reflexiones. Además, dado que \mathcal{P} es puro H es *irreducible*, es decir, no existe un subespacio propio no trivial invariante bajo H , por lo tanto H debe ser $[3, 3]$, $[3, 4]$, $[4, 3]$, $[3, 5]$ y $[5, 3]$ (ver [5, §11.5]), pero el teorema 3.7 descarta a $[3, 5]$ y a $[5, 3]$, pues como se vio en el lema 3.21 H preserva a $\Lambda_{(1,0,0)}$. De modo que H debe ser $[3, 3]$, $[3, 4]$ o $[4, 3]$.

En la tabla 3.1 se agrupan los poliedros de acuerdo a la elección de S_0, S_1, S_2 y al grupo H . Si el lector está interesado en más detalles al respecto, se sugiere consultar [16, p. 467]. ■

S_0	S_1	S_2	$H = [3, 3]$	$H = [3, 4]$	$H = [4, 3]$
R'_0	$-R'_1$	R'_2	$\{6, 6 3\}$	$\{6, 4 4\}$	$\{4, 6 4\}$
$-R'_0$	$-R'_1$	R'_2	$\{\infty, 6\}_{4,4}$	$\{\infty, 4\}_{6,4}$	$\{\infty, 6\}_{6,3}$
$-R'_0$	R'_1	$-R'_2$	$\{6, 6\}_4$	$\{6, 4\}_6$	$\{4, 6\}_6$
$-R'_0$	$-R'_1$	$-R'_2$	$\{\infty, 3\}^{(a)}$	$\{\infty, 4\}_{\cdot, *3}$	$\{\infty, 3\}^{(b)}$

Tabla 3.1

Combinando los resultados aquí obtenidos, la demostración del teorema 3.23 es sencilla. Con este resultado concluimos la sección.

Teorema 3.23. *Si \mathcal{P} es un poliedro regular infinito puro y Λ es un grupo latiz tal que la proyección $\pi_\Lambda : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{T}_\Lambda^3$ induce una realización toroidal de un poliedro finito \mathcal{P}_Λ , entonces existe un real a tal que*

$$a\Lambda \in \{\Lambda_{(1,0,0)}, \Lambda_{(1,1,1)}, \Lambda_{(1,1,0)}\}.$$

Demostración. La latiz Λ asociada a Λ debe ser invariante bajo $\bar{G}_o(\mathcal{P})$, y en particular debe ser invariante respecto al grupo H definido en la prueba del lema 3.22. En virtud de los teoremas 3.5 y 3.6, Λ debe ser un múltiplo escalar de $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,1)}$ o $\Lambda_{(1,1,0)}$. Luego, por el lema 3.21, éstas latices son invariantes bajo $\bar{G}_o(\mathcal{P})$ y tenemos el resultado. ■

Con este resultado hemos determinado, para cada uno de los poliedros regulares \mathcal{P} , los grupos latiz Λ para los cuales la proyección $\pi_\Lambda : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{T}_\Lambda^3$ induce un poliedro regular en \mathbb{T}_Λ^3 , salvo un conjunto de parámetros. De esta manera quedan concluidos los resultados principales de este trabajo. Sugerimos al lector revisar el capítulo 4 para profundizar en los detalles acerca de las realizaciones toroidales de los poliedros regulares aquí trabajados.

Capítulo 4

Comentarios finales

En el capítulo 3 se dieron condiciones necesarias sobre los grupos latiz Λ para que un poliedro regular \mathcal{P} de entre los 48 poliedros regulares en \mathbb{E}^3 indujera un poliedro regular \mathcal{P}_Λ en \mathbb{T}_Λ^3 a través de la proyección $\pi_\Lambda : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{T}_\Lambda^3$. Estas condiciones se resumen en lo siguiente:

- Si \mathcal{P} es un poliedro finito, entonces
 - El grupo Λ debe ser un múltiplo escalar de $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,1)}$ y $\Lambda_{(1,1,0)}$ siempre que el grupo de simetrías de \mathcal{P} sea $[3, 4]$ o $[3, 3]$.
 - No existen tales grupos Λ si el grupo de simetrías de \mathcal{P} es $[3, 5]$
- Si \mathcal{P} es un poliedro infinito puro, entonces Λ es un múltiplo escalar de $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,1)}$ y $\Lambda_{(1,1,0)}$.
- Si \mathcal{P} es $\{4, 4\}$, $\{4, 4\}\#\{ \}$, $\{4, 4\}\#\{\infty\}$ o el Petrial de alguno de éstos, entonces Λ es de la forma $\Lambda_{(1,0,0)}^D$, $\Lambda_{(1,1,0)}^D$ ó $\Lambda_{(1,1,1)}^D$ para alguna transformación diagonal D apropiada.
- Si \mathcal{P} es $\{3, 6\}$, $\{6, 3\}$, $\{3, 6\}\#\{ \}$, $\{6, 3\}\#\{\infty\}$ o el Petrial de alguno de éstos entonces Λ es, módulo una transformación diagonal $D = \text{Diag}(d, d, h)$, $\langle \Lambda_{\{3,6\}}, t_3 \rangle$ o $\langle \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}, t_3 \rangle$ con t_3 la traslación por el vector e_3 .
- Si \mathcal{P} es el poliedro $\{3, 6\}\#\{\infty\}$ o su Petrial entonces, salvo una transformación diagonal $D = \text{Diag}(d, d, h)$, Λ es una entre $\langle \Lambda_{\{3,6\}}, t_3 \rangle$, $\langle \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}, t_3 \rangle$, $\langle \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}, t_u \rangle$, $\langle \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}, t_v \rangle$, donde los vectores de traslación de t_3 , t_u , t_v son e_3 , $u = \frac{1}{3}(1, 0, 1)$ y $v = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$, respectivamente.
- Si \mathcal{P} es el poliedro $\{6, 3\}\#\{ \}$ o su Petrial, entonces Λ es, módulo una transforma-

ción diagonal, alguna entre $\langle \Lambda_{\{3,6\}}, t_3 \rangle$, $\langle \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}, t_3 \rangle$, $\langle \Lambda_{\{3,6\}}, t_u \rangle$, y $\langle \Lambda_{\{3,6\}}, t_v \rangle$, donde los vectores de traslación de t_3 , t_u y t_v son e_3 , $u = \frac{1}{3}(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ y $v = \frac{1}{3}(0, \sqrt{3}, 1)$, respectivamente.

Además, se verificó que el grupo especial de cada uno de los poliedros sí normaliza a cada uno de los grupos latiz ahí mencionados, lo cual nos dice que, si la proyección $\pi_{\Lambda} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{T}_{\Lambda}^3$ induce un poliedro \mathcal{P}_{Λ} , éste poliedro efectivamente es regular. Sin embargo, salvo para el caso de los poliedros finitos con grupo de simetrías [3, 5], no se responde con total certeza la existencia o no de realizaciones toroidales. El objetivo de este anexo es discutir precisamente este tema.

Note que para cada uno de los poliedros existen algunos parámetros relacionados con la geometría del grupo Λ y además, que no todos los parámetros inducen realizaciones toroidales. Por ejemplo, para el caso del cubo con coordenadas según la tabla 1.1, si la latiz asociada a Λ tiene puntos demasiado cercanos, hay vértices que se identifican con puntos interiores de aristas. A continuación discutiremos algunas posibilidades sencillas para los valores de los parámetros para los cuales sí existen realizaciones toroidales. Dividiremos nuestra discusión en dos partes, una para poliedros finitos y otra para los infinitos.

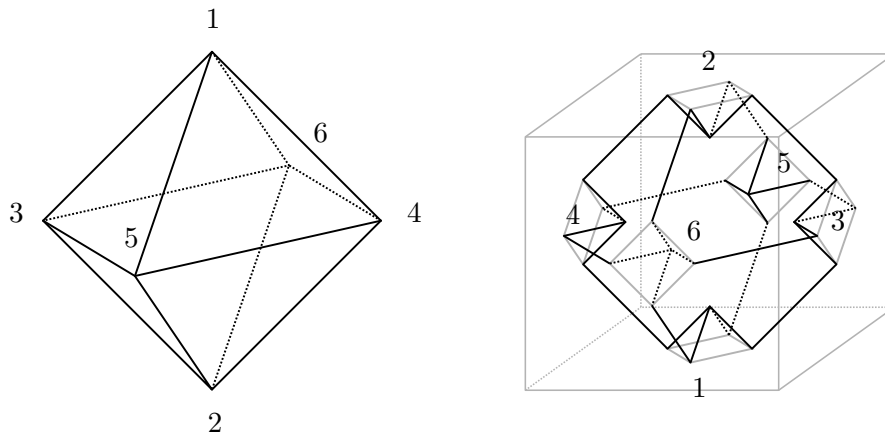
Poliedros Finitos

Como se mencionó al inicio del capítulo 3, los poliedros en \mathbb{T}^3 son siempre finitos, de modo que en el caso de que \mathcal{P} sea un poliedro finito, nuestro interés recae principalmente en la situación en la que la realización es fiel y cada arista contiene como vértices únicamente a sus extremos.

Note que para \mathcal{P} un poliedro finito con posible realización en \mathbb{T}_{Λ}^3 , el único parámetro a controlar las dimensiones de la latiz, o alternativamente, de una región fundamental para Λ , pues las latices posibles son múltiplos escalares de $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,0)}$ o $\Lambda_{(1,1,1)}$. En otras palabras, podemos suponer que Λ es alguno entre $\Lambda_{(1,0,0)}$, $\Lambda_{(1,1,1)}$ y $\Lambda_{(1,1,0)}$ y nos interesa encontrar valores posibles $a \in \mathbb{R}$ tales que \mathcal{P} tiene realización en $a\Lambda$. Llamaremos a tales valores *válidos*.

Note que si \mathcal{P} es finito, entonces existe un número real α_0 tal que para $a > \alpha_0$ el dominio de Dirichlet $\text{Dir}(a\Lambda)$ de $a\Lambda$ contiene a \mathcal{P} . En este caso, a es siempre un valor válido. Intuitivamente, lo que tenemos es que \mathbb{T}_{Λ}^3 es demasiado grande y la realización de \mathcal{P} en \mathbb{T}_{Λ}^3 se ve exactamente igual que la realización de \mathcal{P} en \mathbb{E}^3 .

Observe que éstos no son los únicos valores, pues por ejemplo el octaedro regular con coordenadas según la tabla 1.1 tiene realización fiel en $\frac{3}{2}\Lambda_{(1,0,0)}$ (figura 4.1). En la tabla 4.1 damos los valores de α_0 para cada uno de los poliedros finitos con coordenadas de acuerdo a la tabla 1.1 y en [17] damos todos los valores válidos en el intervalo $(0, \alpha_0)$. Note que éste

Figura 4.1: $\{3, 4\}/\frac{3}{2}\Lambda_{(1,0,0)}$

\mathcal{P}	$\Lambda_{(1,0,0)}$	$\Lambda_{(1,1,1)}$	$\Lambda_{(1,1,0)}$
$\{3, 3\}$	2	2	2
$\{3, 4\}$	2	1	1
$\{4, 3\}$	2	2	2

Tabla 4.1: Valores de α_0 para los poliedros finitos.

valor es el mismo para \mathcal{P} y \mathcal{P}^π , de modo que únicamente incluimos un poliedro por cada par de Petriales.

Poliedros infinitos

Para los poliedros infinitos de \mathbb{E}^3 la situación es muy distinta, ya que, como se mencionó antes, todos los poliedros realizados en \mathbb{T}_Λ^3 son poliedros finitos. Por esta razón, no hay manera de tener realizaciones toroidales fieles de poliedros infinitos.

En virtud de la compacidad de \mathbb{T}_Λ^3 , se requiere además que el conjunto de vértices de \mathcal{P} se parta en una cantidad finita de órbitas de Λ , pues de lo contrario la proyección al cociente induciría una cantidad infinita de vértices en \mathbb{T}_Λ^3 . Si denotamos por $\mathbf{T}(\mathcal{P})$ al grupo de traslaciones de \mathcal{P} , la condición mencionada se satisface siempre que $\Lambda \cap \mathbf{T}(\mathcal{P})$ tenga índice finito en $\mathbf{T}(\mathcal{P})$, en particular si $\mathbf{T}(\mathcal{P})$ tiene rango 3, esto se satisface siempre que $\Lambda \leq \mathbf{T}(\mathcal{P})$.

Además, si se desea que \mathcal{P}_Λ tenga propiedades combinatorias locales similares a las de

\mathcal{P}	$\Lambda_{(1,0,0)}$	$\Lambda_{(1,1,1)}$	$\Lambda_{(1,1,0)}$	$\langle \Lambda_{(1,1)}, t_3 \rangle$
$\{4, 4\}$	$d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$	$d \in \frac{1}{2}(\mathbb{N} \setminus \{1\})$	$d \in \frac{1}{2}(\mathbb{N} \setminus \{1\})$	$d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

\mathcal{P}	$\langle \Lambda_{\{3,6\}}, t_3 \rangle$	$\langle \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}, t_3 \rangle$
$\{3, 6\}$	$d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$	$d \in 3\mathbb{N}$
$\{6, 3\}$	$d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$	$d \in 3\mathbb{N}$

Tabla 4.2: Valores válidos para los poliedros planos

\mathcal{P} , una condición natural es pedir que si dos vértices se identifican con Λ , entonces son equivalente bajo traslaciones de $\mathbf{T}(\mathcal{P})$. Note que esto también se satisface si $\Lambda \leq \mathbf{T}(\mathcal{P})$.

Sin embargo, si Λ es demasiado grande en relación con $\mathbf{T}(\mathcal{P})$ es posible que haya demasiadas identificaciones; por ejemplo, si $\mathbf{T}(\mathcal{P})$ actúa transitivamente en los vértices de \mathcal{P} , como es el caso de $\{4, 4\}$, y $\Lambda = \mathbf{T}(\mathcal{P})$ tendríamos que \mathcal{P}_Λ tiene un sólo vértice, lo cual es demasiado degenerado para que \mathcal{P}_Λ sea un poliedro.

Con lo dicho hasta ahora se puede observar que para cada poliedro infinito \mathcal{P} existen una infinidad de poliedros \mathcal{P}_Λ con propiedades combinatorias locales similares a las de \mathcal{P} realizados en \mathbb{T}_Λ^3 . Para aquellos poliedros cuyo grupo de traslaciones tiene rango 3, estas realizaciones en \mathbb{T}_Λ^3 se obtienen reescalando \mathcal{P} , o equivalentemente, reescalando Λ de tal forma que $\Lambda \leq \mathbf{T}(\mathcal{P})$ y cuidando que en \mathcal{P}_Λ no sea demasiado degenerado.

Para los poliedros regulares infinitos cuyo grupo de traslaciones no tiene rango 3, es decir, los poliedros planos y mezclados de la forma $\mathcal{Q}\#\{\}$, podemos pensar las latices invariantes bajo $G_o(\mathcal{P})$ como latices de prismas con posiblemente más puntos; además tenemos un parámetro d que controla el tamaño de la base del prisma y un parámetro h que controla la altura. Note que para los poliedros planos el parámetro h es libre en el intervalo $(0, \infty)$. En cambio, para los poliedros mezclados de la forma $\mathcal{Q}\#\{\}$ es libre en el intervalo (α, ∞) , donde α depende de la realización de \mathcal{P} (ver sección 1.2).

En la tabla 4.2 se muestran los valores explícitos para el parámetro d para los poliedros regulares planos, con las condiciones discutidas anteriormente. Note que estos valores coinciden con los dados por McMullen y Schulte en [16, §1D] para los mapas en el 2- toro \mathbb{T}^2 , es decir, en el caso de los poliedros planos, éstos valores muestran mapas en \mathbb{T}^2 encajados en \mathbb{T}^3 .

En la tabla 4.3 se dan valores explícitos para los parámetros d y h para los poliedros mezclados de acuerdo a las restricciones discutidas antes. Por simplicidad, en estas tablas se supone que el parámetro α tiene valor 1. La notación de las latices es la obtenida de los

\mathcal{P}	$\Lambda_{(1,0,0)}$	$\Lambda_{(1,1,1)}$	$\Lambda_{(1,1,0)}$	$\langle \Lambda_{(1,1)}, t_3 \rangle$
$\{4,4\}\#\{\}$	$d \in 2\mathbb{N}, h > 1$	$d \in \mathbb{N}, h > 1$	$d \in \mathbb{N}, h > 1$	$d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, h > 1$
$\{4,4\}\#\{\infty\}$	$d \in 2\mathbb{N}, h \in 4\mathbb{N}$	$d \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\},$ $h \equiv 2d \pmod{4}$	$d \in 2(\mathbb{N} \setminus \{1\}),$ $h \in 4\mathbb{N}$	$d \in 2(\mathbb{N} \setminus \{1\}),$ $h \in 4\mathbb{N}$

\mathcal{P}	$\langle \Lambda_{\{3,6\}}, t_3 \rangle$	$\langle \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}, t_3 \rangle$
$\{3,6\}\#\{\}$	$d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, h > 1$	$d \in 3\mathbb{N}, h > 1$
$\{6,3\}\#\{\infty\}$	$d \in 4\mathbb{N}, h \in 6\mathbb{N}$	$d \in 12\mathbb{N}, h \in 6\mathbb{N}$

\mathcal{P}	$\langle \Lambda_{\{3,6\}}, t_3 \rangle$	$\langle \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}, t_3 \rangle$	$\langle \Lambda_{\{3,6\}}, t_u \rangle$	$\langle \Lambda_{\{3,6\}}, t_v \rangle$
$\{6,3\}\#\{\}$	$d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, h > 1$	$d \in 3\mathbb{N}, h > 1$	$d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, h > 3$	$d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, h > 3$

\mathcal{P}	$\langle \Lambda_{\{3,6\}}, t_3 \rangle$	$\langle \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}, t_3 \rangle$	$\langle \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}, t_u \rangle$	$\langle \tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}, t_v \rangle$
$\{3,6\}\#\{\infty\}$	$d \in 3\mathbb{N}, h \in 3\mathbb{N}$	$d \in 3\mathbb{N}, h \in 3\mathbb{N}$	$d \in 3(\mathbb{N} \setminus \{1\}),$ $h \equiv d \pmod{9}$	$d \in 3(\mathbb{N} \setminus \{1\}),$ $h \equiv d \pmod{9}$

Tabla 4.3: Valores válidos para los poliedros mezclados

teoremas 3.13 y 3.18 a 3.20.

Finalmente, en la tabla 4.4 se listan los grupos de traslaciones $\mathbf{T}(\mathcal{P})$ de los poliedros infinitos puros \mathcal{P} y los valores a para cada uno de los grupos latiz Λ tales que $a\Lambda \leq \mathbf{T}(\mathcal{P})$.

En la figura 4.2 mostramos una realización del poliedro inducido por $\{4,6|4\}$ al hacer cociente con el grupo $4\Lambda_{(1,1,1)}$.

Es importante señalar que a pesar de que aquí se han evidenciado muchos valores para los parámetros que controlan la geometría de las latices para cada uno de los poliedros, éstos parámetros no son todos. En [17] se listan todos los valores posibles para dichos parámetros. Además, queda aún abierta la pregunta de si las realizaciones toroidales de poliedros regulares consideradas en este trabajo son todas, es decir, si dado un poliedro regular \mathcal{P} realizado en \mathbb{T}_{Λ}^3 existe un poliedro regular (finito o infinito) $\mathcal{P}_{\mathbb{E}^3}$ realizado en \mathbb{E}^3 tal que la realización de \mathcal{P} viene inducida por la realización de $\mathcal{P}_{\mathbb{E}^3}$ y la proyección al cociente $\pi_{\Lambda} : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{T}_{\Lambda}^3$. El autor de este trabajo conjetura que la respuesta es afirmativa, sin tener una demostración al momento de la elaboración del mismo.

Poliedro \mathcal{P}	$\mathbf{T}(\mathcal{P})$	$\Lambda_{(1,0,0)}$	$\Lambda_{(1,1,1)}$	$\Lambda_{(1,1,0)}$
$\{4, 6 4\}$	$\Lambda_{(1,1,1)}$	$a \in 2\mathbb{N}$	$a \in \mathbb{N}$	$a \in 2\mathbb{N}$
$\{6, 4 4\}$	$\Lambda_{(1,1,1)}$	$a \in 2\mathbb{N}$	$a \in \mathbb{N}$	$a \in 2\mathbb{N}$
$\{6, 6 3\}$	$2\Lambda_{(1,1,0)}$	$a \in 4\mathbb{N}$	$a \in 4\mathbb{N}$	$a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$
$\{\infty, 6\}_{4,4}$	$\Lambda_{(1,1,1)}$	$a \in 2\mathbb{N}$	$a \in \mathbb{N}$	$a \in 2\mathbb{N}$
$\{\infty, 4\}_{6,4}$	$\Lambda_{(1,1,1)}$	$a \in 2\mathbb{N}$	$a \in \mathbb{N}$	$a \in 2\mathbb{N}$
$\{\infty, 6\}_{6,3}$	$2\Lambda_{(1,1,0)}$	$a \in 4\mathbb{N}$	$a \in 4\mathbb{N}$	$a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$
$\{6, 6\}_4$	$2\Lambda_{(1,0,0)}$	$a \in 2(\mathbb{N} \setminus \{1\})$	$a \in 2\mathbb{N}$	$a \in 2\mathbb{N}$
$\{4, 6\}_6$	$2\Lambda_{(1,0,0)}$	$a \in 2(\mathbb{N} \setminus \{1\})$	$a \in 2\mathbb{N}$	$a \in 2\mathbb{N}$
$\{\infty, 3\}^{(b)}$	$2\Lambda_{(1,1,1)}$	$a \in 4\mathbb{N}$	$a \in 2\mathbb{N}$	$a \in 4\mathbb{N}$
$\{\infty, 3\}^{(a)}$	$2\Lambda_{(1,1,1)}$	$a \in 4\mathbb{N}$	$a \in 2\mathbb{N}$	$a \in 4\mathbb{N}$
$\{6, 4\}_6$	$2\Lambda_{(1,0,0)}$	$a \in 2(\mathbb{N} \setminus \{1\})$	$a \in 2\mathbb{N}$	$a \in 2\mathbb{N}$
$\{\infty, 4\}_{\cdot,*3}$	$\Lambda_{(1,1,1)}$	$a \in 2\mathbb{N}$	$a \in \mathbb{N}$	$a \in 2\mathbb{N}$

Tabla 4.4: valores válidos para los poliedros puros

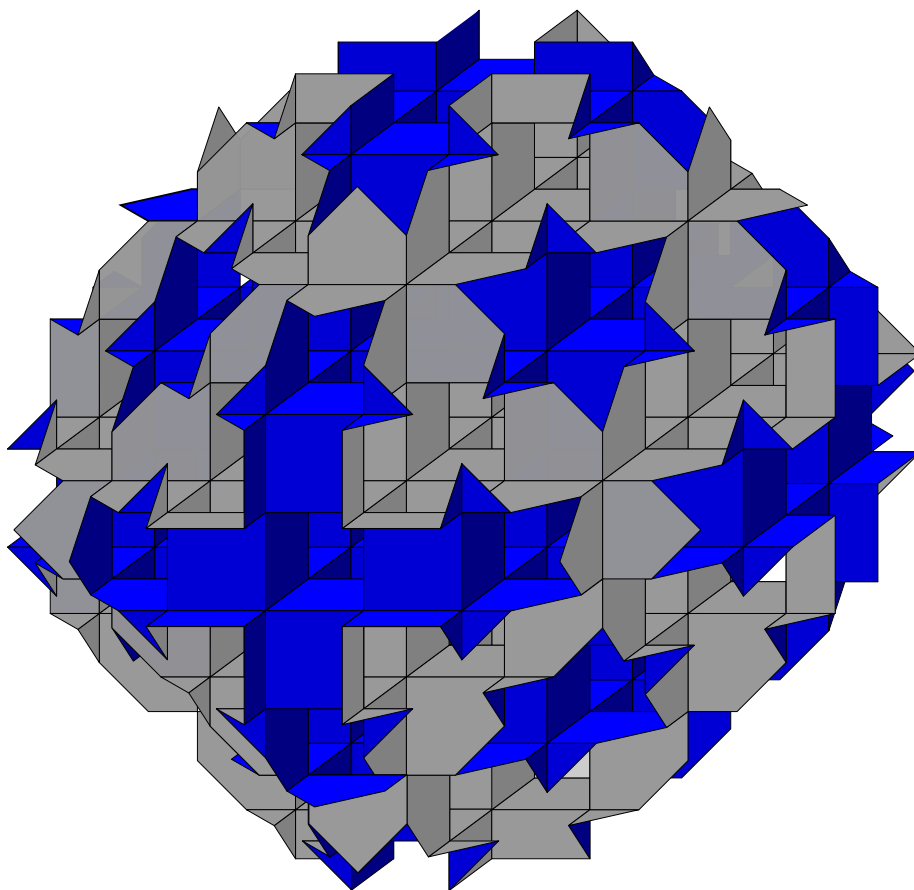


Figura 4.2: $\{4, 6|4\}/4\Lambda_{(1,1,1)}$

Índice alfabético

- 3-toro, 37
- Arco, 6
- Arista, 2
- Automorfismo, 4
 - generadores distinguidos, 7
- Bandera, 2
 - i*-adyacente, 3
 - adyacente, 2
 - base, 7
 - conexidad fuerte por, 2
- C-grupo lineal, 8
- Cara, 2
- Dominio Fundamental, 40
 - de Dirichlet, 40
- Dualidad, 10
- Faceting, 15
- Figura vertical, 2
- Gráfica realizada en \mathbb{T}^3 , 49
- Grupo de Coxeter, 8
- Grupo de simetrías, 10
- Grupo especial, 33
 - aumentado, 43
- Isometría, 29
- Latiz
 - base para, 36
 - cúbica, de cubos, $\Lambda_{(1,0,0)}$, 36
 - de centros de caras, $\Lambda_{(1,1,0)}$, 37
 - de centros de cuadrados, $\Lambda_{(1,1)}$, 36
 - de centros de cubos, $\Lambda_{(1,1,1)}$, 36
 - de centros de triángulos, $\tilde{\Lambda}_{\{3,6\}}$, 46
 - de cuadrados, $\Lambda_{(1,0)}$, 36
 - de puntos, 36
 - de triángulos, $\Lambda_{\{3,6\}}$, 46
 - grupo, 35
- Métrica cociente, 39
- Petrial, 11
- Poliedro
 - 1-esqueleto, 2
 - abstracto, 1
 - mezclado, 17
 - puro, 20
 - regular, 5
- Producto semidirecto, 30
- Realización euclidiana, 9
 - discreta, 9
 - fiel, 9
 - mezclada, 17
 - pura, 20
 - simétrica, 9
- Realización toroidal, 50
 - fiel, 50
 - simétrica, 50
- Región Fundamental, 40
- Representación
 - como permutaciones, 4
 - euclidiana, 10
- Sólidos de Kepler-Poinsot, 12

Sólidos Platónicos, 12

Tipo de Schläfli, 7

Vértice, 2

Bibliografía

- [1] Arocha, Jorge L., Javier Bracho y Luis Montejano: *Regular projective polyhedra with planar faces. I.* Aequationes Math., 59(1-2):55–73, 2000, ISSN 0001-9054. <http://dx.doi.org/10.1007/PL00000128>.
- [2] Bracho, Javier: *Regular projective polyhedra with planar faces. II.* Aequationes Math., 59(1-2):160–176, 2000, ISSN 0001-9054. <http://dx.doi.org/10.1007/PL00000122>.
- [3] Conder, Marston D. E.: *Regular maps and hypermaps of Euler characteristic -1 to -200 .* J. Combin. Theory Ser. B, 99(2):455–459, 2009, ISSN 0095-8956. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jctb.2008.09.003>.
- [4] Coxeter, H. S. M.: *Regular Skew Polyhedra in Three and Four Dimension, and their Topological Analogues.* Proc. London Math. Soc., S2-43(1):33, ISSN 0024-6115. <http://dx.doi.org/10.1112/plms/s2-43.1.33>.
- [5] Coxeter, H. S. M.: *Regular polytopes.* Dover Publications, Inc., New York, third edición, 1973.
- [6] Coxeter, H. S. M. y W. O. J. Moser: *Generators and relations for discrete groups.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, third edición, 1972. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 14.
- [7] Danzer, L. y E. Schulte: *Reguläre Inzidenzkomplexe. I.* Geom. Dedicata, 13(3):295–308, 1982, ISSN 0046-5755. <http://dx.doi.org/10.1007/BF00148235>.
- [8] Dress, Andreas W. M.: *A combinatorial theory of Grünbaum's new regular polyhedra. I. Grünbaum's new regular polyhedra and their automorphism group.* Aequationes Math., 23(2-3):252–265, 1981, ISSN 0001-9054. <http://dx.doi.org/10.1007/BF02188039>.
- [9] Dress, Andreas W. M.: *A combinatorial theory of Grünbaum's new regular polyhedra. II. Complete enumeration.* Aequationes Math., 29(2-3):222–243, 1985, ISSN 0001-9054. <http://dx.doi.org/10.1007/BF02189831>.

- [10] Euclid: *Euclid's Elements*. Green Lion Press, Santa Fe, NM, 2002, ISBN 1-888009-18-7; 1-888009-19-5. All thirteen books complete in one volume, The Thomas L. Heath translation, Edited by Dana Densmore.
- [11] Grünbaum, Branko: *Regular polyhedra—old and new*. Aequationes Math., 16(1-2):1–20, 1977, ISSN 0001-9054.
- [12] Grünbaum, Branko: *Convex polytopes*, volumen 221 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edición, 2003, ISBN 0-387-00424-6; 0-387-40409-0. <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4613-0019-9>, Prepared and with a preface by Volker Kaibel, Victor Klee and Günter M. Ziegler.
- [13] Hubard, Isabel, Alen Orbančić, Daniel Pellicer y Asia Ivić Weiss: *Symmetries of equivelar 4-toroids*. Discrete Comput. Geom., 48(4):1110–1136, 2012, ISSN 0179-5376. <http://dx.doi.org/10.1007/s00454-012-9444-2>.
- [14] McMullen, Peter: *Four-dimensional regular polyhedra*. Discrete Comput. Geom., 38(2):355–387, 2007, ISSN 0179-5376. <http://dx.doi.org/10.1007/s00454-007-1342-7>.
- [15] McMullen, Peter y Egon Schulte: *Regular polytopes in ordinary space*. Discrete Comput. Geom., 17(4):449–478, 1997, ISSN 0179-5376. <http://dx.doi.org/10.1007/PL00009304>, Dedicated to Jörg M. Wills.
- [16] McMullen, Peter y Egon Schulte: *Abstract regular polytopes*, volumen 92 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, ISBN 0-521-81496-0. <http://dx.doi.org/10.1017/CB09780511546686>.
- [17] Montero, Antonio: *Regular polyhedra in the 3-torus*. (en preparación).
- [18] Montero, Antonio: *Poliedros Regulares en el 3-toro*. Tesis de Licenciatura, UMSNH, 2013.
- [19] Ratcliffe, John G.: *Foundations of hyperbolic manifolds*, volumen 149 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edición, 2006, ISBN 978-0387-33197-3; 0-387-33197-2.
- [20] Rotman, Joseph J.: *An introduction to the theory of groups*, volumen 148 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, fourth edición, 1995, ISBN 0-387-94285-8. <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-4176-8>.
- [21] Yale, Paul B.: *Geometry and symmetry*. Dover Books on Advanced Mathematics. Dover Publications, Inc., New York, second edición, 1988, ISBN 0-486-65779-5.