Universidad Nacional Autónoma de México

y

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH

Momento angular en la mecánica hamiltoniana

T E S I S

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta:

José Antonio Villa Morales

Director: Dr. en Matemáticas Elmar Wagner

Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Codirector: Dr. en Matemáticas Andrés Pedroza

Facultad de Ciencias, Universidad de Colima

Morelia, Michoacán, Junio del 2015.

Índice general

Abstract

Resumen: Dada una variedad diferenciable M y un sistema mecánico en el espacio de configuración T^*M que tiene una estructura simpléctica podemos formular dicho sistema en base al formalismo lagrangiano y hamiltoniano y estudiar la equivalencia entre ambas. Considerando una acción izquierda de un grupo de Lie G en M podemos levantar dicha acción al espacio de configuración T^*M mediante la acción derecha de G y estudiar la simetrías y cantidades conservadas de dicho sistema mecánico mediante la defininción de un mapeo $J : T^*M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ llamado mapeo momento.

Abstract: Given a differentiable manifold M and a mechanical system in the configuration space T^*M is possible to formulate the given mechanical system based in the Lagrangian and Hamiltonian formalism and study the equivalence between both of them. Considering a left action of a Lie group G on M we can lift up the action to T^*M by the right action on G and study symmetries and first integrals of the mechanical system introducing the map $J : T^*M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ called the momentum map.

Palabras clave: Acción, cantidades conservadas, espacio de configuración, estructura simpléctica, mapeo momento, simetrías, variedad diferenciable.

Introducción

Los sistemas mecánicos formulados en términos matemáticos comienzan con el estudio de Newton sobre la velocidad, aceleración, masa y energía llegando de este modo a las ecuaciones que describen la mecánica de Newton. En 1788 el matemático y físico Joseph Luis Lagrange revolucionó la formulación de la mecánica usando los principios variacionales. Lagrange dedujo que en un sistema mecánico que consiste en una partícula que sigue una trayectoria en el espacio euclidiano n-dimensional con dominio $[0, T]$, dicha trayectoria es la que minimiza un funcional que tiene como dominio todas las curvas definidas en $[0, T]$, y que esta dada por $S(\alpha) := \int_0^T L(\alpha(t), \dot{\alpha}(t))dt$, donde L es una función diferenciable que depende de la posición y la velocidad. De este principio de la minimización del funcional S, se encontraron las ecuaciones del movimiento

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0.$$

Este descubrimiento permitió una generalización a la formulación de Newton asegurando que para describir un sistema mecánico es suficiente con tener el lagrangiano dado por la diferencia entre la energía cinética y potencial $L = T - U$ y las ecuaciones de Lagrange. En 1833, el matemático William Hamilton introdujo una nueva teoría para describir la mecánica de Lagrange. Hamilton descubrió mediante la transformada de Legendre que a partir del lagrangiano L se puede obtener una nueva función H, pero a diferencia de el lagrangiano que depende de la posición y la velocidad, esta depende de la posición y una nueva variable p llamada *momento*. Esta variable consistía en la variación del lagrangiano respecto a la velocidad, es decir estaba dada por $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ por lo que esta nueva función, llamada hamiltoniano, no es otra cosa mas que un cambio de variable del lagrangiano. Usando el hamiltoniano H y las ecuaciones de Lagrange, Hamilton obtuvo un nuevo sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} \end{aligned}$$

de primer orden llamadas ecuaciones de Hamilton. El hecho de que las ecuaciones de Hamilton resultaran en ecuaciones diferenciales de primer orden facilitaban más su estudio que las ecuaciones de Lagrange, que al contener el término $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ se convierte en un sistema de ecuaciones de segundo orden.

La formulación de la geometría simpléctica resultó de gran utilidad para el estudio de los sistemas hamiltonianos. Permite que los sistemas hamiltonianos puedan ser descritos en una variedad diferenciable abstracta y no solamente en una superficie del espacio euclidiano. El objetivo de este trabajo es utilizar y desarrollar herramientas para el estudio del mapeo momento en un sistema hamiltoniano y como puede ser relacionado con el momento angular clásico.

El capítulo 1 tiene dos objetivos importantes. El primero es estudiar la formulación de Lagrange y Hamilton de la mecánica en el espacio euclidiano y dar las condiciones en las cuales son equivalentes estas dos teorías, es decir, dado el Lagrangiano, que condiciones debe de cumplir para poder aplicar la transformada de Legendre y así obtener el Hamiltoniano. La importancia de este tratamiento sobre la transformada de Legendre es que se desarrollarán los detalles que generalmente en la literatura clásica no se presentan.

El segundo es el de la generalización de un sistema mecánico. En la mecánica clásica podemos tener un sistema mecánico definido sobre el espacio euclidiano donde la dimensión se interpreta como los grados de libertad del sistema. Entonces, el espacio de configuración deberá estar dado por el conjunto de puntos y velocidades, es decir, puntos y vectores tangentes al espacio euclidiano. Parte de lo que queremos estudiar en el capítulo 1 es generalizar las dos formulaciones de la mećanica cuando el sistema mecánico está en una variedad diferenciable M. Entonces la idea del espacio de configuración que consiste en puntos y velocidades está expresada en el haz tangente de M, es decir, en TM. Entonces, para poder desarrollar el formalismo lagrangiano y hamiltoniano debemos adaptar la teoría de la transformada de Legendre en el espacio euclidiano a una carta de M, obteniendo así las dos formulaciones de manera local. En la formulación lagrangiana en una variedad M, el lagrangiano debería estar definido en TM para ser consistente con las ideas clásicas, y entonces como resultado de aplicar la transformada de Legendre, podremos ver que el hamiltoniano esta definido sobre el haz cotangente T^*M.

En un sistema mecánico en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ con un hamiltoniano H tenemos las ecuaciones de Hamilton del movimiento y si equipamos a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ con una forma simpléctica en particular, formaremos el sistema $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \omega, H)$. El objetivo del capítulo 2 es estudiar la relación entre la forma simpléctica y las ecuaciones de Hamilton del movimiento, y como podemos generalizar esta relación en una variedad simpléctica.

En el capítulo 3 desarrollamos la teoría del mapeo momento de un sistema hamiltoniano en una variedad simpléctica con hamiltoniano H. Un mapeo momento sobre la acción de un grupo de Lie sobre la variedad simpléctica donde tenemos el sistema hamiltoniano H es un mapa que a cada punto de la variedad se le asocia un covector del álgebra de Lie del grupo de Lie. El caso que es de principal interés es cuando la variedad simpléctica es el espacio de configuración de una variedad M donde la acción del grupo de Lie en el espacio de configuración T^*M proviene de una acción de ese mismo grupo de Lie en M. Uno de los objetivos del análisis de un sistema mecánico es el de encontrar primeras integrales de movimiento de dicho sistema. En un sistema dado por la acción de un grupo de Lie en una variedad diferenciable y bajo ciertas condiciones, el mapeo momento resulta ser una primera integral de movimiento. Este hecho motiva a investigar cuales son esas condiciones en las cuales el mapeo momento es una primera integral y que relación tiene con la simetría del sistema.

En particular, nos interesan dos sistemas mecánicos los cuales tienen simetría respecto de la acción del grupo de Lie $SO(3)$: el primero es estudiar el mapeo momento del modelo de Newton de la mecánica libre de potencial cuando el grupo $SO(3)$ actúa sobre el espacio de tres dimensiones. El segundo consiste en un sistema mecánico que también es libre de potencial, pero que está restringido sobre la esfera. En ambos casos se busca cual es la relación entre el mapa momento y el vector del momento angular descrito en la mecánica de Newton. Se investiga además las primeras integrales de un sistema mecánico sobre la esfera pero que esta sujeto a un potencial gravitatorio teniendo así un análisis completo de las soluciones de las ecuaciones de Hamilton.

Capítulo 1

Formulaciones de la mecánica clásica en el espacio euclidiano

1. Mecánica de Newton

La mecánica de Newton es el primer modelo matemático formulado para describir la dinámica de los objetos de nuestro entorno. Esta formulación está basada en la observación de los fenómenos tales como la caída de objetos, las trayectorias de objetos balísticos, etc. La mecánica de Newton se formula sobre tres postulados:

1. La trayectoria de un cuerpo en movimiento en el vacío es recta siempre y cuando no actúe una fuerza en él.
2. La fuerza total que se ejerce en un objeto es $F = m\ddot{x}$ donde x es una trayectoria en $\mathbb{R}^n$ y $\ddot{x}$ es la aceleración de este objeto.
3. A toda acción corresponde una reacción tales que se anulan entre si.

Comenzamos con el concepto fundamental relacionado a la energía que es el de trabajo. Supongamos que una masa puntual m sigue una trayectoria diferenciable $\gamma : [T_0, T_1] \longrightarrow \Omega$ donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y conexo. Veamos ahora el desplazamiento de la partícula como el conjunto de desplazamientos en una partición de puntos que se va haciendo cada vez mas fina, es decir, consideremos una partición del intervalo $[T_1, T_2]$ dada por $\{t_1, \ldots, t_k\}$ que define una partición de la curva γ con puntos $\gamma_1 = \gamma(t_1), \ldots, \gamma_k = \gamma(t_k)$. El trabajo infinitesimal realizado en el sistema es la proyección ortogonal de la fuerza $F(\gamma_i)$ en dirección del vector $\dot{\gamma}(t_i)$, es decir $\langle F(\gamma_i), \dot{\gamma}(t_i)\rangle \Delta\gamma_i$. Dado el trabajo infinitesimal, definimos el trabajo sobre la trayectoria γ como la suma de trabajos infinitesimales cuando $\Delta\gamma_i \to 0$

$$W(\gamma) = \int_{T_0}^{T_1} \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle dt$$

Como el trabajo es la integral curvilínea de un campo vectorial F a lo largo de la trayectoria γ, entonces no depende de la parametrización orientada que elijamos para γ. Supongamos que la fuerza no depende del tiempo y que el sistema es cerrado, es decir, no hay interacción con el entorno del sistema. Definimos la energía como la capacidad para realizar trabajo. En un sistema cerrado la fuerza no depende del tiempo y no hay flujos de energía por las fronteras, por lo que la energía se conserva a la largo del tiempo, es decir, si llamamos E la energía, $E(t) = C$, donde C es una constante.

DEFINICIÓN 1.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $\gamma : [0,T] \longrightarrow \Omega$ una curva diferenciable. Dado $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función diferenciable, definimos la integral de línea de F en γ como

$$\int_\gamma F = \int_0^T \langle F(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\, dt$$

DEFINICIÓN 1.2. Decimos que en el sistema es conservativo si dada una curva cerrada $\gamma : [T_1, T_2] \longrightarrow \Omega$, el trabajo $W(\gamma) = \oint_\gamma F = 0$.

LEMA 1. Sean dos puntos x_0 y x_1 en Ω. Consideremos dos trayectorias $\gamma : [0,T] \longrightarrow \Omega$ y $\tilde\gamma : [0,T] \longrightarrow \Omega$ tales que $\gamma(0) = \tilde\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(T) = \tilde\gamma(T) = x_1$ que están es un sistema conservativo. Entonces el trabajo es independiente del la trayectoria, es decir, $W(\gamma) = W(\tilde\gamma)$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la curva $\alpha : [0,T] \longrightarrow \Omega$ definida como $\alpha(t) := \gamma(2t)$ $t \in [0, \frac{T}{2}]$ y $\alpha(t) = \tilde\gamma(2T - 2t)$ para $t \in [\frac{T}{2}, T]$. Vemos que α es una curva cerrada, por lo que $W(\alpha) = 0$. Ahora, como α el el producto de dos trayectorias, entonces

$$\int_\gamma F + \int_{\tilde\gamma} F = \oint_\alpha F = 0.$$

Por lo tanto $\int_\gamma F = -\int_{\tilde\gamma} F$. Si cambiamos la orientación de $\tilde\gamma$ podemos concluir que $\int_\gamma F = \int_{\tilde\gamma} F$ y entonces tenemos que $W(\gamma) = W(\tilde\gamma)$. ❑

Consideremos el campo de fuerzas $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Consideremos un punto , $x_0 \in \Omega$, donde x_0 será tomado como punto de referencia del sistema. Unimos un punto $x \in \Omega$ con x_0 por una $\gamma : [0,T] \longrightarrow \Omega$, es decir $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(T) = x$ y como la integral $\int_\gamma F$ no depende de la trayectoria γ, podemos definir el potencial $U : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ como el trabajo que realiza el sistema para desplazar el cuerpo. En forma integral, el potencial está dado por

$$U(x) := -\int_\gamma F + U_0, \qquad U_0 \in \mathbb{R}.$$

Consideremos la curva constante $\alpha : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\alpha(t) = x_0$. Entonces el potencial en x_0, que es $U(x_0) = -\int_\alpha F = U_0$, por lo que $U(x) - U(x_0) = -\int_\gamma F$, es decir, podemos ver que el trabajo que realiza el sistema para recorrer la trayectoria γ que une x y x_0 es la diferencia de potencial entre los dos puntos.

En el campo de fuerzas anterior que define un potencial $U : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ elegimos un vector arbitrario $w \in \mathbb{R}^n$ y derivamos el potencial U en dirección de w, obteniendo así la igualdad

$\frac{d}{dt}|_{t=0}U(x+tw) = \langle \nabla U(x), w\rangle$. Pero si definimos $\gamma : [0,t] \longrightarrow \Omega$ como $\gamma(s) = x + sw$ y calculamos $\frac{d}{dt}|_{t=0}U(x+tw)$ en base a la definición de U, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} U(x+tw) &= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\int_\gamma F \\ &= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\int_0^t \langle F(x+sw), w\rangle ds \\ &= \langle -F(x), w\rangle \end{aligned}$$

Entonces para todo $w \in \mathbb{R}^n$, $\langle \nabla U(x), w\rangle = \langle -F(x), w\rangle$ y como el producto interno en $\mathbb{R}^n$ es no degenerado, entonces tenemos que $\nabla U(x) = -F(x)$, por lo que podemos ver que

$$m\ddot{x} = -\nabla U \tag{1.1}$$

En un sistema cerrado con campo de fuerzas $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que no depende del tiempo, la energía siempre se conserva y considerando que la energá tiene la forma $E(x,\dot{x}) = T(\dot{x}) + U(x)$ podemos asegurar que $\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0$. Tenemos $\frac{dU}{dt} = \langle \nabla U, \dot{x}(t)\rangle = -\langle F(x(t)), \dot{x}(t)\rangle$ y usando la segunda ley de Newton $F(x(t)) = m\ddot{x}(t)$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dT}{dt} - \langle F(x(t)), \dot{x}(t)\rangle \\ &= -\frac{dT}{dt} - m\langle \ddot{x}(t), \dot{x}(t)\rangle \\ &= -\frac{dT}{dt} - \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\langle \dot{x}(t), \dot{x}(t)\rangle. \end{aligned}$$

De la última igualdad obtenemos que

$$T(t) = \int_{t_0}^t \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\langle \dot{x}(s), \dot{x}(s)\rangle ds = \frac{m}{2}\langle \dot{x}(t), \dot{x}(t)\rangle + C.$$

Entonces usando la igualdad anterior, podemos concluir que la ley de la conservación de la energía en sistemas conservativos se puede escribir como $E(x(t), \dot{x}(t)) = T(\dot{x}(t)) + U(x(t)) = C$, donde la energía cinética está dada por $T(\dot{x}(t)) = \frac{m}{2}\|\dot{x}(t)\|^2$.

Sea una partícula con masa m que se mueve de x_0 a x_1 con una trayectoria $x : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ en un sistema cerrado conservativo. Definimos el lagrangiano $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ como $L(x,\dot{x}) = T(\dot{x}) - U(x)$. Consideremos el conjunto de todas las curvas en $\mathbb{R}^n$ que unen los puntos x_0 y x_1 de un sistema cerrado conservativo. El principio fundamental de la mecánica dice que la trayectoria que sigue una masa puntual m y que une los puntos x_0 y x_1 es una trayectoria estacionaria de la acción

$$S(x) = \int_0^1 L(x(t), \dot{x}(t))dt$$

definido sobre todas las curvas $x : [0,1] \longrightarrow \Omega$ tal que $x(0) = x_0$ y $x(1) = x_1$. Consultar la demostración del siguiente lema en [**6**].

LEMA 1.3 (Lema fundamental del cálculo variacional). *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^k([a,b])$ tal que para toda función $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^\infty([a,b])$ con $h(a) = h(b) = 0$ se cumple $\int_a^b f(t)h(t)dt = 0$. Entonces la función f es idénticamente cero en $[a,b]$.*

Sean $x, \gamma : [0,1] \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ curvas diferenciables tales que $x + s\gamma$ estén en Ω para todo s y que $(x+s\gamma)(0) = x(0)$ y $(x+s\gamma)(1) = x(1)$, es decir, $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$. Denotemos $\frac{\partial L}{\partial x} = (\frac{\partial L}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial x_n})$ y $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n})$ y calculamos $\frac{d}{ds}|_{s=0} S(x+s\gamma)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} S(x+s\gamma) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \int_{x+s\gamma} L dt \\
&= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \int_0^1 L(x(t)+s\gamma(t), \dot{x}(t)+s\dot{\gamma}(t))dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(x(t)+s\gamma(t), \dot{x}(t)+s\dot{\gamma}(t))dt \\
&= \int_0^1 \left\langle \frac{\partial L}{\partial x}, \gamma(t) \right\rangle + \langle \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \dot{\gamma}(t) \Big\rangle dt \\
&= \int_0^1 \left\langle \frac{\partial L}{\partial x}, \gamma(t) \right\rangle + \frac{d}{dt}\left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \gamma(t) \right\rangle - \left\langle \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \gamma(t) \right\rangle dt \\
&= \int_0^1 \left\langle \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \gamma(t) \right\rangle dt - \int_0^1 \frac{d}{dt}\left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \gamma(t) \right\rangle dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ahora tenemos que $\int_0^1 \frac{d}{dt}\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \gamma(t)\rangle dt = 0$ por $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$.Considerando la base canónica de $\mathbb{R}^n$ dada por $e_1, \ldots, e_n$. Podemos elegir la curva γ de forma arbitraria y en particular podemos construir curvas $\gamma_i(t) := f(t)e_i$, $i = 1, \ldots, n$ con $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(0) = f(1) = 0$, que, remplazando en $\int_0^T \langle \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \gamma(t)\rangle dt = 0$, permite obtener las igualdades $\int_0^1 (\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}) f(t) dt = 0$. Tenemos que f que cumple la hipótesis del lema 1.3, por lo que obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Este sistema de ecuaciones es llamado *Ecuaciones de Euler- Lagrange*. Dada una trayectoria $x : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ en nuestro sistema cerrado conservativo, el lagrangiano es $L(x, \dot{x}) = T(\dot{x}) - U(x)$ donde la energía cinética es $T(\dot{x}) = \frac{m}{2}\|\dot{x}\|^2$. Entonces por las ecuaciones de Lagrange obtenemos $\frac{\partial L}{\partial x} = -\nabla U$ y $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$. Por lo tanto

$$-\nabla U(x) - m\ddot{x} = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0.$$

Obtenemos entonces que las ecuaciones del movimiento con energía cinética T son las ecuaciones de Newton del movimiento 1.1. De este resultado podemos concluir que el formalismo de Lagrange con el lagrangiano dado anteriormente, da lugar a las ecuaciones de Newton de la mecánica clásica. Para entender mas la interpretación física y ver ejemplos de sistemas mecánicos consultar [**2**, **5**].

2. Transformada de Legendre en $\mathbb{R}^n$

En esta sección vamos a estudiar la transformada de Legendre de una función convexa f, con el fin de construir una nueva función que depende de nuevas variables. En el formalismo lagrangiano, la transformada de Legendre aplicada al lagrangiano L da lugar a una nueva función llamada Hamiltoniano y que es utilizada en un nuevo formalismo de la mecánica. Recordemos que dado un dominio abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^2(\Omega)$ es estrictamente convexa en Ω si dado $x \in \Omega$, la matriz hessiana $(\text{Hess} f)(x)$ es estrictamente positiva.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ la función estrictamente convexa. Consideremos la fución $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $F(x,p) = \langle x, p\rangle - f(x)$ que da lugar a la función $F_p(x) = \langle x, p\rangle - f(x)$ definida en la fibra $\Omega \times \{p\}$. Calculamos la derivada parcial en $x \in \Omega$ y obtenemos $\frac{\partial F}{\partial x} = p - \frac{\partial f}{\partial x}$. Si $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0) = 0$, entonces $p = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ y $\text{Hess}(F_p) = -\text{Hess}(f)$. Como f en Ω es convexa, la igualdad anterior asegura que F alcanza su máximo en Ω si $p \in \text{Im}(\nabla f)$. Además podemos garantizar que $x_0 \in \Omega$ es donde F_p alcanza su máximo local. Observemos que en el punto x_0 donde F_p alcanza su máximo local es donde $p = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ por lo que podemos buscar una relación entre la variable p y el punto crítico x_0. Con este fin, vamos a probar que la aplicación $\nabla f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva.

Lema 1.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convexo y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^2(\Omega)$ que es estrictamente convexa en todo Ω. Entonces $\nabla f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \nabla f(x)$ es inyectiva.*

Demostración. Sean x y y dos puntos distintos en Ω y el vector $v := y - x$. Consideremos la curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow \Omega$, $\gamma(s) := y - sv$ tal que $\gamma(0) = y$ y $\gamma(1) = x$. Calculamos $\langle \nabla f(x) -$

$\nabla f(y), v\rangle$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), v\rangle &= \left\langle \int_0^1 \frac{d}{ds}(\nabla f(\gamma(s))ds, v \right\rangle \\ &= -\int_0^1 \langle \mathrm{Hess} f(v), v\rangle ds.\end{aligned}$$

Como f es convexa, se cumple que $\langle \mathrm{Hess} f(v), v\rangle > 0$, que implica $\int_0^1 \langle \mathrm{Hess} f(v), v\rangle ds > 0$ lo que significa que $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), v\rangle$ es distinta de cero siempre y cuando $x \neq y$, lo que implica que $\nabla f(x) - \nabla f(y) \neq 0$. Podemos asegurar entonces que $\nabla f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva.

❏

Definición 1.5. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto estrictamente convexo y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\Omega)$ estrictamente convexa. Definimos la transformada de Legendre $\mathbb{L}f : \mathrm{Im}(\nabla f) \longrightarrow \mathbb{R}$ de f como $(\mathbb{L}f)(p) = \sup_{x\in\Omega}(\langle x, p\rangle - f(x))$.

El lema 1.4 anterior afirma nuestra asunción que hay una relación bien definida entre el punto crítico x y la variable $p = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$. Entonces, podemos establecer la relación $p(x) := \nabla f(x)$ y

$$\begin{aligned} p(x) &:= \nabla f(x) \\ x(p) &:= (\nabla f)^{-1}(p). \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde $(\nabla f)^{-1} : \mathrm{Im}(\nabla f) \longrightarrow \Omega$. Si F_p alcanza su máximo en $x = x(p)$, entonces

$$(\mathbb{L}f)(p) = \sup_{x\in\Omega} F_p(x) = F_p(x(p)) = \langle x(p), p\rangle - f(x(p)) \tag{1.3}$$

Ahora, cabe preguntarnos si dada una función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ estrictamente convexa su transformada de Legendre hereda esta propiedad y si es el caso que así sea, cual será su transformada de Legendre. Para responder estas preguntas formularemos dos lemas que dependen de que la transformada de Legendre de f sea diferenciable. Supongamos que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase $C^2(\Omega)$ y estrictamente convexa. Sabemos que $\nabla f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable y para $x \in \Omega$ se tiene que $d(\nabla f)_x = (\mathrm{Hess} f)(x)$. Por el lema 1.4 tenemos que $\nabla f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva y como f es estrictamente convexa en Ω tenemos que $\mathrm{Hess} f(x)$ es positiva, por lo que podemos concluir que $\nabla f : \Omega \longrightarrow \mathrm{Im}(\nabla f)$ es un difeomorfismo y por lo tanto podemos asegurar que $(\nabla f)^{-1} : \mathrm{Im}(\nabla f) \longrightarrow \Omega$ es diferenciable. Entonces sabemos por (1.3) que $(\mathbb{L}f)(p) = F_p(x(p))$ y como $x(p) = (\nabla f)^{-1}(p)$, podemos asegurar que la transformada de Legendre $\mathbb{L}f : \mathrm{Im}(\nabla f) \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable.

LEMA 1.6. *Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que es estrictamente convexa de clase C^2. Entonces $\mathbb{L}f : \mathrm{Im}(\nabla f) \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos $x(p) = (\nabla f)^{-1}(p)$, por lo que $p(x) = \nabla f(x)$. Si usamos la notación $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}$ se cumple

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(x(p))$$

y obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\mathbb{L}f)}{\partial p}(p) &= \frac{\partial}{\partial p}\left(\langle x(p), p\rangle - f(x(p))\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial p}(p)p_i + x(p) - \frac{\partial f}{\partial p}(x(p)) \\
&= x(p) + \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial p}(p) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(p))\frac{\partial x_i}{\partial p}(p) \\
&= x(p) + \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial p}(p) - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial p}(p) \\
&= x(p).
\end{aligned}$$

Por la ecuación (1.2) se cumple

$$\frac{\partial(\mathbb{L}f)}{\partial p}(p) = x(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-1}(p). \tag{1.4}$$

Usamos el teorema de la función inversa tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}(\mathbb{L}f)(p) &= \frac{\partial^2(\mathbb{L}f)}{\partial p \partial p}(p) \\
&= \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-1}(p) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(p))\right)\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x(p))\right)^{-1} \\
&= (\mathrm{Hess} f(x(p)))^{-1}.
\end{aligned}$$

Entonces, tenemos que $\mathrm{Hess}(\mathbb{L}f)(p) = (\mathrm{Hess} f(x(p)))^{-1} > 0$ por ser f convexa de clase C^2. Podemos concluir que la transformada de Legendre $\mathbb{L}f : \mathrm{Im}(\nabla f) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa. ❑

Teorema 1.7. *Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente convexa. Entonces $(\mathbb{L} \circ \mathbb{L})(f) = f$.*

Demostración. Consideremos la aplicación $\nabla f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y la transformada de Legendre $\mathbb{L}f(p) = \langle x(p), p\rangle - f(x(p))$, donde $x(p) := (\nabla f)^{-1}(p)$. Ahora, sabemos que $\mathbb{L}f$ es una función convexa, por lo que podemos calcular su trasformada de Legendre, dada por $\mathbb{L}(\mathbb{L}f)(y) = \langle p(y), y\rangle - \mathbb{L}f(p(y))$, donde $p(y) = (\frac{\partial(\mathbb{L}f)}{\partial p})^{-1}(y)$. Por la ecuación (1.4) tenemos que $\frac{\partial(\mathbb{L}f)}{\partial p}(p) = (\frac{\partial f}{\partial x})^{-1}(p)$, por lo que

$$
\begin{aligned}
p(y) &= \left(\frac{\partial(\mathbb{L}f)}{\partial p}\right)^{-1}(y) \\
&= \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-1}\right)^{-1}(y) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(y).
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

Ahora, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{L}(\mathbb{L}f)(y) &= \langle p(y), y\rangle - (\mathbb{L}f)(p(y)) \\
&= \langle p(y), y\rangle - (\langle x(p(y)), p(y)\rangle - f(x(p(y))) \\
&= \langle p(y), y\rangle - \langle p(y), x(p(y))\rangle - f(x(p(y)))
\end{aligned}
$$

donde tenemos que por (1.4) y (1.5)

$$
\begin{aligned}
x(p(y)) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-1}(p(y)) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(y)\right) \\
&= y
\end{aligned}
$$

de donde podemos ver que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{L}(\mathbb{L}(f))(y) &= \langle p(y), y\rangle - \langle p(y), x(p(y))\rangle + f(x(p(y))) \\
&= \langle p(y), y\rangle - \langle p(y), y\rangle + f(y) \\
&= f(y).
\end{aligned}
$$

Entonces, podemos concluir que $(\mathbb{L} \circ \mathbb{L})(f) = f$. ❑

Vamos a dar un ejemplo de una función estrictamente convexa f con dominio $\mathbb{R}^n$ pero que el dominio de la transformada de Legendre $\mathbb{L}f$ no es necesariamente $\mathbb{R}^n$. Consideremos el dominio $\mathbb{R}$ de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) &= \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Tenemos que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ por lo que f es estrictamente convexa en todo $\mathbb{R}$. Notemos que $\mathrm{Im}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \left\{ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; x \in \mathbb{R} \right\} = (-1, 1)$. Además tenemos que

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x) \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

de donde tenemos que

$$\begin{aligned} x(p) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^{-1}(p) \\ &= \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} (\mathbb{L}f)(p) &= x(p)p - f(x(p)) \\ &= x(p)\left(p - \frac{\sqrt{1+x(p)^2}}{x(p)} \right) \\ &= x(p)\left(p - \frac{1}{p} \right) \\ &= \frac{p^2-1}{\sqrt{1-p^2}} \\ &= -\sqrt{1-p^2}. \end{aligned}$$

Tenemos entonces $\mathbb{L}f : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $(\mathbb{L}f)(p) = -\sqrt{1-p^2}$.

Mediante la transformada de Legendre, el sistema de ecuaciones de un sistema mecánico con cierto lagrangiano L puede transformarse en otro sistema de ecuaciones, donde el lagrangiano L se transforma en una función H definida como la transformada de Legendre de L y donde las velocidades se transforman en momentos generalizados. La transformada de Legendre es el puente entre la formulación lagrangiana y la formulación hamiltoniana de la mecánica. Si usamos la transformada de Legendre para encontrar de L podemos encontrar un nuevo sistema de ecuaciones del movimiento dependientes de nuevas variables que describe el sistema lagrangiano y ya encontrado este sistema, regresar a las ecuaciones de Lagrange del movimiento a partir del nuevo sistema encontrado. En [**2**, **10**] pueden encontrase mas detalles sobre el formalismo de Lagrange y Hamilton.

3. Formalismo lagrangiano y hamiltoniano

El formalismo de Lagrange o formulación lagrangiana de un sistema mecánico cerrado y conservativo con trayectoria $x : [0,1] \longrightarrow \Omega$ consiste en dos cosas: una función $L : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y las ecuaciones de Lagrange. Con este sistema de ecuaciones obtenemos las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema. A lo largo de la trayectoria x, el lagrangiano está dado por $L(x(t), \dot{x}(t)) = T(x(t), \dot{x}(t)) - U(x(t))$, tal que para cada $x \in \Omega$ la función $L_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $L_x(v) := L(x, v)$ es una función convexa, y siendo L_x convexa podemos aplicar la transformada de Legendre. Estas afirmaciones dan sentido a la siguiente definición

Definición 1.8. Sea un lagrangiano $L : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para cualquier $x \in \Omega$, la restricción L_x en la fibra $\{x\} \times \mathbb{R}^n$ es convexa. Definimos el hamiltoniano del sistema $H : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ como $H(x,p) = (\mathbb{L}L_x)(p)$.

Dado el sistema con lagrangiano L, la transformada de Legendre da lugar a una nueva función H definida en una nueva variable p tal que $p(v) = \nabla L_x(v)$. Por la igualdad (1.3) podemos ver que de forma explícita el hamiltoniano H es $H(x,p) = \langle v(p), p\rangle - L_x(v(p))$, donde $v(p) := (\nabla L_x)^{-1}(p)$. Consideremos $x : [0,1] \longrightarrow \Omega$ la trayectoria en sistema cerrado, con velocidad $\dot{x}(t)$ y momento $p : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $p(t) := \nabla L_{x(t)}(\dot{x}(t))$. Calculamos $\frac{\partial H}{\partial x}|(x(t), p(t))$ y obtenemos por las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t)) &= \frac{\partial}{\partial x}(\langle v(p(t)), p(t)\rangle - L_x(v(p(t)))) \\
&= -\frac{\partial L}{\partial x}((x(t), v(p(t))) \\
&= -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(x(t), v(p(t))).
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Tenemos que $p(t) = \nabla L_{x(t)}(\dot{x}(t)) = \frac{\partial L_x}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t))$, por lo que usando las ecuaciones de (1.6), tenemos que $-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(x(t), v(p(t))) = -\dot{p}(t)$, que equivale a la ecuación

$$\frac{\partial H}{\partial x}((t), p(t)) = -\dot{p}(t).$$

De igual forma, a lo largo de la trayectoria x vamos a calcular $\frac{\partial H}{\partial p}(x(t),p(t))$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p}(x(t),p(t)) &= \frac{\partial \mathbb{L}(L_{x(t)})}{\partial p}(p(t)) \\ &= (\nabla L_x)^{-1}(p(t)) \\ &= \left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^{-1}(x(t),p(t)) \end{aligned} \tag{1.7}$$

como $p(t) = \frac{\partial L_x}{\partial v}(\dot{x}(t)) = p(\dot{x}(t))$, tenemos que $v(p(t)) = v(p(\dot{x}(t))) = \dot{x}(t)$ por la transformación inversa. Usando las ecuaciones (1.6)y (1.7) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p}(x(t),p(t)) &= \left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)^{-1}(x(t),(p(t)) \\ &= \dot{x}(t). \end{aligned}$$

Tenemos entonces que $\frac{\partial H}{\partial p}(x(t),p(t)) = \dot{x}(t)$ y $\frac{\partial H}{\partial x}(x(t),p(t)) = -\dot{p}(t)$. Podemos concluir que para el sistema conservativo y cerrado con trayectoria $x : [0,1] \longrightarrow \Omega$ con hamiltoniano $H : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se cumplen las ecuaciones del movimiento de Hamilton o simplemente ecuaciones de Hamilton

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x(t),p(t)), \tag{1.8}$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t),p(t)). \tag{1.9}$$

Segun los cálculos desarrollados, comprobamos que el lagrangiano L del sistema origina una nueva función H a partir de la transformada de Legendre y además, las ecuaciones del movimiento de Hamilton se originan a partir de las ecuaciones del movimiento de Lagrange. Podemos concluir entonces que el formalismo de Lagrange da lugar al formalismo de Hamilton del sistema. Ahora, sabemos que si el lagrangiano $L : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ del sistema es convexo, entonces la transformada de Legendre $\mathbb{L}(L_x)$ es convexa y mas aún, sabemos que $\mathbb{L}(\mathbb{L}(L_x)) = L_x$ para cualquier $x \in \Omega$, es decir, que la transformada de Legendre del hamiltoniano $\mathbb{L}(H_x) = L_x$ en la fibra de x. Esto da lugar a la pregunta si el formalismo de Hamilton de un sistema cerrado y conservativo da lugar al formalismo de Lagrange originalmente formulado en dicho sistema. Sea la trayectoria $t \in [0,1] \mapsto (x(t),p(t)) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ una solución de las ecuaciones de Hamilton (1.8). Aplicamos la transformada de Legendre para obtener una trayectoria $t \in [0,1] \mapsto (x(t),v(t)) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ donde

$$v(t) := v(p(t)) = \frac{\partial H}{\partial p}(x(t),p(t)).$$

Usamos la primera ecuación del sistema (1.8)y obtenemos

$$v(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t)) = \dot{x}(t).$$

Por la ecuación (1.6) tenemos que

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), v(p(t))) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t)).$$

Obtenemos entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t)) &= \frac{\partial(\mathbb{L}H_{x(t)})}{\partial v}(\dot{x}(t)) \\ &= \left(\frac{\partial H_{x(t)}}{\partial p}\right)^{-1}(\dot{x}(t)) \\ &= \left(\frac{\partial H_{x(t)}}{\partial p}\right)^{-1}\frac{\partial H_{x(t)}}{\partial p}(p(t)) \\ &= p(t). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Usando la segunda ecuación de (1.6) y (1.10) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t)) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t)) - \frac{d}{dt}(p(t)) \\ &= \dot{p}(t) - \dot{p}(t) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

entonces la trayectoria $t \in [0,1] \mapsto (x(t), v(t))$ es una solución a las ecuaciones de Euler-Lagrange, por lo que podemos concluir con el siguiente teorema.

Teorema 1.9. *Sea un sistema cerrado y conservativo en Ω con trayectoria $x : [0,1] \longrightarrow \Omega$ con lagrangiano $L_x \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ estrictamente convexo. Consideremos el hamiltoniano $H : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $H(x,p) := \mathbb{L}(L_x)(p)$. Entonces $(x(t), \dot{x}(t))$ resuelve las ecuaciones del movimiento de Lagrange si y solo si $(x(t), p(t))$resuelve las ecuaciones del movimiento de Hamilton, donde $p(t) := \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t))$.*

4. Formalismos de la mecánica en el haz de una variedad diferenciable

Un sistema mecánico puede estar definido en una variedad diferenciable M, lo que puede interpretarse que las posiciones de dicho sistema corresponden a puntos de la variedad. Ahora, para un punto $x \in M$, el espacio tangente T_xM es el conjunto de todas las posibles velocidades con todas las posibles direcciones que se originan en x entonces podemos reunir todas las velocidades de todos los puntos en el haz tangente TM, que vamos a nombrar como espacio de configuración. Recordemos que en el espacio euclidiano, si x es una trayectoria en $\mathbb{R}^n$, entonces el lagrangiano L es dependiente de la posición $x(t)$ y la velocidad $\dot{x}(t)$. Ahora, si nuestro espacio de posiciones es una variedad diferenciable M, es natural que pensemos que el lagrangiano debe ser una función $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, pues TM se puede interpretar como todas las posibles velocidades para cada unos de los puntos en M.

Sea M una variedad diferenciable y una partícula que describe una trayectoria $x : [T_0, T_1] \longrightarrow M$ y además tenemos un Lagrangiano $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$. Para facilitar los cálculos, vamos a establecer que la trayectoria x esta contenida completamente en una carta de M dada por (U, φ) y que tiene coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$. La carta (U, φ) en M induce una carta $(TU, \tilde{\varphi})$ en TM con coordenadas $(x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n)$. Usando la carta $(TU, \tilde{\varphi})$, el lagrangiano L induce un lagrangiano $\tilde{L}$ que define este diagrama:

$$\begin{tikzcd} TU \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\tilde{\varphi}"'] & \mathbb{R} \\ \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \arrow[ur, "\tilde{L}"'] & \end{tikzcd} \tag{1.12}$$

La trayectoria x que está contenida en U pude ser proyectada a TU asociando $x(t)$ a $\dot{x}(t)_{x(t)} \in T_{x(t)}M$ y cuyas coordenadas en la carta $(TU, \tilde{\varphi})$ están dadas por los puntos $(x_1(t)\ldots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t))$. Entonces las ecuaciones de Lagrange están dadas por

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

En el sistema mecánico dado por la trayectoria x y el lagrangiano L, elegimos la carta (U, φ) y podemos transformar localmente mediante la transformada de Legendre el Lagrangiano en un Hamiltoniano H y así reformular las ecuaciones de Lagrange en las ecuaciones de Hamilton en la carta (U, φ). Consideremos un Lagrangiano $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ y una carta $(TU, \tilde{\varphi})$ que induce el lagrangiano $\tilde{L} : \tilde{\varphi}(TU) \longrightarrow \mathbb{R}$. Para cada $m \in U$ denotamos $\tilde{L}_{\varphi(m)}(\tilde{v}) := \tilde{L}(\varphi(m), \tilde{v})$ y vamos a pedir que $\mathrm{Hess}(\tilde{L}_{\varphi(m)})$ tenga determinante positivo para todo $m \in U$. Es decir, el lagrangiano $\tilde{L}$ restringido a cada una de las fibras de TU es una función convexa.

4.1. Transformada de Legendre en una variedad diferenciable. Dado un sistema cerrado conservativo en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con lagrangiano $L : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ construimos una nueva función H mediante la transformada de Legendre aplicada en las restricciones de L en cada fibra de $\Omega \times \mathbb{R}^n$ y las ecuaciones de Lagrange dieron lugar a las ecuaciones de Hamilton. Ahora, si nuestro sistema cerrado está en una variedad diferenciable M, con lagrangiano $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ y ecuaciones de movimiento dadas por las ecuaciones de Lagrange, queremos definir alguna transformación análoga a la de Legendre, es decir alguna transformación que a partir del formalismo de Lagrange en TM de origen al formalismo de Hamilton en T^*M. La transformada de Legendre en este caso no transformará funciones diferenciable en funciones diferenciables, si no que transformara un vector tangente de TM en un covector en T^*M.

Definición 1.10. Sea un sistema cerrado conservativo en una variedad M con lagrangiano $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$. Definimos la transformada de Legendre $\mathbb{L}L : TM \longrightarrow T^*M$ tal que para $v_x \in T_xM$ y $w_x \in T_xM$

$$\mathbb{L}L(v_x)(w_x) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L(v_x + tw_x)$$

Lema 1.11. *Consideremos $x \in M$ y un vector tangente $v_x \in T_xM$. Entonces $\mathbb{L}L(v_x) : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal.*

Demostración. Sea (U, φ) una carta de M alrededor de un punto $x \in M$ y v_x un vector tangente en T_xM. Consideremos la carta $(TU, \tilde{\varphi})$ inducida por la carta (U, φ). En T_xM elijamos tres vectores $v_x, w_x, u_x \in T_xM$ que en coordenadas de $(TU, \tilde{\varphi})$ se expresan como

$$\begin{aligned} v_x &= \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ u_x &= \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ w_x &= \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Definamos los vectores en $\mathbb{R}^n$, $v := (v_1, \ldots, v_n)$, $w := (w_1, \ldots, w_n)$ y $u = (u_1, \ldots, u_n)$. Usando el diagrama 1.12 tenemos que en la carta $(TU, \tilde{\varphi})$ la transformada de Legendre de L es

$$\begin{aligned} \mathbb{L}L(v_x)(w_x) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L(v_x + tw_x) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L \circ \tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(x), v + tw) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tilde{L}(\varphi(x), v + tw) \\ &= \left\langle \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v}(\varphi(x), v), w \right\rangle \end{aligned} \tag{1.13}$$

Entonces dado dos escalares α y β en $\mathbb{R}$ tenemos que por 1.13 se cumple

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}L(v_x)(\alpha w_x + \beta u_x) &= \left\langle \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v}(\varphi(x), v), (\alpha w_x + \beta u_x) \right\rangle \\
&= \alpha \left\langle \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v}(\varphi(x), v), w \right\rangle + \beta \left\langle \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v}(\varphi(x), v), u \right\rangle \\
&= \alpha \mathbb{L}L(v_x)(w_x) + \beta \mathbb{L}L(v_x)(u_x).
\end{aligned}$$

❏

Lema 1.12. *Sea M una variedad diferenciable con lagrangiano $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Entonces la transformada de Legendre $\mathbb{L}L : TM \longrightarrow T^*M$ es diferenciable.*

Demostración. Sea $m \in M$ y consideremos dos vectores tangentes v_m, w_m en T_mM. Dada la carta $(TU, \tilde{\varphi})$ inducida de (U, φ) con coordenadas $(x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n)$, podemos expresar v_m y w_m como

$$v_m = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad w_m = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.14}$$

Definamos dos vectores en $\mathbb{R}^n$ como $v := (v_1, \ldots, v_n)$ y $w := (w_1, \ldots, w_n)$ y denotemos $x = \varphi(m)$ de modo que en la carta $(TU, \tilde{\varphi})$ se tiene $\tilde{\varphi}(v_m) = (x, v)$ y $\tilde{\varphi}(w_m) = (x, w)$. Por la ecuación (1.13) tenemos

$$\begin{aligned}
(\mathbb{L}L)(\tilde{\varphi}^{-1}(x, v))(w_m) &= \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v}(x, v) \cdot w \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v_i}(x, v) w_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v_i}(x, v) dx_i(w_m).
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Ahora, consideremos la carta (T^*U, φ^*) en T^*M inducida de (U, φ). Usando la ecuación (1.13) tenemos que $\varphi^* \circ (\mathbb{L}L) \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x, v) = (x, \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v}(x, v))$ en $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$. Entonces como $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, y en consecuencia el mapa

$$\varphi(U) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n, \quad (x, v) \mapsto \left(x, \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v}(x, v) \right)$$

es diferenciable, por lo que podemos concluir que $\mathbb{L}L : TM \longrightarrow T^*M$ es diferenciable. ❏

Sea $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ un lagrangiano en una variedad diferenciable M. Decimos que $L_m : T_mM \longrightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente convexa si dada una carta $(TU, \tilde{\varphi})$ en TM inducida de una carta (U, φ) alrededor de $m \in M$ el lagrangiano local $\tilde{L}_m : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definido como $\tilde{L}_x(v) = L \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x, v)$ es estrictamente convexa. Sea $m \in M$ y consideremos la restricción en la fibra de m de la transformada de Legendre $\mathbb{L}L_m : T_mM \longrightarrow T_m^*M$. Por la igualdad (1.13) podemos ver que $\mathbb{L}L_m : T_mM \longrightarrow T_m^*M$ es inyectiva si y solo si

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v}(x, v) \tag{1.16}$$

es inyectiva. Si L_m es estrictamente convexa entonces por el lema (1.4) el mapa (1.16) es inyectiva. Finalmente concluimos que $\mathbb{L}L_m$es inyectiva.

Definición 1.13. Sea M una variedad diferenciable con lagrangiano $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que L es regular si L es estrictamente convexo y $\mathbb{L}L_m : T_mM \longrightarrow T_m^*M$ es biyectiva.

Definición 1.14. Sea una variedad diferenciable M con $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ regular. Definimos la energía del sistema $E : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ por $E(v_m) := (\mathbb{L}L)(v_m)(v_m) - L(v_m)$ donde $v_m \in T_mM$.

Definición 1.15. Sea una variedad diferenciable M con lagrangiano $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ regular y energía $E : TM \longrightarrow \mathbb{R}$. El hamiltoniano H asociado a L es una función $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ definido mediante el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "E"] \arrow[d, "\mathbb{L}L"'] & \mathbb{R} \\ T^*M \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd} \tag{1.17}$$

Lema 2. Sea M una variedad diferenciable con energía $E : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ asociada al lagrangiano $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$. Dada una carta (U, φ) en M que induce una carta $(TU, \tilde{\varphi})$ en TM se cumple $E \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x, v) = \left\langle \frac{\partial \tilde{L}_x}{\partial v}(v), v \right\rangle - \tilde{L}_x(v)$ para $(x, v) \in \tilde{\varphi}(TU)$.

Demostración. Consideremos la carta $(TU, \tilde{\varphi})$ y $(x, v) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ que $\varphi^{-1}(x, v) \in T_{\varphi^{-1}(x)}M$. Por 1.13 tenemos que $\mathbb{L}L(\tilde{\varphi}^{-1}(x, v)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{L}_x}{\partial v_i}(v) dx_i$. Si $v = (v_1, \dots, v_n)$ en $\mathbb{R}^n$

se tiene que $\tilde{\varphi}^{-1}(x,v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ y la energía E es

$$\begin{aligned} E \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x,v) &= \mathbb{L}L(\tilde{\varphi}^{-1}(x,v))(\tilde{\varphi}^{-1}(x,v)) - L \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x,v) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{L}_x}{\partial v_i}(v) dx_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) - \tilde{L}_x(v) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{L}_x}{\partial v_i}(v) v_i - \tilde{L}_x(v) \\ &= \left\langle \frac{\partial \tilde{L}_x}{\partial v}(v), v \right\rangle - \tilde{L}_x(v). \end{aligned}$$

❏

Consideremos una variedad diferenciable M con lagrangiano $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$, energía $E : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ y hamiltoniano $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$. Consideremos una carta (U, φ) en M que induce una carta $(TU, \tilde{\varphi})$ en TM y una carta (T^*U, φ^*) en T^*M. Definimos las funciones locales $\tilde{H} : \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\tilde{E} : \varphi(U) \times \mathbb{R}$ mediante los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "\tilde{E}"] \arrow[d, "\tilde{\varphi}^{-1}"'] & \mathbb{R} \\ TM \arrow[ur, "E"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "\tilde{H}"] \arrow[d, "(\varphi^*)^{-1}"'] & \mathbb{R} \\ T^*M \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd} \tag{1.18}$$

Dado $(x,v) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ definimos $\tilde{H}_x(p) := \tilde{H}(x,p)$ y $\tilde{E}_x(v) := \tilde{E}(x,v)$, teniendo así funciones en la fibra $\{x\} \times \mathbb{R}^n$.

TEOREMA 1.16. *Sea M una variedad diferenciable con carta (U, φ), lagrangiano regular $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$, energía $E : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ y hamiltoniano $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$. Dadas las cartas $(TU, \tilde{\varphi})$ y (T^*U, φ^*) en TM y T^*M respectivamente que inducen las funciones locales $\tilde{L}$ y $\tilde{H}$, se cumple que para todo $(x,p) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$, $\tilde{H}_x(p) = \mathbb{L}(\tilde{L}_x)(p)$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el lagrangiano local $\tilde{L}_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ para $x \in \varphi(U)$. Por la ecuación 1.3 sabemos que $\mathbb{L}(\tilde{L}_x)(p(v)) = \langle p(v), v \rangle - \tilde{L}_x(v)$ donde $p(v) := \frac{\partial \tilde{L}_x}{\partial v}(v)$. Por la ecuación 1.13 se cumple que

$$\varphi^* \circ (\mathbb{L}L) \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x,v) = (x, p(v)).$$

Tomemos $p \in \mathbb{R}^n$ y sea $v \in \mathbb{R}^n$ el único vector tal que $p = p(v) = \frac{\partial \tilde{L}_x}{\partial v}(v)$ (la existencia y unicidad de v está garantizada por que $\mathbb{L}L$ es biyectiva). Por el lema 2 tenemos que

$$
\begin{aligned}
\tilde{H}_x(p(v)) &= H \circ (\varphi^*)^{-1}(x, p(v)) \\
&= H \circ (\varphi^*)^{-1} \circ \varphi^* \circ (\mathbb{L}L) \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x, v) \\
&= H \circ (\mathbb{L}L) \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x, v) \\
&= E \circ (\mathbb{L}L)^{-1} \circ (\mathbb{L}L) \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x, v) \\
&= E \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x, v) \\
&= \left\langle \frac{\partial \tilde{L}_x}{\partial v}(v), v \right\rangle - \tilde{L}_x(v) \\
&= \langle p(v), v \rangle - \tilde{L}_x(v) \\
&= \mathbb{L}(\tilde{L}_x)(p(v)).
\end{aligned} \tag{1.19}
$$

❑

Entonces, dado un sistema en una variedad diferenciable M donde hay un lagrangiano $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ regular, la transformada de Legendre $\mathbb{L}L : TM \longrightarrow T^*M$ permite calcular la energía $E : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante la fórmula $E(v_x) = \mathbb{L}L(v_x)(v_x) - L(v_x)$ y mediante el diagrama 1.17 definimos el hamiltoniano $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ teniendo así que $H(p_x) = E \circ (\mathbb{L}L)^{-1}(p_x)$. Por el teorema 1.16 encontramos que en una carta (U, φ) el hamiltoniano local en la carta (TU, φ^*) tiene la forma $\tilde{H}(x, p) = (\mathbb{L}\tilde{L}_x)(p)$, donde $\mathbb{L}\tilde{L}_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y con este resultado se establece la relación entre la transformada de Legendre $\mathbb{L}L : TM \longrightarrow T^*M$ y la transformada de Legendre usual.

Consideremos un sistema cerrado conservativo en M con lagrangiano $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ y una trayectoria $x : [0, 1] \longrightarrow M$ que da lugar a una curva dada por $v : [0, 1] \longrightarrow TM$ $v(t) := \dot{x}(t)$ en $T_{x(t)}M$ y a su vez, describe una trayectoria $p : [0, 1] \longrightarrow T^*M$ como $p(t) := \mathbb{L}L(v(t))$ en $T^*_{x(t)}M$. En una carta $(TU, \tilde{\varphi})$ de TM con coordenadas $(x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n)$ inducida por una carta (U, φ) se cumplen las ecuaciones de Lagrange del movimiento dadas por

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\tilde{\varphi}(v(t))) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i}(\tilde{\varphi}(v(t)) = 0 \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ahora, consideremos el hamiltoniano $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$, que en la curva $p : [0, 1] \longrightarrow T^*M$ cumple $H(p(t)) = (\mathbb{L}\tilde{L}_{\varphi(x(t))})(\tilde{\varphi}(v(t))$ en la carta (U, φ) y según los resultados de la sección anterior, tenemos que en las coordenadas $(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ se cumplen las ecuaciones de Hamilton del movimiento

$$\begin{aligned}\dot{p}_i(t) &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_i}(\tilde{\varphi}(p(t))),\\ \dot{x}_i(t) &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_i}(\tilde{\varphi}(p(t)))\end{aligned}$$

con $i = 1, \ldots, n$.

Consideremos una variedad riemanniana con la conexión de Levi- Civita (M, g, ∇). Una geodésica es una curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ tal que $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$. En una carta (U, φ) con coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ y dados los campos vectoriales $\frac{\partial}{\partial x_i}$ y $\frac{\partial}{\partial x_j}$, podemos expresar la conexión como $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_k \Gamma^k_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_k}$ y llamamos $\Gamma^k_{i,j}$ símbolos de Christoffel. A continuación mostraremos un teorema que da una ecuación que cumplen las geodésicas y la demostración puede encontrarse en [**4**]

Teorema 1.17. *Sea (M, g, ∇) una variedad riemanniana y $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ una curva tal que γ está contenida en una carta (U, φ). Si $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$ entonces en la carta (U, φ)*

$$\ddot{\gamma}_i + \sum_{\mu\nu} \Gamma^i_{\mu\nu} \dot{\gamma}_\mu \dot{\gamma}_\nu = 0.$$

Consideremos un sistema cerrado y conservativo en una variedad riemanniana (M, g, ∇) donde hay una trayectoria $x : [0,1] \longrightarrow M$. Supongamos que el sistema no tiene energía potencial, es decir $U : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es nula para cada $x \in M$, por lo que el lagrangiano es la energia cinética. $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ estaría dado por $L(v_x) = \frac{m}{2} g(v_x, v_x)$, donde $g(v_x, v_x)$ es la velocidad del vector en x. Sea (U, φ) una carta de M donde $x([0,1]) \cap U$ es no vacío. En esta carta, $g_{x(t)}(\dot{x}(t), \dot{x}(t)) = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}(x(t)) \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{m}{2} \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_i} \dot{x}_\mu(t) \dot{x}_\nu(t).$$

Calculamos $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$ y $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{m}{2}\left(\sum_\mu g_{\mu i}\dot{x}_\mu + \sum_\nu g_{i\nu}\dot{x}_\nu\right)\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{m}{2}\left(\sum_{\mu,j} \frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x_j}\dot{x}_\mu \dot{x}_j + \sum_{\nu,j} \frac{\partial g_{i\nu}}{\partial x_j}\dot{x}_j \dot{x}_\nu + \sum_\mu g_{\mu i}\ddot{x}_\mu + \sum_\nu g_{i\nu}\ddot{x}_\nu\right).\end{aligned}$$

En la primera suma de la segunda igualdad cambiamos j por ν y en la segunda suma por μ, de donde obtenemos

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{m}{2}\left(-\sum_{\mu\nu}\Big(\frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{i\nu}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_i}\Big)\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu - 2\sum_{\mu} g_{\mu i}\ddot{x}_\mu \right).$$

De las ecuaciones de Lagrange obtenemos la igualdad

$$\sum g_{ki}\ddot{x}_k + \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\Big(\frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{i\nu}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_i}\Big) = 0.$$

Denotamos como (g^{ik}) a la matriz inversa de (g_{ik}). Por la igualdad anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_i g^{ji}\left(\sum_k g_{ki}x_k + \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\Big(\frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{i\nu}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_i}\Big)\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu\right)\\
&= \sum_{k=1}\sum_{i=1} g^{ji}g_{ik}x_k + \sum_{\mu,\nu}\left(\frac{1}{2}\sum_{ij} g^{ji}\Big(\frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{i\nu}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_i}\Big)\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu\right)\\
&= \ddot{x}_j + \sum_{\mu\nu}\Gamma^j_{\mu\nu}\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu
\end{aligned}$$

donde en la igualdad anterior, $\Gamma^j_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{ij} g^{ji}\left(\frac{\partial g_{\mu i}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{i\nu}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \dot{x}_i}\right)$ son los símbolos de Christoffel, de forma que obtenemos la ecuación de la geodésica $\ddot{x}_j + \sum_{\mu\nu}\Gamma^j_{\mu\nu}\dot{x}_\mu\dot{x}_\nu = 0$. ¿ Que concluimos de este resultado? Si x es una trayectoria en un sistema conservativo y cerrado dado por una variedad riemanniana que en (U,φ) cumple con las ecuaciones de Lagrange, entonces localmente cumple con las ecuaciones de la geodésica. Esto prueba que las ecuaciones de Lagrange en (M, g, ∇) con lagrangiano $L(v_x) = \frac{m}{2}g(v_x, v_x)$ son equivalentes a las ecuaciones de la geodésica, es decir que equivale al resultado clásico de que las geodésicas son puntos críticos de la energía. Esto se puede verificar en [**4**].

Como ejemplo más concreto vamos a calcular las ecuaciones de Hamilton para la esfera $\mathbb{S}^2$. Tomemos en $\mathbb{S}^2$ las cartas formadas por las parametrizaciones en coordenadas polares $\psi(\vartheta,\varphi) = (\cos\vartheta\cos\varphi, \operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi)$ con $(\vartheta,\varphi) \in (\vartheta_0-\pi, \vartheta_0+\pi)\times(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Consideremos la métrica g inducida de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$\begin{aligned}
g_{\vartheta\vartheta} &= g\left(\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}, \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right) = \cos^2\varphi,\\
g_{\vartheta\varphi} &= g_{\varphi\vartheta} = 0\\
g_{\varphi\varphi} &= g\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Dado $v_x = v_\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + v_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}$ un vector tangente en $T_x\mathbb{S}^2$ donde $x = \psi^{-1}(\vartheta,\varphi)$ el lagrangiano en $T\mathbb{S}^2$ está dado como $L(v_x) = \frac{m}{2}\left(\cos^2(\varphi)v_\vartheta^2 + v_\varphi^2\right)$. En estas coordenadas tenemos que el lagrangiano $\tilde{L} = L \circ \psi^{-1}$ esta dado por

$$\tilde{L}((\vartheta, \varphi), (v_\vartheta, v_\varphi)) = \frac{m}{2}\left(\cos^2(\varphi) v_\vartheta^2 + v_\varphi^2\right)$$

Por la sección anterior sabemos que el hamiltoniano en coordenadas locales está dado por la transformada de Legendre $\tilde{H}((\vartheta, \varphi), (p_\vartheta, p_\varphi)) = (\mathbb{L}\tilde{L})((p_\vartheta, p_\varphi))$ donde $\tilde{H} = H \circ \psi^{*-1}$ y tenemos que

$$\begin{aligned} p_\vartheta((v_\vartheta, v_\varphi)) &= \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v_\vartheta}((\vartheta, \varphi), (v_\vartheta, v_\varphi)) = m v_\vartheta \cos^2\varphi, \\ p_\varphi((v_\vartheta, v_\varphi)) &= \frac{\partial \tilde{L}}{\partial v_\varphi}((\vartheta, \varphi), (v_\vartheta, v_\varphi)) = m v_\varphi \end{aligned} \tag{1.20}$$

despejamos las velocidades de las ecuaciones anteriores y tenemos que

$$\begin{aligned} v_\vartheta &= \frac{1}{m\cos^2\varphi} p_\vartheta \\ v_\varphi &= \frac{1}{m} p_\varphi \end{aligned} \tag{1.21}$$

Calculamos el hamiltoniano en coordenadas polares tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{H}((\vartheta, \varphi), (p_\vartheta, p_\varphi)) &= \langle (p_\vartheta, p_\varphi), (v_\vartheta(p_\vartheta, p_\varphi), v_\varphi(p_\vartheta, p_\varphi))\rangle - \tilde{L}((\vartheta, \varphi), (v_\vartheta(p_\vartheta, p_\varphi), v_\varphi(p_\vartheta, p_\varphi)) \\ &= \frac{1}{m\cos^2\varphi} p_\vartheta^2 + \frac{1}{m} p_\varphi^2 - \frac{m}{2}\left(\cos^2\varphi\left(\frac{1}{m\cos^2\varphi} p_\vartheta\right)^2 + \left(\frac{1}{m} p_\varphi\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi} p_\vartheta^2 + p_\varphi^2\right). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Por las igualdades (1.21) y (1.20) tenemos que la transformada de Legendre $\mathbb{L}L : T(\mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}) \longrightarrow T^*(\mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\})$ es una biyección. Consideremos una curva diferenciable $r : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ que es solución a las ecuaciones de Euler-Lagrange. Bajo las cartas (U, ψ) de $\mathbb{S}^2$ y (T^*U, ψ^*) de $T^*\mathbb{S}^2$ obtenemos una trayectoria $(\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t)) = (\psi^* \circ (\mathbb{L}L))(\dot{r}(t))$ que satisface las ecuaciones de Hamilton de movimiento dadas por

$$\begin{aligned} \dot{p}_\vartheta(t) &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \vartheta}(\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t)) = 0 \\ \dot{p}_\varphi(t) &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varphi}(\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t)) = -\frac{\tan\varphi(t)}{m\cos\varphi(t)} p_\vartheta(t)^2. \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que las trayectorias están dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta}(t) &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_\vartheta}(\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t)) = \frac{p_\vartheta(t)}{m\cos^2\varphi(t)} \\ \dot{\varphi}(t) &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial v_\varphi}(\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t)) = \frac{1}{m} p_\varphi(t). \end{aligned}$$

Obtenemos de esta forma las ecuaciones del movimiento de un sistema con espacio de configuración de $T^*\mathbb{S}^2$. En el capitulo 4, vamos a estudiar cuales son las propiedades dinámicas de estos sistemas, es decir, como son las trayectorias del sistema, describir si hay cantidades conservadas, primeras integrales, etc. También nos centraremos en estudiar las simetrías del sistema bajo rotaciones del grupo $SO(3)$.

Capítulo 2

Sistema hamiltoniano en el haz cotangente

Las cantidades conservadas son unos de los objetos que resultan ser útiles en el estudio de los sistemas hamiltonianos. Una cantidad conservada de un sistema hamiltoniano es aquella magnitud que se conserva en las trayectorias que describen el sistema. El objetivo principal en esta sección es definir que es una cantidad conservada sobre un sistema hamiltoniano (M, ω, H), donde (M, ω) es una variedad simpléctica y tratar de interpretar física y geométricamente su significado.

1. Sistema hamiltoniano conservativo

En esta sección vamos a estudiar las cantidades conservadas de un sistema hamiltoniano e introduciremos un concepto de gran importancia en la mecánica que es el de primera integral. Un sistema hamiltoniano consiste en una variedad simpléctica (M, ω) y una función diferenciable $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Vamos a denotar el sistema hamiltoniano como (M, ω, H).

Definición 2.1. Una forma simpléctica en una variedad M de dimensión $2n$ es una 2-forma ω diferenciable cerrada y no degenerada. El par (M, ω) es llamado variedad simpléctica.

Consideremos un sistema hamiltoniano (M, ω, H) y los espacios TM y T^*M. Para $p \in M$ definamos la transformación $T : TM \longrightarrow T^*M$ como $v_p \mapsto \omega_p(v_p, \cdot)$. Consideremos $v_p \in T_pM$ tal que $T(v_p) = \omega(v_p,) = 0$, por lo que la no degeneración de ω implica que $v_p = 0$ que nos permite concluir que dada la restricción $T|_{T_pM} : T_pM \longrightarrow T_p^*M$ se tiene que $\ker(T|_{T_pM})$ es trivial para todo $p \in M$. Como en todo $p \in M$ tanto T_pM como T_p^*M tienen la misma dimensión se concluye que $T|_{T_pM} : T_pM \longrightarrow T_p^*M$ es un isomorfismo. Ahora, consideremos el hamiltoniano $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ y la 1-forma dH en M. Dado $p \in M$, existe un vector $x(p)$ en T_pM tal que para todo $\xi \in T_pM$ se tiene $\omega_p(x(p), \xi) = dH_p(\xi)$. Entonces podemos concluir que el campo vectorial X_H definido por $X_H(p) = x(p)$ cumple que $\omega(X_H(p), \xi) = dH_p(\xi)$ para todo $p \in M$ por lo que $i_{X_H}\omega = dH$. Estas conclusiones dan sentido a la siguiente definición.

Definición 2.2. Dado un sistema hamiltoniano (M, ω, H) donde (M, ω) es una variedad simpléctica y $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable. El campo vectorial X_H en M que cumple la igualdad $i_{X_H}\omega = dH$ es llamado campo vectorial asociado al hamiltoniano H.

Definición 2.3. Consideremos un sistema hamiltoniano (M, ω, H). Sea H un hamiltoniano que tiene un campo vectorial asociado X_H. Una función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una primera integral si es constante en el flujo de X_H.

El hecho que una función f sea constante bajo el flujo de φ_t de X_H, implica que $\frac{d}{dt}(f \circ \varphi_t(p)) = 0$ para todo t. En un sistema hamiltoniano (M, ω, H) existe al menos una primera integral, que es el propio hamiltoniano H. Esto lo podemos verificar en el siguiente teorema

Teorema 2.4. *Sea (M, ω, H) un sistema hamiltoniano. Dado el campo vectorial asociado X_H, entonces H se conserva a lo largo del flujo de X_H*

Demostración. Consideremos un punto $p \in M$ y $\varphi : I_p \times D_p \longrightarrow M$ el flujo local de X_H alrededor de p, donde A_p es un abierto en M y I_p abierto. Calculamos $\frac{d}{dt}(H \circ \varphi_t(p))$ para t y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(H \circ \varphi_t)(p) &= dH(X_H(\varphi_t(p))) \\ &= \omega(X_H(\varphi_t(p)), X_H(\varphi_t(p)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos entonces que $\frac{d}{dt}(H \circ \varphi_t)(p) = 0$, por lo que el hamiltoniano H es constante en el flujo. □

Consideremos el hamiltoniano del sistema $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$ un valor regular de H. Sabemos que $H^{-1}(c)$ es una subvariedad diferenciable de M. Consideremos $p \in H^{-1}(c)$, y el flujo alrededor de p, $\varphi : I \times D_p \longrightarrow M$, por lo que tenemos que $H(\varphi_t(p)) = H(p) = c$ por ser H primera integral, de donde podemos concluir que $\varphi_t(p) \in H^{-1}(c)$. Entonces la subvariedad $H^{-1}(c)$ es invariante bajo el flujo de X_H.

Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^n$ y el espacio $\Omega \times \mathbb{R}^n$ con coordenadas $(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ dotado con la forma simpléctica $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dp_i$. Consideremos un hamiltoniano $H : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y el campo vectorial asociado a H dado por X_H. En las coordenadas de $\Omega \times \mathbb{R}^n$ tenemos que $X_H = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial}{\partial p_i}$, donde $X_i, P_i : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables. Por definición de X_H, tenemos $i_{X_H}\omega = dH$, entonces para los campos vectoriales $\frac{\partial}{\partial x_i}$ y $\frac{\partial}{\partial p_i}$, $i = 1, \ldots n$ se cumple $i_{X_H}\omega(\frac{\partial}{\partial x_i}) = dH\big(\frac{\partial}{\partial x_i}\big)$ y $i_{X_H}\omega(\frac{\partial}{\partial p_i}) = dH\big(\frac{\partial}{\partial p_i}\big)$. Calculando ambos lados de las igualdades anteriores por separado tenemos

$$\begin{aligned} dH\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= \frac{\partial H}{\partial x_i}, \\ dH\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right) &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ i_{X_H}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) &= -P_i, \\ i_{X_H}\omega\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right) &= X_i. \end{aligned}$$

De estas igualdades obtenemos que para $(x,p) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ y el hamiltoniano H con campo vectorial asociado, $X_H = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial}{\partial p_i}$ obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ P_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Consideremos el campo vectorial X_H su flujo en (x,p) dado por $\varphi : I \times D \longrightarrow \Omega \times \mathbb{R}^n$, $\varphi_t((x,p)) = (x(t), p(t))$, donde D es un entorno de (x,p) . Entonces $X_H((x(t),p(t))) = \sum \dot{x}_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i}(x(t),p(t)) + \dot{p}_i(t)\frac{\partial}{\partial p_i}(x(t),p(t))$ y usando las ecuaciones de (2.1) obtenemos que el flujo cumple con las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(x(t),p(t)), \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t),p(t)) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Entonces el flujo del campo vectorial X_H es equivalente a las soluciones de las ecuaciones de Hamilton. Este modelo de las ecuaciones de Hamilton en el espacio euclidiano motiva a investigar si es posible formular el formalismo de Hamilton en el haz cotangente de una variedad M. Para esto, debemos de construir una 2-forma en T^*M similar a la dos forma en $\Omega \times \mathbb{R}^n$ y definir un hamiltoniano sobre T^*M que de lugar a un campo vectorial X_H en $\Gamma(T(T^*M))$ que cumpla $i_{X_H}\omega = dH$.

Consideremos una variedad simpléctica y un sistema hamiltoniano (M,ω,H). Elijamos un punto $p \in M$ y según el teorema de Darboux, existe una carta (U,φ) alrededor de p con coordenadas $(x_1,\ldots,x_n,p_1,\ldots,p_n)$ tal que la forma simpléctica ω se escribe como

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dp_i.$$

Si X_H es el campo vectorial asociado al hamiltoniano H que en las coordenadas de Darboux se escribe como $X_H = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + P_i \frac{\partial}{\partial p_i}$, y siguiendo las ecuaciones (2.1), tenemos que se satisfacen las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
X_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\
P_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Ahora consideremos otro ejemplo de una cantidad conservada. Consideremos un sistema (M, ω, H) donde el hamiltoniano $\tilde{H}(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = H \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ en las coordenadas de Darboux (U, φ) es independiente de una coordenada x_i para cierto i entonces $\frac{\partial H}{\partial x_i}(x, p) = 0$. Consideremos el flujo φ_t definido en (a, b) del campo vectorial X_H que en las coordenadas de Darboux se ve como $(x(t), p(t)) = (x_1(t), \ldots, x_n(t), p_1(t), \ldots, p_n(t))$ y por las ecuaciones (2.2) tenemos que $\dot{p}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial x_i}(x(t), y(t)) = 0$. Entonces, tenemos que $\dot{p}_i(t) = 0$ para todo $t \in (a, b)$, por lo que $p_i(t)$ es constante en todo el intervalo (a, b). Entonces hemos encontrado una primera integral del movimiento por el hecho que el hamiltoniano sea constante en cierta coordenada.

2. Forma simpléctica en el haz cotangente

Consideremos M una variedad diferenciable y $(T^*M, \pi, M, \mathbb{R}^n)$ el haz cotangente con base M, fibra $\mathbb{R}^n$ y proyección $\pi : T^*M \longrightarrow M$, $\alpha_p \mapsto p$ para $\alpha_p \in T_p^*M$. Establecemos la proyección $d\pi : T(T^*M) \longrightarrow TM$ como $w_{\alpha_p} \overset{d\pi}{\mapsto} d\pi(w_{\alpha_p})$. Dados $\alpha_p \in T_p^*M$ y $v_{\alpha_p} \in T_{\alpha_p}(T^*M)$ definimos

$$\theta_{\alpha_p}(v_{\alpha_p}) := \alpha_p(d\pi(v_{\alpha_p}))$$

Obtenemos una aplicación diferenciable $\theta : T^*M \longrightarrow T^*(T^*M)$ tal que $\theta_{\alpha_p} \in T^*_{\alpha_p}(T^*M)$, es decir $\theta \in \Gamma(T^*(T^*M))$. Esta 1-forma la llamaremos forma canónica del haz cotangente.

Sea $f : M \longrightarrow N$ una función diferenciable. Dada una 1-forma $\alpha \in \Omega^1(N)$, recordamos el pullback $(f^*\alpha)(v) = \alpha(df(v))$ para todo $v \in T_pM$. Como todas las aplicaciones son diferenciables y $\alpha \circ df : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal para todo $p \in M$, tenemos que el pullback $f^*\alpha$ define una 1-forma diferenciable en M. Dado $f^* : T^*N \longrightarrow T^*M$, tenemos que si $\alpha_{f(p)} \in T^*_{f(p)}N$, entonces tenemos un covector $f^*(\alpha_{f(p)}) \in T_p^*M$, por lo que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} T^*M \arrow[d, "\pi"'] & T^*N \arrow[l, "f^*"'] \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd} .$$

Si $f : M \longrightarrow M$ es un difeomorfismo, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} T^*M \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\pi"'] & T^*M \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "f^{-1}"'] & M \end{tikzcd} . \tag{2.4}$$

Consideremos el difeomorfismo $f : M \longrightarrow M$ y el levantamiento $f^* : T^*M \longrightarrow T^*M$. Dada una 1-forma $\omega \in T^*M$ calculamos $(f^{-1})^* \circ f^*(\omega)$, y obtenemos

$$\begin{aligned} (f^{-1})^* \circ f^*(\omega) &= (f \circ f^{-1})^*\omega \\ &= \mathrm{id}^*\omega \\ &= \omega \end{aligned}$$

De forma análoga se puede probar que $f^* \circ (f^{-1})^* = \mathrm{id}$. De esto concluimos que si $f : M \longrightarrow M$ es un difeomorfismo entonces $f^* : T^*M \longrightarrow T^*M$ es biyectiva con inversa $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$. Dado $f : M \longrightarrow M$ el pullback $f^* : T^*M \longrightarrow T^*M$ induce otro levantamiento $(f^*)^* : T^*(T^*M) \longrightarrow T^*(T^*M)$.

Proposición 2.5. *Sea $f : M \longrightarrow M$ un difeomorfismo. Entonces la transformación $f^* : T^*M \longrightarrow T^*M$ preserva la 1-forma θ, es decir $(f^*)^*\theta = \theta$.*

Demostración. Sea $\alpha_p \in T_p^*M$. Tenemos entonces $\theta_{\alpha_p} \in T^*_{\alpha_p}(T^*M)$ y para $v_{\alpha_p} \in T_{\alpha_p}(T^*M)$

$$\begin{aligned} ((f^*)^*\theta)_{\alpha_p}(v_{\alpha_p}) &= \theta_{f^*(\alpha_p)}(d(f^*)(v_{\alpha_p})) \\ &= (f^*(\alpha_p))(d\pi \circ d(f^*)(v_{\alpha_p})) \\ &= (f^*(\alpha_p))(d(\pi \circ f^*)(v_{\alpha_p})). \end{aligned}$$

Siguiendo el diagrama conmutativo 2.4 tenemos que

$$\begin{aligned}(f^*(\alpha_p))(d(\pi\circ f^*)(v_{\alpha_p})) &= (f^*(\alpha_p))(d(f^{-1}\circ\pi)(v_{\alpha_p}))\\ &= \alpha_p(df(df^{-1}\circ d\pi(v_{\alpha_p}))\\ &= \alpha_p(d\pi(v_{\alpha_p}))\\ &= \theta_{\alpha_p}(v_{\alpha_p}).\end{aligned}$$

Podemos concluir entonces que $(f^*)^*\theta = \theta$. ❑

PROPOSICIÓN 2.6. *Consideremos M una variedad diferenciable y a T^*M con la forma canónica θ. Dada una 1-forma $\beta : M \longrightarrow T^*M$ y el pullback $\beta^* : T^*(T^*M) \longrightarrow T^*M$ se cumple que $\beta^*\theta = \beta$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $v_p \in T_pM$. Calculamos $(\beta^*\theta)_p(v_p)$

$$\begin{aligned}(\beta^*\theta)_p(v_p) &= \theta_\beta(d\beta_p(v_p))\\ &= \beta_p(d\pi(d\beta(v_p)))\\ &= \beta_p(d(\pi\circ\beta)(v_p)).\end{aligned}$$

El siguiente diagrama conmutativo permite verificar que $(\pi\circ\beta)(p) = \mathrm{id}(p)$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "id"'] & T^*M \arrow[d, "\pi"] \\ & M \end{tikzcd} .$$

Entonces

$$\begin{aligned}\beta_p(d(\pi\circ\beta)(v_p)) &= \beta_p(d(\mathrm{id})(v_p))\\ &= \beta_p(v_p).\end{aligned}$$

Podemos concluir entonces que $\beta^*\theta = \beta$. ❑

Consideremos una carta (U,φ) en M con coordenadas $(x_1,\ldots,x_n)$ y la carta (T^*U,φ^*) en T^*M con coordenadas $(x_1,\ldots,x_n,p_1,\ldots,p_n)$. Vamos a calcular la 1-forma canónica $\theta : T^*M \longrightarrow T^*(T^*M)$ en las coordenadas de la carta (T^*U,φ^*) . Sea $\alpha_m \in T^*_mM$ tal que $\pi(\alpha) = m$ y que en coordenadas $(x_1,\ldots,x_n)$ se expresa como $\alpha = \sum_{i=1}^n p_i dx_i$. Consideremos $v \in T_{\alpha_m}(T^*M)$ escrito como $v_{\alpha_m} = \sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial}{\partial x_i} + w_i\frac{\partial}{\partial p_i}$ y como $\pi\circ(\varphi^*)^{-1}(x_1,\ldots,x_n,p_1,\ldots,p_n) =$

$\varphi^{-1}(x_1,\ldots,x_n)$ podemos ver que $d\pi(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial}{\partial x_i}$ y $d\pi(\frac{\partial}{\partial p_i}) = 0$. Calculamos $\theta_{\alpha_m}(v_m)$

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha_m}(v) &= \alpha_m(d\pi(v_{\alpha_m})) \\ &= \alpha_m\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_i v_i. \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde $d\pi(v_{\alpha_m}) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Podemos concluir entonces que en las coordenadas de la carta (T^*U, φ^*) la forma canónica θ está dada por

$$\theta = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n.$$

Definición 2.7. Sea M una variedad diferenciable y (T^*M, θ) el haz cotangente con la 1-forma canónica. Definimos la 2-forma $\omega = -d\theta$.

En la carta (T^*U, φ^*) podemos verificar que la 2-forma ω tiene la forma

$$\begin{aligned} \omega &= -d\theta \\ &= -d\left(\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i\right) \\ &= -\left(\sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dp_i. \end{aligned}$$

Entonces dada una variedad diferenciable M construimos una 1-forma θ en T^*M que da lugar a una 2-forma $\omega = -d\theta$ y que en coordenadas tiene la forma $\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dp_i$. En [**2**] y en [**1**] puede consultarse para verificar que en efecto ω es una 2-forma simpléctica.

2.1. Ecuaciones del movimiento en el haz cotangente. Recordemos que el haz cotangente T^*M proviene de la formulación hamiltoniana de la mecánica, pues es el espacio fase del sistema mecánico en M. En T^*M construimos una 1-forma θ, llamada la forma canónica, de donde se deriva la forma simpléctica ω. Tomemos una carta (T^*U, φ^*) en T^*M con coordenadas $(x_1,\ldots,x_n,p_1,\ldots,p_n)$ de donde sabíamos que la forma simpléctica se ve como

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dp_i.$$

Consideremos un hamiltoniano $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ y X_H el campo vectorial asociado a H mediante la relación $i_{X_H}\omega = dH$. En las coordenadas anteriores, expresamos el campo vectorial X_H y la 1-forma dH como

$$\begin{aligned} X_H &= \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + Y_i \frac{\partial}{\partial p_i}, \\ dH &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i. \end{aligned}$$

En esta misma carta (T^*U, φ^*) vamos a expresar la igualdad $i_{X_H}\omega = dH$ desarrollando cada lado de la igualdad. Primero, calculamos $i_{X_H}\omega$:

$$i_{X_H}\omega = \sum_{i=1} X_i dp_i - Y_i dx_i.$$

Entonces, para que la igualdad $i_{X_H}\omega = dH$ sea válida, se tienen que satisfacer este sistema de ecuaciones para todo punto T^*U

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x_i} &= -Y_i \\ , \frac{\partial H}{\partial p_i} &= X_i. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Análogamente a la sección anterior, vamos a calcular las ecuaciones diferenciales que determinan el flujo del campo vectorial X_H. Ahora sea el sistema hamiltoniano (M, ω, H) donde X_H el campo vectorial asociado a H con flujo $\psi : I_{\alpha_m} \times D_{\alpha_m} \longrightarrow T^*M$,con I_{α_m} abierto en $\mathbb{R}$. Consideremos una carta (T^*U, φ^*) en T^*M y bajo esta carta $\varphi^*(\psi(t)) = (x_1(t), \ldots, x_n(t), p_1(t), \ldots, p_n(t))$. Considerando que $\psi(t) = (\varphi^*)^{-1}(x(t), p(t))$ con $(x(t), p(t)) = (x_1(t), \ldots, x_n(t), p_1(t), \ldots, p_n(t))$ entonces a lo largo del flujo ψ el campo vectorial X_H está dado por

$$X_H((\varphi^*)^{-1}(x(t), p(t))) = \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{x}_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \dot{p}_i(t) \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

Usando el sistema de ecuaciones (2.6) tenemos que se cumplen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(x(t), p(t)), \\ \dot{p}_i(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}(x(t), p(t)). \end{aligned}$$

Como en la sección anterior el flujo de X_H está determinado por las ecuaciones de Hamilton.La formulación física de las ecuaciones de Hamilton que se basa en el principio de la mínima acción puede encontrarse en [**5**]. Para profundizar mas en la cuestión simpléctica del formalismo hamiltoniano revisar [**1**, **10**, **11**].

Capítulo 3

Sistemas mecánicos con simetría

En el estudio de un sistema mecánico con hamiltoniano H, una de las propiedades que pueden resultar de mucha utilidad es la simetría del sistema. Por simetría nos referimos a que bajo una cierta "transformación del sistema", el hamiltoniano H se preserva. Ahora, sabemos que una variedad simpléctica (M, ω) puede ser usada como un espacio fase de un sistema con hamiltoniano $H \in C^k(M)$ y el concepto de transformación puede ser formalizado con la acción de un grupo de Lie sobre M.

1. Acción de un grupo de Lie sobre una variedad simpléctica

DEFINICIÓN 3.1. Sea M una variedad diferenciable y G un grupo de Lie. Una acción por la izquierda de G en M es una transformación $G \times M \longrightarrow M$, $(g, p) \mapsto gp$ diferenciable que cumple las siguiente propiedades

1. Para todo $p \in M$, $ep = p$, donde e es el neutro de G.
2. Para todo $h, g \in G$ y todo $p \in M$, $g(hp) = (gh)p$

Observemos que en la definición anterior, el grupo de Lie esta actuando por la izquierda sobre la variedad M, pero de igual forma se puede definir una acción derecha de G en M teniendo especial cuidado en como se define cada una de las acciones. Para $g \in G$ definimos la traslación izquierda $L_g : M \longrightarrow M$ cuando G actúa por la izquierda en M y cuando actúa por la derecha sobre M definimos la traslación por la derecha como $R_g : M \longrightarrow M$ $p \mapsto pg$. Para la siguiente definición necesitamos el mapa exponencial en un grupo de Lie que puede ser consultado en la sección 4 del apéndice y también puede consultarse la definición del operador adjunto de un grupo de Lie.

DEFINICIÓN 3.2. Sea $G \times M \longrightarrow M$ una acción de un grupo de Lie G en M. Dado un vector tangente $\xi \in \mathfrak{g} = T_eG$, definimos el campo vectorial en M infinitamente generado por ξ, el cual denotaremos por X_ξ como

$$X_\xi(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_{\exp(t\xi)}(p).$$

TEOREMA 3.3. *Sea* Ad : $G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *el operador adjunto en* G. *Entonces para cada* $g \in G$ *y* $\xi \in \mathfrak{g}$ *tenemos que* $X_{\mathrm{Ad}_g \xi} = dL_g(X_\xi)$.

DEMOSTRACIÓN. Solo debemos de manipular la definición de $X_{\mathrm{Ad}_g\xi}(p)$ para $p \in M$ y así obtener

$$\begin{aligned} X_{\mathrm{Ad}_g\xi}(p) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_{\exp(tAd_g\xi)}p \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L_g \exp(t\xi) L_{g^{-1}}p \\ &= (dL_g)\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\xi)\right)(L_{g^{-1}}(p)) \\ &= (dL_g)(X_\xi(g^{-1}p)). \end{aligned}$$

Concluimos entonces que $X_{\mathrm{Ad}_g\xi} = dL_g(X_\xi)$. ❑

TEOREMA 3.4. *Sean* η *y* ξ *vectores en* $\mathfrak{g}$ *de un grupo de Lie* G *que actúa en* M. *Entonces* $X_{[\xi,\eta]} = -[X_\xi, X_\eta]$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración se basa en el teorema anterior. Consideremos el flujo en G dado por $\exp(t\eta)$. Por el teorema anterior, tenemos que $X_{\mathrm{Ad}_{\exp(t\eta)}\xi} = dL_{\exp(t\eta)}(X_\xi)$. Derivamos ambos miembros de la igualdad anterior en $t = 0$ para obtener del lado derecho de la igualdad $\frac{d}{dt}|_{t=0} L^*_{\exp(t\eta)} X_\xi = -[X_\eta, X_\xi]$. Del otro lado de la ecuación, si consideramos el hecho que $\frac{d}{dt}|_{t=0}\mathrm{Ad}_{\exp(t\eta)}\xi = [\eta, \xi]$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(dL_{\exp(t\eta)}(X_\xi)\right)(p) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} X_{\mathrm{Ad}_{\exp(t\eta)}\xi}(p) \\ &= X_{[\eta,\xi]} \end{aligned}$$

de donde podemos concluir que $X_{[\xi,\eta]} = -[X_\xi, X_\eta]$. ❑

DEFINICIÓN 3.5. Sea (M, ω) una variedad simpléctica y G un grupo de Lie que actua en M. Decimos que la acción es simpléctica si para todo $g \in G$ se cumple $L_g^*\omega = \omega$.

La idea que debemos de entender detrás de esta definición es de preservar la forma simpléctica a lo largo de la órbita de cada uno de los puntos de M. Entonces lo que nos interesa es saber cuando una acción de un grupo de Lie deja invariante la forma simpléctica a lo largo de las órbitas en M.

Como ejemplo, consideremos la esfera $\mathbb{S}^2$ encajada en $\mathbb{R}^3$ con la forma simpléctica ω definida como la forma de volumen $\omega_p(u, v) = \det(p, u, v)$ donde $p \in \mathbb{S}^2$ y $u, v \in T_p\mathbb{S}^2$.

Vamos a verificar que dado $A \in SO(3)$ y la acción $L_A : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$, la forma simpléctica ω se preserva en las órbitas de A, es decir $L_A^*\omega = \omega$. Para esto, debemos considerar que $\det(p,u,v) = \langle p, u \times v\rangle$, que $dL_A = A$ y que $SO(3)$ es un grupo de isometrías, es decir $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$ para $u, v \in \mathbb{R}^3$. Entonces dados $u, v \in T_p\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ tenemos que

$$\begin{aligned}
(L_A^*\omega)_p(u,v) &= \omega_{Ap}((dL_A)_p(u), (dL_A)_p(v)) \\
&= \omega_{Ap}(Au, Av) \\
&= \langle Ap, Au \times Av\rangle \\
&= \langle Ap, A(u \times v)\rangle \\
&= \langle p, u \times v\rangle \\
&= \omega_p(u,v).
\end{aligned}$$

Entonces concluimos que para cualquier matriz $A \in SO(3)$ se cumple $L_A^*\omega = \omega$ y por lo tanto $SO(3) \times \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ es una acción simpléctica. En [**1**] [**11**] pueden encontrarse diferentes ejemplos y en particular la acción de $\mathbb{S}^2$ sobre la esfera.

2. Mapeo momento de sistemas con simetría

Los sistemas mecánicos con simetría resultaron de gran importancia debido a las propiedades conservativas que tienen. Un objeto de gran importancia en el estudio de los sistemas mecánicos con simetrías es el mapeo momento. La palabra mapeo se refiere a que hay una correspondencia entre dos objetos y momento tiene origen en el momento (angular) utilizada en la mecánica clásica. Siendo así, el mapeo momento es un intento de generalizar en una variedad simpléctica el momento angular, y la utilidad de que la variedad sea simpléctica es que podemos formular las ecuaciones de Hamilton del movimiento.

Definición 3.6. Consideremos (M, ω) una variedad simpléctica en donde actúa un grupo de Lie G de forma simpléctica. Un mapeo momento J es una transformación $J : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ tal que para $\xi \in \mathfrak{g}$ la función $J_\xi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida con la igualdad

$$dJ_\xi = i_{X_\xi}\omega$$

donde $J_\xi(p) = J(p)(\xi)$.

Consideremos la igualdad $dJ_\xi = i_{X_\xi}\omega$. Como X_{J_ξ} es el campo vectorial asociado a J_ξ, por definición cumple con la igualdad $dJ_\xi = i_{X_{J_\xi}}\omega$. Usando la primera igualdad tenemos que $i_{X_\xi}\omega = (dJ_\xi)_p = i_{X_{J_\xi}}\omega$. Entonces como ω es no degenerada, podemos concluir que $X_{J_\xi} = X_\xi$. Es decir, si J es un mapeo momento, entonces para cada $\xi \in \mathfrak{g}$ se tiene que X_ξ es el campo vectorial hamiltoniano asociado a la función J_ξ. Ahora, supongamos que tenemos $J : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ tal que para cada $\tau \in \mathfrak{g}$ se cumple $X_{J_\tau} = X_\tau$. El campo vectorial hamiltoniano X_{J_τ} cumple la igualdad $dJ_\tau = i_{X_{J_\tau}}\omega$ por definición de campo vectorial asociado y entonces $dJ_\tau = i_{X_\tau}\omega$. Es decir, J es un mapeo momento.

Definición 3.7. Sea un sistema hamiltoniano (M, ω, H) y una acción $G \times M \longrightarrow M$ de un grupo de Lie G. Decimos que el Hamiltoniano $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es simétrico si para todo $g \in G$ se cumple $L_g^* H = H$.

Teorema 3.8. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica donde actúa un grupo de Lie G de forma simpléctica. Supongamos que H es simétrico respecto a la acción de G. Para cada $\xi \in \mathfrak{g}$ la función $J_\xi \in C^\infty(M)$ es una primera integral del campo vectorial asociado a H.*

Demostración. Denotemos por $\varphi_t : I \times D \longrightarrow M$ el flujo de X_H donde X_H es el campo vectorial asociado a H. Evaluamos el mapeo momento J en la trayectoria φ_t y veremos que es constante: elegimos un vector ξ en $\mathfrak{g}$ y calculamos $\frac{d}{dt}(J_\xi \circ \varphi_t)(p)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(J_\xi \circ \varphi_t)(p) &= dJ_\xi(X_H(p)) \\
&= (i_{X_\xi}\omega)(X_H(p)) \\
&= \omega(X_\xi(p), X_H(p)).
\end{aligned}
$$

Ahora, de la última igualdad podemos ver que $\omega_p(X_\xi(p), X_H(p)) = dH(X_\xi(p))$ pero, $dH(X_\xi(p)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} H(\exp(t\xi)p)$, pero como H es invariante bajo la acción de G en (M, ω) podemos concluir que $\frac{d}{dt}|_{t=0} H(\exp(t\xi)p) = 0$. De esta forma llegamos a que $\frac{d}{dt}(J_\xi \circ \varphi_t)(p) = 0$ ◻

Consideremos el mapeo momento $J : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ de una acción simpléctica de G en (M, ω). Consideremos dos vectores tangentes ξ, $\tau \in \mathfrak{g}$ y tomemos las funciones J_ξ y J_τ. Vamos a calcular $d(J_{[\xi,\tau]})$ y ver que relación tienen con J_ξ y J_τ. Primero tenemos

$$
\begin{aligned}
d(J_{[\tau,\xi]}) &= i_{X_{[\tau,\xi]}}\omega \\
&= i_{[X_\xi, X_\tau]}\omega \\
&= L_{X_\xi}(i_{X_\tau}\omega) - i_{X_\tau}(L_{X_\xi}, \omega)
\end{aligned}
$$

donde la última igualdad viene le hecho que para $i_{[X,Y]}\alpha = L_X(i_Y\alpha) - i_Y(L_X\alpha)$ (ver la ecuación (2) en la sección 3 del apéndice). Como la acción de G en (M, ω) es simpléctica, quiere decir que ω es invariante, por lo que $L_{X_\xi}\omega = 0$. Tenemos entonces que $d(J_{[\xi,\tau]}) =$

$L_{X_\xi} i_{X_\tau}\omega$. Por definición de mapeo momento, $i_{X_\tau}\omega = dJ_\tau$, de donde obtenemos que

$$\begin{aligned} dJ_{[\tau,\xi]} &= L_{X_\xi} dJ_\tau \\ &= d(L_{X_\xi} J_\tau) \\ &= d(dJ_\tau(X_\xi)) \\ &= d(\omega(X_\tau, X_\xi)) \end{aligned}$$

Recordemos la definición el corchete de Poisson de funciones diferenciables en (M,ω) dada por $\{f,g\} := \omega(X_f, X_g)$ con f, g funciones diferenciables y X_f, X_g campos vectoriales asociados en M(ver sección 5 del apéndice). Considerando que $\{J_\tau, J_\xi\} = \omega(X_{J_\tau}, X_{J_\xi})$ y por las ecuaciones (3.1) y (3.1) se tiene que la igualdad $dJ_{[\xi,\tau]} = d\{J_\xi, J_\tau\}$. Esta relación implica que $\{J_\xi, J_\tau\}$ y $J_{[\xi,\tau]}$ son funciones diferenciable en M difieren de una constante. Cabe preguntarnos entonces, ¿Bajo que condiciones esta constante es cero?

Definición 3.9. Sea (M,ω) con acción simpléctica de G y con mapeo momento J. Decimos que J es Ad-equivariante si el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "L_g"] \arrow[d, "J"'] & M \arrow[d, "J"] \\ \mathfrak{g}^* \arrow[r, "Ad^*_{g^{-1}}"'] & \mathfrak{g}^* \end{tikzcd} .$$

Esto significa que para todo $g \in G$ tenemos $J(L_g p) = Ad^*_{g^{-1}}(J(p))$. Podemos decir que la equivarianza mide la compatibilidad de simetría del mapeo momento $J : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ del sistema.

Teorema 3.10. *Sea G un grupo de Lie que actúa en (M,ω) de forma simpléctica y $J : M \longrightarrow \mathfrak{g}$ un mapeo momento que es* Ad-*equivariante. Entonces para cualesquiera $\xi, \tau \in \mathfrak{g}$ se cumple $J_{[\xi,\tau]} = \{J_\xi, J_\tau\}$.*

Demostración. Consideremos el mapeo momento $J : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ que por definición para $p \in M$ y $\xi \in \mathfrak{g}$, $J_\xi(p) = J(p)(\xi)$. Consideremos $v_p \in T_pM$ y una curva $v : (a,b) \longrightarrow M$, tal que $v(0) = p$ y $\frac{d}{dt}|_{t=0} v(t) = v_p$. Tenemos que

$$\begin{aligned} (dJ_\xi)(v_p) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} J_\xi(v(t)) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} J(v(t))(\xi) \\ &= (dJ(v_p))(\xi). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ahora, consideremos un vector η en $\mathfrak{g}$ y calculamos en $p \in M$ el corchete de Poisson de J_ξ y J_η usando la ecuación (3.1) se tiene:

$$\begin{aligned} \{J_\xi, J_\eta\}(p) &= \omega(X_{J_\xi}(p), X_{J_\eta}(p)) \\ &= (dJ_\xi)_p(X_\eta(p)) \\ &= (dJ(X_\eta(p)))(\xi). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Por otro lado, sabemos $[\xi, \eta] = \mathrm{ad}_\xi(\eta)$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} J_{[\xi,\eta]}(p) &= J(p)([\xi, \eta]) \\ &= J(p)((\mathrm{ad}_\xi(\eta)) \\ &= (\mathrm{ad}_\xi^* J(p))(\eta). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Consideremos el flujo de X_ξ dado por $\varphi_\xi(t) = \exp(t\xi)$. Como el mapeo momento es Ad equivariante, entonces $\mathrm{Ad}^*_{\exp(-t\xi)} J(p) = J(\exp(t\xi)p)$. Calculamos la derivada en $t = 0$ y obtenemos $dJ(X_\xi(p)) = -\mathrm{ad}_\xi^* J(p)$. Esto implica que para cualquier η en $\mathfrak{g}$, tenemos que $(dJ(X_\xi(p)))(\eta) = (-\mathrm{ad}_\xi^* J(p))(\eta)$ que implica por las ecuaciones (3.2) y (3.3) que para todo $p \in M$, $\{J_\xi, J_\eta\}(p) = J_{[\xi,\eta]}(p)$. ❑

3. Mapeo momento canónico en el haz cotangente

En una variedad simpléctica definimos una acción de un grupo de Lie, por ejemplo la acción de $SO(3)$ sobre la esfera $\mathbb{S}^2$ con la forma simpléctica ω dada por la forma de volumen. En general, dada una variedad diferenciable M, sabemos que el haz cotagente T^*M tiene una estructura simpléctica dada por la 2-forma $\omega = -d\theta$. Entonces si un grupo de Lie G actua en M ¿será posible levantar la acción de G en M a una acción de G en T^*M?, mas aún, ¿Será esta acción una acción simpléctica?. Consideremos la acción $G \times M \longrightarrow M$, $(g, p) \mapsto gp$. Primero vamos a definir la acción $G \times T^*M \longrightarrow T^*M$ como $\tilde{L}_g\alpha_p = L_g^*\alpha_p$ que es la forma más natural de definir. Vamos a verificar que en efecto es una acción:

1. Tomamos e es el elemento neutro y para $\alpha \in T^*M$, $\tilde{L}_e\alpha = L_e^*\alpha = \alpha$.
2. Para $g, h \in G$ calculamos

$$\begin{aligned} \tilde{L}_g(\tilde{L}_h\alpha) &= L_g^*(L_h^*\alpha) \\ &= (L_h \circ L_g)^*\alpha \\ &= \tilde{L}_{hg}\alpha. \end{aligned}$$

Usando las conclusiones 1 y 2 podemos ver que la acción $G \times T^*M \longrightarrow T^*M$ dada por $\tilde{L}_g(\alpha) := L_g^*\alpha$ es una acción por la derecha. Ahora, definimos la acción izquierda $\tilde{L}_g\alpha = L_{g^{-1}}^*\alpha$. Entonces para $g, h \in G$ tenemos

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_g \circ \tilde{L}_h\alpha &= L_{g^{-1}}^*(L_{h^{-1}}^*\alpha) \\
&= (L_{h^{-1}} \circ L_{g^{-1}})^*\alpha \\
&= L_{(gh)^{-1}}^*\alpha \\
&= \tilde{L}_{gh}\alpha.
\end{aligned}$$

En T^*M tenemos la 1-forma canónica θ (definida en el capítulo 2) que da lugar a la forma simpléctica ω. La transformación L_g es un difeomorfismo en M. Siguiendo la proposición 2.4, podemos concluir que $\tilde{L}_g$ preserva θ para todo $g \in G$, es decir, $\tilde{L}_g^*\theta = \theta$. Como $\omega = -d\theta$ y el pullback conmuta con el diferencial tenemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_g^*\omega &= \tilde{L}_g^*(-d\theta) \\
&= -d(\tilde{L}_g^*\theta) \\
&= -d\theta \\
&= \omega.
\end{aligned}$$

Supongamos que (M, ω) es una variedad simpléctica donde actúa un grupo de Lie G de forma que $\omega = -d\theta$ donde θ es la 1-forma θ es invariante bajo la acción de G. Definimos el mapa $J : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ como $J(p)(\tau) = \theta(X_\tau(p))$ con $\tau \in \mathfrak{g}$. Vamos a verificar que este mapa es en efecto un mapeo momento: para cualquier τ en $\mathfrak{g}$ definimos $J_\tau(p) = J(p)(\tau)$ y calculamos dJ_τ usando la fórmula de Cartan C14

$$\begin{aligned}
dJ_\tau &= d(i_{X_\tau}\theta) \\
&= L_{X_\tau}\theta - i_{X_\tau}d\theta \\
&= -i_{X_\tau}(d\theta) \\
&= i_{X_\tau}\omega,
\end{aligned}$$

Entonces J es un mapeo momento de la acción definida.

TEOREMA 3.11. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica donde $\omega = -d\theta$ y donde actúa un grupo de Lie G que preserva la foma θ. Entonces el mapa $J : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ definido como $J(p)(\tau) = i_{X_\tau}\theta(p)$ es un mapeo momento.*

Estamos interesados en el estudio del mapeo momento sobre el haz cotangente de una variedad diferenciable. Usamos la construcción anterior para dar un mapeo momento a la variedad (T^*M,ω). Entonces, el mapeo momento de la acción de G en (T^*M,ω) está definido como $J(\alpha)(v) = (i_{X_v}\theta)(\alpha)$. El siguiente teorema permite saber explícitamente como es el mapeo momento de una acción de un grupo de Lie G en (T^*M,ω).

TEOREMA 3.12. *Sea $G\times M \longrightarrow M$ y consideremos (T^*M,ω), donde $\omega = -d\theta$ y $\theta : T^*M \longrightarrow T^*(T^*M)$ es la 1-forma canónica. Entonces, dado $\xi\in\mathfrak{g}$ y $\tilde{X}_\xi$, el campo vectorial generado por ξ en M y $\alpha_p \in T^*_pM$ se cumple la igualdad $J(\alpha_p)(\xi) = \alpha_p(\tilde{X}_\xi(p))$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el haz cotangente (T^*M,π,M). Sea X_ξ el campo vectorial generado por $\xi\in\mathfrak{g}$ en T^*M por la acción $\tilde{L}_g$. Por la proposición 3.10, tenemos que $J : T^*M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, $J(\alpha_p)(\xi) := (i_{X_\xi}\theta)(\alpha_p)$ es un mapeo momento y por definición de θ, $\theta_{\alpha_p}(X_\xi(\alpha_p)) = \alpha_p(d\pi(X_\xi(\alpha_p)))$. Dada la acción por la izquierda $\tilde{L}_{\exp(t\xi)} : T^*M \longrightarrow T^*M$, tenemos que X_ξ está dado por

$$X_\xi(\alpha_p) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\tilde{L}_{\exp(t\xi)}\alpha_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}L^*_{\exp(-t\xi)}\alpha_p.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned}\theta_{\alpha_p}(X_\xi(\alpha_p)) &= \alpha_p(d\pi(X_\xi(\alpha_p)))\\ &= \alpha_p\left(d\pi\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}L^*_{\exp(-t\xi)}\alpha_p\right)\right)\\ &= \alpha_p\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\pi\left(L^*_{\exp(-t\xi)}\alpha_p\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} T^*M & \xrightarrow{L^*_{\exp(-t\xi)}} & T^*M \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi \\ M & \xrightarrow[L_{\exp(t\xi)}]{} & M \end{array}.$$

Siguiendo este diagrama, podemos verificar que $\pi(L^*_{\exp(-t\xi)}\alpha_p) = \exp(t\xi)p$ y entonces

$$\begin{aligned}\theta_{\alpha_p}(X_\xi(\alpha_p)) &= \alpha_p\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\pi\left(L^*_{\exp(-t\xi)}\alpha_p\right)\right)\\ &= \alpha_p\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp(t\xi)p\right)\\ &= \alpha(\tilde{X}_\xi(p)).\end{aligned} \tag{3.4}$$

❑

Capítulo 4

Mapeo momento de algunos sistemas mecánicos

1. Momento angular en la mecánica de Newton

Consideremos un sistema $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ y que tiene un potencia central $U : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ que es radial, es decir $U(x,y,z) = \tilde{U}(R)$, donde $R := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, y $\tilde{U}$ es una función real diferenciable. Por ejemplo, podemos considerar el potencial gravitatorio $\tilde{U} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ de un sistema con masa m puntual centrada en $(0,0,0)$ definido como $\tilde{U}(R) = -\frac{Gm}{R}$ donde G es la constante de gravitación. Sabemos que la fuerza en cada punto de $\mathbb{R}^3$ es $F(x,y,z) = \nabla U(x,y,z)$, de donde obtenemos que

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z) &= -\tilde{U}'(R)\left(\frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}\right) \\
&= -\tilde{U}'(R)\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
&= -\tilde{U}'(R)\frac{(x,y,z)}{R}.
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

Consideremos una partícula con masa m que se mueve a lo largo una curva $r : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces la velocidad en cada instante esta dada por $\dot{r}(t)$. En cada punto de la curva r, definimos el momento angular $M(t)$ en $r(t)$ como el vector ortogonal a $r(t)$ y al vector $m\dot{r}(t)$ que estÃ¡ dado por el producto cruz

$$M(t) := m\dot{r}(t) \times r(t).$$

Calcularemos como es la derivada respecto del tiempo del momento angular, tomando en consideración que $F(r(t)) = m\ddot{r}(t)$, usando la ecuación (4.1) y el hecho que para todo $v \in \mathbb{R}^3$ se cumple que $v \times v = 0$,

$$
\begin{aligned}
\frac{dM}{dt}(t) &= m\dot{r}(t) \times \dot{r}(t) + m\ddot{r}(t) \times r(t) \\
&= F(r(t)) \times r(t) \\
&= -\frac{U'(R(t))}{R(t)} r(t) \times r(t) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

donde $R(t) := \|r(t)\|$. Concluimos que la derivada del momento angular es cero, que es equivalente a decir que se conserva a lo largo de la trayectoria r (para ver con detalle la teoría del momento angular revisar [**5**]).

Consideremos el espacio euclidiano $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ donde actúan las rotaciones de $SO(3)$. Como vimos en el capítulo anterior, una acción en una variedad induce una acción en el haz cotangente de la variedad, entonces inducimos la acción de $SO(3)$ en $T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})$ mediante $\tilde{L}_A(p_r) = L^*_{A^{-1}}(p_r)$, donde $p_r \in T^*_r(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})$ en la fibra de $r \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Dotemos al haz cotangente $T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})$ con coordenadas (x, y, z, p_1, p_2, p_3), y dado $p \in T^*\mathbb{R}^3$ en estas coordenadas se expresa como $p = p_1dx + p_2dy + p_3dz$. Consideremos θ la 1-forma canónica en $T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})$, entonces podemos ver que por (2.5) del capítulo 2 se tiene que $\theta(p) = p_1dx + p_2dy + p_3dz$. Usamos los teoremas (3.11),(3.12) y la ecuación (eq3.4) del capítulo anterior para construir un mapeo momento: primero, dado $\xi \in \mathfrak{so}(3)$, tenemos que el campo vectorial generado por ξ, $X_\xi(p_r) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\tilde{L}_{\exp(t\xi)}p_r$ en $T^*(T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0\})))$ y el campo vectorial generado por ξ en $\mathbb{R}^3$ por $\tilde{X}_\xi(r) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\exp(t\xi)r = \xi \cdot d$ que es el producto de la matriz ξ en $\mathfrak{so}(3)$ por el vector $r \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ y usando el teorema del capítulo 2, tenemos que $J(p_r)(\xi) = p_r(\tilde{X}_\xi(r))$. Obtenemos la igualdad

$$J(p_r)(\xi) = p_r(\xi \cdot r).$$

Del párrafo anterior, podemos asegurar que para $p_r \in T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})$ la función $J(p_r) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal. Siendo lineal, para calcular el mapeo momento $J : T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}) \longrightarrow \mathfrak{so}(3)^*$ solo debemos de saber cual es el valor en la base de $\mathfrak{so}(3)$. Consideremos las matrices de la base de $\mathfrak{so}(3)$ dadas por (ver [**8**])

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Dado $p_r \in T^*_r(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})$, debemos calcular por separado cada función $J(p_r)(X_1)$, $J(p_r)(X_2)$ y $J(p_r)(X_3)$. Para esto, solo debemos saber como se ven los campos vectoriales $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3$. Dado p_r con $r = (r_1, r_2, r_3)$, tenemos en la base $\frac{\partial}{\partial x}(r), \frac{\partial}{\partial y}(r), \frac{\partial}{\partial z}(r)$ de $T_r(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})$

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_1(r) &= X_1 \cdot r = -r_2\frac{\partial}{\partial x}(r) + r_1\frac{\partial}{\partial y}(r), \\
\tilde{X}_2(r) &= X_2 \cdot r = r_3\frac{\partial}{\partial x}(r) - r_1\frac{\partial}{\partial z}(r), \\
\tilde{X}_3(r) &= X_3 \cdot r = -r_3\frac{\partial}{\partial y}(r) + r_2\frac{\partial}{\partial x}(r).
\end{aligned}$$

Ya que tenemos los campos vectoriales expresados en la base de $T_r(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})$ y usando la expresión de p_r en las coordenadas de $T^*(\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\})$, dada por $p_r = p_1dx+p_2dy+p_3dz$, tenemos que

$$\begin{aligned} J(p_r)(X_1) &= p_r(\tilde{X}_1(r)) \\ &= p_1dx + p_2dy + p_3dz \left(-r_2\frac{\partial}{\partial x}(r) + r_1\frac{\partial}{\partial y}(r)\right) \\ &= -p_1r_2 + p_2r_1, \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} J(p_r)(X_2) &= p_r(\tilde{X}_2(r)) \\ &= p_1dx + p_2dy + p_3dz \left(r_3\frac{\partial}{\partial x}(r) - r_2\frac{\partial}{\partial z}(r)\right) \\ &= p_1r_3 - p_3r_1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} J(p_r)(X_3) &= p_r(\tilde{X}_3(r)) \\ &= p_1dx + p_2dy + pi_3dz \left(-r_3\frac{\partial}{\partial y}(r) + r_2\frac{\partial}{\partial x}(r)\right) \\ &= -r_3p_2 + p_3r_2. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Consideremos un sistema cerrado y conservativo que tiene potencial $U : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, que es radial $U((x,y,z)) = \tilde{U}(R)$ y que tiene el lagrangiano $L : T\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $L(r,v) := \frac{m}{2}\|v\|^2 - \tilde{U}(r)$. Como el potencial U solo depende de la posición, entonces podemos asegurar que L es estrictamente convexo por lo que podemos calcular el hamiltoniano H. Tenemos que $p(v) = \frac{\partial L}{\partial v}(r,v) = mv$ y por lo tanto, podemos ver que $v(p) = \left(\frac{\partial L}{\partial v}(r,v)\right)^{-1}(r,v) = \frac{p}{m}$. Denotamos $R = \|r\|$ y tenemos entonces que

$$\begin{aligned} H(r,p) &= \langle p, v(p)\rangle - L(r, v(p)) \\ &= \left\langle p, \frac{p}{m}\right\rangle - \frac{m}{2}\|\frac{p}{m}\|^2 + \tilde{U}(R) \\ &= \frac{1}{2m}\|p\|^2 + \tilde{U}(R). \end{aligned}$$

Como la acción de $SO(3)$ en $\mathbb{R}^3$ con la norma euclidiana es una acción isométrica, entonces podemos garantizar que H se preserva bajo rotaciones de $SO(3)$. Ahora, por el teorema 3.8 del capítulo anterior, tenemos que para los vectores X_1, X_2, X_3 en $\mathfrak{so}(3)$, las funciones $J_{X_i} : T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $i = 1,2,3$ son primeras integrales para este hamiltoniano.

Si combinamos estas tres primeras integrales en un vector

$$\vec{J}(p_r) = (J(p_r)(X_3), J(p_r)(X_2), J(p_r)(X_1))$$

donde $p_r = p_1 dx + p_2 dy + p_3 dz$, y usando las igualdades (4.3), (4.4) y (4.5) calculadas anteriormente, tenemos que

$$\vec{J}(p_r) = (r_2 p_3 - r_3 p_2, r_3 p_1 - r_1 p_2, r_1 p_2 - r_2 p_1) = r \times p.$$

De esto concluimos que el mapeo momento $J : T^*\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathfrak{so}(3)^*$ de la acción de $SO(3)$ en $T^*\mathbb{R}^3$ inducida de la acción sobre $\mathbb{R}^3$ da origen al vector $\vec{J} = r \times p$ que es el momento angular clásico que presentamos al principio de este capítulo. Sea $(r(t), \dot{r}(t))$ una solución de las ecuaciones de Lagrange, o equivalentemente si la curva $(r(t), p(t))$ es una solución a las ecuaciones de Hamilton, donde $p(t) := m\dot{r}(t)$ por definición, entonces $J(r(t), p(t)) : \mathfrak{so}(3) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es constante pues $J_{X_i} : T^*\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ con $i = 1, 2, 3$ son primeras integrales. Entonces $J(r(t), p(t)) = r(t) \times p(t)$ es constante. Si definimos $M(t) := \vec{J}(r(t), p(t))$ obtenemos el momento angular de la mecánica de Newton para el sistema con potencial $U(R)$.

2. Momento angular sobre la 2-esfera

Recordemos la esfera $\mathbb{S}^2$ y la carta de coordenadas polares (U, ψ), donde $\psi^{-1}(\vartheta, \varphi) = (\cos\vartheta\cos\varphi, \operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi)$ y $U = \psi^{-1}((-\pi + \vartheta_0, \pi + \vartheta_0) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. En estas coordenadas, la métrica g en $\mathbb{S}^2$ inducida del producto interno en $\mathbb{R}^3$ esta dada por $g = \cos^2\varphi d\vartheta^2 + d\varphi^2$. Vamos a estudiar la acción del grupo $SO(3)$ sobre el haz cotangente $T^*\mathbb{S}^2$. Consideremos un sistema cerrado y conservativo en $\mathbb{S}^2$ con lagrangiano $L : T^*\mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $L(v_p) = \frac{m}{2} g(v_p, v_p)$. Si expresamos v_p en las coordenadas (ϑ, φ) como $v_p = v_1 \frac{\partial}{\partial\vartheta}|_p + v_2 \frac{\partial}{\partial\varphi}|_p$, entonces

$$L(v_p) = \frac{m}{2}(\cos^2\varphi v_1^2 + v_2^2).$$

Consideremos una curva $(a, b) \longrightarrow \psi(U)$, $t \mapsto (\vartheta(t), \varphi(t))$ que define una curva en $\mathbb{S}^2$ dada por $r(t) = \psi^{-1}(\vartheta(t), \varphi(t))$. En cada t, la curva $r(t)$ tiene como vector tangente $\dot{r}(t) = \dot{\theta}(t)\frac{\partial}{\partial\theta} + \dot{\varphi}(t)\frac{\partial}{\partial\psi}$. En estas coordenadas tenemos $L(\dot{r}(t)) = \frac{m}{2}\dot{\theta}^2\cos^2\varphi + \dot{\varphi}^2$ y según la ecuación (1.22) del capítulo 1, el hamiltoniano dado por la transformada de Legendre en estas mismas coordenadas está dado por

$$\tilde{H}(\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi) = \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi} p_\vartheta^2 + p_\varphi^2\right)$$

Recordemos las ecuaciones de Hamilton en la esfera para obtener las ecuaciones de Hamilton a lo largo de una curva en el haz cotangente de $\mathbb{S}^2$. Las ecuaciones están dadas por

$$\begin{aligned}
\dot{\vartheta}(t) &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_\vartheta}(\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t)) = \frac{p_\vartheta(t)}{m\cos^2\varphi(t)} \\
\dot{\varphi}(t) &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_\varphi}(\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t)) = \frac{1}{m} p_\varphi(t) \\
\dot{p}_\vartheta(t) &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \vartheta}(\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t)) = 0 \\
\dot{p}_\varphi(t) &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \varphi}(\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t)) = -\frac{\tan\varphi(t)}{m\cos^2\varphi(t)} p_\vartheta(t)^2.
\end{aligned}$$

Adaptamos el teorema 3.12 al estudio del sistema en $(T^*\mathbb{S}^2, \omega)$ donde $\omega = -d\theta$ y θ es la 1-forma canónica. El teorema 3.12 lo usaremos para construir un mapeo momento en este haz, sabiendo que $\omega = -d\theta$. Siguiendo este teorema, podemos definir el mapeo momento J en $p_x \in T_x^*\mathbb{S}^2$ y $\xi \in \mathfrak{so}(3)$ como $J(p_x)(\xi) = i_{X_\xi}\theta_{p_x}$. Calcularemos entonces J:

$$\begin{aligned}
J(p_x)(\xi) &= \theta_{p_x}(X_\xi(p_x)) \\
&= p_x(d\pi(X_\xi(p_x))) \\
&= p_x\left(d\pi\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tilde{L}_{\exp(t\xi)} p_x\right)\right) \\
&= p_x\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi(\tilde{L}_{\exp(t\xi)} p_x)\right) \\
&= p_x\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\xi)x\right).
\end{aligned}$$

Denotamos como $\tilde{X}_\xi(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\exp(t\xi)x$. Ahora, para $t \in \mathbb{R}$ tenemos que $\exp(t\xi) \in SO(3)$, por lo que $\tilde{X}_\xi(x) = \xi \cdot x$. Entonces, podemos concluir que $J(p_x)(\xi) = p_x(\xi \cdot x)$.

Consideremos el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ con la base X_1, X_2, X_3 dada anteriormente por 4.2. Dado un vector η en $\mathfrak{so}(3)$ expresado como $\eta = \eta_1 X_1 + \eta_2 X_2 + \eta_3 X_3$ podemos ver que es suficiente con calcular las funciones J_{X_1}, J_{X_2} y J_{X_3} para poder determinar el mapeo momento. Para poder hacer esto, debemos de calcular los campos vectoriales $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ y $\tilde{X}_3$. Considerando $x \in \mathbb{S}^2$ en la carta (U, ψ) con coordenadas (ϑ, φ) tiene la forma $x = \psi^{-1}(\vartheta, \varphi) = (\cos\vartheta\cos\varphi, \operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi)$ podemos ver que

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_1(x) &= (\operatorname{sen}\varphi, 0, -\cos\vartheta\cos\varphi) \\
\tilde{X}_2(x) &= (-\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\cos\varphi, 0) \\
\tilde{X}_3(x) &= (0, -\operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi).
\end{aligned}$$

Ahora, el mapeo momento lo evaluamos en $p \in T^*\mathbb{S}^2$, que en coordenadas polares tiene la forma $p_x = p_\vartheta d\vartheta + p_\varphi d\varphi$ por lo que para calcular $J_{p_x}(x_i) = p_x(\tilde{X}_i(x))$ con $i = 1, 2, 3$ necesitamos expresar cada uno de los campos vectoriales en la base de $T_x\mathbb{S}^2$. En las coordenadas de (U, ψ) tenemos que la base en x está dado por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\vartheta}(x) &= (-\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\cos\varphi, 0),\\
\frac{\partial}{\partial\varphi}(x) &= (-\cos\vartheta\operatorname{sen}\varphi, -\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi)
\end{aligned}$$

Procedemos a calcular cada uno de los campos vectoriales:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_1(x) &= (-\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\cos\varphi, 0)\\
&= \frac{\partial}{\partial\vartheta}(x)\\
\tilde{X}_2(x) &= (\operatorname{sen}\varphi, 0, -\cos\vartheta\operatorname{sen}\varphi)\\
&= -\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}(x) - \operatorname{sen}\vartheta\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(x)\\
\tilde{X}_3(x) &= (0, -\operatorname{sen}\varphi, \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi)\\
&= \operatorname{sen}\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}(x) - \cos\vartheta\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(x).
\end{aligned}$$

Sea $p_x = p_\vartheta d\vartheta + p_\varphi d\varphi$ en $T^*_x\mathbb{S}^2$, donde $x = \psi^{-1}(\vartheta, \varphi)$. Por los resultados obtenidos respecto a los campos vectoriales $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3$ obtenemos cada uno de los mapeos momentos están dados por

$$J(p_x)(X_1) = (p_\vartheta d\vartheta + p_\varphi d\varphi)\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(x)\right) = p_\vartheta,$$

Calculamos $J(p_x)(X_2)$

$$\begin{aligned}
J(p_x)(X_2) &= (p_\vartheta d\vartheta + p_\varphi d\varphi)\left(-\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}(x) - \operatorname{sen}\vartheta\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(x)\right)\\
&= -\cos\vartheta p_\varphi - \operatorname{sen}\vartheta\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}p_\vartheta
\end{aligned}$$

Por último calculamos $J(p_x)(X_3)$

$$\begin{aligned}
J(p_x)(X_3) &= (p_\vartheta d\vartheta + p_\varphi d\varphi)\left(\operatorname{sen}\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}(x) - \cos\vartheta\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(x)\right)\\
&= \operatorname{sen}\vartheta p_\varphi - \cos\vartheta\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}p_\vartheta.
\end{aligned}$$

Hacemos el mismo acomodo que en $\mathbb{R}^3$ de forma que obtenemos un vector de la forma

$$\vec{J}((\vartheta,\varphi,p_\vartheta,p_\varphi)) := \begin{pmatrix} J(p_x)(X_3) \\ J(p_x)(X_2) \\ J(p_x)(X_1) \end{pmatrix} = p_\varphi \begin{pmatrix} -\cos\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} + p_\vartheta \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\vartheta\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} \\ -\cos\vartheta\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, según el teorema 3.8 del capítulo anterior, tenemos que el mapeo momento $J_{X_i} : T^*\mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una primera integral, por lo tanto es constante a lo largo de las flujos del sistema. Mas aún, si $x : [0,T] \longrightarrow \psi(U) \times \mathbb{R}^2$ dada por $x(t) = (\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t))$ es solución a las ecuaciones de Hamilton, entonces $\vec{J}$ se conserva a lo largo de esta trayectoria y en particular $\vec{J}(x(t)) = \vec{J}(x(0))$ es constante en todo $t \in I$. Ahora, vamos a dar una descripción cualitativa de el mapeo momento. Recordemos que en $\mathbb{S}^2$ definimos el lagrangiano $L : T\mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por la energía cinética y que este lagrangiano es estrictamente convexo y además según las ecuaciones (1.20) del capítulo 1, los momentos están dados por $p_\varphi(t) = m\dot\varphi(t)$ y $p_\vartheta(t) = m\dot\vartheta(t)\cos^2\varphi(t)$. Entonces el mapeo momento se transforma en

$$\begin{aligned} \vec{J}(\vartheta,\varphi,\dot\vartheta,\dot\varphi) &= m\dot\varphi \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\vartheta \\ -\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} + m\cos^2(\varphi)\dot\vartheta \begin{pmatrix} -\cos\vartheta\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} \\ -\operatorname{sen}\vartheta\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\cos\varphi} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{m\dot\varphi}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\theta} + m\cos(\varphi)\dot\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}. \end{aligned}$$

2.1. Primeras integrales del movimiento. Sea la trayectoria $x(t) := \psi^{-1}(\vartheta(t),\varphi(t))$ una solución a las ecuaciones de Hamilton. Calculamos $\langle \vec{J}(\vartheta(t),\varphi(t),\dot\vartheta(t),\dot\varphi(t)), x(t)\rangle$ y según la ecuación anterior, solo debemos calcular el producto interno en $\mathbb{R}^3$ para cada $\frac{\partial}{\partial\vartheta}$ y $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ en $T_{x(t)}\mathbb{S}^2$. Tenemos entonces que $\frac{\partial}{\partial\vartheta}$ es ortogonal a $x(t)$ y $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ es ortogonal a $x(t)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial\vartheta}, x(t) \right\rangle &= 0 \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial\varphi}, x(t) \right\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Entonces concluimos que $\langle \vec{J}(\vartheta(t),\varphi(t),\dot\vartheta(t),\dot\varphi(t)), x(t)\rangle = 0$ para todo $t \in I$. Como $\vec{J}$ es una primera integral entonces en particular $\langle \vec{J}(\vartheta(0),\varphi(0),\dot\vartheta(0),\dot\varphi(0)), x(t)\rangle = 0$ para todo $t \in I$ y entonces la trayectoria $x(t)$ se queda para todo instante en el plano ortogonal al vector $\vec{J}(0)$. Ahora, supongamos que las velocidades $(\dot\vartheta(0),\dot\varphi(0))$ no son cero, por lo que el mapeo momento $\vec{J}(\vartheta(0),\varphi(0),\dot\vartheta(0),\dot\varphi(0))$ es no nulo y en consecuencia tenemos que $x(t) \in \vec{J}(0)^\perp \cap \mathbb{S}^2$. Como $\vec{J}(0)^\perp$ es un hiperplano en $\mathbb{R}^3$ y podemos concluir entonces que $\vec{J}(0)^\perp \cap \mathbb{S}^2$ es un círculo grande en $\mathbb{S}^2$ y entonces $x(t)$ se mueve a lo largo de este círculo grande para todo $t \in I$.

Calculamos entonces la norma de J en todo $t \in I$

$$\begin{aligned}
\| & \vec{J}(\vartheta(t), \varphi(t), \dot{\vartheta}(t), \dot{\varphi}(t)\|^2 \\
= & \left\langle \frac{m\dot{\varphi}(t)}{\cos\varphi(t)} \frac{\partial}{\partial\vartheta} + m\cos(\varphi(t))\dot{\vartheta}(t)\frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{m\dot{\varphi}(t)}{\cos\varphi(t)}\frac{\partial}{\partial\theta} + m\cos(\varphi(t))\dot{\vartheta}(t)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\rangle \\
= & \frac{m^2}{\cos^2\varphi(t)} \left\langle \frac{\partial}{\partial\vartheta}, \frac{\partial}{\partial\vartheta}\right\rangle \dot{\varphi}(t)^2 + m^2\dot{\vartheta}(t)^2\cos^2\varphi(t) \left\langle \frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\varphi}\right\rangle \\
= & m^2\dot{\varphi}(t)^2 + m^2\cos^2\varphi(t)\dot{\vartheta}(t)^2 \\
= & m^2 g\left(\dot{\varphi}(t)\frac{\partial}{\partial\varphi}, \dot{\varphi}(t)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + m^2 g\left(\dot{\vartheta}(t)\frac{\partial}{\partial\vartheta}, \dot{\vartheta}(t)\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) \\
= & m^2 g\left(\dot{\varphi}(t)\frac{\partial}{\partial\varphi} + \dot{\vartheta}(t)\frac{\partial}{\partial\vartheta}, \dot{\varphi}(t)\frac{\partial}{\partial\varphi} + \dot{\vartheta}(t)\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) \\
= & m^2 g(\dot{x}(t), \dot{x}(t)).
\end{aligned}$$

Por un lado tenemos que $\|\vec{J}(\vartheta(t), \varphi(t), \dot{\vartheta}(t), \dot{\varphi}(t)\|^2 = \langle\vec{J}(0), \vec{J}(0)\rangle$ es constante y por la igualdad anterior, tenemos que $m^2 g(\dot{x}(t), \dot{x}(t))$ es constante, de donde podemos deducir que $\|\dot{x}(t)\| = \frac{1}{m}\|J(0)\|$ es constante. Esto significa que $x : [0, T] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ es una geodésica. Finalmente dadas las condiciones iniciales $x(0) \in \mathbb{S}^2$ y $\dot{x}(0) \in T_{x(0)}\mathbb{S}^2$ con $\dot{x}(0)$ no nulo, queremos construir las soluciones a las ecuaciones de movimiento usando las primeras integrales. Elegimos la base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ como $e_1 := x(0)$ y $e_2 := \frac{\dot{x}(0)}{\|\dot{x}(0)\|}$ y $e_3 := e_1 \times e_3$ y podemos ver que en esta base se tiene que $x(0) = (1, 0, 0)$ y $\dot{x}(0) = \|\dot{x}(0)\|(0, 1, 0)$. En coordenadas polares tenemos $\varphi(0) = \vartheta(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = \|\dot{x}(0)\|\frac{\partial}{\partial\vartheta}(x(0))$. Tenemos que $\dot{x}(0) = \dot{\varphi}(0)\frac{\partial}{\partial\varphi}(x(0)) + \dot{\vartheta}(0)\frac{\partial}{\partial\vartheta}(x(0))$ y como x es un cículo máximo con $x(0) = \psi^{-1}((0, 0))$ y $\dot{x}(0) = \|\dot{x}(0)\|\frac{\partial}{\partial\vartheta}(x(0))$ y podemos ver las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}(0) &= 0, \\
\dot{\vartheta}(0) &= \|\dot{x}(0)\|.
\end{aligned}$$

Ahora, usando (4.6) tenemos que $\dot{x}(0)$ es ortogonal a $J(0)$, donde

$$\begin{aligned}
J(0) &= -\frac{m}{\cos(\varphi(0))}\dot{\varphi}(0)\frac{\partial}{\partial\vartheta}(x(0)) + m\cos(\varphi(0))\dot{\vartheta}(0)\frac{\partial}{\partial\varphi}(x(0)) \\
&= m\|\dot{x}(0)\|\frac{\partial}{\partial\varphi}(x(0)) \\
&= m\|\dot{x}(0)\|(0, 0, 1)
\end{aligned}$$

entonces $x(t)$ es ortogonal $\vec{J}(0)$ para todo t. Esto significa que $x(t)$ esté en el plano ortogonal al $(0, 0, 1)$ y por lo tanto $\varphi(t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$. Entonces tenemos que $x(t) = \psi^{-1}(\vartheta(t), 0) = (\cos\vartheta(t), \operatorname{sen}\vartheta(t), 0)$ y $\dot{x}(t) = \dot{\vartheta}(t)\frac{\partial}{\partial\vartheta}$. Más aún tenemos que para todo $t \in [0, T]$

se cumple $\|\dot{x}(t)\| = \frac{1}{2m}\|\vec{J}(0)\| = \|\dot{x}(0)\|$ por lo que es una constante de movimiento. Ahora la norma de $\dot{x}(0)$ está dada por

$$\begin{aligned}
\|\dot{x}(0)\|^2 &= \|\dot{x}(t)\|^2 \\
&= g\left(\dot{\varphi}(t)\frac{\partial}{\partial\varphi} + \dot{\vartheta}(t)\frac{\partial}{\partial\vartheta}, \dot{\varphi}(t)\frac{\partial}{\partial\varphi} + \dot{\vartheta}(t)\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) \\
&= g\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}, \frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\dot{\vartheta}(t)^2 \\
&= \cos^2\varphi(t)\dot{\vartheta}(t)^2
\end{aligned}$$

ya que $\varphi(t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$. De lo anterior podemos concluir entonces que $\dot{\vartheta}(t) = \|\dot{x}(0)\|$ y como $\vartheta(0) = 0$ entonces podemos asegurar que $\vartheta(t) = \|\dot{x}(0)\|t$. Ahora sabemos que es explícitamente $\vartheta(t)$, es decir $(\vartheta(t), \varphi(t), \dot{\vartheta}(t), \dot{\varphi}(t)) = (\|\dot{x}(0)\|t, 0, \|\dot{x}(0)\|, 0)$ y por lo tanto la ecuación de la trayectoria $x(t)$ esta dada, bajo cambio de coordenadas por

$$\begin{aligned}
x(t) &= \psi^{-1}(\vartheta(t), \varphi(t)) \\
&= \psi^{-1}(\|\dot{x}(0)\|t, 0) \\
&= (\cos(\|\dot{x}(0)\|t), \operatorname{sen}(\|\dot{x}(0)\|t), 0)
\end{aligned}$$

Hemos encontrado como es explícitamente la ecuación de la trayectoria x que describe el movimiento de las ecuaciones de Hamilton utilizando las primeras integrales dados por el mapeo momento sin necesidad de resolver directamente las ecuaciones de Hamilton.

3. Análisis de primeras integrales sobre la 2-esfera con potencial gravitatorio

Consideremos una masa m que se mueve con restricción a la esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ donde parametrizamos la esfera con la carta $\psi^{-1} : (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\psi^{-1}(\vartheta, \varphi) = (\cos\vartheta\cos\varphi, \operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi)$. En este sistema asumimos que hay un potencial $U : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido como $U(x, y, z) = mgz$, es decir, depende solo de la altura. Considerando que el lagrangiano $L : T\mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es la diferencia entre energía cinética y potencial, tenemos que en coordenadas polares, si $v_x \in T_x\mathbb{S}^2$ con $x = \psi^{-1}(\vartheta, \varphi)$ y $v_x = v_\vartheta \frac{\partial}{\partial\theta} +_\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}$, entonces

$$L(v_x) = \frac{m}{2}(v_\vartheta^2 \cos^2\varphi + v_\varphi^2) - mg \operatorname{sen}\varphi.$$

Usando las ecuaciones (1.2) y (1.20), calculamos el hamiltoniano correspondiente: los momentos p_ϑ, p_φ y las velocidades v_ϑ y v_φ están dadas por

$$
\begin{aligned}
p_\vartheta &= \frac{\partial L}{\partial v_\vartheta} = m v_\vartheta \cos^2\varphi, \\
p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial v_\varphi} = m v_\varphi, \\
v_\vartheta &= \frac{p_\vartheta}{m\cos^2\varphi}, \\
v_\varphi &= \frac{p_\varphi}{m}.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Si $H : T^*\mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es el hamiltoniano del sistema, entonces en la carta (ψ^*, T^*U) de $T^*\mathbb{S}^2$, el hamiltoniano local $\tilde{H}(\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi) = H \circ (\psi^*)^{-1}(\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi)$ está dado en coordenadas como

$$
\begin{aligned}
\tilde{H}(\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi) &= \left\langle (p_\vartheta, p_\varphi), \left(\frac{p_\vartheta}{m\cos^2\varphi}, \frac{p_\varphi}{m}\right)\right\rangle \\
&- \frac{m}{2}\left(\left(\frac{p_\vartheta}{m\cos^2\varphi}\right)^2 \cos^2\varphi + \left(\frac{p_\varphi}{m}\right)^2\right) + mg\operatorname{sen}\varphi \\
&= \frac{1}{2m}\left(\frac{p_\vartheta^2}{\cos^2\varphi} + p_\varphi^2\right) + mg\operatorname{sen}\varphi.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Consideremos una trayectoria $[0, T] \longrightarrow \psi(U)$, $t \mapsto (\vartheta(t), \varphi(t))$ que resuelve las ecuaciones de Hamilton. En esta trayectoria las ecuaciones tienen la forma

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_\vartheta(t) &= -\frac{\partial H}{\partial \vartheta}(\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t)) = 0 \\
\dot{p}_\varphi(t) &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi}(\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t)) = -\frac{1}{m}\frac{p_\vartheta(t)^2\tan\varphi(t)}{\cos^2\varphi(t)} - mg\cos\varphi(t).
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Buscamos aplicar el teorema 3.8 para encontrar primeras integrales del sistema, por lo que debemos buscar un grupo de Lie que actue en $T^*\mathbb{S}^2$ tal que el hamiltoniano H sea simétrico con respecto de esta acción. Veamos primero que el potencial $U(x, y, z) = mgz$ impide que la acción de $SO(3)$ deje simétrico el hamiltoniano H. Como la fuerza de gravedad que actúa en el sistema está dado en dirección del eje z podemos intuir que una rotación al rededor de este eje mantendrá el hamiltoniano invariante. Vamos a expresar esta idea mediante la acción $SO(2) \times \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $(A, r) \mapsto A \cdot r$ donde $A \in SO(2)$ y $r \in \mathbb{S}^2$. Dada una matriz $A \in SO(3)$ existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que A puede expresarse de forma única como

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Sabemos por [**9**] que $SO(2) \cong U(1)$, donde $U(1) = \{e^{i\alpha} : \alpha \in \mathbb{R}\}$ por lo que para una matriz $A \in SO(2)$ existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que A puede identificarse con $e^{i\alpha}$ de forma única. Primero observemos que si $r = \psi^{-1}(\vartheta, \varphi) = (\cos\vartheta\cos\varphi, \operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi)$ y $A \in SO(2)$ tiene la forma (4.9), entonces $A \cdot r$ está dado por

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta+\alpha)\cos\varphi \\ \operatorname{sen}(\vartheta+\alpha)\cos\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix}.$$

Siguiendo la igualdad anterior, podemos ver que la acción de $SO(2)$ en $\mathbb{S}^2$ da lugar a una acción de $U(1)$ en $T^*\mathbb{S}^2$ de esta forma: dada la carta (ψ^*, T^*U), si $\beta \in T^*U$ de forma que $\psi^*(\beta) = (\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi)$ entonces $(e^{i\alpha}, \beta) \mapsto (\vartheta - \alpha, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi)$ para $e^{i\alpha} \in U(1)$. Usemos la ecuación (4.7) para ver que $\tilde{H}$ depende solo de $\varphi, p_\vartheta, p_\varphi$ y por lo tanto podemos ver que el hamiltoniano H es simétrico respecto de esta acción de $U(1) \cong SO(2)$. Usando el teorema (3.11) tenemos el mapeo momento $J : T^*\mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathfrak{so}(2)$ definido por $J(P_r)(\xi) = i_{X_\xi}\theta$ y por el teorema 3.8 podemos asegurar que dado $\tau \in \mathfrak{so}(2)$ la función $J_\tau : T^*\mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una primera integral. Sabemos que $\mathfrak{so}(2)$ es de dimensión uno, por lo que solo hay un generador en la base y está dado por

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Por la ecuación (3.4) tenemos que $J_\xi(P_r) = P_r(\tilde{X}_\xi(r))$ donde $P_r \in T_r^*\mathbb{S}^2$ y $\tilde{X}_\xi$ es el campo vectorial asociado a ξ en $\mathbb{S}^2$. Calculamos explícitamente $\tilde{X}_\xi$ obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{X}_\xi(r) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\xi)r \\ &= \xi \cdot r. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Tenemos que en coordenadas locales $r = (\cos\vartheta\cos\varphi, \operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi)$, lo cual implica que $\xi \cdot r = (-\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\cos\varphi, 0)$, es decir $\xi \cdot r = \frac{\partial}{\partial\vartheta}(r)$ y dado $P_r = p_\vartheta d\vartheta + p_\varphi d\varphi$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
J_\xi(P_r) &= \theta_{P_r}(X_\xi(P_r)) \\
&= P_r(\tilde{X}_\xi(r)) \\
&= (p_\vartheta d\vartheta + p_\varphi d\varphi)\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(r)\right) \\
&= p_\vartheta .
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

Por el teorema 3.8 tenemos que la función $J_\xi : T^*\mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ se conserva a lo largo de las soluciones de las ecuaciones de Hamilton y por lo tanto tenemos que p_ϑ se conserva en estas mismas trayectorias. Entonces, usando la propiedad conservativa del mapeo momento podemos llegar a el mismo resultado obtenido por la ecuación (4.8) que también indica que el momento p_ϑ es una cantidad conservada.

Vamos a estudiar las soluciones de las ecuaciones de Hamilton del sistema de las condiciones iniciales. Primero vamos a estudiar el caso donde la velocidad inicial es $\dot{\vartheta}(0) = 0$ y que $\varphi(0)$ es distinto de $\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$. Por la ecuación (4.12) tenemos que para todo $t \in [0, T]$ se tiene $\dot{p}_\vartheta(t) = 0$, que implica $p_\vartheta(t)$ sea constante en todo $[0, T]$. Por otro lado, la ecuación (4.6) indica que $p_\vartheta(t) = m\dot{\vartheta}(t)\cos^2\varphi(t)$ y considerando la condición inicial $\dot{\vartheta}(0) = 0$ podemos concluir que $p_\vartheta(t) = p_\vartheta(0) = 0$. Como $m\dot{\vartheta}(t)\cos\varphi(t) = 0$ en todo $t \in [0, T]$ y $\cos^2\varphi(t) > 0$ podemos ver que $\dot{\vartheta}(t) = 0$ en $[0, T]$ y entonces $\vartheta(t) = \vartheta(0) = \vartheta_0$ en todo $[0, T]$. Usando nuevamente las ecuaciones de Hamilton (4.8) y el hecho que $p_\vartheta(t) = 0$ en todo $[0, T]$ podemos ver que

$$
\dot{p_\varphi}(t) = -mg\cos\varphi(t). \tag{4.13}
$$

Tenemos que $p_\varphi(t) = m\dot{\varphi}(t)$ por (4.6) y sustituyendo esta igualdad en (4.13) tenemos la ecuación $m\ddot{\varphi}(t) = -mg\cos\varphi(t)$. Trasladando en $\frac{\pi}{2}$, $\varphi(t) \mapsto \varphi(t) - \frac{\pi}{2}$ da lugar a la ecuación

$$
\ddot{\varphi}(t) = -mg\,\mathrm{sen}\,\varphi(t).
$$

Esta ecuacidescribe el movimiento de un péndulo en un campo gravitatorio con constante de gravitación g. Entonces la condición inicial $\dot{\vartheta}(0) = 0$ implica que la masa m tiene una velocidad $\dot{\varphi}(t)$ en dirección azimutal por lo que obtenemos un péndulo restringido a la esfera.

Ya que analizamos el sistema con condición inicial $\dot{\vartheta}(0) = 0$ vamos a analizar detalladamente el comportamiento de φ con las condiciones $\dot{\vartheta}(0) \neq 0$, es decir la velocidad inicial en dirección de ϑ es no nula y $\varphi(0) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Por (4.6) tenemos que $p_\vartheta(t) = m\dot{\vartheta}(t)\cos^2\varphi(t) \neq 0$ es constante en todo $t \in [0, T]$. Sabemos por el teorema 2.4 que el hamiltoniano H es una primera integral por lo que dada la solución $[0,1] \longrightarrow \psi(U)$ dada por $t \mapsto (\vartheta(t), \varphi(t))$, tenemos que $H(\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t))$ se mantiene constante en todo $[0,T]$. Ahora, calculamos el límite $\lim_{t\to\pm\frac{\pi}{2}} \cos\varphi(t) = 0$ para conocer que sucede en el hamiltoniano cuando la trayectoria se acerca a cada uno de los polos $\pm\frac{\pi}{2}$ y vemos que

$$\lim_{\varphi(t)\to\pm\frac{\pi}{2}} \tilde{H}(\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t)) = \lim_{\varphi(t)\to\pm\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2m} \left(\frac{p_\vartheta^2}{\cos^2\varphi} + p_\varphi^2 \right) + mg \operatorname{sen}\varphi \right) \tag{4.14}$$

diverge. Entonces si la trayectoria se aproxima a $-\frac{\pi}{2}$ o $\frac{\pi}{2}$, que corresponden a los polos de la esfera, el hamiltoniano no se conserva. Esto da lugar a que podamos encontrar dos números reales $\varphi_0 > -\frac{\pi}{2}$ y $\varphi_1 < \frac{\pi}{2}$ tal que en todo $t \in [0,T]$ se tiene $\varphi(t) \in [\varphi_0, \varphi_1]$, es decir, la trayectoria debe estar acotada superiormente por φ_1 e inferiormente por φ_0 . Siguiendo las ecuaciones (4.6) tenemos que $\dot{p}_\varphi(t) = m\ddot{\varphi}(t)$ y por las ecuaciones de Hamilton (4.8) tenemos

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}(\vartheta(0), \varphi(t), p_\vartheta(0), p_\varphi(t)) = -\frac{1}{m^2}\frac{p_\vartheta^2(0)\tan\varphi(t)}{\cos^2\varphi(t)} - \cos\varphi(t). \tag{4.15}$$

Nos preguntamos ahora si un círculo con latitud $\operatorname{sen}\varphi_0$ puede ser la trayectoria de una solución de las ecuaciones de Hamilton, es decir, suponer que $\varphi(t) = \varphi(0)$ para todo $t \in [0,T]$.

Como p_ϑ es constante y H no depende de $\vartheta(t)$, podemos ver que la función constante $\varphi(t) = \varphi(0)$ es una solución a la ecuación 4.15 si satisface la ecuación

$$\operatorname{sen}\varphi(0) + k(1 - \operatorname{sen}^2\varphi(0))^2 = 0, \qquad k := \frac{m^2 g}{p_\vartheta^2(0)}. \tag{4.16}$$

Tenemos que analizar la ecuación (4.16) para poder conocer el valor $\varphi(0)$. Sabemos que $\operatorname{sen}\varphi$ es monótonamente creciente en todo $[\varphi_0, \varphi_1]$ por lo que podemos definir $s := \operatorname{sen}\varphi$ y entonces la ecuación 4.16 se convierte en la ecuación

$$s + k(1 - s^2)^2 = 0. \tag{4.17}$$

Podemos ver que hemos reducido el problema al análisis de una ecuación algebraica. Consideremos la función $h : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $h(s) := s + k(1-s^2)^2$. Observemos que h es no negativa en todo $s \in [0,1)$ y además $\lim_{s\to -1} h(s) = -1$. Por el teorema del valor intermedio, h debe de tener al menos una raiz en $(-1,0)$. Por otro lado tenemos la derivada $h'(s) = 1 - 4ks(1-s^2)$ es positiva en todo $s \in (-1,0)$ lo cual nos permite concluir que h es inyectiva en todo $s \in (-1,0)$. Por ser h inyectiva en $(-1,0)$ podemos concluir que existe una única raiz s_0 en dicho intervalo y además verificamos que existe un $\varphi_c \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ tal que $s_0 = \operatorname{sen}(\varphi_c)$. Tenemos que por ser $\varphi(t)$ constante, $p_\varphi(t) = m\dot{\varphi}(t) = 0$. Ahora, como $p_\vartheta(t)$ es constante y $p_\vartheta(0) = p_0$ tenemos que $p_\vartheta(t) = p_\vartheta(0) = p_0$.

En base al análisis anterior, vamos a proponer las condiciones iniciales siguientes

$$
\begin{aligned}
\varphi(0) &= \varphi_c, \\
\vartheta(0) &= \vartheta_0, \\
p_\varphi(0) &= 0, \\
p_\vartheta(0) &= p_0.
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

Considerando que $\dot{\vartheta}(t) = \frac{p_\vartheta(t)}{m\cos^2\varphi(t)}$, $p_\vartheta(t) = p_0$ y que $\varphi(t) = \varphi_c$, calculamos $\vartheta(t)$:

$$
\begin{aligned}
\vartheta(t) &= \int_0^t \frac{p_0}{m\cos^2\varphi_c} ds \\
&= \frac{p_0 t}{m\cos^2\varphi_c}, \qquad\qquad \omega = \frac{p_0}{m\cos^2\varphi_c}, \\
&= \omega t.
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

De los resultados obtenidos para las condiciones iniciales (4.18), concluimos que $\vartheta(t) = \omega t$ para todo $t \in [0, T]$. Además, por ser $\varphi(t)$ constante la trayectoria $t \mapsto (\vartheta(t), \varphi_c)$ solo depende de $\vartheta(t)$. Entonces tenemos que por las ecuaciones de Hamilton

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \varphi}(\vartheta(t), \varphi_c, p_0, 0) &= 0 = -\dot{p}_\varphi(t) = -m\ddot{\varphi}(t), \\
\frac{\partial H}{\partial \vartheta}(\vartheta(t), \varphi_c, p_0, 0) &= \dot{p}_\vartheta(t) = 0.
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

Por otro lado tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial p_\varphi}(\vartheta(t), \varphi_c, p_0, 0) &= \frac{1}{m} p_\varphi(t) = \dot{\varphi}(t) = 0, \\
\frac{\partial H}{\partial p_\vartheta}(\vartheta(t), \varphi_c, p_0, 0) &= \frac{p_\vartheta(t)}{m\cos^2(\varphi(t))} = \frac{p_0}{m\cos^2\varphi_c} = \dot{\vartheta}(t)
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

Como las ecuaciones de Hamilton (4.20) se satisfacen y considerando que $\vartheta(t) = \omega t$, podemos concluir en este caso que la trayectoria $r : [0, T] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dada por la ecuación

$$
r(t) = \psi^{-1}(\vartheta(t), \varphi_c) = (\cos(\varphi_c)\cos(\omega t), \cos(\varphi_c)\,\mathrm{sen}(\omega t), \mathrm{sen}(\varphi_c)),
$$

es una solución a las ecuaciones de Hamilton. Observemos que $r : [0, T] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ es un círculo con latitud $\mathrm{sen}(\varphi_c)$ que gira con velocidad angular constante $\omega = \frac{p_0}{m\cos^2\varphi_c}$ a lo largo del círculo, es decir la velocidad que sigue la trayectoria en dirección de φ es ωt

Ahora, vamos a estudiar el caso cuando φ no es constante en $[0, T]$ y tiene al menos un punto decreciente, es decir $\dot{\varphi}(s) < 0$ para cierto $s \in \mathbb{R}$. De esto podemos ver que $\varphi(t)$ es localmente decreciente en $(s - \delta, s + \delta)$ con $\delta \in \mathbb{R}$. Recordemos por (4.14) que el límite del hamiltoniano impuso la restricción $\varphi(t) \in [\varphi_0, \varphi_1] \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ que implica que $\varphi(t)$ se aproxima a un ínfimo, es decir existe $t_0 \in (s, \infty]$ tal que $\lim_{t\to t_0} \varphi(t) = \tilde{\varphi}_0$, donde $\tilde{\varphi}_0$ es un número real. Veamos que el análisis puede separarse en dos casos:

Caso I. Si $t_0 < \infty$ tenemos que $\varphi(t_0) = \varphi_c$ es un mínimo local por lo que la aceleración es $\ddot{\varphi}(t_0) = -\frac{1}{m}\frac{\partial H}{\partial \varphi} \geq 0$. De este hecho podemos ver que el caso cuando $\ddot{\varphi}(t_0) = 0$ resulta ser que corresponde a la única solución $\varphi(t) = \varphi_c$ para todo $t \in [0, T]$, pero es una contradicción con la suposición de que $\dot{\varphi}(s) < 0$. En particular tenemos que $\dot{\varphi}(t_0) = \frac{1}{m}p_\varphi(t_0) = 0$ y $\varphi(t_0) < \varphi_c$ por que

$$-\frac{1}{m}\frac{\partial H}{\partial \varphi}(\vartheta(t_0), \varphi(t_0), p_\vartheta(t_0), 0) = \ddot{\varphi}(t_0) > 0$$

si y solo sí $\varphi(t_0) \in [\varphi_0, \varphi_c)$. Consideremos un intervalo $(t_0, t_0 + \epsilon)$ donde ϵ es un número real tal que $\varphi(t)$ es creciente en ese intervalo. La restricción $\varphi(t) \in [\varphi_0, \varphi_1]$ implica que $\varphi(t)$ se aproxima a un supremo, es decir existe un $t_1 \in (t_0, \infty]$ tal que $\lim_{t\to t_1} \varphi(t) = \tilde{\varphi}_1$. Si $t_1 < \infty$ tenemos que φ_1 es un máximo local y entonces se cumple que $\ddot{\varphi}(t_1) = -\frac{1}{m}\frac{\partial H}{\partial \varphi} < 0$. Como en el caso anterior, si $\ddot{\varphi}(t_1) = 0$ entonces tenemos $\varphi(t) = \varphi_c$ lo cual es una contradicción. Para el caso de $t \in (t_1, t_1 + \epsilon)$ se tiene que $\varphi(t)$ es decreciente, entonces $\dot{\varphi}(t) < 0$ y se aplica el mismo argumento anterior.

Caso II. Ahora vamos a suponer que $t_0 = \infty$. Esto implica que $\dot{\varphi}(t) < 0$ para todo $t > s$, es decir, $\varphi(t)$ es decreciente en todo $t \in (s, \infty]$. Como $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \varphi_0$ y $\varphi(t)$ es decreciente podemos asegurar que $\lim_{t\to\infty} \dot{\varphi}(t) = 0$. Por el contrario, tenemos que φ alcanza su mínimo en tiempo finito por lo siguiente: ahora existe t_ϵ tal que $|\dot{\varphi}(t)| \geq \epsilon > 0$ en todo $t > t_\epsilon$, por lo que

$$\begin{aligned} \varphi(t_\epsilon) - \varphi(t) &= -\int_{t_\epsilon}^{t} \dot{\varphi}(t)dt \\ &> \int_{t_\epsilon}^{t} \epsilon dt \\ &= \epsilon(t - t_\epsilon) \end{aligned} \tag{4.22}$$

Observemos entonces que $\lim_{t\to\infty}(\varphi(t) - \varphi(t_\epsilon))$ diverge lo que es una contradicción con el hecho que φ es decreciente. Ahora si $\varphi_0 \neq \varphi_c$ tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \lim_{t\mapsto\infty} \ddot{\varphi}(t) &= -\frac{1}{m}\lim_{t\to\infty}\frac{\partial H}{\partial \varphi}(\vartheta_0, \varphi(t), p_\vartheta(0), \dot{\varphi}(t)) \\ &= -\frac{1}{m}\left(\frac{p_0^2}{2m\cos^2\varphi_0} + mg \operatorname{sen}\varphi_0\right) \\ &\neq 0 \end{aligned} \tag{4.23}$$

ya que $\frac{\partial H}{\partial \varphi}(\vartheta_0, \varphi(t), p_\vartheta(0), \dot{\varphi}(t)) = 0$ tiene como única raiz $\varphi = \varphi_c$. Entonces podemos ver que existe t_ϵ tal que $|\ddot{\varphi}(t)| > \epsilon > 0$ en todo $t > t_\epsilon$. Como $\dot{\varphi}(t) < 0$ y $\lim_{t\to\infty} \dot{\varphi}(t) = 0$ podemos concluir que la velocidad $\dot{\varphi}(t)$ es creciente en todo $t \in (t_\epsilon, \infty)$ y entonces $\ddot{\varphi}(t) > \epsilon > 0$. Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) - \dot{\varphi}(s) &= \int_s^t \ddot{\varphi}(r) dr \\ &> \int_s^t \epsilon dr \\ &= \epsilon(t-s) \end{aligned} \tag{4.24}$$

Donde la última igualdad implica que $\lim_{t\to\infty}(\dot{\varphi}(t) - \dot{\varphi}(s))$ diverge, que es una contradicción.

Por último supongamos que $\varphi_0 = \varphi_c$. Sabemos que la función definida como $h(\varphi) := H(\vartheta_0, \varphi, p_\vartheta(0), 0)$ tiene su único mínimo en φ_c y $\varphi(t)$ es decreciente. Como $\varphi(t)$ es acotado debe existir un $t_M \in [-\infty, s)$ tal que la función $\varphi(t_M)$ alcanza su máximo y por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{t\to t_M} \varphi(t) &= \varphi_M > \varphi_c \\ \lim_{t\to t_M} \dot{\varphi}(t) &= 0. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Como $\varphi_M > \varphi_c$ y φ_c es el único mínimo local de $h(\varphi)$, tenemos la desigualdad

$$\begin{aligned} H(\vartheta_0, \varphi(t_M), p_\vartheta(0), m\dot{\varphi}(t_M)) &= H(\vartheta_0, \varphi(t_M), p_\vartheta(0), 0) \\ &> H(\vartheta_0, \varphi_c, p_\varphi(0), 0) \\ &= \lim_{t\to\infty} H(\vartheta_0, \varphi(t), p_\vartheta(0), m\dot{\varphi}(t)) \end{aligned} \tag{4.26}$$

que es una contradicción a que H es una primera integral y por lo tanto es constante en el tiempo.

Por el mismo argumento $\varphi(t)$ alcanza su máximo en $\varphi(t_1) = \varphi_1$ con velocidad $\dot{\varphi}(t_1) = 0$ en tiempo finito. Además tenemos que se cumplen estas igualdades

$$\begin{aligned} H(\vartheta_0, \varphi_0, p_\vartheta(0), 0) &= H(\vartheta_0, \varphi(t_0), p_\vartheta(0), p_\varphi(t_0)) \\ &= H(\vartheta_0, \varphi(t_1), p_\vartheta(0), p_\varphi(t_1)) \\ &= H(\vartheta_0, \varphi_1, p_\vartheta(0), 0) \end{aligned} \tag{4.27}$$

entonces el valor φ_1 está definido como el único valor en $(\varphi_c, \frac{\pi}{2})$ tal que la función h cumple $h(\varphi_1) = h(\varphi_0)$ donde habiamos definido la función h como $h(\varphi) = H(\vartheta_0, \varphi, p_\vartheta(0), 0)$. Como conclusión podemos ver que $\varphi(t)$ oscila entre los valores φ_0 y φ_1 que son puntos que se alcanzan un número infinito de veces.

Conclusiones

El principal objeto de estudio fue la acción de un grupo de Lie en un sistema hamiltoniano, definiendo la simetría del sistema como la conservación del hamiltoniano bajo dicha acción. En el teorema 3.8 se estableció la existencia de cantidades conservadas en un sistema hamiltoniano con simetría y mas aún, se dedujo que dichas cantidades conservadas están dadas por el mapeo momento de la acción.

En particular este resultado se aplico al caso de la acción de un grupo de Lie G en un sistema hamiltoniano dado por (T^*M, ω, H), donde T^*M es el espacio fase del sistema, ω es la forma simpléctica canónica en T^*M y $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ es el hamiltoniano del sistema. Este resultado fue aplicado para encontrar primeras integrales en dos sistemas mecánicos.

En el sistema mecánico $(T^*\mathbb{R}^3, \omega, H)$ donde $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ es un hamiltoniano simétrico respecto de la acción de $SO(3)$ en $T^*\mathbb{R}^3$, encontramos que el mapeo momento $J : T^*\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ está dado por $J(p_r) = r \times p$ de donde podemos concluir que el mapeo momento coincide con el momento angular clásico. Además por el teorema 3.8 podemos verificar que el momento angular clásico es una cantidad conservada.

Otro sistema mecánico que estudiamos fue $(T^*\mathbb{S}^2, \omega, H)$ donde $H : T^*\mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ está dado en coordenadas polares por $H(\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi) = \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}p_\vartheta^2 + p_\varphi^2\right)$. En este caso el mapeo momento en coordenadas polares tiene la forma

$$\vec{J}(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = -\frac{m\dot{\varphi}}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\theta} + m\cos(\varphi)\dot{\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Ahora, como el mapeo momento es conservativo, encontramos que si $x : [0, T] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ es una trayectoria que resuelve las ecuaciones de Hamilton, entonces $x(t) \in \vec{J}(0)^\perp \cap \mathbb{S}^2$ y como $\|\dot{x}(t)\|$ es constante, entonces x es una geodésica. Mas aún, encontramos que la solución $x : [0, T] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ con velocidad inicial $\dot{x}(0)$ tiene la forma

$$x(t) = (\cos(\|\dot{x}(0)\|t), \operatorname{sen}(\|\dot{x}(0)\|t), 0).$$

El sistema hamiltoniano consiste en una partícula con masa m que está sujeta a una fuerza gravitacional que depende de la altura, es decir está dado por el potencial $U(x, y, z) = mgz$. Este potencial da lugar al hamiltoniano $H(\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi) = \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}p_\vartheta^2 + p_\varphi^2\right) + mg\operatorname{sen}\varphi$ el cual preserva simetría respecto de las rotaciones de $SO(2)$ al rededor del eje z. Los métodos para encontrar soluciones a las ecuaciones de Hamilton de este sistema son meramente cualitativos y dependen de las condiciones iniciales del sistema. Si la velocidad inicial $\dot{\vartheta}(0) = 0$ y $\vartheta(0) = \vartheta_0$ entonces ϑ es constante en el tiempo y φ cumple con la ecuación del péndulo matemático $\ddot{\varphi}(t) = -mg \operatorname{sen} \varphi(t)$, de forma que la solución es $x(t) = \psi^{-1}(\vartheta_0, \varphi(t))$ y la partícula oscila en una trayectoria con ángulo azimutal constante ϑ_0 y ángulo del altitud entre φ_0 y φ_1. Cuando la velocidad inicial $\dot{\vartheta}(0)$ es no nula establecemos las condiciones iniciales $\varphi(0) = \varphi_c$, $\vartheta(0) = \vartheta_0$, $p_\varphi(0) = 0$ y $p_\vartheta(0) = p_0$ y obtenemos que $\vartheta(t) = \omega t$ y da lugar a la solución $x : [0, T] \longrightarrow \mathbb{S}^2$ dada por

$$x(t) = (\cos(\varphi_c)\cos(\omega t), \cos(\varphi_c)\operatorname{sen}(\omega t), \operatorname{sen}(\varphi_c)).$$

Para el sistema hamiltoniano sobre la esfera libre de potencial donde actúa el grupo de rotaciones $SO(3)$, la existencia de cantidades conservadas dadas por el mapeo momento permitió deducir que las trayectorias que resuelven las ecuaciones de Hamilton del sistema son geodésicas en la esfera. Para el caso de el sistema con potencial gravitatorio la solución es una trayectoria periódica cuyo ángulo de latitud está entre dos constantes φ_0 y φ_1 y son puntos que se alcanzan un número infinito de veces.

Apéndice

A. Cartas en el haz tangente y cotangente en una variedad diferenciable

Dada M una variedad diferenciable, en un punto $p \in M$ denotamos T_pM el espacio tangente de M en p. En una carta (U, φ) de M con coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ la base estándar de T_pM está dada por $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$. En un punto $p \in M$ existe el espacio dual al espacio tangente en p denotado como T_p^*M que tiene como base los covectores $dx_1, \ldots, dx_n$ y que es la base dual a la base $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ de T_pM, es decir,

$$dx_j\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \delta_{ij}.$$

Definición A1. Definimos el espacio tangente como la colección de todo los vectores tangentes en todos los puntos, es decir $TM = \cup_{p\in M} T_pM$.

Sabemos por [**7**, **9**, **13**] que para todo $p \in M$ el espacio tangente T_pM es un espacio vectorial de dimensión igual que la dimensión de la variedad. Entonces podemos tomar el espacio dual T_p^*M y poder definir el haz cotangente.

Definición A2. En una variedad diferenciable M definimos el espacio cotangente como $T^*M = \cup_{p\in M} T_p^*M$

Consideremos un atlas de la variedad diferenciable de donde elegimos una carta (U, φ) con coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$. En base a esta carta elegida de M podemos construir una carta en TM que llamaremos carta inducida de M en TM. Primero, en base al abierto $U \subset M$ construimos el conjunto $TU = \cup_{p\in U} T_pM$ que será considerado como el abierto de la nueva carta. Ya que tenemos el abierto construido, el siguiente paso es definir la nueva función de coordenadas como

$$\tilde{\varphi} : TU \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \varphi(U), \quad v_p \mapsto (\varphi(p), d\varphi_p(v_p)), \;\; v_p \in T_pM.$$

En las coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ de la carta (U, φ) podemos expresar el vector tangente $v_p \in T_pM$ como una combinación lineal de la bases $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ como $v_p = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1}(p) + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}(p)$. De este modo obtenemos que $d\varphi_p(v_p) = (v_1, \ldots, v_n)$ de forma que en coordenadas de la carta elegida, la función $\tilde{\varphi}$ se ve como $\tilde{\varphi}(v_p) = (x_1 \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n)$. Vamos a verificar que las funciones de transición son diferenciables: consideremos dos cartas $(TU, \tilde{\varphi})$ y $(TV, \tilde{\psi})$ en M con coordenadas $(x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n)$ y $(y_1, \ldots, y_n, w_1, \ldots, w_n)$ respectivamente. Consideremos $(y_1, \ldots, y_n, w_1, \ldots, w_n) \in \tilde{\psi}(TU \cap TV)$ y denotando $x(y) = \varphi \circ \psi^{-1}(y_1, \ldots, y_n)$ con $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)$ tenemos

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1}(y_1, \ldots, y_n, w_1, \ldots, w_n) &= \tilde{\varphi}(\psi^{-1}(y_1, \ldots, y_n), (d\psi)^{-1}(w_1, \ldots, w_n)) \\
&= (\varphi \circ \psi^{-1}(y_1, \ldots, y_n), (d\varphi) \circ (d\psi)^{-1}(w_1, \ldots, w_n) \\
&= \left(x_1(y), \ldots, x_n(y), \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{\partial x_1}{\partial y_j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{\partial x_n}{\partial y_j} \right)
\end{aligned}$$

Como las funciones $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ son diferenciable, podemos concluir que la función de transición $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1} : \tilde{\psi}(TU \cap TV) \longrightarrow \tilde{\varphi}(TU \cap TV)$ es diferenciable.

De forma análoga podemos construir una carta en el haz cotangente T^*M inducida de la carta (U, φ). Primero construimos el conjunto $T^*U = \cup_{p \in U} T_p^*M$ que será el abierto de la carta a construir. Ahora, consideremos $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ y consideremos la inversa $\varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow U$, su diferencial $d\varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_pM$ y la transpuesta $(d\varphi^{-1})^* : T_p^*M \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Definimos entonces la carta

$$\varphi^* : T^*U \longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \qquad \alpha_p \mapsto (\varphi(p), (d\varphi^{-1})^*(\alpha_p)).$$

En las coordenadas de (U, φ) de M podemos expresar el vector dual $\alpha_p \in T_p^*M$ como $\alpha_p = \alpha_1 dx_1 + \cdots + \alpha_n dx_n$ y entonces podemos ver que $(d\varphi^{-1})^*(\alpha_p) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, de forma que la carta (TU, φ^*) tiene coordenadas $\varphi^*(\alpha_p) = (x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. De nuevo, vamos a verificar que que las funciones de transición son diferenciables: consideremos las carta (T^*U, φ^*) y (T^*V, ψ^*) en T^*M con coordenadas $(y_1, \ldots, y_n, r_1, \ldots, r_n)$ y $(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$. Consideremos $(y_1, \ldots, y_n, r_1, \ldots, r_n) \in \psi^*(T^*U \cap T^*V)$ y denotando $x(y) = \varphi \circ \psi^{-1}(y)$ con $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi^* \circ (\psi^*)^{-1}(y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n) &= \varphi^*(\psi^{-1}(y_1, \ldots, y_n), (d\psi^{-1})^*(p_1, \ldots, p_n)) \\
&= (\varphi \circ \psi^{-1}(y_1, \ldots, y_n), (d\varphi)^* \circ (d\psi^{-1})^*(p_1, \ldots, p_n)) \\
&= \left(x_1(y), \ldots, x_n(y), \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial y_j}{\partial x_1}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial y_j}{\partial x_n} \right).
\end{aligned}$$

Concluimos entonces que dadas dos cartas (T^*U, φ^*) y (T^*V, ψ^*), la funcion de transición $\varphi^* \circ (\psi^*)^{-1} : \psi^*(T^*U \cap T^*V) \longrightarrow \varphi(T^*U \cap T^*V)$ es diferenciable.

Dada una variedad M y su espacio tangente TM y cotangente T^*M, podemos dar una estructura de haces a TM y a T^*M de la siguiente forma: en TM definimos la proyección

$$\pi : TM \longrightarrow M, \quad v_p \mapsto p, \;\; v_p \in T_pM.$$

De forma análoga, definimos la proyección en el espacio cotangente T^*M como

$$\pi : T^*M \longrightarrow M, \quad \alpha_p \mapsto p, \;\; \alpha_p \in T_p^*M.$$

De esta forma, dada la veriedad diferenciable M hemos construido tanto como el haz tangente (TM, π, M) como el haz contangente (T^*M, π, M).

B. Campos vectoriales en variedades diferenciables

Consideremos M y N dos variedades diferenciables con el conjunto de campos vectoriales $\Gamma(TM)$ y $\Gamma(TN)$. Sean $X \in \Gamma(TM)$ y $Y \in \Gamma(TN)$ dos campos vectoriales y $F : M \longrightarrow N$ un difeomorfismo. Definimos el pushforward de F sobre X como $(F_*X)(p) = dF(X(F^{-1}(p)))$. Por otro lado, definimos el pullback de F sobre X como $(F^*X)(p) = dF^{-1}(X(F(p)))$.

Definición B3. Sea X un campo vectorial sobre una variedad diferenciable M. Dada una función diferenciable $f \in C^k(M)$, definimos la derivada de Lie de f en dirección X como $L_Xf = df(X)$. Para simplificar la notación, aveces denotaremos L_Xf como $X.f$. Esta notación viene de ver un campo vectorial como una derivación sobre las funciones diferenciables.

Definición B4. Sea $F : M \longrightarrow N$ una función diferenciable entre dos variedades diferenciables. Dada $f \in C^\infty(N)$, definimos una función en M como $(F^*f)(p) = f \circ F(p)$.

Teorema B5. *Consideremos un difeomorfismo F entre dos variedades diferenciables M y N, y f una función en N. Entonces para $X \in \Gamma(TN)$ tenemos*

$$L_{F^*X}(F^*f) = F^*(L_Xf).$$

Demostración. Calculamos $L_{F^*X}(F^*f)$ para $p \in M$:

$$\begin{aligned} L_{F^*X}(F^*f)(p) &= d(F^*f)(F^*X)(p) \\ &= d(f \circ F)(dF^{-1}(X(F(p))) \\ &= d(f \circ F \circ F^{-1})(X(F(p))) \\ &= df(X(F(p)) \\ &= df(X)(F(p)) \\ &= F^*(L_Xf)(p). \end{aligned}$$

Entonces podemos concluir que $L_{F^*X}F^*f = F^*(L_X f)$. ❑

Teorema B6. *Consideremos un difeomorfismo F entre dos variedades diferenciables M y N, y f una función en M. Entonces para un campo vectorial X en M,*

$$L_{F_*X}(F_*f) = F_*(L_X f).$$

Demostración. Solo se aplica la definición $F_* = (F^{-1})^*$ y el teorema B5 ❑

B.1. Corchetes de Lie. En esta sección estudiaremos los campos vectoriales y el corchete de Lie.

Definición B7. Sean X y Y dos campos vectoriales sobre una variedad diferenciable M. Definimos el corchete de Lie $[X,Y]$ como el campo vectorial tal que para $f \in C^k(M)$ se cumple

$$[X,Y].f = X.(Y.f) - Y.(X.f). \tag{B1}$$

Observemos que se cumplen las siguientes propiedades y su prueba puede consultarse en [**9**, **13**].

1. La ecuación (B1) define un único campo vectorial $[X,Y]$ en $\Gamma(TM)$.
2. Para todo cualesquiera números reales α, β, $[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X,Z] + \beta[Y,Z]$ donde X, Y, Z son campos vectoriales en M.
3. Para cualesquiera dos campos vectoriales X, Y en M, $[X,Y] = -[Y,X]$.
4. Para cualesquiera tres campos vectoriales X, Y, Z en M se cumple la identidad de Jacobi $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$.

Definición B8. Sea M una variedad diferenciable y X un campo vectorial en M. Dado $p \in M$, el flujo en p con dominio $D_p \subset M$ abierto y $I_p \subset \mathbb{R}$ abierto que contiene al cero, es una función $\varphi : I_p \times D_p \longrightarrow M$, $(t,p) \mapsto \varphi_t(p)$ tal que

1. Para todo $t \in I_p$, $\varphi : D_p \longrightarrow \varphi_t(D_p)$ es un difeomorfismo.
2. Si $t = 0$ entonces, $\varphi_0(q) = q$.
3. Para todo $q \in D_p$ y $t \in I_p$,
$$\frac{d}{dt}\varphi_t(q) = X(\varphi_t(q)).$$

Definición B9. Sean X y Y dos campos vectoriales en una variedad diferenciable M. Denotemos φ_t el flujo de X. Definimos la derivada de Lie de Y en dirección de X como $L_X Y(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\varphi_t^* Y)(\varphi_t(p))$.

TEOREMA B10. *Dados dos campos vectoriales X y Y en una variedad diferenciable. Entonces* $[X,Y] = L_X Y$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración puede consultarse en [**9**]. $\square$

TEOREMA B11. *Sea $F : M \longrightarrow N$ un difeomorfismo. Entonces, para cualesquiera X y Y campos vectoriales en M, tenemos que $F_*[X,Y] = [F_*X, F_*Y]$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos f una función diferenciable en N. Vamos a calcular $[F_*X, F_*Y](f)$. Por la definición del corchete de Lie, tenemos que

$$[F_*X, F_*Y].(f) = F_*X.(F_*Y.f) - F_*Y.(F_*X.f).$$

Si definimos $\tilde{f} := f \circ F^{-1}$, tenemos que $f = F_*\tilde{f}$, y por el teorema B11 la expresión anterior queda como

$$\begin{aligned}
[F_*X, F_*Y].(f) &= F_*X.(F_*Y.(F_*\tilde{f})) - F_*Y.(F_*X.(F_*\tilde{f})) \\
&= F_*X.(F_*(Y.\tilde{f})) - F_*Y.(F_*(X.\tilde{f})) \\
&= F_*([X,Y].\tilde{f}) \\
&= F_*([X,Y])(F_*f) \\
&= (F_*[X,Y]).(f).
\end{aligned}$$

Podemos concluir entonces que $F_*[X,Y] = [F_*X, F_*Y]$. $\square$

TEOREMA B12. *Para X y Y dos campos vectoriales en una variedad N y un difeomorfismo $F : M \longrightarrow N$, entonces $[F^*X, F^*Y] = F^*[X,Y]$.*

DEMOSTRACIÓN. Solo debemos aplicar el teorema B11 pués dado un campo vectorial X, se cumple $F^*X = (F^{-1})_*X$. $\square$

C. Formas diferenciables

Consideremos dos variedades diferenciables M y N y una función diferenciable $F : M \longrightarrow N$. El pullback de una k-forma en $\omega \in \Omega^k(N)$ es una k-forma diferenciable en M definida como sigue: dados $u_1, \ldots, u_k$ en T_pM, el pullback $(F^*\omega)_p(u_1, \ldots, u_k) = \omega_{F(p)}(dF(u_1), \ldots, dF(u_k))$. El pullback define una operación $F^* : \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^k(M)$, $\omega \mapsto F^*\omega$.

Definición C13. Sea M una variedad diferenciable M, un campo vectorial X con flujo $\varphi : I \times D \longrightarrow M$ y una k-forma ω. La derivada de ω en dirección de X, llamada también derivada de Lie, está dada por

$$(L_X\omega)(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi_t^*\omega(\varphi_{-t}(p)).$$

Las funciones diferenciables en M pueden ser identificadas como una forma en $\Omega^0(M)$. Entonces dado un campo vectorial X en $\Gamma(TM)$ con flujo $\varphi : I \times D \longrightarrow M$ y una función diferenciable f en M, definimos la derivada de f en dirección de X también como

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\varphi_t(p)).$$

Comenzamos entonces con calcular $L_X df$ para una función $f \in \Omega^0(M)$. Consideremos $p \in M$ y Y un campo vectorial en M,

$$\begin{aligned} L_X df(Y(p)) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi_t^* df)(Y(\varphi_{-t}(p)))\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d(f\circ\varphi_t)_{\varphi_{-t}(p)}(Y(p))\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Y.(\varphi_t^* f)(\varphi_{-t}(p))\\ &= Y.(L_X f)(p)\\ &= d(L_X f)(Y)(p). \end{aligned}$$

De donde concluimos que $L_X df = dL_X f$. Dado un campo vectorial X en una variedad diferenciable Mdefinimos la contracción $i_X : \Omega^{k+1}(M) \longrightarrow \Omega^k(M)$ como $(i_X\omega)_p(\eta_1, \dots, \eta_k) = \omega_p(X(p), \eta_1, \dots, \eta_k)$, donde $\eta_1, \dots, \eta_k \in T_pM$.

Teorema C14 (Fórmula de Cartan). *Para cualquier forma diferenciable $\omega \in \Omega(M)$ y un campo vectorial, tenemos que*

$$L_X\omega = d(i_X\omega) + i_X d\omega.$$

Demostración. La demostración puede ser consultada en [**9**, **13**] ❏

La fórmula de Cartan es una gran herramienta al momento de manipular cálculos con derivadas de Lie y diferenciales. Algunos resultados sencillos pero importantes los vamos a probar a continuación

1. Para cualquier campo vectorial X en M se cumple $L_X d\omega = dL_X\omega$

Demostración. Usamos la identidad de Cartan para calcular $L_X d\omega$

$$\begin{aligned} L_X d\omega &= d(i_X d\omega) + i_X dd\omega \\ &= d(i_X d\omega) \\ &= d\left(L_X\omega - d(i_X\omega)\right) \\ &= d(L_X\omega). \end{aligned}$$

❑

2. Dados dos campos vectoriales X y Y, tenemos que

$$i_{[X,Y]}\omega = L_X \circ (i_Y\omega) - i_Y \circ (L_X\omega)$$

Demostración. Ver [**9**]. ❑

D. Grupos de Lie

Definición D15. Un grupo de Lie G es un grupo que es una variedad diferenciable tal que la aplicación $G \times G \longrightarrow G$ $(g,h) \mapsto gh$ es diferenciable.

Consideremos un grupo de Lie G y el elemento neutro e. Al espacio tangente en la identidad T_eG lo vamos a denotar por $\mathfrak{g}$. El objetivo es presentar las herramientas utilizadas sobre los campos vectoriales invariantes y el mapeo exponencial. Consideremos la multiplicación del grupo de Lie $G \times G \longrightarrow G$ $(g,h) \mapsto gh$. Para $g \in G$, definimos $L_g : G \longrightarrow G$, $h \mapsto gh$ la traslación izquierda y $R_g : G \longrightarrow G$ $h \mapsto hg$ la traslación derecha.

Definición D16. Sea G un grupo de Lie y X un campo vectorial sobre G. Decimos que X es invariante por la izquierda si $(L_g)_*X = X$ (resp. $(R_g)_*X = X$).

Denotemos como $\Gamma^L(TG)$ (respecto a la derecha) al conjunto de los espacios vectoriales invariantes por la izquierda (resp. $\Gamma^R(TG)$). Consideremos X y Ydos campos vectoriales en $\Gamma^L(TG)$. Como los dos campos vectoriales se preservan bajo traslación izquierda, podemos ver que para todo $g \in G$, $L_{g*}[X,Y] = [(L_g)_*X, (L_g)_*Y] = [X,Y]$. Sucede lo mismo con la traslación derecha.

Definición D17. Sea v un vector en $\mathfrak{g} = T_eG$. Definimos el campo vectorial generado por la izquierda como $X_v^L(g) := (dL_g)_e(v)$.

Definición D18. Sea G un grupo de Lie. En $\mathfrak{g}$ definimos el corchete de Lie como $[u,v] = [X_u^L, X_v^L](e)$ para dos vectores u, v en $\mathfrak{g}$.

Definición D19. Sean dos grupos de Lie G y H. Un homomorfismo entre G y H es una función diferenciable $f : G \longrightarrow H$ tal que, dados $g, h \in G$, tenemos que $f(gh) = f(g)f(h)$.

Definición D20. Sean G y H dos grupos de Lie con respectivas álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$. Una función $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie si para cualesquiera $u, v \in \mathfrak{g}$, $f([u,v]) = [f(u), f(v)]$.

Lema D21. *Sea $f : M \longrightarrow N$ una función diferenciable y consideremos los campos X, Y en $\Gamma(TM)$ y $\tilde{X}, \tilde{Y}$ en $\Gamma(TN)$. Si $f_*X = \tilde{X}$ y $f_*Y = \tilde{Y}$ entonces $f_*([X,Y]) = [f_*X, f_*Y]$.*

Demostración. La demostración puede consultarse en [**9**]. ❏

Teorema D22. *Sea $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos de Lie. Entonces $df_e = \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie.*

Demostración. Tenemos que verificar que para cualesquiera u, v en $\mathfrak{g}$, $df([u,v]) = [df_e(u), df_e(v)]$. Primero observemos que $df(X_u^L(g)) = df_g((dL_g)_e(u)) = d(f \circ L_g)_e(u)$. Como f es un homomorfismo, el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "L_g"'] & H \arrow[d, "L_{f(g)}"] \\ G \arrow[r, "f"'] & H. \end{tikzcd}$$

Siguiendo el diagrama anterior, tenemos

$$\begin{aligned} d(f \circ L_g)_e(u) &= d(L_{f(g)} \circ f)(u) \\ &= X^L_{df(u)}(f(g)). \end{aligned} \tag{D2}$$

De esta igualdad tenemos que $f_*(X_u^L) = X^L_{df(u)}$ y $f_*(X_v^L) = X^L_{df(v)}$. Ahora, usando la ecuación D2 y el lema D21

$$\begin{aligned} [df_e(u), df_e(v)] &= [X^L_{df(u)}, X^L_{df(v)}](e) \\ &= [f_*(X_u^L), f_*(X_v^L)](e) \\ &= f_*[X_u^L, X_v^L](e) \\ &= df_e([u,v]). \end{aligned}$$

❏

D.1. Mapa exponencial. Construimos campos vectoriales a partir de un vector tangente en $\mathfrak{g}$ mediante el diferencial de la traslación izquierda, que también puede ser construido para acciones derechas. Estos campos vectoriales los usamos para definir un corchete de Lie en $\mathfrak{g}$ y darle una estructura de álgebra de Lie. Además, cualquier campo vectorial en $\Gamma^L(TG)$ es invariante por la izquierda, por lo que los campos vectoriales se preservan bajo traslaciones. La siguiente proposición expone una propiedad muy importante sobre la completud de los campos vectoriales invariantes.

Definición D23. Sea M una variedad diferenciable M y X un campo vectorial. Decimos que X es completo si dado el flujo $\varphi : I \times D \longrightarrow M$ para cualquier $p \in M$, se tiene que $D = M$ y $I = \mathbb{R}$.

Teorema D24. *En todo grupo de Lie G los campos vectoriales invariantes son completos.*

Demostración. La demostración puede consultarse en [**9**, **13**]. ❏

La proposición anterior asegura entonces que dado un campo vectorial X invariante, el flujo φ tiene como dominio $\mathbb{R} \times G$, por lo que puede ser definido en todo el grupo de Lie. Esta propiedad permite que la siguiente definición tenga sentido

Definición D25. Sea G un grupo de Lie. El mapa $\exp : \mathfrak{g} \mapsto G$, $v \mapsto \varphi^v_1(e)$, donde φ^v es el flujo de X^L_v, es llamado mapa exponencial del grupo G.

Vamos a calcular la derivada del mapa exponencial en el cero de $\mathfrak{g}$. Vamos a calcular $d\exp_0(v)$ donde $v \in T_0\mathfrak{g}$, pero $v = \frac{d}{dt}v(t)$, donde $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{g}$ se define como $v(t) = tv$. Entonces

$$\begin{aligned} d\exp_0(v) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tv) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^{tv}_1(e) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^{v}_t(e) \end{aligned}$$

. Por definición del flujo de X^L_v, tenemos que $\frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi^v_y(e) = v$, es decir, $d\exp_0(v) = v$. Concluimos entonces que $d\exp_0 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ es la identidad.

Teorema D26. *Sea $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos de Lie. Entonces el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "df"] \arrow[d, "exp"'] & \mathfrak{h} \arrow[d, "exp"] \\ G \arrow[r, "f"'] & H \end{tikzcd}$$

Demostración. La demostración puede consultarse en [**9**]. ❑

D.2. Formas diferenciables invariantes. Consideremos una variedad diferenciable M donde actúa un grupo de Lie G. Dada una forma diferenciable $\omega \in \Omega(M)$, decimos que ω es izquierda invariante (resp. derecha) invariante bajo la acción de G si para todo elemento $g \in G$, la traslación L_G preserva ω, es decir $L_g^*\omega = \omega$.

Nos vamos a encargar ahora de estudiar un tipo muy particular de campos invariantes tomando que la variedad donde actúa un grupo de Lie G es el mismo grupo de Lie G, es decir, la operación $G \times G \longrightarrow G$ la vemos como una acción. Comencemos con una k forma alternante en T_eG llamada ω_e. Tomamos la acción izquierda L_g y generamos una k forma alternante en cada $T_{g^{-1}}G$ de esta forma $\omega_{g^{-1}} := L_g^*\omega_e$. Dados $\eta_1, \ldots, \eta_k$ en T_gG existen $\xi_1, \ldots, \xi_k$ en T_eG tales que $\xi_i = (dL_g)_e(\eta_i)$, pues L_g es un difeomorfismo, de forma que

$$\omega_g(\eta_1, \ldots, \eta_k) = \omega_e(\xi_1, \ldots, \xi_k).$$

Consideremos dos campos vectoriales X y Y en G que son invariantes por la derecha ó izquierda tales que $X(e) = u$ y $Y(e) = v$ y una 1 forma ω en G. Sabemos por [**9**] que se cumple la siguiente igualdad

$$d\omega(X, Y) = X.\omega(Y) - Y.\omega(X) - \omega([X, Y]).$$

Como ω es invariante y X y Y son invariantes, podemos asegurar que $X.\omega(Y) = 0$ y $Y.\omega(X) = 0$. De estas dos igualdades obtenemos que $d\omega_e(u, v) = \omega_e([u, v])$ en $e \in G$.

Definición D27. En un grupo de Lie G, definimos el mapa inversión como $i : G \longrightarrow G$ $g \mapsto g^{-1}$.

Notemos que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "R_g"] \arrow[d, "i"'] & G \arrow[d, "i"] \\ G \arrow[r, "L_{g-1}"'] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Omega(G) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "L^*_{g-1}"'] & \Omega(G) \arrow[d, "R^*_g"] \\ \Omega(G) \arrow[r, "i^*"'] & \Omega(G) \end{tikzcd}$$

Lema D28. *El diferencial* $di_e : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ *es* $-\mathrm{id}$.

Demostración. Solo calculamos la derivada de la exponencial $di_e(v)$ para $v \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} di_e(v) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} i\left(\exp(tv)\right) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(-tv) \\ &= -v. \end{aligned}$$

Entonces $di_e(v) = -v$. ❑

Teorema D29. *Sea* G *un grupo de Lie y* $\omega \in \Omega^k(M)$. *Entonces*

1. $i^*\omega_e = (-1)^k\omega_e$.
2. *Si* ω *es izquierda y derecha invariante, entonces* $d\omega = 0$.

Demostración. Consideremos $u_1, \dots, u_k$, vectores en $\mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} (i^*\omega)_e(u_1, \dots, u_k) &= \omega_e(di_e(u_1), \dots, di_e(u_k)) \\ &= \omega(-u_1, \dots, -u_k) \\ &= (-1)^k\omega(u_1, \dots, u_k). \end{aligned}$$

Ahora, consideremos que ω es invariante por la izquierda y la derecha. Tenemos siguiendo los diagramas conmutativos anteriores, entonces $i^*\omega$ y $d\omega$ son invariantes por la derecha e izquierda. Siguiendo esto, tenemos que

$$\begin{aligned} i^*\omega_e &= (-1)^k\omega_e \\ i^*d\omega_e &= d(i^*\omega_e) \\ (-1)^{k+1}d\omega_e &= d((-1)^k\omega_e). \end{aligned}$$

Entonces tenemos que $(-1)^{k+1}d\omega = (-1)^k d\omega$, que implica entonces que $d\omega_e = 0$ en e. Usando la invarianza para todo $g \in G$ obtenemos que $d\omega = 0$ ❑

Teorema D30. *Sea G un grupo de Lie conmutativo, entonces $\mathfrak{g}$ es conmutativo.*

Demostración. Para probar que $\mathfrak{g}$ es conmutativo, debemos ver que $[u, v] = 0$ para $u, v \in \mathfrak{g}$ arbitrarios. Consideremos un covector $\alpha_e \in \mathfrak{g}$. Mediante la traslación L_g generamos una 1-forma $\beta := L_g^* \alpha_e$ que es izquierda invariante, y como G es conmutativo, β es también derecha invariante. Tenemos entonces que $d\beta = 0$. Ahora, siguiendo los cálculos al inicio el capítulo, tenemos que $d\beta_e(u, v) = \alpha_e([u, v])$, pero como $d\beta = 0$, tenemos que $\alpha_e([u, v]) = 0$. Entonces $[u, v] = 0$ y por lo tanto $\mathfrak{g}$ es conmutativo. ❑

E. Representación adjunta

Consideremos un grupo de Lie G. Para $g \in G$ definimos la conjugación $C_g : G \longrightarrow G$ como $C_g(h) = ghg^{-1}$. Consideremos la conjugación C_g en G y para el mismo $g \in G$ la conjugación $C_{g^{-1}}$. Calculamos en $h \in G$ arbitrario $C_g \circ C_{g^{-1}}(h) = C_g(g^{-1}hg) = g(g^{-1}hg)g^{-1} = h$. Calculamos ahora $C_{g^{-1}} \circ C_g(h) = C_{g^{-1}}(ghg^{-1}) = g^{-1}(ghg^{-1})g = h$. Podemos concluir que la conjugación es biyectiva, y por lo tanto es un difeomorfismo.

Definición E31. Dado un grupo de Lie G, en cada $g \in G$ definimos $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ como $\mathrm{Ad}_g := (dC_g)_e$.

Como C_g es un difeomorfismo, podemos garantizar que Ad_g es un isomorfismo de espacios vectoriales. Entonces por cada $g \in G$, tenemos un isomorfismo $\mathrm{Ad}_g \in Aut(\mathfrak{g})$, por lo que podemos establecer una relación bien definida $\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, $g \mapsto \mathrm{Ad}_g$.

Como C_g es diferenciable se puede verificar que $\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ es diferenciable y esto permite que podamos calcular la derivada de Ad en la identidad e. Denotamos a la derivada $(d\mathrm{Ad})_e$ como ad, obteniendo de esta forma un mapa $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$

Teorema E32. *Sea G un grupo de Lie y* $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. *Entonces para cualesquiera* $\mathrm{ad}(u)(v) = [u, v]$.

Demostración. Recordemos que el campo vectorial X_u^L es invariante y tiene como flujo $\varphi^u : G \times \mathbb{R} \longrightarrow G$, $\varphi_t^u(g) = g \exp(tu)$. Sabemos por el teorema 4.10 $[X_u^L, X_v^L](e) = L_{X_u^L} X_v^L(e)$

y entonces

$$
\begin{aligned}
[u,v] &= [X_u^L, X_v^L](e) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_t^u)^* X_v^L(\varphi_t^u(e)) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \left(\varphi_{-t}^u(\varphi_s^v(\varphi_t^u(e)))\right)\right) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp(tu)\exp(sv)\exp(-tu)g \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp(tu)\exp(sv)\left(\exp(tu)\right)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Calculamos la última igualdad y obtenemos que $\frac{d}{dt}|_{t=0}\frac{d}{ds}|_{s=0}\exp(tu)\exp(tv)(\exp(tu))^{-1} = \frac{d}{dt}|_{t=0}\mathrm{Ad}_{\exp(-tu)}v$. Por definición de $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ podemos concluir que $\frac{d}{dt}|_{t=0}\mathrm{Ad}_{\exp(tu)}v = \mathrm{ad}(u)(v)$. ❏

F. Variedades simplécticas

Definición F33. Sea M una variedad diferenciable. Si existe una forma $\omega \in \Omega^2(M)$ que es cerrada y no degenerada, decimos que el par (M,ω) es una variedad simpléctica.

Consideremos la esfera $\mathbb{S}^2$ con la 2 forma $\omega_p(u,v) = \det(p,u,v)$ con $p \in \mathbb{S}^2$ y $u, v \in T_p\mathbb{S}^2$. Como la esfera es de dimensión dos y ω es una dos forma, podemos asegurar que $d\omega = 0$. Ahora, si $\omega_p(u,v) = 0$ para todo $u \in T_p\mathbb{S}^2$, se tiene que $\det(p,u,v) = 0$ y como p es no nulo, esto implica que $v = 0$ y por lo tanto ω es no degenerada. De lo anterior concluimos que ω es simpléctica y por lo tanto $(\mathbb{S}^2,\omega)$ es una variedad simpléctica.

Dada una variedad simpléctica (M,ω) podemos preguntarnos si la forma simpléctica ω es exacta, es decir, si existe una 1-forma $\alpha \in \Omega^1(M)$ tal que $\omega = d\alpha$. Para poder responder este cuestionamiento, podemos que relacionar la forma simpléctica con una forma de volumen en una variedad.

Teorema F34. *Sea (M,ω) una variedad simpléctica. Entonces la 2n-forma ω^n es una forma de volumen.*

Demostración. La demostración puede verse en [**2**] ❏

Teorema F35. *Sea (M,ω) una variedad simpléctica compacta sin frontera. Entonces, no existe $\alpha \in \Omega^1(M)$ tal que $\omega = d\alpha$.*

Demostración. Primero, supomgamos que si existe $\alpha \in \Omega^1(M)$ tal que $\omega = d\alpha$. Podemos escribir la forma de volumen ω^n como $\omega \wedge \cdots \wedge \omega = (d\alpha) \wedge \cdots \wedge \omega = d(\alpha \wedge \omega^{(n-1)})$. Como M tiene una forma de volumen, podemos integrar ω^n en M y mas aun

$$\int_M \omega^n \neq 0.$$

Por otro lado, como M es cerrada, usamos el teorema de Stokes para calcular $\int_M \omega^n$

$$\int_M \omega^n = \int_M d(\alpha \wedge \omega^{n-1}) = \int_{\partial M} \alpha \wedge \omega^{n-1} = 0.$$

Por un lado tenemos que $\int_M \omega^n$ es no nulo y por otro que es nulo, que es una contradicción. ❏

Teorema F36 (Teorema de Darboux). *Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Dado un punto $p \in M$ existe una carta (U, φ) con coordenadas $(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)$ tal que la forma simpléctica ω en estas coordenadas tiene la forma*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dp_i$$

Demostración. La demostración puede encontrarse en [**11**] ❏

A menudo a la carta dada en el teorema de Darboux se llama carta de Darboux y las coordenadas de dicha carta se denominada coordenadas de Darboux.

F.1. Campos vectoriales hamiltonianos.

Definición F37. Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $X \in \Gamma(TM)$ un campo vectorial. Si existe $H \in C^\infty(M)$ tal que $i_X\omega = dH$, decimos que H es el hamiltoniano asociado al campo vectorial X.

Definición F38. Sea (M, ω) una variedad diferenciable y $H \in C^\infty(M)$ un Hamiltoniano. El único campo vectorial $X_H \in \Gamma(TM)$ tal que $i_{X_H}\omega = dH$, es llamado el campo asociado al hamiltoniano H.

Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Definimos la correspondencia $\Phi : \Gamma(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$, $X \mapsto i_X\omega$. Veamos que $\Phi(\alpha X + \beta Y) = i_{\alpha X + \beta Y}\omega = \alpha i_X\omega + \beta i_Y\omega$ y entonces $\Phi(\alpha X + \beta Y) = \alpha\Phi(X) + \beta\Phi(Y)$ y entonces es lineal.

Sea (M, ω) una variedad simpléctica, definimos el corchete de Poisson $\{,\}$ de esta forma: dados f, g funciones diferenciables y sus campos vectoriales asociados X_f, X_g, definimos $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$. Notemos que $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = df(X_g) = -dg(X_f)$.

1. Podemos ver que para f una función diferenciable y α un número real, $X_{\alpha f} = \alpha X_f$. Podemos concluir que el corchete de Poisson es bilineal.
2. Es antisimétrica.
3. Consideremos f, g, h funciones diferenciables. Entonces $\{fg, h\} = d(fg)(X_h) = fdg(X_h) + gdf(X_h) = f\{g, h\} + g\{f, h\}$.
4. Cumple con la identidad de Jacobi $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$.

Cada unos de los propiedades del corchete de Poisson sobre una vaeridad simpléctica M puede ser consultado en [**1**–**3**, **11**], considerando que cada autor propone diferentes definiciones del corchete de Poisson.

Definición F39. Sean (M, ω) y (N, τ) dos variedades simplécticas. Una función $f : M \longrightarrow N$ es un simplectomorfismo si es un difeomorfismo y $f^*\tau = \omega$.

Definición F40. Un campo vectorial $X \in \Gamma(M)$ es simpléctica si la 1-forma inducida $i_X\omega$ es cerrada.

Proposición F41. *Consideremos un campo vectorial $X \in \Gamma(M)$ de una variedad simpléctica (M, ω) tal que el flujo de X es $\varphi : I \times D \longrightarrow M$ donde $I \subset \mathbb{R}$ contiene al cero y $D \subset M$ abierto. Entonces para $t \in I$, φ_t es un simplectomorfismo si y solo si el campo vectorial X es simpléctico.*

Demostración. Primero suponemos que X es simpléctico, que por definición $d(i_X\omega) = 0$. Vamos a calcular $\frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_t^*\omega$. Primero consideremos la igualdad $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi_t^*\omega = L_X\omega$ y después por la igualdad de Cartan, tenemos que $L_X\omega = d(i_X\omega) + i_X d\omega = 0$, pués $i_X d\omega = 0$ por que ω es una forma simpléctica y $d(i_X\omega) = 0$. Entonces obtenemos que $\frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_t^*\omega = (L_X\omega) = 0$ Ahora, supongamos que $\varphi_t^*\omega = \omega$ para todo $t \in I$, de donde podemos comprobar que $\frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_t^*\omega = 0$. Por la igualdad de Cartan $\frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_t^*\omega = L_X\omega = d(i_X\omega) = 0$ por la igualdad anterior. ❑

Bibliografía

[1] Abraham, R.; Marsden, Jerrold E. Foundations of mechanics. Second edition. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass., 1978.

[2] Arnol'd, V. I. Mathematical methods of classical mechanics. Translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 60. Springer-Verlag, New York, 1989.

[3] Berndt, R. An introduction to symplectic geometry. Translated from the 1998 German original by Michael Klucznik. Graduate Studies in Mathematics, 26. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[4] Do Carmo, M. P. Riemannian geometry. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.

[5] Goldstein, H. Classical mechanics. Second edition. Addison-Wesley Series in Physics. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1980.

[6] Giaquinta,M.; Modica, Giuseppe Mathematical analysis. An introduction to functions of several variables. Translated and revised from the 2005 Italian original. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2009.

[7] Hirsch, M. W. Differential topology. Corrected reprint of the 1976 original. Graduate Texts in Mathematics, 33. Springer-Verlag, New York, 1994.

[8] Knapp, A. W. Lie groups beyond an introduction. Second edition. Progress in Mathematics, 140. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.

[9] Lee, J. M. Manifolds and differential geometry. Graduate Studies in Mathematics, 107. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[10] Marsden, J. E.; Ratiu, T. S. Introduction to mechanics and symmetry. A basic exposition of classical mechanical systems. Second edition. Texts in Applied Mathematics, 17. Springer-Verlag, New York, 1999.

[11] McDuff, D.; Salamon, D. Introduction to symplectic topology. Second edition. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.

[12] Michor, P. W.Topics in differential geometry. Graduate Studies in Mathematics, 93. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[13] Spivak, M. A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. I. Second edition. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1979.

[14] R. K. P. Zia; F. Redish; R. McKay *Making sense of the Legendre transform.* American Journal of Physics vol:77 614-622, 2009.