

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS
DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



SIMULACIÓN NUMÉRICA DE ESTRELLAS TIPO TOV

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LIC. EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA

IVÁN MARGARITO ÁLVAREZ RIOS

ASESOR: JOSÉ ANTONIO GONZÁLEZ CERVERA

MORELIA, MICHOACÁN.

FEBRERO DEL 2019

DEDICATORIA

A mi madre

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mi madre, sin su apoyo y consejos nada de esto hubiera sido posible, por el amor que solo usted me puede dar, es una de las razones más importantes para seguir adelante y aunque suene repetitivo no tengo más palabras que darle gracias por haberla tenido en mi vida.

Al Dr. González por enseñarme mucho más de lo que pude haber escrito en este trabajo y por saber guiarme durante todos los años que estuve en la facultad.

Por último quiero agradecer a Daniela por todo el tiempo que hemos compartido juntos y esto no es un logro mio, si no de los dos, porque sin ti no lo hubiera conseguido, siempre escuchaste mis quejas y frustraciones y estuviste para darme ánimos y gracias a ti pude lograrlo y espero seguir teniendo tu apoyo en todo lo que sigue.

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Motivación	3
1.2. Objetivo general	5
2. Las Estrellas	9
2.1. Clasificación Estelar	9
2.2. Las Ecuaciones de Euler	12
2.2.1. Conservación de la masa	13
2.2.2. Conservación del momento	14
2.2.3. Conservación de la energía	16
2.3. Ecuación de estado	17
2.4. Estrellas en Equilibrio Hidrostático	21
2.4.1. Ecuaciones de Tolman–Oppenheimer–Volkoff	21
2.4.2. Regularización de las ecuaciones	23
2.4.3. Ecuación de Lane-Emden	24
3. Métodos Numéricos	27
3.1. Diferencias Finitas	27
3.1.1. Aproximación a la primera derivada	28
3.1.2. Derivada de ordenes mayores	30
3.2. Problema de valores iniciales	31
3.2.1. Métodos de Runge-Kutta	33
3.3. Ecuaciones Elípticas	35
3.3.1. Métodos Iterativos	37
3.3.2. Método de Multigrid	44
3.4. Ecuaciones Hiperbólicas	50

3.4.1. Método de Líneas	52
3.4.2. Discretización de las Ecuaciones de Euler	53
3.5. Convergencia, consistencia y estabilidad	56
4. Resultados	59
4.1. Datos Iniciales	59
4.2. Solución Hidrostática	64
4.2.1. $n=1.5$	64
4.2.2. $n=3$	66
4.3. Caída libre de Fluidos Autogravitantes	71
4.3.1. $n=1.5$	71
4.3.2. $n=3$	72
4.4. Sistema Binario en Órbita Circular	72
4.4.1. $n=1.5$	76
4.4.2. $n=3$	76
5. Conclusiones	87
A. Código de Full-Multigrid	91
A.1. Full Multigrid	91
A.2. Multigrid	92
A.3. Residuo	92
A.4. Operador de prolongación	93
A.5. Operador de restricción	94
 Bibliografía	 95

Resumen

En este trabajo se presenta la solución numérica de las ecuaciones de Euler-Poisson, las cuales se forman por un sistema de 3 ecuaciones diferenciales hiperbólicas que expresan principios de conservación para fluidos ideales estas ecuaciones son conocidas como ecuaciones de Euler, la segunda parte de este sistema es la ecuación de Poisson que expresa una relación entre el potencial gravitacional del sistema con la densidad de éste la manera de resolver se hace mediante el método de diferencias finitas para describir la dinámica de estrellas. La parte elíptica del sistema se resuelve mediante el método de Multigrid y la parte hiperbólica con el método de líneas el cual se implementa con el método de Runge-Kutta 4 (RK4). Las condiciones iniciales para este sistema se hacen suponiendo inicialmente un sistema en equilibrio hidrostático y con simetría esférica estas suposiciones permiten utilizar las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) en el límite Newtoniano las cuales se resuelven con la ecuación de estado politrópica de manera numérica con el método RK4. Se estudian en detalle dos casos los cuales corresponden a índices politrópicos $n = 1.5$ y $n = 3$ en los cuales se evolucionan distintos sistemas en un espacio Euclideo tridimensional, entre ellos inicialmente la solución a las ecuaciones TOV, seguido de la evolución de un sistema binario con velocidad nula inicialmente y por último un sistema en órbita. Los resultados obtenidos se verificó que la masa, momento lineal y energía se conservaran. Para la energía se noto que esta crecía conforme el tiempo avanza pero entre se mejora el refinamiento de la malla utilizada este tiende a crecer más lento.

Palabras Clave: potencial gravitacional, multigrid, Método de Líneas, TOV, Euler-Poisson

Abstract

In this paper we present the numerical solution of the Euler-Poisson equations, which are formed by a system of 3 hyperbolic differential equations that express conservation principles for ideal fluids. These equations are known as Euler equations, the second part of this system is the Poisson equation that expresses a relationship between the gravitational potential of the system and the density of the way it is solved using the finite difference method to describe the dynamics of stars. The elliptical part of the system is solved by means of the Multigrid method and the hyperbolic part with the line method which is implemented with the method of Runge-Kutta 4 (RK4). The initial conditions for this system are made initially assuming a system in hydrostatic equilibrium and with spherical symmetry these assumptions allow us to use the Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) equations in the Newtonian limit which are solved with the polytropic state equation so number with the RK4 method. Two cases are studied in detail, which correspond to polytropic indices $n = 1.5$ and $n = 3$ in which different systems are evolved in a three-dimensional Euclidean space, including initially the solution to the TOV equations, followed by evolution of a binary system with zero speed initially and finally a system in orbit. The results obtained verified that the mass, linear moment and energy were conserved. For the energy it was noticed that it grew as time progressed but between the refinement of the mesh used, it tends to grow slower.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Antes de comenzar el estudio sobre la dinámica de las estrellas se deben de intentar contestar varias preguntas, una de ellas y quizá la más importante para poder abordar su estudio es ¿qué es una estrella? Como una primera aproximación podemos pensar que una estrella es una esfera de plasma capaz de emitir luz y que mantiene su forma gracias a su propia presión y gravedad, en otras palabras, una estrella es un cuerpo gaseoso que mantiene su forma debido a la gravedad que atrae al gas hacia su centro y lo comprime y en reacción a esta fuerza está la presión del gas que es originada por el calor de las reacciones nucleares en su interior. Ahora que se tiene la idea de lo que podría ser una estrella lo siguiente es ¿todas las estrellas son iguales? Desde luego que no todas las estrellas son iguales las hay de muchos tamaños y colores. Una herramienta fundamental en el estudio de las estrellas es el diagrama de Hertzsprung-Russell del cual se hablará en el siguiente capítulo.

Una estrella desde su nacimiento tiene diferentes fases de evolución en la primera se encuentra *la presecuencia principal* en la cual las estrellas se forman a partir del colapso gravitatorio y condensación de inmensas nubes moleculares de gran densidad, tamaño y masa total. El gas prosigue su caída hacia el centro de la nube. Este centro o núcleo de la protoestrella se comprime más deprisa que el resto liberando mayor energía potencial

gravitatoria y otra parte de esa energía se invierte en el calentamiento de la protoestrella. De esta forma el núcleo aumenta su temperatura cada vez más hasta encender el hidrógeno, momento en el cual la presión generada por las reacciones nucleares asciende rápidamente hasta equilibrar la gravedad dando lugar a una segunda etapa en la vida de una estrella llamada *la secuencia principal*. Aquí la estructura de la estrella consta esencialmente de un núcleo donde tiene lugar la fusión del hidrógeno al helio. La mayor parte de las estrellas pasan el 90% de su vida en esta etapa. En esta fase las estrellas consumen su combustible nuclear de manera gradual pudiendo permanecer estables por períodos de 2-3 millones de años, en el caso de las estrellas más masivas y calientes, a miles de millones de años si se trata de estrellas de tamaño medio como el Sol, o hasta decenas o incluso centenares de miles de millones de años en el caso de estrellas de poca masa como las enanas rojas ya que la duración de vida de una estrella en la secuencia principal depende de dos factores: la cantidad de hidrógeno disponible en su centro y la velocidad a la cual quema este combustible. La primera cantidad es proporcional a la masa de la estrella. El segundo parámetro está vinculado a la energía producida por la estrella, por lo tanto, a su luminosidad. Ahora bien, la luminosidad es simplemente proporcional a la masa, pero aumenta mucho más rápidamente que ésta. Cuando el hidrógeno desaparece en el centro de la estrella, la estrella comienza su vejez. A partir de este momento, su evolución será muy distinta en función de su masa.

Como se mencionó las estrellas pasan la mayor parte de su vida en llamada secuencia principal, por esta razón si consideramos cortos periodos de tiempo comparados con los ya mencionados se puede suponer que las estrellas se encuentran en equilibrio termodinámico lo cual permite utilizar una ecuación de estado que es indispensable para modelar la dinámica de estos objetos.

El modelo utilizado para describir la estructura interna de las estrellas es resuelto mediante métodos numéricos y las soluciones presentadas permiten conocer cuantitativamente como son estos objetos en su interior. Por ejemplo se presentan soluciones para el choque de dos estrellas, de manera que se puede monitorear como evoluciona su densidad en el tiempo y observar las modificaciones de esta al chocar ambas estrellas y obtener en algunos

casos una nueva estrella final resultante de la coalescencia de estas estrellas.

1.2. Objetivo general

El objetivo principal de esta tesis es estudiar la evolución de algunas estrellas, como no es posible obtener experimentalmente datos de su estructura interna, la manera de abordar este tipo de situaciones es tratar de modelar la naturaleza de una manera aproximada, con la finalidad de que el modelo utilizado se ajuste lo mejor posible a los datos observacionales los cuales en una estrella podrían ser su masa, radio, temperatura exterior o luminosidad, por mencionar algunos. De esta manera se pueden obtener datos de su estructura interna que no son accesibles a la medida.

En la actualidad se sabe que la mayoría de las estrellas están compuestas por hidrógeno y helio por lo que es natural tratar a las estrellas como fluido, ya que en general los fluidos componen tanto a líquidos y gases por lo que podemos imaginar a una estrella como una nube de gas el cual lo mantiene en un estado estable tanto la fuerza de gravedad como la presión. Como primera aproximación y en el alcance de este trabajo se supondrá que se trata de un fluido ideal, es decir, un fluido no viscoso. Otra restricción que se tomará es que la velocidad del fluido sea pequeña comparada con la velocidad de la luz, lo cual permitirá utilizar la teoría clásica al tratarse de fluidos no relativistas. Las restricciones impuestas son simplificaciones del comportamiento de la naturaleza bastante fuertes, sin embargo como primer estudio ayuda a entender algunos de los procesos que afectan la dinámica de las estrellas.

Con estas consideraciones si se tienen en cuenta tres principios físicos los cuales son la conservación de la masa, conservación del momento y la conservación de la energía, se puede obtener un sistema de tres ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) conocidas como las ecuaciones de Euler. A este sistema se agrega la ecuación de Poisson la cual permite relacionar el potencial gravitacional con la densidad del fluido, con lo que se forma un sistema de cinco variables las cuales son la densidad, presión, velocidad, energía y el potencial gravitacional y cuatro ecuaciones. La manera de ce-

rrar el sistema se hace con la elección de una ecuación de estado.

El sistema de Euler acoplado con la ecuación de Poisson es un sistema no lineal y en general sin solución analítica por lo que es necesario recurrir a los métodos numéricos para poder resolverlo. Las ecuaciones de Euler forman un sistema hiperbólico y la ecuación de Poisson una EDP elíptica. La naturaleza distinta de estas ecuaciones requiere por tanto métodos numéricos distintos para resolverlas, pero los métodos que se discutirán están basados en las diferencias finitas. La filosofía de este método consiste en la descomposición de las ecuaciones definidas en un dominio continuo a un dominio discreto llamado malla, con esto se definen aproximaciones discretas de los operadores involucrados en las EDPs y permite pasar de un sistema de EDPs continuas a un sistema algebraico discreto.

La parte hiperbólica se resolverá utilizando el método de líneas el cual se basa en la idea de que una vez discretizada la parte espacial del sistema este conjunto de ecuaciones puede ser tratado como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) y por lo tanto puede resolverse con el método de Runge-Kutta el cual se discutirá brevemente en el segundo capítulo. La parte elíptica la cuál corresponde a la ecuación de Poisson se resolverá mediante el método de multigrad. Este método consiste en resolver inicialmente la ecuación de Poisson para el potencial gravitacional en una malla inicial con el método de Gauss-Seidel o bien con el método de Jacobi. Una vez tenida una primera aproximación de la solución se define un residuo el cual también satisface la ecuación de Poisson pero ahora para el error de la solución aproximada, la idea general del multigrad es tratar de remover errores de distintas frecuencias, es decir, la aproximación de la ecuación implica errores numéricos debidos a pasar de un dominio continuo a un dominio discreto estos errores pueden oscilar con distintas frecuencias como se mostrará en el tercer capítulo, si se remueven sobre la malla inicial podría ser muy costoso en cuestión de tiempo CPU por lo que se construyen operadores que permiten tener una malla con menor resolución y poder resolver en esta nueva malla con un coste menor y poder interpolar el error a la malla más fina y así corregir la primera aproximación.

Además para poder resolver este sistema son necesarias dos cosas: una

de ellas son condiciones a la frontera y otra son condiciones iniciales, esta última se obtiene de suponer inicialmente un sistema en equilibrio hidrostático esféricamente simétrico que conduce a las ecuaciones de Tolman–Oppenheimer–Volkoff. Este es un sistema de dos EDOs para la masa y la presión las cuales se relacionan con la densidad de la estrella. Nuevamente se tiene un sistema de dos ecuaciones con tres variables así que con la elección de una ecuación de estado llamada politrópica, la cuál relaciona a la presión con la densidad y dependiendo de ciertos parámetros la ecuación puede describir distintos procesos termodinámicos pero el de interés en esta tesis es principalmente procesos isentrópicos, es decir procesos en los que la entropía del sistema permanece constante. Con la elección de esta ecuación de estado el sistema pueden reescribirse en una EDO de segundo orden conocida como ecuación de Lane-Emden de la cuál solo se conocen tres soluciones analíticas que corresponden a los índices politrópicos $n = 0, 1$ y 5 por lo que en lugar de limitar los datos iniciales a estas tres soluciones se resuelve numéricamente el sistema TOV junto al potencial gravitacional mediante el método de Runge-Kutta, por lo que se necesita regularizar estas ecuaciones ya que presentan singularidades en el origen debido a las coordenadas utilizadas. Una vez obtenida la solución en estas coordenadas la solución se interpola a un espacio 3D, para poder perturbar la solución y perder la simetría y el espacio en el que se interpolan es un espacio Euclideo para no tener las singularidades que se tienen con las coordenadas esféricas.

Con todo lo descrito se puede entonces tener un *laboratorio computacional* en el cual se pueden explorar el espacio de parámetros y poder obtener soluciones que pudieran predecir distintos escenarios físicos, los cuales pueden ser desde el más simple el cual sería la misma solución en equilibrio hasta la dinámica de sistemas binarios de estrellas, o bien se podría simular no solo un sistema binario si no hasta las trayectorias que podrían seguir tres estrellas la cual ya no será una órbita circular o elíptica (espiral) como en el sistema binario.

Antes de comenzar el estudio de estas estrellas comenzaremos con la descripción de la clasificación estelar para así describir el modelo que explica la evolución en el tiempo de algunas de estas.

Capítulo 2

Las Estrellas

No todas las estrellas son iguales, no es lo mismo hablar de una estrella de neutrones, o de una enana blanca o de nuestro Sol, es importante saber de que están compuestas, cual es su tamaño, masa, temperatura o su densidad por ejemplo. Por lo tanto si se intenta describir la dinámica de estos cuerpos es necesario clasificar a los que tengan una evolución similar y así proponer modelos que los describan de manera correcta.

2.1. Clasificación Estelar

El diagrama de Hertzsprung-Rusell (HR) representa a las estrellas de acuerdo a su luminosidad contra su clasificación espectral o bien su temperatura efectiva. Una de las cosas interesantes que presenta el diagrama HR Fig. (2.1) es que la mayoría de las estrellas ocupan ciertas regiones relativamente estrechas.

Las tres clases más importantes del diagrama HR son las gigantes rojas, los objetos degenerados (enanas blancas, estrellas de neutrones y los agujeros negros) y la secuencia principal la cual es la región en la que se encuentran la mayoría de las estrellas, incluido nuestro Sol. Las estrellas permanecen la mayor parte de su vida activa sobre la secuencia principal evolucionando lentamente en un proceso de contracción gravitatoria cua-

siestático, es decir estas estrellas se encuentran infinitesimalmente cerca del estado de equilibrio lo que permite definir una ecuación de estado y esto es fundamental para establecer un modelo que permita estudiar la dinámica de estos cuerpos celestes.

Como se mencionó una manera de representar a las estrellas en el diagrama de HR es de acuerdo a su tipo espectral la cual es una clasificación empírica.

El tipo espectral estelar se basa en la clasificación de acuerdo a la temperatura de la superficie de las estrellas, la cual determina sus características espectrales, las cuales pueden ir desde el violeta hasta el rojo en la luz visible. Actualmente se utiliza un sistema de clasificación espectral conocido como sistema de Morgan–Keenan (MK) o como clasificación espectral de Harvard, ya que lo comenzó a esbozar Edward Charles Pickering de la Universidad Harvard en el año 1890. Esta clasificación estelar es la más utilizada en astronomía, la cual utiliza las letras *O*, *B*, *A*, *F*, *G*, *K*, *M*, las cuales van de las más calientes tipo (*O*) hasta las más frías (tipo *M*), las clases corresponden a los siguientes colores

<i>O</i>	azul
<i>B</i>	blanco azulado
<i>A</i>	blanco
<i>F</i>	blanco amarillento
<i>G</i>	amarillo
<i>K</i>	naranja
<i>M</i>	rojo

Cada una de estas clases se subdivide usando un dígito numérico, con el 0 para las estrellas más calientes y 9 para las más frías. En el sistema MK, se añade una clase de luminosidad a la clase espectral usando números romanos.

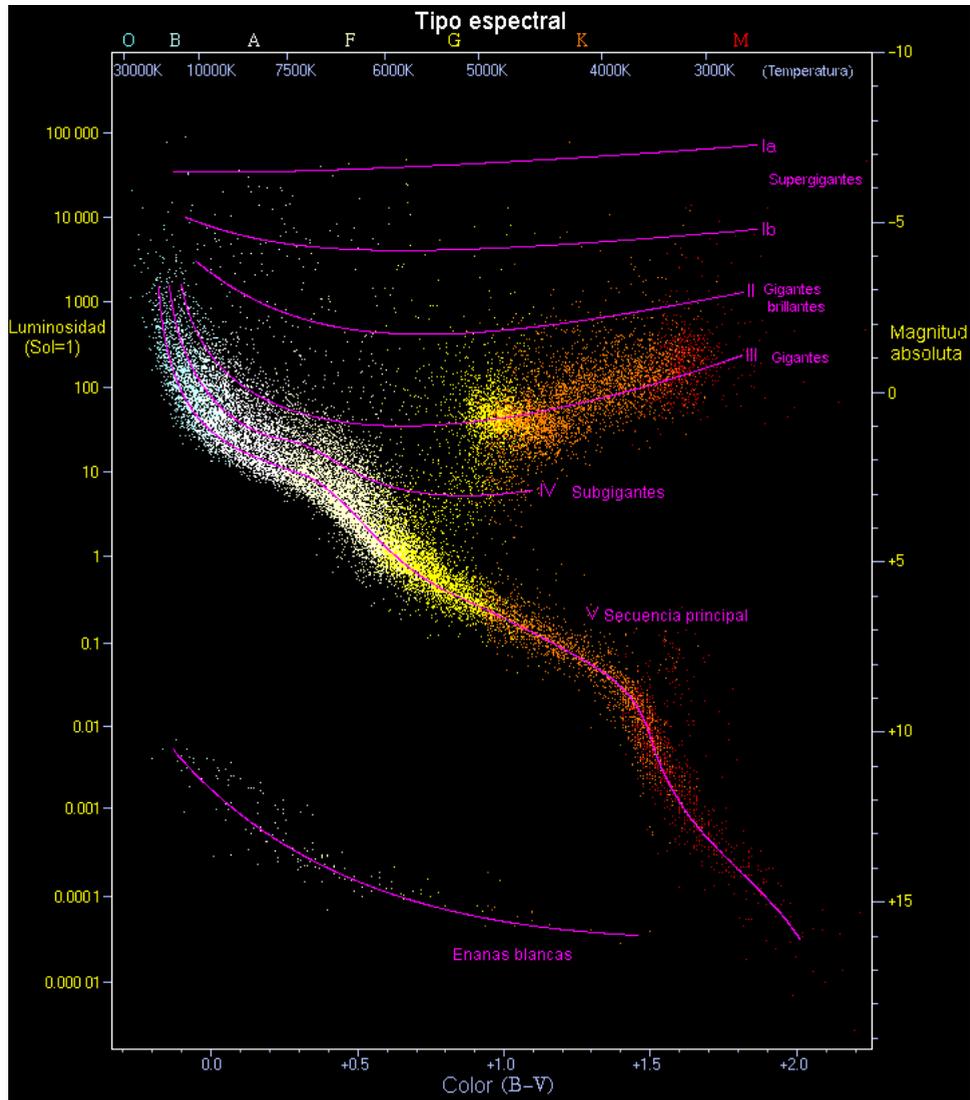


Figura 2.1: Clasificación estelar de acuerdo a la temperatura de la superficie de la estrella y su luminosidad. La secuencia principal es donde se encuentra la mayoría de las estrellas incluido nuestro Sol.

I	Super gigantes
II	Gigantes brillantes
III	Gigantes regulares
IV	Subgigantes
V	Secuencia principal
VI	Subenanas
VII	Enanas blancas

Ahora que sabemos cual es la clasificación de las estrellas, como primera aproximación podemos suponer que se trata de un fluido ideal, y por esta razón podemos utilizar las ecuaciones de Euler las cuales se discutirán a continuación.

2.2. Las Ecuaciones de Euler

Para comenzar el estudio de los fluidos surge una pregunta importante ¿cuándo es posible considerar a una colección de partículas como un medio continuo? la respuesta a está pregunta nos la da la mecánica estadística utilizando el concepto conocido como *recorrido libre medio* el cual es una distancia l que recorre una molécula antes de sufrir su próximo choque en un *tiempo libre medio*.

Si queremos tratar a una colección de partículas como un medio continuo lo único que se debe considerar para hablar de un *elemento de fluido* de volumen V , cuyo tamaño lineal l_f es pequeño comparado con la longitud de escala macroscópica L del sistema a estudiar es que $l \ll l_f \ll L$.

Por ejemplo el recorrido libre medio de un fotón dentro de una estrella antes de colisionar es del orden de 2cm, así que en una estrella como nuestro Sol de radio $R_{\odot} = 6.96 \times 10^8 \text{m}$ nos da la idea de que es posible considerar el fluido estelar como un continuo ya que si consideremos un elemento de fluido de tamaño lineal digamos del orden de $l_f = 1\text{m}$ se cumple que $2\text{cm} \ll 1\text{m} \ll 6.96 \times 10^8 \text{m}$.

El movimiento de un fluido es gobernado por las leyes de conservación: de la masa, del momento y de la energía, las cuales pueden ser escritas en

forma de EDPs y si conseguimos resolver de alguna manera estas ecuaciones podremos saber más acerca de la evolución en el tiempo de las estrellas, por lo que se presenta una breve demostración de estas ecuaciones.

2.2.1. Conservación de la masa

Si consideramos un fluido en movimiento y consideramos el transporte de la masa contenida en un diferencial de volumen en un intervalo de tiempo y no tenemos fuentes o sumideros de fluido, la cantidad de masa se conserva. Consideremos un fluido dentro de un volumen arbitrario V con una densidad ρ y denotemos por S a la frontera de este volumen con un vector normal \vec{n} y elemento de superficie dS como se muestra en la Fig. (2.2). Para deducir la ecuación de conservación consideremos el cambio en el tiempo de la masa total del fluido,

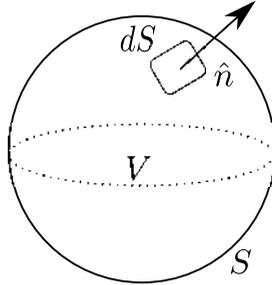


Figura 2.2: Fluido dentro del volumen V y superficie S .

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV. \quad (2.1)$$

Como la cantidad de masa se conserva la cantidad de materia entrante o saliente en el volumen V se debe al flujo de materia $\rho\vec{v}$ (donde \vec{v} es el campo de velocidades del fluido) a través de la frontera S es decir,

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_S (\rho\vec{v}) \cdot \vec{n} dS, \quad (2.2)$$

usando el teorema de la divergencia podemos reescribir el lado derecho de esta última expresión como

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV, \quad (2.3)$$

o bien,

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right) dV = 0, \quad (2.4)$$

donde ∇ es el operador nabla. Como está ecuación debe cumplirse para cualquier volumen V implica que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.5)$$

la cual es la ecuación de la conservación de la masa o también es conocida como ecuación de continuidad.

2.2.2. Conservación del momento

Consideremos un fluido en un volumen V con superficie S . La fuerza total (fuerza por unidad de volumen) que actúa sobre el fluido es Fig. (2.3)

$$- \int_S p d\vec{S} = - \int \nabla p dV. \quad (2.6)$$

Si V es un volumen muy pequeño es decir un diferencial de volumen dV podemos decir que la fuerza resultante sería ∇p , así aplicando la segunda ley de Newton se tiene que

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p, \quad (2.7)$$

donde $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$ con esto podemos obtener la siguiente expresión

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (2.8)$$

la cual es la ecuación conocida como ecuación de Euler. Si además sobre el sistema actúa la fuerza de gravedad \vec{g} entonces la fuerza resultante es

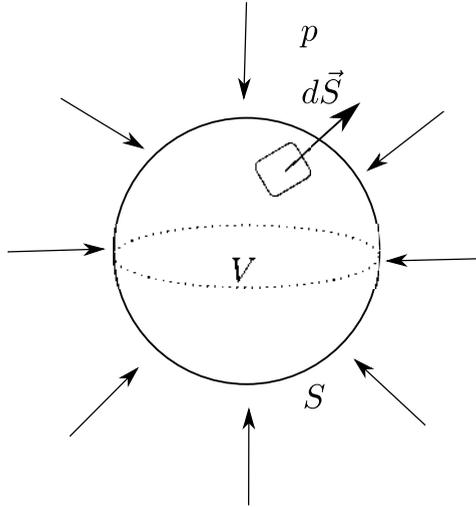


Figura 2.3: Fuerza de presión actuando sobre el volumen V .

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi, \quad (2.9)$$

donde $\vec{g} = -\nabla \phi$, ya que \vec{g} es un campo conservativo.

El potencial gravitacional ϕ se relaciona con la densidad del fluido ρ mediante la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \quad (2.10)$$

donde G es la constante gravitacional de Newton y $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ es el operador laplaciano.

Podemos reescribir la ec. (2.9) si consideremos que

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_i \vec{v}), \quad (2.11)$$

sustituyendo en la ecuación de Euler el resultado final es

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_i \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \quad (2.12)$$

donde v_i es la componente de la velocidad en la dirección x_i .

2.2.3. Conservación de la energía

Por ahora nos centraremos en tan solo dos formas de energías, la energía específica termal e , y la energía específica cinética $v^2/2$. Así la energía total es la integral sobre la frontera de un volumen V es $E\vec{v} \cdot \hat{n}$, donde $E = \rho(e + v^2/2)$ y \hat{n} es un vector unitario que apunta hacia afuera de la frontera. Pero también hay trabajo que se ejerce sobre nuestro sistema el cual está dado por la integral de superficie de $P\vec{v} \cdot \hat{n}$, así la ecuación de la conservación de la energía queda como

$$\frac{d}{dt} \int_V E dV = - \int_S E \vec{u} \cdot \hat{n} dS - \int_S p \vec{v} \cdot \hat{n} dS, \quad (2.13)$$

o bien aplicando el teorema de la divergencia

$$\int_V \frac{\partial E}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot [(E + p) \vec{u}] dV, \quad (2.14)$$

la cual debe valerse para cualquier volumen V así se tiene que la ecuación de la conservación de la energía es

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + p) \vec{u}] = 0. \quad (2.15)$$

Una demostración más detallada de estas ecuaciones puede verse en [10]. Y el sistema completo en su *forma conservativa*, es decir, un sistema en forma conservativa es en el que el volumen permanece fijo y se analizan las cantidades entrantes y salientes de dicho volumen se escribe como,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F_j}{\partial x_j} = S \quad (2.16)$$

donde

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ E \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

$$F_j = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j + p \delta_{1j} \\ \rho v_2 v_j + p \delta_{2j} \\ \rho v_3 v_j + p \delta_{3j} \\ (E + p) v_j \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \partial_x \phi \\ -\rho \partial_y \phi \\ -\rho \partial_z \phi \\ -\rho (\vec{v} \cdot \nabla \phi) \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

donde $\delta_{i,j}$ es la delta de Kronecker. A los vectores columna F_j se les conoce como términos de flujo y son funciones de las cantidades conservadas, y S representa las fuentes en el cual se a añadido el término $-\rho \vec{v} \cdot \nabla \phi$ a la ecuación de la energía proveniente de considerar la fuerza externa.

Veamos que las variables involucradas hasta ahora son ρ , \vec{v} , E , p y ϕ , por lo tanto son 6 ecuaciones y 7 variables pero no todas son independientes, dado a que existe una relación entre algunas de ellas dadas por la ecuación de estado.

2.3. Ecuación de estado

Una ecuación de estado es una relación entre las variables macroscópicas que describen un sistema, el caso más sencillo es en el que siempre están involucradas la temperatura T , presión p y volumen V dicha relación puede escribirse de manera general como

$$f(p, V, T) = 0, \quad (2.20)$$

el concepto matemático de esta última expresión dice que al menos dos de estas tres variables son independientes y la tercera depende de ellas. No existe una ecuación de estado para cualquier gas, existen varios modelos para distintos casos, el más simple corresponde a la ecuación de estado para un gas ideal

$$pV = n_p k_B T, \quad (2.21)$$

donde n_p es el número de partículas y k_B es la constante de Boltzman. Otra propiedad importante de los gases son sus capacidades caloríficas específicas las cuales se definen como

$$c_V = \frac{1}{M} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V, \quad c_p = \frac{1}{M} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p, \quad (2.22)$$

donde $M = n_p m$ es la masa total y m es la masa individual de cada partícula y las capacidades son solo funciones de la temperatura. Se define al índice adiabático γ como el cociente entre las capacidades caloríficas como

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V}. \quad (2.23)$$

Se debe notar que la importancia de las capacidades caloríficas específicas es que dan una medida de capacidad que tiene un gas de almacenar calor, en este contexto un gas que se encuentra a presión constante podrá almacenar más calor, que uno que se mantiene a volumen constante, es decir, la mayoría de los casos $c_p > c_V$ esto implica que $\gamma > 1$. Esto puede verse directamente desde la primera ley de la termodinámica

$$dQ = dU + pdV \quad (2.24)$$

donde dU es el diferencial de la energía interna U y pdV es el trabajo que realiza el gas. Si el volumen permanece constante $pdV = 0$ y la primera ley se reduce a $dQ = dU$ en este caso c_V puede obtenerse de manera directa

$$c_V = \frac{1}{M} \left(\frac{dU}{dT} \right), \quad (2.25)$$

integrando esta expresión suponiendo que c_V permanece constante se tiene que

$$U = Mc_V T. \quad (2.26)$$

Ahora si se supone que la presión es constante, diferenciando la ec. (2.21) se tiene que

$$pdV = n_p k_B dT, \quad (2.27)$$

sustituyendo en la segunda ley

$$dQ = dU + pdV = Mc_V dT + n_p k_B dT, \quad (2.28)$$

sustituyendo el dQ en la capacidad calorífica a presión constante se tiene que

$$c_p = c_V + k_B/m, \quad (2.29)$$

donde se verifica que $c_p > c_V$ y el índice adiabático queda como

$$\gamma = 1 + \frac{k_B}{mc_V}. \quad (2.30)$$

Ahora se puede reescribir la ecuación de estado para un gas ideal como

$$pV = \frac{k_B U}{mc_V} = (\gamma - 1)U, \quad (2.31)$$

dividiendo por el volumen se tiene

$$p = (\gamma - 1) \rho e \quad (2.32)$$

donde $U/V = \rho e$ y con esta ecuación se puede cerrar el sistema de las ecuaciones de Euler, y además una vez conocida la energía interna e se puede calcular la temperatura nuevamente ya que $U = n_p m e$ mediante la ec. (2.26) así que

$$T = \frac{m}{k_B} (\gamma - 1) e \quad (2.33)$$

Otra ecuación de estado que se utiliza comúnmente para modelar el interior de las estrellas es la ecuación politrópica la cual tiene la forma

$$p = K\rho^\gamma \equiv K\rho^{1+1/n}, \quad (2.34)$$

donde K es una constante y n se le conoce como el índice politrópico, esta constante K se relaciona con la entropía específica s mediante la expresión

$$K = e^{s/c_V} \quad (2.35)$$

así que un proceso en el cual se defina a K como constante es llamado isentrópico ya que la entropía del sistema permanece constante.

Battaner, E. en ([4]) hace una breve discusión sobre la ecuación de estado para una enana blanca y llega a la conclusión de que la densidad y la presión se relacionan mediante la expresión

$$p = K\rho^{\frac{5}{3}} \quad (2.36)$$

donde K tiene la siguiente forma

$$K = \frac{h^2}{m_e m_H^{5/3}} \frac{1}{5} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} \approx 3 \times 10^{12} g^{-2/3} cm^4 s^{-2} \quad (2.37)$$

donde m_e es la masa del electrón, m_H la masa del hidrógeno, y h es la constante de Plank. Para una estrella enana blanca relativista se tiene que

$$p = K\rho^{\frac{4}{3}} \quad (2.38)$$

donde ahora K toma el valor de $K = 4.68 \times 10^{14} g^{-1/4} cm^3 s^{-2}$, se encuentra además que el límite de masa para una estrella debe de ser aproximadamente 1.4 veces masas solares si se le inyecta más masa al sistema entonces existen dos posibilidades: esta arroja la masa sobrante al espacio o bien cambia de naturaleza, los electrones se unen a los protones y forman una estrella de neutrones, así que como límite en la masa se tomará el límite de Chandrasekhar el cual es precisamente $1.4M_\odot$ siendo M_\odot la masa del Sol. Una discusión más detalla de estas ecuaciones lo hace Collins, G en [5].

Ya sea que se elija la ecuación de estado para el gas ideal $p = p(\rho, e)$ o bien la ecuación de estado politrópica $p = p(\rho)$ el sistema de las ecuaciones de Euler se completa y lo único que hace falta para poder resolver son

condiciones iniciales y de contorno. Para las condiciones iniciales se tomará inicialmente un sistema en equilibrio hidrostático.

2.4. Estrellas en Equilibrio Hidrostático

Para la construcción de condiciones iniciales que sean aproximadamente aceptables es necesario hacer simplificaciones a las ecuaciones de Euler, por esta razón se supondrá un sistema en equilibrio hidrostático, es decir, un sistema estacionario con velocidad cero.

2.4.1. Ecuaciones de Tolman–Oppenheimer–Volkoff

En el caso de una estrella en equilibrio, existe la fuerza de gravedad que actúa atrayendo el gas estelar hacia el centro y comprimiéndolo, y la variación radial de presión que actúa en sentido contrario intentando expandir el sistema. En condiciones ideales la estrella está en equilibrio y adopta una forma esférica estable, por esto supondremos un sistema con simetría esférica es decir, que las propiedades del sistema dependen únicamente de la dirección radial.

Bajo estas suposiciones consideremos que tenemos una esfera de radio r en el interior de una estrella. Entonces la fuerza que se opone a la gravedad es $-dp/dr$ por lo que se tiene que

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}, \quad (2.39)$$

donde $m = m(r)$ es la masa contenida en la esfera de radio r y ρ es la densidad de la estrella. La masa se puede determinar si consideremos un elemento diferencial de masa dado por

$$dm = 4\pi\rho r^2 dr, \quad (2.40)$$

reescribiendo

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi\rho r^2, \quad (2.41)$$

Este par de ecuaciones (2.39) y (2.41) son la reducción de las ecuaciones de *Tolman-Oppenheimer-Volkoff* (TOV) en el caso Newtoniano y una deducción más detallada puede verse en [4]. Con el fin de obtener una descripción mecánica más detallada del sistema podemos añadir la ecuación para el potencial gravitacional

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{Gm}{r^2}. \quad (2.42)$$

Para resolver el sistema anterior es necesario utilizar la ecuación de estado y especificar las condiciones de frontera en el origen, pero para la masa es sencillo ya que el radio es nulo entonces no hay materia por tanto $m(0) = 0$, para la presión si utilizamos la ecuación de estado politrópica entonces se tiene que $p(0) = K\rho_c^\gamma = p_c$, así que la característica que determina a una estrella de este tipo es la densidad central ρ_c . Por último la elección de $\phi(0) = \phi_c$ puede elegirse de cualquier modo ya que el potencial se puede reescalar una vez obtenida la masa, sabiendo que para una radio r mucho más grande que el radio de la estrella el potencial tiene que aproximarse a

$$\phi \approx -G\frac{M}{r}, \quad (2.43)$$

donde M es la masa total de la estrella la cual puede determinarse si sabemos el radio R (como $M = m(R)$). Por lo tanto estas ecuaciones quedan en forma general como el siguiente sistema EDOs.

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dr} &= 4\pi r^2 \rho, & m(0) &= 0 \\ \frac{dp}{dr} &= -\frac{Gm}{r^2} \rho, & p(0) &= p_c \\ \frac{d\phi}{dr} &= G\frac{m}{r^2}, & \phi(0) &= \phi_c \end{aligned} \quad (2.44)$$

Estas ecuaciones presentan singularidades en el punto $r = 0$ pero esto solo es debido a las coordenadas así que se encontrará una aproximación de estas ecuaciones que muestra que son regulares en torno a este punto.

2.4.2. Regularización de las ecuaciones

Para resolver numéricamente el sistema de ecs.(2.44) se presenta un problema adicional ya que se tiene una singularidad en torno a $r = 0$ es decir, hay términos que decaen como $1/r$ en las ecuaciones esto se debe a que al cambiar a las coordenadas esféricas en este sistema todos los operadores divergen en el origen, sin embargo esto se puede corregir.

Para poder encontrar la solución en torno a $r = 0$ se toma una expansión en serie de Taylor para $m(r)$,

$$m(r) = m(0) + \frac{dm}{dr}(0)r + \frac{d^2m}{dr^2}(0)\frac{r^2}{2!} + \frac{d^3m}{dr^3}(0)\frac{r^3}{3!} + O(r^4) \quad (2.45)$$

pero recordando de las condiciones iniciales, si $m(0) = 0$ se tiene entonces que

$$\frac{dm}{dr}(0) = 4\pi r^2 \rho|_{r=0} = 0$$

derivando nuevamente la masa se puede obtener que $m''(0) = 0$ y que $m'''(0) = 8\pi\rho_c$, por lo tanto para $r \approx 0$ sustituyendo estos valores en la ec. (2.45) se tiene que

$$m(r) = \frac{4}{3}\pi\rho_c r^3 + O(r^4) \quad (2.46)$$

sustituyendo esto en la ec. (2.44) se tiene el siguiente sistema de EDOs para $r \approx 0$.

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dr} &= 4\pi\rho_c r^2, \\ \frac{dp}{dr} &= -\frac{4}{3}\pi G\rho_c^2 r + O(r^2), \\ \frac{d\phi}{dr} &= \frac{4}{3}\pi G\rho_c r + O(r^2). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Así vemos que en el límite en el que r tiende a cero el sistema anterior es continuo y no debemos preocuparnos por las singularidades debidas a las

coordenadas pero al resolver de manera numérica se tendrá una aproximación del orden de r^2 que impone que la convergencia de la cuál se hablará en el siguiente capítulo será de orden dos sin importar de que orden (orden mayor o igual a dos) sea utilizado el método numérico, es decir, el error que domina es el debido a el orden más pequeño.

Esto se utiliza en los casos en los que se requieren construir soluciones numéricas. Sin embargo se mencionará la manera de obtener las soluciones analíticas para este sistema.

2.4.3. Ecuación de Lane-Emden

La ec. (2.39) se puede reescribir como

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = -\frac{Gm}{r^2} \quad (2.48)$$

diferenciando nuevamente respecto al radio se puede deducir la siguiente EDO de segundo orden

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi G\rho \quad (2.49)$$

sustituyendo la ecuación de estado politrópica se tiene

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 K \gamma}{\rho} \rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr} \right) = -4\pi G\rho \quad (2.50)$$

esta ecuación requiere las condiciones a la frontera $\rho(0) = \rho_c$ y $\rho(R) = 0$ podemos simplificar esta ecuación definiendo el cambio de variable $\rho = \rho_c \theta^n$, donde n es el índice politrópico con esto la ecuación se reduce a

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n \quad (2.51)$$

donde se definió un nuevo cambio de variable $\xi = \alpha r$ con

$$\alpha = \left(\frac{n+1}{4\pi G} K \rho_c^{1/(n-1)} \right)^{1/2}. \quad (2.52)$$

La ec. (2.51) se llama ecuación de *Lane-Emden* y tiene tres soluciones analíticas.

$$n = 0, \quad \theta_0 = 1 - \frac{\xi^2}{6}$$

$$n = 1, \quad \theta_1 = \frac{\sin \xi}{\xi}$$

$$n = 5, \quad \theta_5 = \left(1 + \frac{\xi^2}{3}\right)^{1/2}$$

Para $n = 0$ y 1 las soluciones θ_0 y θ_1 se hacen cero en $\xi = \sqrt{6}$ y $\xi = \pi$ respectivamente. Estos puntos se interpretan como el radio de la estrella por lo que la solución para $n = 5$ representaría una estrella de radio infinito. Además para un índice politrópico mayor a cinco se tendría un potencial gravitacional positivo y por lo tanto esto no representaría una estrella real.

Varios autores simulan estrellas de neutrones con politrópos de índice $n = 1$, pero aunque las soluciones a la ecuación de Lane-Emden sean objetos compactos no se debe olvidar que el modelo utilizado en realidad representa un gas ideal y estamos pensando que algunas estrellas pudieran comportarse aproximadamente de esta forma. Ahora para no limitar la construcción de datos iniciales a estas tres ecuaciones se resolverán las ecuaciones TOV de manera numérica.

Con estas consideraciones obtenemos la manera de construir las condiciones iniciales y por tanto imponiendo condiciones de frontera se puede evolucionar distintos sistemas, la manera de resolver estas ecuaciones es de manera numérica por lo que los métodos necesarios para ello se explicarán en le siguiente capítulo.

Capítulo 3

Métodos Numéricos

Como se mencionó en el capítulo anterior resolver tanto las ecuaciones TOV (2.44) como las ecuaciones de Euler 2.16, no hay una solución analítica al problema planteado, la primera opción es recurrir a herramientas que permitan acercarse a soluciones de una manera aproximada. Dichas herramientas indispensables en muchos casos, como en este, son los métodos numéricos, en general estos se basan en la idea de resolver las ecuaciones en un dominio discreto y tratar de encontrar una solución aproximada por medio de un número finito (y las más pocas posibles) de operaciones, los métodos que se discutirán están basados en las diferencias finitas.

3.1. Diferencias Finitas

La aproximación en diferencias finitas de una ecuación diferencial ya sea ordinaria o parcial consiste en definir a las funciones y variables en un dominio discreto de puntos del dominio continuo donde se busca una solución de la ecuación.

Consideremos inicialmente el caso en una dimensión ya que es análogo en más dimensiones.

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde $\Omega = [x_{min}, x_{max}]$ es el dominio de f , enton-

ces se define a $\Omega^h \subset \Omega$ como el dominio discreto que consta un número finito de elementos, es decir $\Omega^h = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ donde $x_0 \equiv x_{min}$ y $x_N \equiv x_{max}$.

La manera más sencilla de particionar a Ω^h es uniformemente:

$$x_i = x_{min} + i\Delta x, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (3.1)$$

donde $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/N$ es la longitud del intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

Ahora que esta definido un dominio finito de la función como se muestra en la Fig. (3.1), podemos hacer una aproximación de la función f la cual consiste en hacer una expansión en serie de Taylor.

El desarrollo en serie de Taylor para una función $f(x)$ definida en Ω que tiene hasta la k -ésima derivada centrada en x_i es

$$f(x) = f(x_i) + \frac{(x - x_i)}{1!} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \dots + \frac{(x - x_i)^k}{k!} \left. \frac{d^k f}{dx^k} \right|_{x_i} + O(x - x_i)^{k+1}, \quad (3.2)$$

donde $O(x - x_i)^2$ es el error de truncamiento local que se comete al aproximar la función con el polinomio de orden k . Esta definición es válida para cualquier función f que sea k veces diferenciable y es válido para todo punto interior a Ω en particular para Ω^h , así podemos obtener aproximaciones a la primera derivada como sigue.

3.1.1. Aproximación a la primera derivada

Consideremos la expansión en serie de Taylor alrededor del punto $x = x_i + \Delta x$ el cual por estar en Ω^h coincide con $x = x_{i+1}$. Denotando por $f_i = f(x_i)$ se tiene la siguiente aproximación para la derivada por *diferencias progresivas*,

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + O(\Delta x)^2, \quad (3.3)$$

de está ecuación podemos despejar a la derivada, así se obtiene la siguiente expresión

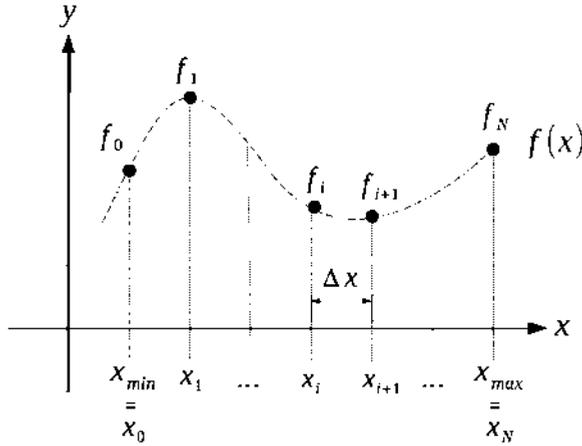


Figura 3.1: Gráfica del dominio discreto para el cual para cada x_i está definida la función $f(x_i) = f_i$.

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{-} O(\Delta x), \quad (3.4)$$

donde la aproximación de la derivada es de primer orden, es decir $O(\Delta x)$ se define como el error de truncamiento local de orden 1.

Ahora si en lugar de considerar el punto x_{i+1} se considera el punto x_{i-1} la aproximación en el desarrollo en serie de Taylor sería

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + O(\Delta x)^2, \quad (3.5)$$

despejando la primera derivada se tiene la aproximación de la derivada por *diferencias regresivas* es

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (3.6)$$

la cual es nuevamente una aproximación a primer orden, si se requiere un grado más de precisión se necesita extender el desarrollo en serie de Taylor hasta la tercera derivada así utilizando el punto x_{i+1} y el punto x_{i-1} se tiene que

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} + O(\Delta x)^3, \quad (3.7)$$

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} - O(\Delta x)^3, \quad (3.8)$$

si restamos la ec. (3.8) de la ec. (3.7) se tiene que la derivada por *diferencia centrada* es

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2. \quad (3.9)$$

Como hemos visto para un error del orden de $O(\Delta x)$ solo se necesitan dos puntos ya sean x_i y x_{i+1} o bien x_{i-1} y x_i , y para lograr tener un error del orden de $O(\Delta x)^2$ fue necesario utilizar los tres puntos y el desarrollo en serie de Taylor hasta la tercera derivada, si utilizamos el valor de la función con más puntos podemos obtener mejores aproximaciones de la primera derivada utilizando una combinación lineal con cada una de las aproximaciones.

La mayoría de las ecuaciones que aparecen en la física son EDPs de segundo orden por lo que necesitamos saber como se discretiza una derivada de orden dos.

3.1.2. Derivada de ordenes mayores

De igual forma es necesario hacer una expansión en serie de Taylor, por ejemplo para la segunda derivada podemos usar los desarrollos en x_{i+1} y x_{i-1} ,

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} + \frac{\Delta x^3}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x_i} + O(\Delta x)^4, \quad (3.10)$$

y

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} - \frac{\Delta x^3}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x_i} + O(\Delta x)^4, \quad (3.11)$$

sumando estas dos ecuaciones y despejando la segunda derivada se tiene la siguiente aproximación para la segunda derivada

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x)^2. \quad (3.12)$$

De igual forma entre más precisión se desee más puntos es necesario tomar, y entre más grande sea el orden de la derivada a aproximar más grande debe de ser el desarrollo en serie de Taylor.

Las aproximaciones en diferencias finitas son de gran utilidad ya que como se mencionó anteriormente permiten encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales (con cierto orden de error). Primeramente necesitamos solucionar un sistema de EDOs ya que con esto se obtendrán las condiciones iniciales.

3.2. Problema de valores iniciales

El equilibrio hidrostático de una estrella con simetría esférica se describe mediante el sistema de EDOs (2.44). Para resolver de manera numérica vamos a estudiar inicialmente el caso de una EDO de primer orden, considérese el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (3.13)$$

donde y_0 es la condición inicial en x_0 . Si consideramos resolver en un dominio finito, digamos en Ω^h entonces de acuerdo a la sección anterior podemos aproximar el lado derecho de la ec. (3.13) como

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

donde $y_i = y(x_i)$ por definición. Sustituyendo la ec. anterior en la ec. (3.13) se obtiene la siguiente expresión para y_{i+1} ,

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x, \quad (3.14)$$

así que dado el dato inicial y_0 se puede obtener y_1, y_2, \dots, y_N para algún N deseado. Esta última ecuación se conoce como el *método de Euler*. Otro método que puede construirse con una idea intuitiva como la anterior es el de *Backward-Euler* el cual consiste en lugar de calcular la derivada en el punto x_i se calcula en el punto x_{i+1} , para lograr esto primeramente se calcula y_{i+1} como el método anterior, por lo que es conveniente definir a $k_1 = f(x_i, y_i)$ la cual puede interpretarse gráficamente como la pendiente de la función y en el punto x_i , entonces sustituyendo en la ec. (3.14) se tiene que

$$y_{i+1} = y_i + k_1 \Delta x, \quad (3.15)$$

entonces y_{i+1} ya tiene un valor y se puede volver a iterar de la siguiente manera

$$y_{i+1} = y_i + k_2 \Delta x, \quad (3.16)$$

donde $k_2 = f(x_{i+1}, y_{i+1})$. Otra solución que se puede obtener es utilizar los valores de k_1 y k_2 para encontrar la solución como el promedio de éstas dos y a este método se le conoce como el *método del trapecio*,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2} (k_1 + k_2) \Delta x. \quad (3.17)$$

Ahora la pregunta que surge naturalmente es ¿porqué gastar más tiempo en hacer un número mayor de operaciones si los tres métodos están calculando la misma solución? Aquí debemos recordar que la solución sólo es una *aproximación* y que esta aproximación puede o no ser muy precisa, es decir puede que la solución numérica obtenida se este aproximando mejor a la solución analítica o en otras palabras, la solución numérica este convergiendo a la solución analítica, por lo que es conveniente saber que tanto nos alejamos de la solución analítica, para esto es fácil ver que el método de Euler tiene un error de truncamiento local del orden de $O(\Delta x)$ ya que la expansión en serie de Taylor se corta hasta $\Delta x f(x, y)$ mientras que el método del trapecio se demuestra que su error de truncamiento local es de orden dos, la manera de saber que tan lejos se esta de la solución analítica es definiendo un *error local* como

$$e_i = y_i - \tilde{y}_i, \quad (3.18)$$

donde y_i es la solución analítica y \tilde{y}_i la solución numérica en el punto x_i . Otra cosa que se debe notar es que $e_0 = 0$ y además diremos que un método es *convergente* si $e_i \rightarrow 0$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$, entonces un método de error de truncamiento local $O(\Delta x)^n$ converge más rápido a la solución en el continuo entre más grande sea n , así que el método de Euler y Backward-Euler son los que convergen más lento y por esta razón no se suele utilizar en la práctica, y físicamente se entiende que estos métodos inyectan y disipan la energía del sistema respectivamente. La sencillez de este método es muy ilustrativo pero en la práctica se necesitan métodos con mejor precisión que los ya mencionados si se requiere construir un método con la precisión deseada se utilizan los métodos *Runge-Kutta*

3.2.1. Métodos de Runge-Kutta

Considérese el sistema de EDOs con problema de valor inicial:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0. \quad (3.19)$$

El método consiste en proponer una solución del tipo

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + \vec{\phi}(x_i, \vec{y}_i)\Delta x, \quad (3.20)$$

donde $\vec{\phi}$ se le llama función de incremento y hay una para cada variable y se interpreta como las pendientes de la solución en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Se propone que $\vec{\phi}$ sea de la forma

$$\vec{\phi} = \sum_{i=1}^N a_i \vec{k}_i \quad (3.21)$$

donde los \vec{k}_i son los valores de las pendientes de las soluciones evaluadas en distintos puntos del intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ y se calculan del siguiente modo

$$\begin{aligned}
\vec{k}_1 &= \vec{f}(x_i, \vec{y}_i) \\
\vec{k}_2 &= \vec{f}(x_i + p_1 \Delta x, \vec{y}_i + q_{1,1} \vec{k}_1 \Delta x) \\
\vec{k}_3 &= \vec{f}(x_i + p_2 \Delta x, \vec{y}_i + q_{2,1} \vec{k}_1 \Delta x + q_{2,2} \vec{k}_2 \Delta x) \\
&\vdots \\
\vec{k}_n &= \vec{f}(x_i + p_{n-1} \Delta x, \vec{y}_i + \sum q_{n-1,j} \vec{k}_j \Delta x)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

siguiendo dicho método entre más pasos se tomen mejor precisión tendrá. Por ejemplo el método Runge-Kutta de cuatro pasos (RK4) está dado por

$$\vec{k}_1 = \vec{f}(x_i, \vec{y}_i), \tag{3.23}$$

$$\vec{k}_2 = \vec{f}(x_i + \frac{1}{2} \Delta x, \vec{y}_i + \frac{1}{2} \vec{k}_1 \Delta x), \tag{3.24}$$

$$\vec{k}_3 = \vec{f}(x_i + \frac{1}{2} \Delta x, \vec{y}_i + \frac{1}{2} \vec{k}_2 \Delta x), \tag{3.25}$$

$$\vec{k}_4 = \vec{f}(x_i + \Delta x, \vec{y}_i + \vec{k}_3 \Delta x), \tag{3.26}$$

y la solución para \vec{y}_{i+1} esta dada por,

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + \frac{1}{6} (\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4) \Delta x, \tag{3.27}$$

y dicho método tiene una convergencia de orden $(\Delta x)^4$.

Ahora para nuestro problema de hidrostática solo basta tomar a

$$\begin{aligned}
x &\rightarrow r \\
y_1 &\rightarrow m \\
y_2 &\rightarrow p \\
y_3 &\rightarrow \phi
\end{aligned}$$

Una vez obtenida la solución e interpolado a una malla en tres dimensiones se tienen listas las condiciones iniciales necesarias para poder resolver el

problema de interés principal. Por lo que a continuación veremos el método que nos permitirá encontrar una solución a las ecuaciones de Euler y la ecuación de Poisson.

3.3. Ecuaciones Elípticas

Un ejemplo de una ecuación elíptica corresponde la ec. que describe el potencial gravitacional dada una densidad ρ ,

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}) = 4\pi G \rho(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (3.28)$$

para esta EDP se tienen soluciones con simetría esférica que provienen de resolver numéricamente el sistema TOV. Un escenario interesante de estudiar es el choque de dos estrellas, así que si consideramos un nuevo sistema que conste de dos estrellas con densidades ρ_1 y ρ_2 . Para evolucionar (en el tiempo) el sistema la interacción que causa una sobre la otra rompe la simetría y el sistema completo en general no puede ser descrito con ningún tipo de simetría. Así que la densidad final de este sistema binario es

$$\rho = \rho_1 + \rho_2$$

por lo tanto resolveremos esta ecuación pero antes veamos porque se le llama elíptica.

En general una EDP de segundo orden definida en n variables, en el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se puede expresar en la forma

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu = d \quad (3.29)$$

donde a_{ij} , b_i , c , y d son funciones reales de las variables x_1, \dots, x_n . Tomaremos el caso en el que estos coeficientes son constantes ya que esto corresponde al nuestro caso de interés. A la suma $\sum_{i,j} a_{ij} u_{x_i x_j}$ se conoce como la parte principal de la EDP y puede reescribirse como

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

si u tiene segundas derivadas parciales continuas se puede decir que la matriz de la parte principal de la EDP. Las EDPs pueden clasificarse de distintas maneras dependiendo de los eigenvalores de la matriz. Sea A una matriz de $n \times n$ asociada a la parte principal de la EDP entonces

- Si todos los eigenvalores de la matriz A son distintos de cero y además de mismo signo, entonces se dice que la ecuación es del tipo *Elíptico*.
- Si uno y sólo uno de los eigenvalores de la matriz A es igual a cero, entonces se dice que la ecuación es del tipo *Parabólico*.
- Si todos los eigenvalores de la matriz A son distinto de cero y además $n - 1$ de ellos tienen el mismo signo, entonces se dice que la ecuación es del tipo *Hiperbólico*.

La ecuación de Poisson en 3 dimensiones es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z) \quad (3.31)$$

por lo que la matriz $A = I_3$, donde I_3 es la matriz identidad de 3×3 por lo que la matriz tiene un solo eigenvalor $\lambda = 1$ con multiplicidad tres y $\lambda > 0$ por lo que la ec. (3.31) corresponde a una EDP elíptica.

En general la ecuación de Poisson tiene una infinidad de soluciones a menos de que se especifiquen las condiciones de frontera del dominio de la función, consideremos una condición de frontera de la siguiente forma

$$\alpha u + \beta \partial_n u = \gamma, \quad (3.32)$$

donde u es nuestra función y (α, β, γ) son funciones, y ∂_n denota la derivada normal a lo largo de la frontera de Ω . La ec. (3.32) se clasifica de la siguiente forma:

1. Si $\beta = 0$ este caso se conoce como condición de tipo *Dirichlet*.
2. Si $\alpha = 0$ este caso se conoce como condición de tipo *Newmann*.
3. Si $\alpha, \beta \neq 0$ son condiciones de tipo *mixto*.

Para la ecuación de Poisson como la densidad solo la conocemos de manera numérica, es decir solo se tiene una tabla de datos que representa a esta función la manera de resolver la ecuación tiene forzosamente que ser de manera numérica.

3.3.1. Métodos Iterativos

Considérese el problema de resolver la ecuación de Poisson en tres dimensiones con condiciones de frontera de Dirichlet,

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(\vec{x}) &= f(\vec{x}), & \vec{x} &\in \Omega \subset \mathbb{R}^3 \\ u(\vec{x}) &= g(\vec{x}), & \vec{x} &\in \partial\Omega \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde $\partial\Omega$ denota la frontera del dominio Ω .

Una solución aproximada v de la ec. (3.33) se obtiene al resolver en un dominio discreto $\Omega^{i,j,k} \subset \Omega = [x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}] \times [z_{min}, z_{max}]$, donde $\Omega^{i,j,k}$ puede discretizarse de manera uniforme partiendo a cada intervalo en N_x , N_y y N_z partes respectivamente como sigue

$$\begin{aligned} x_i &= x_{min} + i\Delta x, & i &= 0, 1, \dots, N_x \\ y_j &= y_{min} + j\Delta y, & j &= 0, 1, \dots, N_y \\ z_k &= z_{min} + k\Delta z, & k &= 0, 1, \dots, N_z \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/N_x$, $\Delta y = (y_{max} - y_{min})/N_y$ y $\Delta z = (z_{max} - z_{min})/N_z$.

Una vez discretizado el dominio, lo siguiente es discretizar al operador sobre el dominio $\Omega^{i,j,k}$ para el cual se tiene a segundo orden las siguientes aproximaciones utilizando diferencias finitas centradas,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + O(\Delta x)^2 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} + O(\Delta y)^2 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} + O(\Delta z)^2\end{aligned}\quad (3.35)$$

donde $u_{i,j,k} \equiv u(x_i, y_j, z_k)$, una manera de recordar estas expansiones es utilizar una molécula computacional como se puede ver en la Fig. (3.2) que puede recordarse como un promedio de los valores vecinos del punto donde se desea conocer el valor de la derivada sobre cada una de las direcciones específicas, así la derivada con respecto a x se calcula con los puntos $i - 1$, i y $i + 1$ de forma análoga para la derivada respecto a y y z .

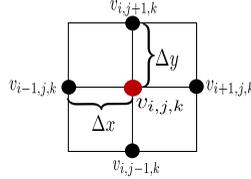


Figura 3.2: Molécula computacional en 2D en el cual podemos utilizar los puntos para calcular el valor de las derivadas parciales respecto a x y y .

Ahora utilizando las expansiones de las ecs. (3.35) sustituyendo en la ec. (3.33) se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{u_{i+1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i-1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j-1,k}}{\Delta y^2} + \\ \frac{u_{i,j,k+1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k-1}}{\Delta z^2} + O(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2) = f_{i,j,k}\end{aligned}\quad (3.36)$$

esta última expresión puede simplificarse si $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$ (así $\Omega^{i,j,k} \equiv \Omega^h$) por lo tanto se reduce a

$$v_{i+1,j,k} + v_{i-1,j,k} + v_{i,j+1,k} + v_{i,j-1,k} + v_{i,j,k+1} + v_{i,j,k-1} - 6v_{i,j,k} = h^2 f_{i,j,k} \quad (3.37)$$

con un error del orden h^2 . Esta ecuación en realidad representa un sistema de ecuaciones lineales para las variables $v_{i,j,k}$ para $i, j, k = 1, 2, \dots, N-1$ para las cuales su solución está determinada por los valores en la frontera y todos los valores para $f_{i,j,k}$ este sistema puede escribirse de manera matricial como

$$A^h \mathbf{v} = \mathbf{f}. \quad (3.38)$$

La matriz A^h es una matriz tridiagonal, simétrica y positiva definida por lo cual, muchas veces se aprovecha su estructura para resolverla por métodos directos (LU, Cholesky) pero resulta más sencillo la implementación de los métodos iterativos (Jacobi, Gauss Seidel). Si proponemos una solución inicial \mathbf{v}^n podemos encontrar una nueva aproximación \mathbf{v}^{n+1} si despejamos a $v_{j,j,k}$ de la ec. (3.37)

$$v_{i,j,k}^{n+1} = \frac{1}{6} (v_{i+1,j,k}^n + v_{i-1,j,k}^n + v_{i,j+1,k}^n + v_{i,j-1,k}^n + v_{i,j,k+1}^n + v_{i,j,k-1}^n - h^2 f_{i,j,k}) \quad (3.39)$$

este método se conoce como el *método de Jacobi*, el cual puede obtenerse de una manera distinta si consideramos el problema de evolución

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u - f \quad (3.40)$$

donde el super-índice n denota a la función al tiempo t^n y $n+1$ al tiempo t^{n+1} . Para que la ec. (3.39) sea solución de la ec. (3.40) es necesario elegir a $\Delta t/h^2 = 1/6$ y como se busca a u como una solución estacionaria es decir que la derivada temporal se anule en la aproximación es lo mismo a pedir que

$$|v_{i,j,k}^{n+1} - v_{i,j,k}^n| < \epsilon \quad (3.41)$$

donde ϵ es un factor de tolerancia ya que al ser \mathbf{v} una aproximación es probable que $v_{i,j,k}^{n+1} - v_{i,j,k}^n$ nunca sea cero, así que se itera las veces necesarias

en el tiempo hasta cumplir esta condición. Ahora como tenemos dos aproximaciones \mathbf{v}^{n+1} y \mathbf{v}^n en lugar de volver a iterar podemos buscar una mejor solución a partir de estas dos, es decir, si se corrige la solución calculada de la siguiente forma

$$v_{i,j,k}^{n+1} \leftarrow \omega v_{i,j,k}^{n+1} + (1 - \omega)v_{i,j,k}^n \quad (3.42)$$

donde $1 < \omega < 2$ se le llama factor de ponderación el cual puede acelerar la convergencia de la solución ya que permite corregir el valor de $v_{i,j,k}^n$ con el factor ω el cual es un peso que se ajusta para minimizar el número de iteraciones, este método se conoce como el *método de Jacobi ponderado*.

El método de Jacobi utiliza una solución anterior permitiendo mejorar la solución en cada iteración, sin embargo se pueden utilizar las componentes ya corregidas sobre la misma solución esto se conoce como el *método de Gauss-Seidel*, la ventaja de este método es que no tiene que esperar hasta la siguiente iteración para poder utilizar los datos corregidos si no que lo va haciendo sobre si mismo permitiendo que la solución converja más rápido,

$$v_{i,j,k}^{n+1} \leftarrow \frac{1}{6}(v_{i+1,j,k}^{n+1} + v_{i-1,j,k}^{n+1} + v_{i,j+1,k}^{n+1} + v_{i,j-1,k}^{n+1} + v_{i,j,k+1}^{n+1} + v_{i,j,k-1}^{n+1} - h^2 f_{i,j,k}). \quad (3.43)$$

El método de Gauss-Seidel se puede modificar de igual manera que se hace para el método de Jacobi ponderado para obtener una aceleración de la convergencia, estos métodos solo nos permiten aproximar a la solución en el continuo con cierto grado de precisión. El error \mathbf{e} de la solución \mathbf{v} está dado por,

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{v}. \quad (3.44)$$

En ocasiones es más conveniente definir un error global es decir, un error sobre todo el dominio que un error local, para esto se pueden definir las siguientes cantidades escalares,

$$\|\mathbf{e}\|_{\infty} = \max(e_{i,j,k}) \quad i, j, k = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (3.45)$$

$$\| \mathbf{e} \|_p = \left(\sum_{i,j,k=1}^{N-1} |e_{i,j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (3.46)$$

la ec. (3.45) se conoce como la norma del error de la norma infinito y la ec. (3.46) el error de la norma p .

En general los métodos en diferencias finitas tienen el problema de que la resolución, es decir, el tamaño del paso h influye fuertemente en la relajación sobre los errores a altas y bajas frecuencias. Si se tiene una resolución muy pequeña, es difícil eliminar los errores asociados a frecuencias altas, se mostrará esto en el siguiente ejemplo. Tomemos la función

$$v_{i,j,k} = \sin(k_0\pi x_i) \sin(k_0\pi y_j) \sin(k_0\pi z_k)$$

como una primera aproximación para el problema

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, & (x, y, z) &\in \Omega \\ u &= 0, & (x, y, z) &\in \partial\Omega \end{aligned}$$

donde la solución analítica es $u = 0$ y $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, por lo tanto el error \mathbf{e} coincide con \mathbf{v} y a este error se le asocia una frecuencia de k_0 , por ejemplo con $N = 20$ y 200 iteraciones se tienen los siguientes resultados.

El error de la norma dos ($p = 2$) como función de las iteraciones para el método de Jacobi se muestra en la Fig. (3.3) para valores de números de onda $k_0 = 1, 4, 8$, para el método de Gauss-Seidel se tienen las gráficas de las Fig. (3.4), (3.5) para valores del factor de ponderación de $\omega = 1$ y 1.5 respectivamente y las mismas frecuencias que las utilizadas en el método de Jacobi. Se puede ver que el método que necesita un número menor de iteraciones para un error aproximadamente cero es el método de Gauss-Seidel con el factor de ponderación de $\omega = 1.5$, mientras que en último lugar se encuentra el método de Jacobi, pero para todos estos se tienen resultados similares, entre menor es la frecuencia se necesita un número mayor de iteraciones con una resolución baja comparada con la frecuencia.

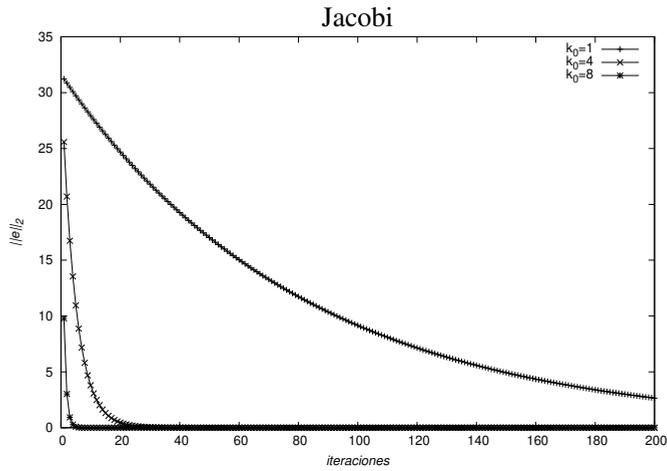


Figura 3.3: Error de la norma dos en la aproximación de la solución como función de las iteraciones, utilizando el método de Jacobi para distintas frecuencias asociadas a los números de onda $k_0 = 1, 4, 8$. Se observa que a menores frecuencias es mas grande el número de iteraciones necesarias para reducir el error.

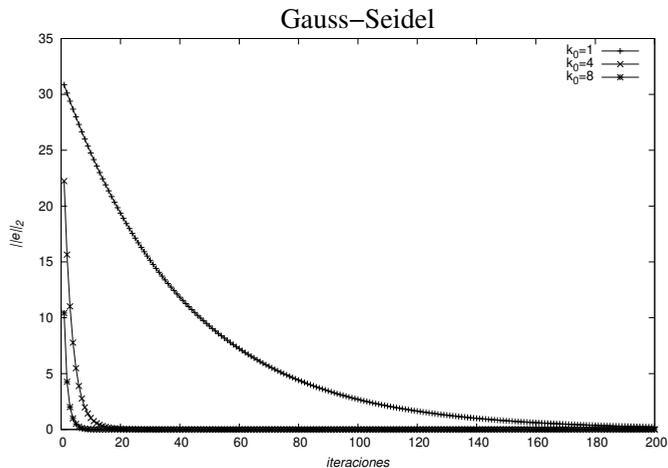


Figura 3.4: Error de la norma dos en la aproximación de la solución como función de las iteraciones, utilizando el método de Gauss-Seidel para distintas frecuencias asociadas a los números de onda $k_0 = 1, 4, 8$.

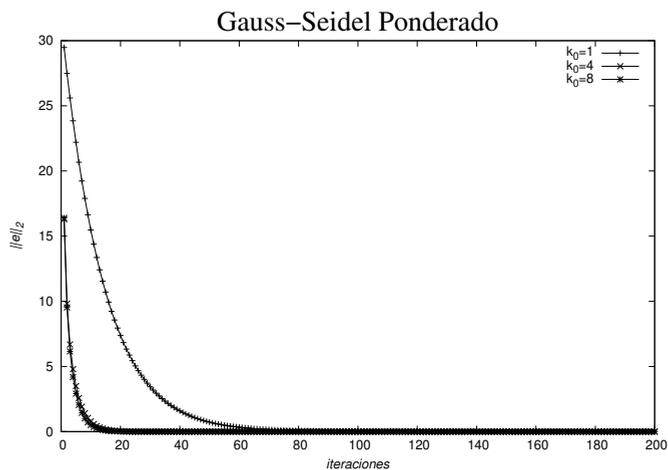


Figura 3.5: Error de la norma dos en la aproximación de la solución como función de las iteraciones, utilizando el método de Gauss-Seidel con un factor de ponderación $\omega = 1.5$ para distintas frecuencias asociadas a los números de onda $k_0 = 1, 4, 8$.

El problema principal de estos métodos radica en que en problemas más complicados no solo se tiene una sola frecuencia, si no se tienen superposiciones con distintas frecuencias, como ya se mostró algunas cuesta un número mayor de iteraciones para reducir los errores para que los métodos permitan la convergencia de la solución. Existe un método el cual en lugar de resolver un número mayor de iteraciones este obtiene errores de las aproximaciones en dominios discretos con una resolución menor lo que permite corregir errores de bajas frecuencias dado a que estos pasan a ser de alta frecuencia en dominios con resolución más baja ese método se conoce como Multigrid y lo explicaremos en la siguiente sección.

3.3.2. Método de Multigrid

Como se mostró en la sección anterior entre menor es la frecuencia asociada a los errores más iteraciones se necesitan para poder eliminarlos, además se pueden tener distintas frecuencias de errores en una misma solución, el *método de multigrid* consiste en lo siguiente: el error dado por la ec. (3.44) no es posible calcularlo ya que para esto se necesita conocer la solución exacta \mathbf{u} , por otro lado si podemos calcular el residuo \mathbf{r} definido como:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f} - A^h \mathbf{v} \quad (3.47)$$

combinando la ec. (3.44) y (3.47) se obtiene la siguiente expresión para el error,

$$A^h \mathbf{e} = \mathbf{r} \quad (3.48)$$

la cual es similar a la ec. (3.38) pero $\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{r}$ y $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{e}$. En el método de multigrid en lugar de calcular el error \mathbf{e} en Ω^h , se calcula en Ω^{2h} con la finalidad de corregir errores de menor frecuencia que en este dominio pasarían a ser de mayor frecuencia al incrementar la resolución a $2h$ por lo tanto la ecuación resultante sería

$$A^{2h} \mathbf{e}^{2h} = \mathbf{r}^{2h}, \quad (3.49)$$

el error \mathbf{e}^{2h} se utiliza para tener una mejor aproximación de u , pero la pregunta que surge naturalmente es como llevar a \mathbf{e}^h a Ω^{2h} . Para esto se

define el siguiente operador de restricción que nos permite pasar cantidades que vivan en mallas de mayor resolución a menor resolución $I_h^{2h} : \Omega^h \rightarrow \Omega^{2h}$ como,

$$I_h^{2h} \mathbf{v}^h = \mathbf{v}^{2h}, \quad (3.50)$$

y el operador de prolongación (o interpolación) que hace la operación inversa al operador de restricción, es decir toma cantidades de mallas de menor resolución y los manda a mallas de mayor resolución $I_{2h}^h : \Omega^{2h} \rightarrow \Omega^h$ como,

$$I_{2h}^h \mathbf{v}^{2h} = \mathbf{v}^h. \quad (3.51)$$

Por ejemplo en una dimensión se tiene para el operador de restricción,

$$v_j^{2h} = v_{2j}^h, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N/2$$

que gráficamente se puede ver como se muestra en la Fig.(3.6) para este caso solo los valores que toma la función en la malla de mayor resolución solo se copian a la de menor resolución y para el operador de prolongación

$$v_{2j}^h = v_j^{2h}$$

$$v_{2j+1}^h = \frac{1}{2} \left(v_j^{2h} + v_{j+1}^{2h} \right) \quad j = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1$$

en este caso se tiene la Fig.(3.7) la cual interpola los valores de la malla de menor resolución a la de alta resolución.

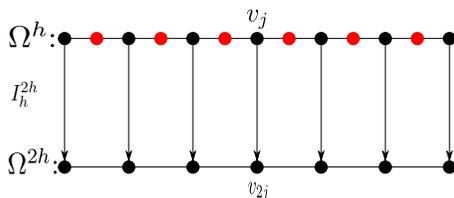


Figura 3.6: En esta gráfica se muestra como el operador de restricción manda los valores de la función en el dominio Ω^h al dominio Ω^{2h} lo cual solo copia los valores de uno al otro.

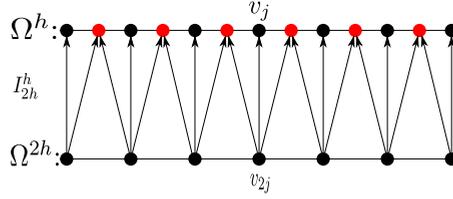


Figura 3.7: En esta gráfica se muestra como el operador de prolongación solo copia algunos de los valores de la función en el dominio Ω^{2h} al dominio Ω^h , los que no tienen "imagen" en la malla de mayor resolución se interpolan linealmente .

Una vez interpolado el error \mathbf{e}^h se puede corregir la aproximación $\mathbf{v}^h \leftarrow \mathbf{v}^h + \mathbf{e}^h$, esto es el método de *dos mallas* o *two-grid* en inglés.

Mientras que en tres dimensiones el operador de restricción actúa como $v_{i,j,k}^{2h} = v_{2i,2j,2k}^h$ con $i, j, k = 0, 1, 2, \dots, N/2$, y el operador de prolongación,

$$v_{2i,2j,2k}^h = v_{i,j,k}^{2h}$$

$$v_{2i+1,2j,2k}^h = \frac{1}{2}(v_{i,j,k}^{2h} + v_{i+1,j,k}^{2h})$$

$$v_{2i,2j+1,2k}^h = \frac{1}{2}(v_{i,j,k}^{2h} + v_{i,j+1,k}^{2h})$$

$$v_{2i,2j,2k+1}^h = \frac{1}{2}(v_{i,j,k}^{2h} + v_{i,j,k+1}^{2h})$$

$$v_{2i+1,2j+1,2k}^h = \frac{1}{4}(v_{i,j,k}^{2h} + v_{i+1,j,k}^{2h} + v_{i,j+1,k}^{2h} + v_{i+1,j+1,k}^{2h})$$

$$v_{2i+1,2j,2k+1}^h = \frac{1}{4}(v_{i,j,k}^{2h} + v_{i+1,j,k}^{2h} + v_{i,j,k+1}^{2h} + v_{i+1,j,k+1}^{2h})$$

$$v_{2i,2j+1,2k+1}^h = \frac{1}{4}(v_{i,j,k}^{2h} + v_{i,j+1,k}^{2h} + v_{i,j,k+1}^{2h} + v_{i,j+1,k+1}^{2h})$$

$$v_{2i+1,2j+1,2k+1}^h = \frac{1}{8}(v_{i,j,k}^{2h} + v_{i+1,j,k}^{2h} + v_{i,j+1,k}^{2h} + v_{i,j,k+1}^{2h} + v_{i+1,j+1,k}^{2h} +$$

$$+ v_{i+1,j,k+1}^{2h} + v_{i,j+1,k+1}^{2h} + v_{i+1,j+1,k+1}^{2h})$$

con $i, j, k = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1$, donde se interpola linealmente. En la Fig.(3.8) se muestra a los operadores de restricción y prolongación en 2D ya que es análogo para 3D.

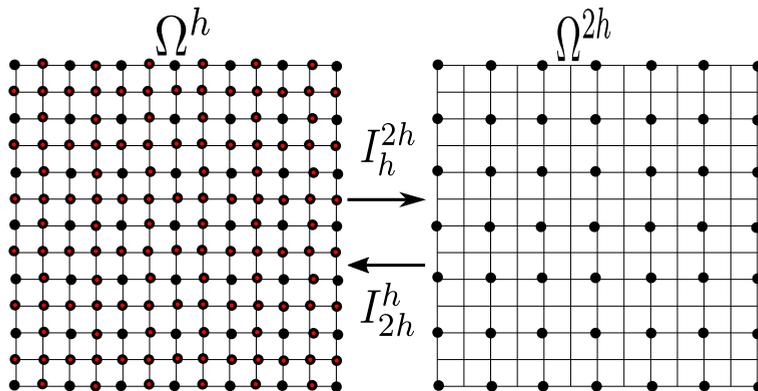


Figura 3.8: En esta gráfica se tiene algo muy similar a lo que pasaba en el caso de una sola dimensión, los valores de la función solo se copian de la malla de mayor resolución a la malla de menor resolución y a diferencia de la prolongación en una dimensión aquí se interpola un punto más pero la interpolación sigue siendo lineal pero ahora en 2D.

Con esto se pueden tener distintos algoritmos que se basen en esta técnica, como por ejemplo los siguientes,

V-Cycle

$$\mathbf{v}^h \leftarrow V^h(\mathbf{v}^h, f^h)$$

- 1) Relajar ν_1 veces en $A^h \mathbf{u}^h = \mathbf{f}^h$ con una solución inicial dada \mathbf{v}^h .
- 2) Si Ω^h = la malla más gruesa, ir al paso 4.
y si no

$$\begin{aligned}\mathbf{f}^{2h} &\leftarrow I_h^{2h}(\mathbf{f}^h - A^h \mathbf{v}^h), \\ \mathbf{v}^{2h} &\leftarrow 0, \\ \mathbf{v}^{2h} &\leftarrow V^{2h}(\mathbf{v}^{2h}, \mathbf{f}^{2h})\end{aligned}$$

3) Corregir $\mathbf{v}^h \leftarrow \mathbf{v}^h + I_{2h}^h \mathbf{v}^{2h}$.

4) Relajar ν_2 veces en $A^h \mathbf{u}^h = \mathbf{f}^h$ con una solución inicial dada \mathbf{v}^h .

Un esquema del método V-Cycle puede verse graficamente en la Fig. (3.9).

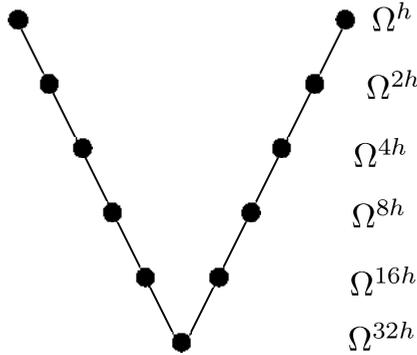


Figura 3.9: Esquema del método V-Cycle para el cual se llega hasta el dominio Ω^{32h} .

μ -Cycle

$$\mathbf{v}^h \leftarrow M\mu^h(\mathbf{v}^h, \mathbf{f}^h)$$

1) Relajar ν_1 veces en $A^h \mathbf{u}^h = \mathbf{f}^h$ con una solución inicial dada \mathbf{v}^h .

2) Si Ω^h es la malla más gruesa, ir al paso 4.
y si no

$$\begin{aligned}\mathbf{f}^{2h} &\leftarrow I_h^{2h}(\mathbf{f}^h - A^h \mathbf{v}^h), \\ \mathbf{v}^{2h} &\leftarrow 0, \\ \mathbf{v}^{2h} &\leftarrow M\mu^{2h}(\mathbf{v}^{2h}, \mathbf{f}^{2h}) \quad \mu \text{ veces}\end{aligned}$$

3) Corregir $\mathbf{v}^h \leftarrow \mathbf{v}^h + I_{2h}^h \mathbf{v}^{2h}$.

4) Relajar ν_2 veces en $A^h \mathbf{u}^h = \mathbf{f}^h$ con una solución inicial dada \mathbf{v}^h .

Un esquema del método μ -Cycle puede verse gráficamente en la Fig. (3.10) para el cual se utiliza $\mu = 2$ y con esto se consigue el método del "W-Cycle" y con $\mu = 1$ tenemos nuevamente el método de V-Cycle.

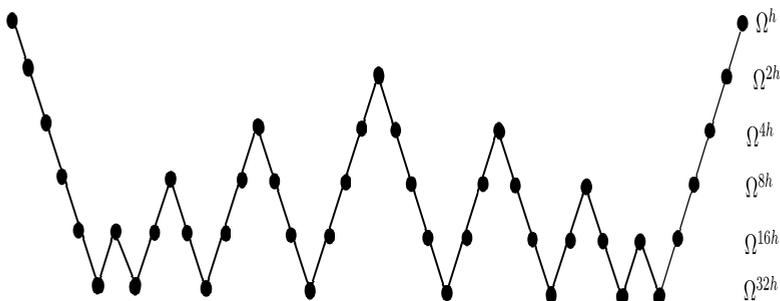


Figura 3.10: Esquema del método μ -Cycle para la cual se llega hasta el dominio Ω^{32h} .

Full Multigrid V-Cycle

$$\mathbf{v}^h \leftarrow FMG^h(\mathbf{f}^h)$$

- 1) Si Ω^h = la malla más gruesa, hacer $\mathbf{v}^h \leftarrow 0$ e ir hasta el paso 3.
Y si no

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{2h} &\leftarrow I_h^{2h}(\mathbf{f}) \\ \mathbf{v}^{2h} &\leftarrow FMG^{2h}(\mathbf{f}^{2h}) \end{aligned}$$

- 2) Corregir $\mathbf{v}^h \leftarrow I_{2h}^h \mathbf{v}^{2h}$.
3) $\mathbf{v}^h \leftarrow IV^h(\mathbf{v}^h, \mathbf{f}^h)$ ν_0 veces.

Un esquema del método Full Multigrid V-Cycle puede verse gráficamente en la Fig. (3.11).

Veamos como funciona el V-Cycle. Tomemos el mismo ejemplo que antes con los valores $k_0 = 1$, en el dominio $\Omega^h = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ con $N = 80$ y

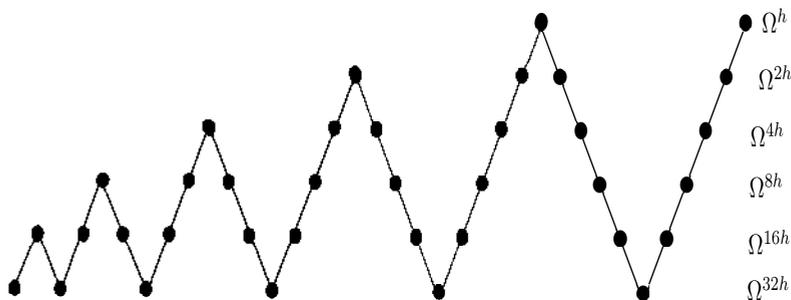


Figura 3.11: Esquema del método Full Multigrid V-Cycle para la cual se llega hasta el dominio Ω^{32h} .

un total de 50 iteraciones, utilizando el método de Gauss-Seidel para relajar los resultados obtenidos para el error de la norma dos se muestran en la fig. (3.12) utilizando 4 niveles con el método, vemos como el error disminuye drásticamente en el nivel 2 el cual corresponde a Ω^{2h} en comparación a el nivel 1, mientras que para los siguientes se presenta una leve mejora.

Los resultados obtenidos muestran como los errores se remueven mejor utilizando diferentes mallas con resoluciones mas bajas que iterando en el mismo dominio.

3.4. Ecuaciones Hiperbólicas

Nuestro interés es resolver el sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) &= 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + p) \vec{u}] &= 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

las cuales son las ecuaciones de la hidrodinámica y forman un sistema de ecuaciones diferenciales hiperbólicas una demostración de esto puede verse

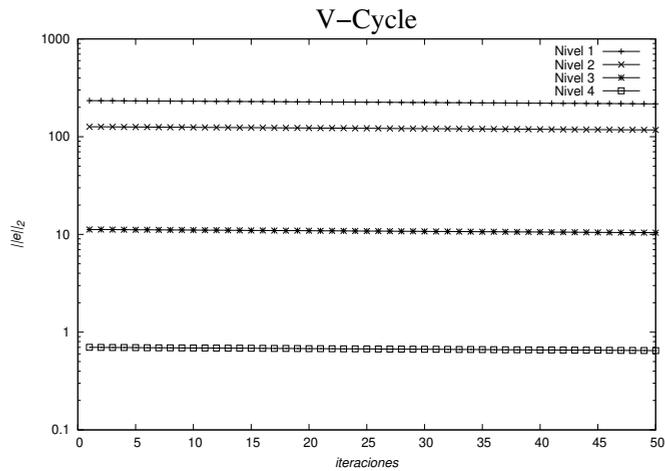


Figura 3.12: Error de la norma dos como función del número de iteraciones utilizando 4 niveles en el método del V-Cycle, el cual se implementó con el método de Gauss-Seidel, por ejemplo para el Nivel 2 se utilizó la corrección a partir del error en Ω^{2h} , y el Nivel 3 en Ω^{4h} y de igual forma para los siguientes niveles.

en [18]. Los problemas de evolución son descritos por este tipo de ecuaciones y pueden resolverse mediante el método de líneas.

3.4.1. Método de Líneas

Consideremos la siguiente EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}(u) \quad (3.53)$$

donde el u puede representar un sistema de ecuaciones y \mathcal{L} es un operador que solo incluye derivadas espaciales. Si \mathbf{u} son los vectores asociados a cada una de las funciones de u y \mathbf{L} es la matriz en diferencias finitas asociado a \mathcal{L} entonces la ec. (3.53) puede ser remplazada por la siguiente EDO

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (3.54)$$

la cual puede ser resuelta mediante el método de Euler

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \mathbf{L}\mathbf{u}^n \Delta t \quad (3.55)$$

esta solución tendrá una convergencia a primer orden a menos que se utilicé el método de Runge-Kutta para obtener una aproximación de mayor orden en la parte temporal, es decir podemos calcular a cuarto orden la solución en la parte temporal como sigue

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \frac{1}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \quad (3.56)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{L}(\mathbf{u}^n) \Delta t \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{L}(\mathbf{u}^n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1) \Delta t \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{L}(\mathbf{u}^n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2) \Delta t \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{L}(\mathbf{u}^n + \mathbf{k}_3) \Delta t \end{aligned} \quad (3.57)$$

así que si se desea una solución con orden cuatro de convergencia es necesario que la matriz \mathbf{L} contenga una discretización del mismo orden en caso

contrario el error que predominará será el que tenga menor orden.

Este método es el que permite solucionar problemas de evolución, tal como es el caso de las ecuaciones de Euler.

3.4.2. Discretización de las Ecuaciones de Euler

Una discretización de las ecuaciones de Euler en la que se definen a las variables en los vértices de las celdas que conforman la malla en la que se pretende resolver el problema, resulta ser un método que no es capaz de evolucionar al sistema durante mucho tiempo por lo que se ha utilizado la sugerencia de Swesty, F [15] en el que se basan en el método empleado por James en [16]. El esquema empleado se muestra en la Fig. (3.13) en el cual se definen a las variables intensivas ρ , E y ϕ en el centro de cada celda de la malla y a las componentes de la velocidad en el centro de las caras de cada una de las celdas, y al igual que James en lugar de la notación de puntos medios solo se recordará donde están definidas cada una de las variables.

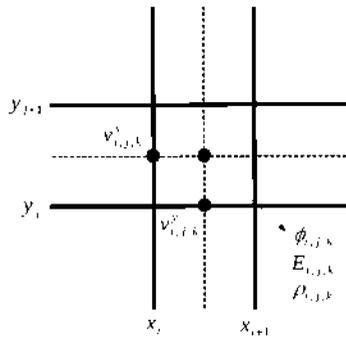


Figura 3.13: Esquema en 2D empleado para la discretización de las ecuaciones de Euler en el plano $z_{k+\frac{1}{2}}$ en el que se muestra donde se definen las variables.

Además del cambio de la definición de las variables intensivas, otra sugerencia es resolver primeramente los términos de advección de las ecuaciones, o como ellos se refieren a los términos del transporte,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\rho \vec{v}), \\ \frac{\partial (v_i \rho)}{\partial t} &= -\nabla \cdot (v_i \rho \vec{v}), \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= -\nabla \cdot (E \vec{v}).\end{aligned}\tag{3.58}$$

Una vez actualizadas las variables se resuelven los términos de las fuentes,

$$\begin{aligned}\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= p \nabla \cdot \vec{v}.\end{aligned}\tag{3.59}$$

El paso del transporte tiene en general la forma de la ec. (3.53) la cual podemos reescribir como

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{F}\tag{3.60}$$

donde q representa cualquiera de las cantidades conservadas ρ , ρv_i ó E , y $\vec{F} = q \vec{v}$ es el flujo de esa cantidad, definido en las caras de las celdas al igual que la velocidad, por lo que una discretización simple de esta ecuación sugiere interpolar el valor de la densidad en las caras para poder tomar este flujo correctamente, sin embargo esto resulta en un método inestable ya que no permite la evolución por un tiempo lo suficientemente largo debido a que no puede manejar en los límites estrella-atmósfera, por lo que se utiliza el método de la celda donante el cual consiste en que cada celda $V_{i,j,k}$ no solo la cantidad $q_{i,j,k}$ este definida en el centro de esta, en lugar de esto se toma a la cantidad constante en toda la celda, por lo que claramente en las interfaces de las celdas contiguas tenemos la elección de tomar uno u otro valor de la cantidad q . Para lograr la conservación, supóngase en la dirección x , la cantidad de materia que sale (entra) de la celda $V_{i-1,j,k}$ tiene que ser exactamente igual a la que entra (sale) a $V_{i,j,k}$ por lo que claramente si $v^x > 0$ la variable q tendría que ir de $V_{i-1,j,k}$ hacia $V_{i,j,k}$ en

caso contrario si $v_x < 0$ se tiene que va de $V_{i,j,k}$ hacia $V_{i-1,j,k}$ por lo que es necesario conocer en cada celda esta condición así se puede definir la cantidad q^* de la siguiente forma

$$q_{i,j,k}^* = \begin{cases} \text{si } v_{i,j,k}^x > 0, & q_{i-1,j,k}, \\ \text{si } v_{i,j,k}^x < 0, & q_{i,j,k}. \end{cases} \quad (3.61)$$

de igual manera en cada una de las otras dos direcciones, con esto el flujo queda como

$$\vec{F}_{i,j,k} = q_{i,j,k}^* \vec{u}_{i,j,k}, \quad (3.62)$$

donde la notación para los vectores es $\vec{A}_{i,j,k} = (A1_{i,j,k}, A2_{i,j,k}, A3_{i,j,k})$. Entonces la discretización de la ec. (3.60) queda en la siguiente forma

$$-\left(\frac{F1_{i+1,j,k}^n - F1_{i,j,k}^n}{\Delta x} + \frac{F2_{i,j+1,k}^n - F2_{i,j,k}^n}{\Delta y} + \frac{F3_{i,j,k+1}^n - F3_{i,j,k}^n}{\Delta z} \right) \frac{q_{i,j,k}^{n+1} - q_{i,j,k}^n}{\Delta t} = \quad (3.63)$$

Una vez actualizadas las variables ρ , $S_i = \rho v_i$ y E se actualizan las variables p y phi esta última resolviendo la ecuación de Poisson, y por último se obtiene la velocidad $v_i = S_i/\rho$ al tiempo n y se procede a actualizar las fuentes, las ecuaciones ya discretizadas a segundo orden son

$$\frac{v1_{i,j,k}^{n+1} - v1_{i,j,k}^n}{\Delta t} = - \left(2 \frac{p_{i,j,k} - p_{i-1,j,k}}{\Delta x (\rho_{i,j,k} + \rho_{i-1,j,k})} + \frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i-1,j,k}}{\Delta x} \right), \quad (3.64)$$

$$\frac{v2_{i,j,k}^{n+1} - v2_{i,j,k}^n}{\Delta t} = - \left(2 \frac{p_{i,j,k} - p_{i,j-1,k}}{\Delta y (\rho_{i,j,k} + \rho_{i,j-1,k})} + \frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i,j-1,k}}{\Delta y} \right), \quad (3.65)$$

$$\frac{v3_{i,j,k}^{n+1} - v3_{i,j,k}^n}{\Delta t} = - \left(2 \frac{p_{i,j,k} - p_{i,j,k-1}}{\Delta z (\rho_{i,j,k} + \rho_{i,j,k-1})} + \frac{\phi_{i,j,k} - \phi_{i,j,k-1}}{\Delta z} \right), \quad (3.66)$$

$$\frac{E_{i,j,k}^{n+1} - E_{i,j,k}^n}{\Delta t} = \left(\frac{v_{i+1,j,k}^n - v_{i,j,k}^n}{\Delta x} + \frac{-p_{i,j,k} - v_{i,j+1,k}^n - v_{i,j,k}^n}{\Delta y} + \frac{v_{i,j,k+1}^n - v_{i,j,k}^n}{\Delta z} \right). \quad (3.67)$$

La descomposición de estas ecuaciones es posible de acuerdo a James [16] una ecuación diferencial de la forma (3.53) el operador \mathcal{L} puede descomponerse en la forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \dots$ entonces el procedimiento del operador dividido es

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^0) / \Delta t &= \mathbf{L}_1(\mathbf{u}^0), \\ (\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1) / \Delta t &= \mathbf{L}_2(\mathbf{u}^1), \\ (\mathbf{u}^3 - \mathbf{u}^2) / \Delta t &= \dots, \end{aligned} \quad (3.68)$$

donde \mathbf{L}_i es la versión discreta del operador \mathcal{L}_i ($i = 1, 2, \dots$), por esta razón es que es posible descomponer en general cualquier EDP.

3.5. Convergencia, consistencia y estabilidad

El error local se definió en general como la diferencia entre la solución exacta y la solución aproximada, entonces ya se mencionó anteriormente que una solución numérica converge a una solución analítica si el error local $\mathbf{e} \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.

Un criterio que nos diga si la aproximación calculada es una solución de nuestra ecuación en el límite de resolución infinita (es decir en el límite cuando el tamaño del paso h tienda a cero) es el siguiente.

Sean f_1 y f_2 aproximaciones con orden de h^n y $(h/k_1)^n$ respectivamente de la solución analítica f_0 , por lo tanto f_0 puede escribirse de la siguiente manera

$$f_0 = f_1 + \epsilon h^n \quad (3.69)$$

y

$$f_0 = f_2 + \epsilon(h/k_1)^n \quad (3.70)$$

de las cuales puede obtenerse lo siguiente

$$f_1 - f_0 = -\epsilon h^n$$

$$f_2 - f_0 = -\epsilon(h/k_1)^n$$

dividiendo estas dos últimas expresiones se tiene que

$$\frac{f_1 - f_0}{f_2 - f_0} \sim k_1^n. \quad (3.71)$$

Si un método numérico y su implementación en una solución numérica satisface la ecuación anterior se dice que dicha solución converge con orden n y a k_1^n se conoce como factor de convergencia. El orden de convergencia está dado por el método numérico por ejemplo para un problema de evolución, si se utiliza el método de Euler $n = 1$ y si se utiliza el método RK4 $n = 4$, y para problemas de EDP elípticas como es el caso de la ecuación de Poisson simplemente depende del orden de la discretización de la misma ecuación. Esto es de cierta utilidad porque damos un primer criterio para soluciones numéricas sin embargo, este factor que acabamos de definir necesita la solución analítica con la cual en la mayoría de los casos no se cuenta, así que una manera de ampliar este resultado es utilizar una aproximación más, es decir, definiendo a f_3 con orden $(h/k_2)^n$ entonces

$$f_0 = f_3 + \epsilon(h/k_2)^n \quad (3.72)$$

puede probarse fácilmente que

$$\frac{f_2 - f_1}{f_3 - f_2} \sim r^n \frac{k_1^n - 1}{k_2^n - k_1^n} \quad (3.73)$$

en particular si $k_2 = k_1^2$ se tiene que

$$\frac{f_2 - f_1}{f_3 - f_2} \sim k_1^n. \quad (3.74)$$

Aquí se tiene de nuevo el factor de convergencia, pero sin la necesidad de conocer la solución analítica, así que si se cumple esta condición diremos

que la solución autoconverge, y autoconverge al sistema del cual es solución.

Una vez que se sepa que la solución converge (o bien autoconverge) podemos escribir a f_0 a partir de las ecs.(3.69) y (3.70) como

$$f_0 = \frac{k^n f_2 - f_1}{k^n - 1} + O(h^{n+1}) \quad (3.75)$$

esta última expresión permite conocer (con una mejor aproximación) la solución analítica con soluciones numéricas, y se le conoce como la *extrapolación de Richardson*. Cabe mencionar que la definición de convergencia esta definida punto a punto sobre el dominio discreto, así que si se quiere ver una convergencia solamente en el tiempo para esto se puede ver que la norma del error entre las soluciones converja.

Además un concepto importante es el de *estabilidad*, diremos que un método numérico es estable si una pequeña perturbación en los datos iniciales solo implica una pequeña perturbación en la solución.

Un método numéricos se dice que es *consistente* si al refinar la malla los operadores discretos son equivalentes a los operadores de la ecuación original.

Con esto se tiene todo lo necesario para poder solucionar el problema planteado, y asegurar que las soluciones obtenidas estén aproximando a la solución en el continuo.

Capítulo 4

Resultados

4.1. Datos Iniciales

Para la construcción de los datos iniciales y lo que sigue se tomará el valor de $G = 1$ además se presentan dos escenarios, el primero corresponde a una estrella de índice $n = 1.5$ y el último veremos el comportamiento de una estrella de índice $n = 3$. En ambos casos se encontró la solución en el intervalo $r \in [0, 100]$ con tres resoluciones distintas para pruebas de convergencia $\Delta r = 5 \times 10^{-3}$, 2.5×10^{-3} y 1.25×10^{-3} pero para una mejor visualización la soluciones solo se muestran en el intervalo $r \in [0, 20]$. Para calcular la solución se utilizó el método RK4 por lo que el factor de autoconvergencia debería ser aproximadamente 16 pero debido a la regularización de las ecuaciones tiene que ser 4.

En el primer caso, es decir, para $n = 1.5$ o equivalentemente $\gamma = 5/3$ se tomo una constante politrópica $K = 4.242$ y una densidad central $\rho_c = 1.43 \times 10^{-3}$. Los resultados obtenidos para la masa, presión, potencial gravitacional y densidad como función del radio se muestran la Fig. (4.1) para cada una de las soluciones mostradas se verifico la autoconvergencia la cual puede verse en la Fig. (4.2) donde f_k denota a la solución numérica calculada con la resolución $\Delta r = 5 \times 10^{-3}/k$ ($k = 1, 2, 3$).

En el caso de $n = 3$ ($\gamma = 4/3$) se tomo una constante poltrópica $K = 0.3639$ y una densidad central $\rho_c = 1.29 \times 10^{-2}$ y los demás parámetros de

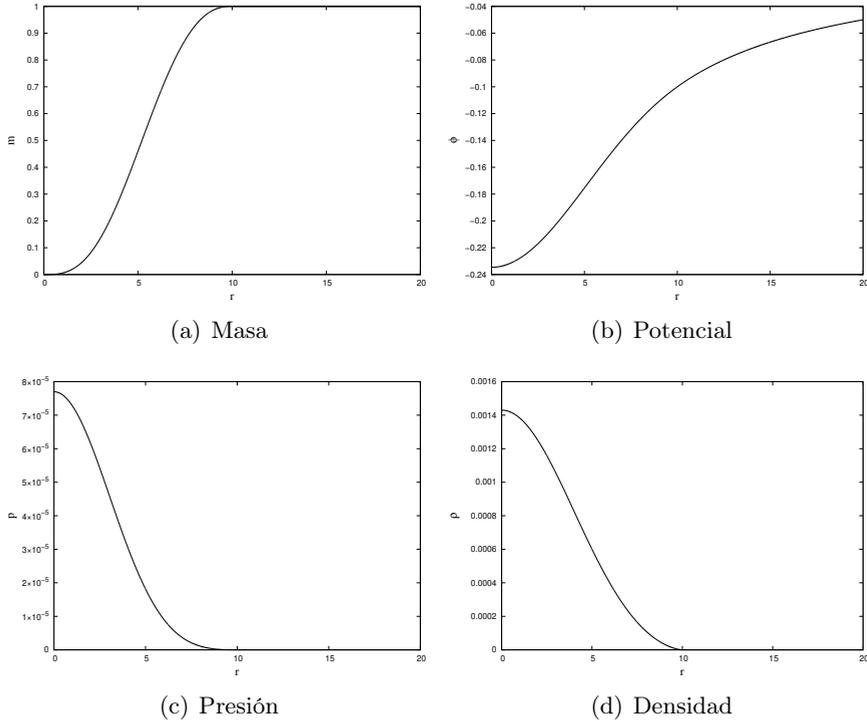


Figura 4.1: Solución numérica de las ecuaciones de la hidrostática para un índice poltropico $n = 1.5$. Podemos ver que la masa se aproxima al valor de 1 en el radio $r \approx 10$ mientras que tanto la presión como la densidad se anulan en estos puntos y el potencial gravitacional central, es decir en $r = 0$ se ajusta a un valor de aproximadamente -0.24 y alcanza un valor en $r = 20$ de $-1/20 = -0.05$ impuesto como condición de frontera.

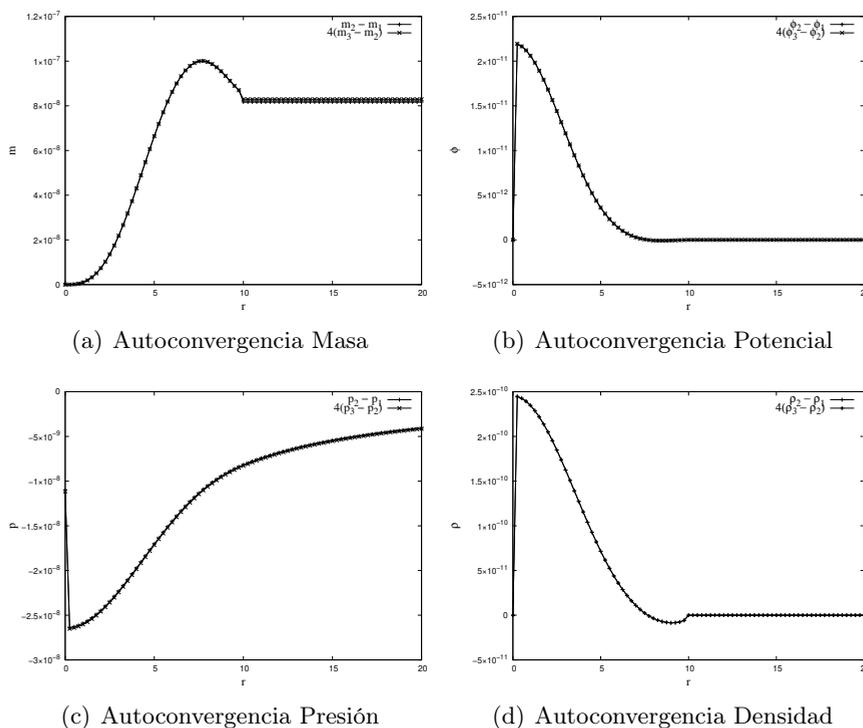


Figura 4.2: En las gráficas a), b), c) y d) se muestra que la solución autoconverge para un índice $n = 1.5$ y la superposición de ambas curvas indica en que regiones la solución autoconverge. Puede verse que el error crece en $r = 10$ ya que después de este punto no es solución de las ecuaciones TOV, si no que se impone que la densidad se anule después de este valor.

igual manera que para $n = 1.5$. Se tiene por soluciones las gráficas de la Fig. (4.3) y su autoconvergencia en la Fig. (4.4).

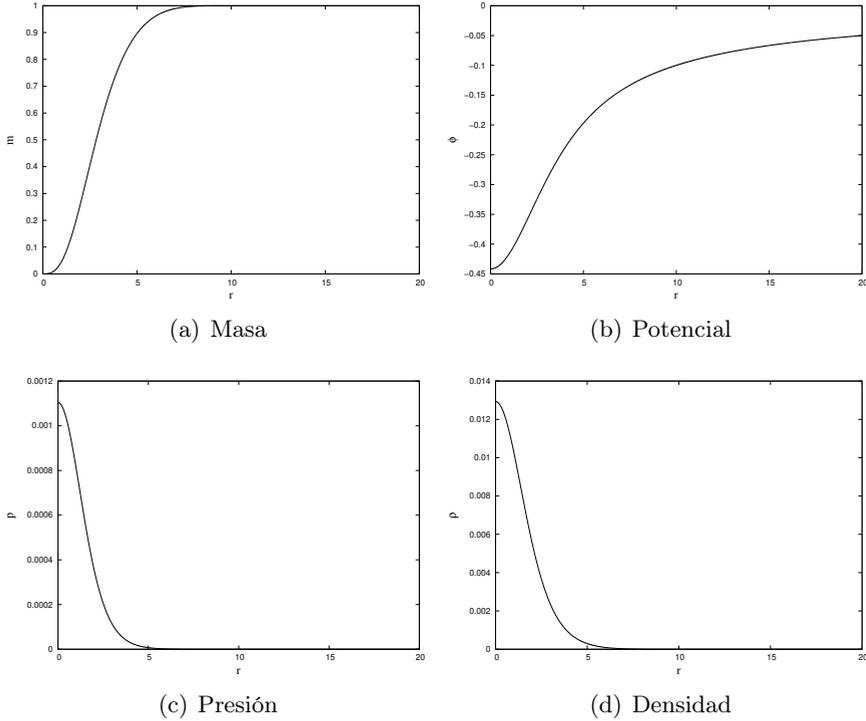


Figura 4.3: Solución numérica de las ecuaciones de la hidrostática para un índice poltropico $n = 3$. Podemos ver que la masa se aproxima al valor de 1 en el radio $r \approx 10$ mientras que tanto la presión como la densidad se anulan en estos puntos y el potencial gravitacional central, es decir en $r = 0$ se ajusta a un valor de aproximadamente -0.45 y alcanza un valor en $r = 20$ de $-1/20 = -0.05$ impuesto como condición de frontera.

En ambos casos se tienen estrellas de masa $M \approx 1$ con un radio $R \approx 10$ el cual se determinó cuando $\rho \approx 0$, el perfil de la densidad en el segundo caso tiene mayor soporte que en el primero por lo que se estimó en que radio de la estrella se encuentra concentrada cerca del 99 por ciento de la masa, para $\gamma = 5/3$ resultó en un radio $r \approx 9.12$ mientras que para $\gamma = 4/3$

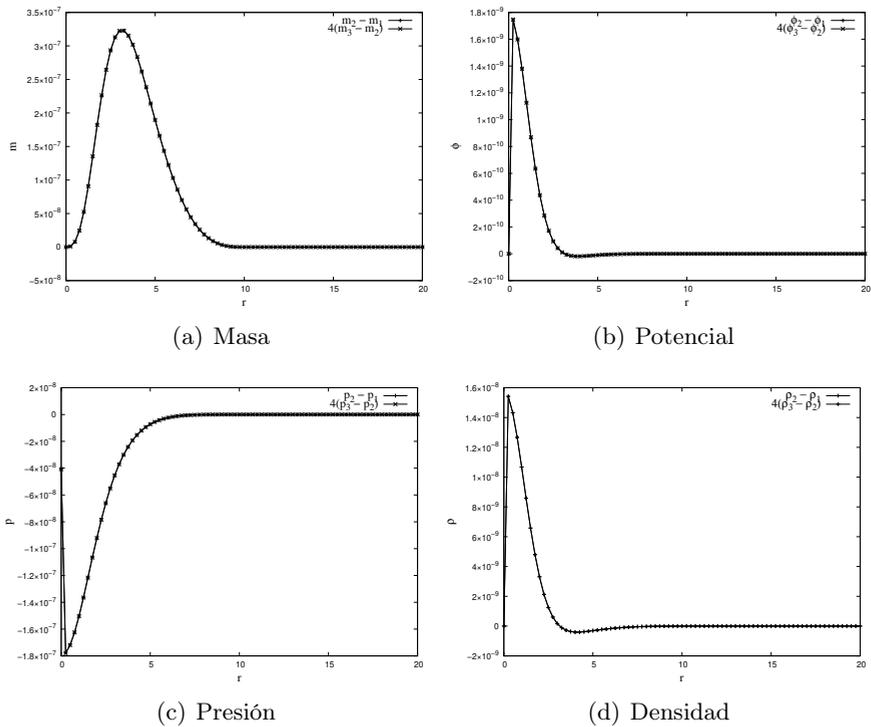


Figura 4.4: En las gráficas a), b), c) y d) se muestra que la solución autoconverge para un índice $n = 3$ y la superposición de ambas curvas indica en que regiones la solución autoconverge. Puede verse que el error crece en $r = 10$ ya que después de este punto no es solución de las ecuaciones TOV, si no que se impone que la densidad se anule después de este valor.

el radio es $r \approx 7.05$.

Dado a que las ecuaciones solo son válidas para la estructura interna de la estrella, después del radio de la estrella se utiliza un artificio numérico el cual consiste en elegir una atmósfera del orden de 10^{-20} con la finalidad de poder evolucionar un sistema con estos datos y evitar densidades iguales a cero ya que en las ecuaciones de Euler aparecen términos que van como $1/\rho$ y es por esta misma razón en las gráficas en las que se muestra a autoconvergencia algunas soluciones no convergen después de este valor.

4.2. Solución Hidrostática

La primera prueba en las soluciones que se presentarán consiste en evolucionar la solución obtenida del sistema hidrostático, y lo que se espera es que el integrador numérico mantenga esta solución en equilibrio, salvo pequeñas oscilaciones debido al error numérico.

El código se implemento con incrementos de igual tamaño en cada una de las direcciones, es decir, $h = \Delta x = \Delta y = \Delta z$.

4.2.1. $n=1.5$

Primeramente se toma la solución generada a partir de resolver las ecuaciones TOV con el parámetro $n = 1.5$ ($\gamma = 5/3$), esta solución de interpola en el dominio $\Omega = [-10, 10]^3$ con tres resoluciones distintas para las pruebas de autoconvergencia los cuales son $h = 1.0, 0.5, \text{ y } 0.25$. La parte temporal se resolvió en el dominio $t \in [0, 1000]$ con resoluciones de $\Delta t = 0.1, 0.05$ y 0.025 así que según lo discutido el error que predominará sera el de la parte espacial y se espera de acuerdo a la discretización utilizada, discutida en el capítulo anterior, que el factor de autoconvergencia sea del orden de $1.5^2 = 2.25$.

Las condiciones iniciales en la malla en 3D para la densidad en el plano $z = 0$ se muestra en la Fig. (4.5 a) mientras que en el tiempo $t = 1000$

puede verse el mismo perfil en la Fig. (4.5 b), a simple vista las soluciones son iguales pero podemos ver como la densidad central de la estrella cambia en el tiempo en la Fig. (4.6) para las tres resoluciones utilizadas, y puede verse que entre más fina es la malla la densidad central crece más lento, vemos que las densidades centrales difieren un poco y esto es debido a que las condiciones iniciales contienen errores debido a la interpolación por lo que es indispensable que el método sea estable.

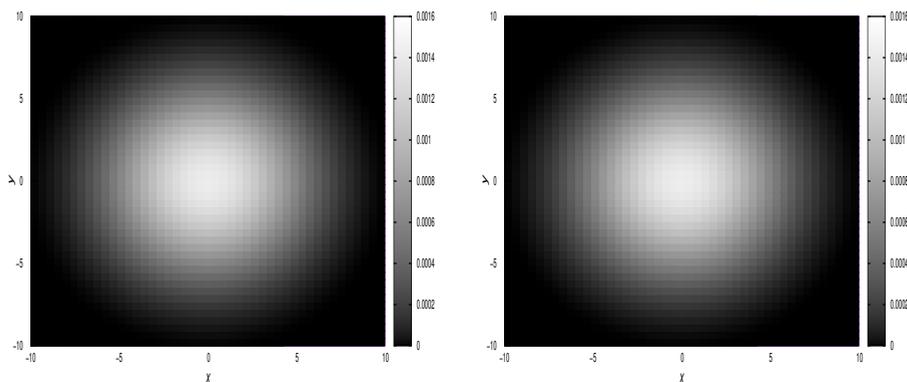
(a) Densidad en $t=0$ (b) Densidad en $t=1000$

Figura 4.5: En la gráfica a) se encuentra el perfil de la densidad inicial al tiempo $t = 0$ y en b) en el tiempo $t = 1000$ en el plano $z = 0$.

Esto es hasta ahora sobre la densidad pero se debe verificar que las cantidades extensivas las cuales son la masa, momento, y energía se conserven, para verificar que estas permanecen constante en el tiempo se integra sobre todo el dominio Ω a la densidad, momento y energía específicos respectivamente. Los resultados obtenidos pueden verse en la Fig. (4.7) donde en a) se muestra a la masa, en b) la energía, en c) el momento en la dirección x y en d) el momento total. Puede verse nuevamente que entre más fina sea la malla las propiedades del fluido se conservan mejor y además puede verse que entre más fina es la malla la masa crece más, esto es debido a que hay

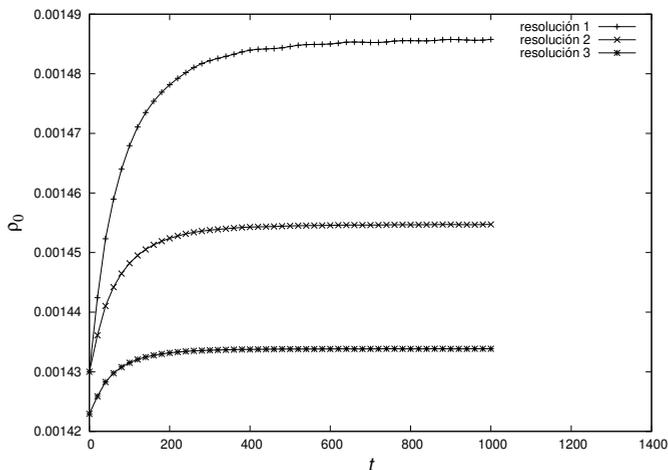


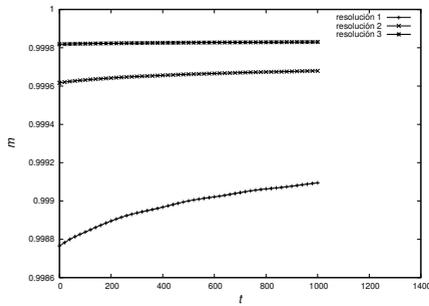
Figura 4.6: Densidad central de la estrella utilizando las tres resoluciones distintas. La resolución 1 se refiere al valor de $h = 1$, la 2 al valor $h = 0.5$ y la 3 a $h = 0.25$.

más puntos del dominio donde es necesario poner la atmósfera discutida anteriormente.

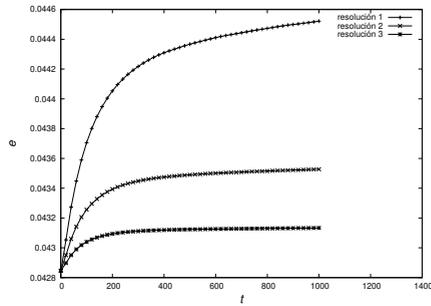
Por último se verificó la autoconvergencia de las soluciones obtenidas, en la Fig. (4.8 a) se puede ver la norma del error uno como función del tiempo y en la Fig. (4.8 b) la norma del error dos.

4.2.2. $n=3$

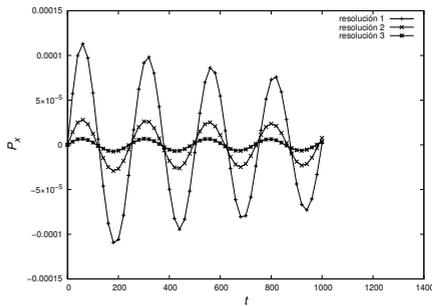
Ahora se toma el parámetro $n = 1.5$ ($\gamma = 5/3$), esta solución de interpola en el dominio $\Omega = [-10, 10]^3$ con tres resoluciones distintas para las pruebas de autoconvergencia los cuales son $h = 0.5, 0.25$, y 0.125 . La parte temporal se resolvió en el dominio $t \in [0, 500]$ con resoluciones de $\Delta t = 0.05, 0.025$ y 0.0125 así que según lo discutido el error que predominará será el de la parte espacial y se espera de acuerdo a la discretización utilizada, discutida en el capítulo anterior, que el factor de autoconvergencia sea del orden de $1.5^2 = 2.25$.



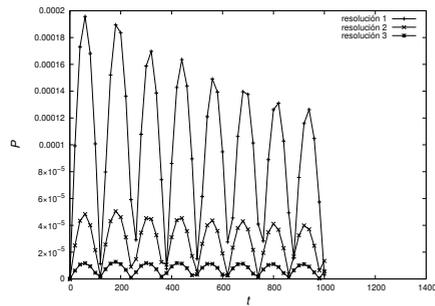
(a) Masa



(b) Energía



(c) Momento en x



(d) Momento total

Figura 4.7: Cantidades conservadas en función del tiempo utilizando las tres resoluciones distintas. Puede verse que entre mayor sea la resolución mejor se conservan las variables las cuales son la masa, energía, momento en la dirección x y el momento total.

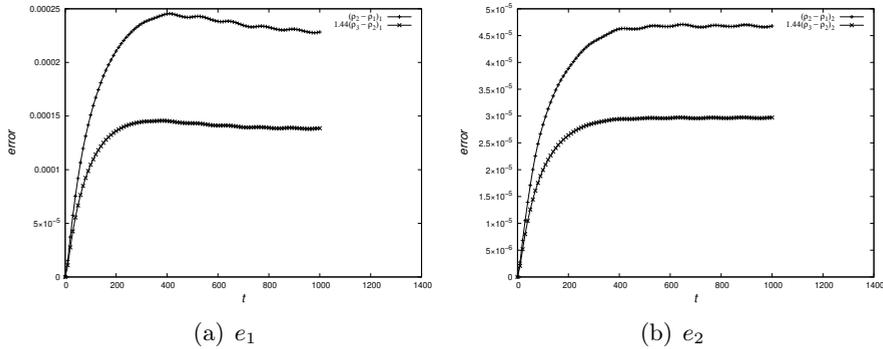


Figura 4.8: Autoconvergencia de norma del error 1 en a) y 2 en b) como función del tiempo para las tres soluciones obtenidas de la densidad. La superposición de las dos curvas indica que la solución autoconverge, es decir, que las soluciones obtenidas aproximan mejor a la solución en el continuo entre más pequeño se hace el valor del paso h .

Las condiciones iniciales en la malla en 3D para la densidad en el plano $z = 0$ se mostrará en la Fig. (4.9 a) mientras que en el tiempo $t = 500$ puede verse el mismo perfil en la Fig. (4.9 b), a simple vista las soluciones son iguales pero podemos ver como la densidad central de la estrella cambia en el tiempo en la Fig. (4.10) para las tres resoluciones utilizadas, y puede verse que entre más fina es la malla la densidad central crece más lento, vemos que las densidades centrales difieren un poco y esto es debido a que las condiciones iniciales contienen errores debido a la interpolación por lo que es indispensable que el método sea estable.

De igual manera que se hizo para $n = 1.5$ se tienen los resultados obtenidos para la masa, momento y energía los cuales pueden verse en la Fig. (4.11) donde en a) se muestra a la masa, en b) la energía, en c) el momento en la dirección x y en d) el momento total. Podemos observar algo que no pasaba en el caso anterior, esto es que el momento no se conserva mejor conforme aumentamos la resolución, esto podría deberse a que nos encontramos fuera del régimen de convergencia y podría solucionarse si se calculan más soluciones con mayor y menos resolución.

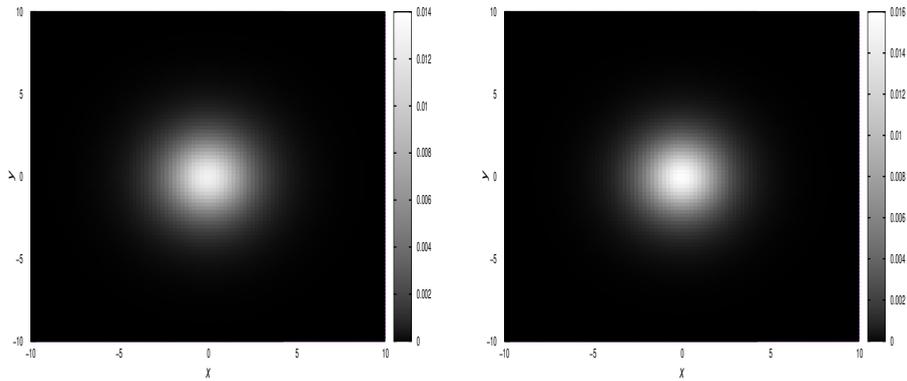
(a) Densidad en $t=0$ (b) Densidad en $t=1000$

Figura 4.9: En las gráficas a) se encuentra el perfil de la densidad inicial al tiempo $t = 0$ y en b) en el tiempo $t = 1000$ en el plano $z = 0$.

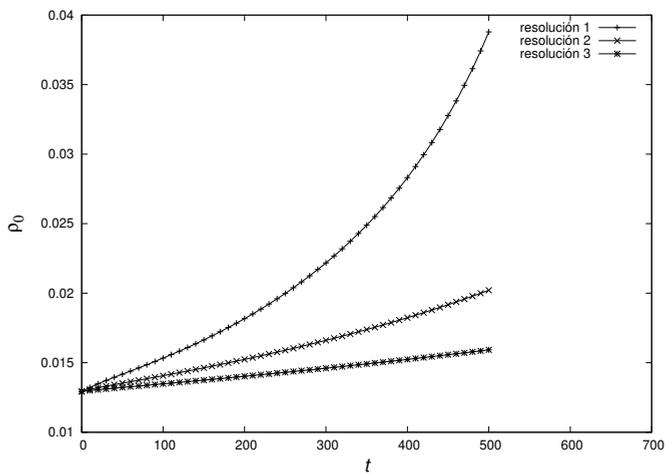


Figura 4.10: Densidad central de la estrella utilizando las tres resoluciones distintas. La resolución 1 se refiere al valor de $h = 1$, la 2 al valor $h = 0.5$ y la 3 a $h = 0.25$.

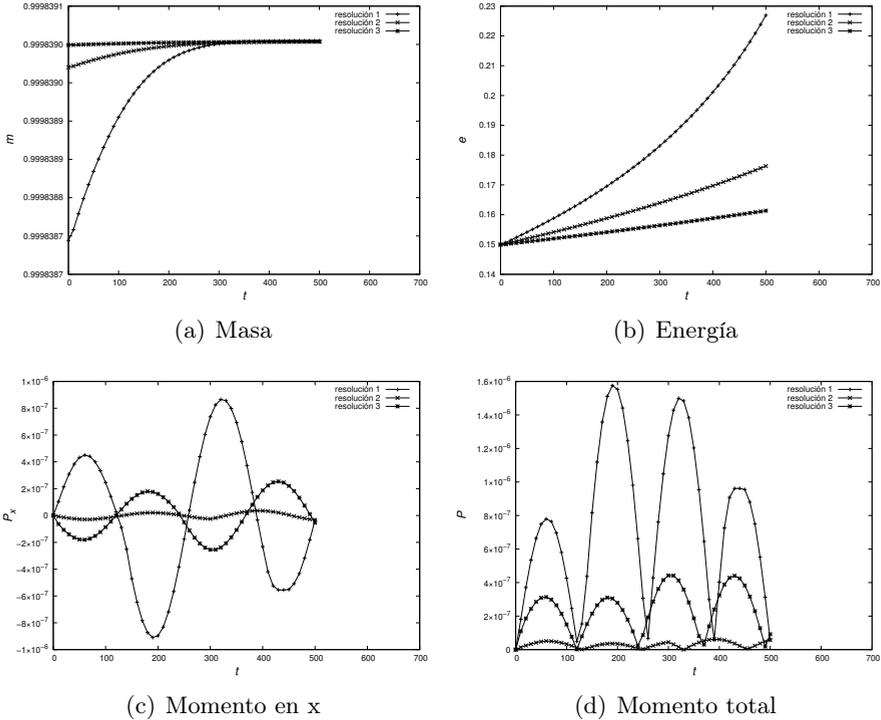


Figura 4.11: Cantidades conservadas en función del tiempo utilizando las tres resoluciones distintas. Puede verse que entre mayor sea la resolución mejor se conservan las variables las cuales son la masa y energía pero para el momento puede verse que la resolución 3 se encuentra entre la 1 y la 2, esto podría deberse a que alguna de las soluciones se encuentra fuera del régimen de convergencia.

Por último se verificó la autoconvergencia de las soluciones obtenidas, en la Fig. (4.12 a) se puede ver la norma del error uno como función del tiempo y en la Fig. (4.8 b) la norma del error dos, para lo cual se puede ver que la solución autoconverge solo para tiempo menores a 250.

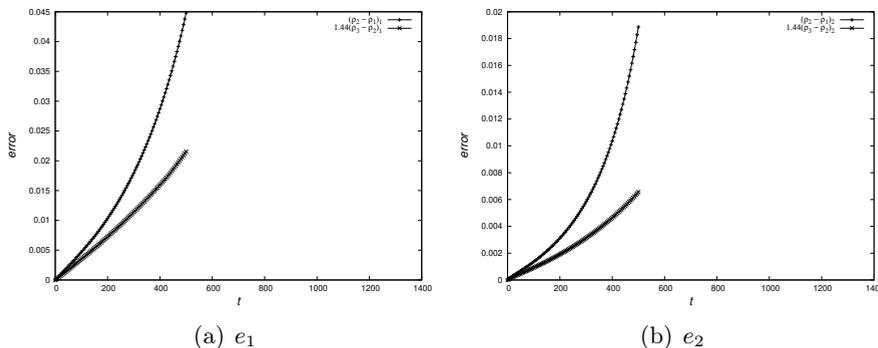


Figura 4.12: Autoconvergencia de norma del error 1 en a) y 2 en b) como función del tiempo para las tres soluciones obtenidas de la densidad. La superposición de las dos curvas indica que la solución autoconverge, es decir, que las soluciones obtenidas aproximan mejor a la solución en el continuo entre más pequeño se hace el valor del paso h .

4.3. Caída libre de Fluidos Autogravitantes

Los datos iniciales utilizados para la construcción de la solución de dos fluidos en caída libre uno respecto del otro se obtuvo utilizando dos estrellas de igual masa colocados a una distancia de ± 20 unidades numéricas respecto al origen de coordenadas en el dominio $\vec{x} \in [-50, 50] \times [-50, 50] \times [-25, 25]$ se solucionó el sistema con las resoluciones $h = 1, 5/6$ y $25/36$ en la parte espacial mientras que la parte temporal se resolvió en el dominio $t \in [0, 1000]$ con resoluciones de $\Delta t = 0.05, 0.025$ y 0.0125 . Ambas estrellas corresponden a las soluciones en equilibrio hidrostático para los índices politrópicos antes mencionados y se colocaron inicialmente en reposo, por lo que se tienen las siguientes soluciones.

4.3.1. $n=1.5$

Los resultados obtenidos para el caso de un politrópico de índice adiabático $\gamma = 5/3$ puede verse en la Fig. (4.8) en el cual conforme las estrellas se acercan al origen su aceleración incrementa y el resultado del choque resulta en una nueva estrella que tiende a un equilibrio, como la masa y el

radio de las estrellas se relacionan mediante la expresión

$$RM^{1/3} \approx \frac{K}{0.4242G}. \quad (4.1)$$

Como la nueva estrella tiene una masa final de $M \approx 2$ se debería de esperar que al llegar al equilibrio este tenga un radio de $R \approx 8$, en los datos mostrados puede verse que al tiempo $t = 1000$ la estrella a alcanzado un radio $r \approx 10$ el cual podemos comparar con una solución del sistema TOV mostrada en la Fig. (4.14) la cual se construyó con una densidad central de $\rho_c = 5.8 \times 10^{-3}$ esta densidad la cual podemos comparar con el máximo de la densidad del sistema mostrado en la Fig. (4.15) además se observa que entre mejor sea el refinamiento se aproxima con mejor precisión al valor de la densidad central de este polítopo.

4.3.2. $n=3$

A diferencia que la solución obtenida para el sistema de índice $n = 1.5$ para el índice $n = 3$ la solución mostrada en la Fig. (4.16) la colisión de estas dos estrellas resulta en una estrella que no es capas de formarse, ya que a diferencia del caso anterior la masa no se relaciona con el radio de la estrella, es decir esta determinada por la expresión

$$M = \left(\frac{K}{0.3639G} \right)^{1.5} \quad (4.2)$$

así que el máximo de masa del sistema no puede exceder la unidad y es por esto que no es posible que se forme una nueva estrella ya que de formarse debería de tender al equilibrio.

4.4. Sistema Binario en Órbita Circular

Para generar el sistema binario se utilizaron los mismos parámetros que en la caída libre, pero para evitar que estos en una trayectoria rectilínea se le inyecta una velocidad inicial al sistema de la forma

$$v_x = -\Omega y, \quad v_y = \Omega, \quad v_z = 0 \quad (4.3)$$

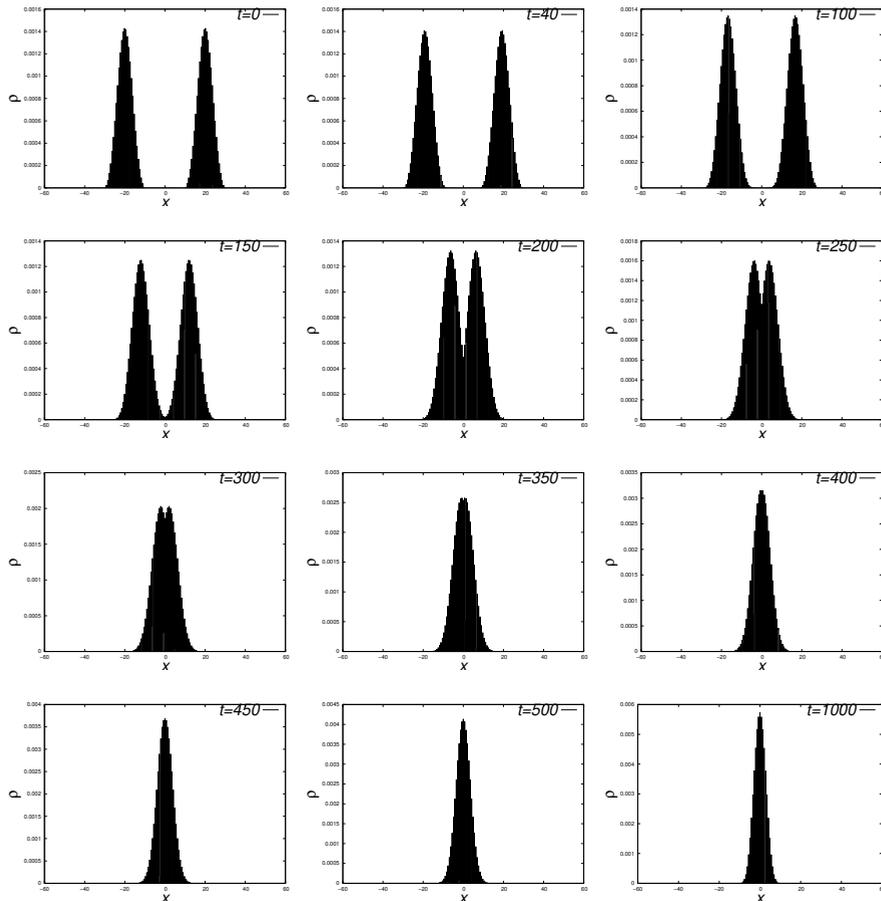


Figura 4.13: Perfil de la densidad en distintos tiempos en el eje x para dos estrellas de índice politrópico $n = 1.5$. En el tiempo $t = 0$ corresponde al perfil de los datos iniciales los cuales caen libremente al colisionar la densidad comienza a aumentar y al tiempo $t = 1000$ se tiene el perfil de la estrella resultante de este choque.

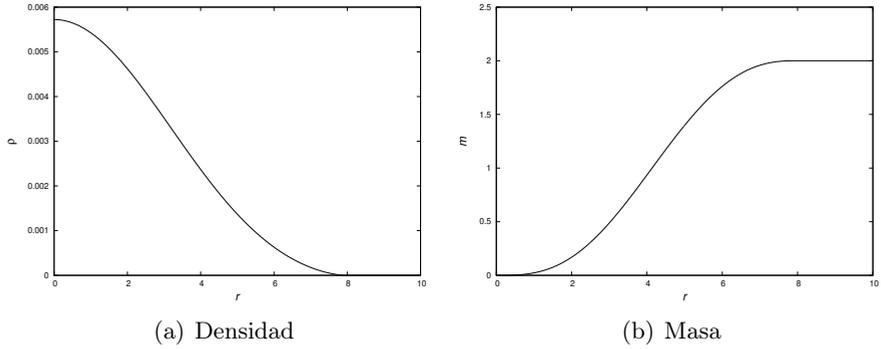


Figura 4.14: Solución del sistema TOV para un polítopo de masa $M = 2$ y radio $R \approx 8$ con una densidad central de $\rho_c = 5.8 \times 10^{-3}$

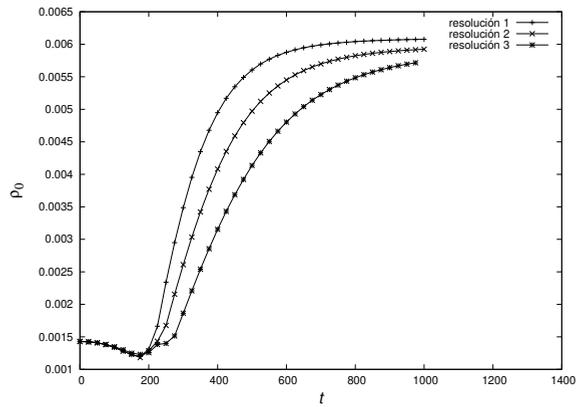


Figura 4.15: Máximo de densidad del sistema en función del tiempo, puede observarse que la densidad de la estrella resultante tiende a la densidad central de una estrella en equilibrio hidrostático con mayor precisión entre mejor es la resolución de la solución.

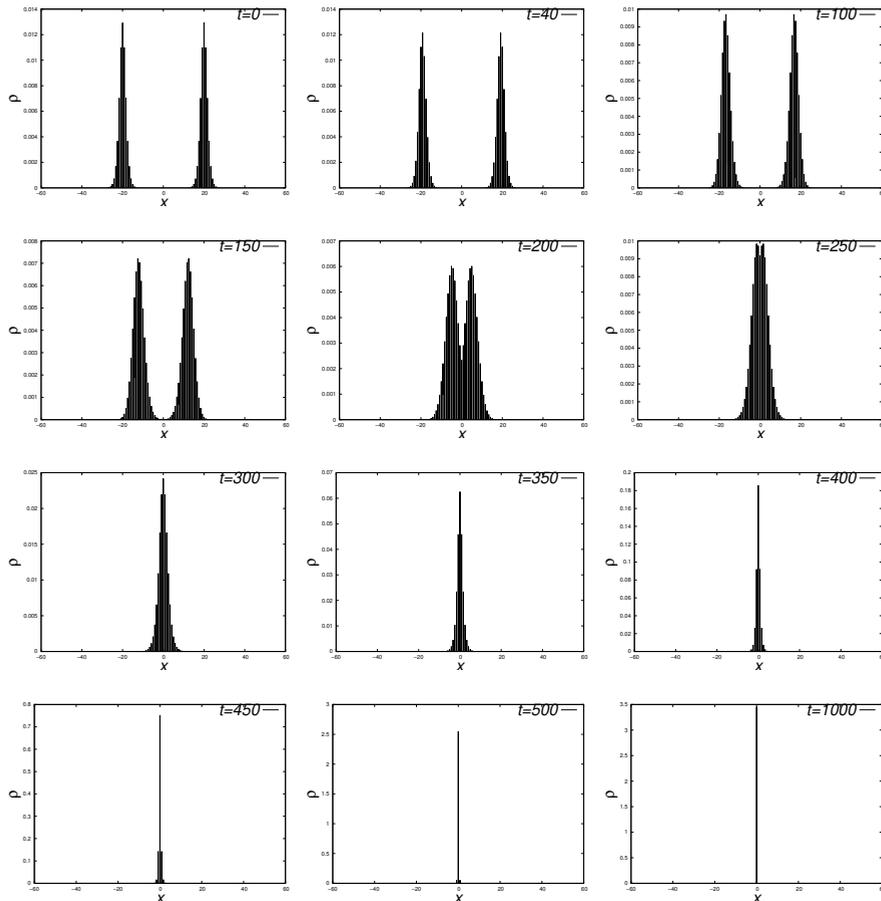


Figura 4.16: Perfil de la densidad en distintos tiempo en el eje x para dos estrellas de índice politrópico $n = 3$. En el tiempo $t = 0$ corresponde al perfil de los datos iniciales los cuales caen libremente, al colisionar la densidad comienza a aumentar y al tiempo $t = 1000$ puede observarse que con este índice no es posible formar una nueva estrella.

para poder tener órbitas circulares cerradas en un sistema de partículas puntuales basta con elegir a Ω como

$$\Omega = \sqrt{G \frac{m_1 + m_2}{r_o^3}} \quad (4.4)$$

en donde m_1 , m_2 son las masas de las partículas y r_o es la separación entre ellas, así que utilizando este mismo valor y tomando a r_o como la distancia entre los centros de masa de cada estrella, en nuestras unidades $\Omega \approx 5.6 \times 10^{-3}$. Los dos escenarios estudiados se presentan a continuación.

4.4.1. $n=1.5$

La condición inicial para el sistema de Euler utilizada para la densidad en el plano $z = 0$ puede verse en la Fig. (4.17), la velocidad inicial aplicada al sistema corresponde a la velocidad de un sistema binario en órbita circular en el plano xy y la energía inicial corresponde a la suma de la energía interna de un gas ideal más la energía cinética del sistema.

Los datos iniciales utilizados permiten evolucionar el sistema y así obtener los perfiles de la densidad mostrados en la Fig. (4.18) en los tiempos $t = 250, 500, 750$ y 1000 y así observar como el choque de dos estrellas puede generar una nueva estrella fuera de equilibrio. Si bien la velocidad angular elegida era la necesaria para mantener el sistema en una órbita circular el error numérico que proviene de la discretización de las ecuaciones causa pérdidas de energía resultando en una órbita tipo espiral como puede verse en la Fig. (4.19).

Por último las cantidades conservadas pueden verse en la Fig. (4.20) y la autoconvergencia de la solución en la Fig. (4.21). Se puede observar que entre mejor es el refinamiento mejor se conservan las propiedades del fluido y que la solución autoconverge con una mayor exactitud en el intervalo de tiempo $t \in [0, 600]$.

4.4.2. $n=3$

La condición inicial para el sistema de Euler utilizada para la densidad puede verse en la Fig. (4.22), la velocidad inicial aplicada al sistema corresponde a la velocidad de un sistema binario en órbita circular en el plano xy

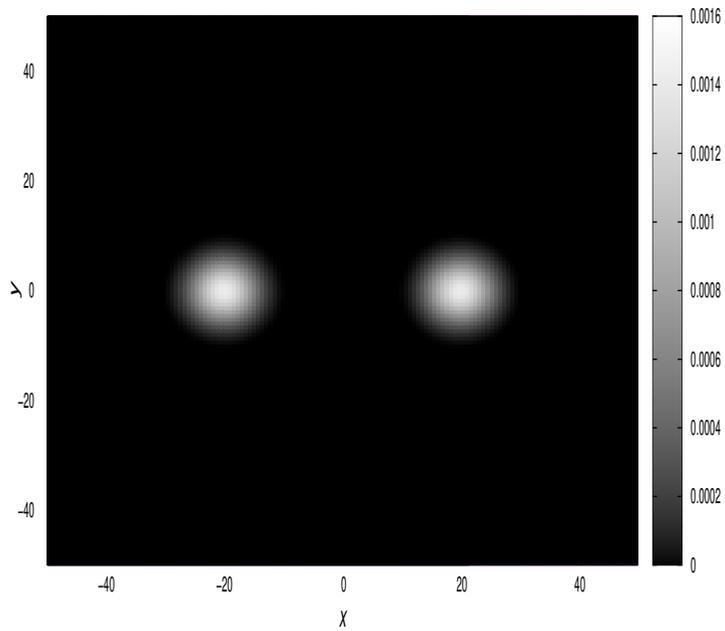


Figura 4.17: Densidad inicial para la simulación de un sistema binario en órbita circular en el plano $z = 0$.

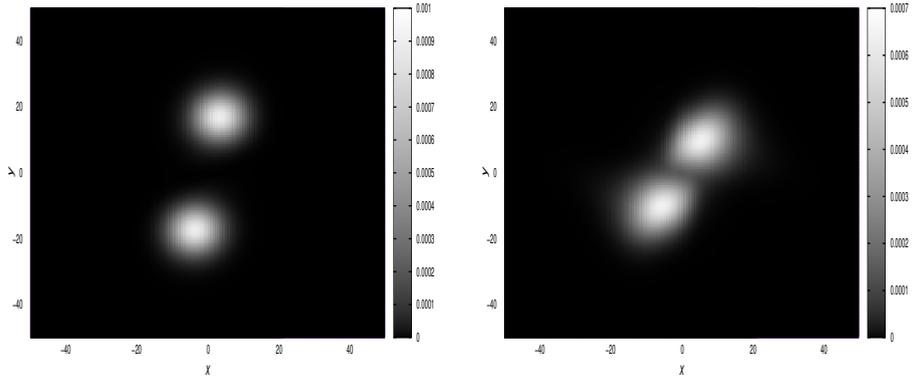
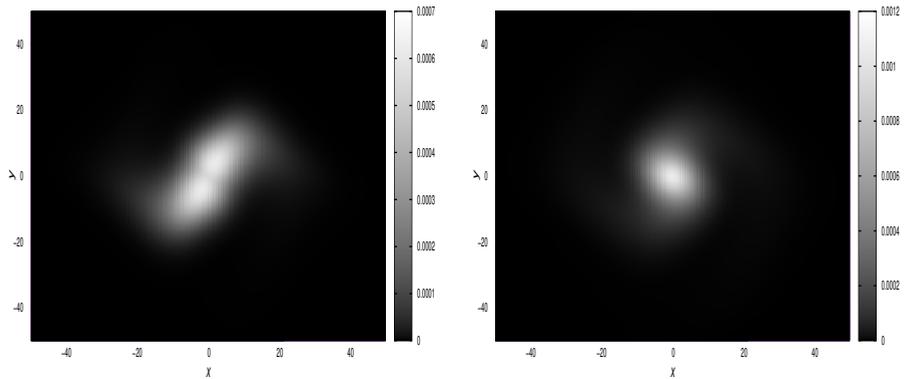
(a) $t=250$ (b) $t=500$ (c) $t=750$ (d) $t=1000$

Figura 4.18: Perfil de la densidad en los tiempos a) 250 b) 500 c)750 y d) 1000 en el plano $z = 0$. Se observa que al tiempo $t = 500$ las dos estrellas se encuentran en órbita y ambas perdieron la simetría inicial para terminar colisionando al tiempo $t=750$ y formar una nueva estrella al tiempo $t = 1000$.

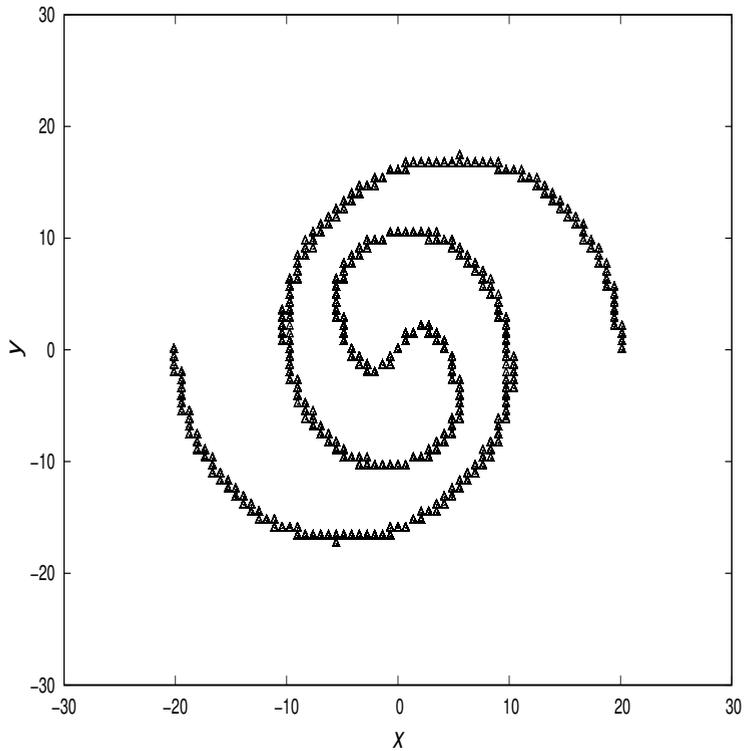


Figura 4.19: Órbita del centro de masa de cada estrella seguida en el plano orbital $z = 0$. Cada triángulo indica la posición del centro de masa en un determinado tiempo.

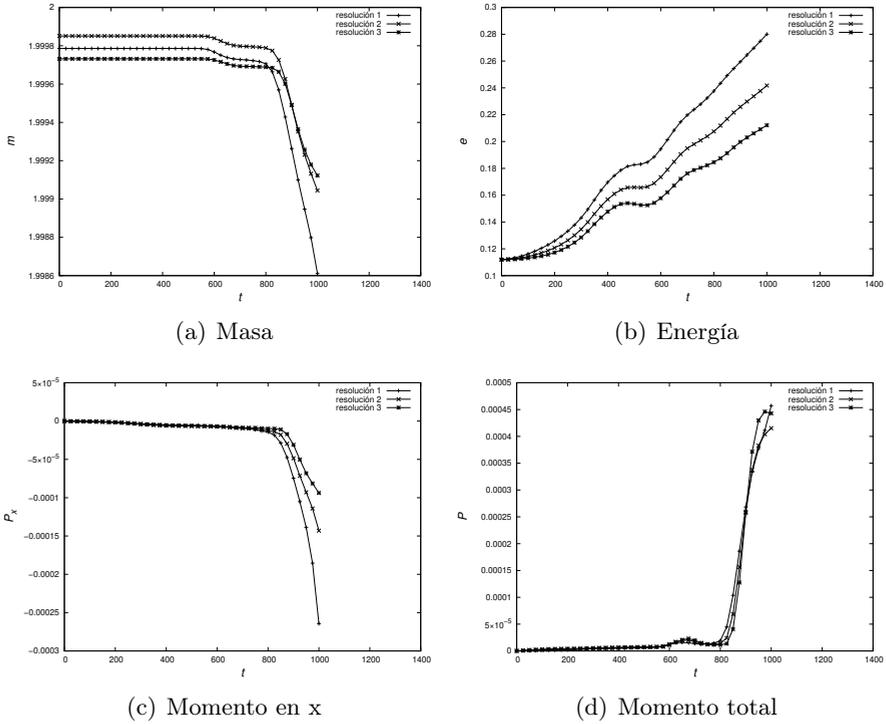


Figura 4.20: Cantidades conservadas en función del tiempo utilizando las tres resoluciones distintas. Puede verse que entre mayor sea la resolución mejor se conservan las variables las cuales son la masa, energía, momento en la dirección x y el momento total.

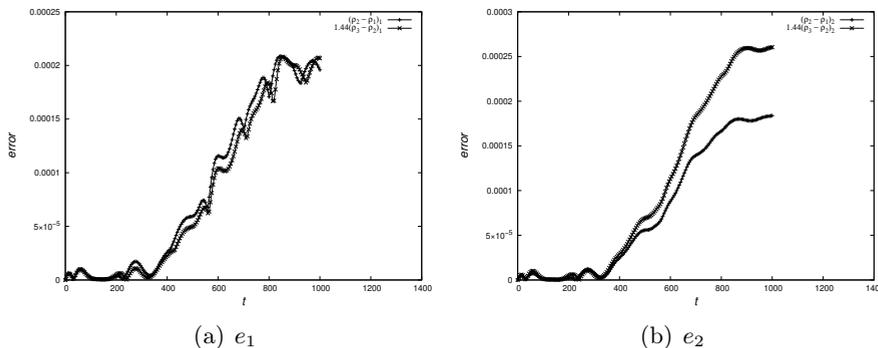


Figura 4.21: Autoconvergencia de norma del error 1 en a) y 2 en b) como función del tiempo para las tres soluciones obtenidas de la densidad. La superposición de las dos curvas indica que la solución autoconverge, es decir, que las soluciones obtenidas aproximan mejor a la solución en el continuo entre más pequeño se hace el valor del paso h .

y la energía inicial corresponde a la suma de la energía interna de un gas ideal más la energía cinética del sistema.

Los datos iniciales utilizados permiten evolucionar el sistema y así obtener los perfiles de la densidad mostrados en la Fig. (4.23) en los tiempos $t = 250, 500, 750$ y 1000 y así poder observar como el choque de dos estrellas genera una nueva estrella fuera de equilibrio. Si bien la velocidad angular elegida era la necesaria para mantener el sistema en una órbita circular el error numérico que proviene de la discretización de las ecuaciones causa perdidas de energía resultando en una órbita tipo espiral como puede verse en la Fig. (4.24).

Por último las cantidades conservadas se muestran en la Fig. (4.25) y la autoconvergencia de la solución en la Fig. (4.26). Se observa que entre mejor es el refinamiento mejor se conservan las propiedades del fluido y que la solución autoconverge con una mayor exactitud en el intervalo de tiempo $t \in [0, 600]$.

Se observa que a diferencia de un choque horizontal no es capaz de formar una nueva estrella, un choque en órbita al menos en el tiempo donde se resolvió pareciera no tener problemas por la formación sin embargo no

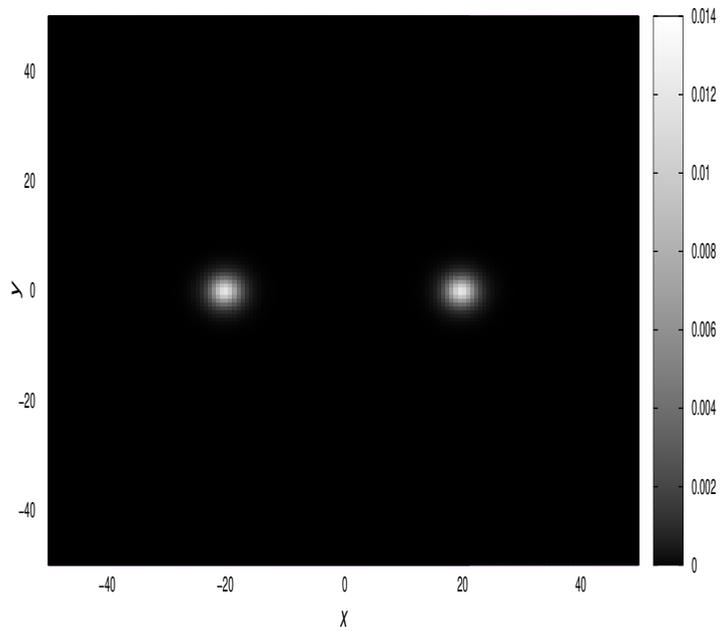


Figura 4.22: Densidad inicial para la simulación de un sistema binario en órbita circular en el plano $z = 0$.

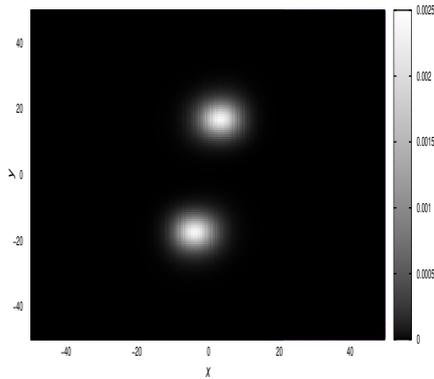
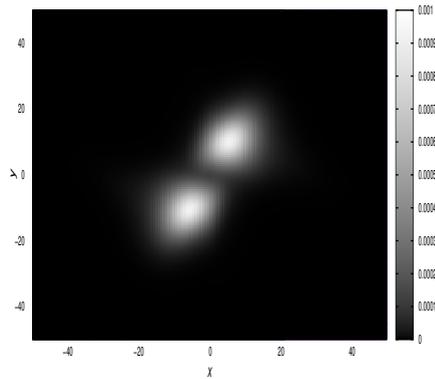
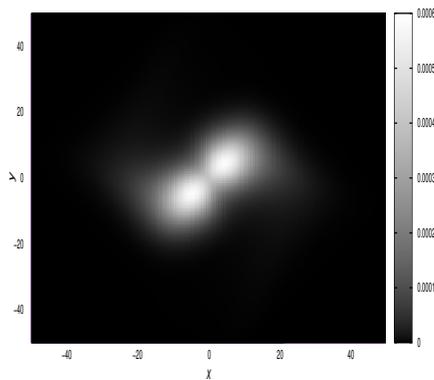
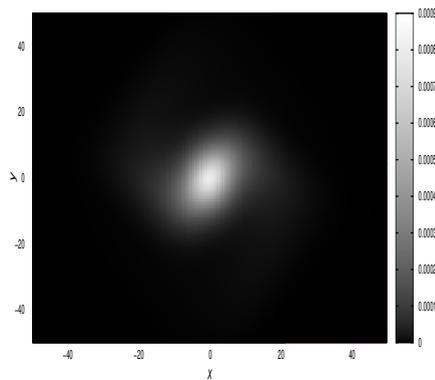
(a) $t=250$ (b) $t=500$ (c) $t=750$ (d) $t=1000$

Figura 4.23: Perfil de la densidad en los tiempos a) 250 b) 500 c) 750 y d) 1000 en el plano $z = 0$. Se observa que al tiempo $t = 500$ las dos estrellas se encuentran en órbita y ambas perdieron la simetría inicial para terminar colisionando al tiempo $t=750$ y formar una nueva estrella al tiempo $t = 1000$.

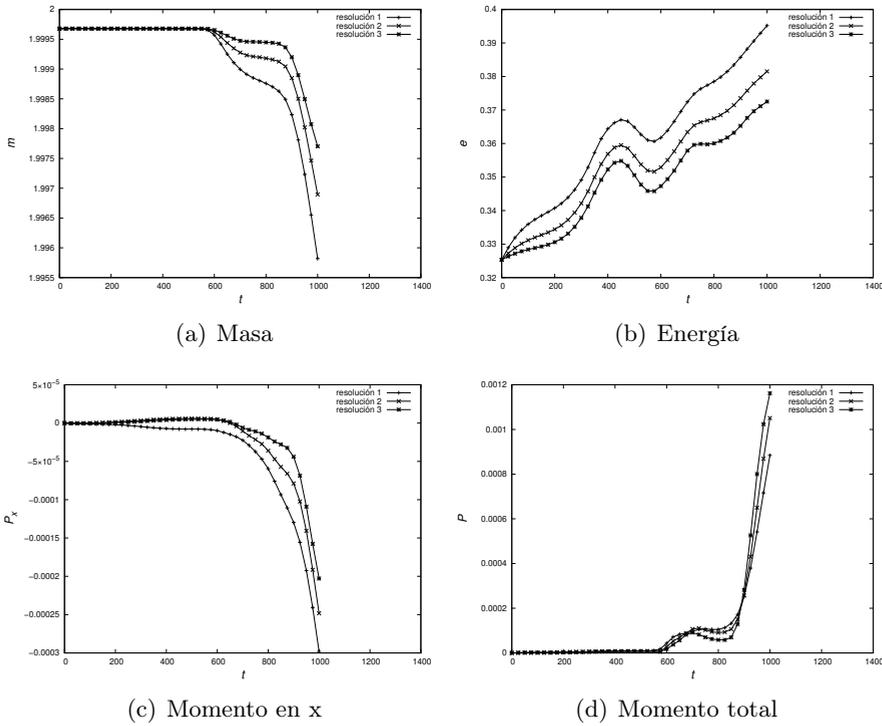


Figura 4.25: Cantidades conservadas en función del tiempo utilizando las tres resoluciones distintas. Puede verse que entre mayor sea la resolución mejor se conservan las variables las cuales son la masa, energía, momento en la dirección x y el momento total.

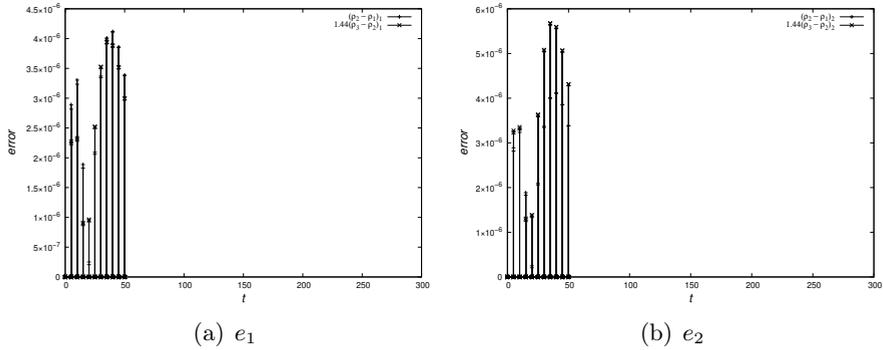


Figura 4.26: Autoconvergencia de norma del error 1 en a) y 2 en b) como función del tiempo para las tres soluciones obtenidas de la densidad. La superposición de las dos curvas indica que la solución autoconverge, es decir, que las soluciones obtenidas aproximan mejor a la solución en el continuo entre más pequeño se hace el valor del paso h .

hubo tiempo suficiente para ver si la estrella resultante sería estable.

Capítulo 5

Conclusiones

Primeramente la construcción de los datos iniciales se obtuvo resolviendo las ecuaciones de TOV por lo que fue necesario una regularización en el origen, las soluciones obtenidas para este sistema solo autoconvergió en el interior de las estrellas, después de el radio de la estrella la solución no autoconverge ya que las ecuaciones solo son validas en el interior, después de este valor se utiliza un artificio numérico el cual consiste en poner una atmósfera con la finalidad de que al ser interpolada la densidad a una malla en 3D, esta pueda utilizarse para la solución de las ecuaciones de Euler y no presente términos que van como el inverso de la densidad y garantizar que en todo el dominio pueda calcularse de manera numérica la solución.

Una vez construidos los datos iniciales se pudieron utilizar para la parte de la hidrodinámica de Euler, resultó que una discretización simple de las ecuaciones en forma conservativa o no-conservativa, es decir, una discretización en que se definen a las variables en los vértices de cada celda que conforman la malla provoca un método inestable, por lo que se procedió a seguir el método implementado por Douglas Swesty [15] y con esto se pudo resolver el problema, el algoritmo consistió en actualizar inicialmente los terminos del transporte, seguido por la actualización del potencial y por último la actualización de las fuentes, para la parte del potencial la cual se verifico que es una EDP elíptica se soluciono mediante el método de multigrad, el cual consistía en pasar a un dominio de menor resolución con la finalidad de remover errores que es muy tardado en un dominio de

alta resolución y se resolvió en cada dominio con el método de Gauss-Seidel el cual en trabajos futuros puede ser remplazado por métodos más rápidos como el método del gradiente.

Con esto fue posible simular inicialmente las soluciones en equilibrio hidrostático interpoladas en 3D y verificar que el método es capaz de mantener a la configuración inicial en equilibrio para los dos escenarios planteados. Seguido de esto se obtuvo una solución para un sistema binario que se encontraba en caída libre una estrella respecto de la otra, se encontró que para un índice adiabático $\gamma = 5/3$ la colisión de las dos estrellas iniciales genera una nueva estrella que tiende al equilibrio hidrostático, a diferencia del sistema binario de índice $\gamma = 4/3$ que no es capaz de manejar una colisión frontal. Por último obtuvo la simulación de un sistema en órbita y ambos escenarios resultaron ser muy parecidos por lo que no hay distinción significativa.

Las modificaciones futuras para mejorar este trabajo pueden ser el uso del método de volúmenes finitos ya que todas las ecuaciones provienen de principios conservativos, y estos métodos son ideales para estos sistemas ya que las diferencias finitas presentan grandes desventajas una de ellas es que solo se puede utilizar en problemas muy simétricos y el último es que no pueden manejar discontinuidades y en las soluciones pueden generarse. Para la parte física puede ser mejorada si se trabaja con la teoría post-Newtoniana la cual incluye radiación gravitacional, en tanto a la parte de la ecuación de estado no hay modelos muy precisos para el interior de las estrellas pero con la detección de las ondas gravitacionales se espera poder entender mejor el interior de dichos cuerpos y así tener modelos que se ajusten mejor a la realidad. Por último tanto la parte física como la solución numérica pueden ser mejorados con la simple elección de condiciones de frontera aceptables.

Otras aplicaciones que pueden realizarse con el presente trabajo es cambiar las ecuaciones de la hidrodinámica por la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo y junto a la ecuación de Poisson pueden utilizarse como modelo para describir la materia oscura. La misma técnica puede ser utilizada para resolver la ecuación de Poisson-Boltzmann la cual es im-

portante en los campos de la dinámica molecular y la biofísica . Problemas de electrostática sin simetrías y con las mismas ecuaciones de la hidrodinámica puede estudiarse el problema de convección de Rayleigh-Benart el cual describe la dinámica de un fluido al aplicar un gradiente de temperatura a un fluido, las partes más calientes pueden desplazarse, produciéndose una transferencia de calor por el propio transporte de la materia.

Apéndice A

Código de Full-Multigrid

Código escrito en fortran 90 para la solución de la ecuación de Poisson empleando el método de diferencias finitas a segundo orden. El modulo “variables” contiene las variables globales $xmin$, $xmax$, $ymin$, $ymax$, $zmin$, $zmax$, $Tolerancia$ y N_levels que se utilizan en varias subrutinas.

A.1. Full Multigrid

```
recursive subroutine FMG(ul, fl, Nxl, Nyl, Nzl, l)
  use variables ! N_levels
  implicit none

  integer :: l, Nxl, Nyl, Nzl
  real(kind=8), dimension(0:Nxl,0:Nyl,0:Nzl) :: ul, fl
  real(kind=8), dimension(0:Nxl/2,0:Nyl/2,0:Nzl/2) :: u2l, f2l

  if(l<N_levels) then
    call operador_restriccion(u2l, ul, Nxl, Nyl, Nzl)
    call operador_restriccion(f2l, fl, Nxl, Nyl, Nzl)
    call FMG(u2l, f2l, Nxl/2, Nyl/2, Nzl/2, l)
    call operador_prolongacion(ul, u2l, Nxl, Nyl, Nzl)
  end if

  call MG(ul, fl, Nxl, Nyl, Nzl, l)
end subroutine FMG
```

A.2. Multigrid

```

recursive subroutine MG(ul, fl, Nxl, Nyl, Nzl, l)
  use variables ! N_levels
  implicit none

  integer :: l, Nxl, Nyl, Nzl
  real(kind=8), dimension(0:Nxl,0:Nyl,0:Nzl) :: ul, fl, el
  real(kind=8), dimension(0:Nxl/2,0:Nyl/2,0:Nzl/2) :: r2l, e2l

  r2l = 0.0d0
  e2l = 0.0d0
  el = 0.0d0

  call Gauss_Seidel(ul, fl, Nxl, Nyl, Nzl)

  if(l < N_levels) then
    call residuo(r2l, ul, fl, Nxl, Nyl, Nzl)
    call MG(e2l, r2l, Nxl/2, Nyl/2, Nzl/2, l)
    call operador_prolongacion(el, e2l, Nxl, Nyl, Nzl)
    ul = ul + el
  end if

  call Gauss_Seidel(ul, fl, Nxl, Nyl, Nzl)
end subroutine MG

```

A.3. Residuo

```

subroutine residuo(r2l, ul, fl, Nxl, Nyl, Nzl)
  use variables
  ! xmin, xmax
  ! ymin, ymax
  ! zmin, zmax
  implicit none

  integer :: Nxl, Nyl, Nzl
  integer :: N2xl, N2yl, N2zl
  integer :: i, j, k
  real(kind=8) :: dxl, dyl, dzl
  real(kind=8), dimension(0:Nxl,0:Nyl,0:Nzl) :: ul, fl
  real(kind=8), dimension(0:Nxl/2,0:Nyl/2,0:Nzl/2) :: r2l

  dxl = (xmax - xmin)/dble(Nxl)
  dyl = (ymax - ymin)/dble(Nyl)
  dzl = (zmax - zmin)/dble(Nzl)

```

```

N2xl = Nx1/2
N2yl = Ny1/2
N2zl = Nz1/2

do i=1,N2xl-1
  do j=1,N2yl-1
    do k=1,N2zl-1

      r2l(i,j,k) = fl(2*i,2*j,2*k) - (&
        (ul(2*i+1,2*j,2*k) - 2.0d0*ul(2*i,2*j,2*k) + &
        ul(2*i-1,2*j,2*k))/dx1**2 + &
        (ul(2*i,2*j+1,2*k) - 2.0d0*ul(2*i,2*j,2*k) + &
        ul(2*i,2*j-1,2*k))/dyl**2 + &
        (ul(2*i,2*j,2*k+1) - 2.0d0*ul(2*i,2*j,2*k) + &
        ul(2*i,2*j,2*k-1))/dz1**2)

    end do
  end do
end do

end subroutine residuo

```

A.4. Operador de prolongación

```

subroutine operador_prolongacion(ul, u2l, Nx1, Ny1, Nz1)
  implicit none

  integer :: Nx1, Ny1, Nz1
  integer :: N11, N12, N13
  integer :: i, j, k
  real(kind=8), dimension(0:Nx1,0:Ny1,0:Nz1) :: ul
  real(kind=8), dimension(0:Nx1/2,0:Ny1/2,0:Nz1/2) :: u2l

  N11 = Nx1/2
  N12 = Ny1/2
  N13 = Nz1/2

  do i=0,N11-1
    do j=0,N12-1
      do k=0,N13-1

        if(i*j*k>0) then
          ul(2*i,2*j,2*k) = u2l(i,j,k)

          ul(2*i+1,2*j,2*k) = 0.50d0*(u2l(i,j,k) + u2l(i+1,j,k))
          ul(2*i,2*j+1,2*k) = 0.50d0*(u2l(i,j,k) + u2l(i,j+1,k))
          ul(2*i,2*j,2*k+1) = 0.50d0*(u2l(i,j,k) + u2l(i,j,k+1))
        end if
      end do
    end do
  end do
end subroutine

```

```

        ul(2*i+1,2*j+1,2*k) = 0.250d0*&
            (u2l(i,j,k) + u2l(i+1,j,k) + &
             u2l(i,j+1,k) + u2l(i+1,j+1,k))
        ul(2*i,2*j+1,2*k+1) = 0.250d0*&
            (u2l(i,j,k) + u2l(i,j+1,k) + &
             u2l(i,j,k+1) + u2l(i,j+1,k+1))
        ul(2*i+1,2*j,2*k+1) = 0.250d0*&
            (u2l(i,j,k) + u2l(i,j,k+1) + &
             u2l(i+1,j,k) + u2l(i+1,j,k+1))
    end if

    ul(2*i+1,2*j+1,2*k+1) = 0.1250d0*&
        (u2l(i,j,k) + u2l(i+1,j,k) + &
         u2l(i,j+1,k) + u2l(i,j,k+1) + &
         u2l(i+1,j+1,k) + u2l(i,j+1,k+1) + &
         u2l(i+1,j,k+1) + u2l(i+1,j+1,k+1))
    end do
end do
end do
end subroutine operador_prolongacion

```

A.5. Operador de restricción

```

subroutine operador_restriccion(u2l, ul, Nx1, Ny1, Nz1)
    implicit none

    integer :: i, j, k
    integer :: Nx1, Ny1, Nz1
    integer :: N11, N12, N13
    real(kind=8), dimension(0:Nx1,0:Ny1,0:Nz1) :: ul
    real(kind=8), dimension(0:Nx1/2,0:Ny1/2,0:Nz1/2) :: u2l

    N11 = Nx1/2
    N12 = Ny1/2
    N13 = Nz1/2

    do i=0,N11
        do j=0,N12
            do k=0,N13
                u2l(i,j,k) = ul(2*i,2*j,2*k)
            end do
        end do
    end do
end subroutine operador_restriccion

```

Bibliografía

- [1] Harwit, M.. (2000). Stars. En *Astrophysical Concepts*(pp. 287-346). New York: Springer.
- [2] Tassoul, J.. (2000). *Stellar Rotation*. New York: Cambridge University Press.
- [3] Jascheck, C., & Corvalan, M.. (1974). *Astrofísica*. Francia: Washington, DC..
- [4] Battaner, E.. (2007). Estrellas. En *Introducción a la Astrofísica*(pp. 33-71). Madrid: Alianza.
- [5] Collins, G.. (1989). *Fundamentals of stellar astrophysics*. W H Freeman & Co.
- [6] Bradt, H.. (2008). *Astrophysics Processes*. United States of America : Cambridge University Press, New York.
- [7] Batchelor, G.. (2000). *An Introduction ti Fluid Dynamics*. Street, Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.
- [8] James, W., & Donald, R.. (1975). Ecuación de Continuidad y Movimiento. En *Dinámica de Fluidos con aplicaciones en la ingeniería*(pp. 128-135). México: Trillas.
- [9] Landau, L., & Lifshitz, E.. (2001). Fluidos Ideales. En *Mecánica de Fluidos*(pp. 1-7). México: Reverté, S.A..
- [10] Anderson, J.. (1995). The governing equations of fluid dynamics: their derivation, a discussion of their physical meaning, and a presentation of

- forms particularly suitable to CFD. En *Computational Fluid Dynamics* . The basics with Applications(pp. 37-74). New York: McGraw-Hill.
- [11] Chung, T.. (2002). Solution Methods of Finite Difference Equations. En *Computational Fluid Dynamics*(pp. 63-91). Street, Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.
- [12] Mijáilov, V.. (1978). Introducción. Clasificación de las ecuaciones. Planteamiento de algunos problemas.. En *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*(pp. 11-38). Moscú: Mir.
- [13] Nakamura, T., & Oohara, K.. (1989). Gravitational Radiation from Coalescing Binary Neutron Stars. II. *Progress of Theoretical Physics*, 82, 1066-083.
- [14] Shibata, M., Nakamura, T., & Oohara K.. (1992). Coalescence of Spinning Binary Neutron Stars of Equal Mass. *Progress of Theoretical Physics*, 88, 1079-1095.
- [15] Swesty, F; Wang, Edward Y. M.; Calder, Alan C.. (2000). Numerical Models of Binary Neutron Star System Mergers. I. Numerical Methods and Equilibrium Data for Newtonian Models. *The Astrophysical Journal*, 541, 937-958.
- [16] James, M., & Michael, L.. (1991). ZEUS-2D: A RADIATION MAGNETO-HYDRODYNAMICS CODE FOR ASTROPHYSICAL FLOWS IN TWO SPACE DIMENSIONS. I. THE HYDRODYNAMIC ALGORITHMS AND TESTS. *The Astrophysical Journal*, 80,753-790.
- [17] Burden, R., (1985), *Análisis Numérico*, Boston, E.E.U.A., Grupo Editorial Iberoamericana.
- [18] Alcubierre M.. (2008). *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. New York: Oxford University.