



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ

VARIEDADES CONTRAÍBLES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

P R E S E N T A :

ANGÉLICA GUADALUPE ZAMUDIO CAMARGO

ASESOR

DR. JUAN AHTZIRI GONZÁLEZ LEMUS



MORELIA, MICH. Mayo, 2019

Índice general

Abstract	i
Resumen	iii
Introducción	v
1. Introducción a las Variedades	1
1.1. Nociones topológicas básicas	1
1.1.1. Espacios cociente	4
1.1.2. Compactificación por un punto	4
1.2. Subespacios Clásicos de $\mathbb{R}^n$	6
1.3. Definición y ejemplos de Variedades	10
1.4. Definición y ejemplos de Variedades con frontera	12
1.5. Subvariedades en una variedad	14
2. Un resultado sobre contracciones en Variedades	17
2.1. Preliminares	17
2.2. Un ejemplo importante	21
2.3. Propiedad de Extensión de Homotopía	23
2.4. Mapeos cilindro	24
2.5. Lema Técnico	26
2.6. Contracciones en Variedades	29

3. Tres Teoremas Sobre Variedades	31
3.1. Vecindad collar de la frontera	31
3.2. Compactificación por un punto del interior de una variedad . . .	34
3.3. Una caracterización de $\mathbb{R}^n$ como variedad contraíbe	35

Abstract

In this work, we study contractible manifolds and we prove some results about them. The first chapter is an introduction to manifolds, definition, examples, and properties. The second chapter is dedicated to prove that in manifolds, being contractible to a point is equivalent to being a strong deformation retract of that point. With this purpose, we introduce contractible spaces, retractions, etc. We analyze an important example in the second section of the chapter, this example proves that in general, we can't generalize a contraction to a strong deformation retract. The third section is dedicated to the Homotopy Extension Property because the proof of the result is strongly based on this property. The rest of the chapter is used to develop the necessary theory to prove the result and we prove it at the end of the chapter. In the third chapter we prove three results, 1) about the existence of collared neighborhoods of compact manifolds with boundary, 2) about the one-point compactification of a manifold, 3) a characterization of $\mathbb{R}^n$.

Resumen

En este trabajo se estudian variedades contraíbles y se prueban algunos resultados sobre ellas. El primer capítulo es una introducción a variedades, definición, ejemplos y propiedades. El segundo capítulo está dedicado a demostrar que, en variedades, ser contraíble a un punto es equivalente a ser retracto por deformación fuerte de ese punto. Para ello, en la primera sección del capítulo se introducen los espacios contraíbles, retractos, retractos por deformación fuerte, etc. La segunda sección del capítulo está dedicada a un ejemplo importante que sirve para probar que en espacios en general no se puede generalizar una contracción a un punto a un retracto fuerte por deformación. La tercera sección está dedicada a la Propiedad de Extensión de Homotopía (PEH) en la que se basa fuertemente la demostración del resultado principal del capítulo 2. En el resto del capítulo se desarrolla la teoría suficiente para la demostración y se demuestra el resultado. En el capítulo 3 se demuestran tres resultados, 1) sobre la existencia de vecindades collar de la frontera en variedades compactas con frontera no vacía, 2) sobre compactificación por un punto del interior de una variedad, 3) una caracterización de $\mathbb{R}^n$ a través de contracciones.

Palabras clave: variedades contraíbles, retracto por deformación fuerte, propiedad de extensión de homotopía, caracterización de los números reales, espacios contraíbles.

Introducción

El estudio de variedades es muy común en matemáticas ya que son espacios topológicos que, especialmente en dimensiones bajas, se presentan de forma natural en muchos problemas. Dicho estudio aparece en áreas como Geometría Diferencial, Topología de dimensiones bajas, Topología Geométrica, Geometría Algebraica, Geometría Riemanniana y muchas otras áreas de las matemáticas.

Se sabe que para dimensiones 1 y 2 las únicas variedades abiertas (no compactas y sin frontera) contraíbles son homeomorfas a $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Uno de los que comenzó el estudio de variedades contraíbles fue el matemático J.H.C. Whitehead (1904-1960) en su intento de probar la Conjetura de Poincaré. En el año 1934 creyó haberla resuelto pero un año después fue él mismo quién dio un contraejemplo a su demostración. Desde entonces el estudio de las variedades contraíbles se ha convertido en área particular del estudio de topología de variedades.

El error en la demostración de Whitehead consistió en dar por hecho que toda variedad abierta contraíble es $\mathbb{R}^n$, sin embargo esto no es cierto y él mismo construyó una variedad para desmentir esta afirmación. Su contraejemplo, una variedad de dimensión tres, es ahora conocida como la variedad de Whitehead $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^3$. Esta variedad tiene muchas propiedades interesantes entre las cuales destacan las siguientes:

- $\mathcal{W}$ es unión de dos espacios homeomorfos a $\mathbb{R}^3$ con intersección $\mathbb{R}^3$ pero no es homeomorfo a $\mathbb{R}^3$
- $\mathcal{W} \times \mathbb{R}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^4$

Más aún, la construcción de Whitehead nos da un algoritmo para construir una cantidad no numerable de espacios de este tipo que no son homeomorfos entre sí. Gracias a eso se sabe que hay más variedades contraíbles que no son homeomorfas a $\mathbb{R}^n$ que las que sí lo son. Por ello es útil tener caracterizaciones de $\mathbb{R}^n$.

Aunque algunos matemáticos han dado caracterizaciones de $\mathbb{R}^n$, como Morton Brown [7] y Erhard Luft [10], no lo hicieron en base a contracciones ya que en general es muy complicado saber como se comportan estas funciones. De

hecho, no se conoce ninguna caracterización de $\mathbb{R}^n$ como variedad contraíble.¹ En el resultado principal de este trabajo proporcionamos una caracterización de este estilo. Se da una condición suficiente sobre la contracción para caracterizar, sin embargo esta condición es demasiado fuerte y no se puede extenderse a variedades con frontera (para caracterizar $\mathbb{D}^n$). Se hizo un intento de reformular esta condición para que fueran menos restrictiva pero no se ha logrado hasta el momento.

Este trabajo se divide en tres capítulos en los que trataremos los temas de la siguiente manera:

- **El Capítulo 1** es una introducción a las variedades. La Sección 1 consiste de preliminares, con algunas definiciones básicas de topología. En la Sección 2 se estudian algunos subespacios de $\mathbb{R}^n$ que son necesarios para comprender como se comportan localmente las variedades. Estos espacios se estudian también como subconjuntos y se abordan algunas características de ellos y las relaciones entre sí. En la Sección 3 se introduce la definición de variedad, se dan algunos ejemplos ilustrativos y observaciones útiles. La Sección 4 extiende la definición de variedad a la de variedad con frontera. En la Sección 5 se analiza la relación que hay entre los subconjuntos de una variedad vistos como subconjuntos y como subespacios.
- **El Capítulo 2** está dedicado a un resultado sobre variedades contraíbles que es original de este trabajo. Éste trata sobre cómo se puede contraer una variedad contraíble. La primera sección es de preliminares. La segunda sección está dedicada a un ejemplo importante ya que ilustra el problema que se quiere resolver y porqué es relevante. La demostración del resultado principal de este capítulo se basa fuertemente en *la propiedad de extensión de homotopía* y por ello la Sección 3 está dedicada a ésta. Las secciones 4 y 5 muestran algunos resultados previos necesarios mientras que en la sección 6 se demuestra el resultado principal del capítulo.
- **El Capítulo 3** es el más corto de todos, está dividido en tres secciones, cada una dedicada a demostrar un teorema sobre variedades. El tercero de los teoremas demostrados es parte de un trabajo que consiste en caracterizar a $\mathbb{R}^n$ como variedad contraíble al dar una condición suficiente sobre la contracción.

Agradezco al lector que se tomo el tiempo de leer esta introducción y espero que este trabajo le resulte agradable de leer.

¹Se investigó al respecto y no se encontró alguna, salvo que exista en alguna parte de la que no tengo conocimiento.

Capítulo 1

Introducción a las Variedades

La primera sección de este capítulo no es más que un repaso de algunas nociones básicas que abarcan desde la definición de topología hasta espacios cocientes y compactificación por un punto del interior. En la segunda sección se estudian algunos subespacios de $\mathbb{R}^n$ ya que aparecen mucho durante el estudio de variedades y estudiarlos de antemano nos facilitará demostraciones futuras. Las secciones tres y cuatro están dedicadas a introducir los conceptos de variedad y variedad con frontera. Mientras que en la sección cinco se hace una demostración sobre subvariedades.

1.1. Nociones topológicas básicas

Esta sección es una breve recapitulación de los conceptos de topología general que utilizaremos en este trabajo. El lector interesado en profundizar en alguno de estos temas puede consultar cualquier libro de introducción a la topología, nosotros nos basamos mayormente en [2] y [3].

Recordemos que un **espacio topológico** es una pareja (X, τ) donde X es un conjunto y τ es una familia de subconjuntos de X que cumple las siguientes condiciones:

- $\emptyset$ y X están en τ .
- τ es cerrado bajo uniones arbitrarias y bajo intersecciones finitas.

Llamamos **abiertos** a los elementos de τ y a sus complementos les llamamos **cerrados**.

Decimos que una familia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J} \subset \tau$ es una **base** para la topología τ , si

para todo abierto $U \in \tau$ existe $J' \subset J$ tal que $U = \bigcup_{\alpha \in J'} U_\alpha$. Si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es base, entonces a los abiertos U_α les llamamos **generadores**.

Una **cubierta abierta** de un espacio X es una familia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ tal que $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha = X$. Una **subcubierta** de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es un subconjunto de esta familia que también es cubierta.

A continuación recordaremos ciertas propiedades de los espacios topológicos que utilizaremos posteriormente. Si X es un espacio topológico, entonces X es:

- **conexo** si no existen dos abiertos $U_1, U_2 \in \tau$ tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y $X = U_1 \cup U_2$.
- **compacto** si para toda cubierta abierta existe subcubierta finita.
- **segundo numerable**, si existe una familia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}} \subset \tau$ que es base para la topología τ .
- **Hausdorff**, si para todo $x_1, x_2 \in X$, existen abiertos U_1, U_2 tales que $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Si (X, τ) es espacio topológico, $V \subset X$ y $x \in V$, entonces decimos que V es vecindad de x si existe abierto $U \in \tau$ tal que $x \in U \subset V$. Si además $U = V$, decimos que V es vecindad abierta de x .

Supongamos que (X, τ) es espacio topológico y A es subconjunto de X . A continuación definimos algunos subconjuntos determinados por A y τ :

- **Interior de A** (denotado por A°) es el conjunto de los puntos $a \in A$ para los que existe vecindad abierta V de a tal que $V \subset A$.
- **Frontera de A** (denotada por ∂A) es el conjunto de los puntos $a \in A$ tales que para toda vecindad abierta V de a , se cumple que $V \cap A$ y $V \cap (X \setminus A)$ son no vacíos.
- **Cerradura de A** (denotado por $\bar{A}$) es el conjunto de los puntos $x \in X$ tales que para toda vecindad V de x se tiene que $(V \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset$.

Nótese que si X es espacio topológico, entonces el interior y la cerradura de X son el mismo X pero, la definición de frontera de X es vacía. De manera que la frontera sólo adquiere sentido para subconjuntos propios.

Si $A \subset X$, entonces la familia $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$ es una topología. Decimos que (A, τ_A) es **subespacio** de (X, τ) y a τ_A se le conoce como **la topología de subespacio**. Por ejemplo, el intervalo cerrado $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ hereda la topología de $\mathbb{R}$ y lo denotamos por I .

Recordemos que si (X, τ) y (Y, τ') son espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ es función, entonces f es **continua** si para todo $U \in \tau'$ se tiene que $f^{-1}(U) \in \tau$; en otras palabras f regresa abiertos en abiertos.

Supongamos que (X, τ) y (Y, τ') son espacio topológicos. Si $f : X \rightarrow Y$ es función biyectiva, continua y con inversa continua, entonces decimos que f es un **homeomorfismo** y que X y Y son *homeomorfos*, lo denotamos $X \cong Y$. Los espacios homeomorfos tienen las mismas propiedades topológicas, por ello decimos que son “iguales topológicamente”.

Supongamos que X es espacio topológico. Decimos que X es **conexo por trayectorias** (cpt) si para cualesquiera puntos $x, y \in X$, existe una función continua $\gamma : I \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. En este caso decimos que γ es una **trayectoria** de x a y . Es un hecho conocido que si un espacio es cpt, entonces es conexo [2, pág. 155].

Si $x \in X$, entonces decimos que X es **localmente conexo por trayectorias en x** si para toda vecindad V de x existe vecindad abierta $U \subset V$ que es cpt. Decimos que X es **localmente conexo por trayectorias** si es cpt en todos sus puntos.

Proposición 1.1.1. *Si X es conexo y localmente conexo por trayectorias, entonces X es cpt.*

Demostración. Supongamos que $x_0 \in X$ y $A_{x_0} = \{x \in X : \text{existe trayectoria de } x_0 \text{ a } x\}$.

Supongamos que $y \in A_{x_0}$ y $\gamma_y[I] \subset X$ es trayectoria de x_0 a y . Si $U_y \subset X$ es una vecindad abierta y cpt, entonces para todo $x \in U_y$ existe trayectoria $\gamma_x \subset U_y$ de y en x . La trayectoria $\gamma : I \rightarrow X$ dada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_y(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_x(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

va de x_0 a x . Concluimos que $U_y \subset A_{x_0}$ y por lo tanto A_{x_0} es abierto.

Supongamos que $y \in X \setminus A_{x_0}$ y $U_y \subset X$ vecindad abierta y cpt de y . Existen dos casos posibles:

- (i) Si $x \in U_y \cap A_{x_0}$, entonces procediendo de manera análoga al caso anterior podemos encontrar una trayectoria de x_0 a y . Esto contradice que $y \notin A_{x_0}$.
- (ii) Si $U_y \cap A_{x_0} = \emptyset$, entonces $X \setminus A_{x_0}$ es abierto y por lo tanto A_{x_0} es cerrado. Esto contradice que X es conexo.

Concluimos que $X = A_{x_0}$ y por lo tanto es cpt. □

Dedicaremos una subsección a recordar espacios cociente y otra a compactificación por un punto de un espacio ya que son temas que conviene abordar con más detalle.

1.1.1. Espacios cociente

Si X es un conjunto y $\sim$ es una relación de equivalencia en X , entonces a $X/\sim = \{[x] : x \in X\}$ le llamamos el cociente de X por $\sim$ y a la función $\pi : X \rightarrow X/\sim$ tal que $\pi(x) = [x]$ se le conoce como **la proyección al cociente**.

Nótese que si $A \subset X$, entonces la relación $\sim_A$ tal que $x \sim_A y$ si y sólo si $x, y \in A$ es de equivalencia.

Definición 1.1.1. *Supóngase que (X, τ) es un espacio topológico:*

- Si $\sim$ es una relación de equivalencia en X , entonces a la pareja $(X/\sim, \tau')$ con la topología $\tau' := \{U \subset X/\sim : \pi^{-1}(U) \in \tau\}$ se le conoce como el **espacio cociente** de (X, τ) por $\sim$.
- Si $A \subset X$, entonces al espacio $X/\sim_A$ lo llamamos el **cociente de X por A** y lo denotamos por X/A .

Ejemplos 1.1.1. Cocientes de espacios topológicos

- (i) Si $\sim$ es la relación de equivalencia en $\mathbb{R}^n$ tal que $x \sim y$ si y sólo si $x, y \in \mathbb{Q}$ ó $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, entonces el espacio cociente $\mathbb{R}/\sim = \{[q], [r]\}$ tiene la topología discreta.
- (ii) Si $A = \{0, 1\} \subset I$, entonces el cociente I/A es homeomorfo a $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Un homeomorfismo está dado por $f : I/A \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.
- (iii) Un espacio cociente muy conocido es la banda de Möbius

$$\mathcal{M} = C / \{(-1, y) \sim (1, -y)\}$$

donde $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$. Algunas propiedades de $\mathcal{M}$ serán estudiadas con detalle en secciones posteriores.

1.1.2. Compactificación por un punto

Existe una noción similar a la de base pero para vecindades al rededor de un punto. Supongamos que (X, τ) es espacio topológico y $x \in X$. A una familia $\{W_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de vecindades de x (no necesariamente $W_\alpha \in \tau$) tal que para toda vecindad abierta U de x existe W_α contenido en U , le llamamos **base local al rededor de x** . Decimos que X es **localmente compacto** si para todo $x \in X$ existe base local cuyos elementos son compactos.

Definición 1.1.2. Si (X, τ) es Hausdorff y localmente compacto, entonces la **compactificación por un punto de X** es el espacio topológico (X^*, τ^*) , donde $X^* := X \cup \{\infty\}$ con ∞ un punto que no pertenece a X y τ^* es la topología tal que $U \subset X^*$ es abierto si y sólo si $U \in \tau$ o $\infty \in U$ y $X^* \setminus U$ es compacto.

Observaciones 1.1.1. Supongamos que (X, τ) es Hausdorff y localmente compacto.

- (a) X^* es compacto: Esto se sigue de que cualquier cubierta abierta de X^* tiene un abierto U tal que $\infty \in U$ y $X^* \setminus U$ es compacto.
- (b) X^* es Hausdorff: Basta con separar un $x \in X$ del punto $\infty \in X^*$. Si $V \subset X$ es vecindad compacta de x (X es localmente compacto), entonces existe abierto $U \subset V$ tal que $x \in U$ y además $X^* \setminus V$ es abierto y contiene a ∞ . Es claro que $X^* \setminus V$ y U son disjuntos y por lo tanto separan a x y a ∞ .
- (c) Si X es compacto, entonces X^* se obtiene agregando un punto discreto ∞ a la topología, ya que $X = X^* \setminus \{\infty\}$ es compacto y por lo tanto $\{\infty\}$ abierto.

Ejemplos 1.1.2. Compactificaciones por un punto.

- (i) Por la Observación 1.1.1-(c), $I^* = I \cup \{\infty\}$ con $\{\infty\} \subset I^*$ abierto.
- (ii) La compactificación por un punto de $[1, 0)$ es homeomorfo a I . La función $h: [0, 1]^* \rightarrow I$ dada por:

$$h(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [0, 1) \\ 1 & \text{si } t = \infty \end{cases}$$

es claramente biyectiva y continua en $[0, t)$. Procedemos a demostrar que también es continua en ∞ . Si $U_t = (t, 1]$, entonces $X \setminus h^{-1}(U_t) = [0, t]$, por lo tanto $h_t^{-1}(U_t) \subset [0, 1]^*$ es abierto. Este argumento es suficiente ya que los abiertos $\{U_t\}_{t \in (0, 1)}$ forman una base local de 1. Como h es una biyección continua de un compacto en un espacio Hausdorff, entonces se concluye que es homeomorfismo [4, pág.129].

- (iii) La compactificación por un punto de $(0, 1)^*$ es $\mathbb{S}^1$. Se puede probar de manera análoga al ejemplo anterior que la función $h: (0, 1)^* \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por:

$$h(t) = \begin{cases} (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) & \text{si } t \in (0, 1) \\ 1 & \text{si } t = \infty \end{cases}$$

es homeomorfismo.

Todos los espacios topológicos que estudiaremos en este trabajo son Hausdorff y localmente compactos, por lo que siempre tienen compactificación por un punto.

1.2. Subespacios Clásicos de $\mathbb{R}^n$

Recordemos que $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ y la norma euclídeana de un punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es $||\mathbf{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Si $r > 0$ y $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, entonces la bola abierta de radio r y centro $\mathbf{p}$ es el conjunto $B_r(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x} - \mathbf{p}|| < r\}$. El espacio euclídeano es $\mathbb{R}^n$ junto con la topología generada por la base $\beta = \{B_r(\mathbf{p}) : r > 0 \text{ y } \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n\}$. Es bien conocido que $\mathbb{R}^n$ con esta topología es Hausdorff, segundo numerable, conexo por trayectorias y no compacto.

Por el Teorema de Heine-Borel [5, Teorema 2.41], un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si A es cerrado y acotado (*i.e.* existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset B_n(\mathbf{0})$).

En esta sección estudiaremos ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que nos serán útiles para comprender el concepto de variedad.

I. La bola unitaria $\mathbb{B}^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x}|| < 1\}$

- (i) La función $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ dada por $\eta(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||+1}$ es un homeomorfismo. Por ello $\mathbb{B}^n$ tiene las mismas propiedades topológicas que $\mathbb{R}^n$.
- (ii) Si $r > 0$ y $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, entonces la función $\varphi : B_r(\mathbf{p}) \rightarrow \mathbb{B}^n$ definida como $\varphi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{p}}{r}$ es homeomorfismo. De manera que $\mathbb{B}^n$ es un modelo para toda bola abierta contenida en $\mathbb{R}^n$.¹

II. El disco unitario $\mathbb{D}^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x}|| \leq 1\}$

- (i) Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n$ y $r = ||\mathbf{x}|| - 1$, entonces $B_r(\mathbf{x})$ es una vecindad abierta de $\mathbf{x}$ contenida en $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n$. Con ello concluimos que $\mathbb{D}^n$ es cerrado.
- (ii) Supongamos que $\mathbf{x} \in \mathbb{D}^n$. Si $||\mathbf{x}|| < 1$, entonces $B_r(\mathbf{x})$ con $r = \frac{1-||\mathbf{x}||}{2}$ está contenida en $\mathbb{D}^n$. Si $||\mathbf{x}|| = 1$, entonces para todo $r > 0$, $B_r(\mathbf{x}) \cap \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n \neq \emptyset$. De esta manera concluimos que $(\mathbb{D}^n)^\circ = \mathbb{B}^n$ y $\partial\mathbb{D}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x}|| = 1\}$.
- (iii) Se sigue del Teorema de Heine-Borel que $\mathbb{D}^n$ es compacto.
- (iv) Usando la compacidad de $\mathbb{D}^n$ podemos concluir que no es homeomorfo a $\mathbb{B}^n$.

III. La esfera unitaria $\mathbb{S}^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : ||\mathbf{x}|| = 1\}$

- (i) Es un subconjunto cerrado: Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{S}^n$, entonces $B_r(\mathbf{x})$ con $r = \frac{1-||\mathbf{x}||}{2}$ es una vecindad abierta de $\mathbf{x}$ contenida en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{S}^n$, es decir, el complemento $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{S}^n$ es abierto.

¹ φ en realidad representa una familia de funciones determinadas por r y $\mathbf{p}$. Por simplicidad se manejará como la función de esta familia necesaria en cada caso.

- (ii) Por el Teorema de Heine-Borel $\mathbb{S}^n$ es compacto.
- (iii) En **II**-(iv) se demostró que $\mathbb{S}^n$ es igual a $\partial\mathbb{D}^{n+1}$.
- (iv) Una observación interesante y útil es que $\mathbb{R}^n$ se puede ver como unión de $(n-1)$ -esferas y un punto: Si r es un número real positivo y $r\mathbb{S}^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = r\}$, entonces $\mathbb{R}^n = \bigcup_{r>0} r\mathbb{S}^{n-1} \cup \{\mathbf{0}\}$.
- (v) $\mathbb{S}^n$ es la compactificación por un punto de $\mathbb{R}^n$.

Denotamos $N = (0, 0, \dots, 1) \in \mathbb{S}^n$ al polo norte. Considere la función $P: \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $P(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \frac{x_2}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right)$. Procedemos a probar que P es continua y biyectiva.

- Inyectiva : Supongamos que $P(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = P(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$. Igualando las normas al cuadrado de las imágenes obtenemos

$$\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{(1-x_{n+1})^2} = \frac{y_1^2 + \dots + y_n^2}{(1-y_{n+1})^2} \iff \frac{1+x_{n+1}}{1-x_{n+1}} = \frac{1+y_{n+1}}{1-y_{n+1}}$$

donde la equivalencia se sigue de que $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ y $(y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ pertenecen a la esfera $\mathbb{S}^n$. De aquí concluimos que $x_{n+1} = y_{n+1}$, lo que a su vez implica que $x_i = y_i$ para toda $i = 1, 2, \dots, n$.

- Suprayectiva : Supongamos que $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Si $\lambda = a_1^2 + \dots + a_n^2 + 1$, entonces $\left(\frac{2a_1}{\lambda}, \frac{2a_2}{\lambda}, \dots, \frac{2a_n}{\lambda}, \frac{\lambda-2}{\lambda} \right) \in \mathbb{S}^n$, además la imagen de este punto bajo P es

$$\left(\frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda-2}{\lambda} \right)} \right) \left(\frac{2a_1}{\lambda}, \frac{2a_2}{\lambda}, \dots, \frac{2a_n}{\lambda} \right) = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{2a_1}{\lambda}, \frac{2a_2}{\lambda}, \dots, \frac{2a_n}{\lambda} \right) = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

- Continua : Denotemos por $p_{n+1}: \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow [-1, 1)$ a la proyección a la coordenada $n+1$. Considere las funciones $f: [-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{1-x}$ y $g: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $g(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Es claro que estas tres funciones son continuas. La función P se puede re-escribir como $P(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (f \circ p_{n+1})(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \cdot g(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$. De esta manera concluimos que P es continua.

Considere la función $h: \mathbb{S}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ dada por

$$h(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \begin{cases} P(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) & \text{si } (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \neq N \\ \infty & \text{si } (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = N \end{cases}$$

Es claro que h es biyectiva y continua en $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$. Si $U \subset (\mathbb{R}^n)^*$ es una vecindad abierta de ∞ , entonces $(\mathbb{R}^n)^* \setminus U$ es compacto en $\mathbb{R}^n$ y $h^{-1}((\mathbb{R}^n)^*) \setminus h^{-1}(U) = \mathbb{R}^n \setminus h^{-1}(U) = \mathbb{R}^n \setminus P^{-1}(U)$ que es cerrado, por lo que $h^{-1}(U) \subset \mathbb{S}^n$ es abierto y h continua en N . Concluimos la demostración usando que h es una

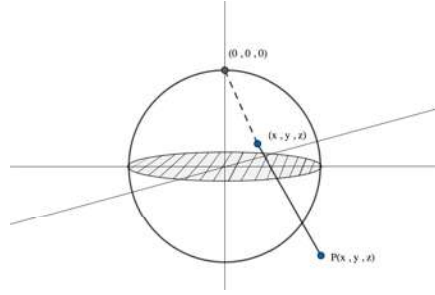


Figura 1.1: Proyección Estereográfica

biyección continua de un espacio Hausdorff en un compacto y por lo tanto es un homeomorfismo.

La función $P: \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ se conoce como la proyección estereográfica. En la Figura 1.1 se muestra su interpretación geométrica para el caso $n = 2$, el comportamiento en el caso general es análogo al de este caso.

(vi) $\mathbb{S}^n$ es homeomorfa al cociente $\mathbb{D}^n / \partial\mathbb{D}^n$.

Primero probaremos que $\mathbb{D}^n / \partial\mathbb{D}^n$ es Hausdorff. Supongan que $x, y \in \mathbb{D}^n / \partial\mathbb{D}^n$. Si $x, y \in \mathbb{B}^n = (\mathbb{D}^n)^\circ$, entonces es claro que se pueden separar con abiertos contenidos en $\mathbb{B}^n$. Si $x \in \mathbb{B}^n$, $y = [\partial\mathbb{D}^n]$ y $r = \frac{1-\|x\|}{2}$, entonces $B_{\|x\|+r}(0)$ y $(\mathbb{D}^n \setminus B_{\|x\|+r}(0))^\circ$ son abiertos disjuntos de $\mathbb{D}^n$ que separan a x y $\partial\mathbb{D}^n$, por lo tanto éstos definen abiertos en $\mathbb{D}^n / \partial\mathbb{D}^n$ que separan a x y y .

Procediendo de manera análoga a **III**-(v) podemos demostrar que la función $h: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{D}^n / \partial\mathbb{D}^n$ dada por

$$h(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \begin{cases} [\eta \circ P(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})] & \text{si } (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \neq N \\ [\partial\mathbb{D}^n] & \text{si } (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = N \end{cases}$$

donde η es la función definida en **I**-(i) es un homeomorfismo. De esta manera concluimos que $\mathbb{S}^n \cong \mathbb{D}^n / \partial\mathbb{D}^n$.

IV El semiplano superior cerrado $H^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$

- (i) Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus H^n$, entonces $B_{|x_n|}(\mathbf{x})$ es una vecindad abierta contenida en $\mathbb{R}^n \setminus H^n$. De esta manera concluimos que $\mathbb{R}^n \setminus H^n$ es abierto y que H^n es cerrado.
- (ii) No es compacto : $\{A_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ con $A_1 = \{\mathbf{x} \in H^n : 0 \leq x_n < 1\}$ y $A_m = \{\mathbf{x} \in H^n : m - \frac{3}{2} < x_n < m\}$ para $m \leq 1$ es una cubierta abierta sin subcubierta finita.
- (iii) H^n no es homeomorfo a $\mathbb{S}^n$ ni a $\mathbb{D}^n$ ya que los últimos dos son espacios compactos y H^n no lo es.

- (iv) Utilizando la restricción del homeomorfismo $h: \mathbb{S}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ construido en **III**-(vi) se puede demostrar que $(H^n)^*$ es homeomorfo a $\mathbb{D}^n$.
- (v) Por definición es claro que H^n es homeomorfo a $\mathbb{R}^{n-1} \times H^1$.
- (vi) Si $r > 0$ es un número real y $r\mathbb{S}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = r\}$, entonces la intersección $r\mathbb{S}^n \cap H^n$ es homeomorfa a $\mathbb{D}^{n-1}$. Claramente $H^n = \bigcup_{r>0} (r\mathbb{S}^n \cap H^n) \cup \{\mathbf{0}\}$ por lo que H^n es unión de $(n-1)$ -discos cerrados y un punto.
- (vii) Supongamos que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H^n$. Si $\mathbf{x}$ es tal que $x_n > 0$, entonces la bola $B_{x_n}(\mathbf{x})$ está contenida en H^n . Es claro que los puntos $\mathbf{x}$ con $x_n = 0$ son puntos frontera. Por lo tanto $(H^n)^\circ = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in H^n : x_n > 0\}$ y $\partial H^n = \{\mathbf{x} \in H^n : x_n = 0\}$. Las funciones $h_1: \mathbb{R}^n \rightarrow (H^n)^\circ$ y $h_2: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \partial H^n$ dadas por $h_1(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, e^{x_n})$ y $h_2(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$ son homeomorfismos y por lo tanto $(H^n)^\circ \cong \mathbb{R}^n$ y $\partial H^n \cong \mathbb{R}^{n-1}$.

En la descripción de los subconjuntos del **I-IV** utilizamos compacidad para demostrar que $\mathbb{B}^n$ no es homeomorfo a $\mathbb{D}^n$ ni a $\mathbb{S}^n$ y que H^n no es homeomorfo a $\mathbb{D}^n$ ni a $\mathbb{S}^n$. Terminaremos esta sección demostrando que $\mathbb{B}^n$ no es homeomorfo a H^n y que $\mathbb{D}^n$ no es homeomorfo a $\mathbb{S}^n$. Para ello utilizaremos el Teorema de Invarianza del Dominio, el cual no demostraremos aquí ya que no es el objetivo de este trabajo. El lector interesado puede consultar una demostración en [1, pág. 172].

Teorema 1.2.1. (*Invarianza del Dominio*) Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $h: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua e inyectiva, entonces la imagen $h(U) \subset \mathbb{R}^n$ es abierto.

Corolario 1.2.1. $\mathbb{B}^n$ y H^n no son homeomorfos.

Demostración. Supongamos que $h: \mathbb{B}^n \rightarrow H^n$ es homeomorfismo. Por el Teorema 1.2.1 $H^n = h(\mathbb{B}^n) \subset \mathbb{R}^n$ es abierto. Por otro lado, en **IV**-(i) probamos que H^n es cerrado. Esto es una contradicción ya que $\mathbb{R}^n$ es conexo y por lo tanto no existen subconjuntos propios que sean abiertos y cerrados a la vez. $\square$

Una consecuencia directa del corolario anterior es que si $f: U \rightarrow H^n$ es homeomorfismo, entonces $f(\partial U) = \partial H^n$.

Corolario 1.2.2. $\mathbb{D}^n$ y $\mathbb{S}^n$ no son homeomorfos.

Demostración. De **III**-(iv) sabemos que $\eta \circ P: \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{B}^n$ es homeomorfismo. Si existiera homeomorfismo $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$, entonces la restricción $f: \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{D}^n \setminus \{f(N)\}$ también sería un homeomorfismo. Por el Teorema 1.2.1 $f \circ P^{-1} \circ \eta^{-1}(\mathbb{B}^n) = \mathbb{D}^n \setminus \{f(N)\}$ es abierto en $\mathbb{R}^n$. Esto es una contradicción ya que de **II**-(ii) se puede concluir que $\mathbb{D}^n \setminus \{f(N)\}$ no es abierto de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto no puede existir el homeomorfismo f . $\square$

1.3. Definición y ejemplos de Variedades

En esta sección damos una introducción a un tipo de espacios topológicos que serán la materia prima de este trabajo, dichos espacios son las *variedades*.

Definición 1.3.1. *Un espacio topológico conexo (M, τ) es una **variedad** si:*

- (i) *es Hausdorff y segundo numerable.*
- (ii) *para todo $x \in M$ existe una pareja (U, ϕ) con $U \subset M$ vecindad abierta de x y $\phi: U \rightarrow \mathbb{B}^n$ homeomorfismo.*

A la pareja (U, ϕ) se le llama **carta** alrededor de x . El valor n (la dimensión de la bola unitaria) no varía entre los puntos y se le llama la **dimensión** de la variedad.

Si (M, τ) es variedad de dimensión n , entonces comúnmente se le llama n -variedad y se denota M^n . Intuitivamente, la condición (ii) de la definición nos dice que una n -variedad es un espacio que localmente es como $\mathbb{R}^n$.

Observaciones:

- (a) Como $\mathbb{B}^n$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, la condición (ii) de la definición es equivalente a pedir que U sea homeomorfo a $\mathbb{R}^n$.
- (b) Dar una cubierta de M con abiertos homeomorfos a $\mathbb{B}^n$ (cubierta con cartas) es suficiente para probar que M es variedad.
- (c) Por definición toda variedad es conexa y localmente conexa por trayectorias ($\mathbb{B}^n$ es cpt). De manera que toda variedad es cpt (ver Proposición 1.1.1).
- (d) Por conexidad y como consecuencia del Teorema 1.2.1 se tiene que una variedad no puede tener cartas de diferentes dimensiones.

A continuación damos algunos ejemplos de variedades.

Ejemplos 1.3.1.

- (i) $\mathbb{R}^n$ es una n -variedad. La pareja $(\mathbb{R}^n, id)$ es carta de todos sus puntos.
- (ii) $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto es una n -variedad : Si $x \in U$, entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(\mathbf{x}) \subset U$. La pareja $(B_r(\mathbf{x}), id)$ es una carta ya que, como vimos antes $B_r(\mathbf{x}) \cong \mathbb{B}^n$.
- (iii) La esfera $\mathbb{S}^n$ es una n -variedad para $n \geq 1$: La pareja $(P, \mathbb{S}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 1)\})$ donde $P: \mathbb{S}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la proyección estereográfica (ver III-(v)) es una carta para todos los puntos excepto $(0, 0, \dots, 0, 1)$. La pareja $(P_s, \mathbb{S}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, -1)\})$ donde $P_s: \mathbb{S}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, -1)\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $P_s(\mathbf{x}) =$

$\frac{x}{1+x_n}$ (la proyección estereográfica partiendo del punto $(0, 0, \dots, 0, -1)$) es carta del punto $(0, 0, \dots, 1)$ para probar que es homeomorfismo se procede de forma análoga a **III**-(v).

- (iv) El toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es una variedad : Supongamos que $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{(0, 1)\}$, $V = \mathbb{S}^1 \setminus (0, -1)$, (U, P) y (V, P_s) son las cartas mencionadas en el ejemplo anterior. De **III**-(v) se sigue que la función $P \times P: U \times U \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $P \times P((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (P(x_1, y_1), P(x_2, y_2))$ es homeomorfismo, por lo tanto la pareja $(U \times U, P \times P)$ es una carta sobre $\mathbb{T}^2$. Análogamente definimos las cartas $(U \times V, P \times P_s)$, $(V \times U, P_s \times P)$, $(V \times V, P_s \times P_s)$.
- (v) El interior de la banda de Möbius $\mathcal{M}^\circ = \{(x, y) \in C: |x| \leq 1, |y| < 1\} / \{(-1, y) \sim (1, -y)\}$ es una variedad: Supongamos que $(x, y) \in \mathcal{M}$. y Existen los siguientes dos casos.
- Si $|x| < 1$ y $|y| < 1$, entonces la pareja $(i, B_r(x, y))$ con $i: B_r(x, y) \rightarrow \mathbb{R}^2$ la inclusión es una carta donde $r = \frac{1}{2} \min\{|x|, |y|, 1 - |x|, 1 - |y|\}$ (ver **I**-(ii)).
 - Si $|x| = 1$, $|y| < 1$, $r = \frac{1}{2} \min\{|y|, 1 - |y|\}$, entonces definimos $B_1 = B_r(x, y) \cap C$ y $B_2 = B_r(-x, -y) \cap C$ y por lo tanto $U = p(B_1 \cup B_2)$ es un abierto de $\mathcal{M}$, donde $p: C \rightarrow \mathcal{M}$ es la función cociente. La pareja (h, U) tal que

$$h(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } (x, y) \in p(B_1) \\ (-x, -y) & \text{si } (x, y) \in p(B_2) \end{cases}$$

es una carta alrededor de (x, y) .

Ahora daremos ejemplos de espacios que no son variedades.

Ejemplos 1.3.2.

- (i) La unión de los ejes coordenados $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x = 0 \text{ ó } y = 0\}$ no es variedad : Es Hausdorff y segundo numerable pero el punto $(0, 0)$ no tiene vecindades homeomorfas a algún $\mathbb{R}^n$.

Si (V, ϕ) es carta para el punto $(0, 0)$ tal que V es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ para algún n , entonces $V \setminus \{(0, 0)\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{\phi(0, 0)\}$. El primer conjunto tiene cuatro componentes conexas, pero $\mathbb{R}^n \setminus \{\phi(0, 0)\}$ es conexo para $n \geq 2$ y tiene dos componentes conexas para $n = 1$. De esta forma concluimos que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x = 0 \text{ ó } y = 0\}$ no es variedad.

- (ii) Consideremos el espacio $X = \mathbb{R} \cup \{\tilde{0}\}$ con la topología $\tau \cup \langle \beta \rangle$, donde τ es la topología euclidea sobre $\mathbb{R}$ y $\langle \beta \rangle$ es lo generado por la base local $\beta = \{(a, b) \setminus \{0\} \cup \{\tilde{0}\}: a, b \in \mathbb{Q}, a < 0, b > 0\}$. Es fácil verificar que X es segundo numerable y localmente homeomorfo a $\mathbb{R}$ pero X no es Hausdorff ya que 0 y $\tilde{0}$ no se pueden separar con abiertos disjuntos.

En el inciso (iv) de los Ejemplos 1.3.1 dimos cartas para el toro $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ que son productos de cartas en $\mathbb{S}^1$. El siguiente resultado muestra que ésto se puede hacer en general.

Proposición 1.3.1. Si M^m y N^n son variedades, entonces $M \times N$ es una $(m+n)$ -variedad.

Demostración. Segundo numerable y Hausdorff son propiedades que se conservan bajo productos finitos. Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in M \times N$, entonces existen cartas (U, ϕ) y (V, ψ) con $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ homeomorfismos y U, V vecindades abiertas de x_1, x_2 respectivamente. Es claro que la función $\phi \times \psi: U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$ tal que $(\phi \times \psi)(x, y) = (\phi(x), \psi(y))$ es homeomorfismo, por lo tanto la pareja $(U \times V, \phi \times \psi)$ es carta de $M \times N$ alrededor de (x_1, x_2) . $\square$

1.4. Definición y ejemplos de Variedades con frontera

A continuación veremos otro tipo de variedades.

Definición 1.4.1. Un espacio topológico conexo (M, τ) es una ***n-variedad con frontera*** si es Hausdorff, segundo numerable y para todo $x \in M$ existe pareja (U, ϕ) tal que $U \subset M$ es vecindad abierta de x y ϕ cumple alguna de las siguientes :

- (i) $\phi: U \rightarrow \mathbb{B}^n$ es homeomorfismo.
- (ii) $\phi: U \rightarrow H^n$ es homeomorfismo con $\phi(x) \in \partial H^n$.

Al conjunto de los puntos $x \in M$ con vecindades homeomorfas a $\mathbb{B}^n$ se le llama interior de M y se denota por M° . Al conjunto de puntos con vecindades homeomorfas a H^n se le llama frontera de M y se denota ∂M .

Observaciones 1.4.1.

- (a) Por definición $M = \partial M \cup M^\circ$, además por el Corolario 1.2.1 M° y ∂M están bien definidos, es decir $\partial M \cap M^\circ$ es vacío.
- (b) ∂M es un subconjunto cerrado de M .
- (c) Toda variedad M es una variedad con frontera tal que $\partial M = \emptyset$. En este sentido las variedades con frontera son una generalización de variedad.
- (d) Por definición las variedades con frontera son localmente cpt, por la Proposición 1.1.1 también son cpt.

Ejemplos 1.4.1.

- (i) H^n es una n -variedad con frontera : Claramente es Hausdorff y segundo numerable. Si $\mathbf{x} \in \partial H^n$, entonces la pareja (H^n, id) es carta alrededor de $\mathbf{x}$. Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (H^n)^\circ$, entonces $x_n > 0$ y una carta para $\mathbf{x}$ es la pareja $(B_{x_n}(\mathbf{x}), \varphi)$ donde φ la función dada en la Sección 1.2 I-(ii).

- (ii) $\mathbb{B}^n \cap H^n$ es variedad con frontera : La función $\eta|_{\mathbb{B}^n \cap H^n} : \mathbb{B}^n \cap H^n \rightarrow H^n$ es homeomorfismo.
- (iii) $\mathbb{D}^n$ es variedad con frontera : La pareja $(\mathbb{B}^n \cap H^n, \eta|_{\mathbb{B}^n \cap H^n})$ es una carta ya que la restricción $\eta : \mathbb{B}^n \cap H^n \rightarrow H^n$ es un homeomorfismo (ver **I**-(i) de la Sección 1.2).
- (iv) La banda de Möbius es una variedad con frontera: Como se mostró en el Ejemplo 1.3.1-(v), $\mathcal{M}^\circ$ es variedad. Demostraremos que $\partial\mathcal{M} = \{p(x, y) \in \mathcal{M} : |y| = 1\}$ donde $p : C \rightarrow \mathcal{M}$ es la proyección cociente. Existen dos casos.
 - Si $|x| < 1$ y $r = \frac{1}{2} \min\{|x|, 1 - |x|\}$, entonces la pareja (i, U) donde i es la inclusión y $U = B_r(x, y) \cap C$ es carta.
 - Si $|x| = 1$ y $r = \frac{1}{2}$, entonces definimos $B_1 = B_r(x, y) \cap C$ y $B_2 = B_r(-x, -y) \cap C$ y por lo tanto $U = p(B_1 \cup B_2)$ es un abierto de $\mathcal{M}$. La pareja (h, U) tal que

$$h(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } (x, y) \in p(B_1) \\ (-x, -y) & \text{si } (x, y) \in p(B_2) \end{cases}$$

es una carta alrededor de (x, y) donde φ es la función dada en **I**-(ii), está bien definida y es homeomorfismo. Concluimos que la pareja (h, U) es carta del punto (x, y) .

Proposición 1.4.1. *Si M es una variedad con frontera, entonces ∂M es una $(n - 1)$ -variedad sin frontera.*

Demostración. ∂M es Hausdorff y segundo numerable ya que es un subconjunto de M . Si $x \in \partial M$ y (U, ϕ) es carta alrededor de x , entonces por el Corolario 1.2.1. tenemos que la restricción $\phi : U \cap \partial M \rightarrow H^n$ es homeomorfismo. Como $\partial H^n \cong \mathbb{R}^{n-1}$ (ver **IV**-(vii) de la Sección 1.2.), la pareja $(U \cap \partial M, \phi|_{U \cap \partial M})$ es carta alrededor de x . Concluimos que ∂M es $(n - 1)$ -variedad. $\square$

Lema 1.4.1. $H^n \times H^m \cong H^{n+m}$.

Demostración. Nótese que la función $f : H^1 \times H^1 \rightarrow H^2$ dada por $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ es un homeomorfismo (ver Figura 1.2).

Recordemos que $H^n \cong (\mathbb{R}^{n-1} \times H)$ (Sección 1.2 **IV**-(v)). De ello se sigue que $H^n \times H^m \cong (\mathbb{R}^{n-1} \times H) \times (\mathbb{R}^{m-1} \times H) \cong (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{m-1}) \times (H \times H) \cong \mathbb{R}^{n+m-2} \times (H \times H) \cong \mathbb{R}^{n+m-2} \times H^2 \cong \mathbb{R}^{n+m-2} \times \mathbb{R} \times H \cong \mathbb{R}^{n+m-1} \times H \cong H^{n+m}$. $\square$

Teorema 1.4.1. *Si M^m y N^n son variedades con frontera, entonces $M \times N$ es $(m+n)$ -variedad con frontera.*

Demostración. Procediendo de manera análoga a la Proposición 1.3.1 podemos demostrar que $(M \times N)^\circ = M^\circ \times N^\circ$.

Ahora procedemos a demostrar que $\partial(M \times N) = (\partial M \times N) \cup (M \times \partial N) \cup (\partial M \times \partial N)$. Para ello consideraremos los siguientes dos casos:

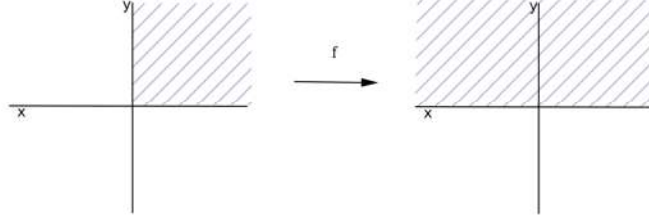


Figura 1.2: Comportamiento de la función f

- (i) Supongamos que $(x, y) \in \partial M \times N$ (el caso $(x, y) \in \partial N \times M$ es análogo). Por definición existen $\phi_x: U_x \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\phi_y: U_y \rightarrow H^n$, luego la función $\phi_x \times \phi_y: U_x \times U_y \rightarrow \mathbb{R}^m \times H^n$ tal que $(\phi_x \times \phi_y)(x, y) = (\phi_x(x), \phi_y(y))$ es homeomorfismo (producto de homeomorfismos). De esta manera concluimos que existe carta alrededor de x ya que $U_x \times U_y \cong H^{m+n}$ (ver **V**-(v) de la Sección 1.2).
- (ii) Supongamos que $(x, y) \in \partial M \times \partial N$. Por definición existen $\phi_x: U_x \rightarrow H^m$ y $\phi_y: U_y \rightarrow H^n$, luego la función $\phi_x \times \phi_y: U_x \times U_y \rightarrow H^m \times H^n$ tal que $(\phi_x \times \phi_y)(x, y) = (\phi_x(x), \phi_y(y))$ es homeomorfismo (producto de homeomorfismos). Del Lema 1.4.1 sabemos que existe homeomorfismo $f: H^m \times H^n \rightarrow H^{m+n}$. La pareja $(U_x \times U_y, f \circ (\phi_x \times \phi_y))$ es carta alrededor de (x, y) .

□

1.5. Subvariedades en una variedad

En la Sección 1.1 definimos los conceptos de interior y frontera para subconjuntos de espacios topológicos, en la sección anterior definimos los conceptos de interior y frontera de variedades (con frontera). En general estos dos conceptos no son equivalentes. En esta sección mostraremos una condición suficiente para que estos conjuntos coincidan.

Definición 1.5.1. *Supongamos que M^m es variedad. Decimos que N es **subvariedad** (con frontera) de M si N con la topología de subconjunto de M es una variedad (con frontera) de dimensión $n \leq m$.*

Ejemplos 1.5.1.

- (i) $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ es subvariedad no compacta y sin frontera. En general, si M es variedad y $U \subset M$ es abierto, entonces U es subvariedad de M .
- (ii) $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es subvariedad compacta y sin frontera para $n \geq 1$.

(iii) $\mathbb{S}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^m : x_i = 0 \text{ si } i > n\}$ es subvariedad de $\mathbb{S}^m$ con $m > n$ y $n > 1$.

A continuación se dan algunos ejemplos en los que las nociones de interior y frontera como subconjunto y como variedad no coinciden.

Ejemplos 1.5.2.

- (i) $I = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1]\}$ es subvariedad con frontera de $\mathbb{R}^2$ con $\partial I = \{(0, 0), (1, 0)\}$ y $I^\circ = \{(x, 0) : x \in (0, 1)\}$. Como subconjunto, $I \subset \mathbb{R}^2$ tiene interior vacío y todos sus puntos son puntos frontera.
- (ii) $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es subvariedad con $(\mathbb{S}^n)^\circ = \mathbb{S}^n$ y $\partial \mathbb{S}^n = \emptyset$. Como subconjunto tiene interior vacío y todos sus puntos son puntos frontera.

Estos ejemplos donde no coinciden las nociones de punto interior y punto frontera como subconjuntos y como subvariedad, se deben a que los conjuntos considerados son de dimensión menor que el del espacio ambiente $\mathbb{R}^n$.

Proposición 1.5.1. *Si $N \subset \mathbb{R}^m$ es subvariedad con frontera de dimensión n , entonces el interior y la frontera de N como subconjunto y como variedad coinciden si y sólo si $m = n$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Si el interior como subconjunto coincide con el de variedad, entonces para todo punto $x \in N^\circ$ existe una bola $B_r(\mathbf{x})$ contenida en N . La pareja $(B_r(\mathbf{x}), \varphi)$ (ver Sección 1.2 I-(ii)) es una carta alrededor de $\mathbf{x}$. Como N es variedad, entonces por definición, su dimensión debe ser la misma que la dimensión de la bola $B_r(\mathbf{x})$.

$\Leftarrow$] Supongamos que $m = n$. Es claro que el interior de N como subconjunto esta contenido en N° el interior como variedad. Si $\mathbf{x} \in N^\circ$ entonces existe carta (U, ϕ) tal que $U \subset N$ es abierto con la topología del subespacio τ_N . Entonces $\phi^{-1} : \mathbb{B}^n \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ es homeomorfismo y por Teorema 1.2.1 se tiene que $U = \phi^{-1}(\mathbb{B}^n)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ con la topología euclídeana. Por lo tanto el interior como subconjunto y como variedad coinciden.

Supongamos que $\mathbf{x} \in \partial N$ pero no es punto frontera de N como subconjunto. Existe $r > 0$ tal que $B_r(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus N) = \emptyset$. Esto implica que $B_r(\mathbf{x}) \subset N$ i.e $\mathbf{x}$ tiene una vecindad homeomorfa a $\mathbb{B}^n$ pero esto es imposible ya que $\partial N \cap N^\circ = \emptyset$. Por lo tanto ∂N está contenida en la frontera de N como subconjunto. La otra contención se sigue de que $\partial N \cup N^\circ = N$ y $\partial N \cap N^\circ = \emptyset$ y de que ya demostramos que los interiores coinciden en ambos casos. $\square$

Si M es variedad y $N \subset M^\circ$, entonces también se cumple que los interiores y las fronteras de N como variedad y como subconjunto coinciden y la prueba es análoga a la de la Proposición 1.5.1 (sólo hay que usar cartas en lugar de bolas abiertas). Sin embargo, en el caso en que $N \cap \partial M \neq \emptyset$ el resultado no es válido, a continuación mostramos un ejemplo.

Ejemplo 1.5.2 Considere el caso $M = \mathbb{D}^2$ y $N = \mathbb{D}^2 \cap H^2$. Es claro que $N \subset \mathbb{D}^2$ es subvariedad y que tienen la misma dimensión como variedades. Los

puntos $\mathbf{x} \in N$ tales que $|\mathbf{x}| = 1$ son puntos frontera de N como variedad pero no son puntos frontera de N como subconjunto, ya que ninguna vecindad de estos puntos intersecta a $\mathbb{D}^2 \setminus N$.

Capítulo 2

Un resultado sobre contracciones en Variedades

El objetivo de este capítulo es demostrar un resultado sobre variedades contraíbles que es uno de los resultados principales de este trabajo. Este resultado es una aplicación de la propiedad de extensión de homotopía y algunos teoremas que se demuestran aquí y que también se pueden encontrar en [1].

En la primera sección de este capítulo se introducen los conceptos de contracción y homotopía. La sección dos está dedicada a un ejemplo de un espacio que ilustra el problema que se atacó. La tercer sección es sobre la propiedad de extensión de homotopía, mientras que las secciones cuatro y cinco muestran unos resultados necesarios para la demostración principal de este capítulo. Finalmente en la sección seis se da una breve demostración del resultado.

2.1. Preliminares

Definición 2.1.1. Si X es un espacio topológico y $x_0 \in X$, entonces decimos que X es **contraíble** a x_0 si existe función continua $H: X \times I \rightarrow X$ tal que para todo $x \in X$, se cumpla que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = x_0$. En este caso decimos que H es una **contracción** de X en x_0 .

Ejemplos 2.1.1. Algunos espacios contraíbles.

- (i) $\mathbb{R}^n$ es contraíble sobre todos sus puntos: Si $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces la función $H: \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $H(\mathbf{x}, t) = (1 - t)\mathbf{x} + t\mathbf{x}_0$ es una contracción a $\mathbf{x}_0$.
- (ii) El espacio $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x = 0 \text{ ó } y = 0\}$ es contraíble sobre todos sus puntos: La función $H: X \times I \rightarrow X$ tal que $H(\mathbf{x}, t) = (1 - t)\mathbf{x}$ es una contracción al origen. Si el punto de contracción $\mathbf{x}_0 \in X$ es de la forma

$\mathbf{x}_0 = (x_0, 0)$, entonces la función $H: X \times I \rightarrow X$ tal que

$$H((x, y), t) = \begin{cases} (x, (1 - 2t)y) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ ((1 - (2t - 1))x + (2t - 1)x_0, 0) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es una contracción a $\mathbf{x}_0$. De manera análoga se demuestra que X se puede contraer a los puntos de la forma $(0, y_0)$.

(iii) Considere el espacio peine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dado por:

$$\Omega = \{(x, y) \in I \times I \subset \mathbb{R}^2 : \text{si } x \in \mathbb{Q} \Rightarrow y \in [0, 1 - x], \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow y = 0\}$$

con la topología del subespacio de $\mathbb{R}^2$.

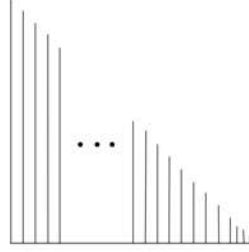


Figura 2.1: El espacio peine Ω

Si $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in X$, entonces la función $H: X \times I \rightarrow X$ definida como

$$H((x, y), t) = \begin{cases} (x, (1 - 3t)y) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ ([1 - (3t - 1)]x + (3t - 1)x_0, 0) & \text{si } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ (x_0, (3t - 2)y_0) & \text{si } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es una contracción de X en $\mathbf{x}_0$. Una observación interesante es que si $y_0 = 0$, entonces $H((x_0, y_0), t) = (x_0, y_0)$ para todo $t \in I$. Esto no sucede si $y_0 > 0$.

Definición 2.1.2. Supongamos que X es espacio topológico y $A \subset X$, decimos que A es :

- un **retracto** de X si existe $r: X \rightarrow A$ continua tal que $r|_A = id$. En este caso decimos que X se retrae en A y que r es una **retracción**.
- un **retracto por deformación fuerte** de X si existe función continua $H: X \times I \rightarrow X$ tal que para todo $x \in X$ se cumple que $H(x, 0) = x$, $H(x, 1) \in A$ y además, para todo $t \in I$, $H_t|_A = id_A$. En este caso decimos que X se retrae fuertemente a A y que H es una **retracción fuerte** de X en A .

Observaciones 2.1.1.

- (a) Una retracción por deformación fuerte $H: X \times I \rightarrow X$ define una retracción $r: X \rightarrow A$ como $r(x) = H(x, 1)$.
- (b) Si $H: X \times I \rightarrow X$ es contracción, entonces para todo $x \in X$, $H: \{x\} \times I \rightarrow X$ es curva que une a x con x_0 . Dicho de otra forma, una contracción a x_0 determina trayectorias que unen a todo punto con x_0 .
- (c) Si $A = \{x_0\}$ y H es una retracción fuerte de X en x_0 , entonces H es una contracción que además fija al punto x_0 , es decir, para todo $t \in I$, $H(x_0, t) = x_0$. Concluimos que un espacio que se retrae fuertemente en un punto x_0 , es contraíble a x_0 .
- (d) Del inciso (b) se sigue que los espacios contraíbles son cpt.
- (e) Supongamos que H es una contracción de X en x_0 . Si $x_1 \in X$ y $\gamma: I \rightarrow X$ es trayectoria que une a x_0 con x_1 , entonces $\tilde{H}: X \times I \rightarrow X$ dada por

$$\tilde{H}(x, t) \begin{cases} H(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es contracción de X en x_1 . Concluimos que X se contrae sobre todos sus puntos.

Ejemplos 2.1.2.

- (i) $A = (I \times \{0\}) \cup (\partial I \times I)$ es retracto de $I \times I$. La Figura 2.2 divide a $I \times I$ en tres regiones A_1, A_2, A_3 .

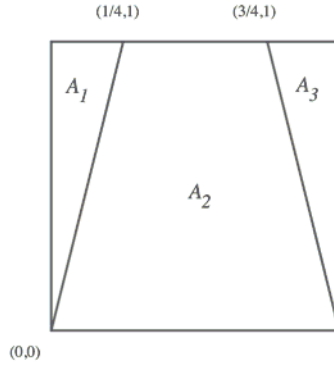


Figura 2.2: Regiones A_i en el espacio $I \times I$

La función $r: I \times I \rightarrow A$ definida como :

$$r(x, y) = \begin{cases} (0, y - 4x) & \text{si } (x, y) \in A_1 \\ (\frac{4x-y}{2(2-y)}, 0) & \text{si } (x, y) \in A_2 \\ (1, y + 4(x - 1)) & \text{si } (x, y) \in A_3 \end{cases}$$

es una retracción.

- (ii) La contracción del espacio Ω dada en el Ejemplo 2.1.1-(iii) es una retracción fuerte a los puntos de la forma $(x_0, 0)$, pero en el resto de los puntos de Ω es sólo una contracción. En la siguiente sección mostraremos que Ω no se retrae fuertemente sobre los puntos de la forma (x_0, y_0) con $y_0 > 0$ por ello Ω es un espacio que se retrae fuertemente sobre algunos de sus puntos y sobre otros no.

Terminamos esta sección con algunas definiciones.

Definición 2.1.3. Si X y Y son espacios topológicos, entonces una **homotopía** de X en Y es una familia de funciones $\{f_t\}_{t \in I}$ con $f_t: X \rightarrow Y$ continuas, tal que la función $F: X \times I \rightarrow Y$ dado por $F(x, t) = f_t(x)$ es continuo.

Observaciones 2.1.2.

- (a) Las homotopías se pueden ver como funciones continuas $F: X \times I \rightarrow Y$ o como familias de funciones continuas indexadas $\{f_t\}_{t \in I}$.
- (b) Las contracciones y retracciones fuertes son casos especiales de homotopías en las que $Y = X$.

Con la última observación podemos concluir que todas las contracciones y retracciones fuertes que hemos mencionado son ejemplos de homotopías. Hasta el momento las homotopías que hemos hecho deforman espacios en (sub)espacios por medio de trayectorias. Como veremos a continuación es posible hacer una analogía a funciones.

Definición 2.1.4. Supongamos que X y Y son espacios topológicos.

- Dos funciones $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ son **homotópicas** si existe homotopía $\tilde{f}_t: X \rightarrow Y$ tal que $\tilde{f}_0 = f_0$ y $\tilde{f}_1 = f_1$. Denotamos esto por $f_0 \simeq f_1$.
- Si $y_0 \in Y$ y $c_{y_0}: X \rightarrow Y$ es la función constante, entonces decimos que $f: X \rightarrow Y$ es **homotópicamente nula** si $f \simeq c_{y_0}$.
- Una función $f: X \rightarrow Y$ es una **equivalencia homotópica** si existe $g: Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f \simeq id_X$ y $f \circ g \simeq id_Y$. A la función g se le conoce como **inversa homotópica de f** .

Observaciones 2.1.3.

- (a) Si $f: X \rightarrow Y$ es una función, $g: Y \rightarrow X$ es inversa homotópica de f y $g \simeq g_1$, entonces $g \circ f \simeq g_1 \circ f$ y $f \circ g \simeq f \circ g_1$. De manera que g_1 también es inversa homotópica de f . Concluimos que las inversas homotópicas no son únicas. En general, dos inversas homotópicas de una función son homotópicas entre sí.
- (a) Supongamos que $H: X \times I \rightarrow X$ es una retracción fuerte sobre A . Si $i: A \rightarrow X$ es la inclusión y $r: X \rightarrow A$ es la retracción $r(x) = H(x, 1)$,

entonces $r \circ i = id_A$ y H determina una homotopía de id_X en $i \circ r$, de manera que i y r son inversas homotópicas. Concluimos que r es una equivalencia homotópica.

- (a) Supongamos que $H: X \times I \rightarrow X$ es una contracción sobre x_0 . Si $i: \{x_0\} \rightarrow X$ es la inclusión y $r: X \rightarrow \{x_0\}$ es la retracción $r(x) = H(x, 1)$, entonces $r \circ i = id_{\{x_0\}}$ y H es una homotopía de id_X en $i \circ r$, por lo tanto i y r son inversas homotópicas.

2.2. Un ejemplo importante

En esta sección mostramos un espacio Z que es contraíble pero que no se retrae fuertemente sobre ninguno de sus puntos. Para demostrar las propiedades de Z necesitaremos de dos resultados preliminares.

Lema 2.2.1. (*Lema del Tubo*) Supongamos que X y Y son espacios topológicos con Y compacto y $x_0 \in X$. Si $W \subset X \times Y$ es abierto y $\{x_0\} \times Y \subset W$, entonces existe abierto $U \subset X$ tal que $x_0 \in U$ y $U \times Y \subset W$.

Demostración. Supongamos que $\{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es una familia de abiertos básicos que cubre a $\{x_0\} \times Y$ tal que $U_\alpha \times V_\alpha \subset W$ para todo $\alpha \in J$. Como Y es compacto, entonces $\{x_0\} \times Y$ también lo es por lo que se puede elegir una cantidad finita de abiertos $U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n$ que lo cubren. Si $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$ y $(x, y) \in U \times Y$, entonces existe j tal que $y \in V_j$ y $x \in U_j$ (por definición de U). Esto implica que $(x, y) \in U_j \times V_j \subset W$ y por lo tanto $U \times Y \subset W$. $\square$

Lema 2.2.2. Si X se retrae fuertemente a $x_0 \in X$, entonces para toda vecindad U de x_0 existe otra vecindad $V \subset U$ de x_0 tal que la inclusión $i: V \hookrightarrow U$ es homotópicamente nula.

Demostración. Supongamos que $H: X \times I \rightarrow X$ es retracción fuerte sobre x_0 . Si $U \subset X$ es vecindad abierta de x_0 , entonces $H^{-1}(U) \subset X \times I$ es abierto y contiene a $\{x_0\} \times I$ (H fija a x_0). Por Lema 2.2.1 existe $V \subset X$ vecindad abierta de x_0 tal que $V \times I \subset H^{-1}(U)$, además V está contenido en U ya que $H_0 = id_X$. La función $H: V \times I \rightarrow U$ define una homotopía entre $i: V \hookrightarrow U$ y la función constante $c_{x_0}: V \rightarrow U$. $\square$

Si $(x_0, y_0) \in \Omega$ (el espacio peine del Ejemplo 2.1.1-(iii)) es tal que $y_0 > 0$, entonces toda bola abierta U de radio menor que y_0 y centrada en (x_0, y_0) tiene una infinidad de componentes conexas (ver Figura 2.3). Análogamente, toda vecindad abierta $V \subset U$ tiene una infinidad de componentes conexas y por lo tanto no puede ser homotópicamente nula en U . Del Lema 2.2.2 se sigue que Ω no se retrae fuertemente sobre (x_0, y_0) , concluimos que Ω es contraíble a todo punto pero sólo se retrae por deformación fuerte sobre los puntos de la forma $(x_0, 0)$. Procedemos a mostrar un ejemplo de un espacio contraíble que no se retrae por deformación fuerte sobre ninguno de sus puntos.

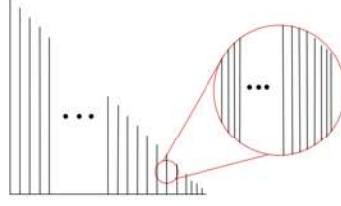


Figura 2.3: Vecindades de los puntos de Ω

Considere el conjunto $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^2$ que se construye con una infinidad de copias de Ω acomodadas en zig-zag (ver Figura 2.4) con la topología del subespacio. Nótese que si $p \in \mathcal{Z}$, entonces las bolas de radio suficientemente pequeño centradas en p intersectan a $\mathcal{Z}$ en una infinidad de componentes conexas. Por el Lema 2.2.2 concluimos que $\mathcal{Z}$ no se puede retraer fuertemente sobre ninguno de sus puntos. Procedemos a demostrar que $\mathcal{Z}$ es contraíble.

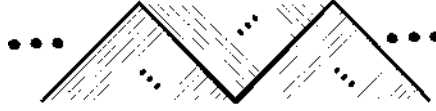


Figura 2.4: Espacio $\mathcal{Z}$.

Denotemos con $Z \subset \mathcal{Z}$ al zig-zag conformado por la línea remarcada en la Figura 2.4. Considere la homotopía $H: \mathcal{Z} \times I \rightarrow \mathcal{Z}$ que actúa de la siguiente forma:

- (i) Los puntos en Z se mueven hacia la derecha a través de Z a velocidad constante 1.
- (ii) Los puntos en $\mathcal{Z} \setminus Z$ se mueven hacia Z con velocidad constante 1 a través de la línea a la que pertenecen, una vez que alcanzan a Z se siguen moviendo junto con los puntos de Z hacia la derecha (ver Figura 2.5).

Es fácil convencerse de que H es continua y que $H(\mathcal{Z}, 1) = Z$. Es claro que Z es homeomorfo a $\mathbb{R}$ y por lo tanto se puede contraer sobre cualquiera de sus puntos (ver Ejemplo 2.1.1-(i)).

Este ejemplo muestra que los conceptos de “contraíble” y “retraíble fuertemente a un punto” son distintos. En la Sección 2.5 de este capítulo mostraremos que en variedades dichos conceptos sí coinciden, para ello, en las Secciones 2.3 y 2.4 construiremos la teoría necesaria para la demostración.

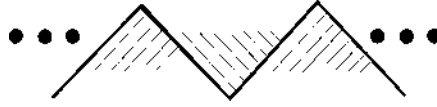


Figura 2.5: $H(\frac{1}{2}, \mathbb{Z})$

2.3. Propiedad de Extensión de Homotopía

La *propiedad de extensión de homotopía* se define para parejas de la forma (X, A) con $A \subset X$. Intuitivamente, las parejas (X, A) que cumplen con dicha propiedad son aquellas en las que A “atrapa” toda la parte complicada de X y por lo tanto toda función continua en A se puede extender a una función sobre X . La definición precisa se da a continuación:

Definición 2.3.1. *Supongamos que X, Y son espacio topológicos y $A \subset X$. Si para toda función $\tilde{f}_0: X \rightarrow Y$ y homotopía $f_t: A \rightarrow Y$ tal que $f_0 = \tilde{f}_0|_A$, existe homotopía $\tilde{f}_t: X \rightarrow Y$ que extiende a $\tilde{f}_0$ y tal que para todo $t \in I$, $\tilde{f}_t|_A = f_t$, para $t \in I$, entonces decimos que la pareja (X, A) tiene la **propiedad de extensión de homotopía (PEH)**.*

En otras palabras, la pareja (X, A) tiene la PEH si toda función $F: (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \rightarrow Y$ se puede extender a una función $\tilde{F}: X \times I \rightarrow Y$. Como ejemplo considere una función continua $F: I \times \{0\} \cup \{0, 1\} \times I \rightarrow Y$, la función $\tilde{F}_t: I \times I \rightarrow Y$ tal que $\tilde{F}(t, s) = F \circ r(t, s)$ donde $r: I \times I \rightarrow I \times \{0\} \cup \{0, 1\} \times I$ es la retracción mostrada en el Ejemplo 2.1.2-(i) extiende a F . Por ello la pareja $(I \times I, I \times \{0\} \cup \{0, 1\} \times I)$ tiene la PEH.

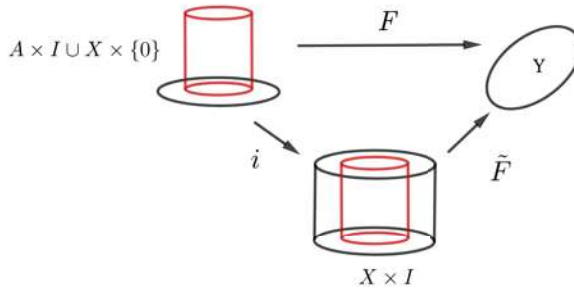


Figura 2.6

El siguiente resultado caracteriza a las parejas (X, A) que tienen la PEH y nos ayuda a encontrar ejemplos con mayor facilidad.

Proposición 2.3.1. *La pareja (X, A) tiene la PEH si y sólo si $X \times I$ se retrae en $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que (X, A) tiene la PEH. Si $Y = (X \times \{0\}) \cup (A \times$

$I) \subset X \times I$ y $F: Y \rightarrow Y$ es la identidad, entonces existe función $\tilde{F}: X \times I \rightarrow Y$ que extiende a la identidad, es decir $\tilde{F}|_Y = F = id$. Por lo tanto $\tilde{F}$ es una retracción de $X \times I$ en $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$.

$\Leftarrow$ Si $r: X \times I \rightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ es una retracción y $F: (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \rightarrow Y$ es una función continua, entonces la función $\tilde{F} = F \circ r: X \times I \rightarrow Y$ es continua que extiende a F . Por lo tanto la pareja (X, A) tiene la PEH. $\square$

Corolario 2.3.1. *Si la pareja (X, A) tiene la PEH, entonces la pareja $(X \times I, A \times I)$ también la tiene.*

Demostración. Como (X, A) tiene la PEH, existe retracción $r: X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$. La función $R: X \times I \times I \rightarrow X \times I \times \{0\} \cup A \times I \times I$ dada por $R(x, t, s) = (r(x, s), t)$ es retracción. $\square$

Ayudándonos de este resultado podemos construir más parejas que tienen la PEH, a continuación mencionamos algunos ejemplos que no demostraremos con detalle.

Ejemplos 2.3.1. Parejas con la propiedad de extensión de homotopía.

- (i) $(\mathbb{R}, \{0\})$ tiene la PEH ya que $\mathbb{R} \times I$ se retrae en $\mathbb{R} \times \{0\} \cup (\{0\} \times I)$. En general se cumple que $(\mathbb{R}^n, \{0\})$ tiene la PEH.
- (ii) $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{S}^1)$ tiene la PEH ya que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times I$ se retrae en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times \{0\} \cup \mathbb{S}^1 \times I$. En general se cumple que $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{S}^{n-1})$ tiene la PEH.

2.4. Mapeos cilindro

En esta sección estudiaremos ciertos tipos de vecindades de un conjunto A dentro de un espacio topológico X que aseguran que la pareja (X, A) tiene la propiedad de extensión de homotopía (PEH).

Definición 2.4.1. *Si X, Y son espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ es continua, entonces el mapeo cilindro de f es el cociente*

$$\mathcal{M}_f := ((X \times I) \sqcup Y) / \{(x, 0) \simeq f(x)\}.$$

Nótese que un punto $m \in \mathcal{M}_f$ es de la forma $m = (x, s)$ o $m = y$.

Ejemplos 2.4.1. Mapeos cilindros.

- (i) Si $X = Y$ y $f: X \rightarrow Y$ es homeomorfismo, entonces el espacio $\mathcal{M}_f$ es el cilindro $X \times I$.
- (ii) Si $A \subset X$ e $i: A \rightarrow X$ es la inclusión, entonces el cilindro de la inclusión $\mathcal{M}_i$ se obtiene al pegar $A \times I$ sobre $A \subset X$.

Definición 2.4.2. Supongamos que X es un espacio topológico y $A \subset X$ es cerrado. Decimos que A tiene vecindad mapeo cilindro en X si existen los siguientes:

- (i) $N \subset X$ cerrado tal que $A \subset N^\circ$.
- (ii) $f: \partial N \rightarrow A$ continua, tal que existe homeomorfismo $h: \mathcal{M}_f \rightarrow N$ con $h|_A = id_A$ y $h(x, 1) = x$.

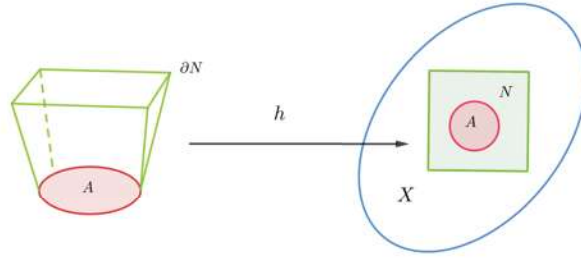


Figura 2.7: Vecindad Mapeo Cilindro

Ejemplos 2.4.2. Vecindades mapeo cilindro

- (i) $\mathbb{D}^n$ es vecindad mapeo cilindro de $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Sabemos que $\partial N = \partial \mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$, que $\{0\} \subset \mathbb{D}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{B}^n$ y que la función constante $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \{0\}$ es continua. La función $h: \mathcal{M}_f \rightarrow \mathbb{D}^n$ tal que

$$h(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \in (\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}) \cup \{0\} \\ tx & \text{si } m = (x, t) \in \mathbb{S}^{n-1} \times (I \setminus \{0\}) \end{cases}$$

es homeomorfismo y $h(x, 1) = x$.

- (ii) $N = \mathbb{D}^n \cap H^n$ es vecindad mapeo cilindro de $\{0\} \subset H^n$. Sabemos que $\partial N = \mathbb{S}^{n-1} \cap H^n \cong \mathbb{D}^{n-1}$ (ver **IV**-(vi) de la Sección 1.2), que $\{0\} \subset N \setminus \partial N = \mathbb{B}^n \cap H^n$ y que la función constante $f: \partial N \rightarrow \{0\}$ es continua. La función $h: \mathcal{M}_f \rightarrow N$ tal que

$$h(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \in (\mathbb{S}^{n-1} \cap H^n) \times \{0\} \cup \{0\} \\ tx & \text{si } m = (x, t) \in (\mathbb{S}^{n-1} \cap H^n) \times (I \setminus \{0\}) \end{cases}$$

es homeomorfismo y $h(x, 1) = x$

Lema 2.4.1. Si X es espacio topológico y $A \subset X$ tiene vecindad mapeo cilindro, entonces la pareja (X, A) tiene la PEH.

Demostración. Supongamos que $N \subset X$ es vecindad mapeo cilindro y $h: \mathcal{M}_f \rightarrow N$ es homeomorfismo como en la definición. Dividiremos la demostración en las siguientes dos partes:

- (i) Demostrar que $(N, A \cup \partial N)$ tiene la PEH.

(ii) Demostrar que (X, A) tiene la PEH.

Demostración de (i): La retracción $r: I \times I \rightarrow (I \times \{0\}) \cup (\partial I \times I)$ del Ejemplo 2.1.2-(i) induce retracción $r_1: \partial N \times (I \times I) \rightarrow [\partial N \times (I \times \{0\})] \cup [\partial N \times (\partial I \times I)]$ tal que $r_1(x, s, t) = (x, r(s, t))$.

Definimos la función $R: \mathcal{M}_f \times I \rightarrow (\mathcal{M}_f \times \{0\}) \cup [(\partial N \times \{1\} \sqcup A) \times I]$ dada por

$$R(m, t) = \begin{cases} (m, t) & \text{si } (m, t) \in A \times I \\ r_1(m, t) & \text{si } (m, t) \in \partial N \times I \times I. \end{cases}$$

Observemos que R es una retracción ya que fija a $A \times I$ y r_1 es retracción. Usando la Proposición 2.3.1 se sigue que la pareja $(\mathcal{M}_f, (\partial N \times \{1\}) \cup A)$ tiene la PEH. Como $h: \mathcal{M}_f \rightarrow N$ es la identidad en A y $h(x, 1) = x$, concluimos que la pareja $(N, \partial N \cup A)$ tiene la PEH.

Demostración de (ii): Supongamos que $F: A \times I \rightarrow Y$ y $f_0: X \rightarrow Y$ son tales que $F|_{A \times \{0\}} = f_0|_A$. Definimos $F_1: (\partial N \cup A) \times I \rightarrow Y$ tal que:

$$F_1(x, t) = \begin{cases} F(x, t) & \text{si } (x, t) \in A \times I \\ f_0(x) & \text{si } (x, t) \in \partial N \times I. \end{cases}$$

Es claro que F_1 es continua ya que F y f_0 lo son y $A \subset N^\circ$, además F_1 coincide con f_0 en $(\partial N \cup A) \times \{0\}$. Ya que la pareja $(N, \partial N \cup A)$ tiene la PEH (inciso (i)), sabemos que existe $F_2: N \times I \rightarrow Y$ que extiende a F_1 (por lo tanto $F_2|_{N \times \{0\}} = f_0|_N$).

Para concluir, definimos $\tilde{F}: X \times I \rightarrow Y$ tal que

$$\tilde{F}(x, t) = \begin{cases} F_2(x, t) & \text{si } (x, t) \in N \times I \\ f_0(x) & \text{si } (x, t) \in (X \setminus N) \times I. \end{cases}$$

Esta función es continua ya que si $x \in \partial N$, entonces para todo $t \in I$ se cumple que $F_2(x, t) = f_0(x)$, por lo tanto F_2 se puede extender “levantando” la función f_0 sobre todo el cilindro $(X \setminus N) \times I$. $\square$

2.5. Lema Técnico

En esta sección probaremos un lema que usaremos posteriormente, dicho lema trata sobre homotopías entre funciones pero relativas a un subconjunto.

Definición 2.5.1. *Supongamos que X y Y son espacios topológicos y que A está contenido en ambos.*

- Si $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ son tales que existe homotopía H_t entre ellas con $H_t|_A = id_A$ para todo $t \in I$, entonces decimos que f_0 y f_1 son **homotópicas relativo a A** y lo denotamos como $f_0 \simeq_A f_1$.

- Si $f: X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica tal que $f|_A = id_A$, entonces decimos que f es **equivalencia homotópica relativa a A** si existe inversa homotópica $g: Y \rightarrow X$ tal que $g|_A = id_A$ y $g \circ f \simeq_A id_X$ y $f \circ g \simeq id_Y$.

Lema 2.5.1. Si (X, A) y (Y, A) tienen la PEH y $f: X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica con $f|_A = id$, entonces f es una equivalencia homotópica relativa a A .

Demostración. Supongamos que $g: Y \rightarrow X$ es inversa homotópica de f . Dividiremos esta demostración en tres partes.

- Construir una nueva inversa homotópica g_1 a partir de g tal que $g_1|_A = id$.
- Demostrar que $g_1 \circ f \simeq_A id_X$.
- Demostrar que $f \circ g_1 \simeq_A id_Y$.

Demostración de (i) Supongamos que $\{H_t: X \rightarrow X\}_{t \in I}$ es una homotopía tal que $H_0 = g \circ f$ y $H_1 = id_X$. La familia $\{H_t|_A\}$ es una homotopía de A en X tal que $H_0|_A = (g \circ f)|_A = g|_A \circ id_A$. Sabemos que $A \times I \subset Y \times I$, entonces a través de las funciones H_t podemos definir la homotopía $\{G_t: A \rightarrow X\}$ tal que $G_t(a) = H_t|_A(a)$. Como la inversa homotópica $g: Y \rightarrow X$ cumple que $g|_A = H_0|_A = G_0$ y (Y, A) tiene la PEH, entonces existe homotopía $\{\tilde{G}_t: Y \rightarrow X\}$ que extiende a $\{G_t\}$ y por lo tanto $\tilde{G}_0 = g$.

Nótese que la función $g_1 = \tilde{G}_1: Y \rightarrow X$ también es inversa homotópica de f (ver Observación 2.3.1-(i)) y satisface que $g_1|_A = \tilde{G}_1|_A = H_1|_A = id_A$, con esto concluimos la prueba de (i).

Demostración de (ii) La función $F: X \times I \rightarrow X$ definida como

$$F(x, t) = \begin{cases} \tilde{G}_{1-2t}(f(x)) & \text{si } (x, t) \in X \times [0, \frac{1}{2}] \\ H_{2t}(x) & \text{si } (x, t) \in X \times [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

donde $\tilde{G}$ es la homotopía definida en (i), determina una homotopía entre $F_0 = \tilde{G}_1 \circ f = g_1 \circ f$ y $F_1 = H_1 = id_X$.

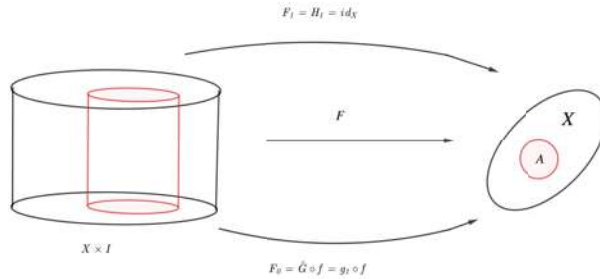


Figura 2.8: La función F

Nótese que $F_0|_A = F_1|_A = id_X$ y si $t \in [0, \frac{1}{2}]$, entonces $F_t|_A = F_{1-t}|_A$.

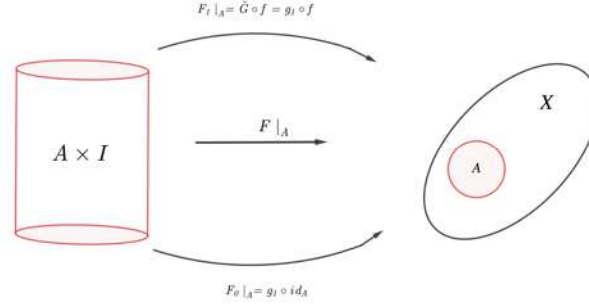


Figura 2.9: La función $F|_A$

Considere la función auxiliar $K: A \times I \times I \rightarrow X$ definida como

$$K(a, s, t) = \begin{cases} F|_A(a, t) & \text{si } (a, t, s) \in A \times [0, \frac{1-s}{2}] \times I \\ F|_A(a, \frac{1-t}{2}) & \text{si } (a, t, s) \in A \times [\frac{1-s}{2}, \frac{1+s}{2}] \times I \\ F|_A(a, t) & \text{si } (a, t, s) \in A \times [\frac{1+s}{2}, 1] \times I. \end{cases}$$

K se puede ver como una “homotopía de homotopías” que en cada cilindro $A \times I \times \{s_0\}$ comienza en id_A se comporta como $F_t|_A$ hasta $t = \frac{1-s_0}{2}$, se queda fija en el intervalo $[\frac{1-s_0}{2}, \frac{1+s_0}{2}]$ y se “regresa” (recorre F_{1-s}) cuando $t \in [\frac{1+s_0}{2}, 1]$.

Como (X, A) tiene la PEH, entonces $(X \times I, A \times I)$ también la tiene (ver Corolario 2.3.1). Por lo tanto existe $\tilde{K}: X \times I \times I \rightarrow X$ que extiende a K y tal que $\tilde{K}_0: X \times I \rightarrow X$ coincide con $F: X \times I \rightarrow X$.

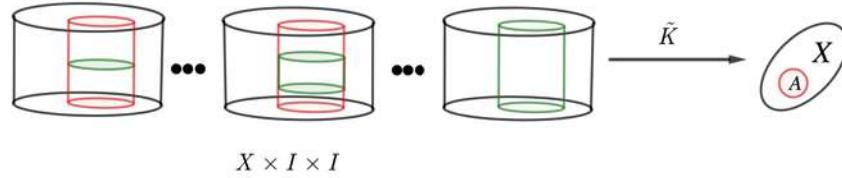


Figura 2.10: La función $\tilde{K}$. La que aparece en color verde indica las partes en donde las homotopías fijan puntos.

La asignación

$$(x, t) \mapsto \begin{cases} \tilde{K}(x, 0, 3t) & \text{si } (x, t) \in X \times [0, \frac{1}{3}] \\ \tilde{K}(x, 3t - 1, 1) & \text{si } (x, t) \in X \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \tilde{K}(x, 1, 3 - 3t) & \text{si } (x, t) \in X \times [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

define una homotopía entre $\tilde{K}_0 = g_1 \circ f$ y $\tilde{K}_1 = id_X$ que fija a A en todo tiempo $t \in I$.

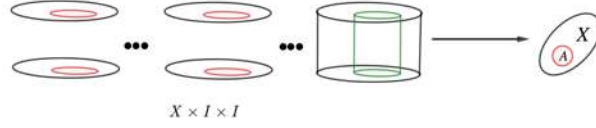


Figura 2.11: La trayectoria que sigue la asignación que define la homotopía relativa a A .

Demostración de (iii) Repitiendo los pasos (i) y (ii) sustituyendo las funciones f, g por g_1, f en ese orden, podemos obtener una función $f_1: X \rightarrow Y$ tal que $f_1 \circ g_1 \simeq_A id_Y$. Por (ii) se tiene que

$$f_1 = f_1 \circ id_X \simeq_A f_1 \circ (g_1 \circ f) = (f_1 \circ g_1) \circ f \simeq_A id_Y \circ f = f$$

lo que implica que $f \circ g_1 \simeq_A f_1 \circ g_1 \simeq_A id_Y$. Concluimos que f es una equivalencia homotópica relativa a A . $\square$

2.6. Contracciones en Variedades

En esta sección probamos que toda variedad contraíble se retrae por deformación fuerte sobre todos sus puntos. Primero demostramos el siguiente resultado preliminar.

Proposición 2.6.1. *Si M^n es una variedad con frontera y $x_0 \in M^n$, entonces la pareja (M, x_0) tiene la PEH.*

Demostración. Veamos que x_0 tiene vecindad mapeo cilindro. Existen los siguientes dos casos:

Caso 1. Si $x_0 \in M^\circ$, entonces existe carta $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\phi(x_0) = 0$ (basta componer cualquier carta con una traslación en $\mathbb{R}^n$ que lleve la imagen de x_0 al 0). Si $N = \phi^{-1}(\mathbb{D}^n)$, entonces utilizando el Ejemplo 2.4.2-(i) concluimos que $N \subset M$ es vecindad mapeo cilindro de x_0 .

Caso 2. Si $x_0 \in \partial M$, entonces existe carta $\phi: U \rightarrow H^n$ tal que $\phi(x_0) = 0$ (se procede análogamente que en el caso anterior). Si $N = \phi^{-1}(\mathbb{D}^n \cap H^n)$, entonces utilizando el Ejemplo 2.4.2-(ii) concluimos que $N \subset M$ es vecindad mapeo cilindro de x_0 .

La demostración termina usando el Lema 2.4.1 en la pareja (M, x_0) . $\square$

Finalmente estamos listos para demostrar el resultado principal del capítulo el cual es una de las aportaciones originales de este trabajo.

Teorema 2.6.1. *Si M es variedad con frontera, entonces M es contraíble a $x_0 \in M$ si y sólo si $\{x_0\}$ es retracto por deformación fuerte de M .*

Demostración. $\Leftarrow$] Se sigue de la Observación 2.1.1-(c).

$\Rightarrow$] De la Observación 2.1.3-(c), sabemos que la inclusión $i: \{x_0\} \rightarrow M$ es equivalencia homotópica con inversa igual a la función constante $c_{x_0}: M \rightarrow \{x_0\}$. De la proposición anterior se sigue que la pareja (M, x_0) tiene la PEH y por el Lema 2.5.1 se tiene que la inclusión i es inversa homotópica relativa a $\{x_0\}$, es decir, existe homotopía $H: M \times I \rightarrow I$ entre $i \circ c_{x_0}$ y id_M que fija a x_0 en todo tiempo. Por definición H es una retracción por deformación fuerte de M en x_0 . $\square$

Terminamos este capítulo con una implicación de este Teorema.

Corolario 2.6.1. *Supongamos que M^n es una variedad con frontera con $x_0 \in M$. Si M es contraíble a x_0 , entonces para todo $x \in M^n$, $\{x\}$ es retracto fuerte de M*

Demostración. Se sigue de que un espacio contraíble es contraíble a todos sus puntos y del Teorema 2.6.1. $\square$

Capítulo 3

Tres Teoremas Sobre Variedades

Este capítulo está dedicado a demostrar tres teoremas sobre variedades. El primero de ellos es sobre un tipo de vecindad de la frontera de una variedad y se le atribuye a Morton Brown [6]. El segundo teorema es un hecho interesante sobre la compactificación por un punto del interior de una variedad. El tercer teorema es sobre una caracterización de $\mathbb{R}^n$ que es parte de otro trabajo en proceso.

3.1. Vecindad collar de la frontera

En general extender una propiedad local a una global no es tarea fácil y en la mayoría de los casos no es posible. Las variedades con frontera tienen la propiedad de ser localmente $\mathbb{R}^n$ o H^n , en esta sección probaremos que podemos encontrar un tipo especial de vecindad de la frontera que se obtiene al extender ésta propiedad local.

Comenzamos esta sección introduciendo el concepto de *vecindad collar*, el resultado que probaremos se puede demostrar en general para variedades pero sólo lo demostraremos para variedades compactas.

Definición 3.1.1. *Si M es una variedad con frontera, entonces una **vecindad collar** de ∂M es un abierto $V \subset M$ tal que $\partial M \subset V$ y existe homeomorfismo $h: V \rightarrow \partial M \times [0, 1)$ tal que si $x \in \partial M$, entonces $h(x) = (x, 0)$.*

De la definición de variedad (Definición 1.4.1) sabemos que si $x \in \partial M$, entonces existe carta local $\phi: U \rightarrow H^n$ tal que $\phi(x) \in \partial H^n$. Si definimos $V = \phi^{-1}(\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in H^n: 0 \leq x_n < 1\})$, entonces V es una vecindad collar de ∂U , el homeomorfismo $h: V \rightarrow \partial U \times [0, 1)$ está dado por

$$h(y) = (\phi^{-1} \circ \pi \circ \phi(y), p_n \circ \phi(y))$$

donde p_n es la proyección a la n -ésima coordenada y $\pi(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$. Esto muestra que al menos localmente siempre existen las vecindades collar de la frontera de una variedad.

Ejemplos 3.1.1. Vecindades Collar

- (i) $\partial \mathbb{D}^n$ tiene una vecindad collar : Considere el abierto $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{D}^n : \frac{1}{2} < \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$. La función $h: V \rightarrow \partial \mathbb{D}^n \times [0, 1]$ dado por $h(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, 2(1 - \|\mathbf{x}\|))$ es un homeomorfismo por lo que V es vecindad collar de $\partial \mathbb{D}^n$.
- (ii) Considere la banda de Möbius $\mathcal{M}$ definida en el Ejemplo 1.1.1-(iii) y $p: C \rightarrow \mathcal{M}$ la proyección cociente. Se sabe que $\partial \mathcal{M} = \mathbb{S}^1$. Tomamos $V = \{(x, y) \in C : |y| > 1/2\}$, por lo tanto $p(V)$ es abierto. La función $h: p(V) \rightarrow \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ dada por

$$h(t, s) = \begin{cases} (e^{i\frac{\pi(1+t)}{2}}, 2(s+1)) & \text{si } (t, s) \in [-1, 1] \times [-1, -1/2] \\ (-e^{i\frac{\pi(1-t)}{2}}, 2(1-s)) & \text{si } (t, s) \in [-1, 1] \times (1/2, 1] \end{cases}$$

es un homeomorfismo con $h(t, s) \in \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ si $(t, s) \in \partial \mathcal{M}$.

A continuación demostraremos un resultado que asegura la existencia de vecindades collar de las fronteras de variedades compactas. Dicho resultado fue originalmente probado por Morton Brown en el año 1962 [6], pero la demostración que daremos aquí se puede consultar en [1, pág. 231].

Teorema 3.1.1. *Si M^n es vecindad compacta con frontera, entonces ∂M tiene una vecindad collar.*

Demostración. Denotaremos por M' al espacio cociente $M \sqcup (\partial M \times I) / \{x \sim (x, 0)\}$, el cual es una copia de M con un cilindro $\partial M \times [0, 1]$ pegado por la frontera. Para demostrar el resultado construiremos un homeomorfismo entre M y M' .

Para todo $x \in \partial M$ existe carta U_x que es homeomorfa a H^n . Además, como ∂M es variedad de dimensión $n - 1$ (ver Proposición 1.4.1), entonces existe vecindad $V_x \subset \partial M$ (con la topología del subespacio) y homeomorfismo $f_x: V_x \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$. Es claro que podemos escoger los abiertos V_x de manera que su cerradura $\bar{V}_x$ sea homeomorfa a $\mathbb{D}^{n-1}$ y esté contenida en $U_x \cap \partial M$ (ver Figura 3.1).

Para cada $x \in \partial M$ definimos $\varphi_x: \partial M \rightarrow [0, 1]$ de la siguiente manera:

$$\varphi_x(y) = \begin{cases} 1 - \frac{\|f_x(y)\|}{\|f_x(y)\|+1} & \text{si } y \in V_x \\ 0 & \text{si } y \in \partial M \setminus V_x \end{cases}$$

Nótese que si $r\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ es la esfera de radio $r > 0$, entonces $\varphi_x(f_x^{-1}(r\mathbb{S}^{n-1})) = \frac{1}{r+1}$, de manera que las funciones φ_x son continuas. De la Observación 1.4.1-(b) sabemos que $\partial M \subset M$ es cerrada y por lo tanto compacta, de manera que podemos elegir subcubierta finita $\{V_k\}_{k \leq n_0}$ de la cubierta $\{V_x\}_{x \in X}$.

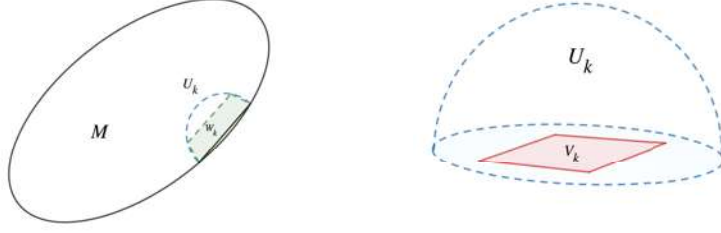


Figura 3.1: Vecindades U_k , V_k y W_k

Denotemos x_k al punto asociado a V_k y $U_k \subset M$ a la carta que contiene a $\bar{V}_k$. Para todo k , definimos la función $\varphi_k: \partial M \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$\varphi_k(y) = \frac{\varphi_{x_k}(y)}{\sum_{i=1}^{n_0} \varphi_{x_i}(y)}$$

Como todo $y \in \partial M$ pertenece a algún V_j , se sigue que $\varphi_{x_j}(y) > 0$ y por lo tanto las φ_k están bien definidas. Además φ_k es continua ya que las funciones φ_{x_i} son continuas.

Para cada $0 \leq k \leq n_0$ definimos $\psi_k: \partial M \rightarrow [0, 1]$ tal que $\psi_k(y) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(y)$. Claramente ψ_k es continua para toda k , además, para todo $y \in \partial M$, $\psi_0(y) = 0$, $\psi_1(y) = \varphi_1(y)$, $\psi_{n_0}(y) = 1$ y si $j < k$, entonces $\psi_j(y) \leq \psi_k(y)$. Consideremos los subespacios de M' dados por

$$M_k = M \cup \{(y, t) \in \partial M \times I : t \leq \psi_k(y)\}.$$

Nótese que $M_0 = M$ y $M_{n_0} = M'$. Como los U_k son homeomorfos a $\mathbb{H}^n$ se sigue que tienen vecindades $W_k \subset U_k$ homeomorfas a $\partial U_k \times [-1, 0]$ (U_k tiene vecindad collar $\partial U_k \times [0, 1)$, pero se puede tomar el intervalo $[0, \frac{1}{2}] \subset [0, 1)$ y aplicarle una función que lo mande a $[-1, 0]$), de manera que los puntos $m \in W_k$ se pueden pensar de la forma (y, t) con $y \in \partial U_k$ y $t \in [-1, 0]$. Usando el collar $\partial M \times [0, 1]$ deducimos que podemos encajar $\partial U_k \times [-1, 1]$ en M' .

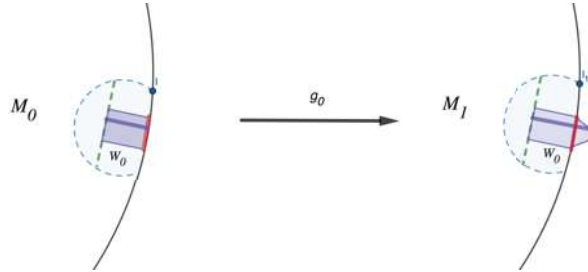


Figura 3.2: Lo morada indica la parte de la W_k que se “estira” bajo g_0

Definimos $g_0: M \rightarrow M_1$ que es la identidad en $M \setminus W_1$ y si $(y, t) \in W_1$, entonces $g_0(y, t) = (y, t + (t+1)\psi_1(y))$. La función g_0 “estira” de forma continua

los intervalos $\{y\} \times [-1, 0]$ contenidos en la vecindad collar $W_1 \subset U_1$ hasta $\{y\} \times [-1, \psi_1(y)]$ (ver Figura 3.1). En general definimos $g_n: M_n \rightarrow M_{n+1}$ como la identidad en $M_n \setminus W_n$ y para W_n de la siguiente manera

$$g_n(y, t) = \begin{cases} (y, t + (t + 1)\psi_n(y)) & \text{si } (y, t) \in W_k \setminus \bigcup_{k=1}^{k=n-1} W_k \\ \left(y, (t + 1)\frac{1+\psi_{n+1}(y)}{1+\psi_n(y)} - 1\right) & \text{si } (y, t) \in \bigcup_{k=1}^{k=n-1} W_k. \end{cases}$$

La función g_n “estira” de forma continua los intervalos $\{y\} \times [-1, \psi_n(y)]$ contenidos en la vecindad collar $W_n \subset U_n$ hasta $\{y\} \times [-1, \psi_{n+1}(y)]$.

El homeomorfismo buscado está dado por $g = g_{n_0} \circ \dots \circ g_1 \circ g_0: M \rightarrow M'$. $\square$

3.2. Compactificación por un punto del interior de una variedad

Recordemos que si X es espacio topológico, entonces el espacio $X^* = X \cup \infty$ denota la compactificación por un punto de X (ver Sección 1.1.2).

En la Sección 1.2-III del Capítulo 1 demostramos que el cociente $\mathbb{D}^n / \partial \mathbb{D}^n$ es homeomorfo a la esfera $\mathbb{S}^n$ y a la compactificación por un punto del interior de $\mathbb{D}^n$. En esta sección veremos que el resultado análogo también es válido para cualquier variedad compacta y con frontera no vacía. A continuación mencionamos un ejemplo que muestra que si la variedad no es compacta, entonces el resultado no es válido:

Ejemplos 3.2.1. Cociente de una variedad por su frontera.

Si $M = H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, entonces de 1.2-IV-(vii) sabemos que $(H^2)^\circ$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ y que ∂H^2 es homeomorfa a $\mathbb{R}$. De 1.2-III-(v) sabemos que la compactificación por un punto de $(H^2)^\circ$ es homeomorfa a $\mathbb{S}^2$. Por otro lado el cociente $H^2 / (\partial H^2)$ es homeomorfo al espacio $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \cup \{(0, 0)\}$ que es el primer cuadrante (abierto) en $\mathbb{R}^2$ unión el origen $(0, 0)$. La función $h: H^2 \rightarrow X$ dada por

$$h(x, y) = (y, e^x y)$$

es suprayectiva y para todo $x \in \mathbb{R}$, $h(x, 0) = (0, 0)$. Por la Propiedad universal de los cocientes h define un homeomorfismo $\bar{h}: H^2 / (\partial H^2) \rightarrow X$. Un resultado análogo es válido para $M = H^n$.

Teorema 3.2.1. Si M es una variedad compacta con frontera y $\partial M \neq \emptyset$, entonces $M / \partial M$ es homeomorfo a la compactificación por un punto de M° .

Demostración. Primero demostraremos que $M / \partial M$ es un espacio Hausdorff. Supongamos que $x, y \in M / \partial M$. Existen los siguientes dos casos:

- (i) Si $x, y \in M^\circ$, entonces se pueden separar con abiertos de M° , los cuales también son abiertos en $M/\partial M$.
- (ii) Si $x = [\partial M] \in M/\partial M$ y $y \in M^\circ$. Del Teorema 3.1.1 sabemos que podemos encontrar un abierto $U \subset M$ tal que $\partial M \subset U$ y existe homeomorfismo $h: U \rightarrow \partial M \times [0, 1)$ (U es vecindad collar abierta). Como $y \notin \partial M$, entonces existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que y no pertenece al cerrado $\bar{U}_0 = h^{-1}(\partial M \times [0, t_0])$. De manera que los abiertos $M \setminus \bar{U}_0$ y $U_0 = h^{-1}(\partial M \times [0, t_0))$ separan en M a y y a ∂M . Concluimos que los abiertos $p(U_0)$ y $p(M \setminus \bar{U}_0)$ donde $p: M \rightarrow M/\partial M$ es la función cociente, separan a x y a y .

Considere la función $f: M \rightarrow (M^\circ)^*$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in M^\circ \\ \infty & \text{si } x \in \partial M \end{cases}$$

Claramente f es suprayectiva. Como $f|_{M^\circ} = id_{M^\circ}$, entonces para todo abierto $U \subset M^\circ$ se tiene que $f^{-1}(U)$ es abierto. Ahora, si $V \subset (M^\circ)^*$ es vecindad abierta de ∞ , entonces $(M^\circ)^* \setminus V$ es un compacto contenido en M° (ver Definición 1.1.2), por lo tanto también es cerrado ya que M° es un espacio Hausdorff y se sabe que un compacto en un Hausdorff es cerrado. Se sigue que:

$$f^{-1}[(M^\circ)^* \setminus V] = f^{-1}[M^\circ] \setminus f^{-1}[V] = M \setminus f^{-1}[V]$$

es cerrado. Concluimos que $f^{-1}(V)$ es abierto y f es continua.

De la propiedad universal de los espacios cociente se sigue que existe $\tilde{f}: M/\partial M \rightarrow (M^\circ)^*$ tal que $f = \tilde{f} \circ p$. Como f es suprayectiva, $\tilde{f}$ es suprayectiva. Además, $\tilde{f}$ es inyectiva ya que el único punto cuya imagen es ∞ es el correspondiente a la clase $[\partial M]$. De manera que $\tilde{f}$ es biyectiva. Concluimos que $\tilde{f}: M/\partial M \rightarrow (M^\circ)^*$ es una biyección continua de un Hausdorff en un compacto y por lo tanto es homeomorfismo. $\square$

3.3. Una caracterización de $\mathbb{R}^n$ como variedad contraíble

Como se mencionó en la introducción, el matemático J. H. C. Whitehead en 1934 [8] creyó haber demostrado la Conjetura de Poincaré que él mismo refutó el año siguiente. El error de Whitehead consistió en dar por hecho que toda variedad abierta (no compacta y sin frontera) contraíble es $\mathbb{R}^n$. El mismo Whitehead construyó un contraejemplo que inició una nueva rama de estudio de la topología de variedades. Esto muestra la necesidad de tener caracterizaciones de $\mathbb{R}^n$ que sean útiles para identificarlo.

En esta sección se definen las contracciones por homeomorfismos, las cuales aseguran que una variedad abierta es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. El resultado que demuestra que toda variedad contraíble por homeomorfismos es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ es original de este trabajo de tesis y proporciona una caracterización de $\mathbb{R}^n$.

En la prueba de dicho resultado utilizaremos la siguiente caracterización de $\mathbb{R}^n$ demostrada por M. Brown en el año 1961 [7].

Teorema 3.3.1. *Si un espacio topológico X es unión creciente de abiertos homeomorfos a $\mathbb{R}^n$, entonces $X \cong \mathbb{R}^n$.*

Definición 3.3.1. *Un espacio X es **contraíble por homeomorfismos** si existe contracción $H: X \times I \rightarrow X$ tal que para toda $t \in [0, 1)$, la función $H_t: X \rightarrow X$ tal que $H_t(x) = H(x, t)$ es homeomorfismo.*

Observaciones 3.3.1. Propiedades de las contracciones por homeomorfismos.

- (a) Si X se contrae por homeomorfismos sobre x_0 , entonces X no necesariamente se contrae por homeomorfismos sobre todo punto. Un ejemplo se muestra en la Figura 3.3-a).
- (b) En la Figura 3.3-b) se muestra un espacio que es contraíble pero que no es contraíble por homeomorfismos.

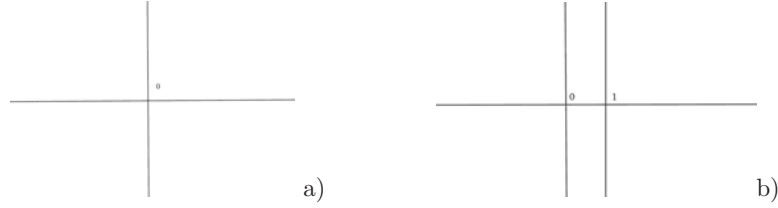


Figura 3.3: El espacio X en a) está compuesto de dos rectas intersectadas. El espacio X en b) consiste en tres rectas.

Teorema 3.3.2. *Si M^n es variedad no compacta y sin frontera, entonces M es contraíble por homeomorfismos si y sólo si M es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. $\Leftarrow$] La función $H: \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $H(p, t) = (1-t)p$, define una contracción por homeomorfismos en $\mathbb{R}^n$. Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow M$ es un homeomorfismo, entonces la función $F: M \times I \rightarrow M$ tal que $F(x, t) = f((1-t)f^{-1}(x))$ es una contracción tal que para todo tiempo $t \in I$ se tiene que $F_t = f \circ H_t \circ f^{-1}$ es un homeomorfismo.

$\Rightarrow$] Supongamos que $H: M \times I \rightarrow M$ es una contracción por homeomorfismos a $x_0 \in M$ y $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una carta alrededor de x_0 . Para todo $t \in [0, 1]$, definimos $U_t := H_t^{-1}(U) \subset M$. Es claro que U_t es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ para toda $t \in [0, 1)$ y que $U_1 = M$.

Como $H_1: M \rightarrow M$ es la función constante en x_0 , entonces por la continuidad de H existe un tiempo $t_1 \in [\frac{1}{2}, 1)$ tal que $U \subset U_t$ para todo $t \geq t_1$ (ver Figura 3.4). Definimos $\mathcal{U}_0 = U$, $\mathcal{U}_1 = U_{t_1}$, de manera recursiva definimos $\mathcal{U}_n = U_{t_n}$ con $t_n \in [\frac{t_{n-1}+1}{2}, 1)$ tal que $\mathcal{U}_{n-1} \subset U_t$ para todo $t \geq t_n$ (análogamente, t_n existe por la continuidad de H).

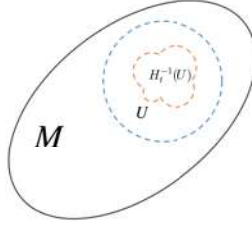


Figura 3.4

De esta manera construimos una sucesión creciente de abiertos $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \subset \dots$ contenidos en M y tales que cada uno de ellos es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Además, la unión $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ es M ya que $U_1 = M$ y la sucesión $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge al 1. Terminamos el resultado utilizando la caracterización de $\mathbb{R}^n$ dada por el Teorema 3.3.1. $\square$

Una limitante del Teorema 3.3.2 es que no se puede extender a variedades contraíbles con frontera, ya que en dichas variedades la frontera tiene que ir acercándose al punto de contracción y por lo tanto no se pueden contraer por homeomorfismos a un punto.

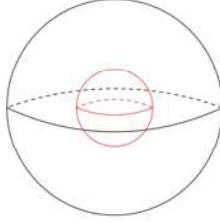


Figura 3.5: $\mathbb{D}^3$ y su imagen bajo algún tiempo $t \in I$ con una contracción por rayos

Por ello se intentó dar una condición menos exigente a la contracción pidiendo que los H_t sean encajes en vez de homeomorfismos. Sin embargo, no hemos podido demostrarlo hasta el momento por lo que actualmente es sólo una conjetura.

Bibliografía

- [1] HATCHER, ALLEN , *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [2] MUNKRES, JAMES RAYMOND, *Topology*, segunda edición, Prentice Hall Inc., U.S.A, 2000.
- [3] SALICRUP, GRACIELA, *Introducción a la Topología*, Primera edición, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática, México, 1997.
- [4] BAHADUR SINGH, TEJ, *Elements of Topology*, CRC Pres, Taylor and Francis Group, 2013.
- [5] RUDIN, WALTER, *Principles of Mathematical Analysis*, Third edition McGraw-Hill, 1976.
- [6] BROWN, MORTON, *Locally Flat Imbeddings of Topological Manifolds*, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 75, No. 2 (Mar., 1962), pág. 331-341.
- [7] BROWN, MORTON, *The Monotone Union of Open n -Cells is an Open n -Cell*, American Mathematical Society 1961.
- [8] VOLKERT, KLAUS, *Poncaré's Conjecture*, Bulletin of Manifold Atlas 2014.
- [9] WHITEHEAD, J.H.C., *A certain open manifold whose group is unity*, Quarterly journal of mathematics (1935), pág. 268-279.
- [10] LUFT, ERHARD, *On Contractible Open Topological Manifolds*, Inventiones math. 4 (1967), pág. 192-201.