



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
"MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ"

**ECUACIÓN DE GAP PARA QUARKS: SOLUCIONES E
IMPLICACIONES**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:
GUSTAVO PAREDES TORRES

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ADNAN BASHIR



MORELIA MICH.

FEBRERO DE 2019

A mis padres.

Papá y Mamá, les doy las gracias por las noches desveladas, por los alimentos y enseñanzas, por sentirme tan querido y por haberme educado, castigado y regañado. Este es su regalo. Entre los dos me han formado, y cada uno querido, así su amor sumado, que es como lo he sentido, siempre me ha acompañado y hoy les soy agradecido.

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que de alguna manera me apoyaron para terminar la carrera con la elaboración de este trabajo de tesis. Agradezco a mis padres por el apoyo que me han brindado a lo largo de mi vida, por su cariño y la confianza depositada en mí. A mi familia por la típica frase “ten \$50 para una torta” y la otra “¿Como va la tesis?”.

Un agradecimiento especial a mi asesor, el doctor Adnan Bashir, por todo el apoyo que me brindo, aun sabiendo que no estaba inscrito a alguna institución acepto ser mi asesor, por la paciencia que tuvo y en especial por los consejos que me dio. También gracias a él pude conocer parte de México.

Agradezco toda la ayuda y la paciencia que tuvieron conmigo los doctores Laura Xiomara Gutiérrez Guerrero, Khépani Raya Montaña, Luis Albino Fernandez Rangel, Marco Antonio Bedolla Hernández.

Agradezco a la casa de estudiantes “2 De Octubre” de la UMSNH por el apoyo a lo largo de la carrera.

Nada es imposible si Dios está de mi lado.

Morelia MEX., 28 de febrero de 2019

Resumen

Empezamos con una introducción detallada de la cromodinámica cuántica (QCD). Escribimos su Lagrangiano y revisamos sus simetrías. En particular, estudiamos la simetría quiral y su rompimiento dinámico. Una de las herramientas poderosas para hacerlo son las ecuaciones de Schwinger-Dyson (SDEs). Después de una descripción diagramática de estas ecuaciones, resolvemos la ecuación de gap para quarks, usando diferentes modelos para el producto del propagador gluónico y el vértice quark-gluon. Posteriormente, realizamos una parametrización de la solución en términos de polos complejos conjugados. Esto consiste en escribir al propagador del quark como la suma de algunos propagadores libres con masas complejas (y sus complejos conjugados). Esta parametrización es extremadamente útil y practica para el estudio de las propiedades hadrónicas a través de las SDEs y ecuaciones de Bethe-Salpeter.

Palabras clave: Feynman, lagrangiano, cuántica, parametrización, pión.

Abstract

We start with a detailed introduction of quantum chromodynamics (QCD). We write your Lagrangian and we check its symmetries. In particular, we study chiral symmetry and its dynamic breaking. One of the powerful tools to do this is the Schwinger-Dyson equations (SDE). After a diagrammatic description of these equations, we solve the equation of the gap for the quarks, using different models for the product of the gluonic propagator and the vertex quark-gluon. Subsequently, we perform a parameterization of the solution in terms of complex conjugate poles. This consists of writing to the propagator of the quark as the sum of some free propagators with complex masses (and their conjugated complexes). This parameterization is extremely useful and practical for the study of the properties through SDE and Bethe-Salpeter equations.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	III
1. QCD: Generalidades	3
1.1. Introducción	3
1.2. Lagrangiano de QCD	4
1.3. Simetrías del Lagrangiano	8
1.3.1. Teorema de Noether	8
1.3.2. Simetría de Sabor y Número Bariónico	10
1.3.3. Bosones de Goldstone y Simetrías Quirales	10
1.3.4. Rompimiento Espontáneo de la Simetría Quiral.	17
1.3.5. Anomalías de las Corrientes Quirales.	22
2. Ecuaciones de Schwinger-Dyson	27
2.1. Reglas de Feynman.	29
2.1.1. Ecuación de Gap	33
2.2. Representaciones del propagador del quark	40
2.3. Truncamiento de las ecuaciones de Schwinger-Dyson	41
2.3.1. Aproximación Arcoíris para DSE	43
2.3.2. Acoplamiento Efectivo	44
2.4. Solución General	49
2.4.1. Solución a La Ecuación de Gap	50
2.5. Resultados Numéricos	53
2.5.1. Límite Quiral	54
2.5.2. Fuera del Limite Quiral	60
2.5.3. Confinamiento	65
2.5.4. Parametrización de las Soluciones	66
3. Conclusiones	79
A. Convención Euclidiana y Trazas	81
A.1. Convención Euclidiana	81
A.2. Matrices Gamma	81
A.3. Trazas	82
A.4. Hermiticidad	83
A.5. Notación Slash de Feynman	83
Bibliografía	85

Índice de figuras

1.1. Un par quark-antiquark "condensado" con momento total y momento angular cero.	17
1.2. Corriente isospín axial en el nucleón: (a) Cinemática de la amplitud. (b) Contribución que conduce a un polo en $p^2 = 0$	20
1.3. Diagramas que conducen a una anomalía vectorial axial para una corriente quiral en QCD.	22
1.4. Contribución que conduce a un polo en el vector axial M_1	25
2.1. Resultados experimentales para la dependencia de la constante de acoplamiento fuerte $g_s(Q^2)$ como función de la energía [20].	28
2.2. Diagramas de Feynman para el Quark y el Propagador.	30
2.3. Diagramas de Feynman para el Gluon y su Propagador.	30
2.4. Diagrama de Feynman para el Campo Fantasma.	30
2.5. Diagrama de Feynman para el Vértice Quark-Gluon.	31
2.6. Diagramas de Feynman para el Vértice de 3 Gluones.	31
2.7. Diagramas de Feynman para el Vértice de 4 Gluones.	32
2.8. Propagación General del Quark.	32
2.9. Propagador General para el Gluon.	32
2.10. Aproximación quenched para el propagador completo del gluon.	33
2.11. Propagador del fotón.	33
2.12. Aproximación quenched para el propagador completo del gluon.	33
2.13. Términos en la serie perturbativa del propagador del quark.	34
2.14. Correcciones al propagador fermiónico.	34
2.15. Correcciones al propagador del fotón.	34
2.16. Correcciones al vértice.	35
2.17. Re-Correcciones de todas las correcciones.	35
2.18. Primera simplificación de los términos en serie perturbativa mostrados en la figura {2.13}.	35
2.19. Expansión de la figura {2.18}.	36
2.20. Diagrama que corresponde a la autoenergía $\Sigma(p)$	36
2.21. Representación esquemática de la Ecuación de Schwinger-Dyson para un quark en QED.	36
2.22. Representación esquemática de la Ecuación de Schwinger-Dyson para el propagador del quark en QCD.	37
2.23. Representación esquemática del propagador del gluon en QCD.	37
2.24. Representación esquemática para el propagador del fantasma en QCD.	37
2.25. Representación esquemática del vértice quark-gluon en QCD.	37
2.26. Representación esquemática para el vértice gluon-fantasma en QCD.	38

2.27. La Ecuación de Schwinger-Dyson para la energía propia del quark.	39
2.28. Propagador del Gluon comparación con IQCD y ESD.	42
2.29. DSE para el propagador del quark con la aproximación arcoíris.	43
2.30. Modelo MT. Término no perturbativo $\mathcal{G}_{NP}(k^2)$ (línea solida naranja), término perturbativo $\mathcal{G}_P(k^2)$ (línea punteada azul), parte completa $\mathcal{G}(k^2)$ (línea punteada verde). Se observa que la contribución en el infrarrojo viene del término no perturbativo.	46
2.31. Modelo MT. Término no perturbativo $\mathcal{G}_{NP}(k^2)$ (línea solida naranja), término perturbativo $\mathcal{G}_P(k^2)$ (línea punteada azul). Se observa que la contribución en el ultravioleta viene del término perturbativo.	46
2.32. Modelo QC. Término no perturbativo $\mathcal{G}_{NP}(k^2)$ (línea solida naranja), término perturbativo $\mathcal{G}_P(k^2)$ (línea punteada azul), parte completa $\mathcal{G}(k^2)$ (línea punteada verde). Se observa que la contribución en el infrarrojo viene del término no perturbativo.	47
2.33. Modelo QC. Término no perturbativo $\mathcal{G}_{NP}(k^2)$ (línea solida naranja), término perturbativo $\mathcal{G}_P(k^2)$ (línea punteada azul). Se observa que la contribución en el ultravioleta viene del término perturbativo.	48
2.34. Acoplamiento efectivo. Modelo QC (rojo, línea solida) y modelo MT (azul, línea punteada). Los modelos se interceptan en $k^2 \approx 0.096 \text{ GeV}^2$ y $k^2 \approx 1.23 \text{ GeV}^2$	48
2.35. Función de masa para el gluon obtenida con el modelo QC a través de la ecuación 2.31.	49
2.36. Acoplamiento-corriendo QCD-like inducido por la interacción QCD.	50
2.37. Función de Masa para el modelo MT en el limite quiral para $\mu = 4 \text{ GeV}$ (azul, línea punteada) y para $\mu = 19 \text{ GeV}$ (rojo, línea solida). Los valores de $M(0)$ son 0.502102 GeV y 0.4900388 GeV respectivamente, los cuales muestran un error del 2.203 %.	56
2.38. Función de Masa para el modelo QC en el limite quiral para $\mu = 4 \text{ GeV}$ (azul, línea punteada) y para $\mu = 19 \text{ GeV}$ (rojo, línea solida). Los valores de $M(0)$ son 0.342213 GeV y 0.316233 GeV respectivamente, los cuales muestran un error del 7.59155 %.	57
2.39. Función de masa para los modelos MT (azul, línea punteada) y QC (rojo, línea solida) para $\mu = 4 \text{ GeV}$	57
2.40. Renormalización de la Función de Masa para los modelos MT (azul, línea punteada) y QC (rojo, línea solida) para $\mu = 4 \text{ GeV}$	58
2.41. Función de Masa (azul, puntos), Renormalización de la Función de Masa (naranja, puntos y líneas), función de vestimento A (verde, línea sólida) y función de vestimento B (rojo, líneas) para el modelo MT y $\mu = 4 \text{ GeV}$	58
2.42. Función de Masa (azul, puntos), Renormalización de la Función de Masa (naranja, puntos y líneas), función de vestimento A (verde, línea sólida) y función de vestimento B (rojo, líneas) para el modelo QC y $\mu = 4 \text{ GeV}$	59
2.43. Parte vectorial (azul, línea sólida) y escalar (naranja, líneas) del propagador del quark para el modelo MT con $\mu = 4 \text{ GeV}$	59
2.44. Parte vectorial (azul, línea sólida) y escalar (naranja, líneas) del propagador del quark para el modelo QC con $\mu = 4 \text{ GeV}$	60
2.45. Función de Masa utilizando el modelo MT para el quark s con masa semilla $m_s(\mu) = 95 \text{ MeV}$ para los puntos de renomalización $\mu = 4 \text{ GeV}$ (azul, línea punteada) y $\mu = 19 \text{ GeV}$ (rojo, líneas).	61

2.46. Función de Masa utilizando el modelo QC para el quark s con masa semilla $m_s(\mu) = 95 \text{ MeV}$ para los puntos de renormalización $\mu = 4 \text{ GeV}$ (azul, línea punteada) y $\mu = 19 \text{ GeV}$ (rojo, líneas).	62
2.47. Comparación de la Función de Masa entre los modelos MT (azul, línea punteada) y QC (rojo, líneas) para el quark s y el punto de renormalización $\mu = 4 \text{ GeV}$.	62
2.48. Comparación de la Función de Renormalización de la Función de Onda entre los modelos MT (azul, línea punteada) y QC (rojo, líneas) para el quark s y el punto de renormalización $\mu = 4 \text{ GeV}$.	63
2.49. Función de masa (azul, línea punteada) y renormalización de la función de onda (rojo, líneas) para el límite quiral.	64
2.50. Funciones de Masa para los diferentes quarks: $m_{u/d} = 3.74 \text{ MeV}$ (naranja, líneas pequeñas), $m_s = 95 \text{ MeV}$ (verde, línea sólida delgada), $m_c = 1.4 \text{ GeV}$ (rojo, líneas y puntos), $m_b = 5.3 \text{ GeV}$ (morado, líneas grandes), $m_t = 175 \text{ GeV}$ (café, línea sólida gruesa) y el limite quiral (azul, línea punteada). Se muestran las masas utilizando el modelo MT, para el modelo QC la forma es la misma.	64
2.51. Promedio espacial de la función de Schwinger para los modelos MT(rojo) y QC(azul).	65
2.52. Ecuación de Bethe-Salpeter.	66
2.53. Se muestra la parte imaginaria de la parte vectorial del propagador del quark para el limite quiral con el modelo MT. Podemos observar que no hay comportamiento inestable pero vemos indicios de singularidades conjugadas complejas cerca del pico de la región, el tipo de singularidad es desconocido.	67
2.54. Se muestra la parte imaginaria de la parte vectorial del propagador del quark para el limite quiral con el modelo MT. Podemos observar que no hay comportamiento inestable pero vemos indicios de tres pares de singularidades conjugadas complejas cerca del pico de la región, el tipo de singularidad es desconocido.	68
2.55. Se muestra la parte real de la parte escalar del propagador del quark para el limite quiral con el modelo MT. Podemos observar que no hay comportamiento inestable pero vemos tres pares de singularidades conjugadas complejas cerca del pico de la región, el tipo de singularidad es desconocido	69
2.56. Se muestra la parte real de la parte vectorial del propagador del quark en el limite quiral para el modelo QC. Podemos observar que no hay comportamiento inestable pero vemos un par de singularidades conjugadas complejas, el tipo de singularidad es desconocido.	70
2.57. Se muestra la parte real de la parte vectorial del propagador del quark para el quark s con el modelo MT. Podemos observar que no hay comportamiento inestable además vemos un par de singularidades conjugadas complejas, el tipo de singularidad es desconocido.	71
2.58. Parte imaginaria de σ_v en el plano complejo para diferentes ángulos en el límite quiral con el modelo QC. 90° (azul, línea punteada), 110° (naranja, líneas pequeñas), 132° (verde, línea sólida), 167° (rojo, líneas y puntos) y 180° (morado, líneas grandes).	72
2.59. Parte real de σ_v en el plano complejo para diferentes ángulos en el límite quiral con el modelo QC. 90° (azul, línea punteada), 110° (naranja, líneas pequeñas), 132° (verde, línea sólida), 167° (rojo, líneas y puntos) y 180° (morado, líneas grandes).	72

2.60. Parte imaginaria de σ_v en el plano complejo para diferentes ángulos para el quark s con el modelo MT. 90° (azul, línea punteada), 110° (naranja, líneas pequeñas), 132° (verde, línea sólida), 167° (rojo, líneas y puntos) y 180° (morado, líneas grandes).	73
2.61. Parte real de σ_v en el plano complejo para diferentes ángulos para el quark s con el modelo MT. 90° (azul, línea punteada), 110° (naranja, líneas pequeñas), 132° (verde, línea sólida), 167° (rojo, líneas y puntos) y 180° (morado, líneas grandes).	73
2.62. Se muestra la parte vectorial del propagador del quark en el limite quiral con el modelo MT. Solución de las gap (rojo), aproximación 3-ccp (azul).	75
2.63. Se muestra la parte escalar del propagador del quark en el limite quiral con el modelo MT. Solución de las gap (rojo), aproximación 3-ccp (azul).	75
2.64. Se muestra la parte vectorial del propagador del quark en el limite quiral con el modelo QC. Solución de las gap (rojo), aproximación 2-ccp (azul).	76
2.65. Se muestra la parte escalar del propagador del quark en el limite quiral con el modelo QC. Solución de las gap (rojo), aproximación 2-ccp (azul).	76
2.66. Se muestra la parte escalar del propagador del quark s con el modelo MT. Solución de las gap (rojo), aproximación 3-ccp (azul).	77
2.67. Se muestra la parte vectorial del propagador del quark s con el modelo MT. Solución de las gap (rojo), aproximación 3-ccp (azul).	77

Índice de cuadros

2.1. Se muestran los resultados de la comparación para diferentes valores entre los dos modelos mencionados en este trabajo de esta tesis para el límite quiral, todos los valores tienen unidades de GeV	55
2.2. Constante de decaimiento para el pión en GeV . RL se refiere al truncamiento Arcoiris mostrado en la ecuación {2.24}, DB se refiere a un truncamiento más sofisticado mostrado en [26] y IQCD se refiere al promedio de resultados de lattice QCD también mostrado en [26].	55
2.3. Masa del mesón pión en GeV .* El valor de m_π es el promedio entre m_{π^0} y m_{π^+}	55
2.4. Valores para la función de Masa para diferentes quarks y diferente punto de renormalización utilizando el modelo MT.	60
2.5. Valores para la función de Masa para diferentes quarks y diferente punto de renormalización utilizando el modelo QC.	61
2.6. Masas de los distintos quarks.	63
2.7. Resultados numéricos para los parámetros z_k y m_k en el límite quiral con el modelo MT.	75
2.8. Resultados numéricos para los parámetros z_k y m_k en el límite quiral con el modelo QC.	76
2.9. Resultados numéricos para los parámetros z_k y m_k para el quark s con el modelo MT.	77

Capítulo 1

QCD: Generalidades

1.1. Introducción

En los años sesentas, previo a la formulación de la Cromodinámica Cuántica (QCD por sus siglas en ingles), las interacciones electromagnéticas habían sido descritas exitosamente por una teoría cuántica de campos (QFT por sus siglas en ingles) la Electrodinámica Cuántica QED. Sin embargo, las interacciones fuertes dentro de un núcleo o para hadrones en general fueron estudiadas a través del Modelo de Quarks, reproduciendo, a grosso modo, el espectro de hadrones, relaciones entre sus masas y otras propiedades estáticas [1]. Este modelo logro clasificar los hadrones conocidos y además predijo la existencia y masa del barion Ω^- (Premio Nobel a Gell-Mann en 1969). Nambu y Han incluyen el número cuántico de color (cada quark viene en 3 colores) quitando el problema de estadística Fermi-Dirac [2].

Experimentos de dispersión inelástica profunda en los años 1960s y 1970s demostraron la existencia de los quarks. Por esta razón el grupo de color dado por Fritzsche, Gell-Mann y Leutwyler [3] se interpretó como grupo de norma. La interacción de quarks se debe a un octete de bosones de norma no masivos llamados gluones. A esto se le llamó QCD.

La QCD es una teoría no abeliana por la interacción de los bosones de norma. El acoplamiento se vuelve débil cuando la escala de energía es grande (poca separación entre quarks), teoría asintóticamente libre. Así los quarks se comportan como partículas quasi-libres y es posible un tratamiento perturbativo de QCD, esto descubierto por Gross, Wilczek [4], [5] y Politzer [6] en 1973 (Premio Nobel 2004). En la escala de energía pequeña (separación grande entre quarks), el acoplamiento es muy grande y los quarks se encuentran confinados en hadrones. Otra consecuencia es la generación dinámica de masas: quarks y gluones adquieren masa (efectiva) de manera dinámica dentro de los hadrones, llamada Ruptura Dinámica de Simetría Quiral (DCSB por sus siglas en ingles); el 98 % de la masa en el universo luminoso se debe a este mecanismo. Confinamiento y DCSB son dos fenómenos emergentes de QCD de gran importancia en el espectro y dinámica de la estructura nuclear y hadrónica. La QCD es la parte del Modelo Estándar de física de partículas (SM por sus siglas en ingles) que estudia las interacciones fuertes; interacciones que gobiernan la física nuclear / hadrónica y que dan la mayor parte de la masa a la materia visible.

Una de las manera de abordar el estudio de QCD, a nivel de quarks, es a través de las

Ecuaciones de Schwinger-Dyson (SDE por sus siglas en ingles): exactas, no perturbativas e invariantes de Poincaré; consistentes con confinamiento, DCSB y QCD perturbativa [7, 8, 10, 11].

Debido a que en la naturaleza no es posible encontrar los quarks libres, pues estos siempre se encuentran formando partículas compuestas de ellos (hadrones), es de nuestro interés poder describir la física a este nivel; para ésto, hemos elegido a los piones como nuestro objeto de estudio. Para describir piones, y en general cualquier mesón, recurrimos a la Ecuación de Bethe-Salpeter [9] que es la ecuación que describe estados ligados de dos partículas, o bien, la SDE para la función de cuatro puntos, esto para una interacción de contacto [12, 13] que es un modelo donde el momento del gluón no interviene en la ecuación (proporciona automáticamente $\alpha = 0$); pues en el diagrama de Feynman correspondiente a una dispersión qq no aparece el gluón que intercambian y simplemente se tiene un diagrama con 4 puntas que corresponden a los quarks entrantes y salientes. Los piones son de gran interés en la física hadrónica debido a su naturaleza como Bosón de Goldstone. Cuando se rompe la simetría quiral, es necesaria la existencia de los piones; y cuando esta simetría se rompe además de manera explícita mediante la masa de los quarks, automáticamente tenemos piones masivos, pero ligeros en comparación con los demás hadrones. De ésta forma, podemos relacionar la existencia de los piones y la Generación de Masas mediante un único fenómeno, que es DCSB.

Comenzamos mostrando el lagrangiano de QCD, explicando sus términos y significado físico; posteriormente se discutirán generalidades de las SDEs.

1.2. Lagrangiano de QCD

El lagrangiano es una función escalar a partir de la cual se pueden obtener las ecuaciones de movimiento para todos los campos involucrados. El lagrangiano se considera el objeto más fundamental que describe un sistema físico en teoría cuántica de campos. En el caso de QCD, ésta se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 - (\partial^\mu \bar{\eta}_a)(\partial_\mu \eta_a) - gf_{abc}(\partial_\mu \bar{\eta}_a)A_b^\mu \eta_c \\ & + \sum_{j=1}^{N_f} \bar{\psi}_l^j (i\gamma^\mu D_\mu - m_j)\psi_l^j. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Estudiemos cada uno de sus términos tomando unidades de Plank o naturales, es decir $\hbar, c = 1$:

- El primer término contiene la dinámica de los campos de norma (gluones, representados por A_μ^a), es decir, su energía cinética y sus auto-interacciones. Notamos que $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c$ es el tensor de campo gluónico (fuerza del campo gluónico), análogo al tensor de campo electromagnético (fotón). Aquí, g es el acoplamiento, y $a = 1, 2, 3, \dots, 8$ es el índice de color.
- El segundo término, es el término que fija la norma, siendo ξ el parámetro covariante de norma: $\xi = 0$ corresponde a la Norma de Landau, $\xi = 1$ a la Norma de Feynman.

La física no es afectada por el valor de ξ .

- Los campos η_a , corresponden al campo fantasma de Faddeev-Popov. Sus términos cinéticos son de la forma de un Lagrangiano para campos escalares cargados, sin masa (que satisfacen la estadística de Fermi-Dirac), por lo que parecería ser un campo bosónico, sin embargo es fermiónico debido a su naturaleza como número de Grassman.
- Los campos ψ_l^j son los campos fermiónicos (quarks). De esta manera, el último término contiene al Lagrangiano de Dirac y termino de interacción. $D_\mu \psi_l^j$ está dado como $D_\mu \psi_l^j = \partial_\mu \psi_l^j - igT_{lk}^a \psi_k^j A_\mu^a$. $D_\mu = \partial_\mu - igT_{lk}^a A_\mu^a$ es la derivada covariante asociada al campo gauge gluónico. Donde $j = 1, 2, \dots, N_f$ corresponde al número de sabores, existen 6 sabores, T^a son los generadores del grupo de color (Matriz de color). El índice l es número de colores, la evidencia experimental nos dice que hay tres colore $l = 1, 2, 3$.
La notación es: $\psi_1^j = \text{rojo}$, $\psi_2^j = \text{azul}$, $\psi_3^j = \text{verde}$.
- Aquí f_{abc} son las constantes de estructura completamente antisimétricas del grupo de norma de QCD. Tenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} [T^a, T^b] &= if_{abc} T^c, \\ T^a T^a &= C_F I, \\ \text{Tr}[T^a T^b] &= \frac{1}{2} \delta_{ab}, \\ f_{abc} f_{bcd} &= C_A \delta_{ad}. \end{aligned}$$

Donde $T^a = \frac{\lambda^a}{2}$, y λ^a son las matrices de Gell-Mann.

En la representación fundamental de $SU_c(N)$:

$$C_A = N, \quad C_F = \frac{N^2 - 1}{2N}.$$

Donde C son los operadores de Casimir. Para QCD $N = 3$ por lo tanto $C_A = 3$ y $C_F = \frac{4}{3}$. Sabemos que los cálculos de observables físicas en QCD más allá del nivel árbol encuentran divergencias ultravioletas. Sin embargo, QCD es una teoría renormalizable, por lo que podemos añadir contra términos con la misma forma que el Lagrangiano original, que nos remuevan estas divergencias, de tal manera que sigamos teniendo un Lagrangiano que sea consistente con los resultados experimentales. Al Lagrangiano original, más el Lagrangiano de contra términos, le llamaremos el Lagrangiano desnudo.

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \mathcal{L}_{CT} = \mathcal{L}_B.$$

A este nuevo Lagrangiano lo podemos factorizar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_B = & -\frac{1}{4}Z_3(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) \\
& -\frac{1}{2}Z_1 g f_{abc}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)A_b^\mu A_c^\nu \\
& -\frac{1}{4}Z_5 g^2 f_{abc}f_{ade}A_\mu^b A_\nu^c A_d^\mu A_e^\nu \\
& -\frac{1}{2\xi}Z_6(\partial^\mu A_\mu^a)^2 - \tilde{Z}_3(\partial^\mu \bar{\eta}_a)(\partial_\mu \eta_a) - \tilde{Z}_1 g f_{abc}(\partial_\mu \bar{\eta}_a)A_b^\mu \eta_c \\
& + \sum_{j=1}^{N_f} (iZ_{2Fj} \bar{\psi}_l^j \gamma^\mu \partial_\mu \psi_l^j + Z_{1Fj} g \bar{\psi}_l^j T_{lk}^a \gamma^\mu \psi_k^j A_\mu^a - Z_{4j} m_j \bar{\psi}_l^j \psi_l^j)
\end{aligned}$$

Los coeficientes Z_i corresponden a las constantes de renormalización las cuales absorben los infinitos de las ecuaciones.

- Z_3 : Constante de renormalización del campo del gluón.
- \tilde{Z}_3 : Constante de renormalización del campo del fantasma.
- Z_{2Fj} : Constante de renormalización del campo del quark.
- Z_g : Constante de renormalización de la constante de acoplamiento.
- Z_{mj} : Constante de renormalización de la masa del quark.
- Z_ξ : Constante de renormalización del parámetro de norma.
- Z_1 : Constante de renormalización del vértice de tres gluones.
- Z_5 : Constante de renormalización del vértice de cuatro gluones.
- Z_6 : Constante de renormalización del término que fija la norma.
- \tilde{Z}_1 : Constante de renormalización del término de interacción gluón-fantasma.
- Z_{1Fj} : Constante de renormalización del vértice quark-gluón.
- Z_{4j} : Constante de renormalización del término de masa del quark.

Estas constates dependen del punto de renormalización μ y del regulador de corte ultravioleta Λ , es decir $Z_i = Z_i(\mu; \Lambda)$. Con el fin de que el lagrangiano mantenga la forma redefinimos algunas cantidades de la siguiente manera:

- Para los campos: $A_{B\mu}^a = Z_3^{1/2} A_\mu^a$, $\eta_B^a = \tilde{Z}_3^{1/2} \eta_a$, $\psi_{Bj} = Z_{2Fj}^{1/2} \psi_j$.
- Para los parámetros: $g_B = Z_g g$, $m_{Bj} = Z_{mj} m_j$, $\xi_B = Z_\xi^{-1} \xi$.

De esta manera que se asegura que los coeficientes de los términos cinéticos correspondientes en el Lagrangiano desnudo sean iguales a la unidad. El subíndice B se refiere a las cantidades desnudas. Estas constantes son determinadas por el requerimiento de covarianza

de norma local del Lagrangiano de QCD. Tenemos, por ejemplo, para el término del vértice de tres gluones:

$$-\frac{1}{2} \frac{Z_1}{Z_3^{3/2} Z_g} g_B f_{abc} (\partial_\mu A_{B\nu}^a - \partial_\nu A_{B\mu}^a) A_B^{\mu b} A_B^{\nu c} = -\frac{1}{2} g_B f_{abc} (\partial_\mu A_{B\nu}^a - \partial_\nu A_{B\mu}^a) A_B^{\mu b} A_B^{\nu c}. \quad (1.2)$$

que implica que $Z_1 = Z_g Z_3^{3/2}$. Para el vértice de cuatro gluones:

$$\frac{1}{4} \frac{Z_5}{Z_g^2 Z_3^2} g_B^2 f_{abc} f_{ade} A_{B\mu}^b A_{B\nu}^c A_B^{\mu d} A_B^{\nu e} = \frac{1}{4} g_B^2 f_{abc} f_{ade} A_{B\mu}^b A_{B\nu}^c A_B^{\mu d} A_B^{\nu e}. \quad (1.3)$$

así tenemos $Z_5 = Z_g^2 Z_3^2$. Para el término de interacción del quark-gluón, tenemos:

$$\frac{Z_{1Fj}}{Z_g Z_{2Fj} Z_3^{1/2}} g_B \bar{\psi}_{Bl}^j T_{lk}^a \gamma^\mu \psi_{Bk}^j A_{B\mu}^a = g_B \bar{\psi}_{Bl}^j T_{lk}^a \gamma^\mu \psi_{Bk}^j A_{B\mu}^a. \quad (1.4)$$

que implica $Z_{1Fj} = Z_g Z_{2Fj} Z_3^{1/2}$. En el caso del término gluón-fantasma, tenemos:

$$\frac{\tilde{Z}_1}{Z_g \tilde{Z}_3 Z_3^{1/2}} g_B^2 f_{abc} (\partial_\mu \bar{\eta}_B^a) A_B^{\mu b} \eta^{Bc} = g_B^2 f_{abc} (\partial_\mu \bar{\eta}_B^a) A_B^{\mu b} \eta^{Bc}. \quad (1.5)$$

y así tenemos $\tilde{Z}_1 = Z_g \tilde{Z}_3 Z_3^{1/2}$. El término de masa para quarks nos da:

$$\frac{Z_{4j}}{Z_{mj} Z_{2Fj}} m_{Bj} \bar{\psi}_{Bl}^j \psi_{Bl}^j = m_{Bj} \bar{\psi}_{Bl}^j \psi_{Bl}^j. \quad (1.6)$$

que implica $Z_{4j} = Z_{mj} Z_{2Fj}$. Para el término que fija la norma:

$$-\frac{1}{2\xi} \frac{Z_6}{Z_\xi Z_3} (\partial^\mu A_{\mu B}^a)^2 = -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_{\mu B}^a)^2. \quad (1.7)$$

por lo que $Z_6 = Z_\xi Z_3$. Resumimos las relaciones entre las constantes de renormalización:

$$Z_1 = Z_g Z_3^{3/2}, \quad (1.8)$$

$$Z_5 = Z_g^2 Z_3^2, \quad (1.9)$$

$$\tilde{Z}_1 = Z_g \tilde{Z}_3 Z_3^{1/2}, \quad (1.10)$$

$$Z_6 = Z_\xi Z_3, \quad (1.11)$$

$$Z_{1Fj} = Z_g Z_{2Fj} Z_3^{1/2}, \quad (1.12)$$

$$Z_{4j} = Z_{mj} Z_{2Fj}. \quad (1.13)$$

Manipulando algebraicamente estas relaciones, al dividir pares de ecuaciones entre sí, obtenemos:

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} = \frac{Z_5}{Z_1} = \frac{Z_{1Fj}}{Z_{2Fj}}. \quad (1.14)$$

Estas son las Identidades de Slavlov-Taylor que son generalizaciones no abelianas de las identidades de Ward-Takahashi. Garantizan la universalidad de la constante de acoplamiento g . Ya escrito el lagrangiano de QCD de esta manera, a continuación mostramos algunas

de sus diversas simetrías.

1.3. Simetrías del Lagrangiano

Una simetría de un sistema físico es un rasgo físico o matemático de un sistema que es preservado sobre cierto cambio (Transformación). Eso es, que bajo ciertas transformaciones, aspectos de esos sistemas son “incambiables”, de acuerdo a una observación particular.

Mostramos algunas simetrías del lagrangiano de QCD y sus corolarios. La mayoría de ellas son sólo aproximadas en la naturaleza; sin embargo, nos permiten obtener un entendimiento más profundo sobre la física en el mundo real. Comenzamos discutiendo el teorema de Nöether, que nos permite relacionar simetrías con corrientes y cargas conservadas. Este teorema constituye una explicación de por qué existen leyes de conservación y cantidades físicas que no cambian a lo largo de la evolución temporal de un sistema físico.

1.3.1. Teorema de Nöether

El teorema de Nöether expresa que cualquier simetría diferenciable, proveniente de un sistema físico, tiene su correspondiente ley de conservación. El teorema se denomina así por la matemática alemana Emmy Noether, que lo formuló en 1915.

El teorema de Noether relaciona pares de ideas básicas de la física: una es la invariancia de la forma que una ley física toma con respecto a cualquier transformación (generalizada) que preserve el sistema de coordenadas (aspectos espaciales y temporales tomados en consideración), y la otra es la ley de conservación de una cantidad física.

Informalmente, el teorema de Noether se puede establecer como: A cada simetría (continua) le corresponde una ley de conservación y viceversa. El enunciado formal del teorema deriva una expresión para la cantidad física que se conserva (y, por lo tanto, también la define) de la condición de invariancia solamente.

Por ejemplo:

- la invariancia con respecto a la (dirección del eje de) rotación da la ley de conservación del momento angular.
- la invariancia de sistemas físicos con respecto a la traslación (dicho simplemente, las leyes de la física no varían con la localización en el espacio) da la ley de conservación del momento lineal.
- la invariancia con respecto a (la traslación en) tiempo da la ley de conservación de la energía.

En la teoría cuántica de campos, la invariancia con respecto a la transformación general de gauge da la ley de la conservación de la carga eléctrica, etcétera. Así, el resultado es una contribución muy importante a la física en general, pues ayuda a proporcionar intuiciones de gran alcance en cualquier teoría general en física, con sólo analizar las diversas transformaciones que harían invariantes la forma de las leyes implicadas. Supongamos que el

lagrangiano tiene los campos de quarks y el campo de gluones:

$$\mathcal{L}_{qg} = \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi(x) + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a(x)F_a^{\mu\nu}(x), \quad (a = 1 \cdots 8). \quad (1.15)$$

donde $D^\mu = \partial^\mu - igA^\mu(x)$, $A^\mu(x) = A_a^\mu(x)\frac{\lambda_a}{2}$ y $\psi(x) = (u \ d \ s)^T$. De manera general definimos una transformación global como:

$$\begin{aligned} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp[i\Gamma^a\Theta_a]\psi(x) &= (1 + i\Gamma^a\Theta_a \pm \mathcal{O}(\Theta_a)^2)\psi(x), \\ &= (1 + i\Gamma^a\Theta_a)\psi(x), \\ &= \psi(x) + \delta\psi(x), \end{aligned} \quad (1.16)$$

donde Γ^a (indica sobre qué eje estamos rotando) son los generadores del grupo $U(N)$ o $SU(N)$:

- Para $U(1)$ tenemos que $\Gamma^a = \mathbb{1}$.
- Para $SU(2)$ tenemos que $\Gamma^a = \sigma^a$, donde σ^a son las matrices de Pauli.
- Para $SU(3)$ tenemos que $\Gamma^a = \lambda^a$, donde λ^a son las matrices de Gell-Mann.

Θ_a es el parámetro de la transformación (indica cuanto se esta girando alrededor de a), para una transformación global $\Theta_a = \text{constante}$, para una transformación local $\Theta_a = \Theta_a(x)$. Γ^a puede cruzar a γ^0 ya que viven en espacios diferentes, uno puede escoger Θ_a como queramos, por ejemplo ($\Theta = (\Theta_x = 0, \Theta_y = 0, \Theta_z = \pi/2)$). Es importante recordar que $\delta(\partial_\mu\psi) = \partial_\mu(\delta\psi)$. La corriente de Nöether está dada por:

$$J_a^\mu(x) = -\frac{\partial\mathcal{L}_{qg}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\frac{\partial\psi'}{\partial\Theta} = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\Gamma^a\psi(x). \quad (1.17)$$

Si \mathcal{L}_{qg} es invariante ante la transformación, la corriente de Nöether se conserva:

$$\partial_\mu J_a^\mu(x) = 0. \quad (1.18)$$

Además, si la corriente está localizada en el espacio, se tiene una carga conservada:

$$\begin{aligned} Q_a &= \int d^3x J_a^0(x) = \int d^3x \psi^\dagger(x)\Gamma^a\psi(x) \\ \dot{Q}_a &= \frac{dQ_a}{dt} = 0, \left(\int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_a = \oint_S d\vec{s} \cdot \vec{J}_a = 0 \right). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Si \mathcal{L}_{qg} no es invariante ante la transformación, la corriente de Nöether no se conserva:

$$\begin{aligned} \partial_\mu J_a^\mu(x) &\neq 0, \\ \partial_\mu J_a^\mu(x) &= \frac{\partial\mathcal{L}_{qg}}{\partial\Theta_a}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

A continuación discutiremos algunos corolarios del teorema de Nöether.

1.3.2. Simetría de Sabor y Número Bariónico

Algunas de las simetrías del Lagrangiano {1.1} son:

- **Simetría de isospin/sabor:** El sabor es un número cuántico de las partículas elementales (quarks: u (up, arriba), d (down, abajo), s (strange, extraño), c (charm, encantado), b (bottom, fondo) y t (top, cima.) relacionado con su grupo. En el modelo electrodébil, esta simetría es figurada y los procesos de cambio de sabor existen. En cromodinámica cuántica, por otro lado, el sabor es una simetría global. Tomamos $\psi(x) = (u \ d)^T$ y asumimos $m_u = m_d$. La transformación $SU_f(2)$ de isospin es:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp \left[i \frac{\tau^a}{2} \theta_a \right]. \quad (1.21)$$

donde τ^a es una matriz de isospín, $\tau^a \equiv \sigma^a$ (con $a = 1, 2, 3$) son los generadores de $SU(2)$; las matrices de Pauli. La corriente y carga conservadas son:

$$j^{\mu a}(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} \psi(x), \quad (1.22)$$

$$Q_j^a = \int d^3x V_a^0(x) = \int d^3x \psi^\dagger(x) \frac{\tau^a}{2} \psi(x). \quad (1.23)$$

son llamadas corriente y carga isospin respectivamente. Podemos extender al caso con $N_f = 3$ añadiendo la componente del quark strange a $\psi(x)$; adicionalmente, asumimos $m_u = m_d = m_s$ y las matrices de Pauli τ^a se reemplazan por las matrices de Gell-Mann, λ^a ($a = 1, \dots, 8$).

- **Simetría de número bariónico:** El número bariónico (representados B) es un número cuántico invariante. Se puede definir como un tercio del número de quarks menos el número de antiquarks dentro del sistema hadrónico:

$$B = \frac{N_q - N_{\bar{q}}}{3}.$$

donde N_q es el número de quarks, y $N_{\bar{q}}$ es el número de antiquarks. Tenemos la simetría global $U(1)$, tal que:

$$\psi(x) \rightarrow e^{iB\theta} \psi(x) \Rightarrow j_B^\mu(x) = B \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x). \quad (1.24)$$

La carga conservada, $B = \int d^3x \psi^\dagger(x) \psi(x)$, corresponde al número bariónico.

1.3.3. Bosones de Goldstone y Simetrías Quirales

El teorema de Goldstone dice que cuando se rompe una simetría continua, de manera espontánea, la QFT genera una partícula no masiva con los mismos números cuánticos que una simetría local de rotación. Esto implica que, por cada corriente axial de isospín en QCD, con quarks u, d no masivos (o también s), se obtienen los mesones pseudoescalares: $\{\pi^0, \pi^\pm\}$ con $N_f = 2$; $\{\pi^0, \pi^\pm, K^0, K^\pm, \bar{K}, \eta\}$, con $N_f = 3$. En física de partículas y física de la materia condensada, los bosones de Goldstone (también conocidos como bosones

de Nambu-Goldstone) son bosones que aparecen en modelos de teoría cuántica de campos con ruptura espontánea de simetría. Propuestos por vez primera en 1960 por Yoichiro Nambu, estos bosones están asociados a generadores de la simetría rota. Pueden considerarse como excitaciones del campo en la dirección simétrica y carecen de masa, si la simetría espontáneamente rota no ha sido rota explícitamente. Si la simetría no es exacta, por ejemplo, si se rompe explícitamente, además de espontáneamente, entonces los bosones de Goldstone serán masivos, aunque generalmente ligeros. A estos se les denomina pseudo bosones de Goldstone, o pseudo bosones de Nambu-Goldstone.

La anomalía de Adler-Bell-Jackiw tiene varias implicaciones importantes en QCD, para describir esto, primero debemos describir simetrías quirales de QCD. Simetría quiral es una simetría de QCD en el límite en el que desaparecen las masas de los quarks. Sabemos, sin embargo, que la masa corriente de los quarks es finita. Sin embargo, en comparación con las escalas de hadrones, las masas de los dos quarks más ligeros son muy pequeñas, por lo que la simetría quiral puede ser considerada una simetría aproximada de las interacciones fuertes. La existencia de simetría quiral vino a partir del estudio de la desintegración beta nuclear. La identificación de la corriente axial, se debe a una característica muy importante e interesante de la interacción fuerte, esto es que la simetría asociada con la corriente vectorial es "espontáneamente rota". Una consecuencia importante de la ruptura espontánea de simetría es la existencia de un modo sin masa, el llamado bosón de Goldstone. En nuestro caso, el bosón de Goldstone es el pión. Si la simetría quiral fuera una perfecta simetría de QCD, los piones no deberían tener masa. Como la simetría quiral es sólo aproximada, esperamos que el pión tenga una masa pequeña (en comparación con todos los otros hadrones). El hecho de que el pión es un bosón de Goldstone es de gran utilidad práctica. A bajas energías y temperaturas los procesos hadrónicos son dominados por los piones y, por lo tanto, todos los observables se pueden expresar como una expansión en las masas y los momentos de piones. Esta es la idea básica de la teoría de perturbaciones quirales, que es muy exitosa en la descripción física del umbral de piones. Una de las grandes ventajas de la formulación lagrangiana es que las simetrías del lagrangiano conservan cantidades (corrientes). De Mecánica Clásica sabemos que las simetrías del lagrangiano implican cantidades conservadas. Por ejemplo, si la función de Lagrange es independiente del espacio y tiempo, el momento y la energía son conservados. Como un ejemplo de la corriente de Noether, consideremos el lagrangiano de dos sabores $N_f = 2$ y el lagrangiano {1.15}. Separamos las componentes del gluón, interacción quark-gluón y el término de masa:

$$\mathcal{L}_{qg} = \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu\partial^\mu)\psi(x) + \mathbf{m}\bar{\psi}(x)\psi(x) + \mathcal{L}_{\text{gluón}} + \mathcal{L}_{\text{int}}. \quad (1.25)$$

donde

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}.$$

Si los quarks u y d son muy ligeros, los dos últimos términos del lagrangiano pueden ser despreciados. Estudiemos como hacer m_u y $m_d \approx 0$. Si ignoramos las masas de u y d y solo tomamos el primer término del lagrangiano {1.25} este tiene **simetría isospín**, la simetría de una transformación unitaria $SU(2)$ que mezcla los campos u y d . Debido a que el lagrangiano clásico para los fermiones sin masa no contiene acoplamiento entre quarks izquierdo y derecho, este lagrangiano es realmente simétrico bajo las transformaciones unitarias separadas. En el límite donde $m_u = m_d = 0$, podemos separar los campos de quarks derecho e izquierdo como el doblete de quarks con componentes quirales:

$$\psi_R(x) = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma^5) \psi(x), \quad \psi_L(x) = \frac{1}{2} (\mathbb{1} - \gamma^5) \psi(x). \quad (1.26)$$

De esta manera, reescribimos al lagrangiano como:

$$\mathcal{L}_{qg} = \bar{\psi}_R(x) (i\gamma_\mu D^\mu) \psi_R(x) + \bar{\psi}_L(x) (i\gamma_\mu D^\mu) \psi_L(x) + \mathcal{L}_{gluón}. \quad (1.27)$$

En esta discusión, ignoraremos todos excepto los quarks más ligeros u y d . De esta manera la parte fermiónica del lagrangiano resulta ser:

$$\mathcal{L} = \bar{u}i\mathcal{D}u + \bar{d}i\mathcal{D}d - m_u\bar{u}u - m_d\bar{d}d. \quad (1.28)$$

Donde $\mathcal{D} = \gamma_\mu D^\mu$

Definimos transformaciones unitarias separadas de la forma:

$$\psi_R(x) \rightarrow U_R \psi_R(x), \quad \psi_L(x) \rightarrow U_L \psi_L(x). \quad (1.29)$$

tal que $U_{R,L}$ pueden ser transformaciones globales unitarias $U(1)$ o $SU(2)$. Así, el grupo de simetría para el lagrangiano sin masa es $SU_R(2) \times SU_L(2) \times U_R(1) \times U_L(1)$. Las corrientes asociadas a las transformaciones $U(1)$ son:

$$j_R^\mu(x) = \bar{\psi}_R(x) \gamma^\mu \psi_R(x), \quad j_L^\mu(x) = \bar{\psi}_L(x) \gamma^\mu \psi_L(x). \quad (1.30)$$

para el grupo $SU(2)$:

$$j_R^{\mu a}(x) = \bar{\psi}_R(x) \gamma^\mu \tau^a \psi_R(x), \quad j_L^{\mu a}(x) = \bar{\psi}_L(x) \gamma^\mu \tau^a \psi_L(x). \quad (1.31)$$

En el cuadro {1.3.1} se muestran algunas propiedades de los left y right espinores. Las sumas de las corrientes derecha e izquierda {1.30}, tal como se muestra en {1.3.2}, dan las corrientes de isospín también conocidas como corrientes vectoriales. La resta nos da las corrientes vectoriales:

$$j_V^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad j_A^{\mu a} = \bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a \psi. \quad (1.32)$$

Propiedades de los left y right espinores. 1.3.1.

Dagger de los espinores.

$$j_L^\mu + j_R^\mu = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R$$

los términos que mezclan R y L suman cero ya que son cero, para mostrarlo utilizamos las propiedades de las matrices γ .

Primero encontramos como se escribe cada $\psi_{R/L}$ en términos del \dagger :

$$\psi_L = \frac{1}{2} (\mathbb{1} - \gamma^5) \psi,$$

Tomamos el \dagger y multiplicamos por γ^0 por el lado derecho,

$$\psi_L^\dagger = \frac{1}{2} \psi^\dagger (\mathbb{1} - \gamma^5),$$

$$\psi_L^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2} \psi^\dagger \gamma^0 (\mathbb{1} + \gamma^5),$$

$$\bar{\psi}_L = \frac{1}{2} \bar{\psi} (\mathbb{1} + \gamma^5).$$

De manera similar encontramos

$$\bar{\psi}_R = \frac{1}{2} \bar{\psi} (\mathbb{1} - \gamma^5).$$

De esta manera tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_R &= \frac{1}{2} \bar{\psi} (\mathbb{1} + \gamma^5) \gamma^\mu \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma^5) \psi \\ &= \frac{1}{4} \bar{\psi} (\mathbb{1} + \gamma^5) (\mathbb{1} - \gamma^5) \gamma^\mu \psi \\ &= \frac{1}{4} \bar{\psi} (\mathbb{1} - \gamma^5 + \gamma^5 - \mathbb{1}) \gamma^\mu \psi \\ &= 0 = \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_L \end{aligned}$$

Suma de corrientes izquierda y derecha. 1.3.2.

Suma de las corrientes izquierda y derecha para U(1):

$$\begin{aligned}
j_R^\mu + j_L^\mu &= \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R + \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L \\
&= \frac{1}{2} \bar{\psi} (\mathbb{1} - \gamma^5) \gamma^\mu \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma^5) \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi} (\mathbb{1} + \gamma^5) \gamma^\mu \frac{1}{2} (\mathbb{1} - \gamma^5) \psi \\
&= \frac{1}{4} [\bar{\psi} (\mathbb{1} - \gamma^5) \gamma^\mu (\mathbb{1} + \gamma^5) \psi + \bar{\psi} (\mathbb{1} + \gamma^5) \gamma^\mu (\mathbb{1} - \gamma^5) \psi] \\
&= \frac{1}{4} [\bar{\psi} (\mathbb{1} - \gamma^5) (\mathbb{1} - \gamma^5) \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} (\mathbb{1} + \gamma^5) (\mathbb{1} + \gamma^5) \gamma^\mu \psi] \\
&= \frac{1}{4} [\bar{\psi} (\mathbb{1} - \gamma^5)^2 \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} (\mathbb{1} + \gamma^5)^2 \gamma^\mu \psi] \\
&= \frac{1}{4} [\bar{\psi} 2 (\mathbb{1} - \gamma^5) \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} 2 (\mathbb{1} + \gamma^5) \gamma^\mu \psi] \\
&= \frac{1}{2} [\bar{\psi} (\mathbb{1} - \gamma^5) \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} (\mathbb{1} + \gamma^5) \gamma^\mu \psi] \\
&= \frac{1}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi] \\
&= \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = j^\mu.
\end{aligned}$$

Para SU(2) las matrices de Pauli no anticonmutan con γ^5 , ya que viven en otro espacio, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
j_R^{\mu a} + j_L^{\mu a} &= \bar{\psi}_R \gamma^\mu \tau^a \psi_R + \bar{\psi}_L \gamma^\mu \tau^a \psi_L \\
&= \frac{1}{2} \bar{\psi} (\mathbb{1} - \gamma^5) \gamma^\mu \tau^a \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma^5) \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi} (\mathbb{1} + \gamma^5) \gamma^\mu \tau^a \frac{1}{2} (\mathbb{1} - \gamma^5) \psi \\
&= \frac{1}{4} [\bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a (\mathbb{1} + \gamma^5) (\mathbb{1} + \gamma^5) \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a (\mathbb{1} - \gamma^5) (\mathbb{1} - \gamma^5) \psi] \\
&= \frac{1}{4} [\bar{\psi} (\mathbb{1} - \gamma^5) (\mathbb{1} - \gamma^5) \gamma^\mu \tau^a \psi + \bar{\psi} (\mathbb{1} + \gamma^5) (\mathbb{1} + \gamma^5) \gamma^\mu \tau^a \psi] \\
&= \frac{1}{4} [\bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a (\mathbb{1} + \gamma^5)^2 \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a (\mathbb{1} - \gamma^5)^2 \psi] \\
&= \frac{1}{4} [\bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a 2 (\mathbb{1} + \gamma^5) \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a 2 (\mathbb{1} - \gamma^5) \psi] \\
&= \frac{1}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a (\mathbb{1} + \gamma^5) \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a (\mathbb{1} - \gamma^5) \psi] \\
&= \frac{1}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a \gamma^5 \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a \gamma^5 \psi] \\
&= \bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a \psi = j^{\mu a}.
\end{aligned}$$

Las simetrías correspondientes son las transformaciones {1.29} con $U_L = U_R$. Las restas de las corrientes {1.30,1.31}, tal como se muestra en {1.3.3}, dan las correspondientes corrientes vectoriales axiales $j^{\mu 5}$, $j^{\mu 5a}$:

$$j^{\mu 5} = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi, \quad j^{\mu 5a} = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \tau^a \psi. \quad (1.33)$$

Corrientes axiales. 1.3.3.

La resta de las corrientes izquierda y derecha {1.30,1.31} dan las correspondientes corrientes vectoriales axiales{1.33}. Para U(1):

$$\begin{aligned}
j_R^\mu - j_L^\mu &= \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R - \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L \\
&= \frac{1}{2} \bar{\psi} (\mathbb{1} - \gamma^5) \gamma^\mu \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma^5) \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi} (\mathbb{1} + \gamma^5) \gamma^\mu \frac{1}{2} (\mathbb{1} - \gamma^5) \psi \\
&= \frac{1}{4} [\bar{\psi} (\mathbb{1} - \gamma^5) \gamma^\mu (\mathbb{1} + \gamma^5) \psi - \bar{\psi} (\mathbb{1} + \gamma^5) \gamma^\mu (\mathbb{1} - \gamma^5) \psi] \\
&= \frac{1}{4} [\bar{\psi} (\mathbb{1} - \gamma^5) (\mathbb{1} - \gamma^5) \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} (\mathbb{1} + \gamma^5) (\mathbb{1} + \gamma^5) \gamma^\mu \psi] \\
&= \frac{1}{4} [\bar{\psi} (\mathbb{1} - \gamma^5)^2 \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} (\mathbb{1} + \gamma^5)^2 \gamma^\mu \psi] \\
&= \frac{1}{4} [\bar{\psi} 2 (\mathbb{1} - \gamma^5) \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} 2 (\mathbb{1} + \gamma^5) \gamma^\mu \psi] \\
&= \frac{1}{2} [\bar{\psi} (\mathbb{1} - \gamma^5) \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} (\mathbb{1} + \gamma^5) \gamma^\mu \psi] \\
&= \frac{1}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi] \\
&= -\bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi = j^{\mu 5}.
\end{aligned}$$

Para SU(2) Las matrices de Pauli no anticonmutan con γ^5 ya que viven en otro espacio, por lo tanto

$$\begin{aligned}
j_R^{\mu a} - j_L^{\mu a} &= \bar{\psi}_R \gamma^\mu \tau^a \psi_R - \bar{\psi}_L \gamma^\mu \tau^a \psi_L \\
&= \frac{1}{2} \bar{\psi} (\mathbb{1} - \gamma^5) \gamma^\mu \tau^a \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma^5) \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi} (\mathbb{1} + \gamma^5) \gamma^\mu \tau^a \frac{1}{2} (\mathbb{1} - \gamma^5) \psi \\
&= \frac{1}{4} [\bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a (\mathbb{1} + \gamma^5) (\mathbb{1} + \gamma^5) \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a (\mathbb{1} - \gamma^5) (\mathbb{1} - \gamma^5) \psi] \\
&= \frac{1}{4} [\bar{\psi} (\mathbb{1} - \gamma^5) (\mathbb{1} - \gamma^5) \gamma^\mu \tau^a \psi - \bar{\psi} (\mathbb{1} + \gamma^5) (\mathbb{1} + \gamma^5) \gamma^\mu \tau^a \psi] \\
&= \frac{1}{4} [\bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a (\mathbb{1} + \gamma^5)^2 \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a (\mathbb{1} - \gamma^5)^2 \psi] \\
&= \frac{1}{4} [\bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a 2 (\mathbb{1} + \gamma^5) \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a 2 (\mathbb{1} - \gamma^5) \psi] \\
&= \frac{1}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a (\mathbb{1} + \gamma^5) \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a (\mathbb{1} - \gamma^5) \psi] \\
&= \frac{1}{2} [\bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a \gamma^5 \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a \gamma^5 \psi] \\
&= \bar{\psi} \gamma^\mu \tau^a \gamma^5 \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \tau^a \psi = j^{\mu 5 a}.
\end{aligned}$$

Mostraremos a continuación que para las corrientes de isotriplete $j^{\mu 5a}$ las leyes clásicas de conservación no se ven afectadas por anomalías, pero con las corrientes $j^{\mu 5}$ no pasa lo mismo.

Las transformaciones de los vectores en el grupo de simetría $SU(2) \times U(1)$ son propias de las interacciones fuertes, cuyas corrientes conducen a leyes de conservación conocidas. No pasa lo mismo con las transformaciones axial/chiral ya que no corresponden a ninguna simetría precisa de las interacciones fuertes. En 1960, Nambu y Jona-Lasinio supusieron que estas son simetrías de las interacciones fuertes que se rompen espontáneamente. Lo cual a permitido la descripción detallada de las interacciones fuertes a baja energía.

1.3.4. Rompimiento Espontáneo de la Simetría Quiral.

La presencia de un término de masa en {1.25}, mezcla quarks izquierdos y derechos, por lo que rompe la simetría quiral:

$$\mathcal{L}_{masa} = \mathbf{m}\bar{\psi}\psi = \mathbf{m}(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L) = \bar{\psi}_R\mathbf{m}\psi_L + \bar{\psi}_L\mathbf{m}\psi_R. \quad (1.34)$$

Sin embargo, éste no es el único mecanismo de ruptura.

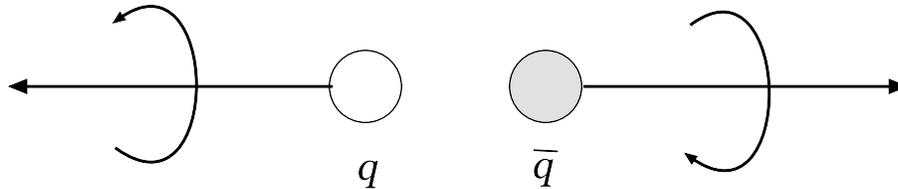


Figura 1.1: Un par quark-antiquark "condensado" con momento total y momento angular cero.

En QCD, quarks y antiquarks tienen interacciones fuertes, y, si estos quarks son no masivos (o casi no masivos), la energía necesaria para crear un par adicional de quark-antiquark es pequeña. Por lo tanto, esperamos que el vacío de QCD contenga un condensado de pares quark-antiquark. Estos pares de fermiones deben tener un impulso total y un momento angular cero. Por lo tanto, como muestra la Fig.{1.1}, deben contener carga quiral neta, emparejando a los quarks zurdos con las antipartículas de los quarks diestros. El valor de expectación del vacío está caracterizado por un condensado quark-antiquark que se caracteriza por ser distinto de cero:

$$\langle 0 | \bar{\psi}\psi | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L | 0 \rangle \neq 0. \quad (1.35)$$

que se transforma bajo {1.29} con $U_L \neq U_R$. El valor de expectación indica que el vacío mezcla las dos helicidades de los quarks. Esto permite que los quarks u y d adquieran masas efectivas a medida que se mueven a través del vacío. Dentro de los estados ligados quark - antiquark, los quarks u y d parecerían moverse como si tuvieran una masa efectiva considerable, incluso si tuvieran masa cero en el Lagrangiano de QCD original. Es un efecto que no se puede descifrar de la teoría de perturbaciones, que predice un condensado

idénticamente cero.
En el cuadro {1.3.4} se muestran mas propiedades de los espinores.

Propiedades de los espinores. 1.3.4

Para encontrar {1.35} se han utilizado las siguientes propiedades de las definiciones {1.26):

$$\bar{\psi}\psi = (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)(\psi_L + \psi_R) = \underbrace{\bar{\psi}_L\psi_L}_{=0} + \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L + \underbrace{\bar{\psi}_R\psi_R}_{=0}$$

ya que:

$$\bar{\psi}_L\psi_L = \frac{1}{2}[(\mathbb{1} - \gamma^5)\bar{\psi}(\mathbb{1} - \gamma^5)\psi] = \frac{1}{2}[(\mathbb{1} - \gamma^5)(\mathbb{1} + \gamma^5)\bar{\psi}\psi] = 0$$

$$\bar{\psi}_L\psi_R = \frac{1}{2}[(\mathbb{1} - \gamma^5)\bar{\psi}(\mathbb{1} + \gamma^5)\psi] = \frac{1}{2}[(\mathbb{1} - \gamma^5)(\mathbb{1} - \gamma^5)\bar{\psi}\psi] \neq 0$$

donde $(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}$

El valor de expectación en el vacío {1.35} señala la ruptura espontánea del grupo de simetría completo {1.29} hasta el subgrupo de simetrías de vector con $U_L = U_R$. Por lo tanto, hay cuatro simetrías continuas espontáneamente rotas, asociadas con las cuatro corrientes axiales de vectores. El teorema de Goldstone establece que cada simetría continua espontáneamente rota de una teoría cuántica de campos conduce a una partícula sin masa con los números cuánticos de una rotación de simetría local. Esto significa que, en QCD con quarks u y d sin masa, deberíamos encontrar cuatro partículas espín-cero con los números cuánticos correctos creadas por las cuatro corrientes axiales de vectores. Las interacciones fuertes no contienen partículas sin masa, pero sí contienen un triplete isospín de mesones ligeros, estos son los piones. Se sabe que estas partículas tienen paridad impar (ya que son estados ligados quark-antiquark). Por lo tanto, pueden ser creados por las corrientes axiales de isospín. Podemos parametrizar el elemento de la matriz de $j^{\mu 5a}$ entre el vacío y un pión on-shell escribiendo:

$$\langle 0 | j^{\mu 5a}(x) | \pi^b(p) \rangle = -i p^\mu f_\pi \delta^{ab} e^{-ip \cdot x}. \quad (1.36)$$

donde a, b son índices de isospín, esta ecuación tiene escrita todas las posibles soluciones que uno esperaría, el término $e^{-ip \cdot x}$ es la solución en onda plana del pión libre, el término δ^{ab} aparece para conservar el número de isospin ya que no cambia, el término p^μ es el único momento involucrado y preserva el índice μ . El término $-i f_\pi$ es una constante definida así por conveniencia donde $f(m_\pi^2) \equiv f_\pi$ es llamada constante de decaimiento del pión [15], es dimensionalmente una escala de energía y determina la fuerza de la ruptura de simetría quiral es calculada a través de la tasa de decaimiento de π^+ {1.37}. En el cuadro {1.3.5} se muestra el calculo de la constante de decaimiento del pión a través de la tasa de decaimiento.

Constante de decaimiento del pión f_π . 1.3.5.

La constante de decaimiento del pión f_π se calcula a través de la tasa de decaimiento de π^+ :

$$\Gamma_l^{(+)}(\pi \rightarrow l\nu) = \frac{1}{\tau} = \frac{G_F^2 f_\pi^2}{8\pi} m_\pi m_l^2 \left[1 - \frac{m_l^2}{m_\pi^2} \right]. \quad (1.37)$$

tomando las siguientes constantes del PDG:

$$G_F = 1.16637 \times 10^{-11} \text{ MeV}^{-2},$$

$$\Gamma_\mu = 2.63788 \times 10^{-14} \text{ MeV},$$

$$m_\mu = 105.658 \text{ MeV}/c^2,$$

$$m_\pi = 139.57 \text{ MeV}/c^2,$$

de esta manera se obtiene:

$$f_\pi = 131 \text{ MeV}.$$

En el límite quirral, al contraer {1.36} con p_μ y utilizamos la conservación de las corrientes axiales hallamos que un pión on-shell debe satisfacer $p^2 = 0$, es decir, no debe tener masa, según requiere el teorema de Goldstone.

Si restauramos los términos de masa del quark en {1.28}, las corrientes axiales ya no se conservan exactamente ¹. La ecuación de movimiento del campo de quark es ahora:

$$i\mathcal{D}\psi = \mathbf{m}\psi, \quad -iD_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu = \bar{\psi} \mathbf{m}. \quad (1.38)$$

De esta manera se calcula:

$$\partial_\mu j^{\mu 5a} = i \bar{\psi} \{ \mathbf{m}, \tau^b \} \psi. \quad (1.39)$$

De esta ecuación y {1.34} encontramos:

$$\langle 0 | \partial_\mu j^{\mu 5a}(0) | \pi^b(p) \rangle = -ip^2 f_\pi \delta^{ab} = \langle 0 | i \bar{\psi} \{ \mathbf{m}, \tau^b \} \psi | \pi^b(p) \rangle. \quad (1.40)$$

Esta cantidad es un invariante, es decir:

$$\text{tr} \left[\{ \mathbf{m}, \tau^a \} \tau^b \right] = \frac{1}{2} \delta^{ab} (m_u + m_d). \quad (1.41)$$

Así obtenemos la relación de Gell-Mann-Oakes-Renner de la cual obtenemos la masa de los piones a partir de de las masas de los quarks de la siguiente manera:

$$m_\pi^2 = (m_u + m_d) \frac{M^2}{f_\pi}. \quad (1.42)$$

donde $M^2 \sim 400 \text{ MeV}$ y eventualmente se le asocia con el condensado. La relación {1.42} implica que el cuadrado de la masa del bosón de Goldstone, evoluciona linealmente con la masa de los quarks. En cierta medida, esto explica porqué, con los mismos quarks de valencia, tenemos $m_\pi \sim 140 \text{ MeV}$ y masa del nucleón $m_N \sim 940 \text{ MeV}$. En el límite en el que los quarks u y d tienen masa corriente cero en el lagrangiano (límite quirral), estos quarks

¹La corriente $j^{\mu 5}$ no se conserva y por lo tanto no existen isosingletes ligeros.

adquieren masas efectivas grandes e iguales desde el vacío con simetría quiral espontáneamente rota. Mientras las masas m_u y m_d en el lagrangiano sean pequeñas en comparación con la masa efectiva, los quarks u y d se comportarán dentro de los hadrones como si fueran aproximadamente degenerados. Por lo tanto, la simetría isospín de las interacciones fuertes no tiene nada que ver con una simetría fundamental que vincule u y d ; para cualquier relación arbitraria entre m_u y m_d siempre que ambos parámetros sean mucho menores que 300 MeV . La simetría quiral y su rompimiento tienen consecuencias muy grandes en la naturaleza: entre otras cosas, podemos tener piones muy ligeros y al mismo tiempo, con los mismos quarks de valencia, formar estados mucho más pesados, consecuencia de la dinámica de QCD: así, por ruptura espontánea entiéndase dinámica. De forma similar, la simetría $SU(N_f = 3)$ aproximada de las interacciones fuertes se produce si la masa fundamental del quark s también es pequeña en comparación con la escala de interacción fuerte. La simetría quiral es el límite en que las masas de los quarks son nulas entonces el lagrangiano de QCD es invariante ante el grupo de transformaciones globales $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$.

Las estimaciones actuales de las relaciones de masa m_u , m_d y m_s prueban que el lagrangiano fundamental de las interacciones fuertes no muestra ningún signo de simetría de sabor entre las masas de quark. La identificación de los piones como bosones de Goldstone de simetría quiral rota tiene una serie de implicaciones para los elementos de la matriz hadrónica. En el siguiente argumento, trabajaremos en el límite de la simetría quiral exacta, ignorando las pequeñas correcciones de las masas u y d . El elemento de la matriz de la corriente de isospín axial en el nucleón, una cantidad que entra en la teoría del neutrón y el decaimiento nuclear β , se puede escribir en términos de factores de forma de la siguiente manera:

$$\langle N | j^{\mu 5a}(q) | N \rangle = \bar{u} \left[\gamma^\mu \gamma^5 F_1^5(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2^5(q^2) + q^\mu \gamma^5 F_3^5(q^2) \right] u. \quad (1.43)$$

La cinemática del vértice se muestra en la figura {1.2}. Donde $F_{1,2,3}$ son funciones des-

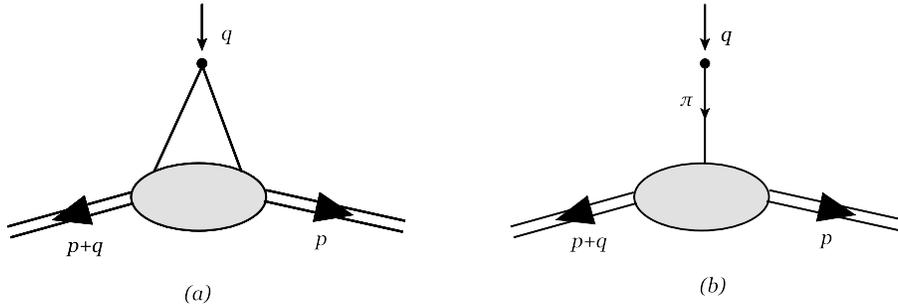


Figura 1.2: Corriente isospín axial en el nucleón: (a) Cinemática de la amplitud. (b) Contribución que conduce a un polo en $p^2 = 0$.

conocidas de q^2 llamadas factores de forma. El valor de F_1^5 en $q^2 = 0$ no está restringido por el valor de ninguna carga evidentemente conservada. Convencionalmente, uno escribe simplemente:

$$F_1^5(0) = g_A. \quad (1.44)$$

El valor de esta cantidad se puede calcular. Si ignoramos las masas de los quarks, se con-

serva la corriente vectorial axial en {1.43}, por lo que los factores de forma satisfacen:

$$\begin{aligned}
0 &= \bar{u}(p') \left[\not{q} \gamma^5 F_1^5(q^2) + q^2 \gamma^5 F_3^5(q^2) \right] u(p) \\
&= \bar{u}(p') \left[(\not{p}' - \not{p}) \gamma^5 F_1^5(q^2) + q^2 \gamma^5 F_3^5(q^2) \right] u(p) \\
&= \bar{u}(p') \left[2m_N \gamma^5 F_1^5(q^2) + q^2 \gamma^5 F_3^5(q^2) \right] u(p).
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Así encontramos:

$$g_A = \lim_{q^2 \rightarrow 0} \frac{q^2}{2m_N} F_3^5(q^2). \tag{1.46}$$

Esta ecuación implica que $g_A = 0$ a menos que F_3^5 contenga un polo en q^2 . Tal polo implicaría la presencia de una partícula física sin masa, pero afortunadamente, hay una disponible; *el pión sin masa*. El proceso en el que la corriente crea un pión que luego es absorbido por el núcleo conduce a un polo en $F_3^5(q^2)$, como se muestra en la figura {1.2}(b). Calculemos ahora este término de polo y usémoslo para determinar g_A . La interacción pión-nucleón de baja energía es parametrizada convencionalmente por el lagrangiano:

$$\Delta \mathcal{L} = i g_{\pi NN} \pi^a \bar{N} \gamma^5 \sigma^a N. \tag{1.47}$$

La amplitud de la corriente $j^{\mu 5a}$ para crear el pión viene dada por {1.35}. Entonces la contribución de la figura {1.2}(b) al vértice actual es:

$$-g_{\pi NN} \bar{u}(2\tau^a \gamma^5) u \cdot \frac{i}{q^2} \cdot (iq^\mu f_\pi). \tag{1.48}$$

Entonces:

$$F_3^5(q^2) = \frac{1}{q^2} \cdot 2f_\pi g_{\pi NN}. \tag{1.49}$$

Encontramos que g_A esta dada por una combinación de f_π , la masa del nucleón y la constante de acoplamiento pión-nucleón de la siguiente manera:

$$g_A = \frac{f_\pi}{m_N} g_{\pi NN}. \tag{1.50}$$

Esta relación entre la interacción de acoplamiento fuerte de los piones con los nucleones, el coeficiente g en el modelo de acoplamiento en gradiente y el coeficiente de corriente vectorial axial del nucleón que determina la tasa de disminución débil del neutrón. Es llamada relacion Goldberger-Treiman, y se satisface con un 5 % de precisión. La constante g_A es el coeficiente que determina la tasa de disminución de neutrones. Da la normalización de los elementos de matriz de interacción débil para el nucleón. Por otro lado, el acoplamiento pión-nucleón es una constante fenomenológica que describe la dispersión de estados ligados de quarks y gluones. Las interacciones débiles son, en última instancia, interacciones corriente-corriente porque provienen de una teoría de medida no abeliana. La relación Goldberger-Treiman sugiere que los piones interactúan por algún motivo como si estuvieran relacionados con la misma corriente de simetría. La identificación del pión como el bosón de Goldstone de la simetría quiral rota espontáneamente conduce a numerosas otras predicciones para los elementos de matriz actuales y las amplitudes de dispersión de piones. En particular, los términos principales de las amplitudes de dispersión pion-pion y

pion-nucleon a baja energía se pueden calcular directamente en términos de f_π por argumentos similares a los que acabamos de dar.

1.3.5. Anomalías de las Corrientes Quirales.

Anomalía No Abeliana

Hemos discutido las simetrías quirales de QCD de acuerdo con las ecuaciones de conservación clásicas. Ahora debemos preguntarnos si estas ecuaciones se ven afectadas por la anomalía de Adler-Bell-Jackiw, y cuáles son las consecuencias de esa modificación. Estudiamos la modificación de las leyes de conservación quirales debido al acoplamiento de las corrientes de los quarks a los campos de gluones de QCD. Los argumentos dados en la sección anterior se aplican igualmente bien en el caso de fermiones sin masa que se acoplan a un campo de gauge no abeliano, por lo que esperamos que una corriente vectorial axial reciba una contribución anómala de los diagramas mostrados en la figura {1.3}. La ecuación de anomalía debe ser el resultado abeliano, complementado por un factor de teoría de grupo apropiado. Además, dado que la corriente axial es invariante, la anomalía también debe ser invariante. Es decir, debe contener toda la intensidad de campo no abeliana, incluidos sus términos no lineales. Adler-Bell-Jackiw mostraron que las corrientes axiales, en los diagramas de triángulo de la figura {1.3}, contienen anomalías. Los bosones de norma pueden ser gluones (anomalía no abeliana) o fotones (anomalía abeliana).

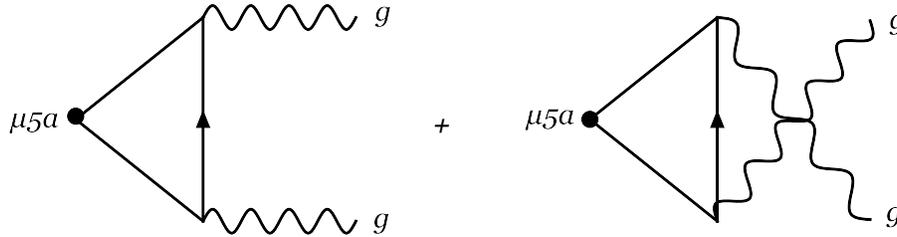


Figura 1.3: Diagramas que conducen a una anomalía vectorial axial para una corriente quiral en QCD.

Para las corrientes axiales de isospin en el caso de QCD, escritas en {1.33} podemos leer los factores de la teoría de grupos para la anomalía de Adler-Bell-Jackiw a partir de los diagramas de la figura {1.3} que corresponden a la anomalía no abeliana:

$$\partial_\mu j^{\mu 5a} = -\frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta}^c \cdot F_{\mu\nu}^d \cdot \text{Tr}[\tau^a R^c R^d], \quad (1.51)$$

la traza se toma sobre colores y sabores. En este caso, encontramos:

$$\text{Tr}[\tau^a R^c R^d] = \text{Tr}[\tau^a] \text{Tr}[R^c R^d] = 0. \quad (1.52)$$

Ya que $\text{Tr}[\tau^a] = 0$. Por lo tanto, la conservación de las corrientes de isospín axiales no se ve afectada por la anomalía de QCD Adler-Bell-Jackiw (Corriente axial de isospín de conserva). Sin embargo, en el caso de la corriente axial singlete de isospín, la matriz τ^a se

reemplaza por la matriz $\mathbb{1}$ en los sabores, y encontramos:

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = -\frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta}^c \cdot F_{\mu\nu}^d \cdot \text{Tr}[\mathbb{1} R^c R^d]. \quad (1.53)$$

Donde $\text{Tr}[R^c R^d] = \frac{1}{2} \delta_{cd}$, que implica:

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = -\frac{g^2 N_f}{32\pi^2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta}^c F_{\mu\nu}^c. \quad (1.54)$$

Donde N_f es el número de sabores, en nuestro modelo $N_f = 2$. Por lo tanto, la corriente axial del singulete de isospín no se conserva en QCD. Es afectada por la anomalía no abeliana. La ecuación anterior nos muestra porqué, en las interacciones fuertes, no existe un meson pseudoescalar ligero, que sea isosingulete y que tenga una masa comparable a la de los piones. Cuando se incluyen quarks s (el caso $N_f = 3$), la enorme diferencia de masas de los mesones $\eta - \eta'$ se explica por esta anomalía. La divergencia de esta corriente es igual a un operador de gluones con elementos de matriz no triviales entre estados de hadrones. Quedan algunas sutiles preguntas sobre los efectos de este operador. En particular, se puede mostrar, como se sabe para la anomalía axial bidimensional, que el lado derecho de {1.54} es una divergencia total.

$$\epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2\partial_\mu (\epsilon^{\mu\nu} A_\nu). \quad (1.55)$$

Sin embargo, de nuevo de acuerdo con nuestra experiencia en dos dimensiones, existen configuraciones de campo físicamente razonables en las que la integral tetradimensional de este término toma un valor distinto de cero. En cualquier caso, la Eq.{1.54} de hecho implica que QCD no tiene simetría axial isosingulete y ningún bosón Goldstone asociado. Esta ecuación explica por qué las interacciones fuertes no contienen ningún mesón pseudoescalar isosingulete con una masa comparable a la de los piones.

Anomalía Abeliana

Aunque las corrientes axiales de isospín no tienen anomalías axiales debidas a las interacciones QCD, sí tienen una anomalía asociada con el acoplamiento de los quarks al electromagnetismo QED. Volviendo a referirnos a los diagramas de la figura {1.3}, vemos que la anomalía electromagnética de las corrientes isospín axiales está dada por:

$$\partial_\mu j^{\mu 5a} = -\frac{e^2}{16\pi^2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \cdot \text{Tr}[\tau^a Q^2]. \quad (1.56)$$

Donde Q es la matriz de carga eléctrica

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

La traza corre de nuevo sobre sabores y colores. Como las matrices en la traza no dependen del color, la suma de colores simplemente da un factor de 3. La traza de sabor es distinta de cero solo para $a = 3$; en ese caso, la anomalía electromagnética es:

$$\partial_\mu j^{\mu 53} = -\frac{e^2}{32\pi^2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}. \quad (1.57)$$

Debido a que la corriente $j^{\mu 53}$ aniquila un π^0 meson. Así la Ec.{1.57} indica que la anomalía

del vector axial contribuye al elemento de matriz para la desintegración $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$. De hecho, da la contribución principal a esta amplitud. De nuevo, trabajamos en el límite de los quarks sin masa u y d , de modo que las simetrías quirales son exactas hasta los efectos de la anomalía. Considere el elemento de la matriz de la corriente axial entre el vacío y un estado de dos fotones:

$$\langle p, k | j^{\mu 53}(q) | 0 \rangle = \epsilon_\nu^* \epsilon_\lambda^* \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda}(p, k). \quad (1.58)$$

Donde \mathcal{M} es la matriz de dos fotones de la divergencia de la corriente vectorial axial. Estudiaremos las propiedades generales de este elemento de matriz al expandirlo en factores de forma. En general, la amplitud puede descomponerse escribiendo todas las estructuras posibles de tensor y aplicando las restricciones que siguen de la simetría bajo el intercambio de (p, ν) y (k, λ) y las identidades Ward QED:

$$p_\nu \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} = k_\lambda \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} = 0. \quad (1.59)$$

Esto deja tres estructuras posibles:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} &= q^\mu \epsilon^{\nu\lambda\alpha\beta} p_\alpha k_\beta \mathcal{M}_1 + (\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k^\lambda - \epsilon^{\mu\lambda\alpha\beta} p^\nu) k_\alpha p_\beta \mathcal{M}_2 \\ &+ \left[(\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p^\lambda - \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k^\nu) k_\alpha p_\beta - \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} (p - k)_\sigma p \cdot k \right] \mathcal{M}_3. \end{aligned} \quad (1.60)$$

El segundo término satisface {1.59} en virtud de las condiciones on-shell $p^2 = k^2 = 0$. Ahora contraemos {1.60} con (iq_μ) para tomar la divergencia de la corriente vectorial axial. Encontramos:

$$iq_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} = iq^2 \epsilon^{\nu\lambda\alpha\beta} p_\alpha k_\beta \mathcal{M}_1 - i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} q_\mu (p - k)_\sigma p \cdot k \mathcal{M}_3. \quad (1.61)$$

Los otros términos automáticamente dan cero. Usando $q = p + k$ (momento total del sistema), $q^2 = 2p \cdot k$ podemos simplificar esto como:

$$iq_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} = iq^2 \epsilon^{\nu\lambda\alpha\beta} p_\alpha k_\beta (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_3). \quad (1.62)$$

La cantidad total es proporcional a q^2 y aparentemente desaparece en el límite $q^2 \rightarrow 0$. Esto contrasta con la predicción de la anomalía del vector axial. Tomando el elemento de la matriz del lado derecho de {1.57}, encontramos:

$$iq_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} = -\frac{e^2}{4\pi^2} \epsilon^{\nu\lambda\alpha\beta} p_\alpha k_\beta. \quad (1.63)$$

El conflicto se puede resolver si uno de los factores de forma que aparecen en {1.62} contiene un polo en q^2 . Tal polo puede surgir a través del proceso que se muestra en la figura {1.4}, en el que la corriente crea un meson π^0 que posteriormente se descompone en dos fotones. La amplitud de la corriente para crear el mesón viene dada por {1.36}. Vamos a parametrizar la amplitud de la disminución del pión como:

$$i\mathcal{M}(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = iG_{\pi\gamma}^0 \epsilon_\nu^* \epsilon_\lambda^* \epsilon^{\nu\lambda\alpha\beta} p_\alpha k_\beta. \quad (1.64)$$

Donde $G_{\pi\gamma}^0$ es una constante por determinar. De la ecuación anterior y {1.36}, vemos que la contribución de este decaimiento al proceso {1.58} mostrado en la figura {1.4} es:

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}^{\mu\nu\lambda} = (iq^\mu f_\pi) \frac{i}{q^2} (iG_{\pi\gamma}^0 \epsilon^{\nu\lambda\alpha\beta} p_\alpha k_\beta). \quad (1.65)$$

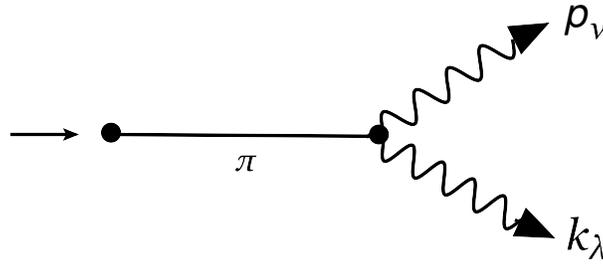


Figura 1.4: Contribución que conduce a un polo en el vector axial \mathcal{M}_1 .

De manera que la contribución a \mathcal{M}_1 esta dada por:

$$\mathcal{M}_1 = \frac{-i}{q^2} f_\pi \cdot G_{\pi\gamma}^0 + \text{constante} + O(q^2). \quad (1.66)$$

Finalmente, al comparar {1.62} y {1.63} encontramos $G_{\pi\gamma}^0$ en términos del coeficiente de anomalía:

$$G_{\pi\gamma}^0 = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{1}{f_\pi}. \quad (1.67)$$

A partir del elemento de la matriz de decaimiento {1.64}, es fácil calcular la tasa de disminución de π^0 . Tenga en cuenta que, aunque hemos calculado el elemento de la matriz de desintegración en el límite de un π^0 sin masa, debemos proporcionar la cinemática físicamente correcta que depende de la masa de π^0 . Incluyendo un factor 1/2 para el espacio de fases de partículas idénticas, encontramos:

$$\begin{aligned} \Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) &= \frac{1}{2m_\pi} \frac{1}{8\pi} \frac{1}{2} \sum_{\text{Pols.}} |\mathcal{M}(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)|^2 \\ &= \frac{1}{32\pi m_\pi} \cdot (G_{\pi\gamma}^0)^2 \cdot 2(p \cdot k)^2 \\ &= (G_{\pi\gamma}^0)^2 \frac{m_\pi^3}{64\pi}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Así finalmente,

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = \frac{\alpha_{QED}^2 m_\pi^3}{64\pi^3 f_\pi^2} = 7.74 \pm 0.56 \text{ keV}. \quad (1.69)$$

Donde $\alpha = e^2/4\pi$. Esta relación proporciona una medida directa de la anomalía de Adler-Bell-Jackiw, se satisface experimentalmente con una precisión de un pequeño porcentaje.

Capítulo 2

Ecuaciones de Schwinger-Dyson

QCD se caracteriza por dos fenómenos no evidentes del lagrangiano:

Confinamiento Los grados de libertad fundamentales, quarks y gluones, no pueden ser aislados (ni observados directamente), pues poseen carga de color. Éstos se agrupan en estados ligados de color neutro, denominados hadrones. Dado que los gluones pueden interactuar entre ellos, éstos forman un campo de color que impide que los quarks se separen. El potencial entre los quarks crece linealmente con la distancia y, por lo tanto, se requiere una cantidad infinita de energía para separar dos quarks. Creemos en su veracidad debido a que explica por que no se han encontrado quarks libres ni gluones libres. Los hadrones pueden ser *bariones* (compuestos por tres quarks) o *mesones* (compuestos por un quark y un antiquark). QCD tiene una propiedad que se llama libertad asintótica [20], descubierta por Gross, Wilczek y Politzer (ganadores del premio Nobel en 2004), que consiste en el hecho que la intensidad de la interacción de QCD decrece a cortas distancias (o altas energías). Este comportamiento ha sido observado experimentalmente, como se muestra en la figura {2.1}. Puesto que el acoplamiento fuerte es débil a altas energías, se puede usar la teoría de perturbaciones de forma fiable en este régimen y explica perfectamente la evolución de la constante de acoplamiento. Por otra parte, a bajas energías, el desarrollo perturbativo se rompe, aumenta el acoplamiento y el confinamiento entra en escena. A un loop, dicho acoplamiento resulta ser:

$$\alpha_s(Q^2) \equiv \frac{g_s^2(Q^2)}{4\pi} = \frac{12\pi}{(11N_c - 2N_f) \text{Log}\left(\frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right)}, \quad (2.1)$$

donde Λ_{QCD} es un parametro conocido como la escala de QCD definido en terminos del punto de renormalizacion μ y $\alpha_s(\mu^2)$, a saber $\alpha_s(\mu^2 = (2GeV)^2) \approx 0.388$ [21].

Rompimiento Dinámico de Simetría Quiral (DCSB). Debido a las autointeracciones, quarks y gluones adquieren masa (efectiva) de manera dinámica, dentro de los hadrones. Estas autointeracciones generan un valor de expectación del vacío $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$ llamado condensado quiral que es el parámetro de la DCSB.

Estos fenómenos son de naturaleza no perturbativa. Por esta razón, estudiar hadrones es muy difícil. Existen varios enfoques para la QCD no perturbativa: teoría quiral de perturbaciones u otros modelos efectivos, QCD de retícula (ICQ), SDE, entre otros. Las ecuaciones

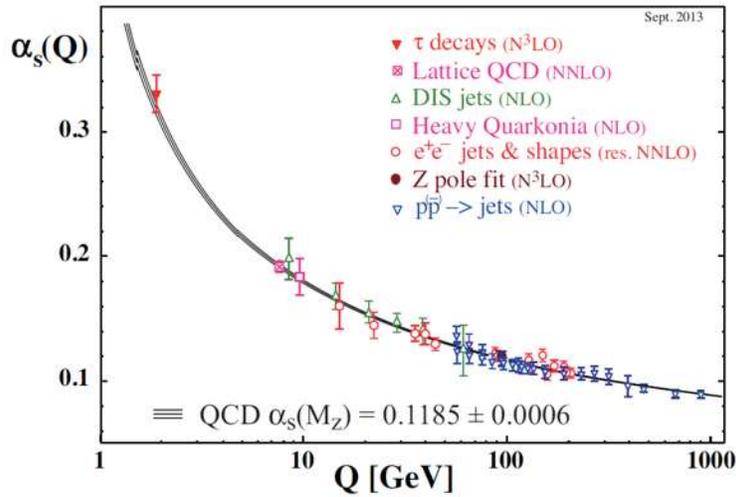


Figura 2.1: Resultados experimentales para la dependencia de la constante de acoplamiento fuerte $g_s(Q^2)$ como función de la energía [20].

de SDE son una herramienta fundamental en la teoría cuántica de campos. Se pueden derivar formalmente de las integrales de camino de Feynman que no requieren la suposición de acoplamiento pequeño. Una derivación detallada de estas relaciones se puede encontrar en las referencias [16, 17]. Obtenemos un conjunto completo de estas ecuaciones acopladas no lineales integrales para las funciones de Green como consecuencia de la estructura del Lagrangiano.

Representan un enfoque continuo para QCD que es capaz de estudiar el rango completo de la función de masa de los quarks entre el límite quiral y el dominio de quarks pesados. Para los estudios numéricos, uno se basa en un truncamiento de los sistemas infinitos de ecuaciones a un subconjunto que captura el contenido físico y se resuelve de manera explícita, combinado con el uso de ansatz para aquellas funciones de Green que entran en las ecuaciones pero no se resuelven. Estas funciones están restringidas por las propiedades de simetría, la renormalización multiplicativa, los límites perturbativos, etc.

Las SDE se utilizan para estudiar fenómenos no perturbativos ya que no se hacen suposiciones sobre el valor del acoplamiento, son exactas e invariantes de Poincaré. Estas ecuaciones son infinitas en número y su estructura es tal que la función de n -puntos está relacionada con la función de $n + 1$ -puntos; la función de $n + 1$ puntos está relacionada con la de $n + 2$ puntos, y así sucesivamente, por lo tanto, tenemos que truncarlas de alguna manera para reducir este número de ecuaciones a un número que se pueda resolver.

Un truncamiento consiste en tomar los primeros términos de la serie perturbativa cuando nuestro acoplamiento $\alpha \ll 1$. Sin embargo, cuando $\alpha \sim 1$ se usan otros tipos de métodos. Estos métodos se llaman no perturbativos. Los cálculos no perturbativos muestran los efectos muy importantes que permanecen fuera de la teoría de la perturbación, como la generación de masa dinámica para fermiones fundamentales y el confinamiento de quarks y gluones en QCD. Nos interesa la generación dinámica de masas, ya que sabemos que aproximadamente el 98 % de la masa de la materia ordinaria es de origen dinámico.

Las DSE están limitadas a la dinámica de una partícula. Dentro de este formalismo tenemos las ecuaciones de Bethe-Salpeter, que describen la dispersión relativista de dos partículas y sus estados ligados. Del mismo modo, los estados ligados de tres partículas se pueden estudiar a través de las ecuaciones de Faddeev.

2.1. Reglas de Feynman.

En la Física de Partículas es común hacer cálculos de procesos de dispersión entre partículas que no son calculables exactamente, por lo que es necesario usar teoría de perturbaciones. Estos cálculos se hacen mediante el uso de las reglas de Feynman que nos permiten asociar amplitudes de dispersión a diagramas que representan el proceso a estudiar, de forma que las observables corresponden a la amplitud total de todos los posibles diagramas.

Las reglas de Feynman se usan en las teorías cuánticas de campos y se pueden obtener del formalismo de la integral de camino. Por otro lado, los diagramas de Feynman son líneas de distintos estilos que representan campos de partículas propagándose. Si tres o más líneas se unen en un punto común, a este le llamamos vértice y representa a esas partículas encontrándose en un punto del espacio de momentos.

Una partícula que se desplaza entre dos puntos del espacio-tiempo es lo que llamamos propagador. De hecho, un propagador es una función de Green de 2-puntos que representa la amplitud de probabilidad de propagación de una partícula entre dos puntos. Las funciones de Green pueden ser expresadas como valores de expectación de productos de los operadores de campo en el vacío. Recordamos el lagrangiano de QCD {refeq:1.1} para analizar cada una de las interacciones del lagrangiano de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} &= \mathcal{L}_{\text{quarks libres}} + \mathcal{L}_{\text{interacción quarks-gluones}} \\ &+ \mathcal{L}_{\text{gluones libres}} + \mathcal{L}_{\text{interacción tres-gluones}} \\ &+ \mathcal{L}_{\text{interacción cuatro-gluones}}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Para describir cada una de las partes del lagrangiano {2.2} debemos analizar las reglas de Feynman. En la QCD necesitamos de tres tipos de propagadores: quarks, gluones y fantasmas. El propagador del quark se representa como una línea sólida, donde podemos interpretar la dirección de las flechas como representaciones de los operadores de creación y aniquilación, desde α a β y desde β a α , respectivamente, tal como se muestra en la figura {2.2}. La parte del lagrangiano {2.2} que contiene la información de los quarks libres de la figura {2.2} es el siguiente:

$$\mathcal{L}_{\text{quarks libres}} = \sum_{j=1}^{N_f} \bar{\psi}_l^j (i\gamma^\mu D_\mu - m_j) \psi_l^j. \quad (2.3)$$

El propagador del gluon se representa por una espiral sólida, tal como se muestra en la figura {2.3}.

La parte del lagrangiano {2.2} que representa los gluones libres se muestra en la expresión {2.4}.

$$\mathcal{L}_{\text{gluones libres}} = -\frac{1}{4} \left[\partial^\mu A_\alpha^\nu - \partial^\nu A_\alpha^\mu \right] \left[\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a \right]. \quad (2.4)$$

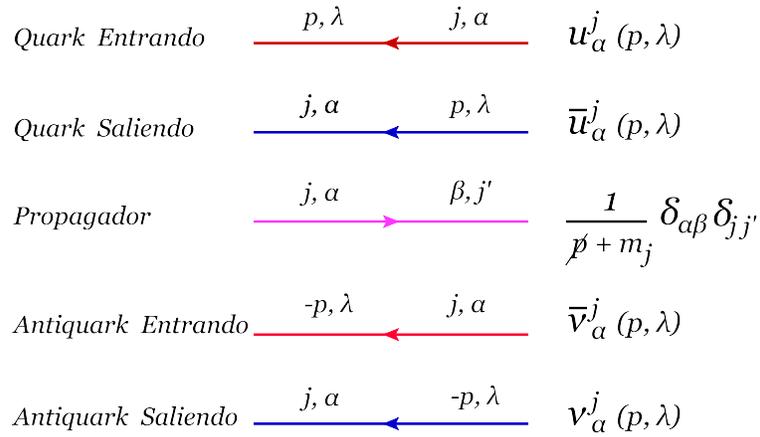


Figura 2.2: Diagramas de Feynman para el Quark y el Propagador.

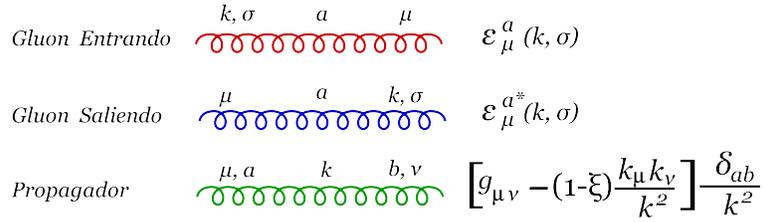


Figura 2.3: Diagramas de Feynman para el Gluon y su Propagador.

El propagador del campo fantasma es el mostrado en la figura {2.4}.

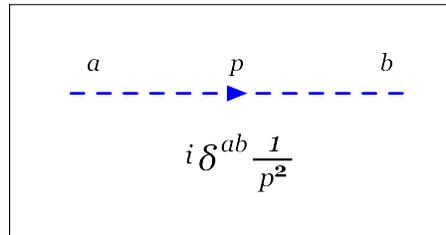


Figura 2.4: Diagrama de Feynman para el Campo Fantasma.

Ahora, analizamos la parte del lagrangiano {2.2} en la cual identificamos la interacción quarks y gluones:

$$\mathcal{L}_{interaccion\ quarks-gluones} = \frac{g}{2} \bar{\psi}_{\alpha}^j \lambda_{\alpha\beta}^a \gamma_{\mu} \psi_{\beta}^j A_a^{\mu} \quad (2.5)$$

Este término está relacionado al vértice de quark-gluon, que es cuando los quarks se afectan en algún punto del espacio de momentos mediante un gluon tal como se muestra en la figura {2.5}.

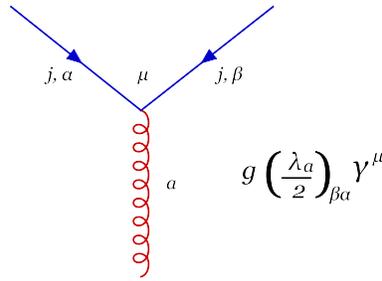
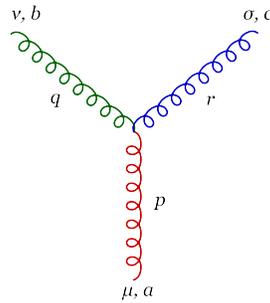


Figura 2.5: Diagrama de Feynman para el Vértice Quark-Gluon.

Sin embargo, el lagrangiano nos admite otros tipos de vértices, por ejemplo el vértice de tres gluones mostrado en la figura {2.6}.



$$ig f_{abc} \left[g_{\mu\nu}(p - q)_\sigma - g_{\nu\sigma}(q - r)_\mu - g_{\sigma\mu}(r - p)_\nu \right]$$

Figura 2.6: Diagramas de Feynman para el Vértice de 3 Gluones.

El lagrangiano que describe la interacción de tres gluones {2.6} se muestra en la figura {2.6}.

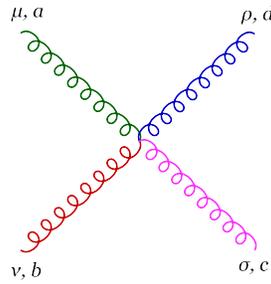
$$\mathcal{L}_{interaccion\ tres-gluones} = -\frac{1}{2}g f_{abc} \left[\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a \right] A_b^\mu A_c^\nu. \quad (2.6)$$

Otro vértice admitido por el lagrangiano es el de cuatro gluones, cuyo lagrangiano corresponde a la expresión {2.7}, mostrado en la figura {2.7}.

$$\mathcal{L}_{interaccion\ cuatro-gluones} = -\frac{1}{4}f_{abc}f_{ade}A_b^\mu A_c^\nu A_\mu^d A_\nu^e. \quad (2.7)$$

Todos los procesos a calcular se conciben como correcciones a la propagación libre y se realizan a través de la teoría de las perturbaciones, donde el parámetro pequeño es el acoplamiento fuerte $\alpha_S = g^2/4\pi$ que depende de la escala de energía involucrada. Pero la propagación libre solo corresponde a uno de los escenarios posibles. En general, la propagación de un quark de un punto a otro puede implicar procesos internos más complicados, como la creación y aniquilación de partículas virtuales. Esto significa agregar diagramas que involucren vértices o funciones de 3, 4 y hasta n-puntos. Así, la propagación completa se escribe como se muestra en la figura {2.8}.

Una forma particularmente conveniente para el entendimiento de la física subyacente del propagador completo es usar funciones de vestimiento en las expresiones de las reglas de



$$-g^2 \left[f_{abc} f_{cde} (g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}) + f_{ace} f_{bde} (g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}) + f_{ade} f_{cbe} (g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho}) \right]$$

Figura 2.7: Diagramas de Feynman para el Vértice de 4 Gluones.

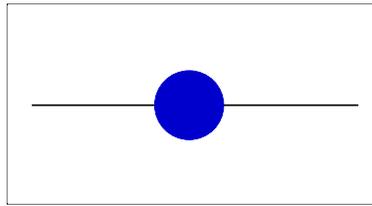


Figura 2.8: Propagación General del Quark.

Feynman. En el espacio Euclidiano tenemos:

$$S(p^2, \mu^2) = \frac{Z(p^2, \mu^2)}{i\gamma \cdot p + M(p^2, \mu^2)}, \quad (2.8)$$

donde $M(p^2, \mu^2)$ es la función de masa y $Z(p^2, \mu^2)$ es la renormalización de la función de onda. Esta forma se asemeja al propagador del quark a nivel árbol cuando $M(p^2, \mu^2) \approx m(\mu)$ y $Z(p^2, \mu^2) \approx 1$. Esto mismo ocurre para todos los propagadores y todos los vértices. Por ejemplo, el propagador del gluon se muestra en la figura {2.9}. El propagador del gluon

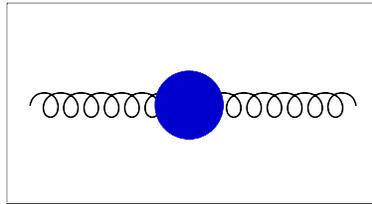


Figura 2.9: Propagador General para el Gluon.

se caracteriza por una sola función de vestimenta, $G(k^2, \mu^2)/k^2$, y se escribe como:

$$D_{\mu\nu} = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{G(k^2, \mu^2)}{k^2} + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{k^4}. \quad (2.9)$$

Es común tomar la aproximación quenched, donde el propagador completo se toma como

el desnudo, es decir, $G(k^2, \zeta^2) = 1$, el cual se muestra en la figura {2.10}. Otro propagador

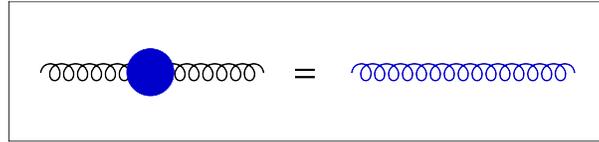


Figura 2.10: Aproximación quenched para el propagador completo del gluon.

que necesitamos es el propagador del fotón, el cual se muestra en la figura {2.11}. Por

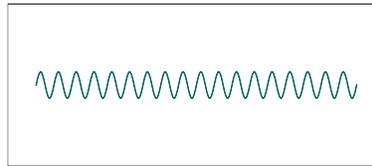


Figura 2.11: Propagador del fotón.

último el vértice quark-gluon completo se representa como se muestra en la figura {2.12}. Utilizando todos estos diagramas se construye la SDE para el propagador del quark, esta

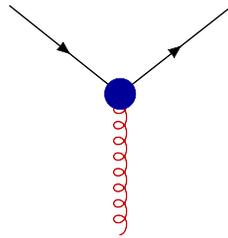


Figura 2.12: Aproximación quenched para el propagador completo del gluon.

ecuación después de ser renormalizada se le denomina **ecuación de gap**.

2.1.1. Ecuación de Gap

Consideremos la interacción en QED, donde el bosón de norma es el fotón. Aunque la derivación de las SDE es independiente del valor del acoplamiento α , es más intuitivo deducirlas por argumentos perturbativos. Así, el propagador del quark se puede escribir como una serie de correcciones al propagador desnudo, como se muestra en la figura {2.13}, donde la interacción es mediada por un fotón.

En 1949, Freeman Dyson al darse cuenta de que existía una cierta regularidad en las correcciones del propagador desnudo, las agrupó en cuatro tipos de correcciones:

- Correcciones al propagador fermiónico, llamadas correcciones de arcoíris. Solo corrigen al propagador interno.

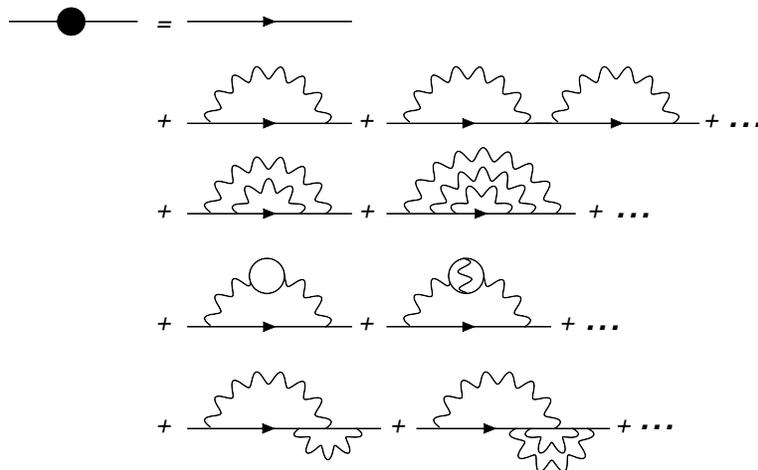


Figura 2.13: Términos en la serie perturbativa del propagador del quark.

- Correcciones al propagador del fotón.
- Correcciones al vértice.
- Re-correcciones, son repeticiones y combinaciones de todas las posibles correcciones.

El proceso de autointeracciones genera tres series infinitas, dichas series se representan esquemáticamente a continuación. Primero mostramos las correcciones al propagador fermiónico en la figura {2.14}.

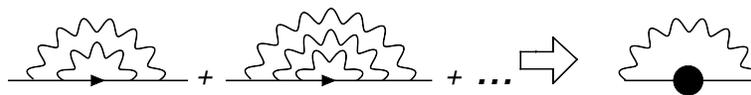


Figura 2.14: Correcciones al propagador fermiónico.

Se utiliza un círculo relleno sobre el propagador fermiónico que representa la suma de todas las posibles interacciones que pueden contribuir al fermión en propagación. Esto mismo sucede con el propagador del fotón y el vértice completo del fermión que también poseen círculos rellenos, a diferencia de los propagadores desnudos que no los tienen. Las correcciones al propagador del fotón se muestran en la figura {2.15}. Las correcciones



Figura 2.15: Correcciones al propagador del fotón.

al vértice se muestran en la figura {2.16}. Por último se muestran las recorrecciones en la figura {2.17}.

Las series anteriormente mencionadas se pueden dibujar en una forma compacta, como se

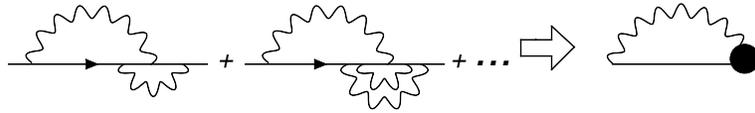


Figura 2.16: Correcciones al vértice.

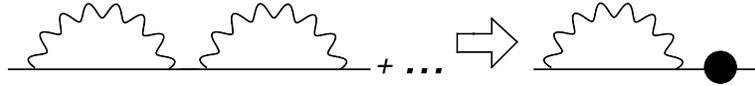


Figura 2.17: Re-Correcciones de todas las correcciones.

exhibe en la Figura {2.18}. Debemos observar que, en el tercer diagrama, uno de los vértices no lleva un círculo relleno, porque, de ponerlo, estaríamos contando doble.

En la figura {2.18} se puede observar que la extensión al final del término de correcciones



Figura 2.18: Primera simplificación de los términos en serie perturbativa mostrados en la figura {2.13}.

corresponde a las re-correcciones. Esto significa que podemos tener todas las posibilidades que el caso del mismo propagador completo. Expandiendo este último término, tenemos una ecuación como la que se muestra en la figura {2.19}. Identificamos el término de la figura {2.20} como la autoenergía $\Sigma(p)$.

Entonces podemos escribir la ecuación diagramática de la figura {2.19} como se muestra en la caución {2.10} donde definimos $S(p)$ como el propagador del quark completamente vestido y a $S_0(p)$ propagador del quark a nivel árbol.

$$\begin{aligned}
 S(p) &= S_0(p) + S_0(p)\Sigma(p)S_0(p) + S_0(p)\Sigma(p)S_0(p)\Sigma(p)S_0(p) + \dots \\
 &= S_0(p) + S_0(p)\Sigma(p)\left[\underbrace{S_0(p) + S_0(p)\Sigma(p)S_0(p) + \dots}_{S(p)} \right] \\
 &= S_0(p) + S_0(p)\Sigma(p)S_0(p).
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

Ahora multiplicamos la ecuación {2.10} por la izquierda con $S_0^{-1}(p)$ y posteriormente con $S^{-1}(p)$ por la derecha, así, obtenemos {2.11}.

$$\begin{aligned}
 S_0^{-1}(p)S(p) &= S_0^{-1}(p)S_0(p) + S_0^{-1}(p)S_0(p)\Sigma(p)S(p) \\
 S_0^{-1}(p)S(p) &= \mathbb{1} + \Sigma(p)S(p) \\
 S_0^{-1}(p)S(p)S^{-1}(p) &= S^{-1}(p) + \Sigma(p)S(p)S^{-1}(p) \\
 S_0^{-1}(p) &= S^{-1}(p) + \Sigma(p) \\
 S^{-1}(p) &= S_0^{-1}(p) - \Sigma(p).
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

La ecuación de Schwinger-Dyson para el propagador del fotón "QED" {2.11} puede ser re-

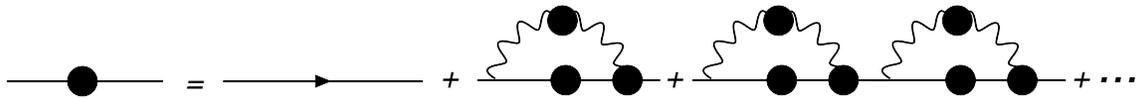
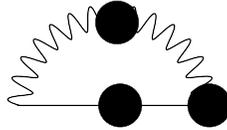


Figura 2.19: Expansión de la figura {2.18}.

Figura 2.20: Diagrama que corresponde a la autoenergía $\Sigma(p)$.

presentada en forma diagramática tal como se muestra en la figura {2.21}. De una manera

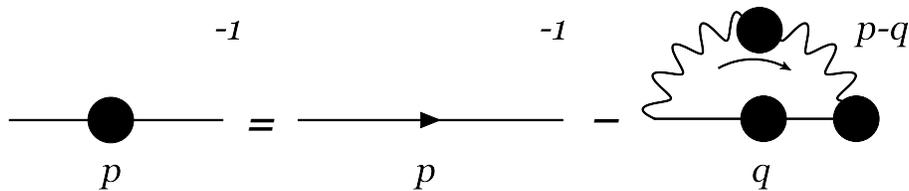


Figura 2.21: Representación esquemática de la Ecuación de Schwinger-Dyson para un quark en QED.

similar podemos extender esta idea a QCD. Así, la DSE para el quark en QCD esquemáticamente se muestra en la figura {2.22}. Con una discusión similar se muestran las figuras de las DSE diagramáticamente para el propagador del gluon {2.23}, propagador del fantasma {2.24}, el vértice quark-gluon {2.25} y el vértice fantasma-gluon {2.26}, ver [16, 17].

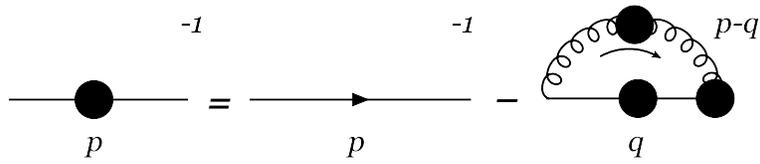


Figura 2.22: Representación esquemática de la Ecuación de Schwinger-Dyson para el propagador del quark en QCD.

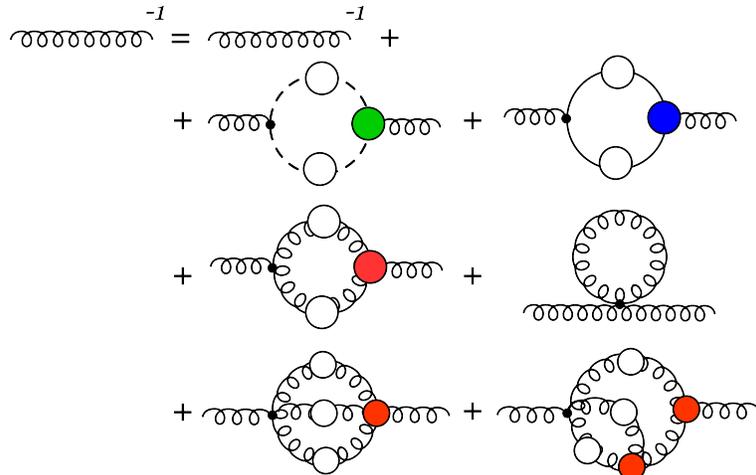


Figura 2.23: Representación esquemática del propagador del gluon en QCD.

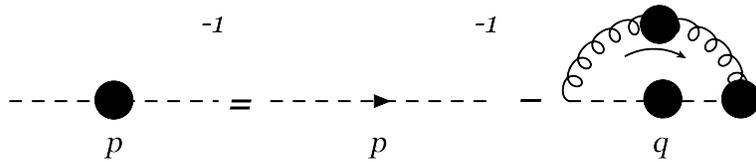


Figura 2.24: Representación esquemática para el propagador del fantasma en QCD.

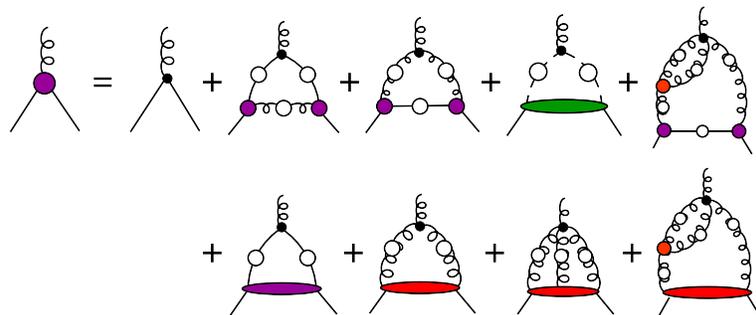


Figura 2.25: Representación esquemática del vértice quark-gluon en QCD.

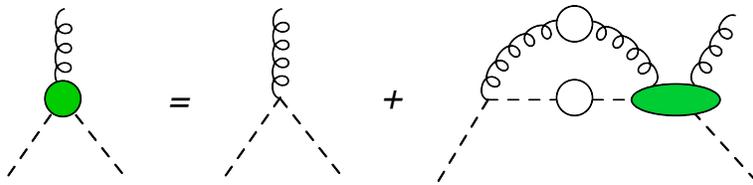


Figura 2.26: Representación esquemática para el vértice gluon-fantasma en QCD.

Ahora nos enfocaremos en la ecuación de Schwinger-Dyson para el propagador del quark, o equivalentemente ecuación de gap en QCD, ya que es importante para entender el rompimiento espontáneo de simetría quiral (DCSB) la cual se muestra esquemáticamente en la figura {2.22} y en la ecuación {2.11}. La ecuación de Schwinger-Dyson para la autoenergía del quark se muestra en la figura {2.27}. Las integrales que aparecen en este tipo de ecuaciones

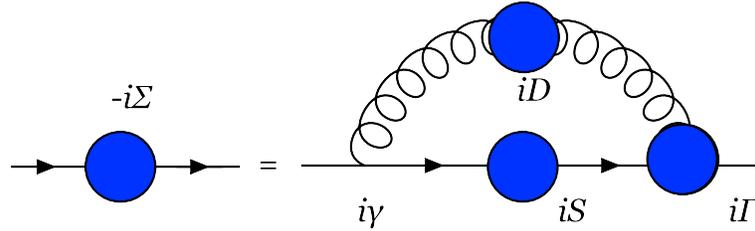


Figura 2.27: La Ecuación de Schwinger-Dyson para la energía propia del quark.

por lo regular siempre presentan divergencias por lo cual es muy conveniente definir cortes infrarrojo y ultravioleta, donde Λ es el regulador de corte o también conocido como escala de masa, para poder tratar las integrales numéricamente. Entonces reescribimos la ecuación para el propagador del quark {2.22} con la correspondiente autoenergía {2.27} ambas en su forma desnuda como se muestra en la ecuación {2.12}.

$$S_d^{-1}(p; \Lambda) = S_0^{-1}(p; \Lambda) + \Sigma_d(p; \Lambda)$$

$$\Sigma_d(p; \Lambda) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} g_d^2(\Lambda) D_{\mu\nu}^d(p - q; \Lambda) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu S_d(q; \Lambda) \Gamma_{d\nu}^a(q, p; \Lambda). \quad (2.12)$$

Donde los símbolos representan lo siguiente:

- S : Propagador del quark vestido.
- S_d : Propagador del quark desnudo.
- S_0 : Propagador del quark a nivel árbol.
- Σ_d : Autoenergía propia del quark.
- $D_{\mu\nu}$: Propagador del gluon vestido.
- Γ_ν^a : Vértice quark-gluon vestido.
- γ_μ : Vértice quark-gluon a nivel árbol.

Todas las cantidades vestidas hacen referencia a las integrales de Green que contiene todas las posibles contribuciones a cualquier orden. Cabe señalar que trabajaremos en el espacio Euclidiano, ver apéndice A, donde vale el producto escalar de vectores mostrado en la ecuación {2.13}, recordemos que en este espacio no existen distinciones entre índices arriba y abajo.

$$a \cdot b = a_\mu \delta_{\mu\nu} b_\nu = \sum_{i=1}^4 a_i b_i. \quad (2.13)$$

Para solucionar el problema de infinitos es conveniente escribir las cantidades desnudas en términos de las renormalizadas. De esta manera la ecuación {2.12} se transforma en:

$$\begin{aligned} \frac{S^{-1}(p; \mu)}{Z_{2F}} &= S_0^{-1}(p) + \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [Z_g g(\mu)]^2 [Z_3 D_{\rho\nu}(p - q; \mu)] \\ &\quad \times \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\rho [Z_{2F} S(q; \mu)] \left[\frac{\Gamma_\nu^a(p, q; \mu)}{Z_{1F}} \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Las constantes de renormalización dependen del regulador de corte y del punto de renormalización para mayor simplicidad en la notación obviaremos esta dependencia. El propagador del quark a nivel árbol es:

$$S_0^{-1}(p) = i\gamma \cdot p + m_d(\Lambda) = i\gamma \cdot p + Z_m m(\mu). \quad (2.15)$$

Multiplicamos por Z_{2F} y reagrupamos las constantes de renormalización, de esta manera obtenemos:

$$\begin{aligned} S^{-1}(p, \mu) &= Z_{2F} [i\gamma \cdot p + Z_m m(\mu)] + Z_g^2 Z_{2F}^2 Z_3 Z_{1F}^{-1} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} g^2(\mu) \\ &\quad \times D_{\rho\nu}(p - q; \mu) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\rho S(q; \mu) \Gamma_\nu^a(q, p; \mu). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Sabemos que $Z_{1F} = Z_g Z_{2F} Z_3^{1/2}$, $Z_{2F} Z_m = Z_4$, además usamos la notación $g \equiv g(\mu)$, de esta manera obtenemos:

$$\begin{aligned} S^{-1}(p, \mu) &= Z_{2F} (i\gamma \cdot p) + Z_4 m(\mu) + Z_{1F} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} g^2 \\ &\quad \times D_{\rho\nu}(p - q; \mu) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\rho S(q; \mu) \Gamma_\nu^a(q, p; \mu). \end{aligned} \quad (2.17)$$

La ecuación {2.18} es la DSE renormalizada para el propagador del quark en QCD también llamada ecuación de gap. Utilizando las relaciones de Slavlov-Taylor la ecuación de gap se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} S^{-1}(p, \mu) &= Z_{2F} (i\gamma \cdot p) + Z_4 m(\mu) + \frac{\tilde{Z}_1 Z_{2F}}{\tilde{Z}_3} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} g^2 \\ &\quad \times D_{\rho\nu}(p - q; \mu) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\rho S(q; \mu) \Gamma_\nu^a(q, p; \mu). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Esta ecuación relaciona el propagador del quark con el sector fantasma.

2.2. Representaciones del propagador del quark

Independientemente del truncamiento, en general, el propagador del quark se escribe en términos de dos estructuras matriciales ($\mathbb{1}, \gamma \cdot p$), de esta manera el propagador del quark lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$S^{-1}(p, \mu) = i\gamma \cdot p A(p^2, \mu^2) + B(p^2, \mu^2), \quad (2.19)$$

donde $A(p^2, \mu^2)$ y $B(p^2, \mu^2)$ son llamadas funciones de vestimento. Otra manera de escribir el propagador del quark es:

$$S(p, \mu) = -i\gamma \cdot p \sigma_v(p^2, \mu^2) + \sigma_e(p^2, \mu^2), \quad (2.20)$$

donde $\sigma_v(p^2, \mu^2)$ y $\sigma_e(p^2, \mu^2)$ son la parte vectorial y escalar del propagador del quark respectivamente. Para entender la física tras la forma en la que escribimos el propagador del quark es mejor escribir el propagador mostrado en la ecuación {2.8} de la siguiente manera:

$$S^{-1}(p, \mu) = \frac{i\gamma \cdot p + M(p^2, \mu^2)}{Z(p^2, \mu^2)}, \quad (2.21)$$

recordemos que esta forma se asemeja al propagador del quark a nivela árbol cuando $M(p^2, \mu^2) \approx m(\mu)$ y $Z(p^2, \mu^2) \approx 1$. Las relaciones entre las diferentes maneras de escribir el propagador del quark son las siguientes:

$$\begin{aligned} Z(p^2, \mu^2) &= \frac{1}{A(p^2, \mu^2)} = \frac{p^2 \sigma_v^2(p^2, \mu^2) + \sigma_e^2(p^2, \mu^2)}{\sigma_v(p^2, \mu^2)}, \\ M(p^2, \mu^2) &= \frac{B(p^2, \mu^2)}{A(p^2, \mu^2)} = \frac{\sigma_e(p^2, \mu^2)}{\sigma_v(p^2, \mu^2)}, \\ \sigma_v(p^2, \mu^2) &= \frac{Z(p^2, \mu^2)}{p^2 + M^2(p^2, \mu^2)} = \frac{A(p^2, \mu^2)}{P^2 A^2(p^2, \mu^2) + B^2(p^2, \mu^2)}, \\ \sigma_e(p^2, \mu^2) &= \frac{Z(p^2, \mu^2) M(p^2, \mu^2)}{p^2 + M^2(p^2, \mu^2)} = \frac{B(p^2, \mu^2)}{P^2 A^2(p^2, \mu^2) + B^2(p^2, \mu^2)}. \end{aligned}$$

En la teoría de perturbaciones se tiene la condición:

$$S^{-1}(p) \Big|_{p=\mu} = i\gamma \cdot p + m(\mu), \quad (2.22)$$

con $m(\mu) = M(\mu^2)$, esto debe cumplirse sin importar el truncamiento o la forma del propagador. Esta condición implica que $A(\mu^2, \mu^2) = 1 = Z(\mu^2, \mu^2)$ y $B(\mu^2, \mu^2) = m(\mu)$. De la ecuación {2.21} nos damos cuenta de que para poder renormalizar multiplicativamente debe cumplirse que $M(p^2, \mu^2) \equiv M(p^2)$; lo que significa que la función de masa no depende del punto de renormalización μ a diferencia de las demás funciones de vestimento. Para poder encontrar una función de masa de los observables hadronicos es necesario hacer un truncamiento y proponer modelos para simplificar la ecuación de gap, esto se discute a continuación.

2.3. Truncamiento de las ecuaciones de Schwinger-Dyson

El vértice quark-gluon al igual que el propagador del quark obedecen su propia DSE por lo tanto son una torre infinita de ecuaciones acopladas las que debemos resolver, este es un trabajo sumamente difícil por lo tanto debemos reducir el numero de ecuaciones acopladas; es decir, truncar las DSE. Para desacoplar la torre infinita de ecuaciones acopladas proponemos un **ansatz** consistente con el vértice quark-gluon y el propagador del gluon.

Comenzamos analizando el propagador del gluon, este se caracteriza solo por una función de vestimento $G(k^2, \mu^2)/k^2$, y se escribe:

$$D_{\rho\nu}(k, \mu) = \left(g_{\rho\nu} - \frac{k_\rho k_\nu}{k^2} \right) \frac{G(k^2, \mu^2)}{k^2} + \xi \frac{k_\rho k_\nu}{k^4} \quad (2.23)$$

En la actualidad se conoce mas sobre el propagador del gluon, se sabe que la función de vestimento es acotada y muestra un máximo en $k^2 = 0$, además es monótona decreciente en la región *space-like*. Tal como se observa en la figura {2.28}. Los gluones y los quarks adquieren masa del orden de cientos de MeVs de manera dinámica en el infrarrojo.

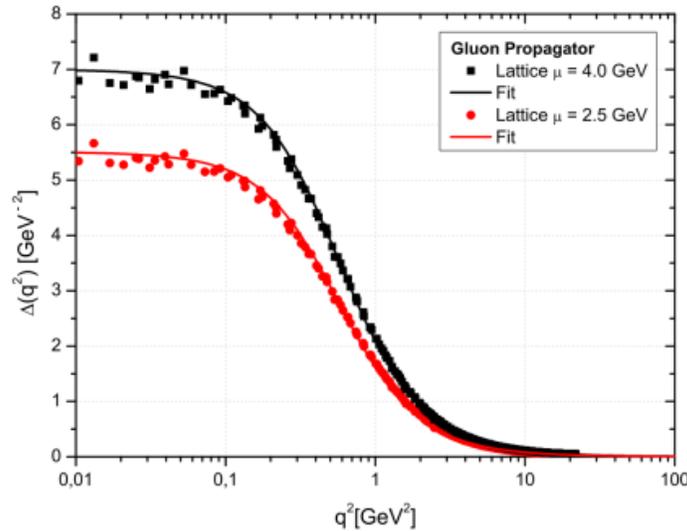


Figura 2.28: Propagador del Gluon comparación con IQCD y ESD.

En la gráfica de la figura {2.28} se muestra el propagador del gluon en comparación de IQCD¹ y DSE. Analizando el vértice quark-gluon podemos observar que se compone de una estructura tensorial de 12 componentes , 4 de ellas longitudinales y las 8 restantes transversas. Además, debe reproducir todas las predicciones (fenomenología) perturbativas en el ultravioleta y ser consistente con las restricciones en el infrarrojo (identidades de Ward), y debe ser numéricamente tratable. Con estas consideraciones podemos, ahora si, escribir el **ansatz** que trunca consistentemente la ecuación de gap. Debemos ser cuidadosos para evitar perder la mas mínima información física de las ecuaciones.

¹Lattice QCD (IQCD) es un enfoque no perturbativo bien establecido para resolver la teoría de quarks y gluones de la cromodinámica cuántica (QCD). Fue inventada por K. Wilson (premio Nobel en 1982) para comprender la libertad asintótica y la propiedad confinante de QCD a partir de primeros principios.

2.3.1. Aproximación Arcoíris para DSE

Para poder extraer información de la torre infinita de ecuaciones de laS DSE debemos buscar una forma de truncarlas, es decir, proponer la forma de algunas de las partes de las DSE, en este caso para el propagador del quark y el vértice quark-gluo. La forma que utilizemos debe ser tal que no afecte la física tras las ecuaciones que vamos a resolver. Podemos comenzar tomando en cuenta que en el vértice del quark-gluon no existan interacciones, esto se traduce como tomar el vértice desnudo en lugar del completo:

$$\Gamma_v^a(p, q; \mu) \rightarrow \frac{\lambda^a}{2} \gamma_v$$

Se considera el propagador del gluon {2.24} como un gluon desnudo (libre) $D_{\rho\nu}^0(q)$ en lugar del gluon completo $D_{\rho\nu}(q)$. El propagador desnudo se usa por varias razones, por ejemplo; es por que es el punto fijo del grupo de normalización, es el gauge por el cual la sensibilidad a las diferencias dependientes del modelo entre el **ansatz** para el vértice quark-gluon es menos notable y un gauge invariante que se implementa fácilmente en simulaciones numéricas de lattice QCD regularizado. Estas dos aproximaciones juntas son una aproximación de las DSE preserva las simetrías y es conocida como **aproximación arcoíris**, (Rainbow-Ladder, RL por sus siglas en inglés) el cual se muestra en la figura {2.29}. Así, hacemos el reem-

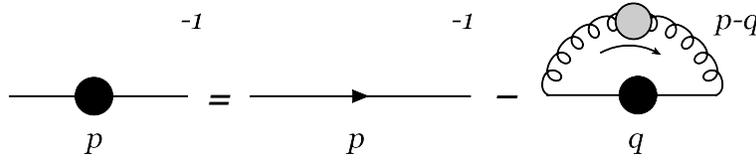


Figura 2.29: DSE para el propagador del quark con la aproximación arcoíris.

plazo:

$$Z_{1F} g^2 D_{\rho\nu}(k^2) \rightarrow k^2 \mathcal{G}(k^2) D_{\rho\nu}^0(k^2) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_v, \quad (2.24)$$

donde $\mathcal{G}(k^2)$ se conoce como el acoplamiento efectivo. Posteriormente describiremos su forma. Este truncamiento funciona en la norma de Landau ($\xi = 0$), por lo que será la norma que utilizaremos. La norma de Landau es el punto fijo en el grupo de renormalización. Además, elimina la componente longitudinal del propagador del gluon, que no tiene correcciones a ningún orden.

Hasta cierto tiempo estamos modificando el resultado correcto, debemos buscar una manera adecuada de arreglar esta situación. Retomamos la DSE para el propagador del quark:

$$S^{-1}(p, \mu) = Z_{2F} S_0^{-1}(p) + Z_{1F} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} g^2 D_{\rho\nu}(p - q; \mu) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\rho S(q; \mu) \Gamma_v^a(q, p; \mu). \quad (2.25)$$

Hacemos los cambios de acuerdo a la aproximación arcoíris {2.24} en la DSE {2.25} obtenemos:

$$S^{-1}(p, \mu) = Z_{2F} S_0^{-1}(p) + Z_{1F} \int_q k^2 \mathcal{G}(k^2) D_{\rho\nu}^0(k; \mu) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\rho S(q; \mu) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_v, \quad (2.26)$$

donde, $k = p - q$ y utilizamos la notación $\int_q^\Lambda = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$. Esta aproximación desacopla la DSE del propagador del quark de las correspondientes DSE del vértice quark-gluon y del propagador del gluon, de manera que es posible resolver numéricamente la ecuación de gap. La ecuación {2.26} es una ecuación matricial en cuyo sistema de ecuaciones escalares asociado no existe independencia lineal. Posteriormente veremos como encontrar las ecuaciones que son independientes y la manera de resolverlas. A continuación daremos una forma al acoplamiento efectivo.

2.3.2. Acoplamiento Efectivo

En principio existen muchas maneras de proponer la forma del acoplamiento efectivo. Una forma puede ser tomar información de la fenomenología o de estudios del sector de norma (en el continuo o en IQCD), y de esta manera podemos escribir $\mathcal{G}(k^2)$ de manera particular. Sin importar la forma del acoplamiento efectivo $\mathcal{G}(k^2)$, debe reproducir el comportamiento de $\alpha(k^2)$ para QCD en el ultravioleta ($\mathcal{G}(k^2) \rightarrow 4\pi\alpha(k^2)$) con $k^2 > 2 - 4 \text{ GeV}^2$, es decir, debemos conocer la teoría de perturbaciones, en especial $\alpha(k^2)$, para reproducir DCSB y confinamiento. $\alpha(k^2)$ es una función continua regular, monótona decreciente del acoplamiento perturbativo QCD que corre a todos los valores de spacelike- k^2 .

Por otro lado las restricciones para el infrarrojo se pueden obtener de estudios del propagador del gluon y del vértice quark-gluon y de estudios fenomenológicos que nos arrojan cantidades conocidas como el condensado quiral $\langle q\bar{q} \rangle > 0$ y constantes de decaimiento. En este trabajo analizaremos dos modelos del acoplamiento efectivo, el modelo de Maris-Tandy (MT) [18] y el modelo de Qin-Chang (QC) [19]. Comenzaremos analizando el modelo de Maris-Tandy (MT) mostrando sus ventajas y deficiencias.

Modelo de Maris-Tandy (MT)

Este modelo se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mathcal{G}(k^2) = \frac{4\pi^2}{\omega^6} D k^2 e^{-k^2/\omega^2} + 8\pi^2 \frac{\gamma_m}{\ln \left[\tau + \left(1 + k^2/\Lambda_{QCD}^2 \right)^2 \right]} \mathcal{F}(k^2), \quad (2.27)$$

$$\mathcal{F}(k^2) = \frac{1}{k^2} \left[1 - \exp \left(-k^2 / (4m_i^2) \right) \right].$$

Podemos definir $\mathcal{G}(k^2) = \mathcal{G}_{NP}(k^2) + \mathcal{G}_{UV}(k^2)$, donde:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{NP}(k^2) &= \mathcal{G}_{IR}(k^2) = \frac{4\pi^2}{\omega^6} D k^2 e^{-k^2/\omega^2}, \\ \mathcal{G}_P(k^2) &= \mathcal{G}_{UV}(k^2) = 8\pi^2 \frac{\gamma_m}{\ln \left[\tau + \left(1 + k^2/\Lambda_{QCD}^2 \right)^2 \right]} \mathcal{F}(k^2). \end{aligned}$$

$\mathcal{G}_{IR}(k^2)$ es un **ansatz** para la interacción de momentos infrarrojos, tal que $\mathcal{G}_{IR}(k^2) \ll$

$\alpha_{pQCD}(k^2) \gtrsim k^2 \geq 2 \text{ GeV}^2$. La forma de $\mathcal{G}_{IR}(k^2)$ determina si el confinamiento y/o DCSB se realizan en soluciones de la ecuación de gap. La capacidad de las ecuaciones de Dyson-Schwinger (DSE) para unificar la explicación de una amplia gama de observables de mesón y barión implica que el comportamiento puntual de $\mathcal{G}_{IR}(k^2)$ se puede restringir a través de la retroalimentación entre el experimento y la teoría. La interacción en k^2 pequeña por lo regular se expresa como una singularidad infrarroja integrable, típicamente $\mathcal{G}_{IR}(k^2) \propto \delta^4(k)$ la cual concentra mayor contribución en el infrarrojo, o una aproximación de ancho finito. La forma de δ^4 se muestra a continuación:

$$\delta^4(k) \stackrel{\omega \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{\omega^6} k^2 e^{-k^2/\omega^2}. \quad (2.28)$$

$\mathcal{G}_{UV}(k^2)$ contiene la parte perturbativa, esta descrita de manera que reproduce el comportamiento de $\alpha(k^2)$ en el ultravioleta. Los parámetros son: $\Lambda_{QCD} = 0.234 \text{ GeV}$ (este se obtiene de la ecuación {2.1}); $\gamma_m = 12/(11N_c - 2N_f)$ (con $N_f = 4$, $N_c = 3$); $\tau = e^2 - 1$; $m_t = 0.5 \text{ GeV}$; valores fijados en [18]. Esta forma de interacción preserva el comportamiento del grupo de renormalización de un lazo de QCD en la ecuación de gap (reproduce teoría de perturbaciones a un lazo); y desde entonces ha sido empleado extensivamente en la predicción y explicación de observables de hadrones.

El modelo de Maris-Tandy es muy bueno para describir mesones pseudo-escalares y vectoriales. Sin embargo, presenta algunas desventajas. Este modelo tiene un cero para un valor pequeño de space-like y decrece a valores negativos muy rápido. Estas facetas del comportamiento producido por el modelo están en fuerte conflicto con los resultados de la DSE moderna y los estudios de lattice; Es decir, la función de vestimenta del propagador del gluon es una función limitada (acotada) y regular de los momentos del espacio, que alcanza su valor máximo en este dominio en $k^2 = 0$ y decrece monótonamente en el eje de space-like como mencionamos antes en {2.28}, y el vértice vestido de quark-gluon no posee ninguna estructura que pueda cualitativamente alterar este comportamiento. Por lo tanto, este modelo se considera por la forma funcional y la conveniencia numérica. Por estas desventajas es necesario un modelo que se ajuste mas a los valores experimentales, un modelo que se ajusta a las propiedades del modelo MT sin compartir las desventajas es el modelo de Qin-Chang, sobre el cual hablaremos a continuación.

En la figura {2.30} y {2.31} se observan las contribuciones para este modelo en el infrarrojo y en el ultravioleta respectivamente.

Modelo de Qin-Chang

El modelo de Qin-Chang modifica la ecuación {2.29} de la siguiente manera:

$$\delta^4(k) \stackrel{\omega \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\omega^4} e^{-k^2/\omega^2}. \quad (2.29)$$

Esto mejora los resultados. La diferencia entre {2.28} y {2.29} es la eliminación de un factor k^2 el cual se introdujo para mejorar las singularidades encontradas en el tratamiento numérico del operador de proyección transversal $k^2 D_{\rho\nu}^0(k)$. De esta manera el modelo se

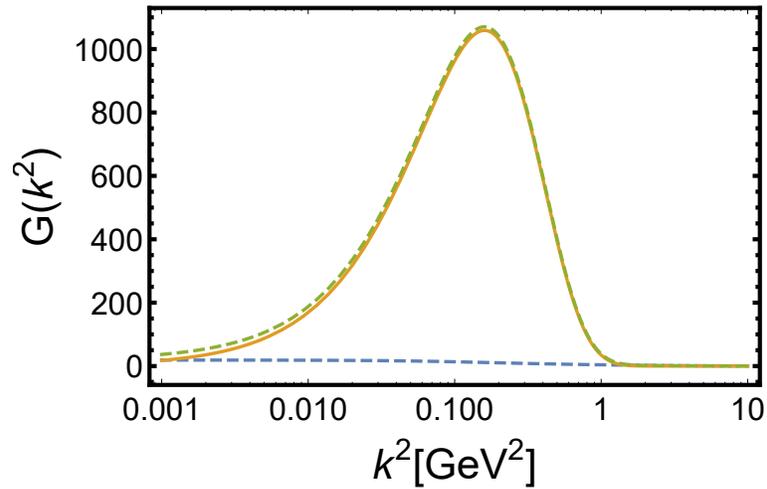


Figura 2.30: Modelo MT. Término no perturbativo $\mathcal{G}_{NP}(k^2)$ (línea sólida naranja), término perturbativo $\mathcal{G}_P(k^2)$ (línea punteada azul), parte completa $\mathcal{G}(k^2)$ (línea punteada verde). Se observa que la contribución en el infrarrojo viene del término no perturbativo.

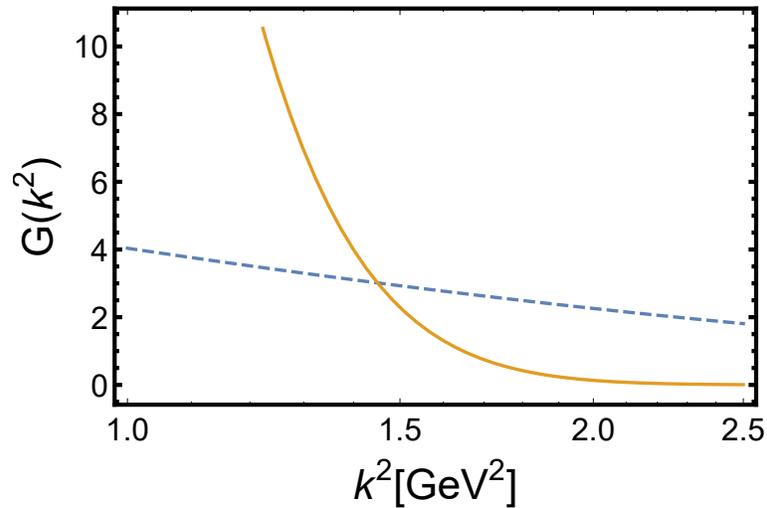


Figura 2.31: Modelo MT. Término no perturbativo $\mathcal{G}_{NP}(k^2)$ (línea sólida naranja), término perturbativo $\mathcal{G}_P(k^2)$ (línea punteada azul). Se observa que la contribución en el ultravioleta viene del término perturbativo.

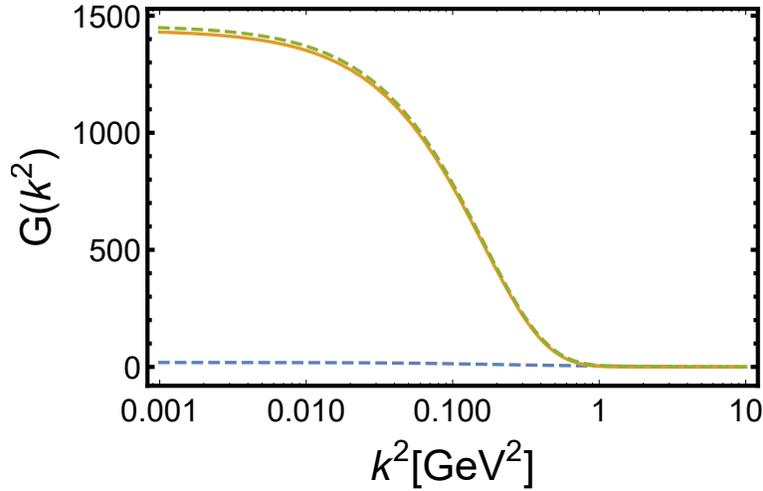


Figura 2.32: Modelo QC. Término no perturbativo $\mathcal{G}_{NP}(k^2)$ (línea sólida naranja), término perturbativo $\mathcal{G}_P(k^2)$ (línea punteada azul), parte completa $\mathcal{G}(k^2)$ (línea punteada verde). Se observa que la contribución en el infrarrojo viene del término no perturbativo.

escribe de la siguiente manera:

$$\mathcal{G}(k^2) = \frac{8\pi^2}{\omega^4} D e^{-k^2/\omega^2} + 8\pi^2 \frac{\gamma_m}{\ln \left[\tau + \left(1 + k^2/\Lambda_{QCD}^2 \right)^2 \right]} \mathcal{F}(k^2), \quad (2.30)$$

$$\mathcal{F}(k^2) = \frac{1}{k^2} \left[1 - \exp\left(-k^2/(4m_i^2)\right) \right].$$

En la figura {2.32} y {2.33} se observan las contribuciones para este modelo en el infrarrojo y en el ultravioleta respectivamente. Las propiedades observables, como las masas y constantes de decaimiento, de los mesones vectoriales y pseudo-escalares, (en estado base), no se ven afectadas por la variación de $\omega \in [0.3, 0.6] GeV$, siempre y cuando $D\omega = \text{constante}$; la constante se fija para reproducir la fenomenología del sector ligero. Tomaremos $D\omega = (0.72 GeV)^3$, $\omega = 0.4 GeV$. Los valores de todas las constantes se toman iguales para ambos modelos. En la figura {2.34} se muestra la comparación de los modelos. Otra razón por la cual el modelo QC es mejor es porque su comportamiento puntual se ajusta con los estudios modernos de lQCD y DSE, además de que el acoplamiento efectivo puede parametrizarse de la siguiente manera:

$$\mathcal{G}(k^2) \approx \frac{4\pi \alpha_{QC}(k^2)}{k^2 + m_g^2(k^2)}, \quad m_g^2(k^2) = \frac{M_g^4}{M_g^2 + k^2}, \quad (2.31)$$

donde $\alpha_{QC}(k^2)$ es el acoplamiento efectivo corriendo para la aproximación QC, $m_g(k^2)$ es la masa del gluon corriendo ambas con k , y M_g es la masa efectiva del gluon. El modelo QC induce una masa efectiva sobre el gluon de $M_g \approx 680 MeV$, para valores de $\omega \in [0.5, 0.6] GeV$. La función de masa decrece con el momento y el gluon se vuelve no masivo en el ultravioleta tal como se muestra en la figura {2.35}. La función $\alpha(k^2)/\pi$ se

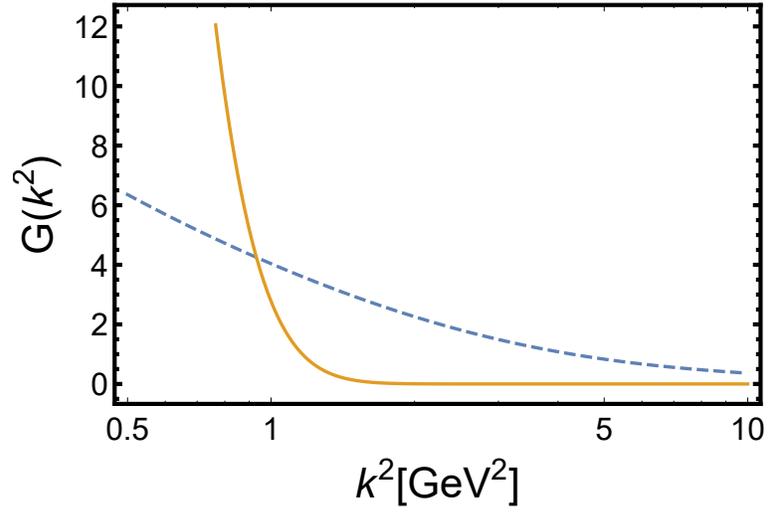


Figura 2.33: Modelo QC. Término no perturbativo $\mathcal{G}_{NP}(k^2)$ (línea sólida naranja), término perturbativo $\mathcal{G}_P(k^2)$ (línea punteada azul). Se observa que la contribución en el ultravioleta viene del término perturbativo.

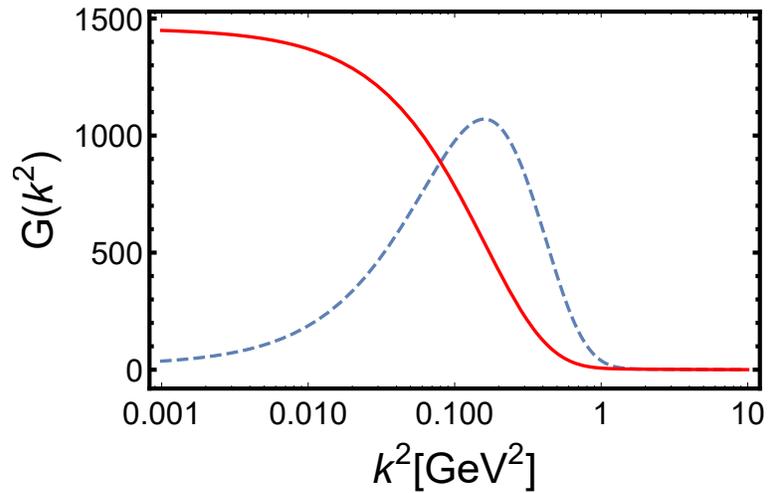


Figura 2.34: Acoplamiento efectivo. Modelo QC (rojo, línea sólida) y modelo MT (azul, línea punteada). Los modelos se interceptan en $k^2 \approx 0.096 \text{ GeV}^2$ y $k^2 \approx 1.23 \text{ GeV}^2$.

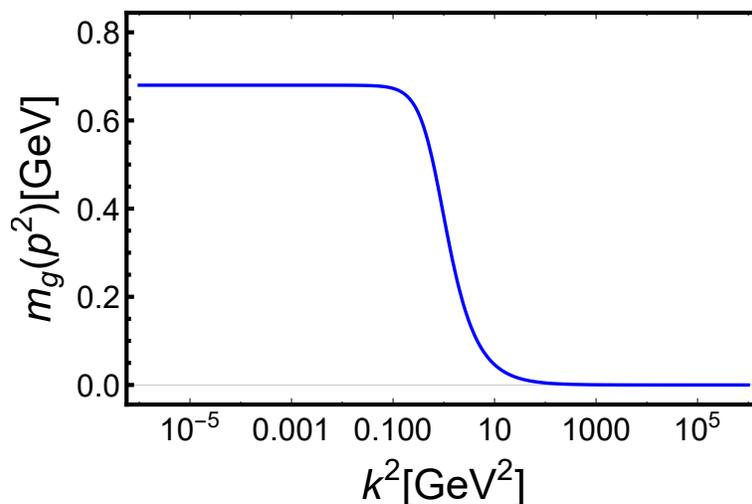


Figura 2.35: Función de masa para el gluon obtenida con el modelo QC a través de la ecuación 2.31.

escribe análogamente al acoplamiento de QCD, esto se muestra en la figura {2.36}. Podemos observar que el valor $\alpha_{QC}(0)/\pi \approx 16.5$ es alto, lo cual se puede traducir como una consecuencia de la pérdida de altura en el infrarrojo debido al uso del vértice desnudo. Particularmente $\alpha(0)7\pi \sim 1$. Un truncamiento mas refinado produce valores mas pequeños. Por todas las propiedades que hemos analizado sobre los modelos MT y QC en las aproximaciones Arcoiris, esperamos obtener buenas aproximaciones a los resultados para los mesones pseudoescalares.

2.4. Solución General

En esta sección se da una forma de resolver la DSE para el propagador del quark con las aproximaciones mencionadas en las secciones anteriores utilizando los modelos MT y QC. Cabe mencionar que para el código que se empleo en Mathematica 11.0 para resolver dicho sistema de ecuaciones se necesita una Rejilla Logarítmica para tomar los valores de las funciones en la escala infrarroja y ultravioleta.

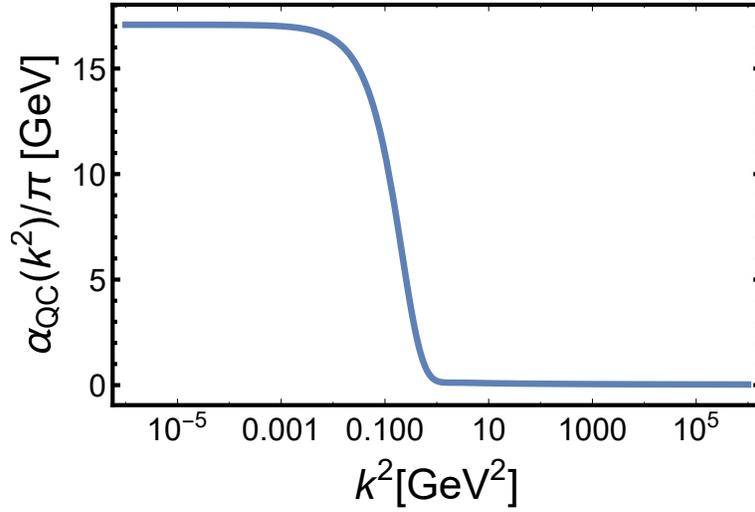


Figura 2.36: Acoplamiento-coriendo QCD-like inducido por la interacción QCD.

2.4.1. Solución a La Ecuación de Gap

En la sección anterior se analizaron las formas de representar al propagador del quark tal como se muestra en el conjunto de ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
 Z(p^2, \mu^2) &= \frac{1}{A(p^2, \mu^2)} = \frac{p^2 \sigma_v^2(p^2, \mu^2) + \sigma_e^2(p^2, \mu^2)}{\sigma_v(p^2, \mu^2)}, \\
 M(p^2, \mu^2) &= \frac{B(p^2, \mu^2)}{A(p^2, \mu^2)} = \frac{\sigma_e(p^2, \mu^2)}{\sigma_v(p^2, \mu^2)}, \\
 \sigma_v(p^2, \mu^2) &= \frac{Z(p^2, \mu^2)}{p^2 + M^2(p^2, \mu^2)} = \frac{A(p^2, \mu^2)}{P^2 A^2(p^2, \mu^2) + B^2(p^2, \mu^2)}, \\
 \sigma_e(p^2, \mu^2) &= \frac{Z(p^2, \mu^2) M(p^2, \mu^2)}{p^2 + M^2(p^2, \mu^2)} = \frac{B(p^2, \mu^2)}{P^2 A^2(p^2, \mu^2) + B^2(p^2, \mu^2)}. \tag{2.32}
 \end{aligned}$$

Resolver las DSE para el propagador del quark implica encontrar las diversas funciones de vestiento para el propagador en la ecuación;

$$S^{-1}(p, \mu) = Z_{2F} S_0^{-1}(p) + \int_q k^2 \mathcal{G}(k^2) D_{\rho\nu}^0(k, \mu) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\rho S(q, \mu) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\nu. \tag{2.33}$$

La ecuación {2.33} es una ecuación matricial 4×4 , es decir, es un sistema de 16 ecuaciones escalares asociado que no tienen independencia lineal. Para extraer las ecuaciones independientes, multiplicamos por $\not{p} = i\gamma \cdot p$ y tomamos las trazas. De esta manera obtenemos dos

ecuaciones que son independientes de las demás:

$$\begin{aligned} \frac{M(p^2, \mu^2)}{Z(p^2, \mu^2)} &= Z_A m(\mu) + \frac{Z_{1F}}{2\pi^3} \int dk^2 \int_0^\pi d\beta \sin^2(\beta) \mathcal{G}(q^2) k^2 \frac{Z(p^2, \mu^2) M(p^2, \mu^2)}{k^2 + M^2(p^2, \mu^2)}, \\ \frac{1}{Z(p^2, \mu^2)} &= 1 + \frac{Z_{1F}}{6p^2\pi^3} \int dk^2 \int_0^\pi d\beta \sin^2(\beta) \mathcal{G}(q^2) k^2 \frac{Z(p^2, \mu^2)}{k^2 + M^2(p^2, \mu^2)} \\ &\quad \times \left[k \cdot p + 2 \frac{(k \cdot q)(p \cdot q)}{q^2} \right], \end{aligned} \quad (2.34)$$

se realizo el cambio de variable de integración $q \rightarrow k$ y de este modo se redefine $q \rightarrow k - p$. Recordemos que $M(p^2, \mu^2)$ y $Z(p^2, \mu^2)$ son la función de masa y renormalización de la función de onda, respectivamente; además las constantes de renormalización $Z_{1F,2F}$ dependen de los parámetros Λ y μ los cuales no escribimos por simplicidad de la escritura de las ecuaciones. Cuando reemplazamos el vértice quark-gluon completo por el desnudo, estamos en la aproximación Abeliiana de QCD. En la aproximación Abeliiana se cumple que $Z_{1F} = Z_{2F}$. De esta manera en la aproximación Abeliiana las funciones de vestimento $A(p^2, \mu^2)$ y $B(p^2, \mu^2)$ se escriben de la siguiente manera:

$$A(p^2, \mu^2) = \frac{1}{Z(p^2, \mu^2)} = Z_{2F} (1 + I_A(p^2, \mu^2)), \quad (2.35)$$

$$B(p^2, \mu^2) = \frac{M(p^2, \mu^2)}{Z(p^2, \mu^2)} = Z_{2F} (m_B + I_B(p^2, \mu^2)), \quad (2.36)$$

donde $I_A(p^2, \mu^2)$, $I_B(p^2, \mu^2)$ se escriben de la siguiente forma:

$$I_A(p^2, \mu^2) = \frac{1}{6\pi^3 p^2} \int dk^2 f_A(p^2, \mu^2) k^2 \frac{A(p^2, \mu^2)}{k^2 A^2(p^2, \mu^2) + B^2(p^2, \mu^2)}, \quad (2.37)$$

$$I_B(p^2, \mu^2) = \frac{1}{2\pi^3} \int dk^2 f_B(p^2, \mu^2) k^2 \frac{B(p^2, \mu^2)}{k^2 A^2(p^2, \mu^2) + B^2(p^2, \mu^2)}, \quad (2.38)$$

las funciones $f_A(p^2, \mu^2)$, $f_B(p^2, \mu^2)$ corresponden a las integrales angulares, las cuales se escriben de la siguiente manera:

$$f_A(p^2, \mu^2) = \int_0^\pi d\beta \sin^2(\beta) \mathcal{G}(q^2) \left(k \cdot p + 2 \frac{(k \cdot q)(p \cdot q)}{q^2} \right), \quad (2.39)$$

$$f_B(p^2, \mu^2) = \int d\beta \sin^2(\beta) \mathcal{G}(q^2), \quad q = k - p. \quad (2.40)$$

Donde se ha tomado la integración del 4-vector de integración de la siguiente manera:

$$\mathbf{q} = |q| (\cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\beta), \sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\beta), \cos(\theta) \sin(\beta), \cos(\beta)), \quad (2.41)$$

de esta manera la integración sobre el momento resulta ser:

$$\int d^4 q = \int_0^\Lambda q^3 dq \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^\pi \sin^2(\beta) d\beta. \quad (2.42)$$

Elegimos la dirección de p_μ sobre el cuarto eje, así, los integrandos son independientes de θ y ϕ ; por lo tanto la integración sobre estas variables se puede hacer analíticamente.

Además, $q^3 dq = (1/2)q^2 dq^2$, así obtenemos:

$$\int d^4 q = 2\pi \int_0^{\Lambda^2} q^2 dq^2 \int_0^\pi \sin^2(\beta) d\beta. \quad (2.43)$$

Solo nos falta encontrar una ecuación que nos permita relacionar y determinar Z_{2F} para poder determinar completamente las funciones de vestimento $A(p^2, \mu^2)$ y $B(p^2, \mu^2)$. Esta se obtiene de la condición de renormalización {2.22} de tal manera que se tiene:

$$1 = A(\mu^2, \mu^2) = Z_{2F} (1 + I_A(\mu^2, \mu^2)), \quad (2.44)$$

$$\Rightarrow Z_{2F} = \frac{1}{1 + I_A(\mu^2, \mu^2)}. \quad (2.45)$$

De esta manera tenemos un sistema de 3 ecuaciones, ({2.35}, {2.36}, {2.44}), con tres incógnitas. En el limite quiral Z_4 no aparece explícitamente en las ecuaciones pero fuera de este limite si aparece, puede ser determinada de la otra parte de la condición de renormalización {2.22} de tal manera que:

$$m(\mu) = Z_{2F} (m_B(\Lambda) + I_B(\mu^2, \mu^2)), \quad (2.46)$$

multiplicamos de ambos lados por Z_4 y al final la despejamos Z_4 :

$$\begin{aligned} Z_4 m(\mu) &= Z_4 [Z_{2F} (m_B(\Lambda) + I_B(\mu^2, \mu^2))], \\ Z_{2F} m_B(\Lambda) &= Z_4 [Z_{2F} (m_B(\Lambda) + I_B(\mu^2, \mu^2))], \\ Z_4 &= \frac{m_B(\Lambda)}{m_B(\Lambda) + I_B(\mu^2, \mu^2)}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

En principio se puede escribir Z_4 en términos de $m(\mu)$ en lugar de $m_B(\Lambda)$, para hacerlo se utiliza la ecuación {2.46} de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} m(\mu) &= Z_{2F} (m_B(\Lambda) + I_B(\mu^2, \mu^2)), \\ m(\mu) &= Z_4 m_B(\Lambda) + Z_4 I_B(\mu^2, \mu^2), \\ Z_4 &= \frac{m(\mu) - Z_{2F} I_B(\mu^2, \mu^2)}{m(\mu)}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Es evidente que la ecuación {2.45} no esta definida en el limite quiral ($m(\mu) = 0$), además de que en dicho limite no es necesario calcularla ya que no aparece explícitamente en las ecuaciones. Sin embargo, calcular Z_4 es necesario ya que al calcular el condensado quiral aparece explícitamente, por lo tanto se necesita una manera alternativa de escribir Z_4 . Para escribirla utilizamos la expresion a un laso [22]:

$$Z_4 = \frac{\text{Log}(\mu^2/\Lambda_{QCD}^2)}{\text{Log}(\Lambda^2/\Lambda_{QCD}^2)}. \quad (2.49)$$

Después de conocer el valor de Z_4 se puede determinar el valor de $m_B(\Lambda)$ y Z_m de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Z_4 m(\mu) &= Z_{2F} m_B(\Lambda), \\ \Rightarrow m_B(\Lambda) &= \frac{Z_4}{Z_{2F}} m(\mu), \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} Z_m m(\mu) &= m_B(\Lambda), \\ \Rightarrow Z_m &= \frac{m_B(\Lambda)}{m(\mu)} = \frac{Z_4}{Z_{2F}}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Finalmente de la relación $Z_{1F} = Z_{2F} Z_g Z_3^{1/2}$ obtenemos que $Z_g Z_3^{1/2} = 1$ (Dado que $Z_{1F} = Z_{2F}$). Las constantes Z_g y Z_3 permanecen indeterminadas pero relacionadas entre si, ya que se hizo la sustitución para el acoplamiento y el propagador del gluon. De esta manera obtenemos el sistema de ecuaciones a resolver el cual se muestra a continuación donde se a escrito en términos de la parte vectorial y escalar del propagador del quark ya que es mas fácil de resolver:

$$\begin{aligned} A(p^2, \mu^2) &= Z_{2F} \left(1 + \frac{1}{6\pi^3 p^2} \int dk^2 f_A(p^2, \mu^2) k^2 \sigma_v(k^2, \mu^2) \right), \\ B(p^2, \mu^2) &= Z_{2F} \left(m_B(\Lambda) + \frac{1}{2\pi^3} \int dk^2 f_B(p^2, \mu^2) k^2 \sigma_s(k^2, \mu^2) \right), \\ Z_{2F}^{-1} &= 1 + \frac{1}{6\pi^3 p^2} \int dk^2 f_A(\mu^2, k^2) k^2 \sigma_v(k^2, \mu^2), \\ Z_4^{-1} &= \frac{1}{m_B(\Lambda)} \left(m_B(\Lambda) + \frac{1}{2\pi^3} \int dk^2 f_B(\mu^2, k^2) k^2 \sigma_s(k^2, \mu^2) \right). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Las trazas y contracciones de la ecuación {2.33} se calcularon de las propiedades mostradas en el apéndice {A}. Las integrales angulares se resuelven con una cuadratura gaussiana. Las ecuaciones {2.52} son integrales no lineales y acopladas, para resolverlas, se discretizaron los momentos en una malla logarítmica, se da una condicóna inicial para las funciones de vestimento y se itera hasta obtener el error relativo promedio deseado.

2.5. Resultados Numéricos

Los datos numéricos mostrados en esta sección coinciden con los encontrados en la literatura, posteriormente analizamos las soluciones con distintos parámetros con el fin de comprender mayormente las soluciones y observar si aparecen diferencias importantes en un sector de parámetros diferente. Resolvimos el sistema de ecuaciones {2.52} con el acoplamiento efectivo propuesto por los modelos MT, mostrado en las ecuaciones {2.27}, y el modelo QC, mostrado en las ecuaciones {2.30}. Se trabajo en el limite quiral ($m = 0$) y fuera de este limite utilizando las masas $m_{u/d} = 3.74 \text{ MeV}$ y $m_s = 95 \text{ MeV}$. Se analizó el punto de renormalización $\mu = 4 \text{ GeV}$. Este valor fue elegido ya que es el valor típico para la física en escala hadronica, además de ser utilizado en los estudios del sector de gauge en IQCD. También se analizó el punto de renormalización $\mu = 19 \text{ GeV}$ esto con el fin de comparar los resultados variando el punto de renormlización. Otra consideración importante es que

se escogió este punto ya que se espera que sea la escala mas natural para el comienzo de la región perturbativa. Con estas consideraciones se presentan los resultados para $M(p^2, \mu^2)$ y $Z(p^2, \mu^2)$.

2.5.1. Límite Quiral

Se definen algunos observables para poder comparar resultados obtenidos con los modelos utilizados y los valores experimentales. Se muestran los resultados variando algunos parámetros, se muestran también algunos de los gráficos mas representativos.

Condensado Quiral

El condensado quiral es el parámetro de orden de la DCSB, es el valor de expectación en el vacío, que de hecho es, el valor del limite quiral del condensado dentro del mesón; en otras palabras, describe una partícula en el limite quiral del mesón pseudoescalar. Es la escala del condensado la que determina la masa generada dinámicamente. El condensado quiral esta dado por:

$$- \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\mu}^0 = Z_4 N_c \int_k^{\Lambda} \text{Tr}[S_{m=0}(k, \mu)] = \left(\frac{3Z_4}{4\pi^2} \int dk^2 k^2 \sigma_s(k^2, \mu^2) \right) \quad (2.53)$$

El valor experimental para el modelo de MT es [23]:

$$- \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\mu=1 \text{ GeV}}^0 = (0.235 \pm 15 \text{ GeV})^3 \quad (2.54)$$

Constante de decaimiento

La constante de desintegración del pión es dimensionalmente una escala de energía y determina la fuerza de la ruptura de la simetría quiral. Calculamos la constante de decaimiento del pión a través de la siguiente ecuación:

$$f_{\pi} = - \frac{Z_{2F} N_c}{m_{\pi}^2} \int_q P_{\mu} \text{Tr}[\Gamma_S^{ba}(q, P) S^a(q^-) \gamma_{\mu} \gamma_5 S^b(q^+)] \quad (2.55)$$

El valor experimental es $f_{\pi} = (0.092 \pm 0.0035) \text{ GeV}$ [25].

En la tabla {2.1} se muestran los resultados obtenidos con los modelos QC y MT utilizando las masas corriente de los quark's en el punto de renormalizacion antes mencionado ($\mu = 4 \text{ GeV}$). Se calculo la función de masa, la función de renormalizacion de la función de masa en el limite quiral, así como el valor de las funciones de vestimento $A(p^2, \mu^2)$ y $B(p^2, \mu^2)$ en el mismo limite. También se realizo un tests de confinamiento. Esto con el fin de comparar los resultados obtenidos en este trabajo de tesis y con los encontrados en la literatura. Estos valores fueron obtenidos con $m_G = (0.87 \text{ GeV})^3$.

Utilizaremos los siguientes valores para los parámetros de los modelos; para el modelo MT $\omega = 0.4 \text{ GeV}$, $D = 0.933 \text{ GeV}^2$ y para el modelo QC $\omega = 0.5 \text{ GeV}$ y $D = 0.74 \text{ GeV}^2$. Estos

Interacción	QC	MT	QC	MT	QC	MT
ω	0.4	0.4	0.5	0.5	0.5	0.5
D	0.933	0.933	0.933	0.933	0.933	0.933
$m_{u/d}$	0	0	0	0	0	0
μ	4	4	4	4	19	19
$M(0)$	0.342	0.546	0.213	0.502	0.184	0.432
$Z(0)$	0.676	0.639	0.884	0.0755	0.880	0.774
$A(0)$	1.477	1.564	1.130	1.289	1.135	1.291
$B(0)$	0.505	0.855	0.241	0.647	0.209	0.558
f_π	0.062	0.093	0.054	0.100	0.049	0.089
m_π	0	0.146	0.111	0.151	0.132	0.178
$(-\langle \bar{\psi}\psi \rangle_\mu^0)^{1/3}$	0.182	0.262	0.170	0.284	0.181	0.291

Cuadro 2.1: Se muestran los resultados de la comparación para diferentes valores entre los dos modelos mencionados en este trabajo de esta tesis para el límite quiral, todos los valores tienen unidades de GeV .

valores son fijados en cada modelo para reproducir la fenomenología en el sector ligero, los resultados se resumen en las siguientes tablas:

f_π (DSE-RL)	f_π (DSE-DB)	f_π (IQCD)	f_π (Experimental)
0.093	0.092	0.092	(0.092 ± 0.0035)

Cuadro 2.2: Constante de decaimiento para el pión en GeV . RL se refiere al truncamiento Arcoiris mostrado en la ecuación {2.24}, DB se refiere a un truncamiento más sofisticado mostrado en [26] y IQCD se refiere al promedio de resultados de lattice QCD también mostrado en [26].

m_π	m_π (Experimental)
0.138	$(0.138 \pm 3.5 \times 10^{-7})^*$

Cuadro 2.3: Masa del mesón pión en GeV .* El valor de m_π es el promedio entre m_{π^0} y m_{π^\pm} .

El punto de renormalización no cambia mucho los resultados, en la figura {2.37} y {2.38} se muestran la función de masa para el punto de renormalización $\mu = 4 \text{ GeV}$ y $\mu = 19 \text{ GeV}$ para los modelos MT y QC respectivamente.

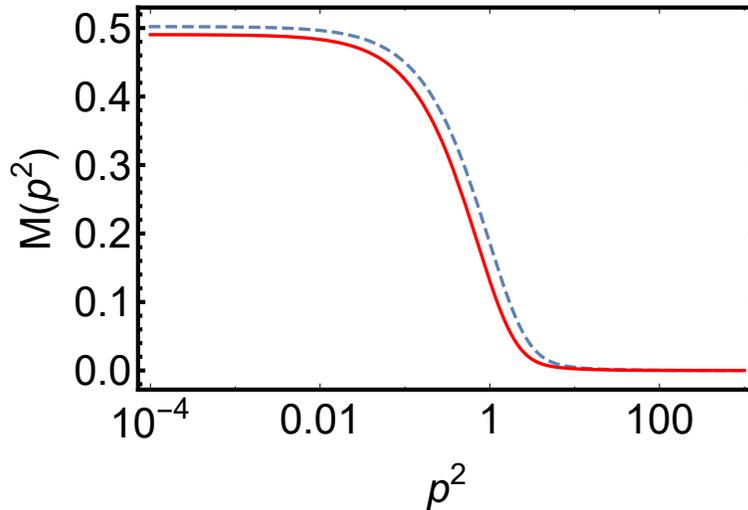


Figura 2.37: Función de Masa para el modelo MT en el límite quiral para $\mu = 4 \text{ GeV}$ (azul, línea punteada) y para $\mu = 19 \text{ GeV}$ (rojo, línea sólida). Los valores de $M(0)$ son 0.502102 GeV y 0.4900388 GeV respectivamente, los cuales muestran un error del 2.203 %.

En las siguientes figuras se muestran las funciones de Masa y Renormalización de la Función de Masa respectivamente comparando los modelos MT y QC.

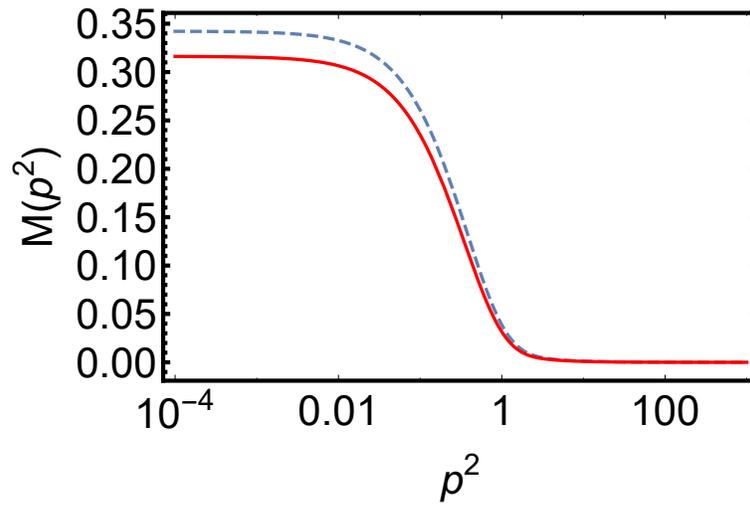


Figura 2.38: Función de Masa para el modelo QC en el límite quiral para $\mu = 4 \text{ GeV}$ (azul, línea punteada) y para $\mu = 19 \text{ GeV}$ (rojo, línea sólida). Los valores de $M(0)$ son 0.342213 GeV y 0.316233 GeV respectivamente, los cuales muestran un error del 7.59155% .

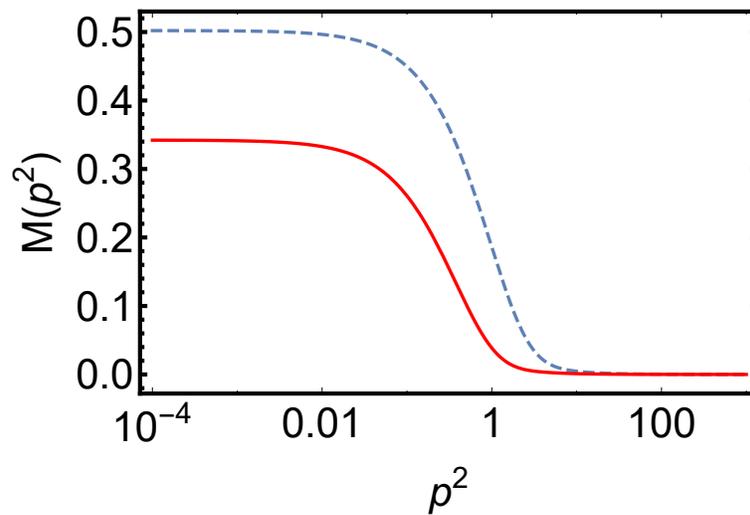


Figura 2.39: Función de masa para los modelos MT (azul, línea punteada) y QC (rojo, línea sólida) para $\mu = 4 \text{ GeV}$.

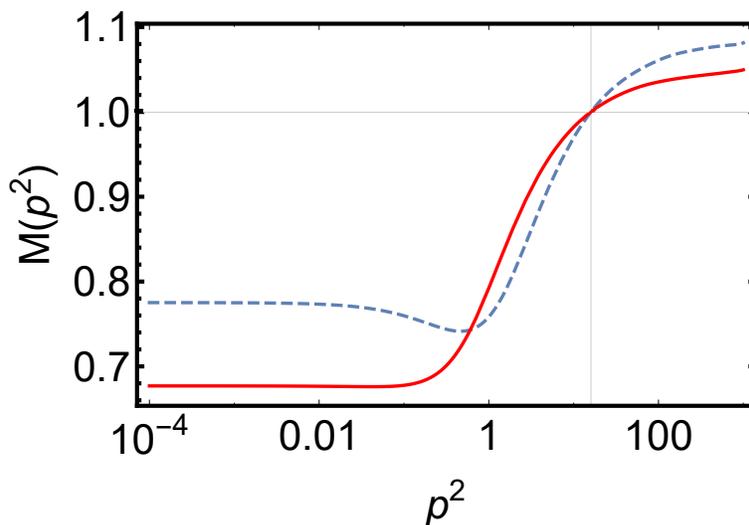


Figura 2.40: Renormalización de la Función de Masa para los modelos MT (azul, línea punteada) y QC (rojo, línea sólida) para $\mu = 4 \text{ GeV}$.

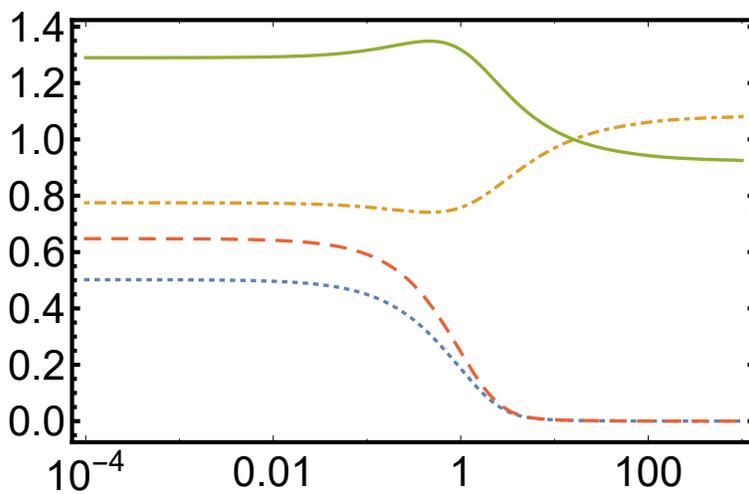


Figura 2.41: Función de Masa (azul, puntos), Renormalización de la Función de Masa (naranja, puntos y líneas), función de vestimenta A (verde, línea sólida) y función de vestimenta B (rojo, líneas) para el modelo MT y $\mu = 4 \text{ GeV}$.

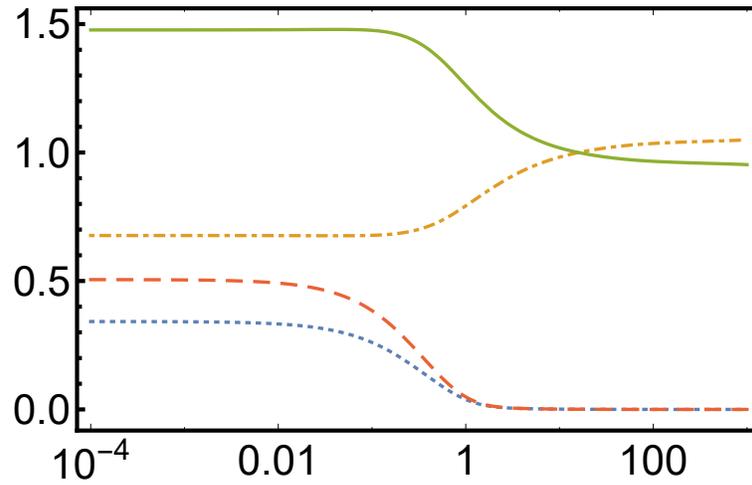


Figura 2.42: Función de Masa (azul, puntos), Renormalización de la Función de Masa (naranja, puntos y líneas), función de vestimenta A (verde, línea sólida) y función de vestimenta B (rojo, líneas) para el modelo QC y $\mu = 4 \text{ GeV}$.

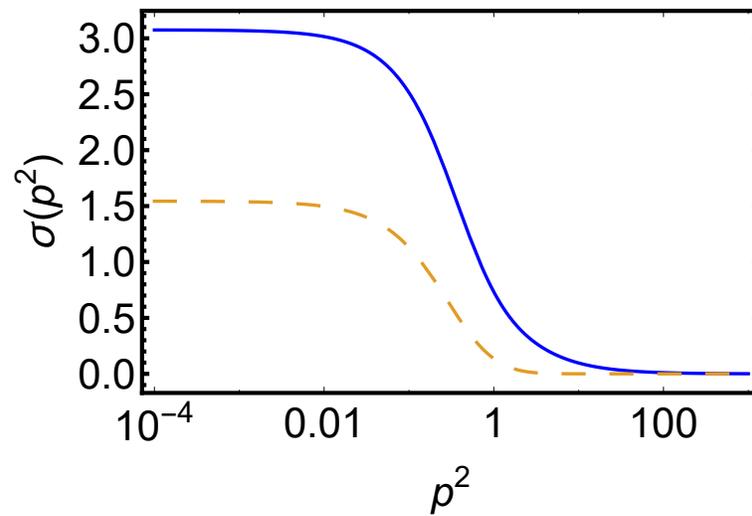


Figura 2.43: Parte vectorial (azul, línea sólida) y escalar (naranja, líneas) del propagador del quark para el modelo MT con $\mu = 4 \text{ GeV}$.

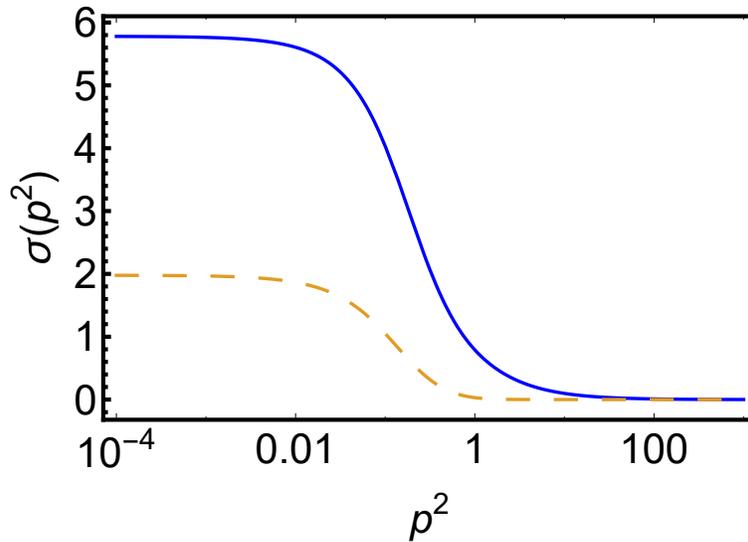


Figura 2.44: Parte vectorial (azul, línea sólida) y escalar (naranja, líneas) del propagador del quark para el modelo QC con $\mu = 4 \text{ GeV}$.

2.5.2. Fuera del Limite Quiral

Fuera del limite quiral se calcularon las funciones de Masa, Función de Renormalización de la Función de Masa, así como sus funciones de vestimento para los MT y QC. Utilizando as masas semillas de los quarks u/d ($m_{u/d} = 3.374 \text{ MeV}$) y s ($m_s = 95 \text{ MeV}$), para el punto de renormalización $\mu = 4 \text{ GeV}$, y $\mu = 19 \text{ GeV}$, se espera ver muy poca diferencia entre los puntos de renormalización al igual que el limite quiral por lo tanto se puede justificar una invarianza en el punto de renormazación tal como se muestra en las tablas {2.4} y {2.5}.

$m(\mu)(\text{MeV})$	$M(0, \mu = 4)(\text{MeV})$	$M(0, \mu = 19)(\text{MeV})$	Error
$m(\mu) = 0$	502	490	2.4 %
$m_{u/d}(\mu) = 3.74$	505	503	2 %
$m_s(\mu) = 95$	687	684	0.4 %

Cuadro 2.4: Valores para la función de Masa para diferentes quarks y diferente punto de renormalización utilizando el modelo MT.

$m(\mu)(\text{MeV})$	$M(0, \mu = 4)(\text{MeV})$	$M(0, \mu = 19)(\text{MeV})$	Error
$m(\mu) = 0$	342	316	7.6 %
$m_{u/d}(\mu) = 3.74$	351	332	5.4 %
$m_s(\mu) = 95$	529	548	3.4 %

Cuadro 2.5: Valores para la función de Masa para diferentes quarks y diferente punto de renormalización utilizando el modelo QC.

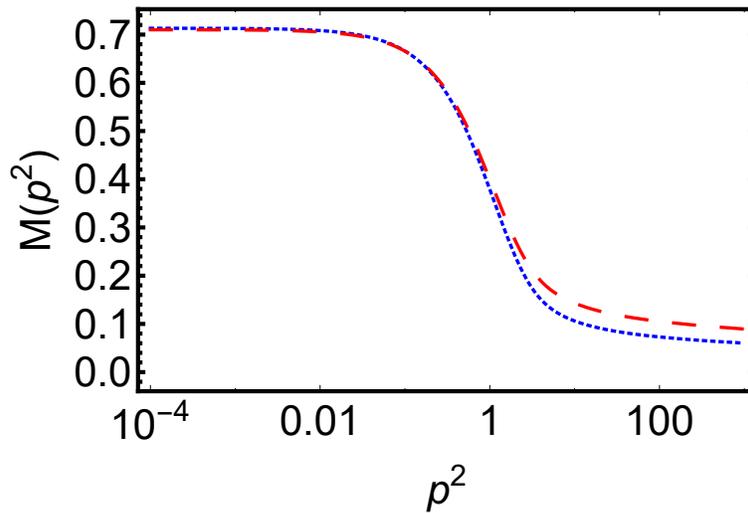


Figura 2.45: Función de Masa utilizando el modelo MT para el quark s con masa semilla $m_s(\mu) = 95 \text{ MeV}$ para los puntos de renormalización $\mu = 4 \text{ GeV}$ (azul, línea punteada) y $\mu = 19 \text{ GeV}$ (rojo, líneas).

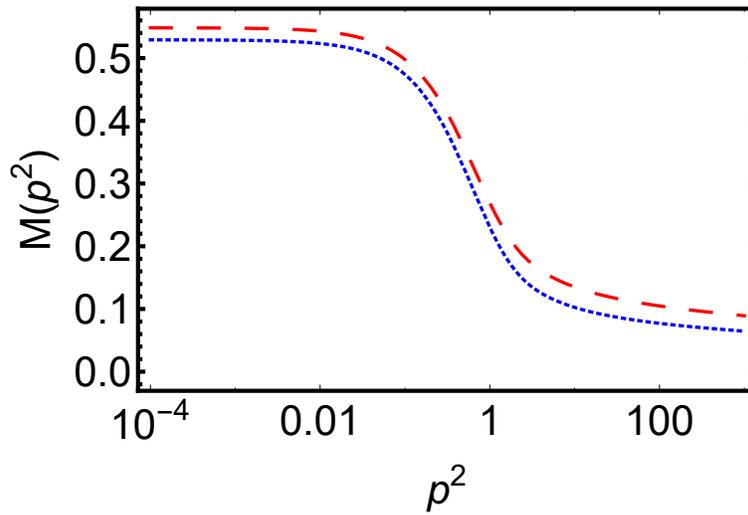


Figura 2.46: Función de Masa utilizando el modelo QC para el quark s con masa semilla $m_s(\mu) = 95 \text{ MeV}$ para los puntos de renormalización $\mu = 4 \text{ GeV}$ (azul, línea punteada) y $\mu = 19 \text{ GeV}$ (rojo, líneas).

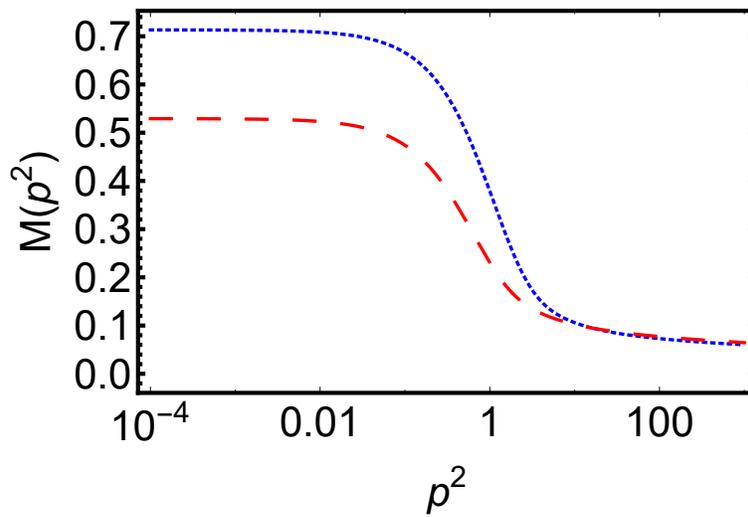


Figura 2.47: Comparación de la Función de Masa entre los modelos MT (azul, línea punteada) y QC (rojo, líneas) para el quark s y el punto de renormalización $\mu = 4 \text{ GeV}$.

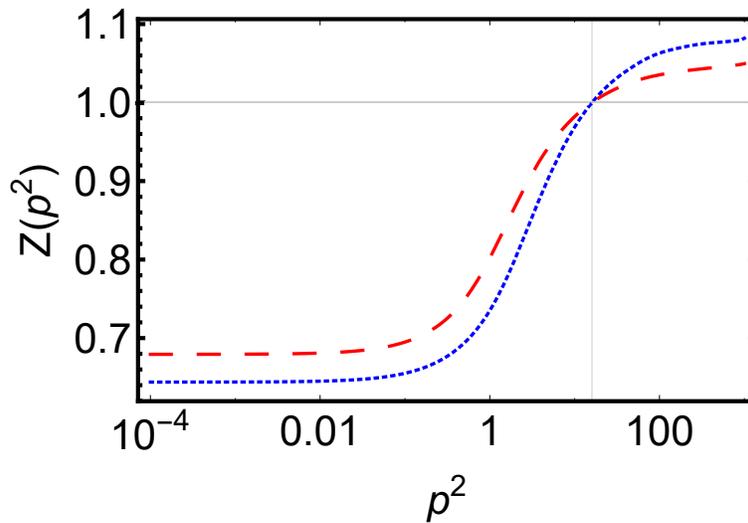


Figura 2.48: Comparación de la Función de Renormalización de la Función de Onda entre los modelos MT (azul, línea punteada) y QC (rojo, líneas) para el quark s y el punto de renormalización $\mu = 4 \text{ GeV}$.

En la figura {2.50} se observa la función de masa para los 6 quark distintos utilizando las masas de la tabla {2.6}: En la figura {2.50} se muestran las funciones de masa para los

Símbolo	Nombre	Masa
u	Up	$(4 \pm 2) \text{ MeV}$
d	Down	$(8 \pm 4) \text{ MeV}$
s	Strange	$(164 \pm 33) \text{ MeV}$
c	Charm	1.4 GeV
b	Bottom	5.3 GeV
t	Top	175 GeV

Cuadro 2.6: Masas de los distintos quarks.

distintos quark para el modelo MT, con el modelo QC se obtiene la misma forma y se puede observar que, en el infrarrojo (momentos pequeños), hay un realce con respecto al valor de la masa corriente (que es la masa en el ultravioleta). Podemos ver que una masa semilla de unos cuantos MeVs puede generar una masa de cientos de MeVs, a la cual se le llama masa constituyente. A medida que aumenta la masa corriente del quark los efectos de la DCSB son menos. Incluso cuando la masa corriente es cero (límite quiral) hay generación dinámica de masas. Esto no ocurre en la teoría de perturbaciones donde una masa semilla igual a cero genera una función de masa $M(p^2) = 0$. DCSB es el mecanismo que genera el mayor porcentaje de la masa de la materia ordinaria.

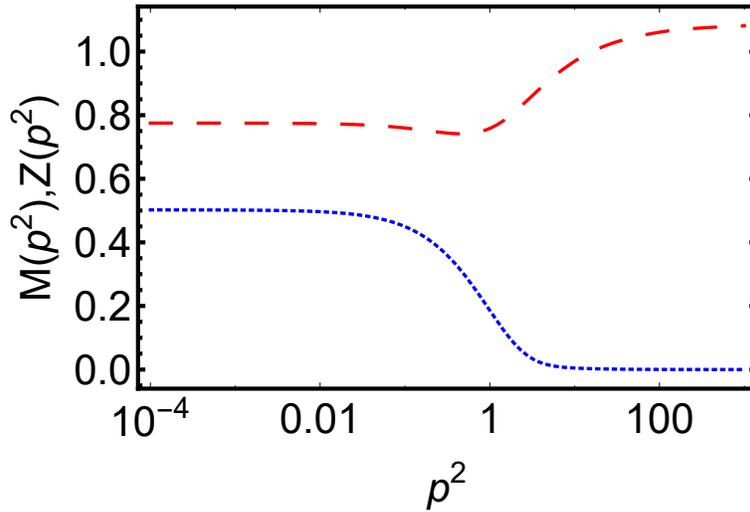


Figura 2.49: Función de masa (azul, línea punteada) y renormalización de la función de onda (rojo, líneas) para el límite quiral.

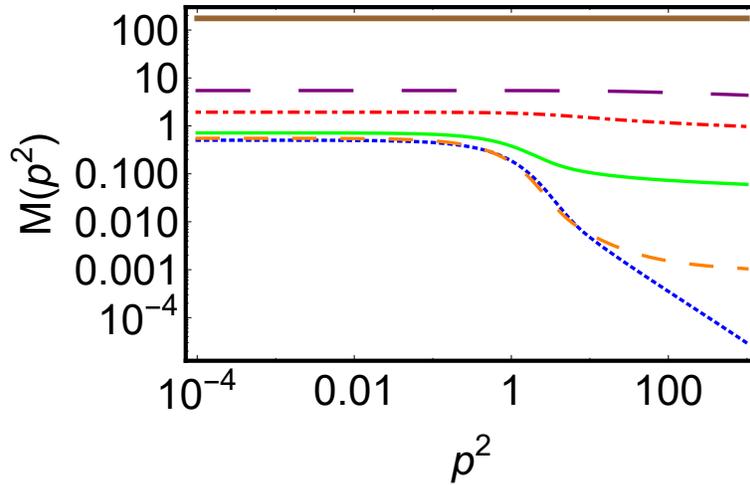


Figura 2.50: Funciones de Masa para los diferentes quarks: $m_{u/d} = 3.74 \text{ MeV}$ (naranja, líneas pequeñas), $m_s = 95 \text{ MeV}$ (verde, línea sólida delgada), $m_c = 1.4 \text{ GeV}$ (rojo, líneas y puntos), $m_b = 5.3 \text{ GeV}$ (morado, líneas grandes), $m_t = 175 \text{ GeV}$ (café, línea sólida gruesa) y el límite quiral (azul, línea punteada). Se muestran las masas utilizando el modelo MT, para el modelo QC la forma es la misma.

2.5.3. Confinamiento

En la función de masa se observa un punto de inflexión lo cual indica que se trata de una partícula confinada [24]. Podemos entender el confinamiento a través del axioma de reflexión de posibilidad (“es posible encontrar conjuntos que representen la clase de todos los conjuntos”). Definimos el promedio espacial de la función de Schwinger de la siguiente manera:

$$\Delta(t) = \int d^3x \int_q e^{i(q_4t + \mathbf{q}\cdot\mathbf{x})} \sigma_s(q^2, \mu). \quad (2.56)$$

Un cambio de signo en $\Delta(t)$ corresponde a una función de onda que decae rápidamente lo cual indica que no se trata de un propagador positivo definido. Por lo tanto, se trata de una partícula inestable, “una partícula confinada”. Para partículas fundamentales, como los quarks, la interpretación es la de partícula confinada. En la figura {2.51} se muestra la gráfica de $\text{Log}|\Delta(t)|$ para los dos modelos utilizados.

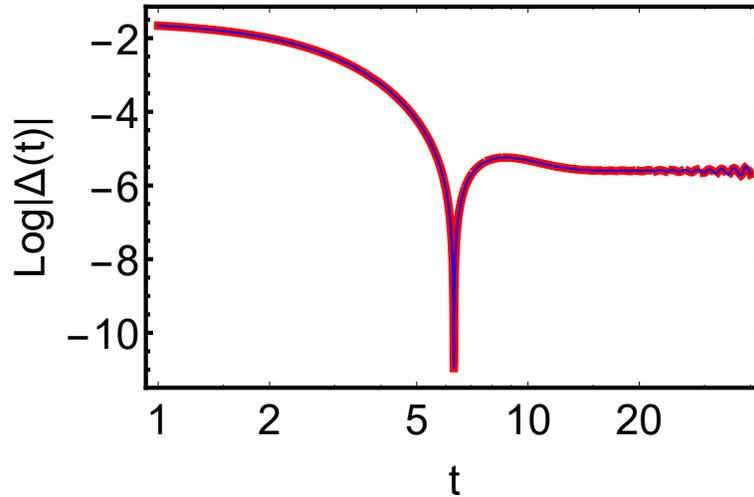


Figura 2.51: Promedio espacial de la función de Schwinger para los modelos MT(rojo) y QC(azul).

2.5.4. Parametrización de las Soluciones

Una de las maneras para el calculo de observables hadrónicos y objetos no perturbativos es resolver la ecuación de Bethe-Salpeter de la cual se habla a continuación.

Ecuación de Bethe-Salpeter

En teoría cuántica de campos, la ecuación de Bethe-Salpeter (BSE) [9], es una descripción completamente relativista de estados ligados de dos partículas. Es empleada para describir mesones. Los estados ligados se identifican como polos en la amplitud de dispersión quark-antiquark. La BSE se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [\Gamma_M^{ab}(p, P)]_{tu} &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} K_{tu}^{rs}(p, q, P) [\Phi_M^{ab}(q, P)]_{sr}, \\ \Phi_M^{ab}(q, P) &= S^a(q + \eta P) \Gamma_M^{ab}(q, P) S^b(q - (1 - \eta)P). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Donde:

- $\Gamma_M^{ab}(p, P)$ es la amplitud de Bethe-Salpeter (BSA).
- $\Phi_M^{ab}(q, P)$ corresponde a la función de onda de Bethe-Salpeter.
- p es el momento relativo entre quark-antiquark; a y b son los correspondientes sabores.
- η es la fracción del momento total que comparten quark-antiquark. Ninguna observable física depende de su valor.
- P es el momento total, es tal que $P^2 = -m_M^2$, donde m_M es la masa del mesón en cuestión.
- r, s, t, u representan los índices combinados de las matrices de color.
- M indica el mesón en cación.
- K_{tu}^{rs} es el kernel de dispersión renormalizado, amputado e irreducible con respecto a cortes entre pares de líneas de quark-antiquark. Este debe ser determinado consistentemente con el truncamiento de la ecuación de gap.

La BSE corresponde diagramáticamente a la figura {2.52}.

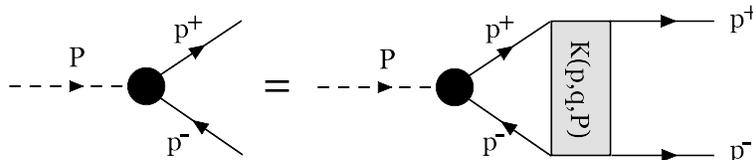


Figura 2.52: Ecuación de Bethe-Salpeter.

Como ya se menciona la ecuación de Bethe-Salpeter esta relacionada con la ecuación de gap a través del propagador del quark, por ello es necesario conocer el propagador en

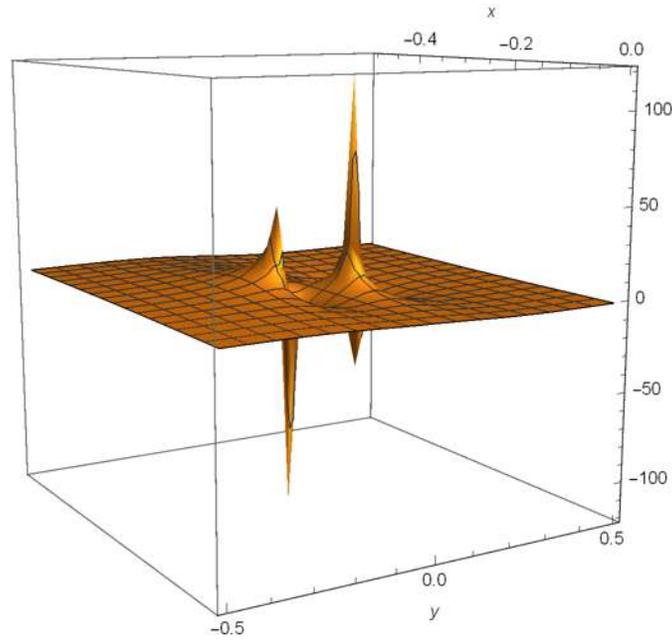


Figura 2.53: Se muestra la parte imaginaria de la parte vectorial del propagador del quark para el limite quiral con el modelo MT. Podemos observar que no hay comportamiento inestable pero vemos indicios de singularidades conjugadas complejas cerca del pico de la región, el tipo de singularidad es desconocido.

todo el plano complejo. El proceso es integrar a lo largo de rayos en el plano complejo reemplazando el momento externo del quark de la siguiente forma $p^2 \rightarrow |r|e^{i\theta}$ $\theta \in [0; 2\pi)$, de tal manera que ahora debemos resolver las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 A(re^{i\theta}, \mu^2) &= 1 + \frac{1}{6\pi^3 p^2} \int_0^{\Lambda^2} dq^2 q^2 \sigma_v(q^2, \mu^2) [I_A(re^{i\theta} - I_A(\mu^2))], \\
 B(re^{i\theta}, \mu^2) &= m(\mu) + \frac{1}{2\pi^3} \int_0^{\Lambda^2} dq^2 q^2 \sigma_e(q^2, \mu^2) [I_B(re^{i\theta} - I_B(\mu^2))]. \quad (2.58)
 \end{aligned}$$

La variable de integración q^2 se encuentra sobre el eje de *space-like*, independientemente del ángulo θ . Conociendo el propagador en dicho eje, suficientes rayos y una malla de integración adecuada podemos resolver las integrales, aunque puede haber inestabilidades numéricas para algunos valores de θ , estas son causadas por el termino perturbativo en el vestimento del gluon efectivo. A continuación se muestran los resultados para los dos distintos modelos utilizados en el limite quiral, principalmente nos interesa mostrar la parte vectorial y escalar del propagador del quark en los rayos del plano complejo para distintos ángulos.

Se puede observar de las figuras {2.53-2.57} que no hay ningún comportamiento inestable pero vemos vemos singularidades conjugadas complejas cerca de la región del pico. Este

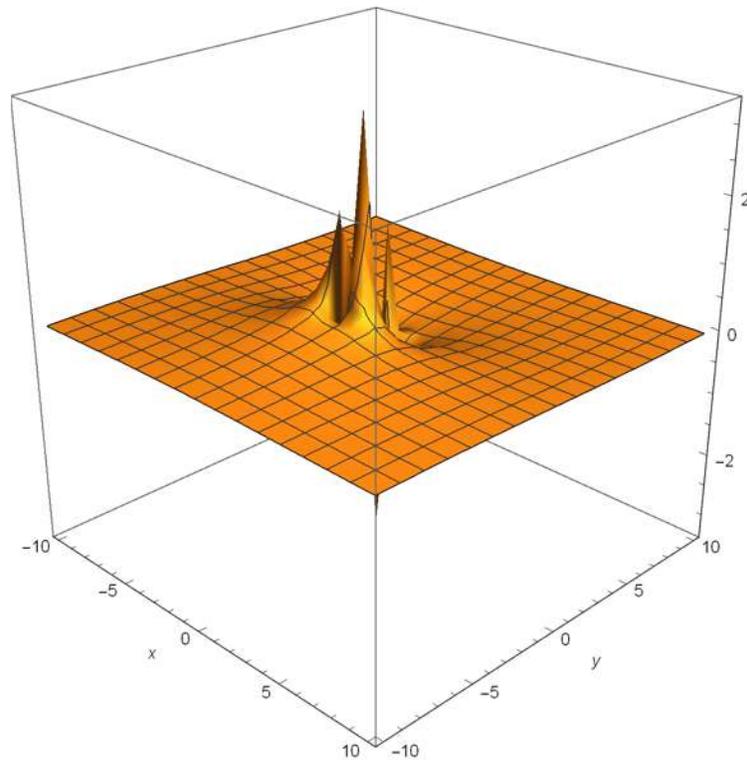


Figura 2.54: Se muestra la parte imaginaria de la parte vectorial del propagador del quark para el limite quiral con el modelo MT. Podemos observar que no hay comportamiento inestable pero vemos indicios de tres pares de singularidades conjugadas complejas cerca del pico de la región, el tipo de singularidad es desconocido.

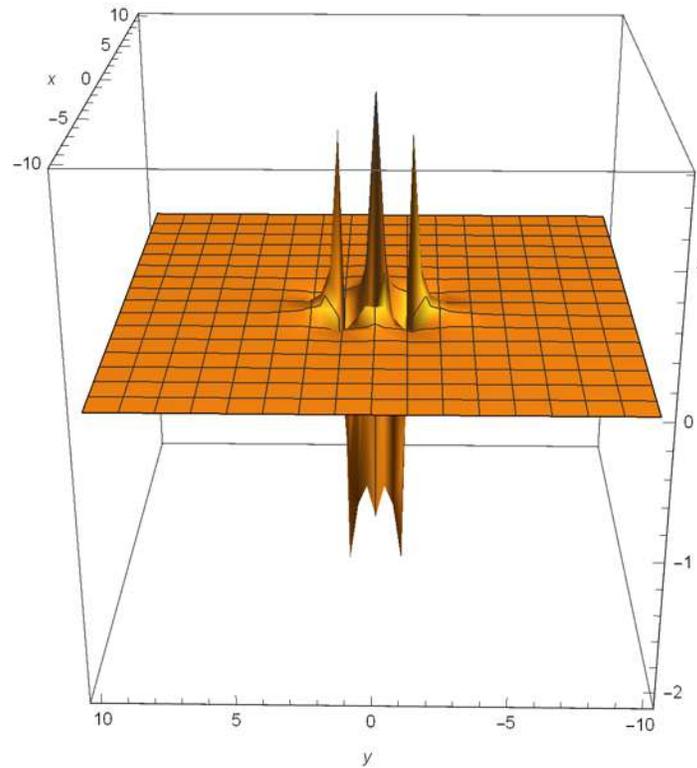


Figura 2.55: Se muestra la parte real de la parte escalar del propagador del quark para el limite quiral con el modelo MT. Podemos observar que no hay comportamiento inestable pero vemos tres pares de singularidades conjugadas complejas cerca del pico de la región, el tipo de singularidad es desconocido

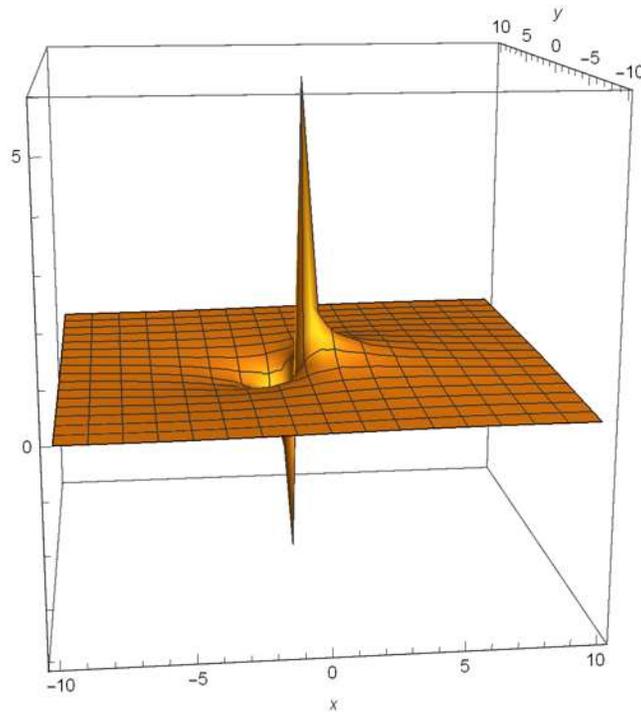


Figura 2.56: Se muestra la parte real de la parte vectorial del propagador del quark en el limite quiral para el modelo QC. Podemos observar que no hay comportamiento inestable pero vemos un par de singularidades conjugadas complejas, el tipo de singularidad es desconocido.

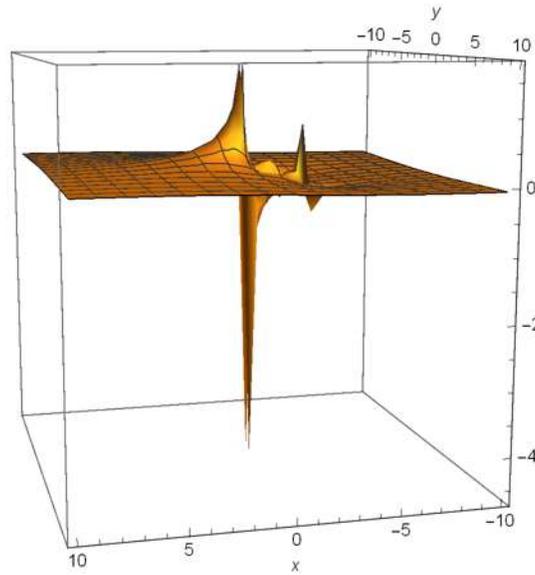


Figura 2.57: Se muestra la parte real de la parte vectorial del propagador del quark para el quark s con el modelo MT. Podemos observar que no hay comportamiento inestable además vemos un par de singularidades conjugadas complejas, el tipo de singularidad es desconocido.

pico se localiza, según las características de la BSE, donde se cumple:

$$(\eta P)^2 = -m_M^2. \quad (2.59)$$

Ahora mostraremos figuras de la parte real y/o imaginaria de las parte escalar y/o vectorial del propagador del quark vs la sustitución $p^2 \rightarrow |r|e^{i\theta}$ $\theta \in [0; 2\pi)$ para diferentes ángulos.

Es necesario conocer donde se encuentran los picos/polos de las figuras anteriores para poder determinar con mayor precisión la masa del mesón y para que se muestre con mas claridad el numero de polos complejo conjugados en cada caso, para poder hacer esto es necesario ver si se puede limpiar la señal para evitar el ruido, ya sea modificando los polos del modelo utilizado o con una expansión en series de Taylor, estos cambios son puramente matemáticas, es decir, no afectan la física.

Este método nos permite calcular con precisión la masa del mesón en estudio, pero resulta sumamente complicado y poco práctico de implementar para el cálculo de factores de forma. Un método alternativo es emplear la parametrización N-ccp, llamada también “*Representación Integral de la Teoría de Perturbaciones*” (PTIR) [27]-[28], pues las expresiones a las que da lugar se asemejan a las que encontramos en cálculos perturbativos de lazos. Esta consiste en escribir al propagador del quark como la suma de N propagadores libres con masas complejas (y sus complejos conjugados). Esto con el fin de que podamos utilizar estos resultados para calcular mas fácilmente las amplitudes de Bethe-Salpeter. Esta parametrización consiste en escribir el propagador del quark como la suma de N polos

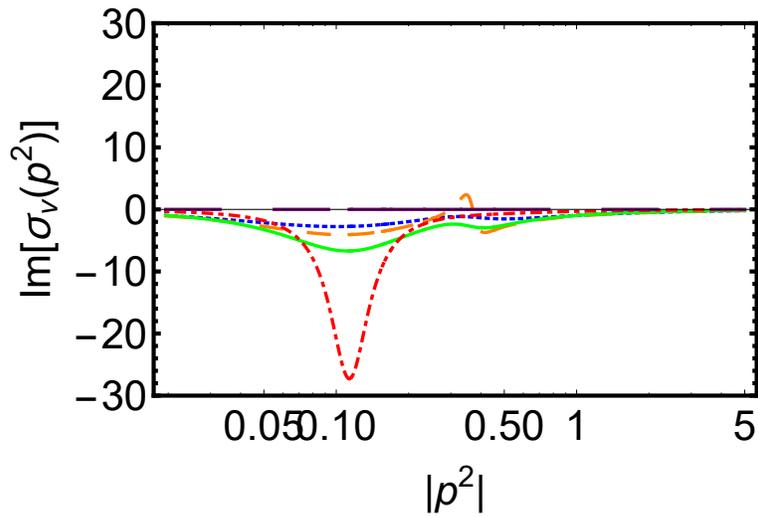


Figura 2.58: Parte imaginaria de σ_v en el plano complejo para diferentes ángulos en el límite quiral con el modelo QC. 90° (azul, línea punteada), 110° (naranja, líneas pequeñas), 132° (verde, línea sólida), 167° (rojo, líneas y puntos) y 180° (morado, líneas grandes).

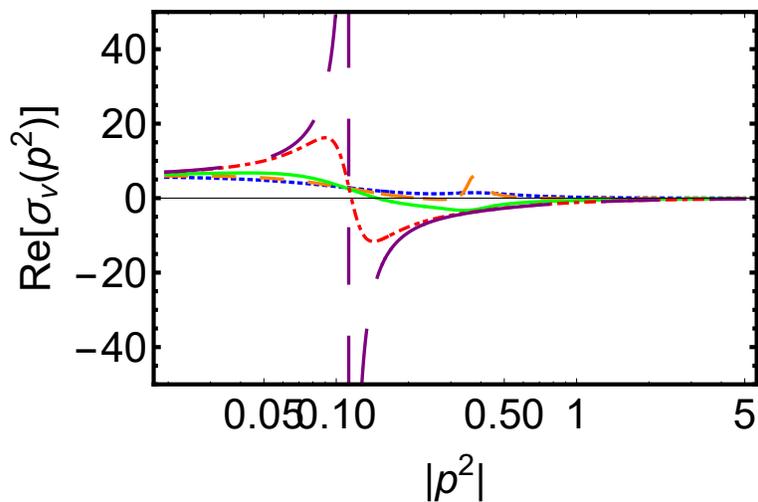


Figura 2.59: Parte real de σ_v en el plano complejo para diferentes ángulos en el límite quiral con el modelo QC. 90° (azul, línea punteada), 110° (naranja, líneas pequeñas), 132° (verde, línea sólida), 167° (rojo, líneas y puntos) y 180° (morado, líneas grandes).

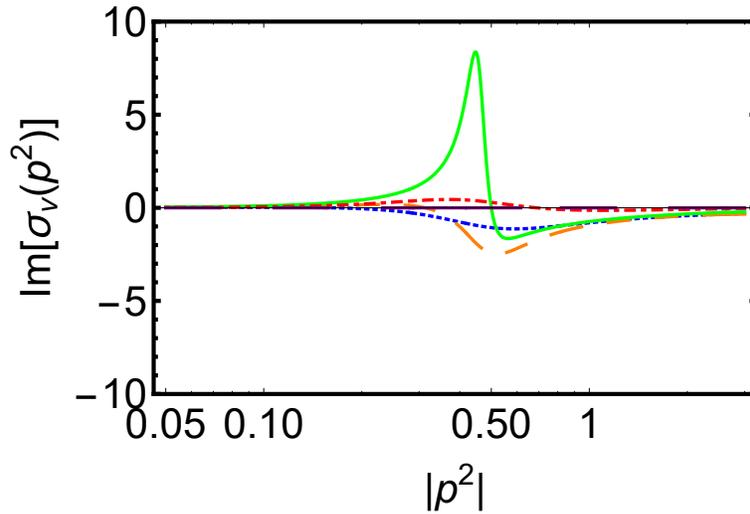


Figura 2.60: Parte imaginaria de σ_v en el plano complejo para diferentes ángulos para el quark s con el modelo MT. 90° (azul, línea punteada), 110° (naranja, líneas pequeñas), 132° (verde, línea sólida), 167° (rojo, líneas y puntos) y 180° (morado, líneas grandes).

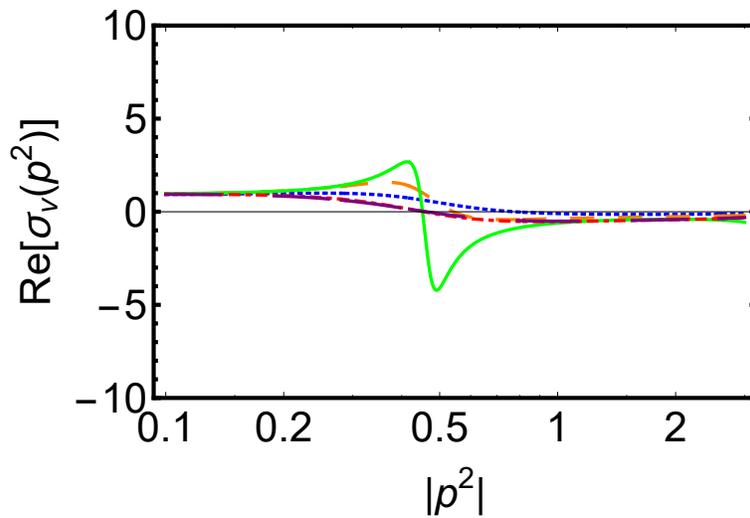


Figura 2.61: Parte real de σ_v en el plano complejo para diferentes ángulos para el quark s con el modelo MT. 90° (azul, línea punteada), 110° (naranja, líneas pequeñas), 132° (verde, línea sólida), 167° (rojo, líneas y puntos) y 180° (morado, líneas grandes).

complejo conjugados N-ccp de la siguiente manera:

$$S(q) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{z_k}{i\gamma \cdot q + m_k} + \frac{z_k^*}{i\gamma \cdot q + m_k^*} \right). \quad (2.60)$$

Donde z_k y m_k son parámetros complejos a fijar a partir de las soluciones numéricas, son de la forma $z_k = (a_k + ib_k)$ y $m_k = (c_k + id_k)$. Al menos uno de los parámetros m_k debe tener parte imaginaria distinta de cero, esto para asegurar que el propagador no tenga polos sobre el eje real y se trate de una partícula confinada. Independientemente de la parametrización empleada, se espera que el propagador completo tenga la forma de un propagador libre en el ultravioleta, por lo tanto tendremos restricciones sobre los parámetros:

$$\begin{aligned} Z(p^2 \rightarrow \infty) \rightarrow 1 &\Rightarrow 2 \sum_{k=1}^N \text{Re}(z_k) = 1, \\ M(p^2 \rightarrow \infty) \rightarrow m &\Rightarrow 2 \sum_{k=1}^N \text{Re}(z_k m_k) = m, \\ p^4 \sigma_e(p^2 \rightarrow \infty) \rightarrow C &\Rightarrow -2 \sum_{k=1}^N \text{Re}(z_k m_k^3). \end{aligned}$$

La ultima condición proviene del hecho de que:

$$\begin{aligned} p^4 \sigma_e(p^2) &= p^4 \frac{Z(p^2)M(p^2)}{p^2 + M^2(p^2)} = p^2 \frac{Z(p^2)M(p^2)}{1 + M^2(p^2)/p^2}, \\ p^4 \sigma_e(p^2) &=_{p^2 \rightarrow \infty} Z(p^2)M(p^2) \left[p^2 - M^2(p^2) + \mathcal{O}(1/p^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Tomando $M(p^2 \rightarrow \infty) \sim 1/p^2$ tenemos que el primer termino es una constante y los demás caen como $1/p^2$. En el limite quiral la constante C corresponde al condensado quiral. Descomponiendo el propagador en su parte vectorial y escalar {2.20}:

$$S(p) = -i\gamma \cdot p \sigma_v(p) + \sigma_e(p),$$

la parametrización N-ccp resulta ser:

$$\sigma_v(p) = \sum_{k=1}^N \frac{z_k}{p^2 + m_k^2} + \frac{z_k^*}{p^2 + m_k^{*2}}, \quad (2.62)$$

$$\sigma_e(p) = \sum_{k=1}^N \frac{z_k m_k}{p^2 + m_k^2} + \frac{z_k^* m_k^*}{p^2 + m_k^{*2}}. \quad (2.63)$$

En las figuras {2.53} - {2.57} podemos ver que para el limite quiral con el modelo MT $N = 3$ (numero de polos complejos conjugados), para el modelo QC en el limite quiral $N = 2$ y para el quark s con el modelo MT $N = 2$. Estos son el numero de polos que se muestran en las figuras por ello tomamos ese numero para la parametrización para disminuir el error. Se realizo el ajuste para momentos desde $p^2 = 10^{-4}$ hasta $p^2 = 10^3$. El ajuste muestra un error del orden de 2×10^{-5} el cual es mínimo y el comportamiento ultravioleta esperado. Los resultados se muestran a continuación.

$z_k = a_k + ib_k$	$m_k = c_k + id_k$
$z_1 = 0.596848 - i0.3538853$	$m_1 = 0.486185 + i0.0095224$
$z_2 = -0.198807 - i0.18447$	$m_2 = 1.07606 + i0.616632$
$z_3 = 0.135216 + i0.255348$	$m_3 = -1.115 + i0.280785$

Cuadro 2.7: Resultados numéricos para los parámetros z_k y m_k en el limite quiral con el modelo MT.

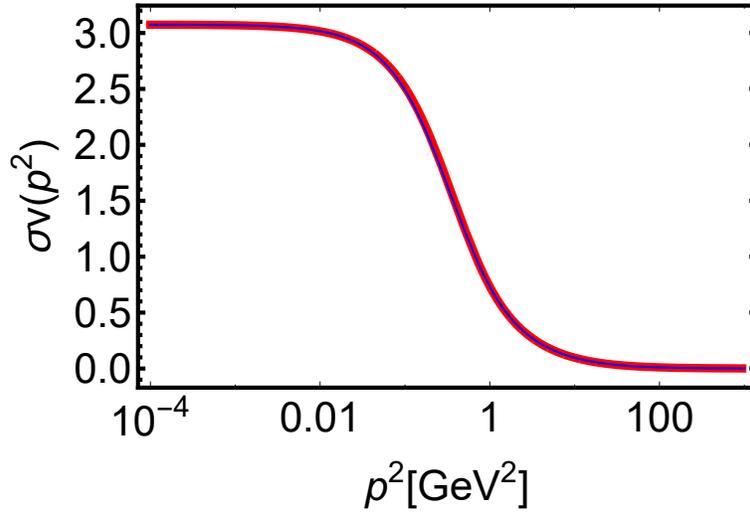


Figura 2.62: Se muestra la parte vectorial del propagador del quark en el limite quiral con el modelo MT. Solución de las gap (rojo), aproximación 3-ccp (azul).

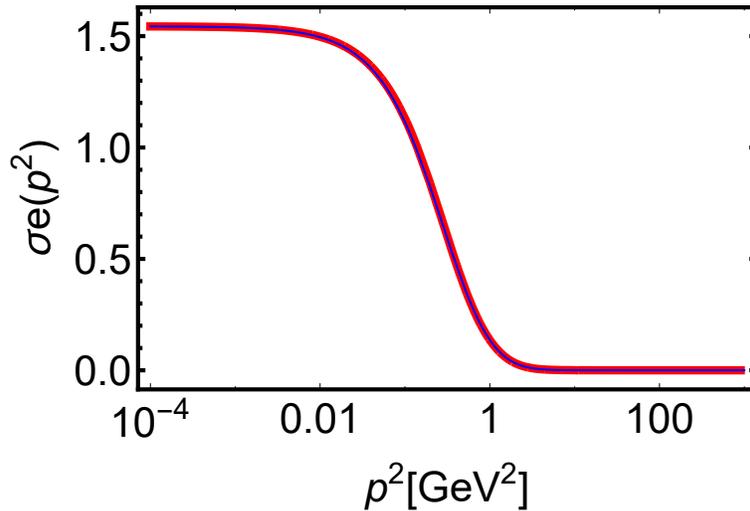


Figura 2.63: Se muestra la parte escalar del propagador del quark en el limite quiral con el modelo MT. Solución de las gap (rojo), aproximación 3-ccp (azul).

$z_k = a_k + ib_k$	$m_k = c_k + id_k$
$z_1 = 0.14184 + i0.156288$	$m_1 = -0.511209 + i0.325218$
$z_2 = 0.353135 + i0.26572$	$m_2 = 0.336216 - i0.00071798$

Cuadro 2.8: Resultados numéricos para los parámetros z_k y m_k en el limite quiral con el modelo QC.

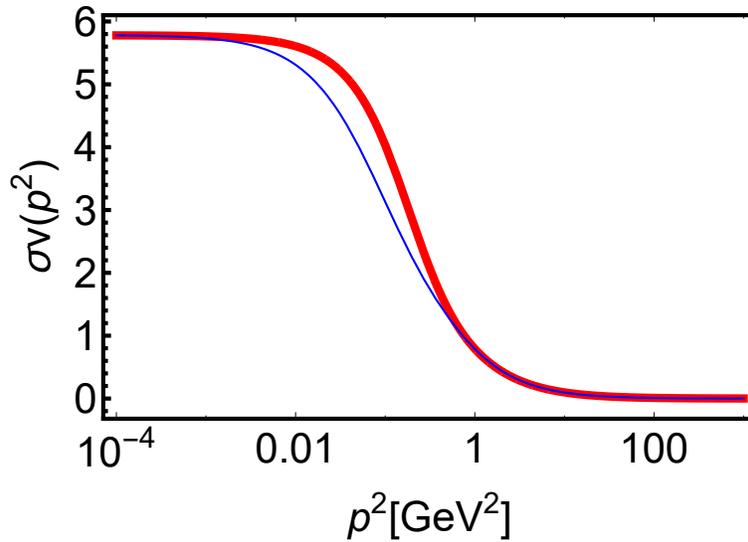


Figura 2.64: Se muestra la parte vectorial del propagador del quark en el limite quiral con el modelo QC. Solución de las gap (rojo), aproximación 2-ccp (azul).

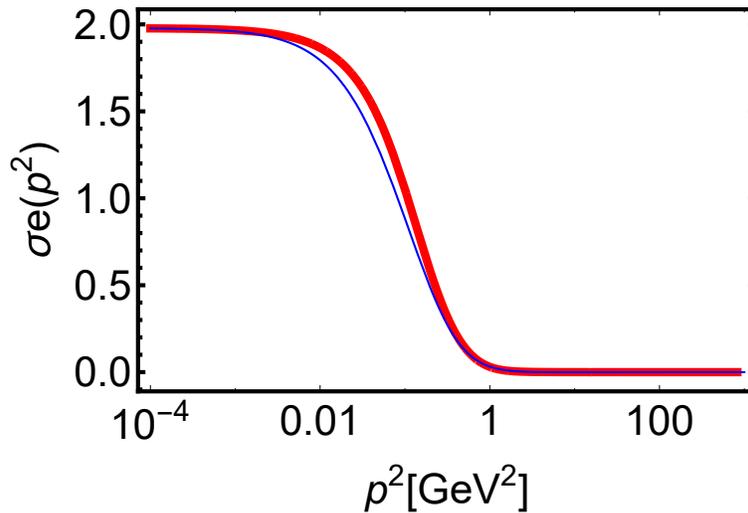


Figura 2.65: Se muestra la parte escalar del propagador del quark en el limite quiral con el modelo QC. Solución de las gap (rojo), aproximación 2-ccp (azul).

$z_k = a_k + ib_k$	$m_k = c_k + id_k$
$z_1 = 0.132717 + i0.0915433$	$m_1 = -1.76961 - i0.745219$
$z_2 = 0.37925 - i0.0550352$	$m_2 = 0.609359 - i0.30183$

Cuadro 2.9: Resultados numéricos para los parámetros z_k y m_k para el quark s con el modelo MT.

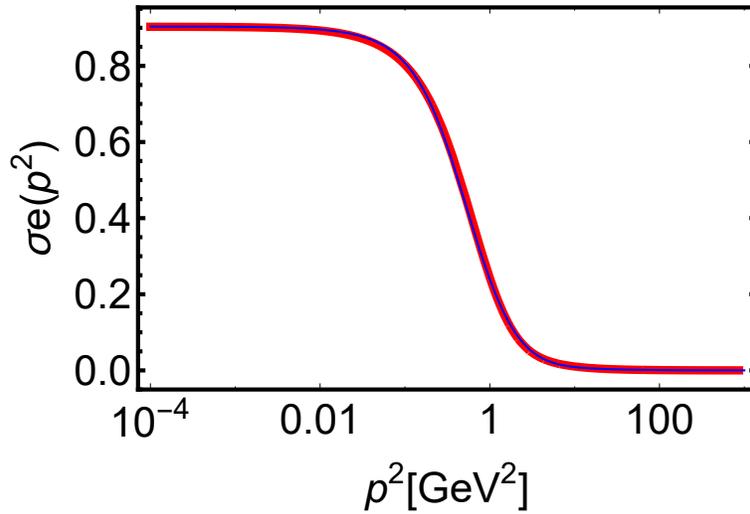


Figura 2.66: Se muestra la parte escalar del propagador del quark s con el modelo MT. Solución de las gap (rojo), aproximación 3-ccp (azul).

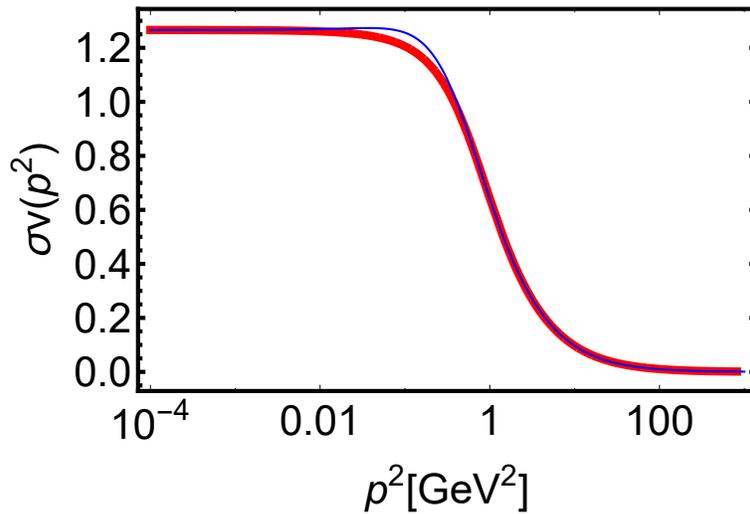


Figura 2.67: Se muestra la parte vectorial del propagador del quark s con el modelo MT. Solución de las gap (rojo), aproximación 3-ccp (azul).

De esta manera podemos utilizar la parametrización N-ccp para resolver mas eficientemente la BSE y poder obtener así las BSA y los observables hadronicos. Ahora debemos analizar las singularidades para evitar que afecten los cálculos de los observables hadronicos. Un cambio físicamente no observable puede permitir la solución mas amigable de las ecuaciones, es decir, modificar matemáticamente las ecuaciones.

Capítulo 3

Conclusiones

Revisamos algunas de las características del lagrangiano de QCD, una de las más notorias son sus simetrías, tipos y su rompimiento. Observamos que estas simetrías, al igual que las de la naturaleza, son aproximadas; es decir, solo existen bajo algunas condiciones. De estas simetrías y sus características podemos obtener bastante información física de la naturaleza. Una de las simetrías más importantes es la quiral ya que su rompimiento da lugar a la generación de la mayor parte de la masa de la materia ordinaria. El universo es tan intrigante que crea simetrías para después romperlas de alguna manera. Estudiamos el rompimiento espontáneo de la simetría quiral (DCSB) a partir del propagador del quark, para ello obtuvimos la función de masa la cual codifica la ruptura de simetría quiral dinámica y muestra la transición de la masa de quark constituyente a la masa de quark actual, también obtuvimos renormalización de la función de onda así como sus funciones de vestimento.

Estas funciones se obtuvieron resolviendo la DSE para el propagador del quark, esta ecuación es conocida como la ecuación de gap. Para facilitar los cálculos se escogió un truncamiento adecuado que nos permitiera separar el vértice quark-gluon y el propagador del gluon, a este truncamiento se le conoce como rainbow-ladder. Posteriormente se escogieron los modelos de Qin-Chang y Maris-Tandy para el acoplamiento efectivo. Ambos modelos muestran características importantes de estas interacciones. Hay diferencias entre los modelos pero cada uno nos ayuda a entender la física de las interacciones, ambos tienen el mismo comportamiento en el ultravioleta pero en el infrarrojo tiene bastantes diferencias.

Una vez obtenidas las funciones correspondientes a la masa con ambos modelos podemos observar que la función de masa es monótona y decrece, es finita en el infrarrojo. Para una masa corriente de algunos cuantos $MeVs$ se generan cientos de $MeVs$, el ejemplo más notorio es para una masa corriente $\sim 0 MeV$ (límite quiral) se genera una masa del orden de $511 MeV$. El ultravioleta corresponde a la masa corriente.

A medida que la masa corriente aumenta los efectos dinámicos disminuyen, se genera más masa para los quarks ligeros que para los pesados, esto podría deberse a que mientras más pesado el quark interactúa menos. La función de masa tiene un punto de inflexión lo cual indica que se trata de una partícula confinada.

El condensado quiral (valor de expectación en el vacío) toma sentido en el enfoque no perturbativo de la función de masa. Podemos concluir que con la aproximación RL podemos obtener para los mesones pseudoescalares. El formalismo de la DSE es muy amigable, facilita los cálculos y los resultados son comparables con los de otros formalismos como por ejemplo IQCD.

La DSE está relacionada con la BSE a través del propagador del quark, por ende es ne-

cesario conocer el propagador en todo el plano complejo. para facilitar los cálculos se parametrizaron las soluciones con una parametrización llamada representación integral de teoría de perturbaciones. Esta consiste en escribir al propagador del quark como la suma de N polos complejo conjugados, el numero de polos que es mas adecuado lo inferimos de las gráficas de la parte real vs la parte imaginaria de la parte vectorial/escalar del propagador del quark, es estas gráficas se pueden observar pares de polos complejo conjugados. Encontramos que $N = 2$ es un buen numero de polos para parametrizar las soluciones. Posteriormente sigue el camino para resolver completamente la BSE y obtener las BSA para poder conocer y describir los observables hadrónicos, factores de forma entre otras características importantes de los mesones. Los resultados obtenidos en este trabajo de tesis reproducen fielmente los resultados experimentales mostrados en la literatura para QCD.

Apéndice A

Convención Euclidiana y Trazas

A.1. Convención Euclidiana

La mayoría de los cálculos en una QFT no perturbativa se realizan en la métrica Euclidiana (donde $a \cdot b = a_\mu \delta_{\mu\nu} b_\nu$). A partir de los 4-vectores en el espacio de Minkowski se obtiene el espacio Euclidiano mediante la continuación analítica a tiempo imaginario. Para vectores espacio-tiempo y energía-momento:

$$t^E = it^M \quad , \quad \vec{x}^E = \vec{x}^M \quad (\text{A.1})$$

$$\varepsilon^E = i\varepsilon^M \quad , \quad \vec{p}^E = \vec{p}^M \quad (\text{A.2})$$

Los índices E, M denotan Euclidiano y Minkowski, respectivamente. Las matrices gamma son de la forma: $\gamma^{0E} = \gamma^{0M}$ y $\vec{\gamma}^E = -i\vec{\gamma}^M$; la métrica $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Además tenemos las siguientes relaciones:

$$\int d^4k^M = -i \int d^4k^E \quad (\text{A.3})$$

$$\gamma^M \cdot p^M = -i\gamma^E \cdot p^E \quad (\text{A.4})$$

$$q^M \cdot p^M = -iq^E \cdot p^E \quad (\text{A.5})$$

$$x^M \cdot p^M = -x^E \cdot p^E \quad (\text{A.6})$$

A.2. Matrices Gamma

Las matrices gamma Euclidianas tiene las siguientes propiedades. La propiedad que hace que las matrices gamma generen un álgebra de Clifford es la relación de anticonmutación:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\delta^{\mu\nu} \mathbb{1}. \quad (\text{A.7})$$

Con $\{, \}$ el anticonmutador y $\delta^{\mu\nu}$ la métrica. La versión covariante están definidas por:

$$\gamma_\mu = \delta_{\mu\nu} \gamma^\nu \quad (\text{A.8})$$

El producto de las 4 matrices gamma es:

$$\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (\text{A.9})$$

La matriz γ^5 cumple las siguientes propiedades:

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (\text{A.10})$$

$$(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}, \quad (\text{A.11})$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\nu\} = \gamma^5\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^5 = 0. \quad (\text{A.12})$$

Las matrices cumplen las siguientes identidades:

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4\mathbb{1}, \quad (\text{A.13})$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu, \quad (\text{A.14})$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = 4\delta^{\nu\rho}\mathbb{1}, \quad (\text{A.15})$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu, \quad (\text{A.16})$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho = \delta^{\mu\nu}\gamma^\rho + \delta^{\nu\rho}\gamma^\mu - \delta^{\mu\rho}\gamma^\nu - i\epsilon^{\sigma\mu\nu\rho}\gamma_\sigma\gamma^5. \quad (\text{A.17})$$

A.3. Trazas

Propiedades de la traza:

$$\text{Tr}[A + B] = \text{Tr}[A] + \text{Tr}[B], \quad (\text{A.18})$$

$$\text{Tr}[rA] = r\text{Tr}[A], \quad (\text{A.19})$$

$$\text{Tr}[ABC] = \text{Tr}[BCA] = \text{Tr}[CAB]. \quad (\text{A.20})$$

Las matrices gamma obedecen las siguientes identidades de traza:

$$\text{Tr}[\gamma^\mu] = 0, \quad (\text{A.21})$$

$$\text{Tr}[\# \text{ impar de } \gamma's] = 0, \quad (\text{A.22})$$

$$\text{Tr}[\text{producto de un } \# \text{ impar de } \gamma^\mu] = 0, \quad (\text{A.23})$$

$$\text{Tr}[\gamma^5 \text{ producto de un } \# \text{ impar de } \gamma^\mu] = 0, \quad (\text{A.24})$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4\delta^{\mu\nu}, \quad (\text{A.25})$$

$$\text{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta] = 4(\delta^{\mu\nu}\delta^{\alpha\beta} - \delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta} + \delta^{\mu\beta}\delta^{\nu\alpha}), \quad (\text{A.26})$$

$$\text{Tr}[\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta}] = 4(\delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta} - 4\delta^{\mu\beta}\delta^{\nu\alpha}), \quad (\text{A.27})$$

$$\text{Tr}[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu] = \text{Tr}[\gamma^5] = 0, \quad (\text{A.28})$$

$$\text{Tr}[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta] = 4i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (\text{A.29})$$

$$\text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}] = \text{Tr}[\gamma^{\mu_n} \dots \gamma^{\mu_1}], \quad (\text{A.30})$$

$$\epsilon^{4123} = 1. \quad (\text{A.31})$$

A.4. Hermiticidad

Se puede escoger la forma de las matrices gamma con condiciones adicionales de hermiticidad, restringidas por las relaciones de anticonmutación. Podemos imponer:

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \text{ compatible con } (\gamma^0)^2 = \mathbb{1}. \quad (\text{A.32})$$

Para el resto de las matrices ($k = 1, 2, 3$)

$$(\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k, \text{ compatible con } (\gamma^k)^2 = -\mathbb{1}. \quad (\text{A.33})$$

En general:

$$(\gamma^k)^\dagger = \gamma^0 \gamma^k \gamma^0. \quad (\text{A.34})$$

A.5. Notación Slash de Feynman

La notación slash de Feynman esta definida por:

$$\not{a} := \gamma^\mu a_\mu. \quad (\text{A.35})$$

Para cualquier cuadrivector a . Algunas identidades que involucran la notación slash son:

$$\not{a}\not{b} = a \cdot b - ia_\mu \sigma^{\mu\nu} b_\nu, \quad (\text{A.36})$$

$$\not{a}\not{a} = a^\mu a^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu = \frac{1}{2} a^\mu a^\nu (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) = \delta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu = a^2, \quad (\text{A.37})$$

$$\text{Tr}[\not{a}\not{b}] = 4(a \cdot b), \quad (\text{A.38})$$

$$\text{Tr}[\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}] = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)], \quad (\text{A.39})$$

$$\text{Tr}[\gamma^5 \not{a}\not{b}\not{c}\not{d}] = -4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} a^\mu b^\nu c^\rho d^\sigma, \quad (\text{A.40})$$

$$\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2\not{a}, \quad (\text{A.41})$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu = 4a \cdot b, \quad (\text{A.42})$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a}. \quad (\text{A.43})$$

Donde $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ es el símbolo de Levi-Civita y $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, con $[\cdot, \cdot]$ el conmutador.

Bibliografía

- [1] Murray Gell-Mann (Caltech). Symmetries of baryons and mesons 1962. 18 pp. Published in Phys. Rev. 125 (1962) 1067-1084. DOI: 10.1103/PhysRev.125.1067
- [2] M. Y. Han and Yoichiro Nambu. Three Triplet Model with Double SU(3) Symmetry. Phys. Rev., 139:B1006-B1010, 1965. doi: 10.1103/PhysRev.139.B1006
- [3] H. Fritzsch, Murray Gell-Mann, and H. Leutwyler. Advantages of the Color Octet Gluon Picture. Phys. Lett., 47B:365-368, 1973. doi: 10.1016/0370-2693(73)90625-4
- [4] D. J. Gross and Frank Wilczek. Asymptotically Free Gauge Theories. 1. Phys. Rev., D8: 3633-3652, 1973. doi: 10.1103/PhysRevD.8.3633
- [5] David J. Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories. Phys. Rev. Lett., 30:1343-1346, 1973. doi: 10.1103/PhysRevLett.30.1343
- [6] H. David Politzer. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? Phys. Rev. Lett., 30:1346-1349, 1973. doi: 10.1103/PhysRevLett.30.1346
- [7] Ryosuke Itoh. Status of Belle II and Physics Prospects. Nucl. Part. Phys. Proc., 285-286: 155-159, 2017. doi: 10.1016/j.nuclphysbps.2017.03.028.
- [8] F. J. Dyson. The S matrix in quantum electrodynamics. Phys. Rev., 75:1736-1755, 1949. doi: 10.1103/PhysRev.75.1736.
- [9] E. E. Salpeter and H. A. Bethe. A Relativistic equation for bound state problems. Phys. Rev., 84:1232-1242, 1951. doi: 10.1103/PhysRev.84.1232
- [10] Khepani Raya. Estructura Partónica de los Mesones Pseudoescalares Neutros, Ph.D. Tesis, UMSNH, Noviembre, 2017 - 98 páginas.
- [11] Khepani Raya, Minghui Ding, Adnan Bashir, Lei Chang, Craig D. Roberts. Partonic structure of neutral pseudoscalars via two photon transition form factors. Oct 20, 2016. 6 pp. Published in Phys.Rev. D95 (2017) no.7, 074014 DOI: 10.1103/PhysRevD.95.074014 e-Print: arXiv:1610.06575
- [12] Pion form factor from a contact interaction L.X. Gutierrez-Guerrero, A. Bashir, I.C. Cloet, C.D. Roberts. Feb 2010. 5 pp. Published in Phys.Rev. C81 (2010) 065202 DOI: 10.1103/PhysRevC.81.065202
- [13] Marco Bedolla Hernández., Quarkonia en una Interacción de Contacto. Ph.D. UMSNH, 7 de febrero de 2017.

- [14] Nicholas A. Souchlas. Quark dynamics and constituent masses in heavy quark systems. Ph.D. Thesis (Advisor: Peter C. Tandy), Aug 2005 - 171 pages.
- [15] Gasser and G.R.S. Zarnaskas. On the pión decay constant, J. 20 Aug 2010. Phys. Lett. B693:122-128,2010.
- [16] C. D. Roberts and A. G. Williams, Prog. Part. Nucl. Phys. 33 (1994) 477-575
- [17] R. Alkofer and L. von Smekal, Phys. Rept. 353 (2001) 281
- [18] Pieter Maris and Peter C. Tandy. Bethe-Salpeter study of vector meson masses and decay constants. Phys. Rev., C60:055214, 1999. doi: 10.1103/PhysRevC.60.055214.
- [19] Si-xue Qin, Lei Chang, Yu-xin Liu, Craig D. Roberts, and David J. Wilson. Interaction model for the gap equation. Phys. Rev., C84:042202, 2011. doi: 10.1103/PhysRevC.84.042202.
- [20] Olive, K. et al. Review of Particle Physics. Chin.Phys., vol. C38, página 090001, 2014. doi: 10.1088/1674-1137/38/9/090001. REVIEW OF PARTICLE PHYSICS Particle Data Group - PDG.
- [21] John Morales, Germán Sinuco. Lagrangiano para QCD a bajas energías. Bogotá, D, C., Colombia. Junio 2002.
- [22] P. Maris and C.D. Roberts. Pi- and K meson Bethe-Salpeter amplitudes. Phys.Rev., C56:3369-3383, 1997. doi: 10.1103/PhysRevC.56.3369.
- [23] G. Colangelo, J. Gasser, and H. Leutwyler. $\pi\pi$ scattering. Nucl. Phys., B603:125-179, 2001. doi: 10.1016/S0550-3213(01)00147-X.
- [24] Craig D. Roberts and Anthony G. Williams. Dyson-Schwinger equations and their application to hadronic physics. Prog. Part. Nucl. Phys., 33:477-575, 1994. doi: 10.1016/0146-6410(94)90049-3
- [25] Pankaj Jain and Herman J. Munczek. q anti-q bound states in the Bethe-Salpeter formalism. Phys. Rev., D48:5403-5411, 1993. doi: 10.1103/PhysRevD.48.5403
- [26] Minghui Ding, Fei Gao, Lei Chang, Yu-Xin Liu, and Craig D. Roberts. Leading-twist parton distribution amplitudes of S-wave heavy-quarkonia. Phys. Lett., B753:330-335, 2016. doi: 10.1016/j.physletb.2015.11.075.
- [27] Nicolas A. Souchlas., Ph.D., Quark dynamiscs and constituent masses in heavy quark systems., August, 2009.
- [28] Jerecke Dennis W., Ph.D., Properties of mesons from Bethe-Salpeter Amplitudes., May, 2005.