



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

MATERIA OSCURA DE BOSONES
ULTRALIGEROS A ESCALA GALÁCTICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
LICENCIADA EN CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS

PRESENTA:

MARÍA OTILIA SEGURA PATIÑO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. FRANCISCO SHIDARTHA GUZMÁN MURILLO



MORELIA MICH.

MARZO

DE 2019

“Dedicada a mis padres, hermanos, hermanas y amigos que a lo largo de mi vida académica estuvieron y están conmigo”

AGRADECIMIENTOS

La tesis de Licenciatura es fruto del apoyo incondicional de mis padres, que estuvieron a lo largo de mi vida como persona y académicamente.

A mi asesor Francisco S. Guzmán por el apoyo en la realización con éxito de la tesis y toda su ayuda en el transcurso.

A mis hermanas y hermanos que estuvieron apoyándome, en especial a Carmen por apoyarme en los momentos difíciles de mi estancia en Morelia.

A mis amigos que tuve la suerte de conocer y tener su amistad en la licenciatura:
A Esteban Chamonica, Jorge Antonio Morfin, Josue Cohenete, Martin Onofre Monroy, Armando Madrigal, por mencionar algunos. Y aún más importante a mis amigos del grupo “me gustan las cuatro”: Miguel Angel Álvarez, Azucena Moreno y Roxana Leonor Vera, gracias por su amistad en todo este tiempo.

A mis amigos de la infancia: Nallely Correa, Rosa Linda Maya, Tania Carmona, Berna Padilla y Carlos Cervantez. Que aunque no siempre tenemos la oportunidad de compartir tiempo siempre estuvieron conmigo de alguna forma.

A Francisco Rivera y Jesús por el apoyo y paciencia en conceptos que no conocía, gracias.

Índice general

Resumen	9
1. Introducción	13
2. Curva de Rotación	23
3. Condensado de Bose - Einstein como materia oscura	27
3.1. Condensado de Bose - Einstein	27
3.2. Experimento del BEC del Rubidio 87 en el año 1995	28
3.3. El condensado como materia oscura	29
3.4. Sistema de ecuaciones de Gross-Pitaevskii-Poisson	30
4. Configuraciones de equilibrio	35
4.1. Traducción de unidades código a unidades físicas	38
4.2. Programa	43
5. Ajuste de curvas de rotación	47
5.1. Comparación del ajuste del modelo del BEC con el perfil pseudoisotérmico	58
6. Conclusiones y comentarios finales	61

Resumen

La tesis se centra en el modelo de Condensado de Bose-Einstein (BEC) como materia oscura de bosones ultraligeros. A temperaturas muy bajas, el Condensado de Bose-Einstein tiene cierta dinámica que se puede modelar con la ecuación de Gross-Pitaevskii (GP), la cual es matemáticamente la ecuación de Schrödinger pero con una interpretación macroscópica y ya no cuántica. El potencial en dicha ecuación es un potencial gravitacional que obedece la ecuación de Poisson, cuya fuente es el mismo gas de bosones. El conjunto de estas ecuaciones se llama Gross-Pitaevskii-Poisson (GPP). El sistema GPP tiene soluciones de equilibrio estacionarias que se construyen numéricamente y goza de una invarianza de escala, que se explota para construir toda una gama de perfiles de densidad. En este trabajo se explota esta propiedad para determinar la compatibilidad de las configuraciones de equilibrio con las curvas de rotación de galaxias enanas. Se determina un rango de valores de la masa del bosón que permite ajustes de las curvas de rotación de la muestra de galaxias enanas, pues resulta estar en el rango de $10^{-23} - 10^{-22} \text{ eV}/c^2$. Este es el primer paso para tratar de determinar la distribución del posible valor de la masa del bosón, a partir de los ajustes de la curva de rotación de un catálogo más grande que el estudiado aquí.

Palabras clave: Materia oscura, Condensado de Bose - Einstein (BEC), Curvas de rotación galácticas, distribución de materia galáctica, ecuación de Gross-Pitaevskii.

Abstract

The following thesis centers on the Bose-Einstein Condensate model as dark matter made of ultralight bosons. At very low temperatures the dynamics of the condensate can be molded with the Gross-Pitaevskii equation, which mathematically is Schrodinger's equation, but with a macroscopic interpretation instead of quantum. In such equation, the potential is a the gravitational potential sourced by the bosonic gas itself and obeys Poisson equation. This coupled set of equations is called Gross-Pitaevskii-Poisson (GPP). The GPP system has stationary equilibrium solutions, which are constructed numerically, and have a scale invariance, that is exploited here to construct a wide range of density profiles interpreted as galactic dark matter profiles. In this work, this property is also exploited to determine the compatibility of equilibrium configurations with galactic rotation curves. A range of values of the boson mass is determined, based on the fittings of rotation curves of a sample of dwarf galaxies. This range turns out to be 10^{-23} - 10^{-22} eV/c^2 . This is the first step toward determining the distribution of the possible value of the boson mass, based on fittings of rotation curves for a larger catalog than the one used here.

Capítulo 1

Introducción

Al principio de la década de 1920, los astrónomos observaban un tipo particular de astros luminosos con telescopios de esa época los cuales no podían enfocar perfectamente, se veían nebulosos, de ahí el nombre de nebulosas. En 1920, en el observatorio de Monte Wilson, Edwin Hubble estudió dichas nebulosas, descubriendo que las mismas se localizaban en cúmulos, y presentaban un tipo de gas iluminado por estrellas. Repitiendo sus observaciones nebulosa tras nebulosa, descubrió que eran en realidad concentraciones de miles de millones de estrellas localizadas a grandes distancias. A estas concentraciones se le conoce ahora como galaxias [1].

Más tarde en 1929, Hubble fue el primero en observar un comportamiento inesperado en la luz de estos objetos lejanos. Observó ciertas series de colores en la luz que se podrían identificar como pertenecientes a colores específicos de cada objeto a una temperatura. También observó que los colores siempre cambiaban fuera de su posición normal, hacia longitudes de onda más largas hacia el rojo que está al final del espectro luminoso, era mayor cuanto más grandes eran las galaxias, al comparar por su brillo, su distancia era mayor. Hubble declaró que el deslizamiento o corrimiento hacia el rojo de los colores, se debía a las ondas de luz de las galaxias que se alargaban mediante el efecto Doppler.

Además observó que el corrimiento es sistemático en numerosas galaxias. Al relacionar las distancias de estas galaxias con el corrimiento al rojo, notó que había una relación entre la magnitud del corrimiento y la distancia a la que se encontraba la galaxia. Es decir, entre más alejada esté la galaxia de nosotros, su espectro luminoso presenta un corrimiento mayor hacia el rojo. Esta relación se conoce ahora como la ley de Hubble, fue la primera ley empírica cosmológica. Básicamente en esta ley se usa el efecto Doppler, en honor de Christian Andreas Doppler (quien dio la explicación en el siglo XIX). Este efecto Doppler se manifiesta en los rayos de luz (ondas electromagnéticas), y consiste en que un objeto

que se aleja de nosotros a gran velocidad se vea más rojo y si se acerca entonces se verá más azul. Lo que significa la ley de Hubble es que las galaxias más lejanas se desplazan con mayor velocidad, alejándose de nosotros y entre ellas. Esto es inesperado para el sentido común, ya que la fuerza de gravedad entre las galaxias es atractiva y deberían de estar desacelerando entre sí debido a esta fuerza, pero la observación era las velocidades y no las aceleraciones.

Pero Hubble descubrió que esto no es así, y entre más lejos se encuentre una galaxia con mayor velocidad se aleja de nosotros. A este problema Hubble y varios científicos de aquella época dieron la explicación que lo que sucedía era que debió haber existido una enorme explosión que causó que la materia saliera disparada en todas direcciones. A esta teoría se le conoce como la teoría del Big Bang (de la gran explosión) lo que explicaría las observaciones de que todas las galaxias se alejan unas de otras.

La teoría del Big Bang es una posible explicación del origen del universo: Si las galaxias se alejan en este momento, entonces debió haber un momento en que estaban concentradas en una región pequeña, pero algo debió suceder en un instante para que todo comenzara a expandirse. Se supone que hubo una gran explosión, dando así origen al inicio de la evolución del Universo.

La teoría adquirió más aceptación, cuando en 1922 Alexander Friedman con las ecuaciones de la teoría de la relatividad general de Einstein, las cuales describen la interacción de la gravedad como resultado de que el espacio-tiempo está siendo curvado por la materia y la energía, y ésta a su vez se distribuye según las propiedades del espacio-tiempo. Friedman obtuvo un conjunto de ecuaciones que describen la expansión del espacio con la suposición de que toda la materia en el universo se distribuye de modo homogéneo e isotrópico. Estas ecuaciones son hoy conocidas como las ecuaciones de Friedman. Aún más interesante, Friedman encontró que la teoría de Einstein permitiría la existencia del Big Bang, con una región de densidad de materia infinita en teoría, lo que a su vez definía una temperatura infinita en teoría, haciendo más espectacular el modelo.

Debido a las altas temperaturas durante un pequeño lapso, la cual era del orden de $T = 10^{32}$ K, tuvo que haber un momento donde las cuatro fuerzas fundamentales estuvieran unificadas: fuerza nuclear fuerte, fuerza nuclear débil, fuerza electromagnética y la fuerza de gravedad. Se le conoce como la época de Planck, y es la época del universo más temprana que se ha estudiado, es el período de tiempo entre cero y 10^{-43} segundos en la historia del Universo. Con la temperatura extremadamente alta al igual que su densidad, las partículas tenían gran energía cinética e interactuaban entre ellas pero no podían unirse, como si hubiera una gran sopa de materia y radiación. La época de la gran unifica-

ción terminó aproximadamente 10^{-36} segundos después del Big Bang en donde las cuatro fuerzas se mantenían unificadas y momentos después la fuerza de gravedad se desacopló, quedando sólo la fuerte, la débil y la electromagnética, esto a una temperatura $T = 10^{32}$ K.

Cuando el Universo se expandió suficientemente para llegar a la temperatura $T = 10^{27}$ K, los fotones se desacoplaron de la materia y pueden viajar libremente sin interactuar con ninguna partícula. Este momento se llama época de la recombinación, en la que la luz empieza a viajar libremente por el universo. Con los fotones de aquel momento viajando libremente, ahora llega a nosotros en forma de radiación en frecuencia de microondas, correspondiente al instante en que materia y luz estaban acoplados por última vez. Tras suceder el Big Bang el universo se expande y por ello la longitud de onda de la radiación llega a nosotros con mucho menor frecuencia que durante la época de equilibrio.

Al tiempo de 10^{-12} segundos después del Big Bang surge el bosón de Higgs, el cual es encargado de dar masa a todas las partículas según el modelo estándar de partículas [9]. La temperatura siguió bajando por la expansión cósmica al igual que la energía cinética de las partículas. Ahora con la temperatura decayendo hasta llegar a 10^{13} K, los quarks lograron unirse entre sí y formar protones y neutrones, esto pasa en el lapso de 10^{-6} segundos a 10^{-2} segundos. El universo al seguir expandiéndose se llega a la etapa llamada recombinación donde se formaron núcleos atómicos como el Hidrógeno y el Helio. Después de la recombinación y la formación de átomos, empezó la formación de galaxias debido a la fuerza gravitacional.

En 1948, el físico George Gamow quien fue estudiante de Friedman, puntualizó la idea de su profesor: en el caso de que hubiese existido una gran explosión, entonces deberíamos detectar la radiación que había dejado dicho fenómeno. Gamow calculó esta radiación y encontró que debería ser de 5 K (-268°C) en la actualidad [5].

Poco después en el año de 1965, en los Laboratorios Bell Telephone, Nueva Jersey, los físicos Arno Penzias y Robert Wilson trabajaban en un proyecto para desarrollar una antena que pudiera revolucionar la tecnología. Diseñaron una antena para transmitir y detectar señales de radio de baja frecuencia y al usarla encontraron un problema: se encontraba un ruido inexplicable [5]. Este ruido fue atribuido a una paloma que anidaba en la antena, tras intentos de solucionar los problemas con el inusual ruido, decidieron tomar soluciones drásticas y acabar con todas las palomas que se encontraban cerca. Limpiaron nuevamente la antena y, sin embargo, el ruido persistía. Lo interesante fue que, el ruido era el mismo en todas direcciones, todos los días sin importar la hora. Penzias y Wilson aún no se daban cuenta de la importancia del su descubrimiento del inusual ruido.

Mientras tanto, James Peebles, Robert H. Dicke y David Wilkinson, astrofísicos del Centro de Estudios Avanzados de Princeton, se disponían a encontrar la radiación cósmica predicha por Gamow. Dicke junto con sus colegas discutieron si la radiación debería de ser detectable, pero como microondas, debido a un masivo desplazamiento hacia el rojo. Lo que no sabían fue que Penzias y Wilson ya habían detectado esta Radiación Cósmica de Fondo. Las características de la radiación detectada por Penzias y Wilson encajan exactamente con la radiación predicha por Robert H. Dicke y sus colegas. Poco después Penzias contactó a Dicke, quienes de inmediato interpretaron esta radiación como la confirmación del Big Bang, pues correspondía al instante de acople entre materia y radiación [7].

Lo que Penzias y Wilson observaron fueron las intensidades de la radiación, característico al fenómeno de radiación de cuerpo negro a temperatura de 2.725 K ($\sim 270^\circ\text{C}$) [6], lo que significa que el Universo contiene radiación como Gamow lo puntualizó. Este hallazgo fue una valiosa prueba de que existió una gran explosión, y por tal hallazgo obtuvieron el Premio Nobel de Física. A esta radiación se le llamó radiación cósmica de fondo de microondas (o CMB por sus siglas en inglés, Cosmic Microwave Background).

Más tarde en 1989, la NASA lanzó el primer satélite para refinar esta observación, el Explorador del Fondo Cósmico COBE (Cosmic Background Explorer) diseñado para el estudio del CMB. Su objetivo fue investigar la radiación de fondo de microondas y obtener medidas de la misma. Tras un período de 4 años COBE realizó el "famoso" mapa de las anisotropías de CMB, formado de los datos encontrados (véase la figura 1.1).

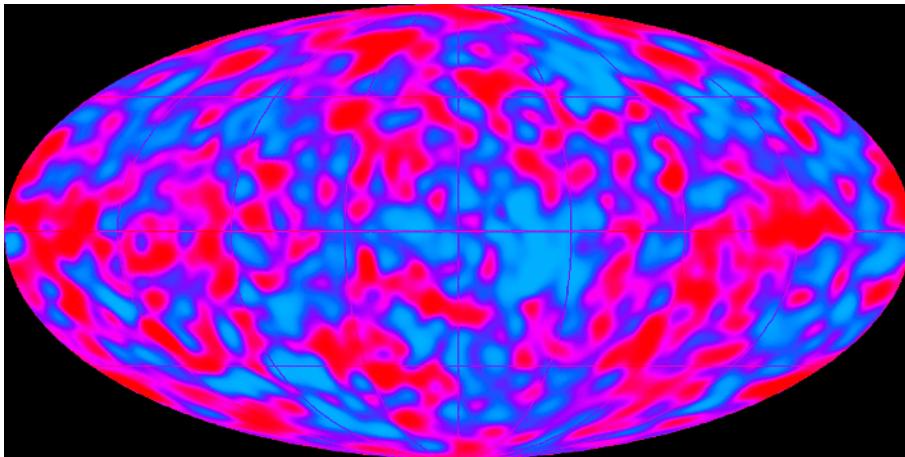


Figura 1.1: Mapa de las anisotropías del CMB (imagen extraída del archivo de la NASA [8]). Se muestra de color rojizo las zonas con radiación con mayor temperatura y de color azul con menor temperatura.

En los datos encontrados, COBE detectó pequeñas irregularidades en el valor de la temperatura de la radiación cósmica de fondo. Estas irregularidades en la radiación se interpretan como fluctuaciones en la densidad de energía, donde estas fluctuaciones se manifiestan al día de hoy como pequeñas anisotropías en la distribución espacial de la CMB a pequeñas y grandes escalas, lo que representa la formación de las primeras estructuras de gran escala y la distribución de galaxias del universo actual.

Veamos algo más, las primeras estimaciones de la densidad del universo fueron a través de la famosa Ley de Hubble. Con esta Ley se observa el parámetro de densidad el cual es $\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}}$, donde la densidad crítica del universo (ρ_{crit}) es muy importante en cosmología, porque determina el tipo de evolución del universo. Matemáticamente se ha demostrado que existen tres tipos de posibilidades, los cuales son: cerrado, crítico y abierto. Entonces, el universo es esférico si $\Omega > 1$, y su destino es un recolapso que termina con el Big crunch, es decir se expandirá durante un tiempo y recolapsará, por ello también se le conoce como universo cerrado; el universo es plano si $\Omega = 1$, debería expandirse pero deteniendo su expansión asintóticamente, por ello se le conoce también como universo crítico; el universo es tipo silla si $\Omega < 1$, lo que causaría que se expandiría indefinidamente sin colapsarse nunca, por ello se le conoce también como universo abierto.

Resulta que las anisotropías observadas por COBE son del orden de $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$. Haciendo el análisis de perturbaciones sobre el modelo de Friedmann, resulta que esta observación es consistente con que el Universo tenga $\Omega = 1$. Es decir, si $\Omega > 1$ u $\Omega < 1$, $\frac{\delta T}{T}$ da resultados muy distintos a los observados. Ahora bien, si $\Omega = 1$, significa que el Universo tiene la cantidad de materia justa para que el Universo sea plano, es decir $\rho \sim \rho_{crit}$.

Ya conociendo lo anterior, si se asocian las fluctuaciones de CMB con la estructura de distribución de materia, galaxias y cúmulos, entonces se puede determinar cuánta materia total se colapsa gravitacionalmente para formar galaxias y cúmulos. Resulta que aproximadamente el 40 % de la materia total del Universo se colapsa; es decir, genera un campo gravitacional. El otro 60 % se llama constante cosmológica o energía oscura [7].

A esta conclusión se llega ya que si, aumenta o disminuye el porcentaje de materia que colapsa tendríamos una cantidad distinta de estructuras galácticas a la observada. Ahora bien, de este 40 % de materia, si se supone que toda la materia es bariónica, las fluctuaciones de COBE deberán dar $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-3}$, que es dos órdenes mayor a lo observado [7].

Para que se ajuste al valor de $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$ observado en el CMB, la cantidad máxima

de bariones del Universo es aproximadamente del 10 % al 40 % de materia que gravita; es decir el 4 % del total de la materia en el Universo.

De igual forma, si el porcentaje de la materia bariónica se aumenta o disminuye, el valor de $\frac{\delta T}{T}$ cambia y esto representaría que no hubiera concordancia con las mediciones del COBE.

Con este razonamiento, se concluye que el 26 % de materia del Universo no es bariónica, sino materia que no se ve pero se sabe que se necesita para explicar la CMB. A este 26 % de materia que no es visible, no bariónica pero que interactúa gravitatoriamente, se le conoce como **materia oscura**.

Con todos estos resultados, la NASA lanzó otra sonda el 30 de junio de 2001 llamada La Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP), cuya misión fue mejorar los datos encontrados por COBE. El objetivo de WMAP es comprobar las teorías sobre el origen y evolución del universo mediante una resolución de medida y sensibilidad con mayor precisión que la de COBE. los datos encontrados se muestran en la figura 1.2. Algunas consecuencias de las observaciones de WMAP son las siguientes: la edad del universo es de $13,700 \pm 200$ millones de años y los datos hallados confirman, con sólo un 0.5 % de margen de error, que la forma del universo es plano, es decir que $\Omega = 1$, confirmando así que se necesita aproximadamente un 26 % de materia oscura.

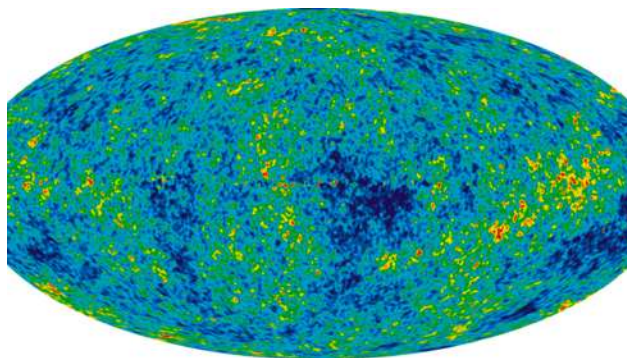


Figura 1.2: Datos encontrados de la Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP), que muestra una resolución mejor que la de COBE (imagen extraída del archivo de la NASA [8]).

Resulta que la existencia de materia oscura fue propuesta mucho antes que COBE tuviera resultados, pero se hizo en base a observaciones locales. El primero en hacerlo fue Fritz Zwicky en 1933, cuando estudió las velocidades de las galaxias en el cúmulo galáctico de Coma. Su primer observación fue que la fuerza centrífuga y la fuerza de gravitación

tuvieran un tipo de configuración en equilibrio virial para que ninguna galaxia tuviera una velocidad superior a la de escape. Visto a detalle en cada galaxia, los cuerpos individuales se desplazan con movimientos peculiares. Lo que Zwicky hizo después fue estudiar el estado virial del cúmulo. De estar en equilibrio virial, la energía cinética sería igual a menos la mitad de la energía gravitacional, pero sabemos que la energía cinética es $K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$. Si se suma la energía cinética para todas las partículas y se hace un promedio de v^2 del sistema, se encuentra la velocidad de dispersión. Esta cantidad fue lo que midió Zwicky [10], y encontró que la energía cinética del sistema era mayor a la gravitacional y para que éstas estuvieran en equilibrio, entonces la masa del cúmulo debería ser mucho mayor que la masa observada, alrededor de 300 veces más [7]. De este problema, Zwicky concluyó que las galaxias de este cúmulo, si no hubiese esta cantidad de materia faltante, deberían alejarse unas de otras por falta de atracción gravitacional suficiente para evitar que el cúmulo se desintegre. Por lo tanto, a este tipo de materia no visible, no bariónica y que interactúa gravitatoriamente le dió el nombre de materia oscura. Más tarde, en 1936 Sinclair Smith, comprobó los resultados de Zwicky, pero ahora en el cúmulo galáctico de Virgo, dando más validez a la hipótesis de la existencia de materia oscura [7].

Este problema de masas faltantes, años después fue confirmado por medio de curvas de rotación en galaxias. En 1970 la astrónoma Vera Rubin, fue quien impulsó la idea de la materia oscura en galaxias, obteniendo la evidencia más fuerte hasta ese momento de su existencia. Lo que Vera Rubin hizo fue analizar la velocidad de rotación de una muestra de galaxias, por medio de la radiación de gas que era de hecho hidrógeno neutro. Al medir el espectro del gas a diferentes distancias se sabe su velocidad con respecto al observador, usando el efecto Doppler. Así lo realizó con diferentes regiones de la galaxia, hasta obtener gráficas como la mostrada en la figura 1.3 (galaxia NGC 6503).

Se puede apreciar que la curva de velocidad no es simétrica con respecto al centro en la escala de distancia. Este centro se define como el punto más brillante de la franja más fuerte en todos los espectros, y también corresponde al punto más brillante del núcleo visto en los datos encontrados por Vera Rubin [11]. Estos datos son de la galaxia NGC 6503 clasificada como galaxia enana. También se obtienen velocidades tanto negativas como positivas, lo que significa que si $v > 0$ entonces existe un corrimiento al rojo, por lo que la región de la galaxia se está alejando del observador, y si $v < 0$ entonces se acerca; es decir, se utiliza el efecto Doppler para calcular la velocidad del gas.

En esta curva, la velocidad del gas es de alrededor de 60 km/seg en un punto a 10 segundos de arco del centro de la galaxia. Si se toma este punto como centro fijo de la galaxia entonces implicaría que la galaxia se desplaza del observador a esa velocidad. Entonces en

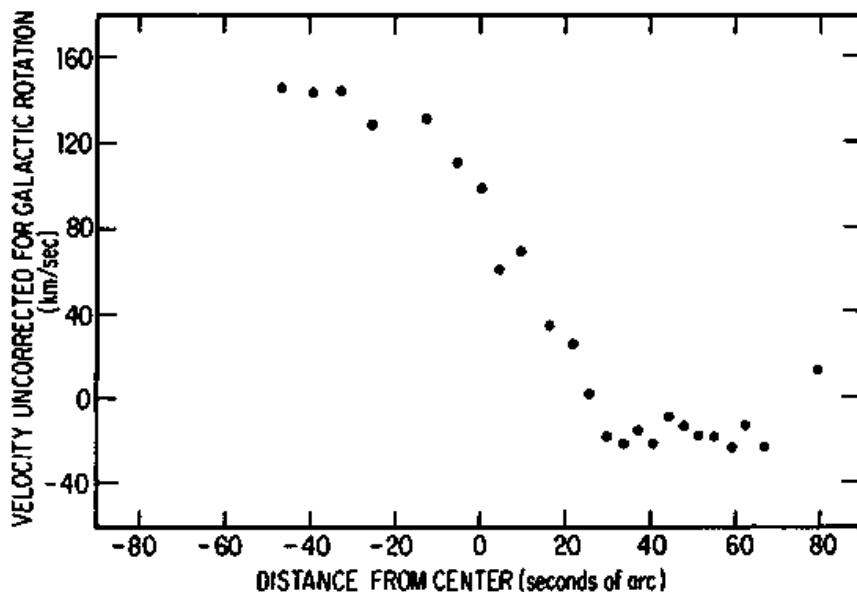


Figura 1.3: Curva de velocidad de la galaxia NGC 6503. Los puntos indican la velocidad promedio del gas en una región, como función de la distancia al centro galáctico. (Imagen extraída del artículo de Vera Rubin [11]).

el punto más cercano al centro, el gas tiene una velocidad de aproximadamente 30 km/seg. Los puntos del lado izquierdo indican que la velocidad del gas es aproximadamente 90 km/seg y del lado derecho la velocidad es de ~ 80 km/seg con respecto al centro de la galaxia. Ahora bien, promediando el corrimiento al azul relativo de lado izquierdo de la galaxia con el corrimiento al rojo del lado derecho se tiene la llama curva de rotación de la galaxia.

En la figura 1.4, se muestra una ilustración genérica de la curva de rotación de una galaxia espiral común (línea continua), y la curva de rotación esperada, suponiendo que solamente la materia luminosa contribuye al campo gravitacional (línea punteada). Lo que se observa, es una gran diferencia entre ellas. Por ejemplo, la curva de rotación en las regiones lejanas muestra un perfil de velocidad casi constante en un gran intervalo de distancia al centro de la galaxia, como ocurre con el caso de la galaxia NGC 6503 de la figura 1.3. Si las galaxias tienen una distribución de masa similar a la distribución de estrellas y gas que se observa, las velocidades de las curvas de rotación deberían disminuir en largas distancias, de la misma forma que ocurre en otros sistemas con la mayoría de su masa en el centro. Pero esto no es así, como se puede observar en la figura 1.4, en vez de disminuir la velocidad

en las regiones más alejadas, éstas tienen una velocidad casi constante. Esta discrepancia se atribuye otra vez a una componente de materia faltante, ahora conocida como materia oscura. Dando así Vera Rubin una evidencia contundente de su existencia en el Universo, por lo que el trabajo de Vera Rubin fue pieza principal en demostrar la existencia de la materia oscura por medio de curvas de rotación.

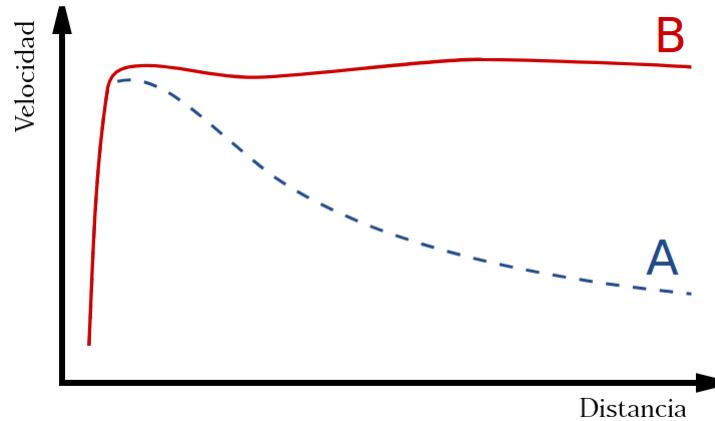


Figura 1.4: Curva de rotación de una galaxia espiral, la curva A se predice y la curva B es la observada (imagen extraída del artículo [16]).

El modelo estándar de materia oscura es conocido como Materia Oscura Fría (Cold Dark Matter, CDM), que supone que la materia oscura está constituida por partículas exóticas, que no interactúan con la radiación ni con los campos magnéticos espaciales y por ello no pueden ser detectadas directamente, y que sin embargo tienen masa. Los candidatos de CDM suelen ser partículas predichas teóricamente en extensiones al modelo estándar de partículas o bien partículas en teorías de cuerdas. Con esta hipótesis de materia oscura, el modelo estándar de la cosmología se conoce como Λ CDM, siendo Λ la constante cosmológica asociada a la energía oscura. Aunque este modelo ahora en día tiene mucho éxito en reproducir las observaciones a escalas cosmológicas, a nivel galáctico se enfrenta a algunos problemas, ya que no hay coincidencia entre las predicciones del modelo a escala galáctica con lo que se está observando [3]. Las simulaciones numéricas están alcanzando rápidamente la resolución requerida para estudiar las partes internas de galaxias enanas que están dentro de aproximadamente 500 pc, lo cual ha revelado discrepancias entre las observaciones y el modelo teórico [4]. Una de ellas consiste en que las simulaciones que asumen CDM, predicen distribuciones de materia picudas, mientras las inferidas por medio de observaciones son consistentes con perfiles de densidades suaves, es decir, con perfiles casi constantes [1]. A este problema se le conoce como el problema de cusp-core del modelo

CDM. Otro problema del modelo CDM, es que predice la existencia de una cantidad mayor de galaxias enanas que las observadas.

Por ese tipo de problemas es que son necesarios modelos alternativos. En esta tesis nos enfocamos al modelo en que la materia oscura se supone ser un condensado de Bose-Einstein de bosones ultraligeros. Esta hipótesis resulta ser una buena alternativa para resolver el problema de cusp-core de la CDM con el modelo de BEC ya que forma distribuciones que no son picudas y además, predice la cantidad de galaxias enanas observadas [1]. En el modelo de BEC la principal idea es simple, la naturaleza de la materia oscura está completamente determinada por un campo escalar fundamental Ψ [2]. Los halos de materia oscura galáctica se pueden describir en el régimen no relativista como condensados de los bosones ultraligeros.

Nos enfocamos en estudiar la posibilidad de que las configuraciones de condensado sean compatibles con las curvas de rotación galácticas y estudiamos el rango de masas del bosón apropiado para que haya dicha compatibilidad.

La tesis se organiza de la manera siguiente. En el capítulo 2 se describe la curva de rotación debida a una distribución de materia. En el 3 se presentan los elementos necesarios del Condensado de Bose útiles para nuestro estudio. En el 4 se describen las configuraciones de equilibrio que se suponen como halos de materia oscura galáctica. En el capítulo 5 se presentan los resultados de los ajustes de curvas de rotación galácticas y en el 6 las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

Curva de Rotación

Como se mencionó anteriormente, una curva de rotación es la representación de la velocidad de rotación de una partícula de prueba como función del radio galáctico al centro de la galaxia. La curva de rotación se calcula de la siguiente manera. Si la partícula de prueba sigue órbitas circulares, entonces la velocidad de rotación a una distancia r del centro de la galaxia, debe estar relacionada con la fuerza centrífuga (F_C) que actúa sobre ella y la ley de gravitación universal que determina la aceleración ejercida por la masa contenida en una esfera de radio igual al de la distancia de la partícula de prueba al centro. Sabemos que la fuerza F_C está establecida de la siguiente manera:

$$\frac{v_{rot}^2 m}{r} = F_C.$$

Por su parte, la masa contenida desde el centro galáctico ejerce una fuerza de atracción. Para que la partícula de prueba describa órbitas circulares, ambas fuerzas deben compararse,

$$\frac{v_{rot}^2 m}{r} = \frac{GmM(r)}{r^2}.$$

De aquí es posible obtener una forma funcional para v_{rot} que eventualmente tenga la forma de las gráficas de la figura 1.4:

$$v_{rot}^2 = \frac{GM(r)}{r}, \quad \Rightarrow \quad v_{rot} = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}. \quad (2.1)$$

Se trata de una expresión en términos de la constante gravitacional universal G , del radio al que se localiza la partícula de prueba r y de la distribución de masa en función de la distancia al centro galáctico $M(r)$. Por lo que basta con conocer $M(r)$, la masa contenida en una esfera de radio r , que para una distribución esférica de materia $\rho(r)$ es

$$M(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho(r) r^2 dr d\theta d\phi = 4\pi \int_0^r \rho(r) r^2 dr, \quad (2.2)$$

donde $\rho(r)$ es la distribución de masa y r es la distancia al centro.

Existen diferentes perfiles de densidad para la determinación de la distribución de materia oscura, la mayoría son perfiles de densidad centrales. Un ejemplo de ello es el perfil isotérmico, cuya distribución de masa es

$$\rho(r) = \frac{\rho_c}{1 + (r/r_0)^2}. \quad (2.3)$$

Se toma el perfil de esta forma, ya que se presenta como una función suave en el origen y si $r \rightarrow 0$ entonces la densidad es finita en el origen, $\rho(r) = \rho_c$. Una propiedad interesante de este modelo es que si r es grande, $\rho \sim \rho_c/r^2$, y la masa en la ecuación (2.2) va como $M(r) \sim r$ y la velocidad v_{rot} en la ecuación (2.1) va como constante, que es lo que se observa en la figura 1.4.

Tomando este perfil como ejemplo, $M(r)$ se expresa de la siguiente manera

$$M(r) = 4\pi\rho_c \int_0^r \frac{1}{1 + (r/r_0)^2} dr = 4\pi\rho_c \left[r - r_0 \arctan \left(\frac{r}{r_0} \right) \right].$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (2.1), obtenemos la velocidad de rotación en función de la distancia al centro de la galaxia,

$$v_{rot}(r) = \sqrt{4\pi G \rho_c} \sqrt{1 - \frac{r_0}{r} \arctan \left(\frac{r}{r_0} \right)}. \quad (2.4)$$

Este resultado es la curva de rotación en función de la distancia al centro de la galaxia para la distribución de la ecuación (2.3). Con $v(r)$ dependiente del radio, ρ_c y r_0 como parámetros, se utiliza la función de la ecuación (2.4) para demostrar si es que es un buen perfil de densidad. Para mostrarlo suele usarse en galaxias dominadas por materia oscura, ya que la distribución de materia (2.3) es solamente de materia oscura. Las galaxias dominadas por materia oscura suelen ser enanas y de bajo brillo.

De los catálogos de curvas de rotación se consideraron las galaxias U11616, U11557, U4115, ESO4880049, ESO3050090, ESO3020120, ESO1870510 y ESO1200211. Estas galaxias son tipo enanas con baja luminosidad.

Los parámetros de ajuste con la expresión (2.4) son $a = \sqrt{G\rho_c}$ y r_0 . Para hacer los ajustes se programó un código en fortran y el resultado de los valores de los parámetros se

Catálogo de galaxias con parámetros e incertidumbres	
U11616	U11557
$a = 151,147 \pm 2,0103$ $r_0 = -1,55221 \pm 0,06968$	$a = 151,746 \pm 11,03$ $r_0 = -5,18674 \pm 0,526$
U4115	ESO4880049
$a = 82,7304 \pm 2,081$ $r_0 = -0,914385 \pm 0,02959$	$a = 120,844 \pm 1,301$ $r_0 = -1,64592 \pm 0,04381$
ESO3050090	ESO3020120
$a = 79,0207 \pm 2,595$ $r_0 = -2,03572 \pm 0,1307$	$a = 102,296 \pm 2,292$ $r_0 = -1,83145 \pm 0,12844$
ESO1870510	ESO1200211
$a = 51,964 \pm 1,318$ $r_0 = -0,94524 \pm 0,05285$	$a = 51,964 \pm 1,326$ $r_0 = -0,94524 \pm 0,05424$

Tabla 2.1: En esta tabla se muestran diferentes galaxias tipo enanas con sus respectivos valores de parámetros: $a = \sqrt{G\rho_c}$ y r_0 de acuerdo a la tabla 2.1, para lo cual se utilizó el ajuste de la ecuación (2.4).

representa en la siguiente tabla 2.1.

Las gráficas de los ajustes se presentan en la figura 2.1. Los ajustes en las curvas de rotación de las galaxias U11616, U11557, U4115 y ESO4880049 son muy buenos ya que son muy consistentes con los datos observacionales. Ahora, en el caso de las galaxias ESO3050090, ESO3020120 y ESO1870510, la incertidumbre es mayor, ya que algunos datos observacionales no encajan del todo bien con el ajuste de la curva.

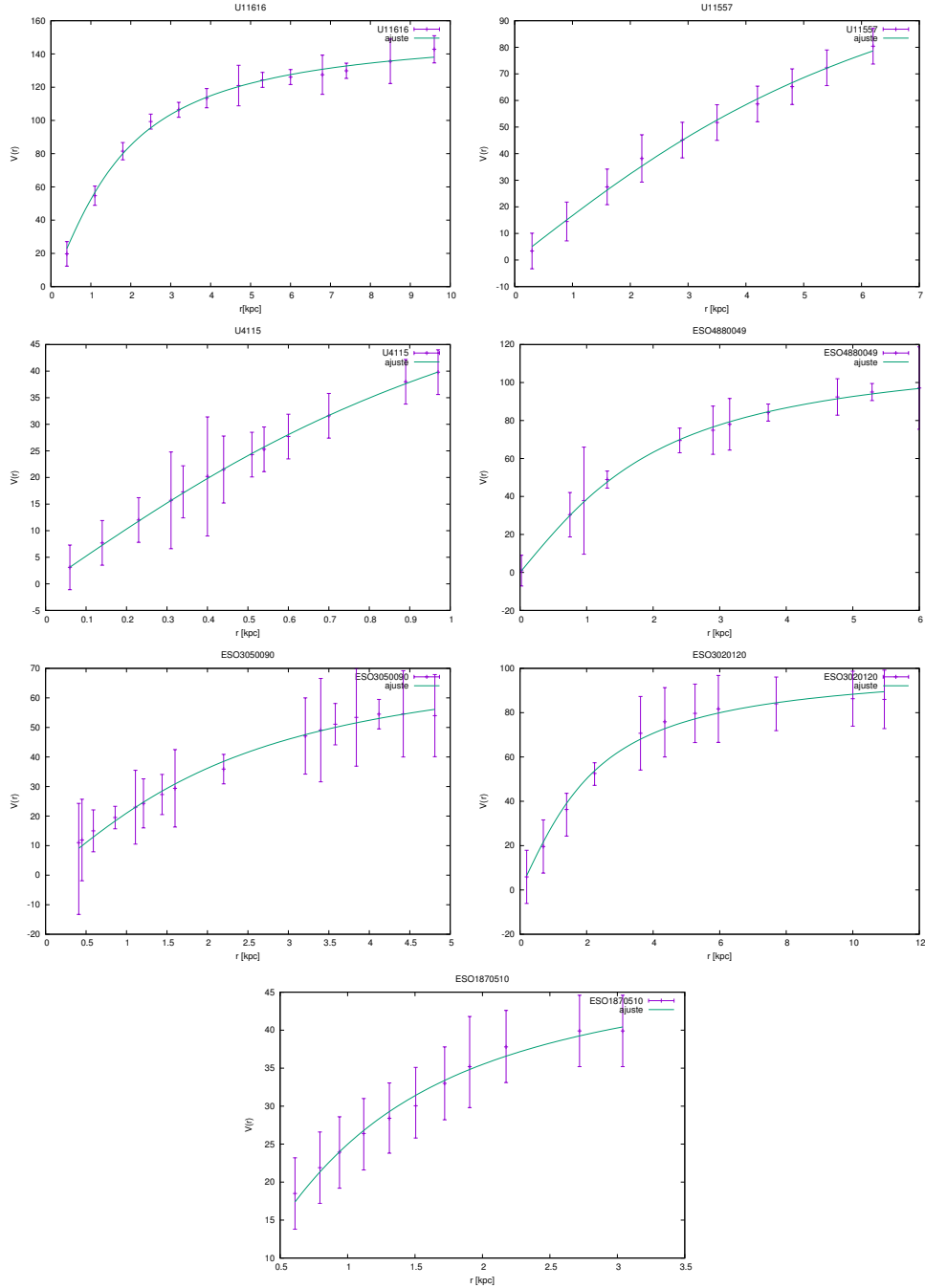


Figura 2.1: Se muestran varios tipos de curvas de rotación isotérmicas, usando el ajuste de la ecuación (2.4), con los parámetros $a = \sqrt{GA}$ y r_0 . El catálogo de galaxias son de tipo enanas con baja luminosidad, las cuales son: U11616, U11557, ESO4880049, ESO3050090, ESO3020120 y ESO1870510.

Capítulo 3

Condensado de Bose - Einstein como materia oscura

3.1. Condensado de Bose - Einstein

En la década de 1920, Satyendra Nath Bose y Albert Einstein publican un artículo científico, el cual describe ciertas reglas para determinar si dos bosones deberían considerarse idénticos o diferentes. Esta teoría es conocida como el condensado de Bose - Einstein. La teoría de Bose, describe que las partículas a temperatura ambiente se encuentran en muchos niveles diferentes de energía. Sin embargo, a muy bajas temperaturas sucede una transición de fase, lo cual provocaría que una gran proporción de estas partículas alcanzan el nivel de mínima energía, el cual es el estado fundamental, donde algunas de estas partículas se condensan sobre el mismo estado, mientras que las demás partículas salen de la zona.

En el año de 1924, Einstein demostró esta teoría con un gas de bosones sin spin, los cuales tienen este comportamiento para una temperatura inferior a una temperatura crítica, por lo cual recibe el nombre de Condensado de Bose - Einstein (BEC por sus siglas en inglés) a dicha agrupación de partículas de ese nivel inferior. Años más tarde se recreó la teoría de BEC para el gas de Rubidio 87 (Rb-87). El Rubidio (Rb), es un metal normal conocido en la tabla periódica, y el Rb-87 un gas conocido en la naturaleza. En la actualidad, se han llevado a cabo experimentos de Condesados de Bose - Einstein de Sodio (Na), Litio (Li) y Rubidio (Rb), los cuales forman un condesado con mayor cantidad de átomos y se preservan por mayor tiempo. Por lo que explicaremos a continuación el experimento del BEC del Rb 87 que mereció el premio nobel de Física [12].

3.2. Experimento del BEC del Rubidio 87 en el año 1995

En 1995, se logró crear el primer BEC con átomos de Rubidio (Bb-87) [12]. Para la obtención de este experimento, el primer reto era confinar los átomos del gas en un lugar fijo, para esto se utilizaron rayos láser ubicados uno frente al otro en las direcciones de los ejes x , y y z . Los cuales se situaban en esas posiciones, por si el átomo se mueve hacia la izquierda, el rayo láser ubicado en sentido opuesto hará que la velocidad del átomo disminuya y viceversa para algún átomo en lado de la derecha. Esto provoca que los átomos se mantengan localizados sin escapar de la región donde los láseres producen un potencial tipo pozo de oscilador armónico.

Con los átomos fijos y centrados mediante los rayos láser, el siguiente paso es confinarlos mediante una trampa magnética producida por varios multipolos magnéticos. Los átomos tendrá estados de energía ya muy baja, pero aún dependiente de la orientación del momento magnético respecto al campo multipolar externo. Así se atrapan los átomos dentro del campo magnético.

El siguiente paso del experimento es la evaporación de los átomos con mayor energía cinética para que permanezcan los de menor energía. Para lograrlo los láseres se apagan y se encienden, así los átomos comienzan a dispersarse cuando los láseres son apagados, y al momento de encenderlos, los átomos vuelven a ser atrapados. Este proceso se muestra en la figura 3.1,

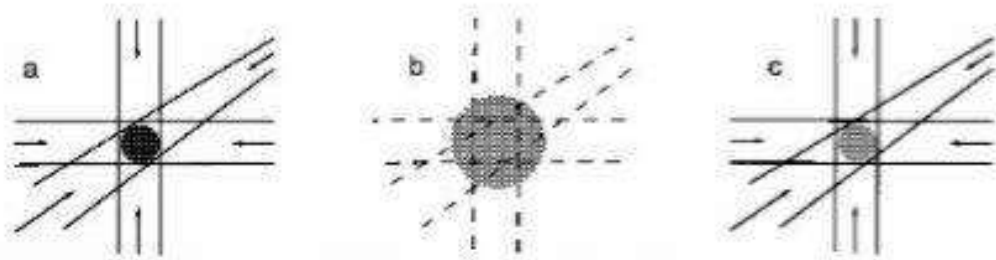


Figura 3.1: En *a*, se muestra los átomos atrapados por la intersección de los láseres, las líneas hacen referencia a la dirección de los láseres. En *b*, es el momento donde se apagan los láseres y los átomos comienzan a expandirse, y a salir de la zona de confinamiento. En *c*, se encienden los láseres de nuevo y los átomos que quedan en la intersección de los láseres, y al encenderlos de nuevo siguen confinados (la representación del proceso fue tomado del artículo [12]).

el cual es llevado a cabo a temperaturas de 10^{-9} K. La muestra resultante conserva sólo

átomos con la energía más baja [12].

Al finalizar el proceso de evaporación, sólo aquellos átomos con baja energía quedan concentrados en la trampa. Después por aproximadamente 70 segundos se deja expandir esta nube de gas para medir la energía cinética y con ello la distribución de velocidades de los átomos que aún quedan en la trampa. Después de la expansión los átomos alcanzan una temperatura crítica T_c , eso es en cuestión de milisegundos, lo que permite que los átomos se acumulen rápidamente en el estado de mínima energía. Por lo que la nube del gas de átomos al inicio es analizada como se muestra en la figura 3.2. Al principio los átomos con baja energía no se han acumulado en el centro y posteriormente, en la segunda imagen, ya lo han hecho. De esta manera se realizó el experimento del condensado de Bose-Einstein de Rb-87.

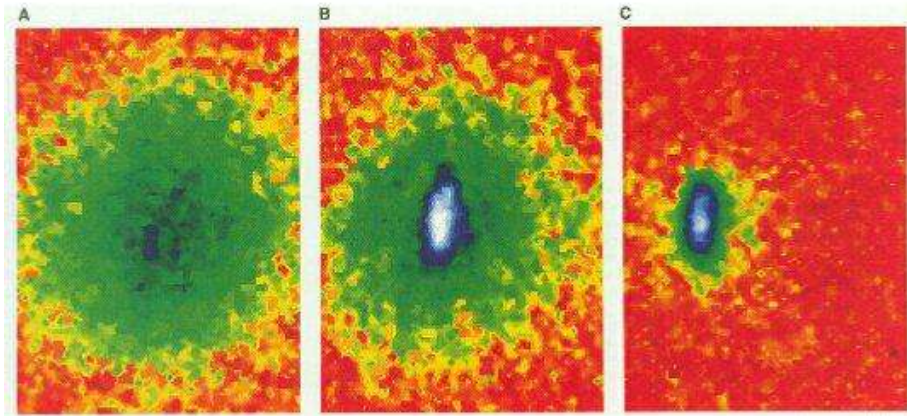


Figura 3.2: En la imagen *A*, se muestra la distribución de velocidades de la nube de gas de átomos de Rubidio-87, en el espacio de fase. En la imagen *B*, la nube de gas tiene una nueva distribución de velocidades después de que ha pasado por el proceso de evaporación de átomos, por lo que, ahora en la imagen representa los átomos de baja energía cinética. En la imagen *C*, la distribución tiene una mayor concentración de densidad el cual está representado en colores verde y azul (la representación del proceso fue tomado del artículo [12]).

3.3. El condensado como materia oscura

Al igual que en el condensado de laboratorio, la materia oscura de bosones ultraligeros debiera tener una temperatura crítica, ésta es de $T_c = \frac{1}{m^{5/3}} \text{ TeV}$ [1-3], para la masa de

$10^{-22} \text{ eV}/c^2$. El Universo adquiere esta temperatura en la época previa al CMB, por lo que las anisotropías se ven reflejadas por estructuras ya formadas de condensado.

Como se tiene una agrupación de partículas en el mismo nivel de mínima energía, se trata de un estado de coherencia cuántica, lo que implica que a primer orden la dinámica puede representarse como la de una sólo partícula, en lo que se conoce como régimen de Gross-Pitaevskii. En lugar de tener una trampa con láseres lo que ocurre en este modelo de materia oscura es que la densidad de los bosones acumulados en el condensado generan un potencial gravitacional que actúa como trampa al mismo tiempo. El potencial gravitacional generado por el condensado entonces sería la causa de que la materia luminosa se incorporase a las galaxias y la formación de estructura estaría determinada por la dinámica del condensado [2].

La ventaja de este modelo es que por una parte la materia oscura galáctica no tendría el problema de densidades picudas y por otra, no permite la formación de estructuras pequeñas, debido a que las partículas son extremadamente ligeras. Estos dos problemas los tiene el modelo de materia oscura fría (CDM).

Entonces, la dinámica de las estructuras está determinada por la ecuación de Gross-Pitaevskii acoplada al campo gravitacional que éste genera. En su versión más general, el sistema depende tanto del espacio como del tiempo y se describe a continuación.

3.4. Sistema de ecuaciones de Gross-Pitaevskii-Poisson

La ecuación de Gross-Pitaevskii es la ecuación de Schrödinger con una interpretación macroscópica y se escribe de la siguiente forma [5]:

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\Psi} + \tilde{v} \tilde{\Psi} + \frac{2\pi\hbar^2 \tilde{a}}{m^2} |\tilde{\Psi}|^2 \tilde{\Psi}, \quad (3.1)$$

donde la función de onda depende del espacio y el tiempo $\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}(\tilde{t}, \tilde{x})$, m es la masa del bosón, $\tilde{V}$ es un potencial que actúa como trampa al que es sometido un gas atómico (en el caso de la materia oscura será el potencial gravitacional autogenerado por el condensado), $\tilde{a}$ es la longitud de dispersión de los bosones y se relaciona con el número de átomos contenidos en una región donde se ha condensado el gas. Una observación importante es que la función de onda, no tiene una interpretación cuántica, sino macroscópica.

Ahora, siguiendo la idea del modelo de BEC como materia oscura, la trampa a la que es sujeta el gas de bosones ultraligeros, no es del tipo electromagnético ni con láseres como se utilizó en el experimento del Rubidio 87, sino que el gas mismo genera su potencial gravitacional. Es decir, la densidad del gas es la fuente de un campo gravitacional que mantiene a los bosones atrapados en una región localizada.

Entonces, el potencial en la ecuación (3.1) de Gross-Pitaevskii, obedece la ecuación de Poisson, cuya fuente es la densidad del condensado. El sistema acoplado de ecuaciones Gross-Pitaevskii-Poisson es el siguiente [5]:

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\Psi} + \tilde{V} \tilde{\Psi} + \frac{2\pi\hbar^2 \tilde{a}}{m^2} |\tilde{\Psi}|^2 \tilde{\Psi}, \quad (3.2)$$

$$\tilde{\nabla}^2 \tilde{V} = 4\pi G m |\tilde{\Psi}|^2. \quad (3.3)$$

Matemáticamente éste es un sistema acoplado de ecuaciones para $\tilde{\Psi}$, que evoluciona en el tiempo, cuya evolución está dictada por la ecuación de Gross-Pitaevski y para el potencial $\tilde{V}$, cuya ecuación es la de Poisson.

Para poder integrar la ecuación (3.2) numéricamente, es importante escalar las variables para remover las constantes físicas. Para ello se usan los siguientes cambios de variables $\hat{\Psi} = \frac{\sqrt{4\pi G \hbar}}{mc^2} \tilde{\Psi}$, $\hat{x} = \frac{mc}{\hbar} \tilde{x}$, $\hat{y} = \frac{mc}{\hbar} \tilde{y}$, $\hat{z} = \frac{mc}{\hbar} \tilde{z}$, $\hat{t} = \frac{mc^2}{\hbar} \tilde{t}$, $\hat{V} = \frac{\tilde{V}}{mc^2}$ y $\hat{a} \rightarrow \frac{c^2}{2mG} \tilde{a}$. Sustituyendo este cambio de variables en el sistema de ecuaciones (3.2) y (3.3) se reduce a las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \hat{t}} &= -\frac{1}{2} \hat{\nabla}^2 \hat{\Psi} + \hat{V} \hat{\Psi} + \hat{a} |\hat{\Psi}|^2 \hat{\Psi}, \\ \hat{\nabla}^2 \hat{V} &= |\hat{\Psi}|^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Una propiedad muy importante que probaremos ahora es que el sistema de ecuaciones (3.2) y (3.3), es invariante bajo las transformaciones $t = \lambda^2 \hat{t}$, $x = \lambda \hat{x}$, $y = \lambda \hat{y}$, $z = \lambda \hat{z}$, $\Psi = \frac{\hat{\Psi}}{\lambda^2}$, $V = \frac{\hat{V}}{\lambda^2}$, $a = \lambda^2 \hat{a}$, para un valor arbitrario utilizando el parámetro λ . Para demostrarlo, se sustituyen las transformaciones correspondientes en las ecuaciones anteriores. Primero para la ecuación de Gross-Pitaevskii,

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \hat{t}} = -\frac{1}{2} \hat{\nabla}^2 \hat{\Psi} + \hat{V} \hat{\Psi} + \hat{a} |\hat{\Psi}|^2 \hat{\Psi}, \quad (3.5)$$

obtenemos

$$i \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \lambda^2 \hat{t}} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \lambda^2 \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \lambda^2 \hat{y}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \lambda^2 \hat{z}^2} \right] + \frac{\hat{V}}{\lambda^2} \frac{\hat{\Psi}}{\lambda^2} + \lambda^2 \hat{a} \left| \frac{\hat{\Psi}}{\lambda^2} \right|^2 \frac{\hat{\Psi}}{\lambda^2}, \quad (3.6)$$

$$\frac{i}{\lambda^4} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \hat{t}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\lambda^4} \left[\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \hat{z}^2} \right] + \frac{\hat{V} \hat{\Psi}}{\lambda^4} + \lambda^2 \hat{a} \frac{|\hat{\Psi}|^2}{\lambda^4} \frac{\hat{\Psi}}{\lambda^2}, \quad (3.7)$$

$$i \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \hat{t}} = -\frac{1}{2} \hat{\nabla}^2 \hat{\Psi} + \hat{V} \hat{\Psi} + \hat{a} |\hat{\Psi}|^2 \hat{\Psi}. \quad (3.8)$$

Ahora para la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \hat{V} = |\hat{\Psi}|^2, \quad (3.9)$$

sustituyendo el reescalamiento se obtiene

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2 \hat{x}^2} \frac{\hat{V}}{\lambda^2} + \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2 \hat{y}^2} \frac{\hat{V}}{\lambda^2} + \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2 \hat{z}^2} \frac{\hat{V}}{\lambda^2} = \left| \frac{\hat{\Psi}}{\lambda^2} \right|^2, \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{\lambda^4} \left(\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial \hat{z}^2} \right) = \frac{|\hat{\Psi}|^2}{\lambda^4},$$

$$\nabla^2 \hat{V} = |\hat{\Psi}|^2. \quad (3.11)$$

Por tanto el sistema de ecuaciones Gross-Pitaevskii-Poisson es invariante bajo la transformación de escalamiento con el parámetro λ . Las consecuencias de esta invarianza son extremadamente relevantes para nuestro análisis, la razón es que si se calcula una solución para las variables que son gorro (acento circunflejo), digamos para $\lambda = 1$, se encuentran automáticamente otras soluciones para cualquier otro valor de λ , es decir, se encuentra una nueva solución para las variables gorro y tilde (unidades código y unidades física respectivamente), simplemente usando un nuevo valor de λ , lo que significa que se obtendrían diferentes tipos de soluciones con distintos valores del parámetro λ . En suma, al parametrizar longitud, tiempo y Ψ y por tanto densidad $|\Psi|^2$, se puede construir una infinidad de perfiles de densidad galáctica.

En el caso mas general, también cambiar el valor de la masa del bosón tiene consecuencias. Al hacer un cambio de la masa del bosón m , se obtendrán diferentes curvas de rotación con sus respectivos λ 's. De esta razón es muy importante que demostráramos la invarianza del parámetro λ .

Estas dos propiedades, son fundamentales para esta tesis. Por una parte, la invarianza de escala para un valor fijo de la masa m del bosón nos permite construir toda una gama de perfiles de curvas de rotación y con ello ajustar a datos observacionales. Por otra parte, se buscará el valor de m que mejor ajuste las curvas de rotación de la muestra de galaxias de baja luminosidad y por ello es necesario experimentar con distintos valores tanto de m como de λ .

Capítulo 4

Configuraciones de equilibrio

Las configuraciones de equilibrio se construyen asumiendo que el sistema es esféricamente simétrico, lo cual incluye a la función de onda y al potencial gravitacional. Por esta razón se usan coordenadas esféricas para plantear el problema. También se supone que la función de onda es armónicamente dependiente del tiempo, por lo que la forma de la función de onda se propone como $\Psi = \Psi(r, t) = e^{i\omega t}\psi(r)$, que garantiza inmediatamente que $|\Psi|^2$, es independiente del tiempo y por lo tanto el potencial gravitacional $V = V(r)$ también lo es.

El Laplaciano en el sistema de Gross-Pitaevskii-Poisson se puede escribir entonces como

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (4.1)$$

Con esta expresión y sustituyendo la dependencia temporal armónica, el sistema GPP se reduce al siguiente par de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} &= 2(V + a|\psi|^2 + \omega)\psi, \\ \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} &= 4\pi |\psi|^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Al igual que en el sistema de las ecuaciones (3.2) y (3.3), este sistema es invariante bajo las transformaciones de escalamiento con λ discutidas anteriormente.

Por lo que se toma nuevamente las ecuaciones (4.2) y sustituyendo los valores de $r = \hat{r}$, $V = \frac{\hat{V}}{\lambda^2}$, $a = \hat{a}\lambda^2$, $\psi = \frac{\hat{\psi}}{\lambda^2}$ y $\omega = \hat{\omega}\lambda^n$ con n a definir. La ecuación se reescribe de tal manera que

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \frac{\hat{\psi}}{\lambda^2}}{d\hat{r}^2 \lambda^2} + \frac{2}{\hat{r} \lambda} \frac{d \frac{\hat{\psi}}{\lambda}}{d\hat{r} \lambda} &= 2 \left[\frac{\hat{V}}{\lambda^2} + \lambda^2 \hat{a} \left| \frac{\hat{\psi}}{\lambda^2} \right|^2 + \lambda^n \omega \right] \frac{\hat{\psi}}{\lambda^2}, \\
\frac{1}{\lambda^4} \frac{d^2 \hat{\psi}}{dr^2} + \frac{2}{\lambda^4 \hat{r}} \frac{d \hat{\psi}}{d\hat{r}} &= 2 \left[\frac{\hat{V}}{\lambda^4} + \frac{\hat{a} |\hat{\psi}|^2}{\lambda^4} + \frac{\lambda^n \omega}{\lambda^2} \right] \hat{\psi}, \\
\frac{d^2 \hat{\psi}}{d\hat{r}^2} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{d \hat{\psi}}{d\hat{r}} &= 2 \left[\hat{V} + \hat{a} |\hat{\psi}|^2 + \lambda^n \lambda^2 \omega \right], \tag{4.3}
\end{aligned}$$

lo que significa que el único valor que puede tomar n es -2, sólo así la transformación es invariante, lo que implica que ω tiene la siguiente transformación

$$\omega = \frac{\hat{\omega}}{\lambda^2}.$$

Siendo así el sistema invariante bajo transformaciones de escala con parámetro λ . Como el sistema corresponde a un problema de valor propio para $\psi(r)$ con las condiciones de contorno de la suavidad de la función de onda en el origen y el aislamiento en el infinito, es decir, cuando $\psi(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. Este problema se resuelve numéricamente en un dominio espacial finito $r \in [0, r_{max}]$, donde la condición de frontera para el potencial gravitacional es $V = -M/r_{max}$ para $r_{max} \rightarrow \infty$ [1]. Ahora teniendo los valores de $\psi(r)$ (ya obtenidos numéricamente) se podrá calcular la masa de la siguiente manera, con las condiciones de frontera de una superficie esférica las cuales quedan de la siguiente manera $\theta : [-\pi/2, \pi/2]$, $\phi : [-\pi, \pi]$ y $r : [0, r]$.

$$\begin{aligned}
M(r) &= \int_0^r \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\psi(r)|^2 r^2 \cos(\theta) d\theta d\phi dr = \int_0^r \int_{-\pi}^{\pi} |\psi(r)|^2 r^2 \left[\sin(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2}) \right] d\theta dr \\
&= \int_0^r \int_{-\pi}^{\pi} 2 |\psi(r)|^2 r^2 d\theta dr = \int_0^r 2 |\psi(r)|^2 r^2 (\pi + \pi) dr \\
&= \int_0^r 4\pi |\psi(r)|^2 r^2 dr. \tag{4.4}
\end{aligned}$$

Con los resultados de $\psi(r)$ ya calculados, de esa forma se puede encontrar la densidad $\rho = \psi(r)^2$, que en la interpretación de la ecuación de Gross-Pitaevskii es la densidad de materia. Lo siguiente sería construir diferentes funciones de onda, con diversas masas y valores de λ , por consecuencia se recrearán diferentes curvas de la velocidad de rotación. Para construir todas estas diferentes funciones de onda y no calcular todas las soluciones para el sistema GPP, se utilizó la propiedad de reescalado del sistema GPP discutido arriba. Lo que implica que no es necesario reconstruir cada función de onda, sino que al hacer el reescalado del sistema GPP, dado un valor de $\psi(0)$, digamos $\psi(0) = 1$.

Con esta solución de valor central 1, se pueden construir todas las posibles configuraciones usando simplemente diferentes valores del parámetro de escala λ . Definiendo λ_0 como el asociado al valor central $\psi(0) = 1$, definimos $\lambda = \alpha\lambda_0$, entonces al aumentar o disminuir α , el parámetro λ aumenta o disminuye, y el resultado son configuraciones de equilibrio con valor central mayor o menor a 1, y con ello la densidad $|\psi(r)|^2$ es distinta en cada caso. Así, el perfil $\rho(r) = |\psi|^2$ es distinto para $\alpha < 1$, $\alpha = 1$, $\alpha > 1$ y en cada caso la función de masa en la ecuación (4.4) sería distinta.

Si la función de masa es distinta para cada valor de λ , también serán distintas las curvas de rotación para cada valor de λ , pues la curva de rotación está dada por

$$v_{rot} = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}. \quad (4.5)$$

En la figura 4.1 se muestra la densidad ρ para el caso en que $\psi(0) = 1$, a partir del cual, mediante el escalamiento de las soluciones, construiremos una gama de posibles curvas de rotación asociadas a configuraciones de equilibrio. La solución numérica presentada en esa figura, que es solución del problema de Strum-Liouville para ω no se resolvió en este trabajo, se resolvió previamente y aquí simplemente su usó [5].

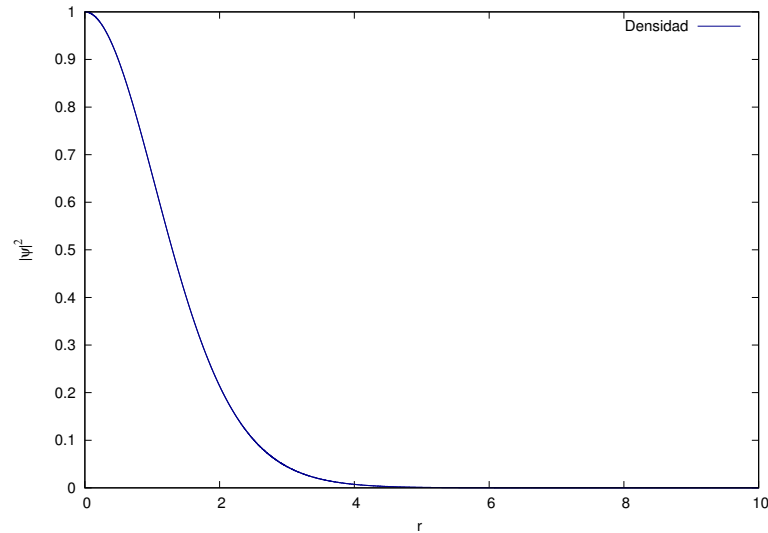


Figura 4.1: Densidad $\rho(r) = |\psi(r)|^2$ de la solución numérica obtenida numéricamente del sistema (4.2) para $a = 0$, $\psi(0) = 1$ y $\lambda = 1$.

Se trata de una función de densidad suave en el origen y decreciente. Este perfil suave es una de las fortalezas del modelo de materia oscura de BEC. En la figura 4.2 se muestra

la función de masa $M(r)$ de la solución, que se estabiliza a partir de cierto radio, lo que indica que la masa es finita en el dominio de integración.

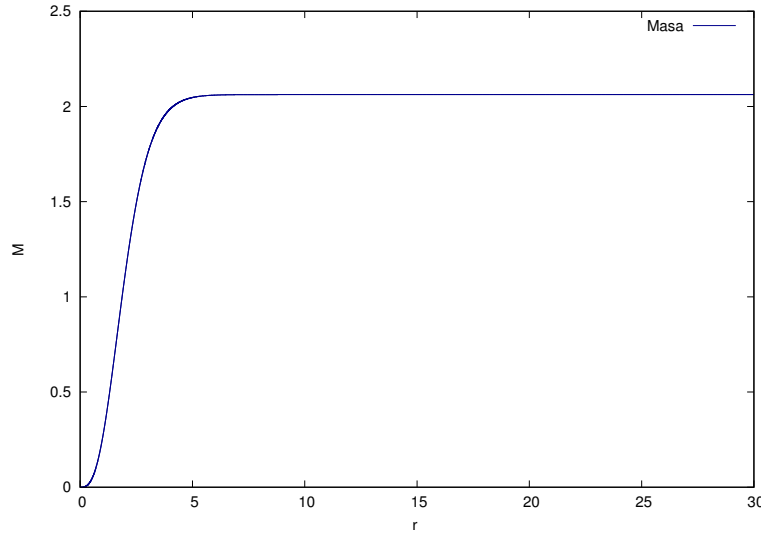


Figura 4.2: Función de masa $M(r)$ obtenida numéricamente mediante la integral $M = 4\pi \int |\psi(r)|^2 r^2 dr$ con $a = 0$ y $\psi(0) = 1$ y $\lambda = 1$. La función $M(r)$ adquiere un valor constante conforme aumenta r lo que significa que el sistema tiene masa finita.

La curva de rotación debida a dicha función de masa se presenta en la figura 4.3, se aprecia que la velocidad cerca del centro crece hasta llegar a un máximo y posteriormente decrece, como corresponde a un sistema aislado de masa finita. *Este es el tipo de perfil de velocidades que se usarán para ajustar las curvas de rotación observadas.*

4.1. Traducción de unidades código a unidades físicas

Una de la etapa importante en la comparación de soluciones numéricas con datos, es la conversión entre unidades de código y unidades físicas, y en el caso del sistema GPP es sutil, debido a que las unidades de longitud apropiadas son las de [kpc], mientras que las velocidades son de [km/s].

Las unidades código y las unidades físicas se relacionan una vez que la escala del parámetro de invarianza λ está fijo. Para fijarlo basta con elegir las unidades de longitud. Para hacerlo se parte de las unidades código, a las unidades escaladas (con gorro) y se llega a las físicas (con tilde). Al relacionar $\tilde{x}$ con x el parámetro λ quedará fijo:

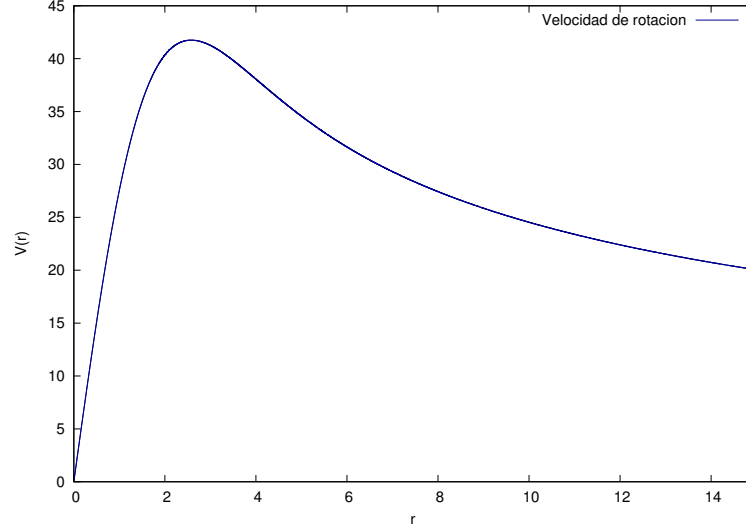


Figura 4.3: Curva de rotación de una configuración de equilibrio con $a = 0$, $\psi(0) = 1$ y $\lambda = 1$. Es creciente inicialmente y a distancias grandes muestra el comportamiento decreciente.

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \frac{mc}{\hbar} \tilde{x} = \frac{x}{\lambda} \quad \Rightarrow \\ \lambda &= \frac{\hbar}{mc} \frac{x}{\tilde{x}}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

El valor de λ se calcula sustituyendo los valores de la constante de Planck $\hbar = 1,054571628 \times 10^{-34}$ [J.s], y la masa del bosón $m = 10^{-22} \text{eV}/c^2 = 10^{-23} \text{eV}/c^2$, $c = 3 \times 10^8 [\text{m/s}] = 9,72233 \times 10^{-12} [\text{kpc/s}]$. Si $\tilde{x}$ es longitud en unidades físicas, y deseamos representarlo en kiloparsecs basta con establecer que una unidad de código equivale a un kiloparsec y se escribe $\lambda = \frac{\hbar}{mc}$ en kpc. A este valor de λ le llamamos $\lambda_0 = \frac{\hbar}{mc} \frac{[\text{kpc}]x}{\tilde{x}[\text{kpc}]}$.

Para una masa del bosón $m = 10^{-23} \text{eV}/c^2 = 1,60218 \times 10^{-19} \times 10^{-23} [\text{J}]/c^2$ toma el valor de $\lambda_0 = 0,0006389$ y para $m = 10^{-22} \text{eV}/c^2$ $\lambda_0 = 0,00006389$. Para conocer el valor de m que mejor ajusta las curvas de rotación usaremos distintos valores de m entre estos dos valores y tendremos el mismo número de valores de λ_0 .

Para cada valor de m tenemos entonces un valor de λ_0 a partir del cual variamos λ como $\lambda = \alpha \lambda_0$, con α un parámetro de regulación tal que si $\alpha > 1$, una unidad de código de longitud representa más que un kpc, mientras que $\alpha < 1$ corresponde a unidades de longitud menor que un kpc.

Una vez fijo el valor de α se puede reescalar la solución de la figura 4.1 para construir una nueva densidad que se escala como $\rho = \hat{\rho}/\lambda^4$, pues $\Psi = \hat{\Psi}/\lambda^2$. Con esta densidad

reescalada se calcula la función de masa $M(r)$ y con ello la velocidad de rotación v_{rot} . En este proceso se tiene que hacer un reescalado de unidades código a unidades gorro y después a unidades tilde que son las físicas $\tilde{\rho}$, $\tilde{M}(r)$, $\tilde{v}_{rot}$.

Primero rescalemos las unidades código de Ψ a unidades físicas de $\tilde{\Psi}$, sabemos que $|\Psi|^2 = \rho$, $\hat{\Psi} = \frac{\sqrt{4\pi G \hbar}}{mc^2} \tilde{\Psi}$ y como $|\Psi|^2 = \frac{|\hat{\Psi}|^2}{\lambda^4}$ se tiene

$$|\Psi|^2 = \frac{4\pi G \hbar^2}{\lambda^4 m^2 c^4} |\tilde{\Psi}|^2.$$

Por lo tanto $|\Psi|^2 = \rho$ (densidad de materia), en unidades físicas queda de la siguiente manera:

$$|\tilde{\Psi}|^2 = \frac{m^2 c^4 \lambda^4}{4\pi G \hbar^2} |\Psi|^2. \quad (4.7)$$

que es la traducción final entre unidades de código y físicas.

Una forma práctica de expresar la densidad en unidades físicas a partir de la curva de rotación, útil para reconstruir el perfil de densidad una vez que se ha ajustado los datos observacionales de una galaxia, es la siguiente. Partiendo de la expresión para la curva de rotación

$$\frac{v_{rot}^2 m}{r} = \frac{G m M(r)}{r^2}, \quad (4.8)$$

y usando la función de masa $M(r) = \int_0^r 4\pi |\psi(r)|^2 r^2 dr$ se tiene

$$\begin{aligned} v_{rot}^2 &= \frac{G}{r} \int_0^r 4\pi |\psi(r)|^2 r^2 dr \Rightarrow \frac{r v_{rot}^2}{G 4\pi} = \int_0^r |\psi(r)|^2 r^2 dr \Rightarrow \\ \frac{r}{G} \frac{dv_{rot}(r)^2}{dr} &= |\psi(r)|^2 r^2, \Rightarrow \frac{r}{r^2 G} \frac{dv_{rot}(r)^2}{dr} = |\psi(r)|^2 \Rightarrow \\ |\psi(r)|^2 &= \frac{1}{r G} \frac{dv_{rot}^2}{dr}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

La densidad comúnmente se expresa en unidades de ρ [$M_\odot/pc^3$], la longitud en [pc] y la velocidad debe escribirse entonces no en [km/s] sino en [pc/s] y G no en [Nm^2/kg^2], sino en [$pc^3/M_\odot s^2$]. El resultado final es

$$|\psi(r)|^2 = 2,3122712766540017 \times 10^{-3} \frac{1}{r} \frac{dv_{rot}^2}{dr} \quad (4.10)$$

Veamos ahora cómo se escala la función de masa $M(r) = 4\pi \int |\Psi|^2 r^2 dr$. Haciendo el debido reescalando con $r = \lambda \hat{r}$, $\Psi = \frac{\hat{\Psi}}{\lambda^2}$, $\hat{\Psi} = \frac{\sqrt{4\pi G \hbar}}{mc^2} \tilde{\Psi}$ y $\hat{r} = \frac{mc \tilde{r}}{\hbar}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
M(r) &= 4\pi \int_0^r |\Psi|^2 r^2 dr = 4\pi \int_0^{\lambda \hat{r}} \frac{|\hat{\Psi}|^2}{\lambda^4} \hat{r}^2 \lambda^3 d\hat{r} \\
&= 4\pi \int_0^{\frac{\lambda mc\tilde{r}}{\hbar}} \frac{\frac{\sqrt{4\pi G\hbar} |\tilde{\Psi}|^2}{m^2 c^4}}{\lambda} \frac{m^2 c^2 \tilde{r}^2}{\hbar} \frac{dmc\tilde{r}^2}{\hbar} \\
&= 4\pi \int_0^{\frac{\lambda mc\tilde{r}}{\hbar}} \frac{4\pi G\hbar^2}{\lambda m^2 c^4} \frac{m^3 c^3 \tilde{r}^2}{\hbar^3} |\Psi|^2 d\tilde{r} \\
&= 4\pi \int_0^{\frac{\lambda mc\tilde{r}}{\hbar}} \frac{4\pi Gm}{\lambda c\hbar} |\tilde{\Psi}|^2 \tilde{r}^2 d\tilde{r}. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Por tanto, si $\tilde{M}(\tilde{r}) = 4\pi \int_0^{\frac{\lambda mc\tilde{r}}{\hbar}} |\tilde{\Psi}|^2 \tilde{r}^2 d\tilde{r}$, entonces la traducción entre unidades de código y físicas es

$$M(r) = 4\pi \frac{4\pi Gm}{\lambda c\hbar} \tilde{M}(\tilde{r}) \Rightarrow \tilde{M}(\tilde{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\lambda c\hbar}{4\pi Gm} M(r). \tag{4.12}$$

La traducción de las unidades de velocidad $v_{rot}(r)$ ($v_{rot}^2 = \frac{GM(r)}{r}$), con $M(r) = 4\pi \int |\Psi|^2 r^2 dr$. Para pasar de unidades de código a gorro se tiene

$$v_{rot}^2 = 4\pi \frac{G}{\lambda \hat{r}} \int_0^{r\hat{\lambda}} \frac{|\hat{\Psi}|^2}{\lambda^4} \lambda^2 \hat{r}^2 d\hat{r} \lambda = 4\pi \frac{G}{\lambda \hat{r}} \int_0^{r\hat{\lambda}} \frac{|\hat{\Psi}|^2}{\lambda^4} \lambda^3 \hat{r}^2 d\hat{r} = 4\pi \frac{G}{\hat{r}} \int_0^{r\hat{\lambda}} \frac{|\hat{\Psi}|^2}{\lambda^2} \hat{r}^2 d\hat{r}. \tag{4.13}$$

Ahora para pasar de variables con gorro a unidades físicas con tilde se tiene

$$\begin{aligned}
v_{rot}^2 &= 4\pi \frac{1}{\frac{mc}{\hbar} \tilde{r}} \int_0^{\frac{mc}{\hbar} \lambda \tilde{r}} \left| \frac{\frac{\sqrt{4\pi G\hbar} \tilde{\Psi}}{m^2 c^4}}{\lambda^2} \right|^2 \left(\frac{mc\tilde{r}}{\hbar} \right)^2 d\frac{mc\tilde{r}}{\hbar} \\
&= 4\pi \frac{\hbar}{mc\tilde{r}} \int_0^{\frac{mc}{\hbar} \lambda \tilde{r}} \frac{\frac{4\pi G\hbar^2 |\tilde{\Psi}|^2}{m^2 c^4}}{\lambda^2} \left(\frac{m^2 c^2 \tilde{r}^2}{\hbar^2} \right) \frac{mc}{\hbar} d\tilde{r} \\
&= 4\pi \frac{\hbar}{mc\tilde{r}} \int_0^{\frac{mc}{\hbar} \lambda \tilde{r}} \frac{\frac{4\pi G\hbar^2 |\tilde{\Psi}|^2}{m^2 c^4}}{\lambda^2} \frac{m^3 c^3 \tilde{r}^2}{\hbar^3} d\tilde{r} \\
&= 4\pi \frac{4\pi G}{c^2 \lambda^2} \frac{1}{\tilde{r}} \int_0^{\frac{mc}{\hbar} \lambda \tilde{r}} |\tilde{\Psi}|^2 \tilde{r}^2 d\tilde{r}. \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Así, la traducción para la velocidad $\tilde{v}_{rot}^2 = 4\pi \frac{4\pi G}{\tilde{r}} \int |\tilde{\Psi}|^2 \tilde{r}^2 d\tilde{r}$ se reduce a

$$v_{rot}^2 = 4\pi \frac{1}{\lambda^2 c^2} \tilde{v}_{rot}^2 \Rightarrow \tilde{v}_{rot}^2 = \frac{1}{4\pi} \lambda^2 c^2 v_{rot}^2 \Rightarrow \tilde{v}_{rot} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \lambda c v_{rot}, \quad (4.15)$$

donde las unidades físicas $\tilde{v}_{rot}$, quedan en términos de v_{rot} y c (velocidad de la luz), en unidades de [km/s]. Por ejemplo, con $\lambda = 0,0006384$ para $m = 10^{-23} \text{eV}/c^2$, corresponde a la velocidad física $\tilde{v}_{rot} = 54,1622 \alpha v_{rot}$ [km/s], donde v está en unidades de código y c en [km/s]. De manera similar, cuando $\lambda = 0,00006384$, correspondiente al valor de la masa del bosón $m = 10^{-22} \text{eV}/c^2$, la velocidad se expresa como $\tilde{v}_{rot} = 5,41622 \alpha v_{rot}$ [Km/s]. El factor v_{rot} que aparece en la expresión de la velocidad física, es la velocidad que se obtuvo al fijar la masa del bosón por la ecuación $\lambda = \frac{\hbar}{mc} \frac{x}{\tilde{x}}$, $\lambda = \alpha \lambda_0$ para $\alpha = 1$.

Para calcular la velocidad de rotación se programó un código que primero calcula la función de masa a partir de los datos de la configuración de equilibrio para $\psi(r)$ mostrados en la figura 4.1. A partir de la función de masa se calcula $v_{rot}(r)$. Finalmente con el mismo código se calcula la velocidad en unidades físicas $\tilde{v} = \lambda c v$, con $\lambda = \alpha \lambda_0$. Como se dijo, λ_0 depende de la masa del bosón, por lo que al variar el parámetro α cambia λ y a su vez cambian r , ρ y por consecuencia la velocidad de rotación; es decir, se obtienen diferentes curvas.

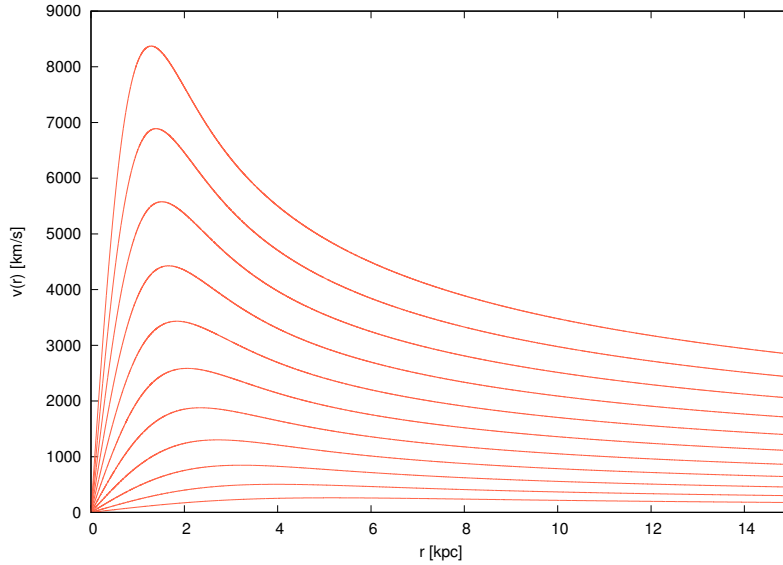


Figura 4.4: Variedad de curvas de rotación generadas por diferentes λ , con $\lambda \in [1, 2, 5]$, $a = 0$ y $m = 10^{-23} \text{eV}/c^2$.

En la figura 4.4 se muestran diferentes curvas de rotación mediante la variación de $\lambda = \alpha \lambda_0$ con el dominio de $0,5 \leq \alpha \leq 2$ para la masa del bosón $m = 10^{-23} \text{eV}/c^2$, y los ejes

rescalados $v(r)$ en [km/s] y r en [kpc], todas estas curvas de rotación se construyen usando $0,5 \leq \alpha \leq 2$. Se aprecia la dispersión de curvas de rotación desde cientos [km/s], hasta 8000 [km/s], lo cual es consecuencia del reescalamiento ya que si λ aumenta, la velocidad aumenta y viceversa. En el caso del radio, si λ aumenta el radio disminuye.

En la figura 4.5 se presentan las curvas de rotación generadas considerando $\lambda = \alpha\lambda_0$ en el rango $0,5 \leq \alpha \leq 2$, pero ahora para la masa del bosón $m = 10^{-22}\text{eV}/c^2$. En este caso las curvas de rotación tienen una menor velocidad de rotación.

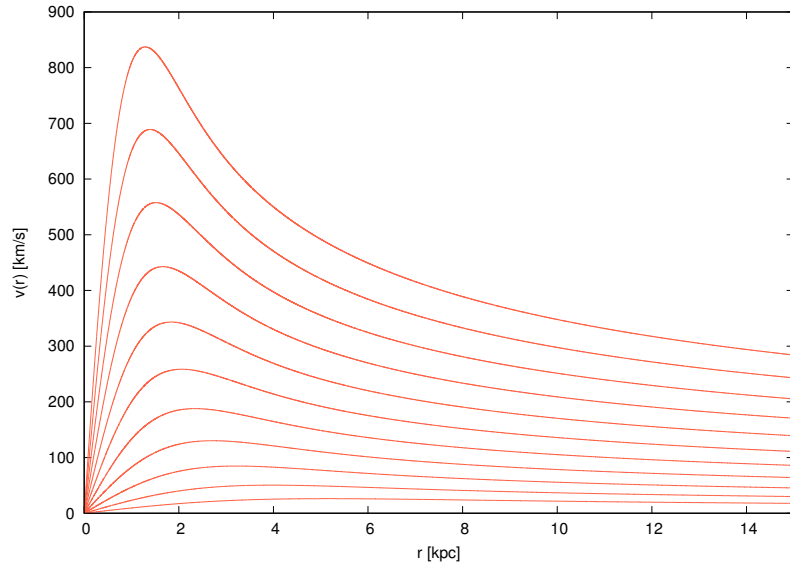


Figura 4.5: Variedad de Curvas de Rotación generadas por diferentes λ , con $a = 0$, $m = 10^{-22}\text{eV}/c^2$ y $\lambda \in [1, 2, 5]$.

Nuestro objetivo es obtener la curva con mejor ajuste a los datos observables de las curvas de rotación de la muestra de galaxias enanas que usamos.

4.2. Programa

Para la construcción de las curvas de rotación se hizo un programa que lo calcula numéricamente. Para esto es necesario contar con la solución numérica del sistema de GPP en equilibrio. Se usó aquella correspondiente al caso $\Psi(0) = 1$, la cual se obtuvo en el artículo [1]. Con esta única solución se obtienen valores de r y de ψ , para distintos valores del parámetro λ . La propiedad numérica de dichos datos es que tienen cierta resolución

dr_0 cubriendo el dominio con N_0 celdas.

La resolución de los datos es importante, debido a que la coordenada espacial r se reescala con λ . En algunos casos el valor de la resolución dr_0 no es suficiente para definir la función de onda ψ , pues la coordenada espacial se ha comprimido mucho. Por ello, antes de calcular la curva de rotación definimos un dominio con mayor resolución $dr = 0,1dr_0$ cubierto con $N = 10N_0$ celdas, para lo cual interpolamos los valores de ψ en este nuevo dominio.

Ya con la nueva resolución, para evaluar la función de masa total de la galaxia se obtiene en forma integral $M(r) = 4\pi \int |\psi|^2 r^2 dr$, donde se utilizó el método de suma de Riemann en el dominio $r \in [0, r_{max}]$, cubierto con N celdas iguales. El programa que calcula la masa es el siguiente:

```

program leerpsi
  implicit none
  ...

  lambda_n = 100
  lambda_min = 0.1d0
  lambda_max = 4.0d0
  delta_lambda = (lambda_max - lambda_min) / double(lambda_n)

  ...
  lambda = lambda_min + double(lambda_i)*delta_lambda
do masa= 1, 1000          !variacion de la masa
  !Se reescribe los datos
    rho = psi**2*lambda**4
    r = r / lambda
    ...
  !calculo para la masa de la galaxia

    do i=1,N
      mass(i) = mass(i-1) + 0.5d0*(rho(i-1)*r(i-1)**2 + rho(i)*r(i)**2)*dr
    end do
    ...

  !calculo para la velocidad de rotacion

  vel = (1/sqrt(4*pi))*3.0d5 *lambda* (0.0006384d0/masa) * sqrt(mass/r
)
  ! para masa del boson = 10**{-23} eV/c^2

  ...

```

```

!P = densidad central de materia, tomando i =1 ya que en cero
diverge
  do i =1, N-1
    P = (r(i)**2)**-1*[(r(i+1)*vel(i+1)**2 - r(i-1)*vel(i-1)**2)
/(2*dr)]*B*10
  end do
  ...

!error de chi al cuadrado

  do j=0,Ndo
    do i=1,N
      if (r(i).ge.r_dat(j)) then
        i_dat = i
        exit
      end if
    end do
    chi = (1.d0/(Nd - Np)) *((v_dat(j)-vel(i_dat))/(Er1_dat(j) - Er2_dat
(j)))*2
  end do
  print*, chi

r = lambda*r
end do

!error de los lambdas con su masa correspondiente

  min_of_lambdais_nuevo(masa) = MINVAL(min_error_of_lambdais)
  ilambda_nuevo = MINLOC(min_error_of_lambdais,dim=masa) - 1
  ...

end program

```


Capítulo 5

Ajuste de curvas de rotación

Como se ha descrito hasta ahora, para un valor dado de la masa del bosón m definimos λ_0 , y se construyen diversas curvas de rotación escalando el sistema con el parámetro $\lambda = \alpha\lambda_0$. Entonces, lo que se hace para ajustar las curvas de rotación observadas en las galaxias es elegir un conjunto de valores de m y un rango de valores de α para cada valor de m . El resultado es que primero, se determinará la masa del bosón que mejor ajusta el mayor número de galaxias y segundo, α determinará λ y con ello el valor de la densidad central, que es el parámetro que se usa en observaciones astronómicas.

Los valores de m que se usaron se encuentran en el rango $10^{-23} \text{ eV}/c^2$ - $10^{-22} \text{ eV}/c^2$, mientras que el parámetro $\alpha \in [0,1,4]$. La muestra de galaxias consta de 40 ejemplares y en la Tabla 5.1 se muestran los valores de λ y m que mejor ajustaron las curvas de rotación galácticas.

El error utilizado para los ajustes es el χ^2 , que es una medida del error relativo de las velocidades del modelo comparadas con las observadas. La definición es la siguiente

$$\chi^2 = \frac{1}{N - N_p} \sum_{i=1}^N \left(\frac{(v_{obs} - v_{modelo})}{\sigma} \right)^2, \quad (5.1)$$

donde N es el número de datos observacionales, N_p el numero de parámetros el cual en este caso es 1, y σ el error en medida mediante la velocidad de los datos observacionales.

Galaxia	λ	$m_b [eV/c^2]$	$\rho_0 10^{-1} [M_\odot/pc^3]$	χ^2
U11557	0.2560	0.016×10^{-23}	1.1530	0.01
U11616	0.4040	0.032×10^{-23}	71.0853	0.11
U4115	1.5820	3×10^{-23}	7.4466	0.043
ESO3020120	0.3730	0.04×10^{-23}	30.5208	0.053
ESO1870510	0.9277	0.9×10^{-23}	5.7533	0.34
ESO3050090	0.5739	0.2×10^{-23}	10.5359	0.0038
ESO4880049	0.5130	0.09×10^{-23}	24.6670	0.072
ESO1200211	1.0750	2×10^{-23}	2.4343	0.027
DDO064	0.9189	0.7×10^{-23}	8.3151	0.0766
DDO161	0.2900	0.02×10^{-23}	4.4701	0.3112
DDO170	0.2450	0.02×10^{-23}	3.6568	0.0282
ESO444-G084	0.8250	0.4×10^{-23}	13.3283	1.581
KK98-251	0.7090	0.4×10^{-23}	3.4364	0.0169
NGC0247	0.2140	0.008×10^{-23}	10.1502	0.0183
NGC0300	0.3900	0.08×10^{-23}	14.8744	3.179
NGC2366	0.6800	0.3×10^{-23}	7.4299	0.0252
NGC3109	0.3900	0.06×10^{-23}	6.6108	0.0242
NGC3741	0.5560	0.2×10^{-23}	4.9953	2.729
UGC00191	0.5560	0.1×10^{-23}	19.9812	0.8646
UGC00731	0.3800	0.05×10^{-23}	8.1458	0.4791
UGC04483	2.6160	20×10^{-23}	5.4192	0.3405
UGC05716	0.3880	0.05×10^{-23}	9.2304	1.1242
UGC05918	0.8200	0.06×10^{-23}	5.7115	2.5873
UGC06399	0.4360	0.06×10^{-23}	12.9059	0.4529
UGC06446	0.4840	0.08×10^{-23}	13.5851	1.1686
UGC6667	0.4040	0.05×10^{-23}	11.7630	0.0303
UGC06917	0.4040	0.04×10^{-23}	18.3798	2.43347
UGC06930	0.3660	0.03×10^{-23}	18.0641	6.2569
UGC07394	0.7080	0.017×10^{-23}	29.4764	6.3122
UGC00891	0.3280	0.04×10^{-23}	5.2637	0.054
UGC02259	0.5940	0.012×10^{-23}	20.6314	3.5201
UGC04325	0.7460	0.021×10^{-23}	26.43427	0.8149
UGC07524	0.3280	0.03×10^{-23}	9.3577	0.0262
UGC07603	0.5670	0.2×10^{-23}	14.1870	0.8272
UGC08286	0.5940	0.013×10^{-23}	20.6314	0.2072
UGC12632	0.4040	0.06×10^{-23}	8.1688	0.7964
UGC12732	0.2900	0.02×10^{-23}	10.0577	1.0761
UGCA442	0.5180	0.014×10^{-23}	6.6664	0.0220
UGCA444	0.5180	0.018×10^{-23}	5.1921	1.9326
UGC7608	1.1640	0.012×10^{-23}	9.0737	0.2575

Tabla 5.1: En la primer columna se encuentra el nombre de la galaxia, en la segunda columna el valor de λ con mejor ajuste, en la tercera columna el valor de la masa del bosón que mejor ajustó los datos, en la cuarta columna, se encuentra el valor de la densidad central de materia oscura ρ_0 . Por último en la quinta columna es el error de χ^2 de cada ajuste.

En la figura 5.1, se muestra un histograma con diferentes valores de masa del bosón, donde 32 de las 40 galaxias se encuentran en el intervalo de $[0,01, 0,31] m$. Para hacer más precisos el rango de masa que predomina es de $0,04 - 0,06 \times 10^{-23} eV/c^2$ con 10 galaxias cuyo mejor ajuste corresponde a este rango.

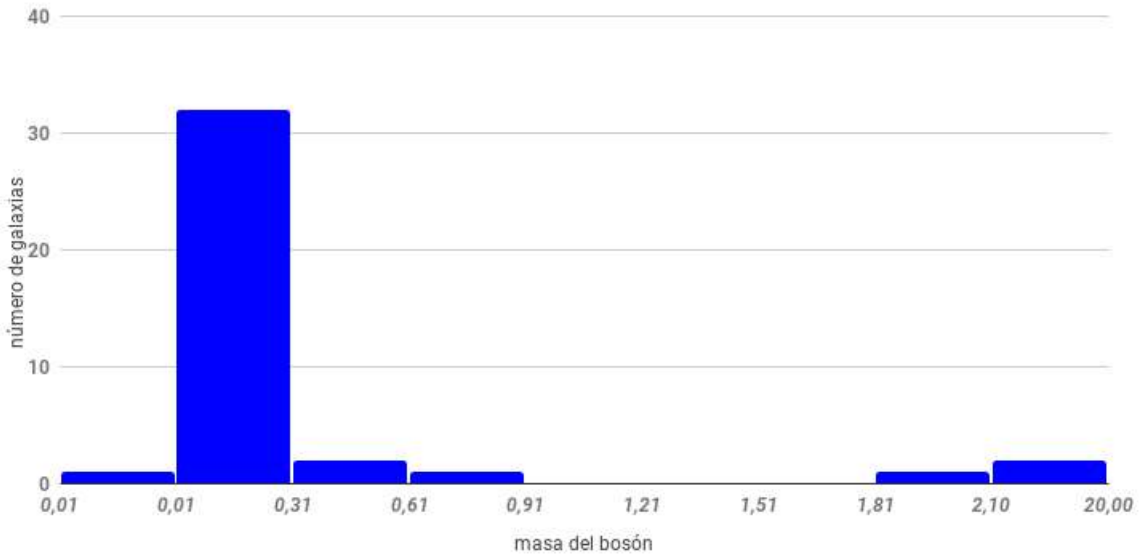


Figura 5.1: Histograma con los diferentes valores de masa del bosón.

Los ajustes de las curvas de rotación de toda la muestra se presentan en las figuras 5.2, 5.3, 5.4 y 5.5. En dichas gráficas se presenta la curva de rotación que ajusta los datos observados y además en un dominio mayor a aquel en que hay datos. Es decir, la curva de rotación que aparece en estas gráficas es una predicción del modelo, que de ser correcta, cuando para las curvas de rotación se midan a mayores distancias, éstas deberán estar cerca de la curva del model BEC.

Por ejemplo, en la figura 5.3, para la galaxia ESO1870510, si eventualmente la curva de rotación llega a estudiarse hasta $r = 7kpc$ la velocidad de rotación a esa distancia del centro debe ser aproximadamente de 28km/s.

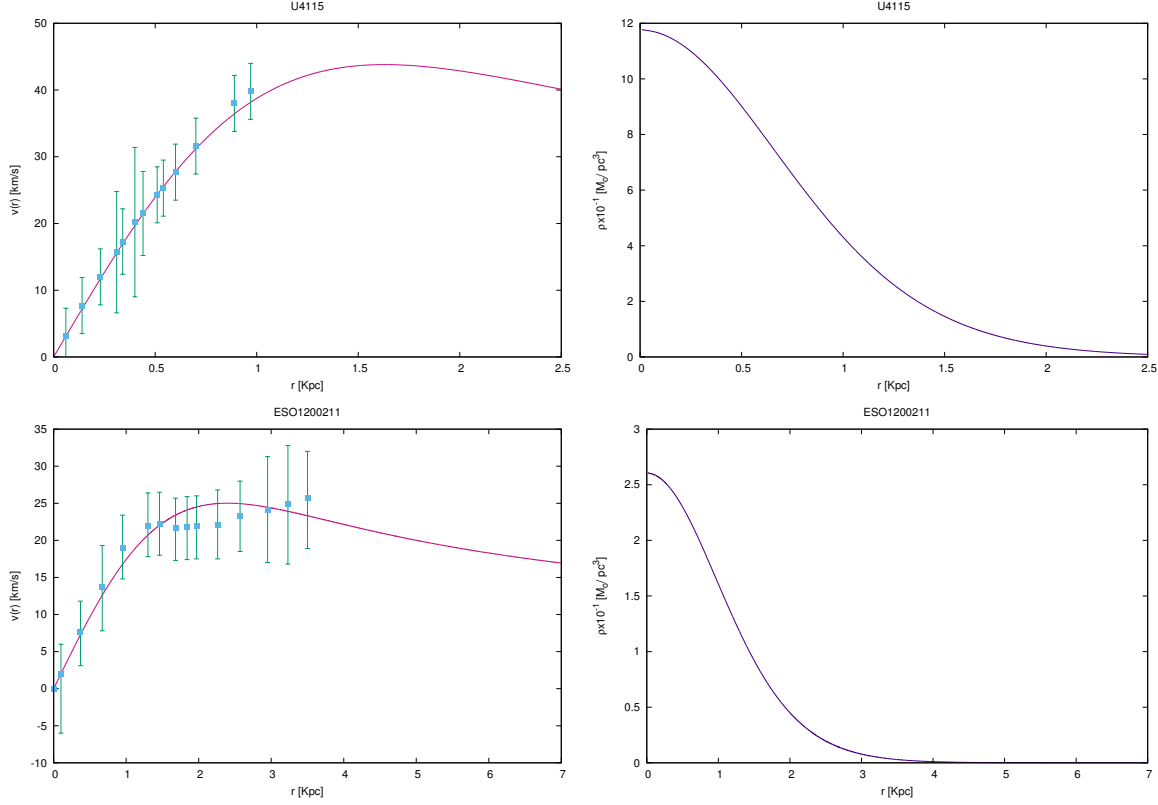


Figura 5.2: Del lado izquierdo se encuentran las curvas de rotación utilizando el mejor ajuste del parámetro λ y m . La galaxia U4115 se ajusta con $m = 3 \times 10^{-23} \text{ eV}/c^2$ y la galaxia ESO1200211 $m = 2 \times 10^{-23} \text{ eV}/c^2$. Las curvas de rotación con estos parámetros se encuentran en color rosa. Los datos observacionales están de color azul, con sus respectivas barras de error. En el lado derecho se encuentra la densidad de materia oscura de cada una de estas galaxias.

Con el mejor ajuste para cada galaxia, se obtienen los valores de λ y m . Con ello se puede calcular también la densidad de materia oscura. Para ello se pasa de unidades de código a físicas, de modo que la densidad se obtenga en las unidades estándar de $[M_\odot / \text{kpc}]$, por lo que la distancia r queda en [kpc]. Se usa el cambio de la ecuación (4.10), y se obtiene el valor de la densidad central $\tilde{\rho}(0)$. Los valores de la densidad central de cada galaxia se encuentran en la tabla 5.1.

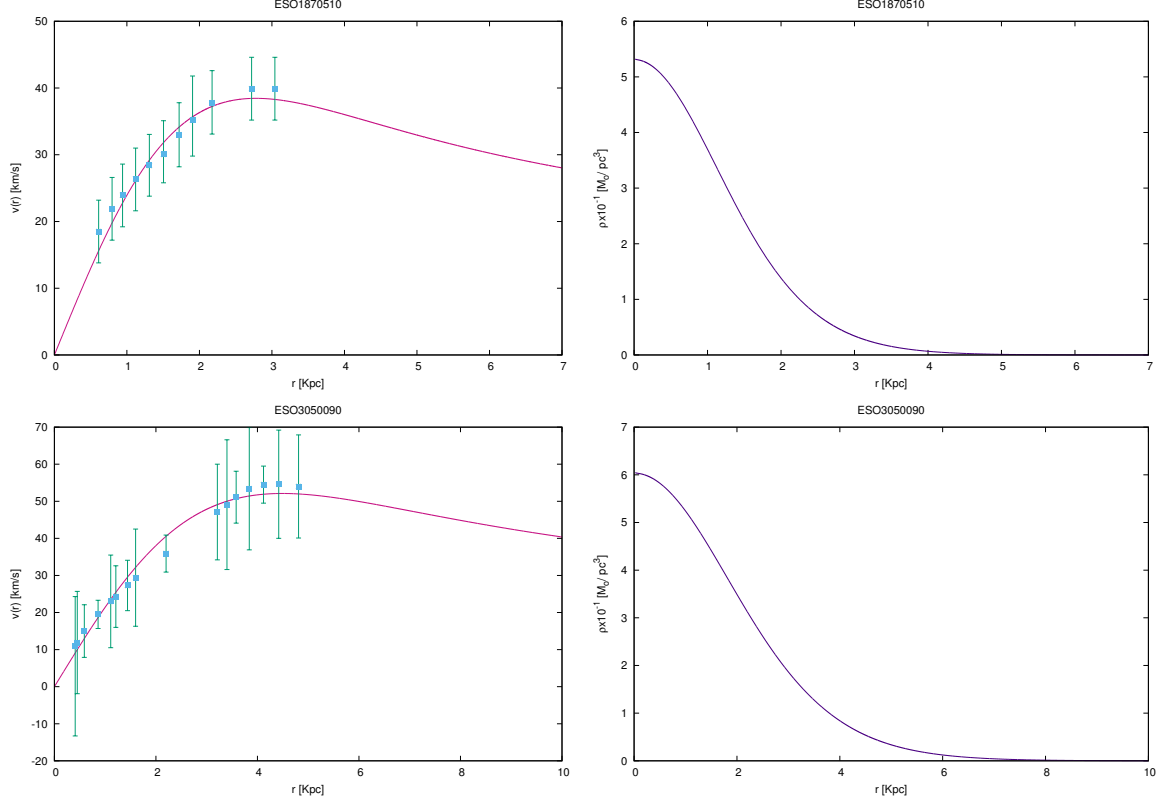


Figura 5.3: En el lado izquierdo se presenta la curva de rotación con mejor ajuste en color rosa y los datos observacionales en color azul y en lado derecho el perfil de densidad de la materia oscura. Para la galaxia ESO1870510 se tiene que la masa del bosón es $m = 0.9 \times 10^{-23} \text{ eV}/c^2$ con densidad central de $5.3227 \times 10^{-1} [M_{\odot}/pc^3]$. Para la galaxia ESO3050090 $m = 0.2 \times 10^{-23} \text{ eV}/c^2$, y tiene densidad central $6.04761 \times 10^{-1} [M_{\odot}/pc^3]$.

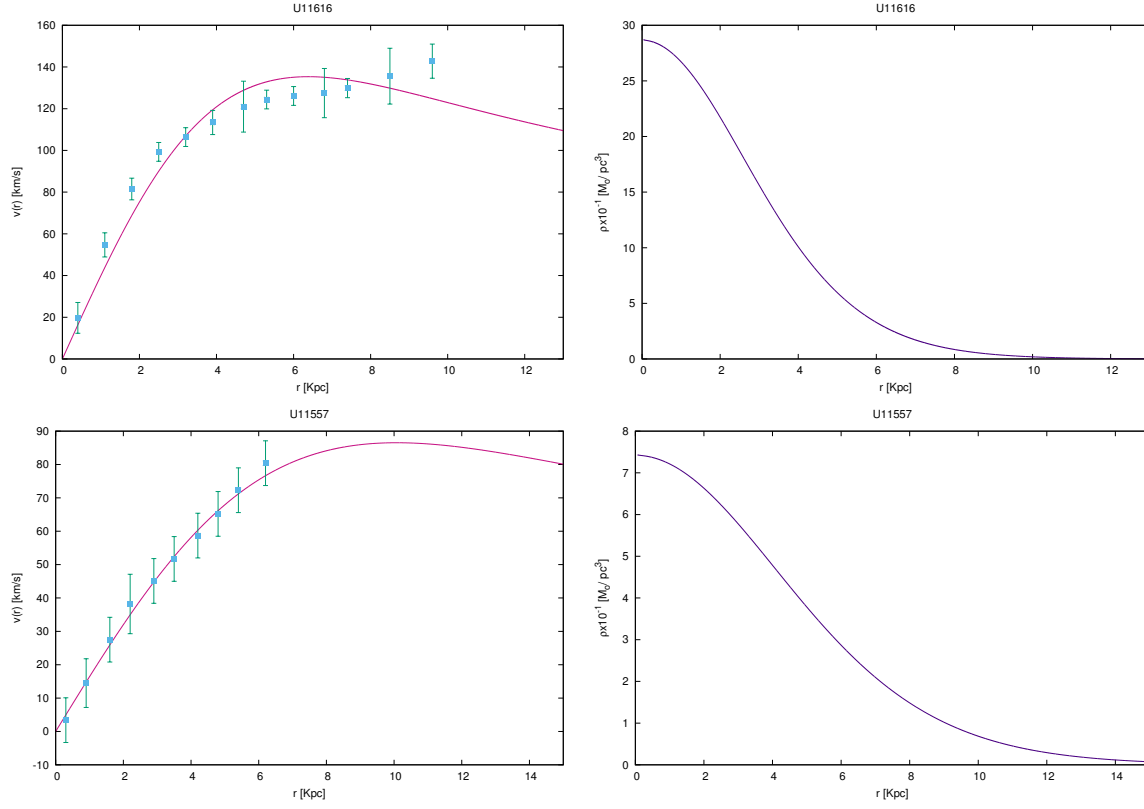


Figura 5.4: Para la galaxia U11616 $m = 0,032 \times 10^{-23} \text{ eV}/c^2$ y para U11557 $m = 0,016 \times 10^{-23} \text{ eV}/c^2$. Del lado derecho se muestra la densidad de materia oscura de cada galaxia.

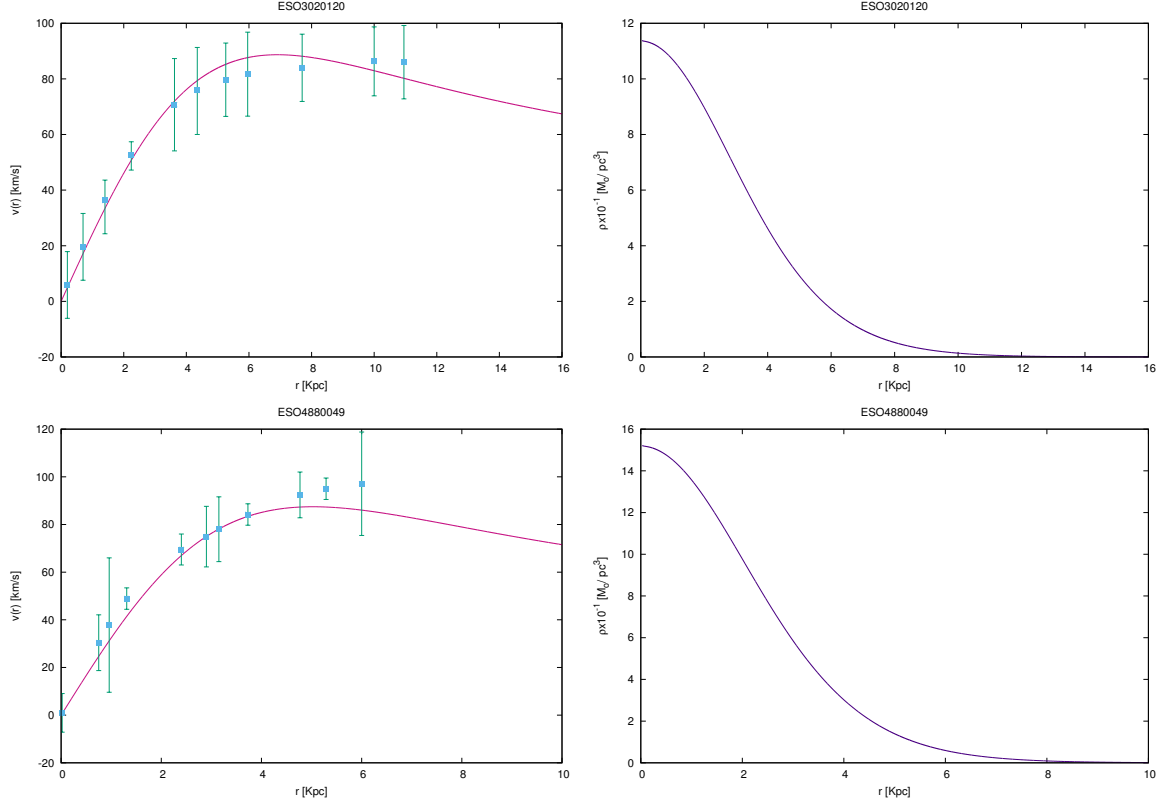


Figura 5.5: Curvas de rotación que arrojan para la galaxia ESO3020120 $m = 0,04 \times 10^{-23}$ eV/ c^2 y para ESO4880049 $m = 0,09 \times 10^{-23}$ eV/ c^2 . El ajuste de la curva de rotación se encuentra en color rosa, y en azul los datos observacionales de la galaxia. Del lado derecho se muestra la densidad de materia oscura de cada galaxia.

En las gráficas y tabla se muestra que las galaxias U4115, U11557, ESO3050090 tienen un ajuste muy adecuado, cuando la masa del bosón es alrededor de 10^{-22} eV/ c^2 . En la tabla 5.1 se expresan los valores obtenidos de los parámetros de λ y masa de bosón, en la segunda y tercera columna respectivamente. En la cuarta columna es el valor promedio del error obtenido, al comparar la curva de rotación usando los valores de los parámetros, con los datos observacionales de la galaxia, por lo que es que encuentra nuestro método. A continuación en las figuras 5.6, 5.7 se muestran los ajustes de rotación de las galaxias: DDO064, DD161, DDO170, ESO44-G084, NGC0247, NGC0300, NGC02366, NGC3109, NGC3741, UGC00191, UGC00731, UGC04483, UGC05918, UGC06399, UGC06446, UGC06667, UGC06930, UGC07399, UGC00891, UGC02259, UGC04325, UGC07524, UGC08286, UGC12632, UGC12732, UGCA442, UGCA444, UGC07608, y en las figuras 5.8, 5.9 la densidad de materia oscura de cada galaxia.

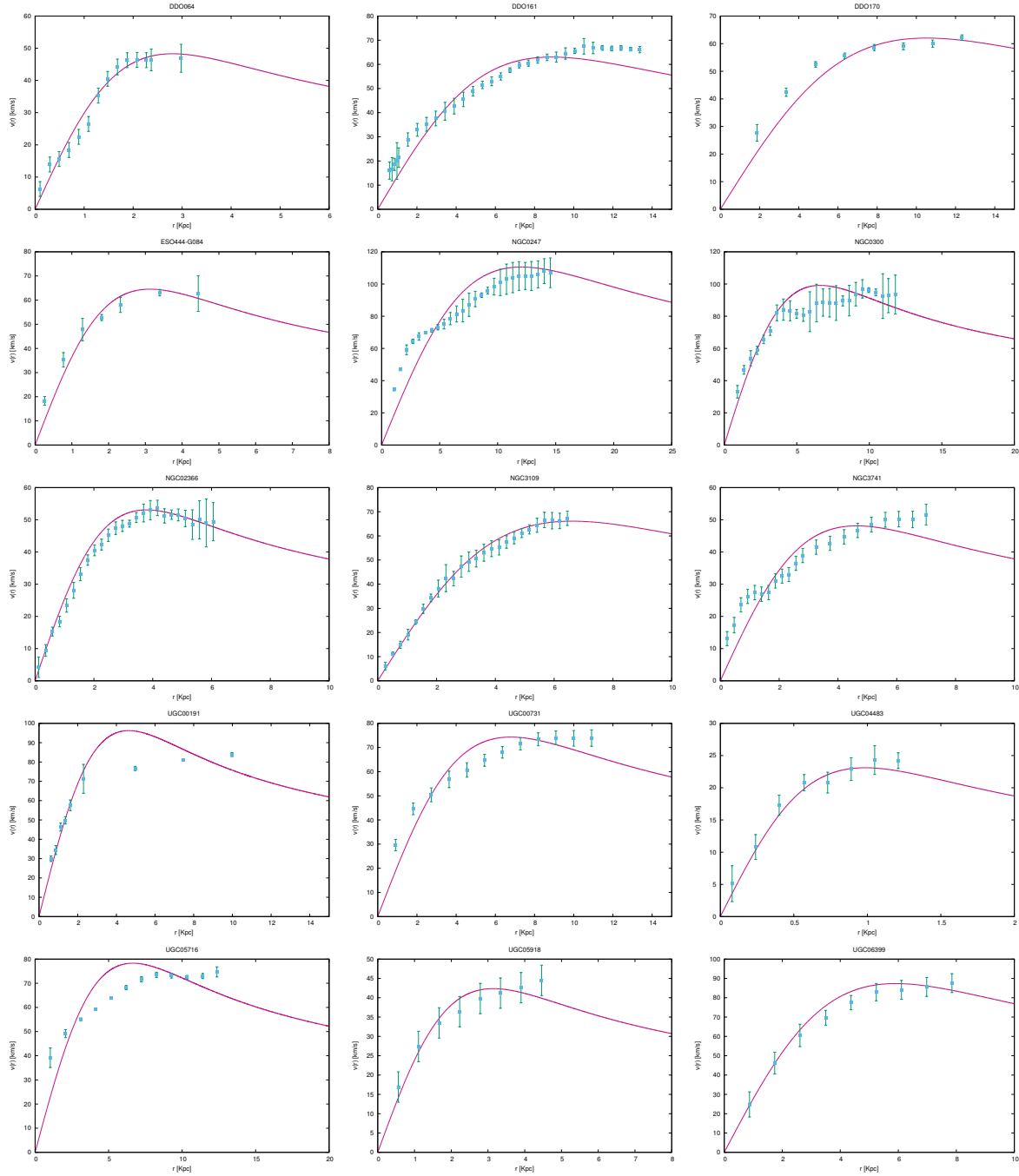


Figura 5.6: En las siguientes gráficas se muestra en color azul los puntos observacionales de la galaxia y en color violeta la curva de rotación obtenida con un λ y masa de bosón específica utilizando el método numérico.

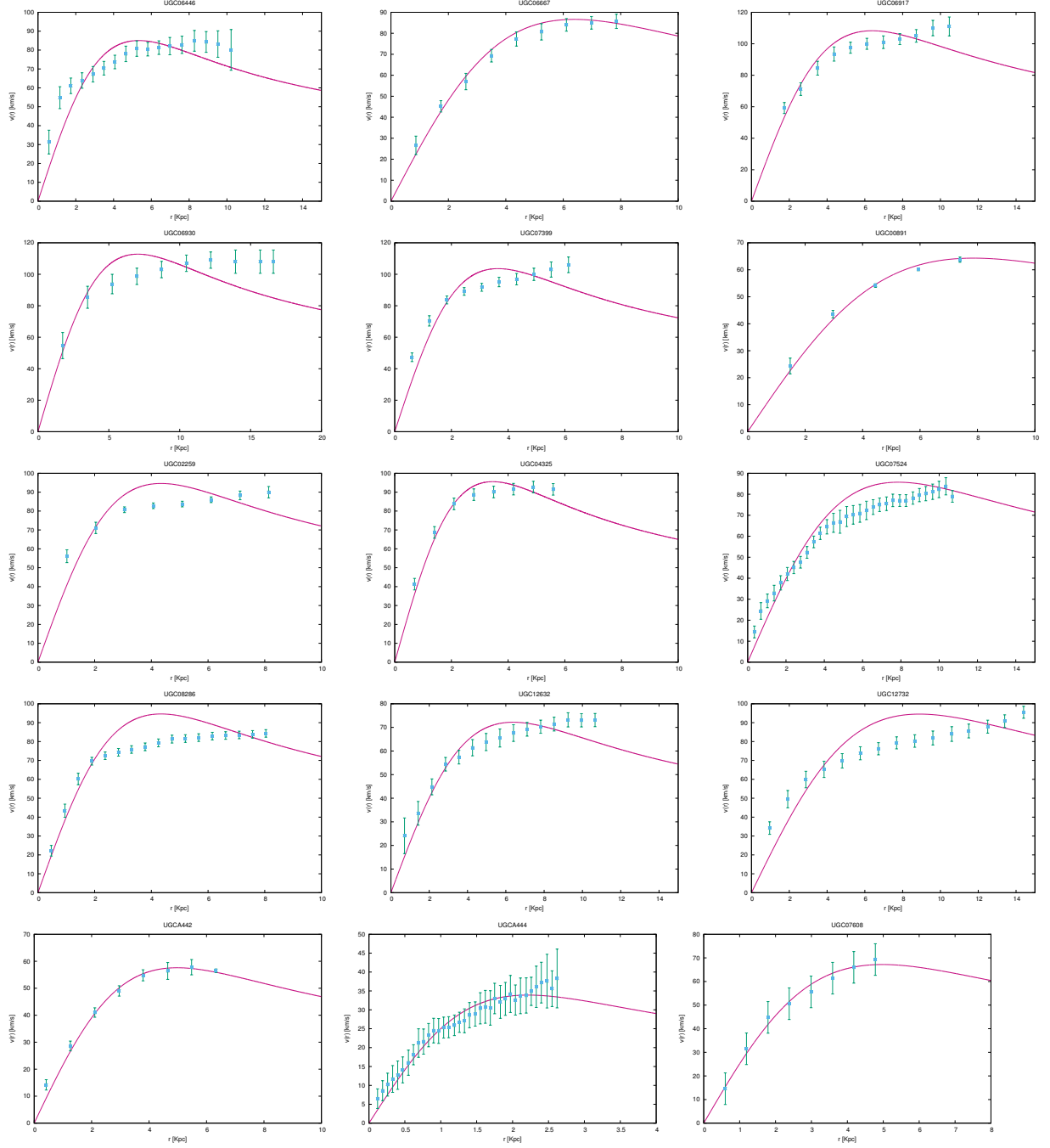


Figura 5.7: En las siguientes gráficas se muestra en color azul los puntos observacionales de la galaxia y en color violeta la curva de rotación obtenida con un λ y masa de bosón específica utilizando el método numérico.

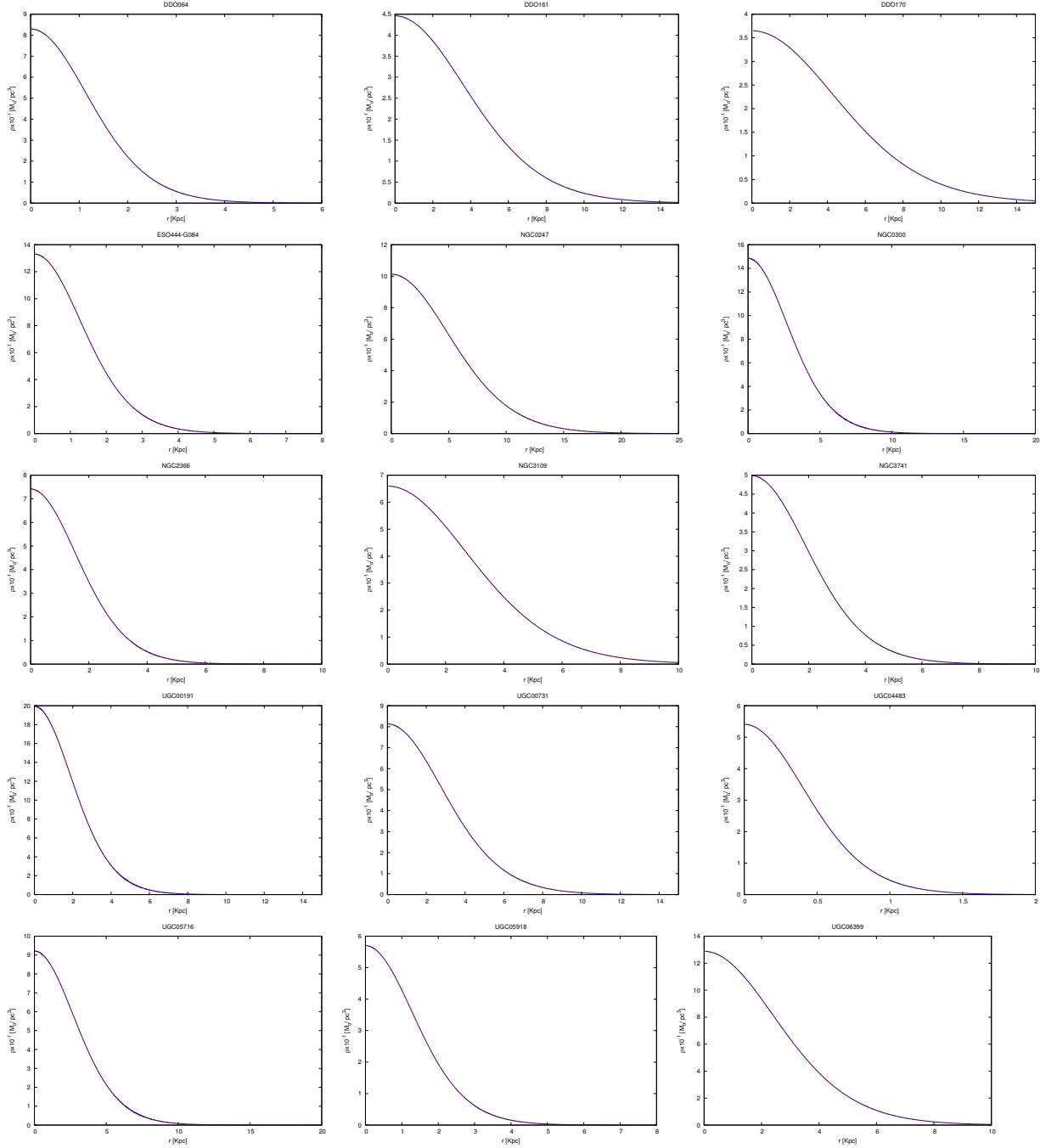


Figura 5.8: Utilizando el valor apropiado de λ para cada una de las galaxia, se obtiene la densidad de materia oscura de estas galaxias.

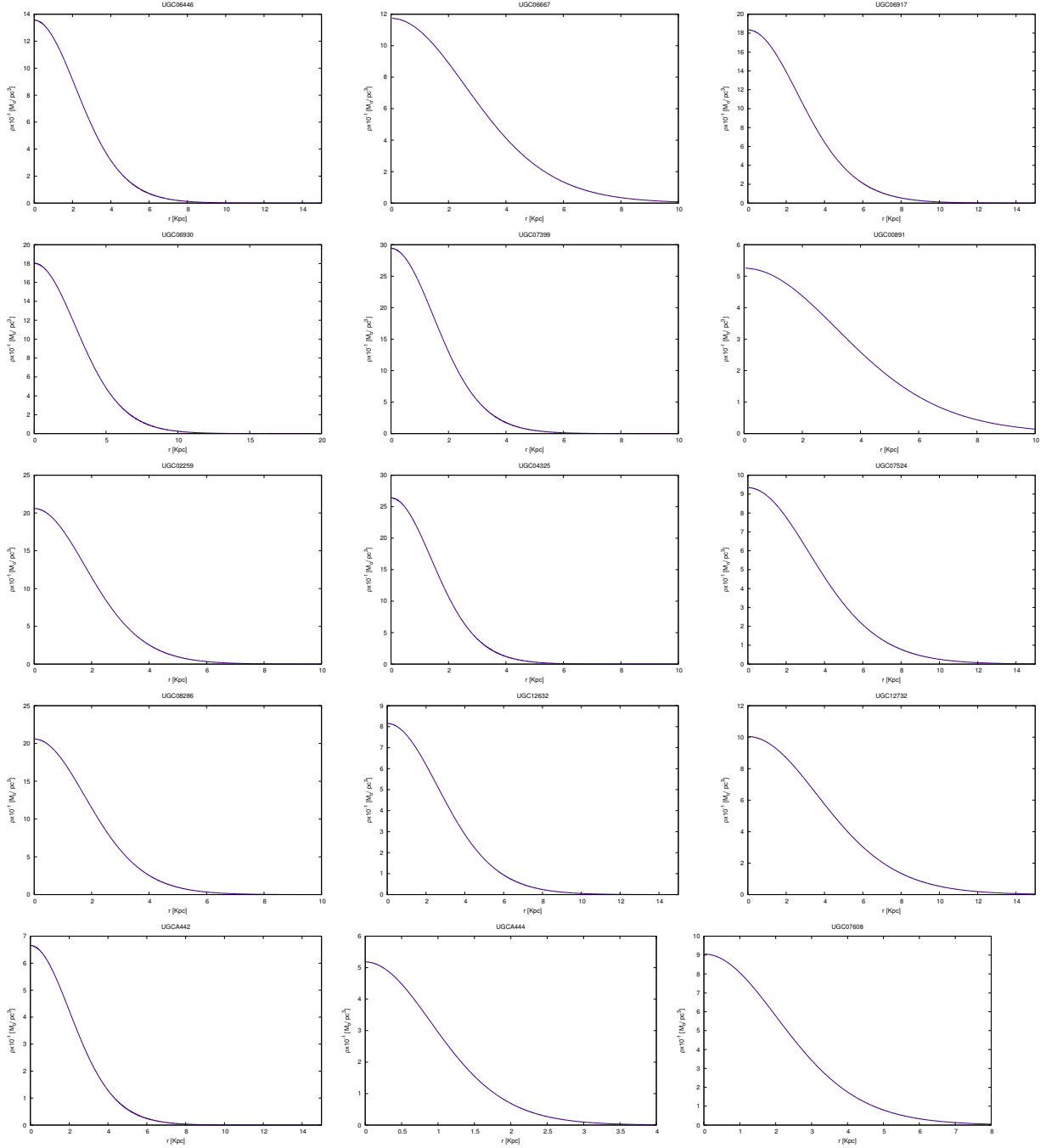


Figura 5.9: Utilizando el valor apropiado de λ para cada una de las galaxia, se obtiene la densidad de materia oscura de estas galaxias.

5.1. Comparación del ajuste del modelo del BEC con el perfil pseudoisotérmico

El perfil pseudoisotérmico mostrado en la ecuación (2.3), es un perfil fenomenológico que ajusta muy bien las curvas de rotación, pero sin suponer qué tipo de materia podría distribuirse de esa manera. Los parámetros de ajuste son r_0 y ρ_c [15].

La fórmula con la que se ajustan los datos en la expresión (2.4) para la curva de rotación de este perfil, cuyos parámetros fueron tomados de [15] para tener una comparación entre algunos de nuestros perfiles y los del halo pseudoisotérmico, y se encuentran en la tabla 5.2.

Galaxia	$\rho_0 [M_\odot/pc^3]$	$R_c [kpc]$	χ^2
U11557	0.0156	5.37	0.08
U11616	0.2065	1.46	0.14
U4115	0.1514	0.93	0.10
ESO3020120	0.0598	1.89	0.03
ESO1870510	0.0548	0.96	0.63
ESO3050090	0.0276	2.09	0.04
ESO4880049	0.1035	1.62	0.99
ESO1200211	0.0464	0.57	1.45

Tabla 5.2: Parámetros de ajuste con el perfil pseudoisotérmico. En la segunda columna, se encuentra el valor de la densidad central de materia ρ_0 , en la tercera columna el valor de escala de la distancia R_c y por último en cuarta columna es el valor de error de χ^2 , (valores tomados del artículo [15]).

En las figuras 5.10 y 5.11 se muestra la comparación entre las curvas de rotación del perfil pseudoisotérmico y el nuestro. Claramente a mayores distancias son diferentes, es decir que hacen predicciones muy distintas si en el futuro se tiene la información de la velocidad del gas en esas zonas.

5.1. COMPARACIÓN DEL AJUSTE DEL MODELO DEL BEC CON EL PERFIL PSEUDOISOTÉRMICO

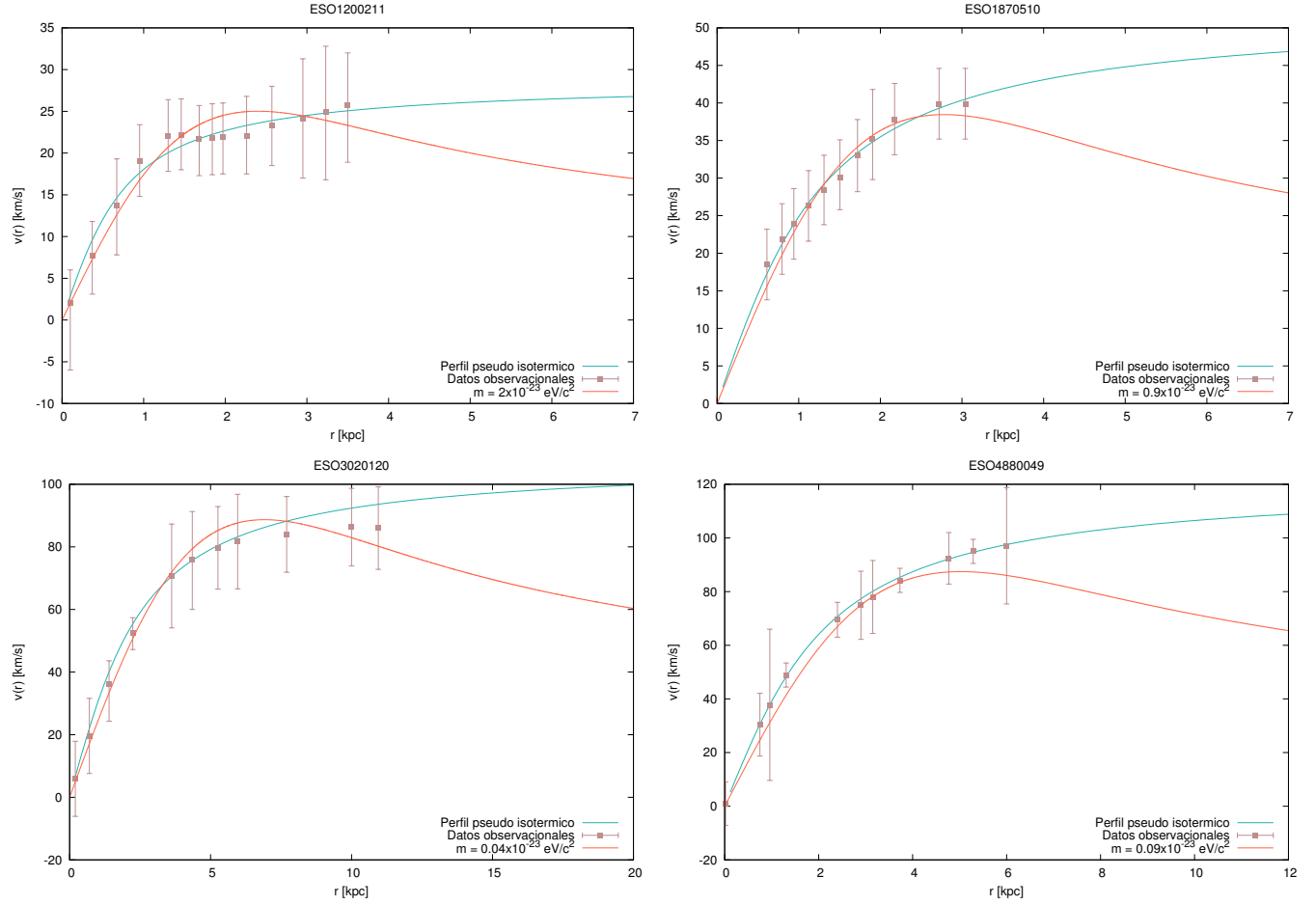


Figura 5.10: Se representa la comparación del modelo Pseudoisotérmico con el modelo Condensado de Bose Einstein, la curva de color azul representa la curva de rotación del modelo Pseudo Isotérmico, y en color naranja el modelo BEC, los datos observacionales de cada galaxia estan en color morado.

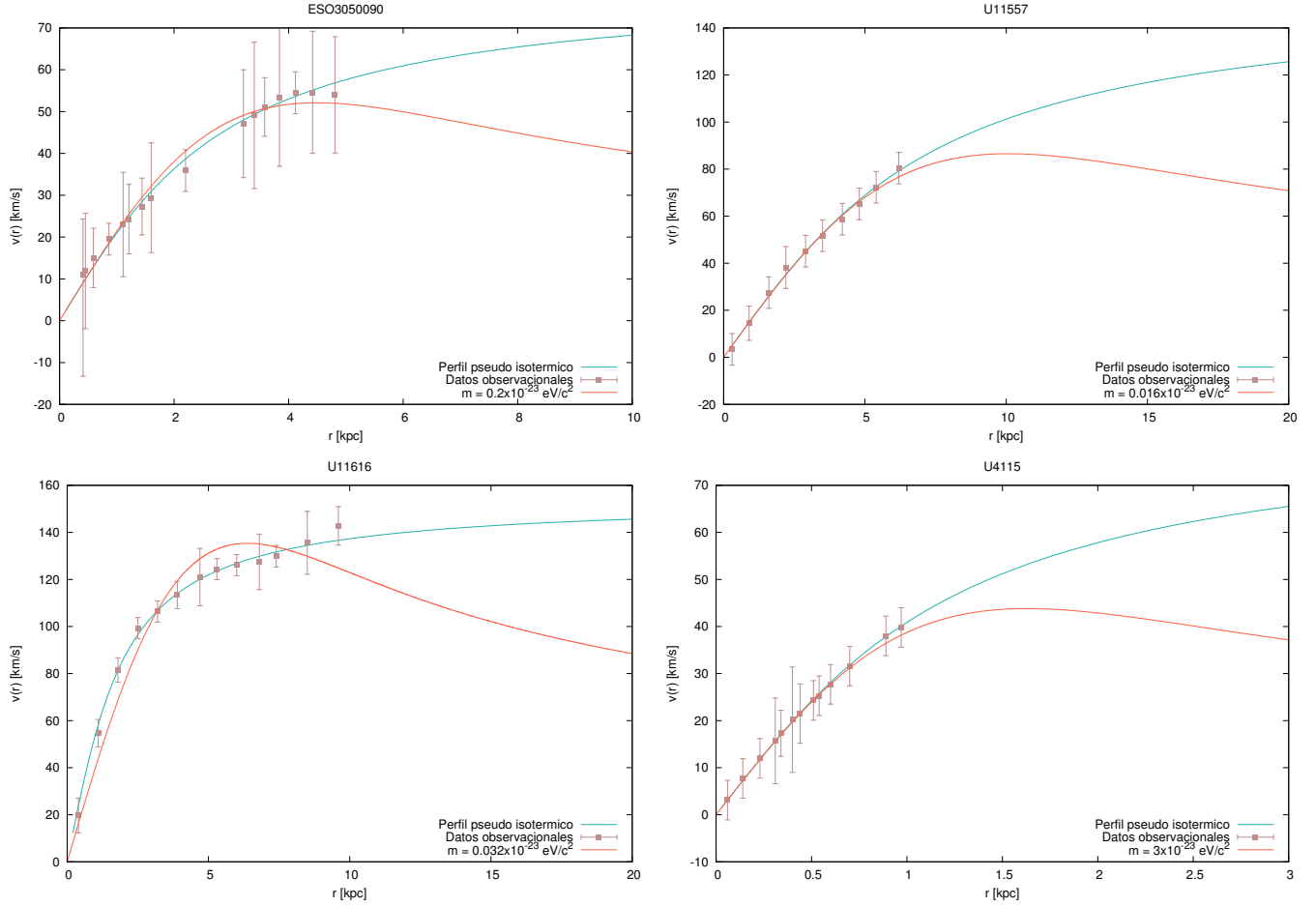


Figura 5.11: Se representa la comparación del modelo Pseudoisotérmico con el modelo Condensado de Bose Einstein, la curva de color azul representa la curva de rotación del modelo Pseudoisotérmico, y en color naranja el modelo BEC, los datos observacionales de cada galaxia estan en color morado.

Capítulo 6

Conclusiones y comentarios finales

El objetivo de este trabajo ha sido diseñar un código numérico, que se empleé para ajustar curvas de rotación galácticas debidas a configuraciones de equilibrio del sistema GPP, que modela la materia oscura de Condensado de Bose de bosones ultraligeros. Se ejecuta el código y se varían tanto la masa del bosón m como el parámetro λ que está asociado a la densidad central de materia oscura, hasta calcular el valor de m y λ que mejor ajusta la curva de rotación de cada galaxia. Al mismo tiempo queda determinada la distribución de materia oscura, es decir, del condensado, como se muestran en las figuras 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.8 y 5.9.

Los ajustes de las curvas de rotación con las configuraciones del modelo BEC son bastante buenos, comparables con el modelo fenomenológico del perfil pseudoisotérmico, pues curvas de rotación entran en el margen de errores de los datos observacionales. Sin embargo, el modelo de BEC contiene un marco teórico acerca de la estructura de la materia oscura, algo que el perfil pseudoisotérmico no contiene por ser solamente fenomenológico.

La conclusión de este trabajo es que los valores de la masa del bosón entre 10^{-23} - 10^{-22} eV/c^2 ajustan bien la muestra de galaxias con que contamos, y además las densidades centrales encontradas para cada galaxia de la muestra, son consistentes con estudios previos parecidos que utilizan otros modelos de materia oscura en el régimen relativista [2]. Este resultado no indica que las configuraciones de equilibrio del sistema GPP tienen perfiles adecuados para modelar la materia oscura galáctica.

El resultado de la distribución de los valores de m tiene una mayor concentración en el rango $\Delta m = 0,01-0,31$, con 32 galaxias con este mismo valor.

Ahora, una aclaración importante para evitar confusión. Para el ajuste de la curva de

rotación de cada galaxia **la masa del bosón es distinta**. Un modelo de materia oscura debe suponer que el valor de la partícula que representa la materia oscura es la misma en todas las galaxias y en todas las estructuras del Universo. Los ajustes que aquí se presentan indicarían que en cada una de las galaxias la masa del bosón es distinta. Por ello, aclaramos que lo que se espera es iniciar un estudio para tratar de acotar el valor de la masa que ajuste con un catálogo que contenga un mayor número de galaxias, con el fin de tener una muestra estadísticamente significativa con la que por el momento no contamos, pero que ya se puede explorar una vez que hemos probado nuestras herramientas en este trabajo. Dicho análisis tendría como resultado una distribución de los valores de m con alguna incertidumbre Δm que valdría la pena conocer.

Bibliografía

- [1] Matos, Tonatiuh, (2004), ¿ De qué está hecho el universo?: materia oscura y energía oscura, Fondo de Cultura Economica.
- [2] Suárez, Abril, Robles, Victor H and Matos, Tonatiuh. (2014), A review on the scalar field/Bose-Einstein condensate dark matter model, Accelerated Cosmic Expansion, Springer, Cham.
- [3] Bernal, Tula and Fernández-Hernández, Lizbeth M and Matos, Tonatiuh and Rodríguez-Meza, Mario A, (2017). Rotation Curves of High-Resolution LSB and SPARC Galaxies in Wave (Fuzzy) and Multistate (Ultra-light Boson) Scalar Field Dark Matter, arXiv preprint arXiv:1701.00912.
- [4] Matos, Tonatiuh and Robles, Victor H, (2016). Scalar Field (Wave) Dark Matter, arXiv preprint arXiv:1601.01350.
- [5] Guzmán, FS and Lora-Clavijo, FD.(2015), Rotation curves of ultralight BEC dark matter halos with rotation, General Relativity and Gravitation, Springer, Cham.
- [6] Liddle, Andrew, (2004), An introduction to modern cosmology, John Wiley & Sons.
- [7] Peebles, P. J. E. (1993). Principles of physical cosmology. Princeton university press.
- [8] https://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/dmr_image.cfm

- [9] Fernández Arenas, J. R. (2017). Del Big Bang al Bosón de Higgs Un viaje por el universo conocido (Doctoral dissertation). Tesis Doctoral.
- [10] Rodríguez, Mario A, (2015). Travesuras cosmológicas de Einstein ET AL, Innovación Editorial Lagares de Mexico, S.A de C.V.
- [11] Burbidge, E. M., Burbidge, G. R., Crampin, D. J., Rubin, V. C., & Prendergast, K. H. (1964). The Rotation and Mass of NGC 6503. *The Astrophysical Journal*, 139, 539.
- [12] Guzmán Izquierdo, Itzayana del C. (2017). Simulación del proceso de formación del condensado de Bose del Rubidio 87.
- [13] Danieli, S., Cohen, Y., Merritt, A., Romanowsky, A. J., Abraham, R., Brodie, J., & Zhang, J. et al., (2018). A galaxy lacking dark matter. *Nature*, 555(7698), 629-632.
- [14] Bernal, T., Fernández-Hernández, L. M., Matos, T., & Rodríguez-Meza, M. A. (2017). Rotation curves of high-resolution LSB and SPARC galaxies with fuzzy and multistate (ultralight boson) scalar field dark matter. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 475(2), 1447-1468.
- [15] Robles, V. H., & Matos, T. (2012). Flat central density profile and constant dark matter surface density in galaxies from scalar field dark matter. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 422(1), 282-289
- [16] Cao, Z., & Cao, H. G. (2013). Unified Field Theory and the Hierarchical Universe. *International Journal of Physics*, 1(6), 162-170.