



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO

ACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

LA ECUACIÓN DE ESTADO EN
TEORÍA DE RASTALL A PARTIR DE
TRANSFORMACIONES
CUASI-HOMÓLOGAS.

TESIS
PARA OBTENER EL TÍTULO
DE:

Licenciado en Ciencias
Físico-Matemáticas

PRESENTA:
Luis Carlos Castro Cisneros



DIRECTOR DEL TRABAJO:
DR. JOAQUIN ESTEVEZ DELGADO
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

MORELIA, MICHOACÁN MARZO DE 2019

Agradecimientos

Agradezco en especial a mi Madre y Padre, ya que ellos me dieron la vida, me mostraron el camino para amarla, quererla, encontrarle sentido ya que uno nace y no sabe su razón de ser en este mundo, después de crecer a su lado descubrí que lo más importante es ser feliz, por todas sus enseñanzas, alegrías, regaños que sin ellos no sería la persona que soy en estos momentos, lamentablemente mi madre no está aquí conmigo pero donde quiera que este quiero que sepa que esto también es por ella.

A mi familia que son una parte importante en este trayecto llamado vida, ya que ellos me han soportado y he aprendido de ellos, he adquirido tanta experiencia por sus pláticas, comentarios y anécdotas.

A mis amigos ya que con ellos aprendí el significado de la vida, bien dicen las personas que los amigos son la familia que uno elige, y mi grupo de amigos aunque reducido, son muy importantes en mi vida ellos han sido el soporte cuando más lo he necesitado, quisiera poner algunos nombres de ellos para dar méritos especiales pero todas las personas son igual de importantes en mi vida.

A mi novia Sam ya que sin su apoyo, sin todas las palabras de aliento esto no hubiera sido posible, cuando más lo he necesitado a estado para mí y en muchas cosas más. Me ha hecho crecer como ser humano de forma física,

espiritual y mentalmente, es un apoyo incondicional, es una excelente pareja.

A mis profesores que durante toda la carrera me han tenido paciencia para que yo aprendiera de la mejor manera, me han ayudado tanto en esta vida para crecer como ser humano en el sentido académico y porque no, en el sentido individual y de que todas las historias tienen un bonito final.

Y en especial a mi asesor el Dr Joaquín Estevez, Rivas y a toda su comunidad Fismat, son unas grandes personas, agradezco infinitamente a Rivas por su apoyo en el trabajo de Tesis, agradezco en demasia al Dr. Joaquín ya que el me dio una segunda oportunidad para poder titularme, le agradezco mucho el que me haya arropado y que me haya dado la satisfacción de que si te caes te puedes levantar y que en algunos momentos puedes pasar cosas difíciles pero siempre existirá alguien que entenderá tu situación y te dará una mano, le agradezco montones.

Y a todas las personas que se han cruzado por mi camino en la vida y que han aportado su granito de arena para que sea la persona que en este momento deseo ser.

¡Muchas gracias a todos!

Resumen

Una de las preguntas en torno a la estructura de las estrellas es sobre el tipo de ecuación de estado que pueden describirla desde diferentes enfoques, se ha propuesto que esta puede ser descrita por diferentes relaciones, entre las que figuran se encuentran la forma lineal o de la forma $P = \mu\rho^{1+\frac{1}{n}}$, se obtienen a partir de la estructura local. En esta tesis se muestra que, al imponer la invarianza del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias asociadas a modelos estelares, en el marco de teoría de gravitación de Rastall para una geometría estática y esféricamente simétrica, bajo la acción de un generador infinitesimal se obtiene que la ecuación de estado que satisface es $P = \mu c^2 \rho$. Resultado matemático que coincide con una de las ecuaciones de estado formuladas a partir de condiciones físicas.

Para esta ecuación de estado, que complementa el sistema de ecuaciones que describen el interior de un objeto compacto, realizamos el análisis de este mediante herramientas de sistemas dinámicos, mostrando que existe un punto espiral asociado a una solución que generaliza a la de Misner- Zaspolsky.

Palabras clave: Ecuación de Estado, Estrella de Estática, Familias Homológicas, Transformación cuasihomólogas y Teoría de Rastall.

Abstract

One of the questions about the structure of the stars is about the type of equation of state that can describe it, from different approaches it has been proposed that this can be described by different relations, which they appear are the form linear or this form $P = \mu\rho^{1+\frac{1}{n}}$, they are obtained from the structure local. In this thesis it is shown that when imposing the invariance of the system of ordinary differential equations associated with stellar models, in the frame of Rastall's theory of gravitation for a static and spherically symmetric geometry, under the action of an infinitesimal generator, it is obtained that the equation of state that satisfies such a condition is $P = \mu c^2 \rho$. Mathematical result that matches one of the state equations formulated from physical conditions.

For this equation of state, which complements the system of equations that describe the interior of a compact object, we carry out analysis of this, by means of dynamical systems tools, showing that there is a spiral point associated with a solution that generalizes to that of Misner- Zapsky.

Índice general

Agradecimientos	3
Resumen	5
Abstract	7
Lista de figuras	11
1. Ecuaciones diferenciales ordinarias.	1
1.1. Ecuaciones Lineales	4
1.2. Ecuaciones Separables	6
1.3. Ecuaciones Exactas	8
1.4. Factor Integrante	10
1.5. Ecuaciones Homogéneas	11
2. Sistemas de EDO's.	15
2.1. Introducción	15
2.2. Puntos de Estabilidad	23
2.3. Puntos de Inestabilidad	23
2.4. Puntos Silla	23
2.5. Linealización	27
3. Curiosidades Matemáticas en sist. dinámicos	31
3.1. Familias Homológicas de soluciones	33

3.2. Estrella estática Newtoniana	35
3.3. Estrella Relativista	38
3.4. Estrella relativista en equilibrio	40
4. Ecs. de Edo. en la Teoría de Rastall	45
4.1. Introducción	45
4.2. Análisis dinámico (regiones)	48
4.3. Análisis gráfico	58
5. Conclusiones	65
Bibliografía	67

Índice de figuras

1.1. Punto estable e inestable del sistema $\dot{x} = \sin x$. Fuente [2]	2
1.2. Puntos atractores y repulsores. Fuente [2]	3
2.1. Orbitas estables del caso armónico. Fuente [2]	18
2.2. Casos de la ecuación 2.2, variando el parámetro a . Fuente [2]	20
2.3. Podemos ver como las trayectorias tienden a una recta estable e inestable respectivamente. Fuente [2]	25
2.4. Trayectoria del espacio fase para el caso amortiguado. Fuente [2]	26
2.5. Clasificación en relación a los autovalores para un sistema 2x2. Fuente [1]	28
3.1. Caso relativista	42
4.1. Análisis de la clasificación de la soluciones imaginarias o reales	60
4.2. Varios casos para nuestro sistema de ecuaciones	61
4.3. Tabla de valores para λ y γ , donde f_1 es la diferencial de mu una vez sustituido los valores de λ , f_2 es el valor que toma la diferencial de m después de la sustitución, pFm y $pFmu$ es el valor exacto aplicado en m y μ respectivamente	62
4.4. Contorno de solución	62
4.5. Contorno de solución en 3D	63
4.6. Gráfica donde podemos ver la superficie de soluciones para nuestro sistema	64

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales ordinarias.

En este capítulo conoceremos las distintas formas que tenemos para clasificar a las ecuaciones diferenciales. Vamos a ver los diferentes casos que se conocen de ecuaciones diferenciales de primer orden, a su vez daremos una breve introducción de cada una de ellas, una forma de como se resuelven para un caso general y un ejemplo de cada uno de los casos, para tomarlo como referencia, esto con la finalidad de ubicar de forma más concreta al tipo al que pertenece la ecuación como se ve en [1].

Para el caso donde $n = 1$, la ecuación que obtendremos será de la forma:

$$\dot{x} = f(x).$$

Aquí $x(t)$ es una función real dependiente del tiempo t , y $f(x)$ es una función suave de valores reales de x . Llamaremos a tales ecuaciones como unidimensionales o sistemas de primer orden. Es conveniente aclarar algunos conceptos:

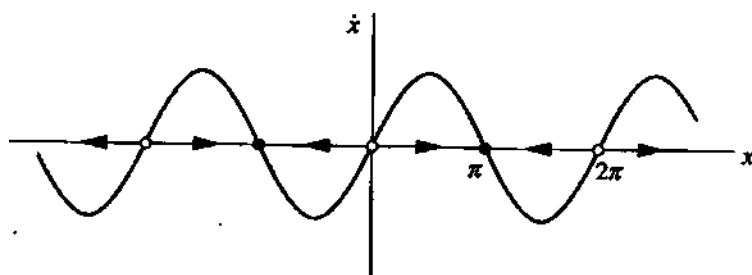


Figura 1.1: Punto estable e inestable del sistema $\dot{x} = \sin x$. Fuente [2]

1.- La palabra sistema esta siendo usada en el sentido de un sistema dinámico, no en el sentido clásico de una colección de dos o mas ecuaciones. Una simple ecuación puede ser un sistema.

Definición 1.1. Sistema autónomo y no autónomo. Sea una función f continua, es infinitamente diferenciable, se dice que un sistema es autónomo cuando tenemos un sistema y la función f no tiene dependencia en t , es decir $\dot{x} = f(x)$. La función no depende explícitamente del tiempo. La dependencia del tiempo o ecuaciones no autónomas son de la forma $\dot{x} = f(t, x)$ este tipo de sistemas son más complicados, ya que se necesita más información para x y t , en la predicción del estado futuro del sistema.

Empezaremos a entender el concepto de campo vectorial con un pensamiento físico, imaginemos un fluido que es constante a través del eje X con una velocidad $v = \dot{x}$ que varía respecto a la posición, todo esto de acuerdo a la siguiente ecuación $\dot{x} = \sin x$. Como se muestra en la Fig. 1.1.

Se puede ver que una partícula se iría hacia la derecha cuando $\dot{x} > 0$ y hacia la izquierda cuando $\dot{x} < 0$. En los puntos donde $\dot{x} = 0$, no hay movimiento, a tales puntos se les conoce como puntos fijos. Existen dos tipos de puntos fijos como se muestra en la Fig. 1.1. Los puntos negros representan los puntos fijos estables (usualmente llamados como atractores o sumideros porque el flujo es en dirección a ellos), y los puntos blancos representan a los puntos fijos inestables (también conocidos como repulsores o fuentes).

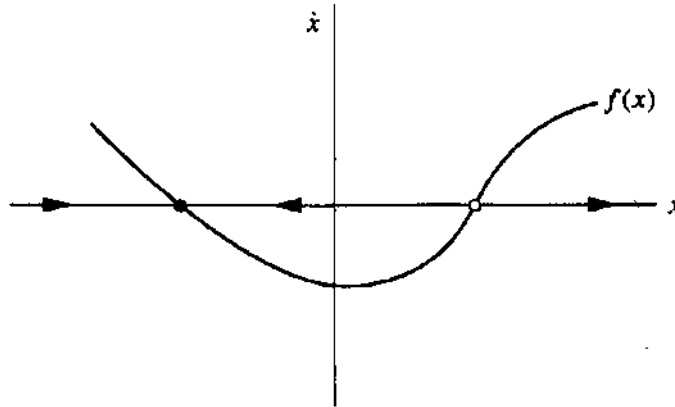


Figura 1.2: Puntos atractores y repulsores. Fuente [2]

Las ideas mencionadas anteriormente pueden ser aplicadas a un sistema unidimensional como $\dot{x} = f(x)$, sólo necesitamos hacer el bosquejo de la gráfica de $f(x)$, y entonces visualizaremos el campo vectorial.

Como vimos antes, nosotros imaginamos un fluido que sigue una trayectoria con una velocidad local $f(x)$. Este fluido imaginario es llamado la fase del fluido y la trayectoria del flujo es llamado el espacio fase. El fluido se dirige hacia la derecha si $f(x) > 0$, y hacia la izquierda si $f(x) < 0$. Para encontrar la solución a $\dot{x} = f(x)$, empezaremos con la condición inicial x_o , y considerando una partícula hipotética (conocida como punto fase) en x_o y vemos como es el movimiento a través del fluido. Posteriormente desplaza respecto al tiempo, el punto fase se mueve a lo largo del eje X , acorde a la función $x(t)$. Esta función se llama trayectoria basada en x_o , y representa la solución de la ecuación diferencial con condición inicial. La imagen anterior nos muestra la trayectoria cualitativa del sistema.

La aparición del espacio fase es controlada por punto fijos x^* definidos por $f(x^*) = 0$, estos corresponden a puntos de asignación del fluido. En la Fig. 1.2, el punto sólido representa atracción y el punto blanco representa

repulsión. Es decir en término de ecuaciones diferenciales, los puntos fijos representan soluciones equilibradas (conocidas también como constantes, entonces si $x = x^*$ inicialmente, resulta que $x(t) = x^*$ para todo el tiempo). El equilibrio es definido estable si para todas las pequeñas perturbaciones se van amortiguando mientras se alejan respecto al tiempo.

Ahora comenzaremos con la clasificación de las ecuaciones diferenciales lineales, este tipo de distinción se debe a que no existe un método general para resolver algunas ecuaciones en términos de funciones elementales.

1.1. Ecuaciones Lineales

Nuestro objetivo es determinar cuando tales funciones existen, y de ser así, como encontrarlas. Para obtener alguna familiaridad y sus soluciones, consideramos primero la ecuación lineal de primer orden.

$$y' + p(x)y = g(x). \quad (1.1)$$

donde $p(x)$ y $g(x)$, son funciones continuas en un intervalo tal como $a < x < b$, que sería la región donde la ecuación se quiere integrar.

Para resolver este tipo de ecuaciones con esta estructura primero debemos elegir una función μ , conocida como factor integrante tal que si la ecuación anterior es multiplicada por $\mu(x)$, el lado izquierdo de la ecuación se transforma en la derivada $\mu(x)y$. Esto es, queremos elegir $\mu(x)$, si es posible tal que

$$\begin{aligned} \mu(x)[y' + p(x)y] &= [\mu(x)y]' \\ &= \mu(x)y' + \mu(x)y. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mu(x)$, debe satisfacer

$$p(x)y\mu(x) = y\mu'(x).$$

Suponiendo por el momento que $\mu(x) > 0$, y dividiendo entre μy , obtenemos

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = [\ln \mu(x)]' = p(x).$$

Por lo tanto

$$[\ln \mu(x)] = \int^x p(t)dt,$$

y finalmente

$$\mu(x) = \exp\left[\int^x p(t)dt\right],$$

ahora que ya obtuvimos $\mu(x)$, volvemos a la ecuación (1.1) y la multiplicamos por $\mu(x)$, se obtiene

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)g(x).$$

Por lo tanto

$$\mu(x)y = \int^x \mu(s)g(s)ds + c.$$

ó

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int^x \mu(s)g(s)ds + c \right].$$

Para este tipo de ecuaciones tenemos una manera de construir su solución, pero la ecuación no es lineal, encontrar una solución no es inmediato e incluso no hay garantía de la existencia de su solución. Continuando con el caso lineal tomamos

$$y' + 4y = e^x.$$

Vemos que la función es una ecuación diferencial lineal, vamos a resolver para $\mu(x)$, es decir

$$\mu(x) = \exp \left[\int 4dx \right] = e^{4x},$$

Ahora lo vamos a multiplicar por la primera ecuación diferencial del ejemplo

$$e^{4x}y' + e^{4x}4y = e^{5x}.$$

Ahora escribimos la ecuación con la definición de la antiderivada

$$[ye^{4x}]' = e^{5x}.$$

Proseguimos a resolver la ecuación integrando ambos lados

$$ye^{4x} = \int e^{5x} = \frac{1}{5}e^{5x} + c,$$

$$y = \frac{1}{5}e^x + ce^{-4x}$$

y así obtenemos la solución.

1.2. Ecuaciones Separables

La ecuación (1.1) es un caso particular de otra ecuación, en este se puede tener funciones no lineales en y , aunque el método para resolverla es similar. Esta puede ser dado por

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

El método a seguir, es tomar a la ecuación $M(x, y) = -f(x, y)$ y $N(x, y) = 1$, este es sólo uno de los tantos métodos que existen. Tomaremos el caso más simple, esto ocurre cuando M depende solamente de x y N solamente de y , es decir:

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

y se dice que es una ecuación separable siempre y cuando se pueda escribir de la siguiente forma diferencial:

$$M(x)dx = -N(y)dy.$$

Luego suponemos que existen dos funciones, las llamaremos H_1 y H_2 , que a su vez son las antiderivadas de M y N respectivamente:

$$H_1'(x) = M(x), \quad H_2' = N(y).$$

Ahora la ecuación se ve la siguiente forma:

$$H_1'(x) + H_2' \frac{dy}{dx} = 0. \quad (1.2)$$

La ecuación (1.2) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx} [H_1(x) + H_2(y)] = 0.$$

Integrando la ecuación obtenemos la solución de la ecuación diferencial.

$$H_1(x) + H_2(y) = c.$$

Donde c es una constante arbitraria, si existe una función $y = \phi x$ que satisfaga la ecuación anterior decimos que es una solución, es decir la ecuación anterior es la solución expresada de manera implícita. Tomemos

$$(1 + y) + (1 + x) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Esta ecuación se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{1 + y} = -\frac{dx}{1 + x}.$$

Integrando obtenemos

$$\ln(1+y) = -\ln(1+x) + C.$$

$$y = e^c e^{\frac{1}{1+x}} - 1.$$

1.3. Ecuaciones Exactas

El estudio de ecuaciones exactas es muy enriquecedor para las ecuaciones diferenciales ordinarias, empecemos con una definición.

Definición 1.2. Una ecuación diferencial se llama exacta, si se presenta en la forma

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0.$$

donde las derivadas parciales $\frac{\partial M}{\partial y}$ y $\frac{\partial N}{\partial x}$ son iguales. Eso es equivalente a decir que existe una función ψ tal que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) = N(x, y).$$

Sabemos que ψ cumple con $\psi(x, y) = c$, se define de manera implícita a $y = \phi(x)$ como una función derivable de x . Entonces

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \psi[x, \phi(x)] N(x, y).$$

Así la ecuación diferencial pasa a ser

$$\psi(x, y) = c,$$

donde c es una constante arbitraria. Pero primeramente para poder usar este método debemos saber si la ecuación diferencial es exacta. Una ecuación

diferencial es exacta en R si y sólo si

$$M_y(x, y) = N_x(x, y),$$

donde los subíndices indican la derivada respecto a la variable x y y , tal cual sea el caso. Es decir, existe una función ψ que satisface las ecuaciones

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \quad \psi_y(x, y) = N(x, y).$$

Ejemplo:

$$(y \cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y - 1)y' = 0.$$

Es fácil ver que

$$N_x(x, y) = \cos x + 2xe^y = M_y(x, y).$$

Esto nos indica que la ecuación diferencial es exacta. Por tanto existe una función $\psi(x, y)$ tal que

$$\psi_x(x, y) = y \cos x + 2xe^y,$$

$$\psi_y(x, y) = \sin x + x^2e^y - 1.$$

Al integrar la primera parte de estas ecuaciones el resultado es

$$\psi(x, y) = y \sin x + x^2e^y + h(y),$$

y la derivamos respecto a y obtendremos la derivada de ψ_y

$$\psi_y(x, y) = \sin x + x^2e^y + h'(y) = \sin x + x^2e^y - 1,$$

por lo tanto $h'(y) = -1$, y $h(y) = -y$, es decir la función que deseamos de ψ

$$\psi(x, y) = y \operatorname{sen} x + x^2 e^y - y.$$

1.4. Factor Integrante

Existen ecuaciones diferenciales que no son exactas pero pueden ser multiplicadas por un factor, integrando y , así convertirle en una ecuación diferencial exacta. Se toma la ecuación diferencial siguiente:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

la multiplicamos por una función μ , tal que la ecuación resultante sea exacta,

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0.$$

La ecuación es exacta si y solo si, se cumple la siguiente condición,

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x.$$

Dado que M y N son funciones dadas, entonces la función cumple su cometido, el cual es volver una ecuación diferencial inexacta en una exacta, eso significa que para resolverla, nos remontamos al método de ecuación diferencial exacta.

Ejemplo:

$$(x + y^2)dx - 2xydy = 0 \tag{1.3}$$

Verificamos si la ecuación diferencial es exacta, donde $M = x + y^2$, $N = -2yx$

$$(\mu M)_y = 2y, \quad (\mu N)_x = -2y.$$

Por lo visto, no se trata del caso exacto, por lo tanto procedemos a la búsqueda del factor integrante

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y + 2y}{-2xy} = -\frac{2}{x}.$$

A nuestro resultanto le llamaremos

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = -\frac{2}{x}.$$

Por lo tanto el factor integrante es $\mu = \frac{1}{x^2}$, ahora vamos a multiplicar nuestro resultado por la ecuación inicial (1.3), la cual quedaría de la siguiente forma

$$\frac{x + y^2}{x^2} dx - \frac{2xy}{x^2} dy = 0.$$

Ahora la ecuación ya es exacta

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x = \frac{2y}{x^2}.$$

1.5. Ecuaciones Homogéneas

Definición 1.3. Una ecuación diferencial de primer orden se denomina homogénea si puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right), \quad (1.4)$$

donde $F(\frac{y}{x})$, es una función que depende únicamente del cociente $\frac{y}{x}$.

Para resolverla definimos una función de y tal que $y = ux$. Entonces al sustituir obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v,$$

y la ecuación (1.4), se convierte en

$$x \frac{dv}{dx} + v = F(v),$$

separando variables tenemos que

$$\frac{dv}{x} = \frac{dv}{F(v) - v}.$$

Integrando esta ecuación obtendremos,

$$\ln x = \int \frac{dv}{F(v) - v} + \ln C,$$

haciendo varios pasos algebraicos llegamos a

$$x = C \exp \left(\int \frac{dv}{F(v) - v} \right) = C \phi(v),$$

regresando a las variables originales obtenemos

$$x = C \phi \left(\frac{y}{x} \right).$$

Ejemplo:

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$

Escribiremos la ecuación de la siguiente forma, con la finalidad de que podamos ver más claramente de que se trata de una ecuación homogénea

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x} \right)^2} + \frac{y}{x}.$$

Ahora haremos la sustitución de $y = ux$, entonces $y' = xu' + u$, sustituyendolo en la ecuación diferencial anterior tenemos

$$xu' = \sqrt{1 - u^2}.$$

Ahora se reduce al caso de ecuación diferencial separable, obtenemos

$$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Integrando la ecuación diferencial separable, nos da por resultado

$$\arcsen u = \ln x + \ln C,$$

en otras palabras se puede escribir la respuesta como función de u , pero nosotros inicialmente comenzamos con la dependencia de x y y , por lo tanto regresando a nuestras variables originales tenemos

$$\arcsen \frac{y}{x} = \ln Cx,$$

es decir la solución final se puede ver como

$$y = x \sen(\ln Cx).$$

Los elementos presentados en esta sección, aunque básicos, nos permitieron introducir algunas ideas que sirvan como fondo para el desarrollo de la siguiente sección.

Capítulo 2

Sistemas de EDO's.

2.1. Introducción

Los sistemas dinámicos son de gran utilidad en diferentes ramas del conocimiento, en biología a través del modelo presa-depredador se ha logrado entender las regiones de equilibrio en diferentes áreas de la física, el entendimiento de fenómenos como el caos, presente en el clima no habría sido posible sin esta herramienta mediante el análisis del conocido sistema de Lorenz. En gravitación, más específicamente en áreas de la cosmología y modelos estelares se ha empleado de manera satisfactoria, es por eso que en este capítulo hablaremos acerca de sistemas de ecuaciones diferenciales para el caso $n \geq 2$.

Definición 2.1. Un sistema de ecuaciones diferenciales es una colección de n ecuaciones diferenciales interrelacionadas de la forma

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

. .

. .

$$\dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Aquí las funciones f_j son de valores reales de $n + 1$ variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ y t . También siempre asumiremos que la función $f_j \in C^\infty$. Esto significa que las derivadas parciales de todos los ordenes de f_j existen y son continuas. Para simplificar la notación, usaremos la notación de vector:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

es decir, nuestro sistema se puede escribir más concisamente como

$$X' = F(t, X)$$

donde

$$F(t, X) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Las soluciones correspondientes podrían ser visualizadas como trayectorias que fluyen en un espacio de n dimensiones con coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$. El sistema de ecuaciones es llamada autónomo si ninguna de las f_j tiene dependencia de t , entonces el sistema se vería de la forma $X' = F(X)$.

Definición 2.2. El sistema lineal de dos dimensiones se expresa en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde a, b, c y d son parámetros. Suele escribirse como $\dot{x} = A\vec{x}$, donde la

matriz A y el vector $\vec{x}$ estan dados por:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad y \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Cuando $\vec{x} = 0$, entonces $\dot{\vec{x}} = 0$, se dice entonces que $\vec{x}^* = 0$, es un punto fijo del sistema, y de hecho lo es para A arbitraria. Los vectores de estado $\vec{x}^*$ que cumplen con la condición $\dot{\vec{x}} = 0$, se llaman puntos fijos. En 2D, la dinámica de los sistemas se visualizan en el plano fase (x, y) . Para mostrar como se aborda el problema de encontrar una solución de (2.1) y su conexión con la mecanica consideremos el siguiente ejemplo. Analicemos las soluciones del oscilador armónico simple en el plano fase

$$\ddot{x} = -w^2 x$$

donde $w^2 = [\frac{k}{m}]^{\frac{1}{2}}$. Si se define $y = \dot{x}$, la ecuación se escribe como un sistema de dos ecuaciones de primer orden

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -w^2 x \end{aligned}$$

Y se puede expresar de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e imponiendo las condiciones iniciales $x_o = x(t=0) = 1$ y $y_o = y(t=0) = 0$ se pueden construir las trayectorias en el plano fase. La solución general es

$$x(t) = A \sin wt + B \cos wt$$

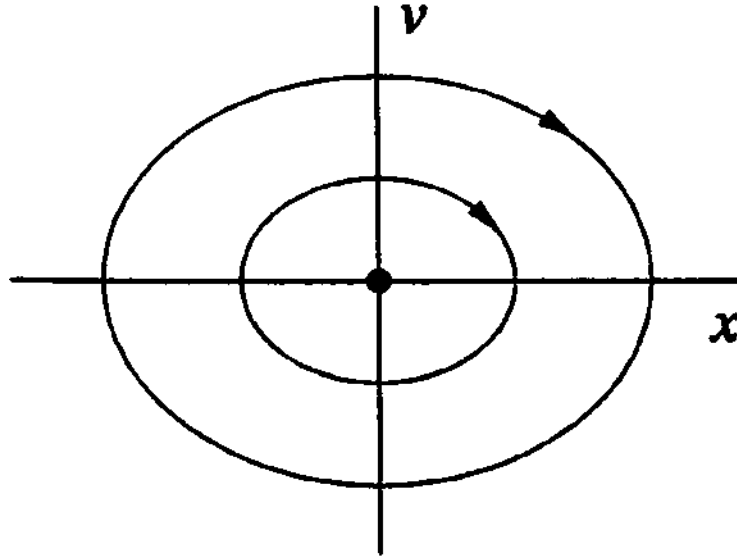


Figura 2.1: Órbitas estables del caso armónico. Fuente [2]

Por la condiciones iniciales $B = 1$ y $A = 0$, porque la solución al sistema es:

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos wt \\y(t) &= -w \operatorname{sen} wt\end{aligned}$$

La estrategia común para verificar las trayectorias es

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{w^2 x}$$

integrando esta ecuación de acuerdo a lo expuesto en el capítulo anterior, de donde es fácil notar que las trayectorias son elipses, Fig. 2.1.

$$w^2 x dx = -y dy \Rightarrow \frac{1}{2} w^2 x^2 + \frac{1}{2} y^2 = C$$

Algunas veces tenemos sistemas de ecuaciones fáciles de resolver de manera exacta, como en el caso del oscilador armónico simple, sin embargo en la mayoría de los casos realistas, esto no ocurre, la descripción planteada del comportamiento de la solución en el espacio fase, resulta de gran utilidad

cuando la solución no puede construirse de manera analítica. La descripción de la dinámica presente en un sistema de 2x2 es caracterizado a continuación para el caso de un sistema con coeficientes constantes.

Para esto vamos a ver varios ejemplos ilustrativos donde aparezcan varios escenarios y las trayectorias. Analicemos

$$\dot{x} = A\vec{x}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde también la podemos visualizar como un sistema desacoplado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \tag{2.2}$$

la solución es

$$\begin{aligned} x(t) &= x_o e^{at} \\ y(t) &= y_o e^{-t} \end{aligned}$$

Una vez que nosotros ya tenemos la solución para este sistema, vamos a ver como se comportan las solución en el espacio fase para diferentes valores del parámetro a .

Para el caso donde $a = -1$, las soluciones estan dadas por

$$\begin{aligned} x(t) &= x_o e^{-t} \\ y(t) &= y_o e^{-t} \end{aligned}$$

el trazo de las trayectorias de la solución.(ver b en Fig.2.2). El origen se comporta como un atractor hacia el punto de origen.

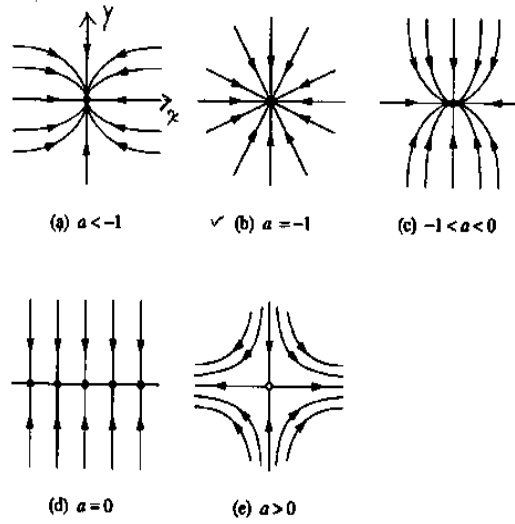


Figura 2.2: Casos de la ecuación 2.2, variando el parámetro a . Fuente [2]

Caso $a = 0$, donde las soluciones estan dadas por: (ver d en Fig. 2.2). El eje x se comporta como un atractor para diversos valores.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_o \\ y(t) &= y_o e^{-t} \end{aligned}$$

Caso $a > 0$, donde las soluciones se comportan como atractor y repulsor para diferentes rectas (ver e en Fig. 2.2).

$$\begin{aligned} x(t) &= x_o e^{at} \\ y(t) &= y_o e^{-t} \end{aligned}$$

Un punto que tiene el comportamiento de $\vec{x}^* = 0$ se llama punto silla (saddle-node).

- El eje y se llama variedad estable es decir $\vec{x}^* = \vec{0}$, es un atractor para las condiciones $(0, y_o)$.
- El eje x se llama variedad inestable porque x^* es un repulsor para las condicones iniciales $(x_o, 0)$ excepto en el origen.

Caso $a < -1$, aquí se puede notar el comportamiento de x , el tiende a cero más rápido que y (ver a de Fig.2.2).

$$\begin{aligned}x(t) &= x_o e^{at} \\ y(t) &= y_o e^{-t}\end{aligned}$$

Caso $-1 < a < 0$, (ver c de Fig 2.2). Este tipo de dinámica se conoce como atractor global, ya que todas las trayectorias tienen el mismo destino, tendiendo todo a 0.

En las vecindades de un punto fijo, un sistema $\dot{y} = \vec{f}(\vec{y})$ puede analizarse a través del comportamiento del término lineal, es decir su descripción esta dada por la ecuación $\dot{\vec{y}} = A\vec{y}$, donde A es una matriz. Existen diferentes maneras de abordar esta solución, una de estas es proponer una solución del tipo $\vec{x} = \exp(\lambda t)\vec{u}$, donde λ determina las propiedades temporales en la solución y $\vec{u}$ representa algún o algunos vectores constantes según sea el caso. Sustituyendo la solución que propusimos en la ecuación de $\vec{x}$ tenemos:

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t}\vec{u} = Ae^{\lambda t}\vec{u}$$

$$\lambda e^{\lambda t}\vec{u} = Ae^{\lambda t}\vec{u}$$

entonces

$$\lambda\vec{u} = A\vec{u}$$

es la ecuación de valores propios para A . Suponiendo un sistema de 2x2, sea A igual a

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

se tiene que la solución debe cumplir con la ecuación característica:

$$p(\lambda) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

es decir

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

$$\lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + |A| = 0$$

donde $\text{Tr}(A)$, es la traza de la matriz A , es decir, $\text{Tr}(A) = a + d$ y $|A|$ es el determinante de A , que es lo mismo que $|A| = ad - bc$. Utilizando la ecuación general para resolver una ecuación de segundo grado, obtenemos

$$\lambda = \frac{\text{Tr}(A) \pm \sqrt{(\text{Tr}A)^2 - 4|A|}}{2}.$$

En el caso general hay dos valores propios λ_1 y λ_2 y con ello dos vectores propios $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$. La solución general se vería de la forma,

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{u}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{u}_2$$

Definición 2.3. La clasificación de los autovalores de A se interpreta de la siguiente forma, si los autovlares de A son distintos entre sí y distintos de cero, se puede decir lo siguiente:

1. Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, entonces es un nodo asintóticamente estable.
2. Si $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, entonces es un nodo inestable.
3. Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, entonces es un punto de silla.
4. Si λ_1 no es real y $\text{Re}(\lambda_1) < 0$, entonces es un foco asintóticamente estable.
5. Si λ_1 no es real y $\text{Re}(\lambda_1) > 0$, entonces es un foco inestable.

2.2. Puntos de Estabilidad

Un punto fijo x^* se llama atractor global, si es el destino de todas las trayectorias iniciando en todo el plano fase.

Un punto fijo x^* atractor puede tener también un dominio de atracción acotado. Y x se dice que es un atractor si las trayectorias del dominio de atracción tiende a x^* cuando $t \rightarrow \infty$. Como se puede ver en la Fig. 2.1, son atractores estables, esto quiere decir que para cualquier tipo de solución, tomaran la trayectoria de un elipse, y si nosotros hacemos una pequeña perturbación en las condiciones generales, el sistema diferencial se comportaría de forma similar ya que es estable.

2.3. Puntos de Inestabilidad

Se define punto fijo inestable cuando no es estable ó punto silla definido a continuación. Para este caso un claro ejemplo de como se comportan las soluciones cuando cambias el parámetro de un sistema de ecuaciones, es el mencionado en la ecuación (2.2) ya que al momento de variar el parámetro nosotros podemos ver soluciones muy distintas para cada caso, es decir es perceptible a las condiciones generales, ya mencionamos todos sus casos.

2.4. Puntos Silla

Un punto que tiene el comportamiento de $x = 0$ se llama punto silla (saddle - node).

- El eje y se llama variedad estable es decir $x = 0$ es un atractor para las condiciones iniciales $(0, y_o)$.
- El eje x se llama variedad inestable porque x^* es un repulsor para las condiciones iniciales $(x_o, 0)$ excepto el origen. Un sistema para ver el comportamiento es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + y \\ \dot{y} &= 4x - 2y\end{aligned}$$

sujeto a las condiciones iniciales $x_o = 2$ y $y_o = -3$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

donde la $TrA = -1$ y $|A| = -6$ y los vectores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -3$, al momento de encontrar sus vectores propios asociados vemos que

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

No importa si $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son normalizados, al final de cuentas las condiciones iniciales determinan los valores de c_1 y c_2 . Entonces la solución general del sistema es

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{2t} \vec{u}_1 + c_2 e^{-3t} \vec{u}_2 = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Usemos ahora las condiciones iniciales, es decir

$$\vec{x}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

o equivalentemente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

multiplicando por la matriz inversa resulta $c_1 = 1$ y $c_2 = 1$, finalmente nuestra solución particular es

$$\vec{x}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

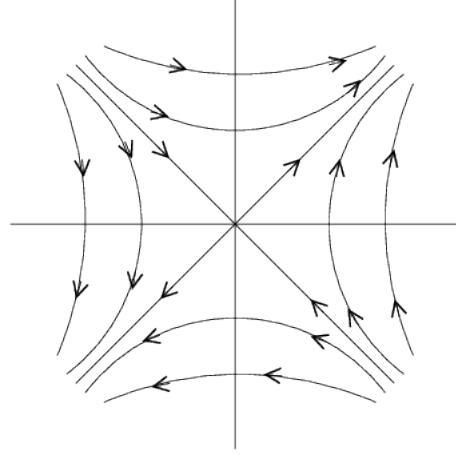


Figura 2.3: Podemos ver como las trayectorias tienden a una recta estable e inestable respectivamente. Fuente [2]

De aquí podemos ver que se genera una recta de variedad inestable le llamaremos $\vec{u}_1$ y otra $\vec{u}_2$ genera una variedad estable como se ve en la Fig 2.3.

Ahora vamos a ver la clasificación de las distintas posibilidades. Una matriz cuadrada A se dice que es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal, es decir, si mediante un cambio de base se puede reducir a su forma diagonal. En otras palabras, la matriz se puede visualizar de la siguiente forma $A = PDP^{-1}$, en donde P representa la matriz invertible cuyos vectores propios se obtienen de A y D representa la matriz diagonal formada por los valores propios de A .

La matriz A es semajante ortogonalmente a una matriz diagonal, es decir, si la matriz P es ortogonal entonces la matriz A es diagonalizable ortogonalmente, es decir $A = PDP^t$, donde P^t es la matriz transpuesta. El teorema espectral garantiza que cualquier matriz cuadrada, simétrica y con coeficientes reales es ortogonalmente diagonalizable. En este caso P está formada por una base ortonormal de vectores propios reales. La matriz P a su vez es ortogonal y los vectores filas de P^{-1} , son vectores columna de P .

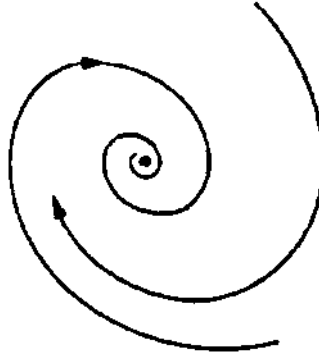


Figura 2.4: Trayectoria del espacio fase para el caso amortiguado. Fuente [2]

Tomando esto en cuenta ahora vamos a trabajar con una matriz diagonal, la cual es la siguiente:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Ya que vimos que cualquier matriz con coeficientes reales es ortogonalmente diagonalizable, ahora veremos la clasificación de las mismas, a través de sus valores propios.

En esta ocasión la traza y el determinante serán de esta forma

$$\text{Tr}A = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{y} \quad |A| = \lambda_1 \lambda_2$$

- Si el determinante de A es $|A| = \lambda_1 \lambda_2 < 0$, esto significa que los respectivos valores propios de $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ generan una variedad estable y otra inestable, entonces nosotros estamos hablando de un punto silla.

- Si el determinante de A es $|A| > 0$, esto tiene dos posibilidades. - λ_1 y λ_2 son reales. - λ_1 y λ_2 son imaginarios.

En cualquiera de los dos casos la region que importa será la siguiente:

$$(\text{Tr}A)^2 - 4|A| > 0$$

En este caso λ_1 y λ_2 tienen el mismo signo pues $|(TrA)^2 - 4|A|| < TrA$, esto implica que es un repulsor cuando λ_1 y λ_2 son positivos y es un atractor cuando λ_1 y λ_2 son negativos.

- Si $\lambda_1 = \lambda_2^*$, (donde a^* representa un número complejo), se tiene el caso del oscilador armónico amortiguado (Fig. 2.4) y se dice que las trayectorias son espirales atractores, $Re(\lambda_1) < 0$ y son espirales repulsores si $Re(\lambda_1) > 0$.

- En el caso límite donde $(TrA)^2 - 4|A| = 0$, corresponde al caso en el que tenemos un solo valor propio asociado.

- Hay dos casos, cuando el valor propio es negativo y el otro cuando es positivo, se le conocen como comportamiento estrella.

- La estabilidad de estrellas o espirales queda determinado por el signo de la traza (TrA).

- Si $TrA > 0$, hay una estabilidad.

- Si $TrA < 0$, hay una inestabilidad.

- Si $|A| > 0$ y $TrA = 0$, en tal caso los valores propios λ_1 y λ_2 son imaginarios, las trayectorias son cerradas, se dice entonces que son centros. La clasificación se encuentran en la Fig 2.5.

2.5. Linealización

En esta sección hablaremos sobre la técnica de linealización para un sistema dimensional. La esperanza de esto es que podamos aproximar el espacio fase cerca de un punto fijo que corresponda al sistema lineal.

Valores propios	Descripción de las raíces	Tipo de punto crítico	Estabilidad
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	reales, distintas, ambos signos positivos	nodo	inestable
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	reales, distintas, ambos signos negativos	nodo	estable
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	reales, distintas, signos opuestos	punto silla	inestable
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, vectores propios independientes	reales, repetidas, signos positivos	nodo correcto o punto neutro	inestable
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, vectores propios independientes	reales, repetidas, signos negativos	nodo correcto o punto neutro	estable
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, vectores propios inexistentes	reales, repetidas, signos positivos	nodo incorrecto	inestable
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, vectores propios inexistentes	reales, repetidas, signos negativos	nodo incorrecto	estable
$\lambda = a \pm ib$, $a > 0$	complejo, parte real positiva	espiral	inestable
$\lambda = a \pm ib$, $a < 0$	complejo, parte real negativa	espiral	estable
$\lambda = a \pm ib$, $a = 0$	solo parte imaginaria	centro o elipse	estable

Figura 2.5: Clasificación en relación a los autovalores para un sistema 2x2. Fuente [1]

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

y supongamos que (x^*, y^*) , es un punto fijo, es decir que

$$f(x^*, y^*) = 0, \quad g(x^*, y^*) = 0.$$

Sea $u = x - x^*$, $v = y - y^*$. Denotamos a las componente de una pequeña perturbación del punto fijo. Para ver el crecimiento o decaimiento, nosotros verificamos las ecuaciones diferenciales para u y para v . Veamos que la primer ecuación

$$\dot{u} = \dot{x}$$

$$\dot{u} = f(x^* + u, y^* + v)$$

$$\dot{u} = f(x^*, y^*) + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv)$$

$$\dot{u} = u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv)$$

de donde las parciales por comodidad no se menciono que estaban aplicadas al punto fijo (x^*, y^*) , estos ya son números no funciones y el término $O(u^2, v^2)$ denota el término cuadrático en u y v . Los términos cuadráticos son muy pequeños. Ahora realizaremos el estudio para el punto fijo considerando únicamente los términos lineales, dado que los términos cuadráticos son despreciables.

$$\dot{v} = u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv)$$

Lo que nosotros tenemos es

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

donde A es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)}$$

es llamada la matrix Jacobiana en el punto fijo (x^*, y^*) . Esta es la matriz constante que debe analizarse para determinar el comportamiento del sistema en la vecindad del punto fijo, y dependiendo de sus valores propios se tendrán las dinámicas mencionadas en la sección anterior. Con estos elementos como fondo matemático en la siguiente sección nos enfocaremos a un problema concreto relacionado con las ecuaciones de los modelos estelares para el caso Newtoniano, Relativista y de Rastall.

Capítulo 3

Curiosidades Matemáticas en sist. dinámicos

El entender el comportamiento estelar requiere de diferentes enfoques, uno de ellos que tiene que ver con las posibles ecuaciones de estado, emplea como principal herramienta a la física estadística, para poder definir variables macroscópicas como presión P , densidad ρ y temperatura T , entre otras. Por ejemplo un proceso politrópico, está caracterizado por la relación $PV^n = C$ donde C es una constante y n es llamado el índice politrópico. Otra relación es la ecuación de “MIT -Bag” dada para el comportamiento de estrellas de Quarks, en la obtención de esta, se utilizaron elementos de física de partículas. Otras maneras de tener una posible ecuación de estado es el empleo de simetrías que puede tener el sistema y en particular las homologías, cuyo origen es matemático, sin embargo resulta novedoso como desde dos perspectivas pueden llegar a una misma conclusión. Y este enfoque matemático es considerado en el presente trabajo. Basados en un trabajo previo [3] en el que se obtiene una ecuación de estado a partir de homologías para los sistema Newtoniano y Relativista para la descripción del interior de las estrellas, nosotros obtenemos una ecuación de estado en el caso de la teoría de Rastall.

En este capítulo analizamos el caso Newtoniano y el caso de relatividad general de sistemas estelares, vamos a examinar estos casos especiales de interés donde resulte una ecuación de estado definida. Esta ecuación de estado se obtiene puramente de argumentos físicos que son muy distintos a los esperados por el aspecto gravitacional del sistema.

Por ejemplo [4, 5] en el caso límite el cual esta constituido por partículas con energías relativistas que hacen que su masa sea despreciable cuando se encuentran en reposo, se puede obtener la ecuación de estado de una gas ideal de Fermi a temperatura 0 grados, de la forma $p = \frac{1}{3}c^2\rho$, donde p es la presión isotrópica y ρ es la densidad de masa-energía, y por lo tanto determina la estructura de una estrella de neutrones estática ideal [6, 7].

Para la estrellas newtonianas en equilibrio, es físicamente posible decir que debe existir una familia de soluciones, los miembros individuales están relacionados cada uno por la transformación de la forma $r \rightarrow \vec{r} = ar$, $\rho \rightarrow \vec{\rho} = b\rho$, y $M \rightarrow \vec{M} = cM$, donde M es la masa total encerrada con un radio r , a , b y c son constantes. Chandrasekhar se refiere al cambio de escala como una transformación homológica, y él demuestra que para ambas esferas de gas politrópicas e isotrópicas homólogas existen familias de soluciones. En la segunda parte, examinamos las consecuencias de un caso homológico donde debe existir una familia de soluciones, descubrir los requisitos que se necesitan, ya sea una ecuación de estado politrópica, baritrópica o isotérmica es decir, una ecuación de estado que usualmente se postula por consideración de aspectos físicos extraños del problema.

Debido a que la coordenada de r no está bien definida en relatividad general, el procedimiento de reescalamiento no es necesario, esta justificado

por medio de la definición homóloga de familia de soluciones. Sin embargo parece razonable pensar en una familia simple de soluciones, cuyos miembros individuales están relacionados por forma más general por transformaciones de la forma $r \rightarrow \vec{r}(r)$, $\rho \rightarrow \vec{\rho}(\rho)$ y $M \rightarrow \vec{M}(M)$. De hecho, las únicas transformaciones permitidas hacen una simple reescalamiento. Como mostraremos más adelante, se deduce que en este caso la ecuación de estado es necesariamente del tipo "ley de γ ", como $p = (\gamma - 1)\rho$, donde γ es una constante; esta es la ecuación de estado más relevante para la estructura relativista.

Hasta cierto punto, nosotros podríamos afirmar que en cada caso las matemáticas conocen la física de la situación. Si esto es significativo o no, sigue siendo un asunto puramente especulativo, pero es tentador sugerir que es un reflejo natural de las matemáticas pueden jugar en sistemas físicos [8].

Posterior, exhibiremos un diagrama cualitativo que representa la familia homóloga de soluciones en el caso relativista. Esto se logra observar cuando $p = (\gamma - 1)\rho$, las ecuaciones de la estructura forman un sistema autónomo de dos ecuaciones diferenciales ordinarias, para la cual la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias se puede aplicar. Este diagrama se compara con diagramas similares obtenidos para las familias de soluciones homólogas en el caso newtoniano, de las cuales Chandrasekhar ha dado tratamiento exhaustivo. Hay algunos comentarios especiales hechos de la solución de Misner y Zapsky [9].

3.1. Familias Homológicas de soluciones

En las ecuaciones diferenciales, la teoría de grupos de Lie se emplea generalmente para investigar sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, en lugar de ordinarias. Esto ocurre porque un sistema genérico de ecuaciones diferenciales parciales siempre admite un grupo no trivial, mientras que en

las ecuaciones diferenciales ordinarias esto no siempre ocurre, el problema del descubrimiento del grupo es equivalente al problema de integrar el sistema original [10].

Se puede demostrar que el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{du^k}{dx} = f^k(x, u) \quad k = (1, 2, \dots, m),$$

donde $u = (u^1, u^2, \dots, u^m)$, es invariante bajo la acción del operador infinitesimal $X = \xi(x, u) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + \eta^k(x, u) \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \right)$ si y sólo si la siguiente ecuación es satisfecha:

$$\frac{\partial \eta^k}{\partial x} + f^j \frac{\partial \eta^k}{\partial u^j} - f^k \frac{\partial \xi}{\partial x} - f^k f^j \frac{\partial \xi}{\partial u^j} = \xi \frac{\partial f^k}{\partial x} + \eta^j \frac{\partial f^k}{\partial u^j}, \quad k = (1, 2, \dots, m) \quad (3.1)$$

En el caso particular donde X genera transformaciones cuasi homólogas, (es decir transformaciones de la forma $x \rightarrow \vec{x}(x)$, $u^j \rightarrow \vec{u}^j(u^j)$, donde no tomamos en cuenta la suma sobre j), esto requiere $\xi = \xi(x)$ y $\eta^j = \eta^j(u^j)$, sin tomar en cuenta la suma sobre j .

Como resultado de la ecuación (3.1), tenemos

$$\frac{dn^k}{du^k} u^k - \frac{d\xi}{dx}(x) = X(\ln f^k) \quad (3.2)$$

sin tomar la suma sobre j . La forma del lado izquierdo de la ecuación anterior tiene ciertas restricciones en el conjunto de posibles transformaciones cuasi-homológicas. En la siguiente sección aplicaremos esta teoría para el sistema de ecuaciones que describe el comportamiento estelar visto desde la teoría Newtoniana.

3.2. Estrella estática Newtoniana

La estructura de las ecuaciones para un estrella Newtoniana en equilibrio es

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM}{r^2}\rho \quad (3.3)$$

y

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 p \quad (3.4)$$

con las condiciones de $p = 0$ cuando $\rho = 0$ y $M = 0$ cuando $r = 0$.

Asumiremos en este caso que $p \geq 0$. Si p es independiente de r , entonces de la ecuación (3.4), tenemos que $M = 0$ ó $\rho = 0$. De la ecuación (3.3) se deduce que $\rho \equiv 0$, por lo tanto para cualquier caso $p = 0$, esto nos dice que p y M son constantes. Por las condiciones mencionadas obtenemos que $p = \rho = M = 0$, esto corresponde a la solución trivial del problema donde no hay estrella. Entonces proponemos que $p' \rho \neq 0$, donde la prima denota derivada con respecto a r .

Reescibiendo las ecuaciones obtenemos

$$\frac{d\rho}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2 p'} \quad (3.5)$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (3.6)$$

Al determinar la transformación homóloga aplicando las expresiones (3.6) y (3.5) en (3.2) con

$$X = \xi(r) \frac{\partial}{\partial r} + \eta^1(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} + \eta^2(M) \frac{\partial}{\partial M}$$

encontramos que

$$\frac{dn^1(\rho)}{d\rho} - \frac{d\xi(r)}{dr} = -\frac{2\xi(r)}{r} + \eta^1 \frac{d}{dp} \left[\ln \left(\frac{\rho}{p'} \right) \right] + \frac{\eta^2(M)}{M}, \quad (3.7)$$

$$\frac{d\eta^2(M)}{dM} - \frac{d\xi(r)}{dr} = \frac{2\xi(r)}{r} + \frac{\eta^1(\rho)}{\rho}. \quad (3.8)$$

De la dependencia en M en la ecuación (3.8), se puede obtener que $\eta^2(M) = aM$, donde a es una constante. Ahora del resultado de sumar (3.7) y (3.8), podemos obtener $\xi(r) = br + c$, donde b y c son constantes. Sustituyendo (3.7) en (3.8), resulta que

$$c = 0,$$

$$\begin{aligned} \eta^1(\rho) &= (a - 3b)\rho, \\ (a - 3b)\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\ln \left(\frac{\rho}{p'} \right) \right] &= -2b. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Luego, de la ecuación (3.9), si $a = 3b$ tenemos $b = 0$ y por lo tanto $a = 0$, se puede ver también que $\xi = \eta_1 = \eta_2 = 0$, entonces obtenemos identidad trivial de la transformacion de $(X = 0)$. Si $a \neq 3b$, entonces podremos resolver la ecuación (3.9), la solución obtenida es

$$p = A\rho^{\frac{2(a-2b)}{(a-3b)}} + B \quad (a \neq 2b, a \neq 3b) \quad (3.10)$$

Considerando $(a = 2b, a \neq 3b)$, resulta:

$$p = A \ln \rho + B,$$

donde A y B son constantes. Si $a = b$, entonces reescribiremos (3.10) como

$$p = A\rho^{1+\frac{1}{n}} + B,$$

donde el índice politrópico, $n = (a - 3b)/(a - b) \neq -1$. Para cumplir con la condición de que $\rho = 0$ cuando $p = 0$, tenemos que $B = 0$ y $\frac{1}{n} > -1$, (es decir, $n > 0$ ó $n < -1$).

Luego veremos el caso cuando $a = b$, de (3.10) tenemos que

$$p = A\rho + B \quad (3.11)$$

y de nuevo por la misma condición $B = 0$, es (3.10) la forma usual de un gas politrópico, además (3.11) es la ecuación de estado para un gas isotérmico, esto significa que mantiene su temperatura. Se ve claramente que (3.11) puede ser obtenida formalmente de (3.10) cuando n tiende al infinito.

En el caso general donde $a \neq b$, $a \neq 2b$, y $a \neq 3b$, o en caso especial donde $a = 2b \neq 3b$ (es decir, cuando $n = -1$), vemos que X es igual a :

$$X = \frac{b}{n-1} \left[(n-1)r \frac{\partial}{\partial r} - 2n\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + (n-3)M \frac{\partial}{\partial M} \right]$$

donde se hizo la transformación de $a = (n-3)b/(n-1)$ y $a-3b = -2nb/(n-1)$, así X es proporcional a :

$$X \approx (n-1)r \frac{\partial}{\partial r} - 2n\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + (n-3)M \frac{\partial}{\partial M}$$

Si tomamos el caso donde $a = b \neq 3b$, (es decir cuando $n \rightarrow \infty$), entonces X es proporcional a

$$X \approx r \frac{\partial}{\partial r} - 2\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + M \frac{\partial}{\partial M}$$

El operador X tiene dos invarianzas independientes. Estas son vistas como $M r^{-(n-3)/(n-1)}$ y $\rho r^{2n/(n-1)}$ si $n \neq -1$, y r y M/ρ si $n = 1$ (o alguna de las funciones independientes de estas invarianzas).

En cada caso, las transformaciones finitas generadas por X es un simple reescalamiento: $r \rightarrow fr, \rho \rightarrow g\rho, M \rightarrow hM$, donde f, g y h son constantes.

Si n es finito, tenemos que $\rho \propto \theta^2$ y $r \propto \xi$. El teorema homológico de Chandrasekhar establece que si $\theta(\xi)$ es una solución, entonces también lo será $C^{2/(n-1)}\theta(C\xi)$, donde C es una constante arbitraria. En nuestra notación esto se reduce a observar que $\rho^{(1/n)}r^{2/(n-1)}$ es invariante, o que las ecuaciones son invariantes bajo la transformación de $r \rightarrow Ar, \rho \rightarrow A^{-2n/(n-1)}\rho$ y $M \rightarrow A^{(n-3)/(n-1)}M$.

Si n es infinito, tenemos que $\rho \propto e^{-\Psi}$ y $r = \xi$; el teorema homológico establece que si $\Psi(\xi)$ es una solución, entonces también lo es $\Psi(C\xi) - 2 \ln C$, donde C es una constante arbitraria. Eso se reduce a la observación de que ρr^2 es invariante, o que las ecuaciones son invariantes bajo transformaciones $r \rightarrow Ar, \rho \rightarrow A^{-2}\rho$, y $M \rightarrow AM$.

Algunos aspectos de las propiedades grupales discutidas anteriormente son tratadas por Kurth [11], pero desde un punto de vista diferente.

3.3. Estrella Relativista

La estructura de las ecuaciones para una estrella estática en relatividad general son

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(c^2\rho + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r^2(1 - \frac{2M}{r})} \quad (3.12)$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (3.13)$$

con las mismas condiciones que el caso Newtoniano.

Si p es independiente de r , entonces de (3.12) cada $M + 4\pi r^3 p = 0$ o $p = -\rho$.

Tambien de la ecuación (3.13) obtenemos que $p = -\frac{1}{3}\rho$, así en cualquier caso, la ecuación de estado no es realista. Si $\rho = 0$, entonces $p = 0$, esto corresponde a la solución trivial donde no hay estrella. Nosotros asumiremos que $\rho p' \neq 0$.

El análisis para el caso relativista es similar al caso Newtoniano. Como se puede apreciar, la dificultad aumento considerablemente, sin embargo encontramos la expresión siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d\eta^1}{d\rho}(\rho) - \frac{d\xi}{dr}(r) = \xi(r) \frac{\partial}{\partial r} \left[\ln \frac{1}{r^2} \frac{(M + 4\pi r^3 p)}{(1 - \frac{2M}{r})} \right] \\ + \eta^1(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\ln \frac{(\rho + p)(M + 4\pi r^3 p)}{p'(\rho)} \right] + \eta^2(M) \frac{\partial}{\partial M} \left[\ln \frac{(M + 4\pi r^3 p)}{(1 - \frac{2M}{r})} \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

y

$$\frac{d\eta^2}{dM}(M) - \frac{d\xi}{dr}(r) = \frac{2\xi(r)}{r} + \frac{\eta^1(\rho)}{\rho}. \quad (3.15)$$

De la dependencia de M en (3.15), nosotros tenemos $\eta^2(M) = aM + \alpha$, donde a y α son constantes. Esto implicaría que $\eta^1(\rho) = (a - 3b)\rho$ y $\xi(r) = br + c/r^2$, donde b y c son constantes. Existen dos casos particulares,

(I) $a = b = c = \alpha = 0$, que corresponde a la transformacion identidad ($X = 0$).

(II) $a = b \neq 3b$, $c = \alpha = 0$, que corresponde a la trasformacion generada por

$$X = r \frac{\partial}{\partial r} - 2\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + M \frac{\partial}{\partial M}$$

Las cantidades M/r y ρr^2 (o alguna otra combinación lineal de P), son homologías invariables. La ecuación de estado es necesariamente $p = (\gamma - 1)c^2\rho$, donde γ es una constante. Esto pasa por la similitud con el caso del gas isotérmico considerado en el caso Newtoniano, ahora nosotros obtenemos el teorema relativista del caso:

Teorema Homológico. Para un gas isotérmico en equilibrio en relatividad general, si $p(r)$ es una solución, entonces también lo sería $C^2\rho(Cr)$, donde C es una constante arbitraria.

Esta equivalencia aparece de nuevo, observamos que ρr^2 es invariable, donde las ecuaciones invariantes bajo una transformación $r \rightarrow Ar, \rho \rightarrow A^{-2}\rho$, y $M \rightarrow AM$.

Es importante mencionar que Michalski [13] ha descubierto la transformación continua más general, la cual deja a las ecuaciones de estructura estelar invariantes en el caso no estático, es decir que hay explícitamente dependencia del tiempo, es una transformación homológica tal que $r \rightarrow Ar, \rho \rightarrow A^{-2}\rho$, y $M \rightarrow AM$, esto nos fuerza a la ecuación de estado $p = (\gamma - 1)c^2\rho$.

3.4. Estrella relativista en equilibrio

En esta parte haremos una descripción cualitativa de la estrella relativista en equilibrio, en el caso donde una familia de homólogas existe. Esto requiere utilizar la ecuación de estado $p = (\gamma - 1)c^2\rho$, donde γ es una constante.

Ahora vamos a expresar las ecuaciones (3.12) y (3.13) en términos de la transformación homológica invariante $m = M/r$ y $\mu = 4\pi\rho r^2$, es decir

$$\frac{d}{dt}\mu(t) = \frac{\mu(t)}{1 - 2m}(t) \left(-\mu(t)\gamma - \frac{(5\gamma - 4)m(t)}{\gamma - 1} + 2 \right)$$

y

$$\frac{d}{dt}m(t) = -m(t) + \mu(t)$$

donde $t = \ln r$, es decir $dt = dr/r$, también asumiremos que $p'p \neq 0$, y de la anterior ecuación podemos ver que $\gamma \neq 1$, esto por la discontinuidad que tiene en ese punto la ecuación.

Las ecuaciones (3.4) y (3.4), forman un sistema plano autónomo de ecuaciones diferenciales y uno puede ver la naturaleza de las soluciones en un diagrama en el plano $m - \mu$ (ver [12–15]).

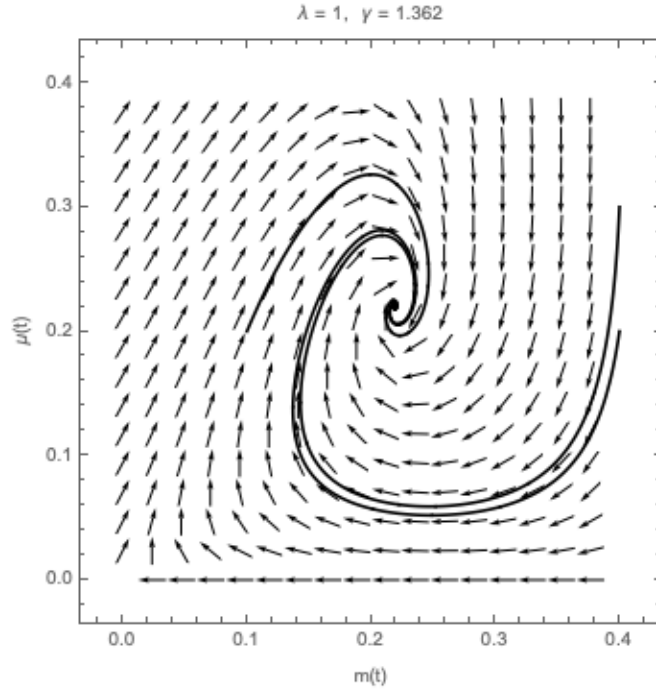
Hay dos soluciones de nuestro sistema. Una esta representada en la en la espiral de la Fig. 3.1, por el centro de la espiral, en el punto P donde $\mu = m = 2(\gamma - 1)/[(\gamma + 2)^2 - 8]$. Esto significa que

$$\rho = \frac{1}{2\pi r^2} \frac{\gamma - 1}{(\gamma + 2)^2 - 8} \quad y \quad m = \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 2)^2 - 8}$$

Está es la solución especial de Misner y Zapolsky [9]; es la analogía relativista del caso singular descrito por Chandrasekhar en [16] para la ecuación politrópica de Newton con el índice n que satisface $3 < n \leq \infty$. El otro caso realista en la Fig. 3.1 se encuentra en el origen (donde $r = 0$) y la espiral en el punto P . Posee la propiedad que ρ es finito y distinto de 0 en $r = 0$, y se extiende hacía el infinito valor de r , la densidad decrece al orden de $1/r^2$, como en la solución Misner - Zapolsky.

En cada caso, la métrica del espacio tiempo se obtiene calculando los coeficientes $A(r)$ y $B(r)$ en

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

**Figura 3.1:** Caso relativista

En orden de las ecuaciones de Einstein con $A(0)$ finito, debemos tener que $A(r) = [1 - 2m]^{-1} = [1 - 2M/r]^{-1}$; la función $B(r)$ debe satisfacer

$$\frac{B'}{B} = -\frac{2p'}{(p + \rho)}$$

La solución es la de Weinber en [5], en el caso donde el modelo es asintóticamente plano, es decir $B(\infty) = 1$, es

$$B(r) = \exp \int_r^\infty \frac{2p'}{p + \rho} \quad (3.16)$$

pero solamente es valido cuando la integral converge. Esta caso es para un modelo realista donde hay una region fuera de la estrella, pero es interesante nota que hay casos donde (3.16) no es válido. Por ejemplo, en la solución de de Misner y Zupolsky descrita anteriormente, $B \propto \rho^{(-2/\gamma)(\gamma-1)} \propto r^{(4/\gamma)(\gamma-1)}$; sin embargo esta solución no es asintóticamente plana.

El caso Relativista del modelo de TOV admite dos puntos fijos, uno ubicado en origen y otro en

$$\mu = m = 2(\gamma - 1)/[(\gamma + 2)^2 - 8].$$

este último esta representado en la Fig. 3.1 y corresponde a un punto espiral para todos los valores de $1 < \gamma \leq 2$, parametro relacionado con la ecuación de estado. En la siguiente sección analizaremos el caso de las ecuaciones de TOV en el marco de la teoría de Rastall, ecuaciones que llamaremos TOV-Rastall, y analizaremos el efecto del parametro de Rastall λ sobre la consecuencia de las cuasi- homologías con relación a la ecuación de estado así como su dinámica.

Capítulo 4

Ecs. de Edo. en la Teoría de Rastall

4.1. Introducción

Es claro ver que no podemos hablar de la Teoría de Rastall, sin antes mencionar la Relatividad General de Einstein, la cual es una teoría demasiado completa para explicar los fenómenos gravitacionales, trabaja relacionando directamente la curvatura de espacio-tiempo con su contenido de energía y momento mediante las llamadas ecuación de campo.

Es importante mencionar que las predicciones que ha tenido acerca de los experimentos del sistema solar y de los sistemas púlsares binarios han coincidido de manera perfecta con los datos de observación. A escalas muy grandes (cosmológicas), podemos mantener la Relatividad General como nuestra teoría predominante al recordar los conceptos "desconocidos" de la materia oscura y la energía oscura.

Teorías alternativas de la gravedad como la de Rastall ocurren generalmente cuando uno permite más o menos grados de libertad. Muchas teorías alter-

nativas han sido propuestas como teorías del tensor escalar, (siendo Brans-Dicke [17]), la teoría de $f(R)$ [18] y otras [19]. Estas teorías se ajustan con gran precisión utilizando pruebas del sistema solar y púlsares binarios [20].

En particular, la teoría de Rastall se puede ver como la generalización de la Relatividad General. En 1972 P.Rastall [21] propuso un ajuste a la ecuación de Einstein que causa una violación a la ley de la conservación de la materia, haciendo que la divergencia covariante del tensor de tensión-energía sea proporcional a la divergencia covariante de la curvatura escalar, es decir

$$T_{\nu;\mu}^{\mu} \propto R_{;\nu}.$$

Por lo tanto, cuando la geometría local o global es plana, recuperamos las ecuaciones de campo de Einstein. Sin embargo no es fácil explicar la naturaleza de tal suceso. Esto puede verse de una manera burda como la aparición de efectos cuánticos en el contexto clásico, como se discute en [22]. También, extrañamente el tema de la no conservación de $T^{\nu\mu}$ es una característica que se puede localizar en los modelos de difusión [23] y su relacion con teorías modificada de la gravedad se han analizado en [24, 25].

La descripción de los objetos estelares se simplifica cuando consideramos que la materia es esférica simétricamente distribuida en una geometría estática. El resultado del espacio tiempo es descrito por

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\psi^2). \quad (4.1)$$

La estructura de un fluido ideal, que no toma en cuenta el campo magnético y la frecuencia de rotación está contenido en el tensor de momento - energía.

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_{\mu}u_{\nu} - pg_{\mu\nu}$$

donde u_α es la 4 velocidad (con $u_\mu u^\mu = 1$), $g_{\mu\nu}$ es la componente de la métrica del tensor y como es un gas ideal se toma que $P_t = P_r$.

Desprendiendo de la derivación de las ecuaciones de TOV obtenemos la ley de conservación

$$T_{;\mu}^{\mu\nu} = 0,$$

la cual trabaja tambien en conjunto con el uso de las ecuaciones de Einstein, como podemos ver acontinuación con la siguiente ecuación

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

donde $R_{\mu\nu}$ el es tensor de Ricci y R es la curvatura escalara a consecuencia de $R_{\mu\nu}$. Después siguiendo estas ecuaciones para la geometría definida en (4.1) encontramos las ecuaciones de TOV [26].

$$\frac{d}{dr}p(r) = -\frac{GM\rho c^2}{r^2} \frac{\left(1 + \frac{p}{\rho}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{M}\right)}{1 - \frac{2GM}{r}}$$

pero siempre tomando en cuenta que el valor de la masa se calcula de la siguiente forma

$$M = \int_0^r 4\pi\rho r'^2 dr',$$

Ahora veamos el comportamiento que tiene la ley de la conservación, usando la gravedad de Rastall utilizando los mismos pasos, obtenemos

$$T_{;\mu}^{\mu\nu} = \frac{1-\lambda}{16\pi G} R^{;\nu},$$

donde nosotros claramente podemos ver, que al tomar a $\lambda = 1$ volvemos al caso de Einstein, que es una de las singularidades de esta nueva propuesta. Esto también afecta en las ecuaciones de campo, de acuerdo a la propuesta

de Rastall, la ecuación (4.2), quedaría de la siguiente manera

$$R_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu},$$

Las ecuaciones de TOV para la versión de Rastall, la llamaremos por sus siglas RTOV desde ahora, son escritas de forma diferente a la original como

$$\frac{d\hat{p}}{dr} = - \frac{G\hat{M}\hat{\rho}c^2 \left(1 + \frac{\hat{P}}{\hat{\rho}}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 \hat{p}}{\hat{M}}\right)}{r^2 \left(1 - \frac{2G\hat{M}}{r}\right)}$$

donde

$$\hat{\rho} = \frac{2+3\lambda}{4\lambda+2}\rho + 3\frac{\eta}{4\lambda+2}p \quad y \quad \hat{P} = \frac{\eta}{4\lambda+2}\rho + \frac{2+\lambda}{4\lambda+2}p$$

4.2. Análisis dinámico (regiones)

Ahora vamos analizar el caso de la gravedad de Rastall de la misma forma en la que lo hicimos en el caso Newtoniano en este caso usaremos el pequeño ajuste y nuestro sistema para analizar es

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{M \left(1 + \frac{1}{2} \frac{k(c^2(\lambda-1)\rho(r) + (\lambda+1)P(r))r^3}{M(4\lambda-2)}\right) (\rho c^2 + P)}{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \quad (4.3)$$

y

$$\frac{dM}{dr} = \frac{1}{2} \frac{k[c^2(3\lambda-1)\rho(r) + 3P(r)(\lambda-1)]r^2}{4\lambda-2} \quad (4.4)$$

Asumiremos en este caso y como en los anteriores por las condiciones mencionadas obtenemos que $P = \rho = M = 0$, esto corresponde a la solución trivial del problema donde no hay estrella. Entonces proponemos que $P'\rho \neq 0$, donde la prima denota derivada con respecto a r .

Posterior a esto, proponemos una solución de la forma

$$u^k = (\rho, M)$$

que es un función de dos variables sin dependencia de la masa.

Ahora construiremos una solución, llamaremos a

$$\frac{d\rho}{dr} = F_1(r, \rho, M)$$

$$\frac{dM}{dr} = F_2(r, \rho, M)$$

Posterior proponemos la transformación homóloga para las anteriores ecuaciones, la cual es definida de la siguiente forma

$$X = \xi(r) \left(\frac{\partial}{\partial r} F(r, \rho, M) \right) + \eta^1(\rho) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} F(r, \rho, M) \right) + \eta^2(M) \left(\frac{\partial}{\partial M} F(r, \rho, M) \right) \quad (4.5)$$

donde F , es una función dada que se le aplicará al operador X . Realizando la mismas operaciones en el caso Newtoniano, ahora encontraremos η_1 y η_2 , los cuales estan representados de la siguiente forma

$$\frac{d}{d\rho} \eta_1(\rho) - \frac{d}{dr} \xi(r) = \xi(r) \frac{\partial}{\partial r} \ln(F_1) + \eta_1(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \ln(F_1) + \eta_2(M) \frac{\partial}{\partial M} \ln(F_1)$$

y

$$\frac{d}{dm} \eta_2(m) - \frac{d}{dr} \xi(r) = \xi(r) \frac{\partial}{\partial r} \ln(F_2) + \eta_1(\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} \ln(F_2) + \eta_2(M) \frac{\partial}{\partial M} \ln(F_2)$$

de las cuales $F_1(r, \rho, M)$ y $F_2(r, \rho, M)$, ya son conocidos y simplemente se mencionan para simplificar la notación

$$F_1 = 2 \frac{(c^2 \rho + P(\rho)) ((2M(\lambda - 1) + k((\lambda + 1)P(\rho) + c^2 \rho(\lambda - 1))) r^3)}{r \left((\lambda + 1) \frac{dP}{d\rho}(\rho) + c^2(\lambda - 1) \right) (-r + 2M)}$$

y

$$F_2 = \frac{1}{4} \frac{k \left(c^2 (-1 + 3\lambda) \rho + 3P(\rho) (\lambda - 1) \right) r^2}{2\lambda - 1}$$

damos el analisis, donde η_2 depende de M y ξ depende de r .

$$\frac{d}{dM} \eta_2 - \frac{d}{dr} \xi = \frac{2\xi}{r} + \frac{\eta_1(\rho) \left(-c^2 + 3c^2\lambda + 3 \left(\frac{dP}{d\rho}(\rho) \right) \lambda - 3 \frac{d}{d\rho} P(\rho) \right)}{-c^2\rho + 3c^2\rho\lambda + 3P(\rho)\lambda - 3P(\rho)}$$

de la ecuacion obtenemos las siguientes relaciones, esto se puede llevar acabo ya que haciendo un análisis, existen tres derivadas que como tal solamente depende de una sola variable, es decir, se puede separar en varios problemas, tomar que la derivada es igual a una constante y hacer la integral correspondiente, y obtenemos las siguientes relaciones

$$\frac{d}{dM} \eta_2(M) = a \Rightarrow \eta_2 = aM + \alpha,$$

$$- \left(\frac{d}{dr} \xi(r) \right) = \frac{2\xi(r)}{r} + s \Rightarrow \xi(r) = br + \frac{c}{r^2}$$

y

$$\eta_2 = \frac{(a - 3b)(3c^2\rho\lambda - c^2\rho + P(\rho)\lambda - 3P(\rho))}{(3\lambda - 3) \left(\frac{d}{d\rho} P(\rho) \right) + c^2(3\lambda - 1)}$$

Ahora veremos la relación que tenemos para η_1 , en este caso solo la dejaremos expresada de la siguiente forma

$$\frac{d}{d\rho} \eta_1(\rho) - \frac{d}{dr} \xi(r) = \xi(r) [A] + \eta_1(\rho) [A] + \eta_2(M) [A]$$

donde

$$A = \frac{\partial}{\partial r} \ln \left(\frac{1}{2} (c^2\rho + P(\rho)) (4(2\lambda - 1)M + k((\lambda + 1)P(\rho) + c^2\rho(\lambda - 1))r^3) \right)}{\left(r \left((\lambda + 1) \left(\frac{d}{d\rho} P(\rho) + c^2(\lambda - 1) \right) (2M - r) \right) \right)}$$

Ya una vez que tenemos la expresión correspondiente a η_1 , proseguimos a resolver la ecuación anterior, y el resultado es una ecuación de grado 7, la cual es

$$H_7 r^7 + H_6 r^6 + H_5 r^5 + H_4 r^4 + H_3 r^3 + H_2 r^2 + H_1 r^1 + H_0 r^0 = 0,$$

de los cuales, cada coeficiente tiene un resultado, el cual es el siguiente, y cada coeficiente por si sólo es igual a cero. Aquí η_1 y P dependen de ρ y tenemos los siguientes resultados para cada H_n , para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

$$H_5 = 0 \quad y \quad H_2 = 0$$

$$H_0 = 24 m^2 C (2\lambda - 1) \left((\lambda - 1)c^2 + (\lambda + 1) \frac{dP}{d\rho} \right) (c^2 \rho + P)$$

$$H_1 = 16mC (2\lambda - 1) \left((\lambda - 1)c^2 - (\lambda + 1) \frac{dP}{d\rho} \right) (c^2 \rho + P)$$

$$\begin{aligned} H_3 = & 8m^2 (2\lambda - 1) [\eta_1 (c^2 \lambda \rho + P\lambda + P) + \frac{d^2 P}{d\rho^2} + \eta_1 (\lambda + 1) \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 \\ & + \frac{d\eta_1}{d\rho} \frac{dP}{d\rho} ((\lambda + 1)c^2 \rho + \lambda P^2 + P) + c^2 P \frac{d\eta_1}{d\rho} (\lambda - 1)(1 + c^2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_4 = & \left(\frac{d^2 P}{d\rho^2} \right)^2 (4\eta_1 P m - 4\eta_1 P m 4\eta_1 P m \lambda + 4\eta_1 c^2 - 8\eta_1 P \lambda^2 m - 8\eta_1 c^2 \lambda^2 \\
& - 4\eta_1 c^2 \lambda \rho m) + \left(\frac{d\eta_1}{d\rho} \right) \left(\frac{dP}{d\rho} \right) (-8\lambda^2 P m + 4c^2 \rho m - 4\lambda P m + 4P m \\
& - 8\lambda^2 c^2 \rho m - 4\lambda c^2 + \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 [-4\eta_1 m + 4\eta_1 m \lambda + 8m \lambda^2] + 6 \left(\frac{dP}{d\rho} \right) \\
& (-4b\lambda P m - 4aP - C\lambda^2 c^4 \rho^2 k - 2C\lambda P^2 k - 8b\lambda^2 P m - 4b\lambda c^2 \rho m \\
& - 2C\lambda^2 c^2 \rho k P - 4amP + 8aP\lambda^2 - C\lambda^2 P^2 + 8ac^2 \rho \lambda^2 - 8_1 c^2 m \lambda \\
& + 16\eta_1 c^2 m \lambda^2 - 4amc^2 \rho - 8b\lambda c^2 \rho m + 4\lambda P + 4ac^2 \rho \lambda + Cc^4 \rho^2 k + 4bc^2 \\
& - 4ac^2 \rho - 2C\lambda c^2 - CP^2 k + 4amP\lambda + 4amc^2 \rho \lambda + 4bpPm + \left(\frac{d\eta_1}{d\rho} \right) \\
& [-8c^4 \lambda^2 \rho m - 8c^2 \lambda^2 P m + 12c^2 \lambda P m + 12c^4 \lambda \rho m - 4c^4 \rho m - 4c^2 P m] \\
& + P(-12a\lambda c^2 + 4ac^2 + 8am\lambda^2 c^2 + 12ac^4 \rho \lambda - 8bc^2 \lambda^2 m + 2Cc^4 \lambda \rho k \\
& - 4bc^2 P m + 4amc^2 + Cc^2 k P - Cc^2 \lambda^2 P k - 12am\lambda c^2) - Cc^6 \rho^2 k \\
& + 4ac^4 \rho - Cc^6 \lambda^2 \rho^2 k + 8amc^4 \rho \lambda + 12bc^4 \lambda \rho m + 2Cc^6 \lambda \rho 2k \\
& - 12ac^4 \rho \lambda - 12\eta_1 c^4 m \lambda + 8\eta_1 c^4 m \lambda^2 - 12amc^4 \rho \lambda + 4amc^4 \rho \\
& + 4\eta_1 c^4 m - 2Cc^4 \lambda^2 \rho k + 8a^2 c^2 - 8bc^4 \lambda^2 m - 4bc^4 + 8ac^4 \rho \lambda^2
\end{aligned}$$

Donde la componente de H_6 , es

$$\begin{aligned}
H_6 = & 2k \left[\left(\frac{d^2 P}{d\rho^2} \right) (\eta_1 P^2 m + 2\eta_1 c^2 \rho P \lambda^2 m + 2\eta_1 c^2 \rho P \lambda m - \eta_1 c^4 \rho^2 m \right. \\
& + \eta_1 c^4 \rho^2 \lambda^2 m + \eta_1 P^2 \lambda^2 m + 2\eta_1 P^2 \lambda m) + 2 \left(\frac{d}{d\rho} \eta_1 \right) \left(\frac{dP}{d\rho} \right) (m \lambda P^2 \\
& + 2m \lambda c^2 \rho P + m \lambda^2 c^4 \rho^2 + 2m \lambda^2 c^2 \rho P + m P^2 + m c^4 \rho^2 + m \lambda^2 P^2) \\
& + \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 (-4\eta_1 P \lambda m - 2\eta_1 c^2 \lambda^2 \rho m - 2\eta_1 P \lambda^2 m - 2\eta_1 c^2 \lambda \rho m \\
& - 2\eta_1 P m) + \left(\frac{dP}{d\rho} \right) (-6bm \lambda P^2 + \alpha P^2 \lambda^2 - 2\eta_1 c^2 P \lambda m + 3bm c^4 \rho^2) \\
& + \left(\frac{dP}{d\rho} \right) (\alpha P^2 + 2am P^2 \lambda - 6bm \lambda c^2 \rho P + 2\alpha c^2 \rho P \lambda + 2\alpha c^2 \rho P \lambda^2 \\
& + am P^2 - \alpha c^4 \rho^2 + 2\eta_1 c^4 \rho m + 2\eta_1 c^4 \rho m + am P^2 \lambda^2 + \alpha c^4 \rho^2 \lambda^2 \\
& - 4\eta_1 c^4 \lambda^2 \rho m + 2\alpha P^2 \lambda + am c^4 \rho^2 \lambda^2 - am c^4 \rho^2 - 3bm P^2 + 2\eta_1 c^2 P m \\
& + 2am c^2 \rho P \lambda^2 - 4\eta_1 c^2 P \lambda^2 m - 3bm \lambda^2 P^2 + 2\eta_1 c^4 \lambda \rho m - 3bm \lambda^2 c^4 \rho^2 \\
& - 6bm \lambda^2 c^2 \rho P + 2am c^2 \rho P \lambda) + \left(\frac{d\eta_1}{d\rho} \right) (-2c^4 m \lambda \rho P - c^2 m P^2 \\
& + c^6 m \rho^2 + c^6 m \lambda^2 \rho^2 - 2c^6 m \lambda \rho^2 + c^2 m \lambda^2 P^2 + 2c^4 m \lambda^2 \rho P) \\
& - \alpha P^2 c^2 + (\alpha c^6 + am c^6 + \alpha c^6 \lambda^2) \rho^2 - 2\eta_1 c^4 P \lambda^2 m - 2\alpha c^4 \rho P \lambda \\
& - 3bc^2 m \lambda^2 P^2 - 3bc^6 m \lambda^2 \rho^2 - am P^2 c^2 - 6bc^4 m \lambda^2 \rho P + \alpha P^2 \lambda^2 c^2 \\
& - 2am c^4 \rho P \lambda - 3bc^6 m \rho^2 - 2\eta_1 c^6 \rho m + 3bc^2 m P^2 - 2\eta_1 c^6 \lambda^2 \rho m \\
& + 6bc^6 m \lambda \rho^2 + 6bc^4 m \lambda \rho P + 2\eta_1 c^4 P \lambda m - 2am c^6 \rho^2 \lambda \\
& + 2am c^4 \rho P \lambda^2 + 4\eta_1 c^6 \lambda \rho m + 2\alpha c^4 \rho P \lambda^2 + am P^2 \lambda^2 c^2 \\
& + am c^6 \rho^2 \lambda^2 - 2\alpha c^6 \rho^2 \lambda
\end{aligned}$$

(4.7)

La componente de H_7 , es igual

$$\begin{aligned}
H_7 = & -2 \left(\frac{d}{d\rho} \eta_1 \right) \left(\frac{dP}{d\rho} \right) \lambda P^2 - \left(\frac{d}{d\rho} \eta_1 \right) \left(\frac{d}{d\rho} P \right) \lambda^2 c^4 \rho^2 + 2bc^6 \rho^2 \\
& - 2 \left(\frac{d}{d\rho} \eta_1 \right) c^4 \lambda^2 \rho P + 2b \left(\frac{dP}{d\rho} \right) P^2 - \eta_1 \left(\frac{d^2}{d\rho^2} P \right) P^2 \\
& - 2bc^2 (P)^2 + \left(\frac{d}{d\rho} \eta_1 \right) c^2 P^2 - \left(\frac{d}{d\rho} \eta_1 \right) \left(\frac{dP}{d\rho} \right) \lambda^2 P^2 \\
& - 6 \left(\frac{d}{d\rho} \eta_1 \right) c^6 \lambda^2 \rho^2 + 4b \left(\frac{dP}{d\rho} \right) \lambda P^2 - \left(\frac{d}{d\rho} \eta_1 \right) c^2 \lambda^2 P^2 \\
& - 2\eta_1 c^4 \lambda \rho \frac{dP}{d\rho} + \left(\frac{d}{d\rho} \eta_1 \right) \left(\frac{dP}{d\rho} \right) c^4 \rho^2 + 2\eta_1 \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 c^2 \lambda \rho \\
& - 4bc^6 \lambda \rho^2 + 2bc^6 \lambda^2 \rho^2 - 2\eta_1 c^4 P \lambda + 2\eta_1 \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 P \lambda^2 \\
& + 2b \left(\frac{dP}{d\rho} \right) \lambda^2 c^4 \rho^2 - 4\eta_1 c^6 \lambda \rho + 2\eta_1 c^4 P \lambda^2 + 2bc^2 \lambda^2 P^2 \\
& + \eta_1 \left(\frac{d^2}{d\rho^2} P \right) c^4 \rho^2 - \eta_1 \left(\frac{d^2}{d\rho^2} P \right) (P)^2 \lambda^2 - 2\eta_1 \left(\frac{d^2}{d\rho^2} P \right) P^2 \lambda \\
& + 2b \left(\frac{dP}{d\rho} \right) \lambda^2 (P)^2 - 2\eta_1 c^2 P \frac{dP}{d\rho} + 4\eta_1 \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 P \lambda \\
& + 2\eta_1 \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 c^2 \lambda^2 \rho - 2\eta_1 c^4 \rho \frac{d}{d\rho} P + 4bc^4 \lambda^2 \rho P \\
& - 2\eta_1 \left(\frac{d^2}{d\rho^2} P \right) c^2 \rho P \lambda - 2\eta_1 \left(\frac{d^2}{d\rho^2} P \right) c^2 \rho P \lambda^2 \\
& - \eta_1 \left(\frac{d^2}{d\rho^2} P \right) c^4 \rho^2 \lambda^2 + 2 \left(\frac{d}{d\rho} \eta_1 \right) c^6 \lambda \rho^2 - 4bc^4 \lambda \rho P \\
& + 4b \left(\frac{dP}{d\rho} \right) \lambda c^2 \rho P + 2 \left(\frac{d}{d\rho} \eta_1 \right) c^4 \lambda \rho P + 2\eta_1 c^6 \lambda^2 \rho \\
& - \left(\frac{d}{d\rho} \eta_1 \right) \left(\frac{dP}{d\rho} \right) (P)^2 - \left(\frac{d}{d\rho} \eta_1 \right) c^6 \rho^2 - 2b \left(\frac{dP}{d\rho} \right) c^4 \rho^2 \\
& + 2\eta_1 \left(\frac{dP}{d\rho} \right)^2 P + 2\eta_1 c^6 \rho - 2 \left(\frac{d}{d\rho} \eta_1 \right) \left(\frac{dP}{d\rho} \right) \lambda^2 c^2 \rho P \\
& - 2 \left(\frac{d}{d\rho} \eta_1 \right) \left(\frac{dP}{d\rho} \right) \lambda c^2 \rho P + 4b \left(\frac{dP}{d\rho} \right) \lambda^2 c^2 \rho P \\
& + 4\eta_1 c^2 P \lambda^2 \frac{dP}{d\rho} + 2\eta_1 c^2 P \lambda \frac{dP}{d\rho} + 4\eta_1 c^4 \lambda^2 \rho \frac{dP}{d\rho}
\end{aligned}$$

Cada uno de los coeficientes de H_n se debe anular, vemos el caso donde el coeficiente independiente, es decir H_0 , tiene dos posibles casos, que la constante $C = 0$ o $C \neq 0$, veremos el caso mas interesante que es el segundo, por lo tanto nos quedaria de la siguiente manera

$$(\lambda + 1) \left(\frac{d}{d\rho} P(\rho) \right) + c^2(\lambda - 1) = 0$$

De aquí obtenemos una solución la cual es

$$P(\rho) = -\frac{c^2(\lambda - 1)\rho}{\lambda + 1} + C_1$$

donde C_1 , es una constante arbitraria y para satisfacer las condiciones iniciales $C_1 = 0$ para este caso. Nuestras relaciones quedarian de la siguiente forma

$$\eta_1(\rho) = \rho(a - 3b), \quad \eta_2(M) = aM + \alpha, \quad \xi(r) = br + \frac{c}{r^2},$$

que cumple la transformación homológica mencionada en (4.5).

Ahora que tenemos la propuesta físicamente más aceptada para este problema, proseguimos a verificar como quedaría nuestro sistema después de este cambio, de las ecuaciones (4.3) y (4.4), M y ρ dependen de r

$$\frac{d}{dr} P(r) = -\frac{1}{2} \frac{\rho\gamma (8M\lambda - 4M + kr^3c^2\rho\lambda\gamma - 2kr^3c^2\rho + kr^3c^2\rho\gamma)}{(\lambda\gamma - 2 + \gamma)r(r - 2M)}$$

y

$$\frac{d}{dr} M(r) = \frac{1}{4} \frac{c^2k\rho(r)(2 + 3\lambda\gamma - 3\gamma)r^2}{2\lambda - 1}$$

De las ecuaciones (4.3) y (4.4) haremos unas pequeñas modificaciones, vamos a realizar una transformación de los siguientes apartados

$$M(r) = rm(r)$$

$$\rho(r) = \frac{s\mu(r)}{kr^2}$$

De aquí daremos una dependencia del tiempo, es decir $t = \ln r$. Por tanto las derivadas quedarían de la siguiente manera, asumiendo también que $P'\rho \neq 0$.

$$\frac{d}{dr}\rho(r) = \frac{\frac{d}{dt}\rho(t)}{r}$$

$$\frac{d}{dr}M(r) = m(r) + r\frac{d}{dr}m(r)$$

y

$$\frac{d}{dr}\rho(r) = \frac{s\left(\frac{d}{dt}\mu(r)\right)}{kr^2} - \frac{2s\mu(r)}{kr^3}$$

por lo tanto nuestro sistema quedaría de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt}\mu(t) = \frac{\mu(t)\left(-\mu(t)\gamma + \frac{(-8\lambda\gamma+8-2\gamma)m(t)}{\lambda\gamma-2+\gamma} + \frac{2\lambda\gamma-4+2\gamma}{\lambda\gamma-2+\gamma}\right)}{(1-2m(t))}$$

y

$$\frac{d}{dt}m(t) = -m(t) + \frac{1}{2}\frac{\mu(t)(2+3\lambda\gamma-3\gamma)}{2\lambda-1}$$

El análisis de los sistemas autónomos se lleva a cabo con base en la caracterización de sus puntos fijos. Un punto fijo representa una condición estacionaria en la dinámica del sistema. El estudio de los puntos fijos es de suma importancia ya que estos proporcionan la información necesaria para obtener las propiedades naturales de sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales ordinarias. De tal manera que, la estabilidad de los sistemas lineales y no lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias es caracterizada por la naturaleza de sus puntos singulares. La estabilidad de un sistema puede entenderse como una continuidad en su comportamiento dinámico.

Buscamos los puntos de equilibrio del anterior sistema, cada término

igualado a cero, es decir

$$\frac{d}{dt}\mu(t) = 0, \quad \frac{d}{dt}m(t) = 0.$$

Visto de mejor forma, lo que queremos realizar es

$$-\mu(t)\gamma + \frac{(-8\lambda\gamma + 8 - 2\gamma)m(t)}{\lambda\gamma - 2 + \gamma} + \frac{2\lambda\gamma - 4 + 2\gamma}{\lambda\gamma - 2 + \gamma} = 0$$

y

$$-m(t) + 1/2 \frac{\mu(t)(2 + 3\lambda\gamma - 3\gamma)}{2\gamma - 1} = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones para $\mu(t)$ y $m(t)$, obtenemos los puntos fijos del sistema y es claro ver que el punto donde $m(t) = 0$ y $\mu = 0$ es el punto fijo obvio del sistema y el otro es

$$\mu_0(t) = \frac{(2\lambda - 1)(\lambda\gamma - 2 + \gamma)}{-4 + 7\lambda^2\gamma^2 - 4\lambda\gamma - 4\gamma^2\lambda + 8\gamma - 2\gamma^2} \quad (4.8)$$

$$m_0(t) = \frac{1}{2} \frac{(\lambda\gamma - 2 + \gamma)(2 + 3\lambda\gamma - 3\gamma)}{-4 + 7\lambda^2\gamma^2 - 4\lambda\gamma - 4\gamma^2\lambda + 8\gamma - 2\gamma^2} \quad (4.9)$$

Y vemos el caso particular donde $\lambda = 1$, es decir nos rentamos al caso de la relatividad de Einstein

$$\mu(t) = \frac{2\gamma - 2}{-4 + \gamma^2 + 4\gamma}$$

y

$$m(t) = \frac{2\gamma - 2}{-4 + \gamma^2 + 4\gamma}$$

Dado el cambio de variable y la definicion d elas variables de densidad y masa los puntos fijos expresados en las ecuaciones (4.8) y (4.9) se obtiene la generalizacion de la solucion de Misner y Zapolsky [9] para el caso de teoria de Rastall, que es dada por

$$\rho(r) = \frac{(2\lambda - 1)(\lambda\gamma - 2 + \gamma)}{-4 + 7\lambda^2\gamma^2 - 4\lambda\gamma - 4\gamma^2\lambda + 8\gamma - 2\gamma^2} \frac{1}{4\pi r^2}$$

y

$$m(r) = \frac{1}{2} \frac{(\lambda\gamma - 2 + \gamma)(2 + 3\lambda\gamma - 3\gamma)r}{-4 + 7\lambda^2\gamma^2 - 4\lambda\gamma - 4\gamma^2\lambda + 8\gamma - 2\gamma^2}$$

en analogía con el caso anterior esperamos que este sea un punto espiral para algunos valores de los parámetros (λ, γ) , lo cualesquiera analizado en la siguiente sección.

4.3. Análisis gráfico

Ahora vamos a realizar el análisis gráfico del sistema

$$\frac{d}{dt}m(t) = -m(t) + \frac{1}{2} \frac{\mu(t)(2 + 3\lambda\gamma - 3\gamma)}{2\lambda - 1}$$

y

$$\frac{d}{dt}\mu(t) = \frac{\mu(t) \left(-\mu(t)\gamma + \frac{(-8\lambda\gamma + 8 - 2\gamma)m(t)}{\lambda\gamma - 2 + \gamma} + \frac{2\lambda\gamma - 4 + 2\gamma}{\lambda\gamma - 2 + \gamma} \right)}{(1 - 2m(t))}$$

donde podemos ver que $m \neq 1/2$ por la discontinuidad que genera ese punto, también $\gamma \neq 2/(\lambda + 1)$ y cuando $\gamma = 0$ entonces $\lambda \neq 1$, también diremos que $1 < \gamma < 2$.

Ahora lo que vamos a realizar, ya una vez que tenemos un modelo no lineal, después de haber realizado la transformación de el sistema no autónomo a un sistema autónomo, vamos a reducirlo a un sistema a su forma lineal por medio de expansiones de Taylor al alrededor de cada punto fijo. Vamos a verificar esto usando la Jacobiana del sistema y evaluando en cada punto fijo.

$$J = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2+3\gamma(\lambda-1)}{-2+4\lambda} \\ -\frac{2\gamma\mu(-1+(-2+\gamma)\mu+\lambda(2+\gamma\mu))}{(1-2m)^2(-2+\gamma+\gamma\lambda)} & \frac{2(m(-4+\gamma+4\gamma\lambda)+(-2+\gamma+\gamma\lambda)(-1+\gamma\mu))}{(1-2m)^2(-2+\gamma+\gamma\lambda)} \end{pmatrix}$$

Ya tenemos la Jacobiana del sistema proseguiremos a determinar los autovalores λ_1 y λ_2 , lo que permitira realizar la clasificación para cada valor propio, de acuerdo a como se muestra en la figura 2.5. Como mencionamos anteriormente, nuestro sistema admite dos puntos fijos, por lo que evaluaremos el jacobiano en cada punto fijo y obtener sus respectivos autovector. El jacobiano para el primer punto fijo es:

$$J(0, 0, \gamma, \lambda) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2+3\gamma(\lambda-1)}{-2+4\lambda} \\ 0 & \frac{+4-2\gamma-2\gamma\lambda}{-2+\gamma+\gamma\lambda} \end{pmatrix}$$

Donde obtenemos que los autovalores para este par de puntos fijos son

$$\lambda_1 = -1, \quad y \quad \lambda_2 = 2$$

Ahora vamos a realizar el estudio para el segundo par de puntos fijos, por lo cual el Jacobiano nos queda de la siguiente forma

$$J(m_0, \mu_0, \gamma, \lambda) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2+3\gamma(\lambda-1)}{-2+4\lambda} \\ -\frac{2(-4+\gamma+\gamma\lambda)}{\gamma^2(-1+2\gamma)} & \frac{-2+\gamma+\gamma\lambda}{\gamma(-1+2\gamma)} \end{pmatrix}$$

Donde los autovectores correspondiente son par de puntos fijos del sistema

$$\alpha_1 = \frac{-3\gamma^2\lambda + \sqrt{-47\gamma^4\lambda^2 + 32\gamma^4\lambda + 16\gamma^4 + 20\gamma^3\lambda - 64\gamma^3 + 36\gamma^2 + 2\gamma}}{2\gamma^2(2\lambda - 1)}$$

$$\alpha_2 = \frac{-3\gamma^2\lambda - \sqrt{-47\gamma^4\lambda^2 + 32\gamma^4\lambda + 16\gamma^4 + 20\gamma^3\lambda - 64\gamma^3 + 36\gamma^2 + 2\gamma}}{2\gamma^2(2\lambda - 1)}$$

Vamos a verificar la raíz, ya que es el valor que nos dirá cuando podremos encontrar soluciones positivas o negativas, esto quiere decir el signo de los autovalores que como ya se menciona, dependiendo del valor del autovalores, las trayectorias se comportarian de cierta forma. En la Fig 4.1, donde abajo de la curva tenemos autovalores complejos es decir, trayectorias elípticas y en la parte superior, autovalores reales.

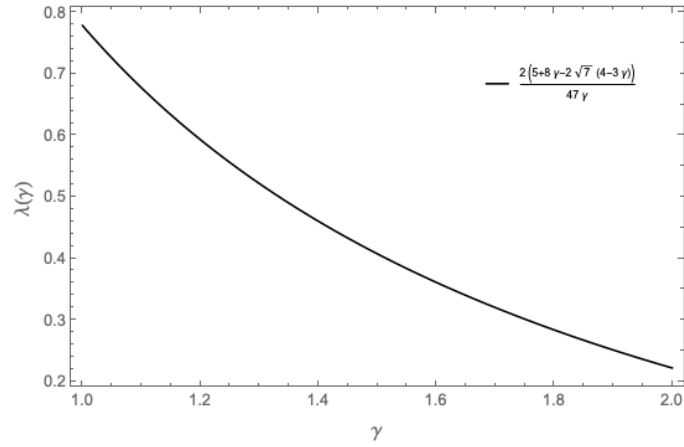


Figura 4.1: Análisis de la clasificación de la soluciones imaginarias o reales

Ahora daremos unos ejemplos donde vamos a variar los valores de λ y γ , para ver como se comporta el sistema para unos valores escogidos de tal forma que la dinámica sea distinta para cada caso. Como se puede ver en la Fig. 4.2, en la parte izquierda superior podemos ver el caso donde $\lambda = 3/2$ y $\gamma = 3/2$, en este caso tenemos un atractor, todas las trayectorias que se encuentran entre $0 < m < 1/2$ van hacia el punto fijo que se encuentra con centro aproximadamente en $\approx 0,2$, para todo los valores en el intervalo $1/2 < m < 1$, tenemos que las trayectorias se alejan del atractor y su dirección es positiva al eje de mu , podemos decir que dentro de la primera region de m tiene una analogía con un agujero negro, el cual son trayectorias sin retorno y en la segunda si lo son. Para la parte derecha superior tenemos los valores $\lambda = 0,498$ y $\gamma = 1,894$, se puede ver como el campo es constante hacia la parte positiva de m , con su excepción en $m = 1/2$.

Siguiendo con el estudio de la Fig. 4.2 de la parte inferior izquierda, tenemos para $\lambda = 0,392$ y $\gamma = 1,514$, las trayectorias para estos valores son un poco extrañas pero simétricamente, es decir en nuestro intervalo de $0 < m < 1$ tenemos un atractor en la parte superior que tiende a la excepción en $m = 1/2$

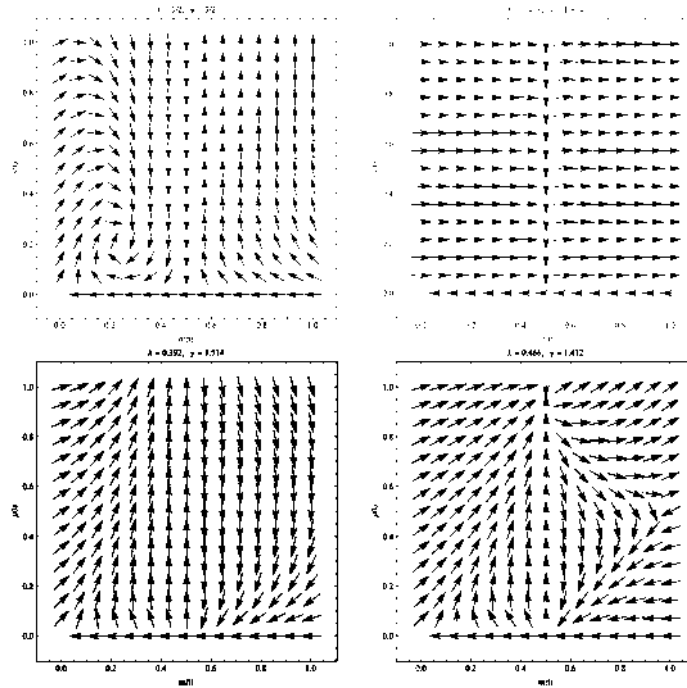


Figura 4.2: Varios casos para nuestro sistema de ecuaciones

y como menciono es simetricamente con la diferencia de que de la región $1/2 < m < 1$ tiene un atractor en la parte inferior que va tendiendo de igual forma al valor $m = 1/2$. Y de la parte derecha inferior tenemos a $\lambda = 0,466$ y $\gamma = 1,412$, ese caso las trectorias son para estos valores el comportamiento de las trayectorias para la región $0 < m < 1/2$, las trayectorias son hacia la parte superior en γ , muy pegadas al m excluido, y en la parte $1/2 < m < 1$ donde dos tipos de trayectorias, en $1/2 < \mu < 1$ las trayectorias tienden hacia arriba y en el intervalo $0 < \mu < 1/2$ tienden las trayectorias hacía abajo con algun punto cerca de la recta $m = 1/2$.

Ahora vamos a proseguir a realizar el estudio concreto de este tipo de puntos, donde ya se obtuvo y se sabe donde hay soluciones con diferentes comportamientos. En la Fig. 4.6, se puede ver la superficie de soluciones, donde λ se encuentra dentro del intervalo $0 < \lambda < 1$ y γ en $1 < \gamma \leq 2$.

De la Fig. 4.3, nosotros logramos ver que el atractor de forma espiral ,

	λ	γ	f_1	f_2	pFm	$pFmu$
p1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-m + \frac{17\mu}{16}$	$\frac{(2 - \frac{52m - 3\mu}{7 - 2})\mu}{1 - 2m}$	0.226236	0.212928
p2	0.498	1.894	$-m + 106.545\mu$	$\frac{(2 - 3.9819m - 1.894\mu)\mu}{1 - 2m}$	0.50004	0.00469321
p3	0.392	1.514	$-m + 1.76281\mu$	$\frac{(2 + 2.08485m - 1.514\mu)\mu}{1 - 2m}$	-1.63133	-0.925412
p4	0.466	1.412	$-m + 1.92665\mu$	$\frac{(2 - 1.25637m - 1.412\mu)\mu}{1 - 2m}$	1.0054	0.521841

Figura 4.3: Tabla de valores para λ y γ , donde f_1 es la diferencial de mu una vez sustituido los valores de λ , f_2 es el valor que toma la diferencial de m después de la sustitución, pFm y $pFmu$ es el valor exacto aplicado en m y μ respectivamente

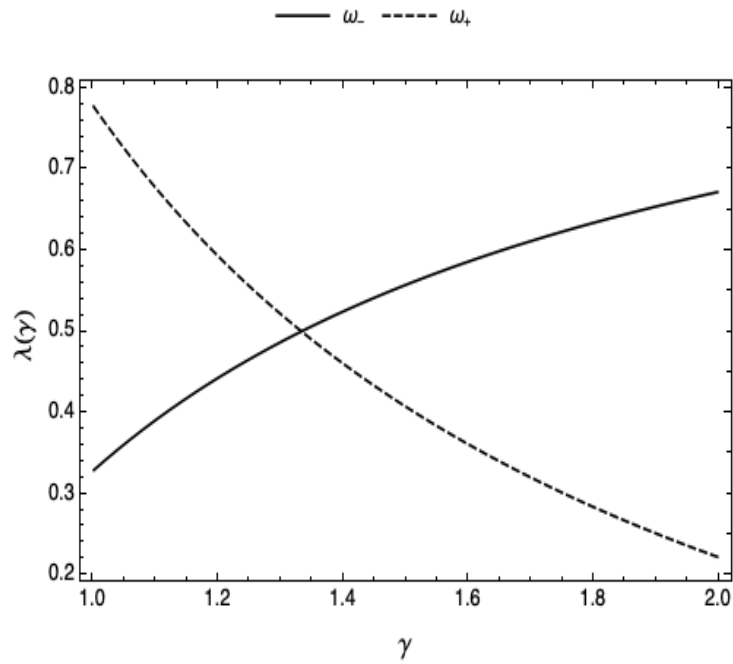


Figura 4.4: Contorno de solución

para estos valores se comporta de la misma manera sin embargo el único cambio que se obtiene es el centro de la espiral, es decir el punto P se va desplazando de forma vertical sobre el mismo punto en la coordenada m .

De la Fig. 4.4 podemos ver el contorno de la solución, se puede ver las específicamente los valores que se obtienen para la solución. En la Fig 4.5, nos explica exactamente lo mismo pero visto en 3 dimensiones. Con esto ahora nosotros tenemos la superficie de soluciones, cuando las soluciones son de forma espiral, cuando las soluciones son reales, es decir verificando los

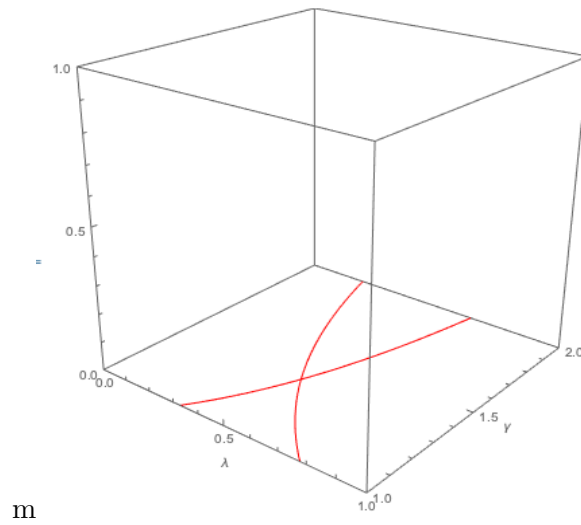


Figura 4.5: Contorno de solución en 3D

autovalores sabemos el espacio fase donde se encuentra los autovectores.

La diferencia de la Fig. 4.5 y la Fig. 4.6, en la primera se puede ver el contorno de soluciones cuando iteramos una vez en el tiempo y mientras maumenta el tiempo, obtenemos la superficie de soluciones.

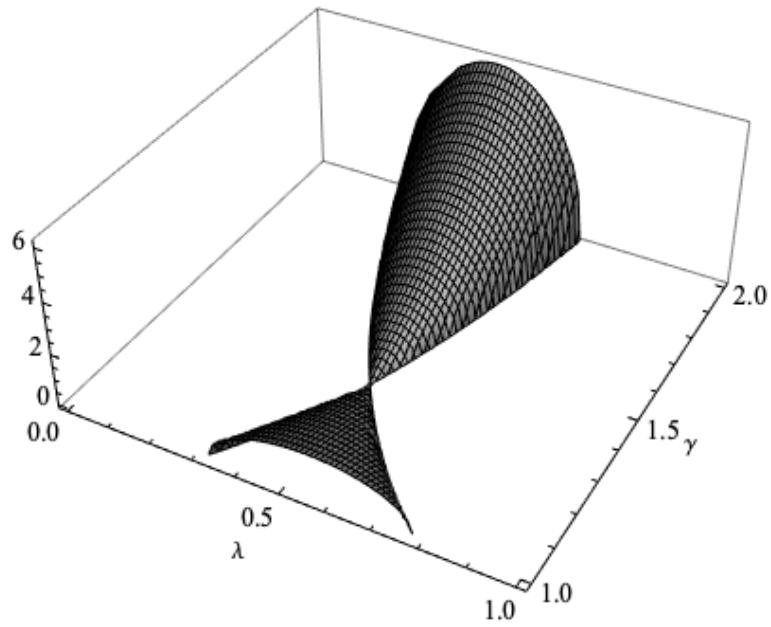


Figura 4.6: Grafica donde podemos ver la superficie de soluciones para nuestro sistema

Capítulo 5

Conclusiones

Los principales resultados obtenidos en esta tesis se centran en dos direcciones principales. Una de ellas en la obtención de una ecuación de estado asociada al sistema de TOV-Rastall, que describe el comportamiento de una estrella modelada a partir de la suposición de que esta es estática y esféricamente simétrica, descritas por un fluido perfecto como fuente de materia y a partir de la imposición de cuasi-homologías se ha probado que esta condición genera una ecuación de estado lineal, es decir, $P = (\gamma - 1)c^2\rho$. Este resultado generaliza un trabajo previamente obtenido [3] en el marco de la teoría de la Relatividad General. En la otra dirección, ahora mediante el empleo de los sistemas dinámicos, a través de la teoría desarrollada para el análisis cualitativo de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarios, presentamos un análisis de la dinámica en torno a los puntos fijos del sistema TOV-Rastall con la ecuación de estado lineal previamente obtenida, mostramos que este sistema admite dos puntos fijos uno de ellos es un repulsor y el otro es un punto espiral. El punto espiral por la Fig. 4.3, vemos que las trayectorias mantienen el movimiento espiral pero el centro cambia de forma horizontal para valores diferentes de γ .

Bibliografía

- [1] Perko, L. (2013). *Differential equations and dynamical systems (Vol. 7)*. Springer Science Business Media.
- [2] Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear Dynamics and Chaos with Student Solutions Manual: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. CRC Press.
- [3] Collins, C. B. (1977). *Static stars: Some mathematical curiosities*. Journal of Mathematical Physics, 18(7), 1374-1377.
- [4] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A., Kaiser, D. I. (2017). *Gravitation*. Princeton University Press.
- [5] Weinberg, S. (1972). *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*.
- [6] Tolman, R. C. (1939). *Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid*. Physical Review, 55(4), 364.
- [7] Oppenheimer, J. R., y Volkoff, G. M. (1939). *On massive neutron cores*. Physical Review, 55(4), 374.
- [8] Collins, C. B. (1976). *The role of mathematics in gravitational physics: from the sublime to the subliminal?*. Essay on Gravitation selected for Honorable mention by the Gravity Research Foundation.
- [9] C. W. Misner and H. S. Zepolsky, Phys. Rev. Lett. 12, 635 (1964).

- [10] Ovsjannikov, L. V. (1962). *Group properties of differential equations*. Siberian Section of the Academy of Science of USSR.
- [11] Kurth, R. (2013). *Dimensional analysis and group theory in astrophysics*. Elsevier.
- [12] C. B. Collins, Commun. Math. Phys. 23, 137 (1971).
- [13] H. Michalski (private communication).
- [14] C. B. Collins, Commun. Math. Phys. 27, 37 (1972).
- [15] I. S. Shikin, Doklady Akad. Nauk SSSR 176, 1048 (1967).
- [16] Chandrasekhar, S., (1957). *An introduction to the study of stellar structure (Vol. 2)*. Courier Corporation.
- [17] Wex, N. (2014). *Testing relativistic gravity with radio pulsars*. arXiv preprint arXiv:1402.5594.
- [18] I. S. Shikin, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 63, 1529 (1972)
- [19] De Felice, A., Tsujikawa, S. (2010). "*f(R) theories*". Living Reviews in Relativity, 13(1), 3.
- [20] Clifton, T., Ferreira, P. G., Padilla, A., Skordis, C. (2012). "*Modified gravity and cosmology*". Physics reports, 513(1-3), 1-189.
- [21] Brans, C., Dicke, R. H. (1961). *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*. Physical review, 124(3), 925.
- [22] Rastall, P. (1972). *Generalization of the Einstein theory*. Physical Review D, 6(12), 3357.
- [23] Fabris, J. C., Piattella, O. F., Rodrigues, D. C., Batista, C. E., Daouda, M. H. (2012). *Rastall cosmology*. In *International Journal of Modern*

Physics: Conference Series (Vol. 18, pp. 67-76). World Scientific Publishing Company.

- [24] Calogero, S. (2011). *kinetic theory of diffusion in general relativity with cosmological scalar field*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2011(11), 016.
- [25] Koivisto, T. (2006). *A note on covariant conservation of energy-momentum in modified gravities*. Classical and Quantum Gravity, 23(12), 4289.
- [26] Minazzoli, O. (2013). *Conservation laws in theories with universal gravity/matter coupling*. Physical Review D, 88(2), 027506.