



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

**LA PROPIEDAD DE TURNPIKE EN PROBLEMAS
DE CONTROL ÓPTIMO LINEAL CUADRÁTICO**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
**LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS**

PRESENTA
DIEGO AZAEL SALAZAR GONZÁLEZ

ASESOR
DR. ABDON EDDY CHOQUE RIVERO

Mayo de 2019



Esta tesis esta dedicada a mi madre. Que demuestra que no hay manera de ser una madre perfecta, pero encontró una de ser una madre grandiosa.

Para mi madre, Zaira.

Abstract

We consider an optimal control problem that minimizes a quadratic functional subject to a linear control system described by differential equations. The studied functional exhibits the turnpike property. We study specific examples that help us study and analyze the turnpike property. Numerical methods of solution to these types of problems are also considered. Numerical methods consistent with shooting are specially selected to exploit the turnpike property to facilitate a numerical approximation.

Keywords: Pontryagin Maximum Principal, Long time control optimization, Gradient descent, Turnpike property, Static optimal control problem.

Resumen

Consideramos un problema de control óptimo que minimiza un funcional cuadrático sujeto a un sistema de control lineal descrito por ecuaciones diferenciales ordinarias. El funcional estudiado se caracteriza por contener la propiedad de turnpike. Analizamos ejemplos específicos que permiten asimilar la propiedad de turnpike. Se considera también métodos numéricos como shooting ajustados a explotar las ventajas de la propiedad de turnpike para facilitar la obtención de aproximaciones numéricas.

Palabras clave: Principio Máximo de Pontryagin, Optimización en largo intervalo de tiempo, Método de gradiente, Propiedad Turnpike.

Índice general

Abstract	II
Resumen	III
Lista de figuras	V
Introducción	1
0.1. Problema principal	1
0.2. Metodología	2
0.3. Objetivo de la tesis	3
0.4. Organización de la tesis	3
1. Preliminares	4
2. Propiedad de Turnpike	12
2.1. Preliminares	12
2.2. Propiedad de Turnpike	13
2.2.1. Turnpike en el cálculo de variaciones	14
2.3. Teorema principal	15
2.3.1. Planteamiento general del caso lineal cuadrático	17

2.3.2. Demostración del teorema 2.2 para el caso lineal cuadrático	18
3. Ejemplos	28
3.0.1. Caso lineal cuadrático	28
3.1. Ejemplo 1	31
3.1.1. Variación del Turnpike respecto del Tiempo	37
3.1.2. Ecuación de Riccati	39
3.1.3. Resultado mediante un método numérico	39
3.2. Sistema controlable canónico con costo cuadrático	41
3.2.1. Ejemplo 2	41
3.2.2. Variación del Turnpike Respecto del Tiempo	46
3.2.3. Ecuación de Riccati del ejemplo 2	48
3.2.4. Resultado con un método numérico	49
4. Métodos Numéricos	52
4.1. Método de shooting	52
4.1.1. Gradiente descendiente	53
4.2. Modificación del método de shooting	54
4.3. Pseudocódigo	56
5. Apendice de Resultados	58
5.1. Ejemplo 1	58
5.2. Ejemplo 2	65

Índice de figuras

1.1. Movimiento de partícula en el plano $y(t), \dot{y}(t)$	8
1.2. partícula moviéndose de forma rectilínea	8
2.1. Comportamiento de turnpike	14
2.2. Punto Silla	26
3.1. Soluciones analítica del caso lineal cuadrático en el intervalo $t \in [0, 20]$	35
3.2. Grafica paramétrica de $(x_1(t), x_2(t))$ con $t \in [5, 15]$	36
3.3. Tabla de los valores extremales del Turnpike con T variado	37
3.4. Soluciones del caso lineal cuadrático	38
3.5. Soluciones del caso lineal cuadrático	40
3.6. Error de las soluciones numéricas	41
3.7. Soluciones analítica del sistema (3.35) en el intervalo $t \in [0, 18]$	45
3.8. Grafica paramétrica de $(x_1(t), x_2(t))$ con $t \in [4, 14]$	46
3.9. Tabla de los valores extremales del Turnpike con T variado	47
3.10. Soluciones del caso lineal cuadrático	48
3.11. Soluciones numéricas del sistema (3.35)	50
3.12. Error de las soluciones numéricas	51

4.1. Visualización de optimización por método de gradiente	53
--	----

Introducción

La teoría de control óptimo (TCO) estudia la minimización ó maximización de un funcional sujeto a una ecuación diferencial. La TCO se utiliza en el análisis de sistemas controlables dinámicos. En este trabajo tales sistemas están definidos mediante sistemas de ecuaciones diferenciales. El problema de control óptimo consiste en llevar una posición, o estado, a otro estado final, estableciendo o no algunas restricciones en estos estados, y al mismo tiempo minimizando o maximizando algún funcional. El principio máximo de Pontryagin establecido al final de los años cincuenta por L.S. Pontryagin dio raíz a un desarrollo de la teoría de control óptimo y al manejo de problemas del mismo. Pontryagin propuso un método diferente de aquellos usados en la teoría de cálculo de variaciones, que hasta ese punto había tratado problemas similares. La principal diferencia consiste en que la derivada de la variable independiente del funcional está definida en un compacto, mientras que el cálculo de variaciones la variable independiente vive en un conjunto abierto.

A lo largo de este trabajo se estudian únicamente problemas del tipo lineal cuadrático, es decir, el sistema controlable es lineal y el criterio a minimizar es un funcional de forma cuadrática. Este tipo de sistemas por lo general son usados para el diseño de helicópteros del tipo Boeing Vertol [16]. Se propone que los sistemas estudiados presenten una función de control sin restricción alguna, y que sean dirigidos de un estado inicial fijo dado a un estado inicial libre en un intervalo de tiempo grande y finito. Se demuestra que bajo cierto criterio dichos sistemas se mantienen exponencialmente cerca de un estado fijo, por la mayor parte del tiempo, permitiendo saber con cálculos relativamente simples y casi inmediatos el comportamiento de las soluciones óptimas. Esto también facilita la obtención de ciertos métodos numéricos simples que resuelven el sistema y posiblemente abre el camino a la simplificación de las soluciones a estos problemas con un sistema no lineal [17].

0.1. Problema principal

Hallar el control óptimo $\bar{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ sin restricción, $u \in L^\infty(0, T)$ (ver Definición 1.10) y función óptima $\bar{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ del sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \tag{1}$$

Sean A, B matrices constantes de dimensiones $n \times n$, $m \times n$ respectivamente. $x \in \mathbb{R}^n$ $u \in \mathbb{R}^m$ tal que minimize el funcional de costo cuadrático¹:

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^T \left((x - x^d)^* Q (x - x^d) + (u - u^d)^* U (u - u^d) \right) dt, \quad (2)$$

donde Q es una matriz Q positiva semi-definida de $n \times n$, U positiva definida de dimensión $m \times m$.

El principio máximo de Pontryagin utiliza el hamiltoneano H definido de la siguiente forma:

$$H(x, \psi, \psi_0, u) = -f_0 + \psi^* x \quad (3)$$

donde ψ es la función vectorial llamado estado adjunto $\psi(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$. En (2.17)-(2.19) se demuestra que el control óptimo tiene la forma:

$$\bar{u}(t) = -U^{-1} B^* \bar{\psi}(t). \quad (4)$$

Aquí $\bar{\psi}$ es el estado adjunto óptimo. En este trabajo se demuestra que las soluciones óptimas $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi})$ de (1) se mantienen exponencialmente cerca de las soluciones al problema de control óptimo estático $((\bar{x}(t), \bar{\psi}(t), \bar{\psi}_0(t), \bar{u}(t)))$ en el intervalo de tiempo $[\xi, T - \xi] \subset [0, T]$ para algún $\xi \in \mathbb{R}$. El punto $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{u})$ se convierte en el turnpike de la solución óptima $((\bar{x}(t), \bar{\psi}(t), \bar{\psi}_0(t), \bar{u}(t)))$ separando dicha solución en tres diferentes intervalos:

- La primera parte de la solución es una pieza corta definida en $[0, \xi]$ para algún $\xi \in \mathbb{R}_0$ en lo cual la solución óptima se traslada del estado inicial a $(\hat{x}, \hat{\lambda}, -1, \hat{u})$.
- La segunda parte es casi estacionaria, al igual que el extremal $(\hat{x}, \hat{\lambda}, -1, \hat{u})$ sobre el intervalo $[\xi, T - \xi]$.
- La tercera y última parte de la solución definida en el intervalo $[T - \xi, T]$ en donde se la solución se aleja del turnpike al punto $((\bar{x}(T), \bar{\psi}(T), -1, \bar{u}(T)))$.

Soluciones que muestran estas propiedad se dice que muestran la propiedad de Turnpike.

0.2. Metodología

La estrategia usada para verificar y analizar el comportamiento de las soluciones óptimas $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi})$ del problema (1) es dar una idea y una explicación de la demostración del teorema principal para el caso lineal cuadrático. Desarrollar ejemplos de sistemas que muestran la propiedad de turnpike, es decir, la oscilación alrededor de el estado estático (ver 2.1). Obtenemos soluciones analíticas y explícitas mediante el principio máximo de Pontryagin. Se comprueba y compara

¹(*) es el operador que indica el transpuesto de una matriz

las propiedades presentados por dichas soluciones con las condiciones establecidas por el teorema principal. Ver Teorema 2.2.

Se mencionan las ventajas que presentan dichos sistemas para la obtención de soluciones aproximadas calculadas mediante métodos numéricos. De esta manera se obtienen las soluciones óptimas aproximadas. En este trabajo utilizamos los resultados de [17], donde se estudia la propiedad de turnpike en sistemas no lineales con control acotado.

0.3. Objetivo de la tesis

El objetivo de esta tesis es revisar y explicar mediante ejemplos la propiedad de turnipe. Se muestran soluciones de ciertos problemas de control lineal cuadrático. Además, de promover el estudio de este tipo de fenómenos en casos donde el sistema (1) es no lineal.

0.4. Organización de la tesis

El presente trabajo se divide en cuatro capítulos y un apéndice. El primer capítulo contiene definiciones cruciales para el entendimiento de las conclusiones y afirmaciones realizadas en capítulos posteriores. El segundo capítulo expone el teorema principal y la idea de la demostración. Además, se describe el problema de control óptimo cuadrático. El tercer capítulo muestra dos problemas de optimización del caso lineal cuadrático donde se muestra la soluciones analíticas óptimas de los sistemas y se comparan con las soluciones obtenidas con el método numéricos empleado en este trabajo, mostrando en el apéndice las soluciones analíticas completas de ambos problemas. Finalmente el capítulo 4 hace una breve explicación y exposición de el método numérico implementado.

Capítulo 1

Preliminares

Establecemos algunas definiciones cruciales para el mejor entendimiento de este trabajo, las siguientes afirmaciones se encuentran demostradas en [14, páginas 51 - 53].

Definición 1.1. Una matriz cuadrada $Q = (q_{ij})$ para $i, j = \{1, \dots, p\}$ es llamada *Hermitiana* si es igual a la transpuesta de su conjugada compleja, es decir $q_{ij} = \bar{q}_{ji}$, $1 \leq i, j \leq p$. Se denota como $Q = Q^*$.

Sea $Q_{n \times n} \in \mathbb{R}$, matriz simétrica:

La matriz Q es **positiva definida**, denotada como $Q > 0$ si:

- $\lambda_i > 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$, para todo $\lambda_i \in \text{Spec}(Q)$.
- El producto $v^*Qv > 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$.

La matriz Q es **positiva semidefinida**, denotada como $Q \geq 0$ si:

- $\lambda_i \geq 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$, para todo $\lambda_i \in \text{Spec}(Q)$, y existe por lo menos un eigenvalor $\lambda_{i_1} = 0$ para algún $i_1 \in \{1, \dots, n\}$.
- El producto $v^*Qv \geq 0$, y existe un $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ para el cual $v^*Qv = 0$.

La matriz Q es **negativa definida**, denotada como $Q < 0$ si:

- $\lambda_i < 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$, para todo $\lambda_i \in \text{Spec}(Q)$.
- El producto $v^*Qv < 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$ con $v \neq 0$.

- $Q = -M$ donde $M > 0$.

La matriz Q es **negativa semidefinida** denotada como $Q \leq 0$ si:

- $\lambda_i \leq 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$, para todo $\lambda_i \in \text{Spec}(Q)$, y existe por lo menos un eigenvalor $\lambda_{i_1} = 0$ para algún $i_1 \in \{1, \dots, n\}$.
- El producto $v^*Qv \leq 0$, y existe un $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ para el cual $v^*Qv = 0$.

Definición 1.2. Una matriz H con coeficientes reales es una matriz **Hurwitz** o estable si todos sus eigenvalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tienen partes reales negativos.

Definición 1.3. Sea G una matriz $m + p \times n + q$ particionada de la forma

$$G = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

con, C de dimensiones $m \times n$ y F de dimensiones $p \times q$. El **complemento Schur** de C en G es definido como

$$(G/C) := F - EC^{-1}D. \quad (1.2)$$

Tomando en cuenta las matrices definición 1.1 se genera el siguiente lema cuya demostración se encuentra en [25, Pg. 4].

Lema 1.1. Si las matrices C y F son cuadradas y además se cumple que $CC^{-1}D = D$ y $EC^{-1}C = E$, entonces se cumple la igualdad

$$\det(G) = \det(C) \det(G/C).$$

Definición 1.4. Sea (X, d) un espacio métrico, con A y B subconjuntos no vacíos de X . Definimos $d(A, B) = \inf\{d(a, b) | a \in A, b \in B\}$. Para $\varphi > 0$, definimos $A_\varphi = \{x \in X | d(\{x\}, A) < \varphi\}$ y $B_\varphi = \{x \in X | d(\{x\}, B) < \varphi\}$. Definimos entonces $d_H(A, B) = \inf\{\varphi > 0 | A \subset B_\varphi, B \subset A_\varphi\}$. $d_H(A, B)$ es la distancia Hausdorff entre A y B .

Definición 1.5. Sea S un conjunto con elementos bien definidos. Si F denota un mapeo de S en $\mathbb{R}$ tal que a cada elemento de $f \in S$ le corresponde exactamente un numero real, entonces f es llamado un funcional en S .

Definición 1.6. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y sean $e_1, e_2, \dots, e_n$ los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. f se llama parcialmente diferenciable en $x \in D$ con respecto a la coordenada i si existe el limite

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \partial_i f(x) := \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}$$

Definición 1.7. El gradiente de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en $x \in D$ está definido por el vector

$$\text{grad } f(x) = \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Definición 1.8. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y sea $\nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable. La derivada de ∇f en el punto x_0 es una matriz $n \times n$ denotada como

$$\text{Hess } f \Big|_{x_0} = (\text{Hess}(x_0))_{ij} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Definición 1.9. Sea $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ una función matricial continua en I . La matriz fundamental de $A(t)$ es la matriz $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ y tiene la forma de

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \end{pmatrix}$$

tal que por cada $j = 1, 2, \dots, n$, $\varphi_j(t)$ es la solución del problema de valor inicial (ver definición 1.14):

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(0) = e_j.$$

Definición 1.10. El espacio $L^\infty(D) \subset S$ consiste en todas las funciones $f(x)$ medibles en S tal existe un número real positivo $0 < M < \infty$ tal que

$$|f(x)| \leq M.$$

en $D \subset S$.

La definición de una función medible se puede encontrar en [22, Pg. 284] y [23, Pg. 77].

Definición 1.11. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ y sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Escribimos $f(x) = O(g(x))$ para $x \rightarrow c$, si existe una $M > 0$ tal que $\lim_{x \rightarrow c} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < M$.

Definición 1.12. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ y sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Escribimos $f(x) = o(g(x))$ si para todo $c > 0$ existe algún $k > 0$ tal que $|f(x)| < c|g(x)|$ para todo $x \geq k$.

Definición 1.13. Consideramos un dominio (abierto y conexo) $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial sobre D . Definimos como la **ecuación diferencial (EDO)** asociada a f como:

$$\dot{x} = f(x(t), t), \tag{1.3}$$

donde $t \in \mathbb{R}$ es un parámetro y el punto indica diferenciación respecto a t . La función, o campo, f siempre es conocida y la función x es desconocida.

En este documento se trabajará principalmente con EDOs del tipo

$$\dot{x} = F(x(t), u) \quad (1.4)$$

la variable independiente t está contenida en los reales, mientras que la variable dependiente $x \in \mathbb{R}^n$. La variable u , conocida como variable o función de control, está contenida en $\mathbb{R}^m$.

Definición 1.14. Se llama problema **problema de valor inicial** al siguiente problema. Sea $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$, y sea $(x_0, t_0) \in D$. Encontrar una trayectoria de (1.3) tal que satisfaga $x(t_0) = x_0$.

Existen varios métodos numéricos para obtener aproximaciones numéricas de las soluciones de este tipo de problemas tales como el de Runge-Kutta. Sin embargo, para este trabajo nos enfocaremos más en problemas frontera.

Definición 1.15. Sean (x_0, t_0) y (x_T, t_T) elementos de D . El **problema de frontera** consiste en encontrar una trayectoria de (1.3) que pase por (x_0, t_0) y (x_T, t_T) . Es decir se busca la solución correspondiente que satisfaga $X(t_0) = x_0$ y $X(t_T) = x_T$.

Este tipo de problemas se considerará en el capítulo 4.

Varios modelos matemáticos son descritos mediante sistemas de EDOs; el modelo SIR (llamado así porque toma en cuenta la población Suseptible, Infectada, y Recuperada) que consiste en modelar de manera simplificada la transmisión de una enfermedad infecciosa tal como la influenza o gripe común ([15]), el sistema Lota-Volterra es un ejemplo de un modelo que puede representar con precisión la dinámica de un sistema ecológico con una interacción presa-depredador.

Varios procesos en la vida real, son controlables, es decir su realización tiene como factor las diferentes manipulaciones realizadas por el hombre. Con esto surge una inquietud, sobre la existencia de un proceso mejor bajo ciertos criterios, o mejor dicho, el proceso de control óptimo. Al hablar de optimidad se requiere especificar el sentido, ya que puede que el proceso sea óptimo en tiempo pero no en gasto de energía. Este tipo de problemas, matemáticamente recaen y originan en cálculo de variaciones. En este trabajo se utilizará como base matemática el principio máximo de Pontryagin.

Un proceso de control descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales se define como:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1.5)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ y es de clase C^2 en $D \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, x vector de estado en $\mathbb{R}^n$, es decir, $f \in C^2(D)$, $D \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^m$ es el control que es función continua a trozos definida en intervalo $[0, T]$

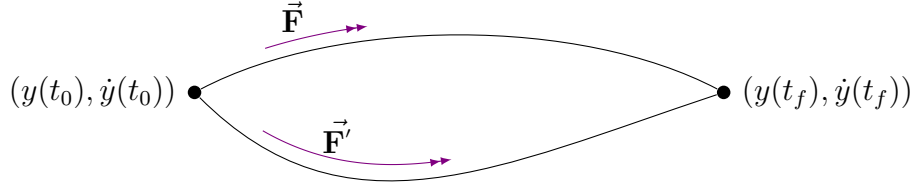


Figura 1.1: Movimiento de partícula en el plano $y(t), \dot{y}(t)$

Ejemplo 1.1. Sea una partícula moviéndose de forma rectilínea, siendo $y(t)$ su función de posición, influenciada por una fuerza F sin fricción.

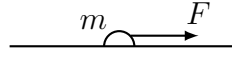


Figura 1.2: partícula moviéndose de forma rectilínea

Usando la segunda ley de Newton ($F = ma$) y sustituyendo $m = 1$ y $a = \ddot{y}$ obtenemos $\ddot{y} = F(t, y, \dot{y})$. Si designamos el uso de la aceleración como la función de control se obtiene $F = u(t)$ entonces tenemos que $\ddot{y} = u$ se transforma en

$$y = x_1, \quad \dot{y} = x_2, \quad (1.6)$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad (1.7)$$

o de forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t). \quad (1.8)$$

Se requiere hallar una función $u = u(t)$ tal que la trayectoria de la ecuación $\ddot{y} = u$ y tal que dados una posición y velocidad inicial y_0 y $\dot{y}_0$ la partícula se detenga en un tiempo T , finito.

Definición 1.16. El sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ se llama completamente controlable en el intervalo $[t_0, T]$ si para cualquiera dos puntos $x_0, x_T \in D \subset \mathbb{R}^m$ existe un control $u : [t_0, T] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^m$ que traslada x_0 a x_T en tiempo T .

Para verificar si un sistema lineal de control es completamente controlable utilizamos el **criterio de Kalman** cuya demostración se encuentra en [20, p. 17, Teorema 1.2]:

Teorema 1.2 (Criterio de Kalman, 1964). Para el sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^{n \times r}$ se establecen las siguientes equivalencias:

- El sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ es completamente controlable.

- $\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n.$
- La matriz $N(T) = \int_0^T e^{-At} B B^* e^{-A^*t} dt$ es positiva definida

Además, la función

$$u_K(t) = B^* e^{-A^*t} N^{-1}(T) \left(e^{At} (x_0 - x_1) \right) \quad (1.9)$$

es uno de los controles $u(t)$ que traslada x_0 a x_1 en tiempo T .

Buscaremos una función de control que es la óptima en algún sentido. A este tipo de problema se le denomina **problema de control óptimo**. Consideremos el sistema de control

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad (1.10)$$

$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $C^2(D)$. Sea $R = (R^1, \dots, R^k) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ un mapeo de clase C^2 , $f_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ sea una función $C^2(D)$, u es una función $\in L^\infty(0, T) \in \mathbb{R}^m$. Se busca minimizar un funcional de costo¹:

$$J(x, u) = \phi(\cdot) + \int_0^T f_0(x(t), u(t)) dt \quad (1.11)$$

y que satisfaga las condiciones de frontera

$$R(x(t_0), x(T)) = 0. \quad (1.12)$$

La función f_0 se le conoce como costo de funcionamiento mientras que ϕ es el costo final, y para los ejemplos vistos en este trabajo se tomará $\phi = 0$.

Para resolver el problema de control planteado, utilizaremos el Principio Máximo de Pontryagin. mencionadas más adelante.

Definición 1.17. Sea (1.5) completamente controlable. Sean x_0 y x_T dos estados en $\mathbb{R}^n$. El control $u(t) \in \mathbb{R}^m$ que traslada x_0 a x_T y tal que el funcional (1.11) este bien definido se llama control admisible.

Teorema 1.3 (Principio Máximo de Pontryagin). [2, Teorema 1, Pg. 19] Sea $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, un control admisible que traslada cualquiera dos estados entre si en particular el estado inicial x_0 al x_T , sea $x(t)$ la trayectoria correspondiente, tal que $x(t_0) = x_0$, $x(T) = x_T$. Para que las funciones $\bar{x}(t)$ y $\bar{u}(t)$ sean óptimos es necesario la existencia de una función vectorial $\psi(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ llamado vector adjunto, y un número real $\psi_0 \leq 0$ con $(\psi(t), \psi_0) \neq 0$. Definimos un hamiltoneano H

$$H(x, \psi, \psi_0, u) = \psi_0 \cdot f_0 + \psi^* x \quad (1.13)$$

¹En este trabajo se trata principalmente con control cuadrático, ver sección 2.3.1.

y donde el sistema (ψ, ψ_0) llamado también sistema adjunto y H . Las trayectorias óptimas $(\bar{x}(t), \bar{\psi}(t), \bar{\psi}_0(t), \bar{u}(t))$ se le conoce como la **elevación extremal** de la trayectoria. Se deben cumplir las siguientes igualdades

1.

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(\bar{x}(t), \psi(t), \psi_0(t), \bar{u}(t)) \quad i = 1, \dots, n \quad (1.14)$$

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial \psi_i}(\bar{x}(t), \psi(t), \psi_0(t), \bar{u}(t)) \quad i = 1, \dots, n \quad (1.15)$$

2. H alcanza su mínimo respecto a u en $u = \bar{u}$, $0 \leq t \leq T$. Para el caso donde u no está sujeta a alguna restricción tenemos la siguiente igualdad.

$$\frac{\partial H}{\partial u}(\bar{x}(t), \bar{\psi}(t), \bar{\psi}_0(t), \bar{u}(t)) = 0 \quad (1.16)$$

3. El valor del Hamiltoniano (1.13) es cero cuando se evalúa en la trayectoria óptima:

$$H(\bar{\psi}, \bar{x}, \bar{u}) = 0. \quad (1.17)$$

Condiciones de transversalidad: existen $(\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in \mathbb{R}^k$ tal que

$$\begin{pmatrix} -\bar{\psi}(0) \\ \bar{\psi}(T) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^k \gamma_i \nabla R^i(\bar{x}(0), \bar{x}(T)). \quad (1.18)$$

En la mayoría de los problemas tratados en este trabajo son del caso siguiente. El estado inicial esta fijo $x(t_0) = x_0$ mientras que el punto final es libre, en este caso $k = n$ y $R(x(t_0)) = (x(t_0) - x_0)$

Un ejemplo del uso de este teorema es el siguiente:

Ejemplo 1.2. Dado el sistema:

$$\dot{x} = 1 + u$$

y condiciones de frontera

$$R(x(0), x(1)) = (x(0) - 0, x(1) - 2).$$

Se requiere encontrar la trayectoria y control $(\bar{x}, \bar{u})$ que minimize al funcional:

$$J(u) = \int_0^1 \frac{1}{2} u^2 dt$$

²En general, se utilizará que $\bar{\psi}_0(t) = -1$ para todos los problemas presentados en este trabajo ya que es una suposición generalmente tomada al aplicar el Principio Máximo de Pontryagin.

Solución. Aplicamos el máximo de Pontryagin (Teorema 1.3). Sean $\psi_0 = -1$, $\psi \in \mathbb{R}$ y la función H :

$$H(\psi, u) = -\frac{1}{2}u^2 + \psi(1 + u)$$

las trayectorias óptimas deben cumplir

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}(\psi, u) = 0 & \implies & \psi = C_1 \\ \frac{\partial H}{\partial u}(\psi, u) &= -u + \psi = 0 & \implies & \psi = u = C_1 \end{aligned}$$

para algún $C_1 \in \mathbb{R}$, por lo que

$$\dot{x} = 1 + C_1 \implies x(t) = (1 + C_1)t + C_2 \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

Aplicando las condiciones de transversalidad $R = (0, 0)$, tenemos:

$$\bar{x}(t) = 2t, \quad \bar{u}(t) = 1.$$

◀

Aquí tomamos un breve paréntesis para explicar el método numérico utilizado en la obtención de soluciones de las ecuaciones diferenciales. Dado un problema de valor inicial (PVI)³

$$\dot{x} = f(x, t) \quad x_0 = x(t_0) \in D \subset \mathbb{R}. \quad (1.19)$$

El método numérico consiste en determinar constantes apropiadas de modo que una fórmula como:

$$y_{i+1} = y_i + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4 \quad (1.20)$$

coincida con un desarrollo de Taylor hasta el término quinto termino, es decir, de orden $O(h^4)$

Dichas ecuaciones se refieren al método numérico de **Runge-Kutta de 4º orden**, éstas son las siguientes:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (1.21)$$

donde:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_i, y_i), \\ k_2 &= hf(x_i + h, y_i + k_1), \\ k_3 &= hf(x_i + h, y_i + k_2), \\ k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3). \end{aligned}$$

³Para este ejemplo se realizara para $x \in \mathbb{R}$ y un proceso similar se realiza en el caso general es decir: $x \in \mathbb{R}^n$

Capítulo 2

Propiedad de Turnpike

2.1. Preliminares

Definición 2.1. Un **punto crítico** del sistema diferencial $\dot{x} = f(x)$ (también llamado punto estacionario o punto de equilibrio) es el punto $\underline{x}$, tal que $f(\underline{x}) = 0$.

Definición 2.2. Un punto crítico $\underline{x}$ del sistema diferencial $\dot{x} = f(x)$ se dice **no degenerado** si la matriz hessiana de $f := \text{Hess } f|_{\underline{x}}$ tiene determinante diferente de cero.

El **problema de control óptimo estático** se define de la siguiente manera:

Dado el sistema completamente controlable

$$\dot{x} = f(x(t), u(t))$$

se requiere hallar el par $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ que minimice a $f_0(x, u)$ sujeto a $f(x, u) = 0$, es decir

$$\min_{\substack{(x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ f(x,u)=0}} f_0(x, u). \quad (2.1)$$

Este es un problema usual de optimización en el espacio $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ sujeto a una restricción de igualdad. Asumimos que este problema de minimización tiene solución $(\hat{x}, \hat{u})$. Resaltamos que existe una solución única de este problema en el caso cuando f es lineal con respecto a x y u o cuando f_0 es de forma cuadrática positiva definida en (x, u) . Se utiliza el método de los **multiplicadores de Lagrange** para obtener estas soluciones $(\lambda, \hat{\lambda}^o) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus \{0, 0\}$, con $\hat{\lambda}^o \geq 0$. Definimos la función

$$L(x, \lambda, u) := \lambda^o f_0(x, u) - \lambda^* f(x, u). \quad (2.2)$$

¹Usualmente en la mayoría de la literatura el un punto crítico se escrito como $\bar{x}$. Sin embargo para facilitar el entendimiento de este trabajo se le denominara como $\underline{x}$.

Las soluciones del problema $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{u})$ deben cumplir las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} f(\hat{x}, \hat{u}) &= 0, \\ L_x(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{u}) &= \hat{\lambda}_0 \frac{\partial f_0}{\partial x}(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{u}) - \hat{\lambda}^* \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{u}) = 0, \\ L_u(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{u}) &= \hat{\lambda}_0 \frac{\partial f_0}{\partial u}(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{u}) - \hat{\lambda}^* \frac{\partial f}{\partial u}(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{u}) = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Usando la notación hamiltoneana de (1.13), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \psi}(\hat{x}(t), \hat{\lambda}(t), \hat{\lambda}_0(t), \hat{u}(t)) &= 0, \\ -\frac{\partial H}{\partial x}(\hat{x}(t), \hat{\lambda}(t), \hat{\lambda}_0(t), \hat{u}(t)) &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial u}(\hat{x}(t), \hat{\lambda}(t), \hat{\lambda}_0(t), \hat{u}(t)) &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

El caso cuando $\hat{\lambda}^o \geq 0$, se denomina caso normal de los multiplicadores de Lagrange, y consecuentemente el caso anormal es cuando $\hat{\lambda}^o = 0$. En lo que sigue del trabajo se normalizará el valor de $\hat{\lambda}^o$ mediante: $\hat{\lambda}^o = 1$.

En base al siguiente teorema se establece la solución al problema control óptimo estático.

Teorema 2.1. *Una condición necesaria y suficiente para que el punto crítico no degenerado $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{u})$ sea mínimo de f_0 sujeto a $f(x, u) = 0$ es que el producto $h^* H_L h \geq 0$ para todos los n h -vectores tangenciales² no nulos de $f(x, u)$ en $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{u})$.*

La demostración del Teorema 2.1 se puede encontrar en [13, página 19].

2.2. Propiedad de Turnpike

Normalmente, al trasladarse de un punto A a otro punto B , muy retirado uno del otro, uno busca incorporarse a una carretera directa (turnpike en inglés) en un punto $\bar{A}$ y seguir en dicha carretera hasta un punto $\bar{B}$, cercano al B , donde al salir rápidamente ir directamente al punto B ver figura 2.1. Este tipo de comportamiento ilustrado por la figura 2.1, es el comportamiento tomado por las soluciones a problemas de control óptimo en un intervalo de tiempo suficientemente grande, es decir, la mayoría de tiempo se pasa cerca de un estado fijo y en horizontes infinitos la solución converge a este estado fijo.

Las soluciones que se mantienen en un estado fijo por la mayor parte del intervalo de tiempo, es decir, su trayectoria tiene un turnpike se dice que tienen la **propiedad de turnpike**. Esta propiedad fue descubierta en 1958 por el economista ganador del premio nobel en 1970 Dorfman Samuelson al estudiar la acumulación de capital, al estado fijo se le conoce actualmente como punto de Von Neumann.

²Se llama i -ésimo h -vector tangencial de $f(x, u)$ en $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{u})$ si $\langle h^*, \nabla f_{x_i}(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{u}) \rangle = 0$ con $h \neq 0$.

2.2.1. Turnpike en el cálculo de variaciones

Definimos la propiedad de turnpike para el problema variacional, esta definición aparece en [24, Pg. xii].

Definición 2.3. *Considerese el siguiente problema del cálculo de variaciones:*

$$\int_0^T f(z(t), \dot{z}(t)) dt \rightarrow \text{mín}, \quad z(0) = x, \quad z(T) = y, \quad (2.5)$$

donde $z : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua, $T > 0$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que $f = f(x, p) \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tiene la propiedad de turnpike si existe un conjunto compacto $H(f) \subset \mathbb{R}^n$ tal que por cada conjunto compacto $D \subset \mathbb{R}^n$ y cada $\epsilon > 0$ existen números $L_1 > L_2 > 0$ tales que por cada $T \geq 2L_1$ cada $x, y \in K$ y una solución óptima $v : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de (2.5), la relación

$$d_H(H(f), \{v(t) : t \in [\xi, \xi + L_2]\}) \leq \epsilon$$

es válida para cada $\xi \in [L_1, T - L_1]$.

A lo largo de este trabajo se buscarán soluciones explícitas de problemas que muestran la propiedad de turnpike. No se usará la definición (2.3) para determinar si las soluciones óptimas muestran la propiedad de turnpike, y únicamente se usaran los resultados del Teorema 2.2 para dicha comprobación

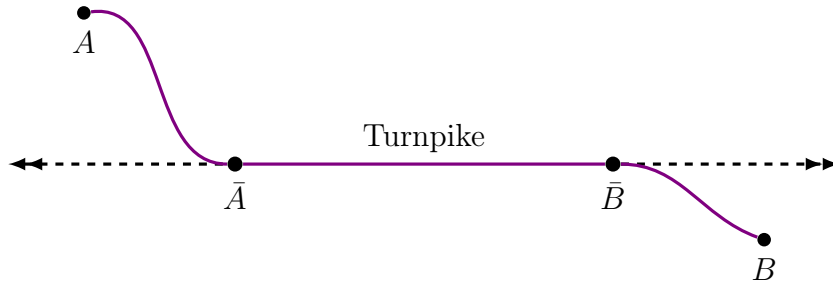


Figura 2.1: Comportamiento de turnpike

Para el problema de control óptimo (1.10) - (1.12), al ser $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{u})$ un punto de equilibrio de las ecuaciones extremales de este sistema, es natural asumir que, si T es suficientemente grande, la solución óptima $((\bar{x}(t), \bar{\psi}(t), \bar{\psi}_0(t), \bar{u}(t)))$ se mantiene cerca al punto $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{u})$ la mayor parte del tiempo.

En otras palabras, la solución del problema estático $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{u})$ se convierte en el turnpike de la solución óptima $((\bar{x}(t), \bar{\psi}(t), \bar{\psi}_0(t), \bar{u}(t)))$ separando dicha solución en tres diferentes intervalos:

- La primera parte de la solución es un trozo corto definido en $[0, \xi]$ para algún $\xi \in \mathbb{N}_0$ en lo cual la solución óptima se traslada del estado inicial a $(\hat{x}, \hat{\lambda}, -1, \hat{u})$.

- La segunda parte es semi estacionaria, al igual que el extremal $(\hat{x}, \hat{\lambda}, -1, \hat{u})$ sobre el intervalo $[\xi, T - \xi]$.
- La tercera y última parte de la solución definida en el intervalo $[T - \xi, T]$ en donde se la solución se aleja del turnpike al punto $((\bar{x}(T), \bar{\psi}(T), -1, \bar{u}(T)))$.

En la figura 2.1 las tres partes de la solución corresponden a las secciones del punto A al $\bar{A}$, $\bar{A}$ al $\bar{B}$ y $\bar{B}$ al B respectivamente.

La propiedad de turnpike se debe principalmente a la naturaleza hamiltoneana de las ecuaciones del principio máximo de Pontryagin; por los signos negativos y positivos de los eigenvalores de la matriz del sistema aumentado $(f(x), \psi(t))^*$.

A continuación, se presenta un teorema que indica cuando la solución de un sistema presenta la propiedad de turnpike. Previamente, se requiere establecer algunas preliminares y aclaraciones de notación.

2.3. Teorema principal

En esta subsección se analizan las trayectorias óptimas del problema de control óptimo (1.10)-(1.12) alrededor del punto $(\hat{x}, \hat{\lambda}, -1, \hat{u})$

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= \hat{x} + \delta x(t), \\ \bar{\psi}(t) &= \hat{\lambda} + \delta \psi(t), \\ \bar{u}(t) &= \hat{u} + \delta u(t),\end{aligned}\tag{2.6}$$

donde $(\delta x, \delta \psi, \delta u)$ son las variables de perturbación de primer orden. Derivamos dos veces parcialmente el hamiltoneano (1.13) con respecto a u , es decir, H_{uu} . Se asume que H_{uu} es invertible y mediante manipulaciones algebraicas (1.10) - (1.12) se obtiene

$$\begin{aligned}\delta u(t) &= (-H_{uu}^{-1} H_{xu}) \delta x(t) + (-H_{uu}^{-1} H_{\psi u}) \delta \psi(t) \\ \delta \dot{x}(t) &= (H_{x\psi} - H_{u\psi} H_{uu}^{-1} H_{xu}) \delta x(t) - (H_{u\psi} H_{uu}^{-1} H_{\psi u}) \delta \psi(t) \\ \delta \dot{\psi}(t) &= (-H_{xx} + H_{ux} H_{uu}^{-1} H_{xu}) \delta x(t) + (-H_{\psi x} + H_{ux} H_{uu}^{-1} H_{\psi u}) \delta \psi(t).\end{aligned}\tag{2.7}$$

En lo que sigue, se utilizará la siguiente notación. El hessiano de (1.13) en $(\hat{x}, \hat{\lambda}, -1, \hat{u})$ es escrito de la siguiente manera:

$$\text{Hess } H \Big|_{(\hat{x}, \hat{\lambda}, -1, \hat{u})} = \begin{pmatrix} H_{xx} & H_{x\psi} & H_{xu} \\ H_{\psi x} & 0 & H_{\psi u} \\ H_{ux} & H_{u\psi} & H_{uu} \end{pmatrix},$$

donde

$$H_{xx} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(\hat{x}, \hat{\lambda}, -1, \hat{u}), \quad H_{x\psi} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \psi}(\hat{x}, \hat{\lambda}, -1, \hat{u}),$$

son de dimensión $n \times n$, y $H_{x\psi} = H_{\psi x}^*$. Además,

$$H_{xu} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u}(\hat{x}, \hat{\lambda}, -1, \hat{u}), \quad H_{\psi u} = \frac{\partial^2 H}{\partial \psi \partial u}(\hat{x}, \hat{\lambda}, -1, \hat{u}),$$

son de dimensión $n \times m$. Se satisfacen las igualdades $H_{xu} = H_{ux}^*$, $H_{u\psi} = H_{\psi u}^*$.

Definimos las matrices

$$B := H_{u\psi}, \tag{2.8}$$

$$A := H_{x\psi} - H_{u\psi} H_{uu}^{-1} H_{xu}, \tag{2.9}$$

$$W := -H_{xx} + H_{ux} H_{uu}^{-1} H_{xu}. \tag{2.10}$$

Notemos que las siguientes igualdades se satisfacen

$$H_{x\psi} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \psi}(\hat{x}, \hat{\lambda}, -1, \hat{u}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, \hat{u})$$

y además,

$$B = H_{u\psi} = \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \psi}(\hat{x}, \hat{\lambda}, -1, \hat{u}) = \frac{\partial f}{\partial u}(\hat{x}, \hat{u}).$$

Sea $Z(t) := (\delta x(t), \delta \psi(t))^*$. Los últimos dos renglones de (2.7) podemos escribirlos como

$$\dot{Z}(t) = MZ(t) \tag{2.11}$$

con

$$M := \begin{pmatrix} H_{x\psi} - H_{u\psi} H_{uu}^{-1} H_{xu} & -H_{u\psi} H_{uu}^{-1} H_{\psi u} \\ -H_{xx} + H_{ux} H_{uu}^{-1} H_{xu} & -H_{\psi x} + H_{ux} H_{uu}^{-1} H_{\psi u} \end{pmatrix}.$$

Aplicando (2.8), tenemos que

$$M = \begin{pmatrix} A & -BH_{uu}^{-1}B \\ W & -A^* \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Resulta que $\delta \dot{x}(t) = H_{x\psi} \delta x(t) + B \delta u(t)$. Ahora aprovecharemos la estructura hamiltoneana (ver Lema 2.6) de la matriz M dada por la propiedades de sus eigenvalores.

Ahora mencionamos el teorema principal general, se refiere a [5, P.6, Teorema 1].

Teorema 2.2 (Teorema Principal). *Supongamos que la matriz H_{uu} es negativa definida, la matriz W positiva definida, y ambas matrices A y B satisfacen la condición de Kalman*

$$\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$$

Definición 2.4. Sea S un mapeo suave definido de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ el punto $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ se llama singular de S si el rango de S es menor a $2n$ o k .

Asumimos que $(\hat{x}(t_0), \hat{x}(T))$ no sea punto singular de la función de frontera R (1.12), y que la norma del hessiano de R en dicho punto es suficiente pequeño. Entonces existen constantes $\epsilon > 0, C_1 > 0, C_2 > 0, T_0 > 0$ tal que si

$$\bar{D} = \|R(\hat{x}(t_0), \hat{x}(T))\| + \left\| \begin{pmatrix} -\bar{\psi}(0) \\ \bar{\psi}(T) \end{pmatrix} \right\| - \sum_{i=1}^k \gamma_i \|\nabla R^i(\bar{x}(0), \bar{x}(T))\| \leq \epsilon,$$

para todo $T > T_0$, el problema de control óptimo (1.10) - (1.12) con condiciones de transversalidad (1.18) tiene almenos una solución óptima $(\bar{x}, \bar{\psi}, \bar{u})$ que para todo el intervalo $[t_0, T]$ se cumple:

$$\|\bar{x}(t) - \hat{x}\| + \|\bar{\psi}(t) - \hat{\lambda}\| + \|\bar{u}(t) - \hat{u}\| \leq C_1(e^{-C_2 t} + e^{-C_2(T-t)}), \quad (2.13)$$

con

$$C_2 = \max\{\Re(\mu) | \mu \in \text{Spec}(A - BH_{uu}^{-1}B^*E_-)\}.$$

En este caso E_- es la mínima matriz negativa definida de la solución de la ecuación de Riccati:

$$XA + A^T X - XBH_{uu}^{-1}B^*X - W = 0. \quad (2.14)$$

La existencia de las soluciones máxima y mínima de la ecuación de de Riccati, denotadas como E_+ , E_- respectivamente, se justifica por el Teorema 2.3. No daremos la demostración de este teorema, que va más allá del objetivo de este trabajo. La demostración se puede encontrar en [12, Theorem 14.8.4. pg. 309] :

Teorema 2.3. Si $W^* = W$, $BH_{uu}^{-1}B^* \geq 0$, $(A, BH_{uu}^{-1}B^*)$ es controlable y (2.14) tiene al menos una solución hermitiana (no necesariamente simétrica con coeficientes reales), entonces existe una solución hermitiana máxima E_+ y una solución hermitiana mínima E_- . La solución E_+ hermitiana única para cual $\text{Spec}(A + BH_{uu}^{-1}B^*E_+)$ esta en el medio plano cerrado derecho complejo. La solución E_- hermitiana única para cual $\text{Spec}(A + BH_{uu}^{-1}B^*E_-)$ esta en el medio plano cerrado izquierdo complejo.

2.3.1. Planteamiento general del caso lineal cuadrático

En esta subsección se explicará brevemente el planteamiento general del caso lineal cuadrático, tiempo constante con estado final libre y control sin restricciones. Este es un caso particular del problema de control óptimo, por lo mismo solo se explica las modificaciones al Teorema 2.2 y como cambia en el caso lineal cuadrático. Es importante mencionar que el Teorema 2.2 no será demostrado en general, solo para el caso lineal cuadrático.

Se modifica (1.10) a un sistema lineal con el punto inicial dado

$$f(x, u) = \bar{A}x + \bar{B}u, \quad x(0) = x_0 \neq 0 \in \mathbb{R} \quad (2.15)$$

donde $\bar{A}$ es una matriz de $n \times n$ y $\bar{B}$ de $n \times m$. El funcional de costo (1.11) es de la forma

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^T \left((x - x^d)^* Q (x - x^d) + (u - u^d)^* U (u - u^d) \right) dt. \quad (2.16)$$

Aquí las matriz Q es positiva semi-definida de dimensión $n \times n$, U es positiva definida de dimensión $m \times m$. El par $(\bar{A}, \bar{B})$ es completamente controlable, es decir, cumple con el criterio de Kalman. Notemos que en este caso particular se satisfacen las igualdades que $H_{xu} = 0$ y $H_{xx} = -Q$. Por lo tanto el par de matrices (A, B) de (2.8) son tales que $(A, B) = (\bar{A}, \bar{B})$.

Bajo estas circunstancias el hamiltoneano (1.13) tiene la forma

$$H(x, \psi, -1, u) = -(x - x^d)^* Q (x - x^d) - (u - u^d)^* U (u - u^d) + x^* \psi.$$

Sabemos que el control óptimo debe minimizar el hamiltoniano H . Reescribiendo (1.16) tenemos

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Uu + B^* \psi = 0. \quad (2.17)$$

Obtenemos un extremo de H con respecto de u . Para que dicho extremo sea un mínimo de H con respecto a u la matriz $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}$, de dimensiones $r \times r$, debe de ser positiva definida. Observamos que

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = U, \quad (2.18)$$

y por definición de U sabemos que en efecto es positiva definida. Esto nos permite de (2.18) expresar el control óptimo de la forma

$$\bar{u}(t) = -U^{-1} B^* \bar{\psi}(t). \quad (2.19)$$

2.3.2. Demostración del teorema 2.2 para el caso lineal cuadrático

El problema de control óptimo estático (2.1), en este caso como un problema de minimización estrictamente convexo:

$$\min_{\substack{(x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ f(x,u)=0}} \frac{1}{2} \left((x - x^d)^* Q (x - x^d) + (u - u^d)^* U (u - u^d) \right) \quad (2.20)$$

tiene una solución única $(\bar{x}, \bar{u})$ asociada con un par $(\bar{\lambda}, -1)$ de multiplicadores de Lagrange tal que

$$L(x, \lambda, u) = \frac{1}{2} \left((x - x^d)^* Q (x - x^d) + (u - u^d)^* U (u - u^d) \right) - \lambda^* (Ax + Bu)$$

al derivar e igualar dichas derivadas a cero se obtiene:

$$L_x = Q(x - x^d) - A^* \lambda = 0, \quad (2.21)$$

$$L_\lambda = -Ax - Bu = 0, \quad (2.22)$$

$$L_u = U(u - u^d) - B^* \lambda = 0. \quad (2.23)$$

De (2.23) se obtiene al resolver por el control óptimo:

$$\hat{u} = u^d + U^{-1} B^* \lambda \quad (2.24)$$

rescribiendo (2.22) y (2.21) con (2.24) obtenemos el sistema

$$A\hat{x} + BB^* \hat{\lambda} + Bu^d = 0 \quad (2.25)$$

$$Q\hat{x} - A^* \hat{\lambda} - Qx^d = 0.$$

Reescribiendo el sistema (1.14)-(1.16), tenemos:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + BB^* \bar{\psi}(t) + Bu^d, \quad \bar{x}(0) = x_0, \quad (2.26)$$

$$\dot{\bar{\psi}}(t) = Q\bar{x}(t) - A^* \bar{\psi}(t) - Qx^d \quad (2.27)$$

para casi todo $t \in [0, T]$, y recordando que cuando el punto $x(T)$ es libre se tiene la condición de transversalidad $\psi(T) = 0$.

Es importante remarcar que para el caso lineal cuadrático, el resultado de Teorema 2.2 se mantiene globalmente, es decir $\epsilon = +\infty$. Dicho teorema toma la siguiente forma en este caso.

Teorema 2.4. *Existen constantes $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ para cada tiempo $T > 0$ el problema de control óptimo tiene solución $(\bar{x}(t), \bar{\psi}(t), \bar{u}(t))$ tales que satisfacen*

$$\|\bar{x}(t) - \hat{x}\| + \|\bar{\psi}(t) - \hat{\lambda}\| + \|\bar{u}(t) - \hat{u}\| \leq C_1(e^{-C_2 t} + e^{-C_2(T-t)})$$

para cada $t \in [0, T]$.

Para precisar, las constantes se establece que

$$\begin{aligned} \|\bar{x}(t) - \hat{x}\| &\leq \|x_0 - \hat{x}\|e^{-C_2 t} + \|E_-^{-1} \hat{\lambda}\|e^{-C_2(T-t)} \\ &\quad + O\left(\|E_-^{-1} \hat{\lambda}\|e^{-C_2(T+t)} + \|E_-^{-1} E_+\| \|x_0 - \hat{x}\|e^{-C_2(2T-t)}\right), \\ \|\bar{\psi}(t) - \hat{\lambda}\| &\leq \|E_+\| \|x_0 - \hat{x}\|e^{-C_2 t} + \|E_-^{-1}\| \|E_-^{-1} \hat{\lambda}\|e^{-C_2(T-t)} \\ &\quad + O\left(\|E_+\| \|E_-^{-1} \hat{\lambda}\|e^{-C_2(T+t)} + \|E_-^{-1}\| \|E_-^{-1} E_+\| \|x_0 - \hat{x}\|e^{-C_2(2T-t)}\right), \\ \|\bar{u}(t) - \hat{u}\| &\leq \|U^{-1}\| \|B\| \|\bar{\psi}(t) - \hat{\lambda}\|, \end{aligned}$$

para cada $t \in [0, T]$, donde E_- (respectivamente, E_+) es la solución mínima de la ecuación de Riccati (2.28). Esta matriz es una matriz negativa definida (respectivamente, máxima positiva definida) solución de la ecuación Riccati

$$XA + A^* X + BU^{-1} B^* - Q = 0 \quad (2.28)$$

donde C_2 es la abscisa espectral de la matriz $A + BU^{-1}B^*E_-$, con

$$C_2 = \max\{\Re(\mu) | \mu \in \text{Spec}(A - BU^{-1}B^*E_-)\} > 0.$$

Notemos que el funcional (2.16) evaluado en $(\bar{x}, \bar{u})$ tiende a $\infty+$ mientras $T \rightarrow \infty+$, en el caso cuando (x^d, u^d) no sea un punto de equilibrio. Se tiene

$$\lim_{T \rightarrow \infty+} \frac{J(\bar{x}, \bar{u})}{T} = \frac{1}{2} \left((\bar{x} - x^d)^* Q (\bar{x} - x^d) + (\bar{u} - u^d)^* U (\bar{u} - u^d) \right). \quad (2.29)$$

Para confirmación de este hecho referimos a [5, Pg. 11, Remark 12].

De (2.25) tenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} A & BU^{-1}B^* \\ Q & -A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Bu^d \\ Qx^d \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

La matriz M de (2.12) se escribe como

$$M = \begin{pmatrix} A & BU^{-1}B^* \\ Q & -A^* \end{pmatrix}.$$

Sea $\ker(M)$ el conjunto de todos los vectores cuya imagen bajo M es el vector nulo.

Lema 2.5. *Asumimos que $\ker(A^*) \cap \ker(B^*) = \{0\}$, entonces la matriz M es invertible y por lo tanto la ecuación tiene solución única.*

Demostración: Tomamos $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(M)$, por lo tanto, se obtiene:

$$\begin{aligned} Ax + BU^{-1}B^*y &= 0 \\ Qx - A^*y &= 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

de aquí tenemos $x = Q^{-1}A^*y$. De la segunda ecuación de (2.31) y reemplazando en la primera resulta:

$$(AQ^{-1}A^* + BU^{-1}B^*)y = 0.$$

Multiplicando por y por la derecha, tenemos:

$$\langle AQ^{-1}A^*y, y \rangle + \langle BU^{-1}B^*y, y \rangle = \langle Q^{-1}A^*y, A^*y \rangle + \langle U^{-1}B^*y, B^*y \rangle$$

tomando en cuenta que las matrices Q y U son invertibles y simétricas se tiene:

$$Q^{-1} = Q^{-\frac{1}{2}*}Q^{-\frac{1}{2}}$$

y

$$U^{-1} = U^{-\frac{1}{2}*}U^{-\frac{1}{2}}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} (Q^{-\frac{1}{2}*}Q^{-\frac{1}{2}}A^*y, A^*y) + (U^{-\frac{1}{2}*}U^{-\frac{1}{2}}B^*y, B^*y) &= 0, \\ (Q^{-\frac{1}{2}}A^*y, Q^{-\frac{1}{2}}A^*y) + (U^{-\frac{1}{2}}B^*y, U^{-\frac{1}{2}}B^*y) &= 0. \end{aligned}$$

De donde

$$\|Q^{-\frac{1}{2}}A^*y\|^2 + \|U^{-\frac{1}{2}}B^*y\|^2 = 0.$$

Es conocido que $\|Q^{-\frac{1}{2}}A^*\|^2 \neq 0$ y que $\|U^{-\frac{1}{2}}B^*\|^2 \neq 0$ por lo se concluye que $\|y\| = 0$ y $\|x\| = 0$. Queda demostrado el lema. $\square$

Según Lema 2.5, bajo la condición $\ker(A^*) \cap \ker(B^*) = \{0\}$ implicada por la condición de Kalman, el problema de control óptimo estático (2.20) tiene solución única $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\lambda})$. Definiendo

$$\begin{aligned} \delta x(t) &= \bar{x}(t) - \hat{x}, \\ \delta \psi(t) &= \bar{\psi}(t) - \hat{\lambda} \end{aligned} \tag{2.32}$$

de (2.7) se obtiene

$$\delta \dot{x}(t) = A\delta x(t) + BU^{-1}B^*\delta \psi(t), \tag{2.33}$$

$$\delta \dot{\psi}(t) = Q\delta x(t) - A^*\delta \psi(t) \tag{2.34}$$

con

$$\delta x(0) = x_0 - \hat{x}, \tag{2.35}$$

$$\delta \psi(T) = -\hat{\lambda}. \tag{2.36}$$

La segunda igualdad ocurre cuando el estado final es libre, convirtiéndose en un problema de frontera para el sistema lineal diferencial

$$\dot{Z}(t) = MZ(t), \tag{2.37}$$

con

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \delta x(t) \\ \delta \psi(t) \end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

Notemos que sólo una parte de los datos iniciales y finales son conocidos e impuestos, y por lo tanto debemos determinar la condición inicial $\delta \phi(0)$ tal que la solución $Z(t) = (\delta x(t), \delta \phi(t))^*$ del sistema diferencial (2.37) con punto inicial

$$Z(0) = \begin{pmatrix} x_0 - \hat{x} \\ \delta \psi(0) \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

La matriz M muestra una propiedad crucial, que es el fundamento de la demostración de la propiedad de turnpike.

Lema 2.6. *Si el par (A, B) satisface la condición de Kalman entonces todos los eigenvalores de la matriz M tienen eigenvalores con partes reales tales que si ξ es una parte real de un eigenvalor, entonces también lo es $-\xi$.*

Demostración: Sea E_- (E_+) la solución matriz mínima negativa definida (máxima positiva definida) de la ecuación de Riccati

$$XA + A^*X + XBU^{-1}B^*X - Q = 0_n. \quad (2.40)$$

Definimos

$$P := \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ E_- & E_+ \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

con I_n siendo la matriz identidad real de $n \times n$, entonces por el Lema 1.1 P es invertible y

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} A + BU^{-1}B^*E_- & 0_n \\ 0_n & A + BU^{-1}B^*E_+ \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

La igualdad anterior se demuestra verificando la igualdad

$$MP = P \begin{pmatrix} A + BU^{-1}B^*E_- & 0_n \\ 0_n & A + BU^{-1}B^*E_+ \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Notemos que

$$MP = \begin{pmatrix} A + BU^{-1}B^*E_- & A + BU^{-1}B^*E_+ \\ Q - A^*E_- & Q - A^*E_+ \end{pmatrix}.$$

La parte derecha de la ecuación (2.43) se escribe como

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ E_- & E_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A + BU^{-1}B^*E_- & 0_n \\ 0_n & A + BU^{-1}B^*E_+ \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A + BU^{-1}B^*E_- & A + BU^{-1}B^*E_+ \\ E_-A + E_-BU^{-1}B^*E_- & E_+A + E_+BU^{-1}B^*E_+ \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

En virtud a la definición de las matrices E_+ y E_- , al ser soluciones de (2.40), E_- y E_+ tenemos que

$$\begin{aligned} E_-A + E_-BU^{-1}B^*E_- &= Q - A^*E_-, \\ E_+A + E_+BU^{-1}B^*E_+ &= Q - A^*E_+. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Por lo tanto, se cumple la igualdad (2.43).

Además, si restamos las ecuaciones (2.45) y sumamos cero en la forma $E_-BU^{-1}B^*E_+ - E_-BU^{-1}B^*E_+$ obtenemos

$$(E_+ - E_-)(A + BU^{-1}B^*) + A^*(E_+ - E_-) - E_-BU^{-1}B^*E_- + E_-BU^{-1}B^*E_+$$

resultando la siguiente igualdad

$$(E_+ - E_-)(A + BU^{-1}B^*E_+) + (A + BU^{-1}B^*E_-)^*(E_+ - E_-) = 0. \quad (2.46)$$

Al ser $E_+ - E_-$ una suma de matrices positivas definidas, es una matriz positiva definida y de aquí se sigue que los eigenvalores de $A + BU^{-1}B^*E_+$ son los negativos de³ $A + BU^{-1}B^*E_-$. Queda así demostrado el lema. $\square$

Sea $Z(t)$ como en (2.37). Definimos

$$Z_1(t) := \begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

tal que

$$Z(t) = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ E_- & E_+ \end{pmatrix} Z_1(t). \quad (2.48)$$

Recordando la igualdad (2.37) y al derivar (2.48) tenemos

$$\dot{Z} = P\dot{Z}_1. \quad (2.49)$$

De (2.37) se obtiene la igualdad

$$MZ = P\dot{Z}_1. \quad (2.50)$$

Multiplicando (2.50) por P^{-1} por la izquierda, tenemos

$$P^{-1}MZ = \dot{Z}_1$$

y por (2.48) la última igualdad se reescribe como

$$P^{-1}MPZ_1 = \dot{Z}_1. \quad (2.51)$$

De (2.42) obtiene la ecuación diferencial

$$\dot{Z}_1(t) = \begin{pmatrix} A + BU^{-1}B^*E_- & 0 \\ 0 & A + BU^{-1}B^*E_+ \end{pmatrix} Z_1(t). \quad (2.52)$$

Usando (2.47), tenemos

$$\begin{aligned} \dot{v} &= (A + BU^{-1}B^*E_-)v(t), \\ \dot{w} &= (A + BU^{-1}B^*E_+)w(t). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Como las partes reales de los eigenvalores de $A + BU^{-1}B^*E_-$ corresponden a los negativos de $A + BU^{-1}B^*E_+$, y estos son todos positivos.

³Se comprueban las propiedades de las matrices E_- y E_+ para cada problema expuesto en este trabajo.

Sean entonces λ , C un eigenvalor y eigenvector de la matriz $A + BU^{-1}B^*E_-$. Observamos que $V(t) = e^{\lambda t}C$ es solución de la primera ecuación de (2.53).

En efecto,

$$\dot{V}(t) = \lambda e^{\lambda t}C = \lambda V(t)$$

o

$$\lambda e^{\lambda t} = V(t) = (A + BU^{-1}B^*E_-)V(t) = (A + BU^{-1}B^*E_-)e^{\lambda t}C.$$

De donde

$$((A + BU^{-1}B^*E_-) - \lambda I_n)C = 0.$$

Si $C = x(0)$ y $V(t) = e^{\lambda t}V(0)$. Entonces,

$$\|V(t)\| = e^{\lambda t}\|V(0)\| \leq e^{\lambda_{\min} t}\|V(0)\|. \quad (2.54)$$

Se sigue, por (2.54) y la relación entre los eigenvalores de las matrices $A + BU^{-1}B^*E_-$ y $A + BU^{-1}B^*E_+$, que

$$\|v(t)\| \leq \|v(0)\|e^{-C_2 t}, \quad \|w(t)\| \leq \|w(T)\|e^{-C_2(T-t)}, \quad (2.55)$$

para $t \in [0, T]$, donde

$$C_2 = \max\{\Re(\mu) | \mu \in \text{Spec}(A - BU^{-1}B^*E_-)\} > 0.$$

Usamos como norma de matriz la norma definida de la siguiente manera:

$$\|A\| = \sup_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|. \quad (2.56)$$

De las desigualdades (2.55) se tiene que $v(t) = o(1)$ y $w(t) = o(1)$ lo cual indica que también $\delta x(t) = o(1)$ y $\delta \psi(t) = o(1)$, para cada $t \in [\xi, T - \xi]$ para algún⁴ $\xi > 0$. Notamos el surgimiento de la propiedad de turnpike con un arco temporal inicial, un arco central donde $v(t) = o(1)$ y $w(t) = o(1)$ y un tercer arco temporal final.

Para terminar la demostración y obtener estimaciones precisas $\delta x(t)$ y $\delta \psi(t)$ se deben de tomar en cuenta las condiciones terminales. Con los pasos siguientes se muestra no solo que los valores $v(0)$ y $w(T)$ existen, sino que pueden ser calculados de las condiciones terminales.

En este trabajo se muestran y analizan ejercicios (3.21) y (3.36) en donde el punto final es libre y por lo tanto se usa este escenario en la demostración. Gracias a las condiciones de transversalidad ($\bar{\psi}(T) = 0$) se tiene:

$$\begin{aligned} \delta x(0) &= x_0 - \hat{x}, \\ \delta \psi(T) &= -\bar{\lambda}. \end{aligned}$$

⁴Se recuerda que se estima un T suficientemente grande para permitir estas conclusiones, y que para este trabajo se busca un valor de $\xi \in \mathbb{Z}$

Tomamos la representación matricial de (2.49), tenemos:

$$\begin{pmatrix} \delta x(t) \\ \delta \psi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ E_- & E_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}.$$

De ahí surgen los sistemas:

$$\delta x(t) = v(t) + w(t), \quad (2.57)$$

$$\delta \psi(t) = E_- v(t) + E_+ w(t). \quad (2.58)$$

De (2.57) al despejar $-w(t)$, tenemos:

$$v(t) - \delta x(t) = -w(t).$$

Al calcular la norma

$$\|v(t) - \delta x(t)\| = \|w(t)\|$$

por la segunda desigualdad de (2.55), se obtiene

$$\|v(t) - \delta x(t)\| \leq \|w(T)\| e^{-C_2(T-t)}. \quad (2.59)$$

Multiplicamos a (2.58) por E_+^{-1} por la izquierda, tenemos

$$E_+^{-1} \delta \psi(t) = E_+^{-1} E_- v(t) + w(t).$$

De donde,

$$-w(t) + E_+^{-1} \delta \psi(t) = E_+^{-1} E_- v(t).$$

Al aplicar la norma a ambos lados, tenemos

$$\|w(t) - E_+^{-1} \delta \psi(t)\| \leq \|E_+^{-1} E_- \| \|v(t)\|. \quad (2.60)$$

Por la primera desigualdad de (2.55) se concluye que

$$\|w(t) - E_+^{-1} \delta \psi(t)\| \leq \|E_+^{-1} E_- \| \|v(0)\| e^{-C_2 t}. \quad (2.61)$$

Evalutando (2.59) en $t = 0$ y (2.60) en $t = T$, tenemos:

$$\|v(0) - (x_0 - \hat{x})\| \leq \|w(T)\| e^{-C_2 T}, \quad (2.62)$$

$$\|w(t) + E_+^{-1} \bar{\lambda}\| \leq \|E_+^{-1} E_- \| \|v(0)\| e^{-C_2 T}. \quad (2.63)$$

De (2.58) se obtiene la igualdad

$$\|w(t)\| = \|E_+^{-1} E_- v(t) - E_+^{-1} \delta \psi(t)\|.$$

Aplicando la desigualdad del triángulo tenemos

$$\|w(t)\| \leq \|E_+^{-1} E_- v(t)\| + \|E_+^{-1} \delta \psi(t)\|.$$

Aplicando (2.59) la desigualdad anterior se convierte en

$$\|w(t)\| \leq \|E_+^{-1}E_-\| \|v(0)\| e^{-C_2 t} + \|E_+^{-1}\delta\psi(t)\|. \quad (2.64)$$

Por lo tanto, evaluando (2.64) en tiempo $t = T$, tenemos

$$\|w(T)\| \leq \|E_+^{-1}E_-\| \|v(0)\| e^{-C_2 T} + \|E_+^{-1}\bar{\lambda}\|. \quad (2.65)$$

De (2.57) y aplicando la desigualdad del triángulo, tenemos

$$\|v(t)\| \leq \|w(t)\| + \|\delta x(t)\|.$$

Al aplicar la segunda desigualdad de (2.55), la desigualdad anterior se convierte en

$$\|v(t)\| \leq \|w(T)\| e^{-C_2(T-t)} + \|\delta x(t)\|. \quad (2.66)$$

Evaluando esta desigualdad en el tiempo $t = 0$, tenemos

$$\|v(0)\| \leq \|w(T)\| e^{-C_2(T)} + \|(x_0 - \hat{x})\|. \quad (2.67)$$

Sustituyendo (2.65) y (2.67) en las desigualdades (2.62), tenemos

$$\|v(0) - (x_0 - \hat{x})\| \leq \|E_+^{-1}\bar{\lambda}\| e^{-C_2 T} + \|E_+^{-1}E_-\| \|v(0)\| e^{-2C_2 T}, \quad (2.68)$$

$$\|w(T) + E_+^{-1}\bar{\lambda}\| \leq \|E_+^{-1}E_-\| \|x_0 - \hat{x}\| e^{-C_2 T} + \|E_+^{-1}E_-\| \|w(T)\| e^{-2C_2 T}. \quad (2.69)$$

De lo anterior, es obvio que

$$v(0) = x_0 - \hat{x} + O\left(\|E_+^{-1}\bar{\lambda}\| e^{-C_2 T}\right), \quad (2.70)$$

$$w(T) = -E_+^{-1}\bar{\lambda} + O\left(\|E_+^{-1}E_-\| \|x_0 - \hat{x}\| e^{-C_2 T}\right).$$

Ejemplificamos la propiedad hiperbólica del sistema que implica la propiedad de turnpike en la figura 2.2.

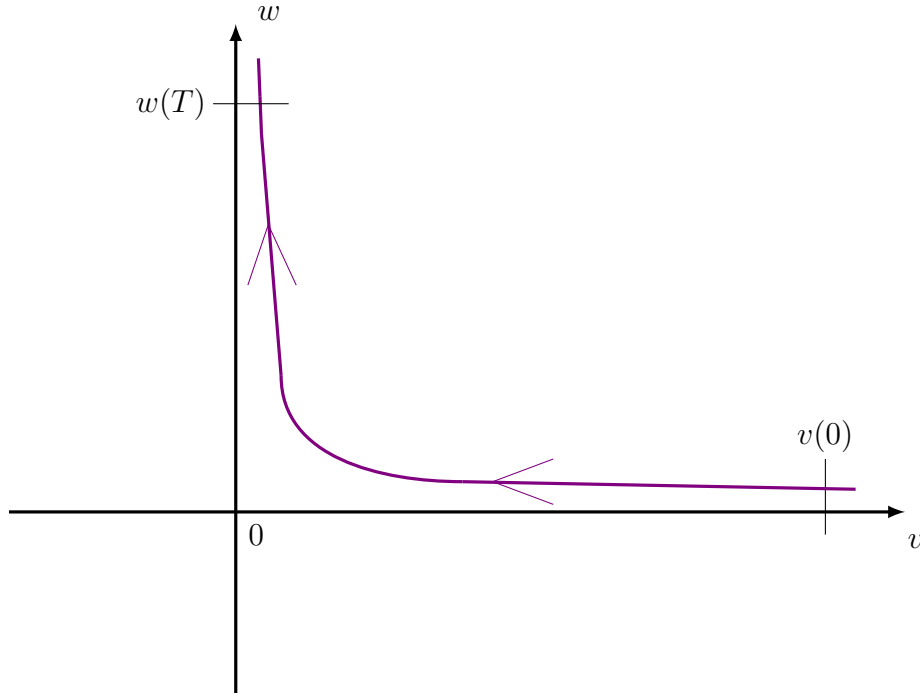


Figura 2.2: Punto Silla

Usando las desigualdades (2.55) una vez más, tenemos

$$\begin{aligned}\|v(t)\| &\leq \|x_o - \hat{x}\|e^{-C_2 t} + O\left(\|E_+^{-1}\bar{\lambda}\|e^{-C_2(t+T)}\right), \\ \|w(t)\| &\leq \|E_+^{-1}\bar{\lambda}\|e^{-C_2(T-t)} + O\left(\|E_+^{-1}E_-\|\|x_o - \hat{x}\|e^{-C_2(2T-t)}\right),\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$. Finalmente, usando la igualdad, $\delta x(t) = v(t) + w(t)$, (2.57), y la igualdad $\delta\psi(t) = E_- v(t) + E_+ w(t)$, (2.58), combinadas con las desigualdades anteriores se concluye que

$$\begin{aligned}\|\delta x(t)\| &\leq \|x_o - \hat{x}\|e^{-C_2 t} + \|E_+^{-1}\bar{\lambda}\|e^{-C_2(2T-t)} \\ &\quad + O\left(\|E_+^{-1}\bar{\lambda}\|e^{-C_2(t+T)} + \|E_+^{-1}E_-\|\|x_o - \hat{x}\|e^{-C_2(2T-t)}\right) \\ \|\delta\psi(t)\| &\leq \|E_-\|\|x_o - \hat{x}\|e^{-C_2 t} + \|E_+\|\|E_+^{-1}\bar{\lambda}\|e^{-C_2(T-t)} \\ &\quad + O\left(\|E_-\|\|E_+^{-1}\bar{\lambda}\|e^{-C_2(t+T)} + \|E_+\|\|E_+^{-1}E_-\|\|x_o - \hat{x}\|e^{-C_2(2T-t)}\right).\end{aligned}$$

La estimación para el control surge de la igualdad $\delta u(t) = \bar{u}(t) - \hat{u} = U^{-1}B^*\delta\psi(t)$. Con esto se demuestra el teorema para el caso lineal cuadrático. $\square$

De esta manera queda demostrado el Teorema 2.2 para el caso lineal cuadrático, es decir, el Teorema 2.4.

Capítulo 3

Ejemplos

En este capítulo se muestran algunos ejemplos de control óptimo del caso lineal cuadrático.

Para cada ejemplo se comprueba que el sistema satisface las condiciones del Teorema 2.4. Se muestra y explica la obtención de la solución óptima mediante el principio máximo de Pontryagin. Se muestran las gráficas de dichas soluciones, analizando el comportamiento de turnpike en las soluciones. Además se muestran y comparan las gráficas de las soluciones numérica obtenidas mediante programas de computadora codificados en lenguaje de programación **Fortran 90** cuyos métodos serán descritos en detalle en el siguiente capítulo.

3.0.1. Caso lineal cuadrático

En esta sección veremos el caso “usual” del caso lineal cuadrático usual, con el funcional de forma (3.1). Se muestra el ejemplo del problema del estado regulado. Este problema al igual que todo el fundamento matemático usado se encuentra en el noveno capítulo de [14]. Asumimos que A y B son matrices constantes.

Se considera el sistema lineal:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

con control $u(t)$ sin restricciones y el funcional de costo:

$$J = x^*(T)Sx(T) + \frac{1}{2} \int_0^T \left(x^*(t)Q(t)x(t) + u^*(t)U(t)u(t) \right) dt. \quad (3.1)$$

Aquí las matrices y vectores de 3.1 mantienen las propiedades y dimensiones previamente mencionadas en 2.16. La matriz S es constante de dimensiones $m \times m$ y además es una matriz positiva

semidefinida. El problema consiste en mantener el estado cerca de cero y al mismo tiempo minimizar el funcional de costo, se deja que el estado final sea libre.

Debido a que el costo inicial $x^*(T)Sx(T)$ es diferente de cero en este caso. Al llevar de un estado inicial fijo a uno libre en tiempo T las condiciones de transversalidad cambian a:

$$\psi(T) = \frac{\partial}{\partial x(T)} \left[\frac{1}{2} x^*(T) S x(T) \right] = Sx(T). \quad (3.2)$$

Se asume que se cumple la igualdad:

$$\bar{\psi}(t) = K(t)\bar{x}(t) \quad (3.3)$$

donde, la matriz $K(t)$ es una matriz simétrica, que depende del tiempo T y la matriz F y además es solución a la ecuación diferencial de Riccati:

$$\dot{K}(t) = -K(t)A + A^*K(t) + K(t)BU^{-1}B^*K(t) - Q = 0, \quad (3.4)$$

y satisface

$$K(T) = S. \quad (3.5)$$

Lema 3.1. Si $K(t)$ es la solución de la ecuación diferencial de Riccati (3.4) y si $K(T) = S$, entonces $K(t)$ es una matriz simétrica para todo $t \in [t_o, T]$ esto es,

$$K(t) = K^*(t).$$

Damos una idea de la demostración. La demostración completa se encuentra en [12, Lemma 9-5, pg. 762]. Notamos que $BU^{-1}B^* = (BU^{-1}B^*)^*$ debido a que la matriz U es simétrica. Tomando la transpuesta de (3.4) notamos que

$$\left[\frac{d}{dt} K(t) \right]^* = -K^*(t)A + -A^*K^*(t) + K^*(t)BU^{-1}B^*K(t) - Q, \quad (3.6)$$

debido a que las matrices Q y $BU^{-1}B^*$ son simétricas. Sabiendo que para cualquier matriz se cumple que

$$\left[\frac{d}{dt} K(t) \right]^* = \frac{d}{dt} [K^*(t)].$$

Se concluye ambas matrices $K(t)$ y $K^*(t)$ son soluciones de la misma ecuación diferencial, al ser (3.4) la misma ecuación que (3.6). Debido a que $K(T) = S$, y como S es simétrica se tiene que

$$\dot{K}(T) = K^*(T) = S \quad (3.7)$$

y se concluye que $K(t) = K^*(t)$. La trayectoria óptima se reduce de la forma:

$$\dot{\bar{x}} = (A - BU^{-1}B^*K)\bar{x}.$$

El control óptimo del sistema se define como:

$$\bar{u}(t) = -U^{-1}B^*K(t)\bar{x}(t). \quad (3.8)$$

Se nota que en el caso cuadrático expuesto en la sección 2.3.1 la matriz S es cero. Implicando que (3.2) es igual a cero, además la matriz K es constante, reduciendo la ecuación 3.4 a una algebraica. Esto cambia la estructura de (3.8) a la forma

$$\bar{u}(t) = -U^{-1}B^*e^{(A-BU^{-1}B^*K)t}\bar{x}(t)x_0. \quad (3.9)$$

Sustentamos lo anterior con un ejemplo. Consideramos el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), \end{aligned} \quad (3.10)$$

y el funcional de costo

$$J = \frac{1}{2} \left(x_1^2(3) + 2x_2^2(3) \right) + \int_0^3 \left(2x_1^2(t) + 4x_2^2(t) + x_1(t)x_2(t) + u^2(t) \right) dt. \quad (3.11)$$

Por el sistema (3.10), tenemos

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Por el funcional de costo (3.11)

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad R(t) = \frac{1}{2}, \quad t_0 = 0, \quad T = 3. \quad (3.13)$$

Sea $K(t)$ la matriz de 2×2 :

$$K(t) = \begin{pmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Recordamos que el control escalar óptimo esta dado por la ecuación (3.8)

$$u(t) = -2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$$= -2 \begin{pmatrix} k_{12}(t)x_1(t) & k_{22}(t)x_2(t) \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

La ecuación de Riccati resultante es

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{k}_{11}(t) & \dot{k}_{12}(t) \\ \dot{k}_{21}(t) & \dot{k}_{22}(t) \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

y $K(t)$ debe de cumplir la igualdad

$$\begin{pmatrix} k_{11}(3) & k_{12}(3) \\ k_{21}(3) & k_{22}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

en el tiempo $t = T = 3$.

Al realizar las multiplicaciones matriciales de la ecuación 3.17 se obtiene tres ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{k}_{11}(t) &= 2k_{12}^2(t) - 2, \\ \dot{k}_{12}(t) &= -k_{11}^2(t) + 2k_{12}(t)k_{22}(t) - 1 \\ \dot{k}_{22}(t) &= -2k_{12}(t) + 2k_{22}^2(t), \end{aligned} \quad (3.19)$$

con las correspondientes condiciones de frontera

$$k_{11}(3) = 1, k_{12}(3) = 0, k_{22}(3) = 2. \quad (3.20)$$

Resolviendo las ecuaciones (3.19) para $k_{12}(t)$ y $k_{22}(t)$, podríamos generar el control óptimo $\bar{u}(t)$ gracias a la ecuación (3.8). De esta manera usualmente se obtienen las trayectorias óptimas.

Ahora, se exponen dos ejemplos de interés para el objetivo de la tesis.

3.1. Ejemplo 1

Encontrar el control $\bar{u}(t)$ óptimo del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) - x_1(t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

que lleve el sistema del estado inicial fijo $(x_1(0), x_2(0))^* = (0, 0)^*$ a un estado final libre en tiempo $T = 20$, y minimizar el funcional de costo

$$J(x(t), u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^{20} \left((x_1(t) - 2)^2 + (x_2(t) - 7)^2 + u^2(t) \right) dt. \quad (3.22)$$

Inicialmente se comprueba que el sistema (3.21) sea completamente controlable:

$$\text{rank}(B, AB) = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Se obtienen las matrices del sistema linealizado (2.8),

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{y } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Recordamos que en el caso lineal cuadrático se tiene que $(A, B) = (\bar{A}, \bar{B})$. Consecuentemente el par (A, B) satisface el criterio de Kalman. Finalmente, la matriz W tiene la forma:

$$W = - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Al ser W simétrica positiva definida, y ambas matrices A y B satisfacen la condición de Kalman se confirma que se satisfacen las condiciones del Teorema 2.2. Por lo tanto, se puede esperar un comportamiento de turnpike en las soluciones del sistema (3.21).

Usando al Teorema 1.3, vemos que existe un sistema adjunto con $\psi_0 = -1$ y el hamiltoneano H tiene la forma:

$$H(x, \psi, -1, u) = \frac{1}{2} \left((x_1 - 2)^2 + (x_2 - 7)^2 + u^2 \right) + \psi_1(x_2) + \psi_2(u - x_1). \quad (3.24)$$

De (1.14) y (1.16) se obtiene que

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= x_1 + \psi_2 - 2, \\ \dot{\psi}_2 &= x_2 - \psi_1 - 7, \\ H_u &= \psi_2 - u = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Esto significa que $\bar{u} = \bar{\psi}_2$. Según el Teorema 2.2, las trayectorias óptimas se mantienen en un cierto intervalo $[\xi, 20 - \xi] \subset [0, 20]$. Dicho estado es la solución al problema de control óptimo estático. Para el presente ejemplo tenemos:

$$L(x, \lambda, u) = \frac{1}{2} \left((x_1 - 2)^2 + (x_2 - 7)^2 + u^2 \right) - \lambda_1 x_2 - \lambda_2 (u - x_1) = 0.$$

De donde se obtienen las derivadas parciales de L y se igualan a cero

$$\begin{aligned} L_{x_1} &= x_1 + \lambda_2 - 2 = 0, \\ L_{x_2} &= x_2 - \lambda_1 - 7 = 0, \\ L_u &= u - \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones están sujetas a la condición $f(x, u) = 0$, es decir;

$$\begin{aligned} x_2 &= 0, \\ u - x_1 &= 0. \end{aligned}$$

Tras realizar algunas operaciones algebraicas se obtiene como solución $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{u}) = ((1, 0), (-7, 1), 1)$.

Compruebamos que dicha solución minimiza a L . Usando el Teorema 2.1, tenemos:

$$\text{Hess } L \Big|_{((1,0),(-7,1),1)} = H_L((1,0),(-7,1),1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz, H_L es negativa definida. Además como $\nabla f_{x_1}(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{u}) = (0, 1, 0)^*$ se toma al primer h-vector tangencial de $f(x, u)$ es $h_1 = (\gamma_1, 0, \gamma_3)^*$. Para $\nabla f_{x_2}(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{u}) = (-1, 0, 1)^*$ se tiene el segundo h-vector tangencial de $f(x, u)$ como $h_2 = (0, \gamma_2, 0)^*$, con $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}$.

$$h_1^* H_L h_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ 0 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = (\gamma_1^2 + \gamma_3^2).$$

Como $(\gamma_1^2 + \gamma_3^2)$ es positivo se tiene que $h_1^* H_L h_1 > 0$ y similarmente

$$h_2^* H_L h_2 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma_2^2.$$

De donde $h_2^* H_L h_2 > 0$, lo cual comprueba que el punto $((1, 0), (-7, 1), 1)$ es en efecto un mínimo de f_0 sujeto a $f(x, u) = 0$, y por lo tanto éste es el turnpike de las soluciones óptimas.

Es importante remarcar que debido a la forma cuadrática de f_0 se esperaría que el mínimo estuviera localizado cerca de $\bar{x} = (2, 7)$, $\bar{u} = 0$, sin embargo, este punto no satisface la condiciones del problema estático.

Retornando al sistema (3.21) junto al sistema adjunto (3.25) se obtiene un nueva sistema a resolver

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \psi_2 \\ \dot{\psi}_1 = x_1 + \psi_2 - 2 \\ \dot{\psi}_2 = x_2 - \psi_1 - 2 \end{cases} \quad (3.26)$$

escrito de forma matricial $\dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}$:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Por ser éste un sistema lineal se puede obtener la solución exacta del sistema haciendo uso la matriz fundamental de $\hat{A}$ (es decir la matriz $e^{\hat{A}t}$). Así la solución de (3.27) tiene la forma

$$z(t) = e^{\hat{A}t} \left(z_0 + \int_0^t e^{-\hat{A}s} \hat{B} ds \right). \quad (3.28)$$

Usando las notaciones:

$$\begin{aligned}
 \tau &= \frac{1}{2}\sqrt{-1+2\sqrt{2}}, \\
 \eta &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}}, \\
 m &= \frac{-2+2\sqrt{2}-\sqrt{9-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{7}}, \\
 p &= \frac{-3\sqrt{9-4\sqrt{2}}+\sqrt{2}(14+\sqrt{9-4\sqrt{2}})}{14\sqrt{2+4\sqrt{2}}}, \\
 w &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{14}(1+2\sqrt{2})}, \\
 q &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{14}(-1+2\sqrt{2})}, \\
 h &= \omega(-1+\sqrt{2}),
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

se obtienen las funciones que forman la matriz fundamental del sistema $\dot{x} = Ax$ en forma de suma finita es decir

$$e^{\hat{A}t} = \alpha_0 I_4 + \alpha_1 \hat{A} + \alpha_2 \hat{A}^2 + \alpha_3 \hat{A}^3 \tag{3.30}$$

con:

$$\begin{aligned}
 \alpha_0(t) &= \frac{1}{2}e^{-\tau t} \cos(\eta t) + me^{-\tau t} \sin(\eta t) + \frac{1}{2}e^{\tau t} \cos(\eta t) + \frac{1}{2\sqrt{7}}e^{\tau t} \sin(\eta t), \\
 \alpha_1(t) &= -he^{-\tau t} \cos(\eta t) + pe^{-\tau t} \sin(\eta t) + he^{\tau t} \cos(\eta t) + pe^{\tau t} \sin(\eta t), \\
 \alpha_2(t) &= -\frac{1}{\sqrt{7}}e^{-\tau t} \sin(\eta t) + \frac{1}{\sqrt{7}}e^{-\tau t} \sin(\eta t), \\
 \alpha_3(t) &= we^{-\tau t} \cos(\eta t) + qe^{-\tau t} \sin(\eta t) - we^{\tau t} \cos(\eta t) + qe^{\tau t} \sin(\eta t).
 \end{aligned}$$

Reescribimos la suma (3.30) con las definiciones anteriores de la forma:

$$e^{\hat{A}t} = \alpha_0 I_4 + \alpha_1 \hat{A} + \alpha_2 \hat{A}^2 + \alpha_3 \hat{A}^3 = \begin{pmatrix} \alpha_0 - \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ -\alpha_1 - \alpha_3 & \alpha_0 & -\alpha_2 & \alpha_1 - \alpha_3 \\ \alpha_1 - 3\alpha_3 & 2\alpha_2 & \alpha_0 - \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_3 \\ -2\alpha_2 & \alpha_1 - 2\alpha_3 & -\alpha_1 & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Mediante (3.28) se obtiene

$$z(t) = e^{\hat{A}t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_1^0 \\ \psi_2^0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{-\hat{A}s} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} ds \right). \tag{3.31}$$

Perecería que z quedaría dependiendo no solamente de t sino de ψ_1^o y ψ_2^o , sin embargo, según las condiciones de transversalidad se debe de cumplir que $\psi(T = 20) = (0, 0)$, consecuentemente, $(\psi_1^o, \psi_2^o) = (0, 0)$. De donde tenemos en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{aligned} z_3(\psi_1^o, \psi_2^o) \Big|_{t=20} &= 0, \\ z_4(\psi_1^o, \psi_2^o) \Big|_{t=20} &= 0, \end{aligned} \quad (3.32)$$

con solución aproximada:

$$\begin{aligned} \psi_1^o &= -5.08769 + o(1), \\ \psi_2^o &= 1.41423 + o(1). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Ahora obtenemos con (3.28), una solución analítica de $z(t)$.

Las ecuaciones de (3.32) y de (3.28) se encuentran en detalle en (5.1) del Apéndice 1 usando las mismas definiciones de (3.29).

La figura 3.1 muestra la gráfica de estas funciones exactas en el intervalo de tiempo $[0, 20]$.

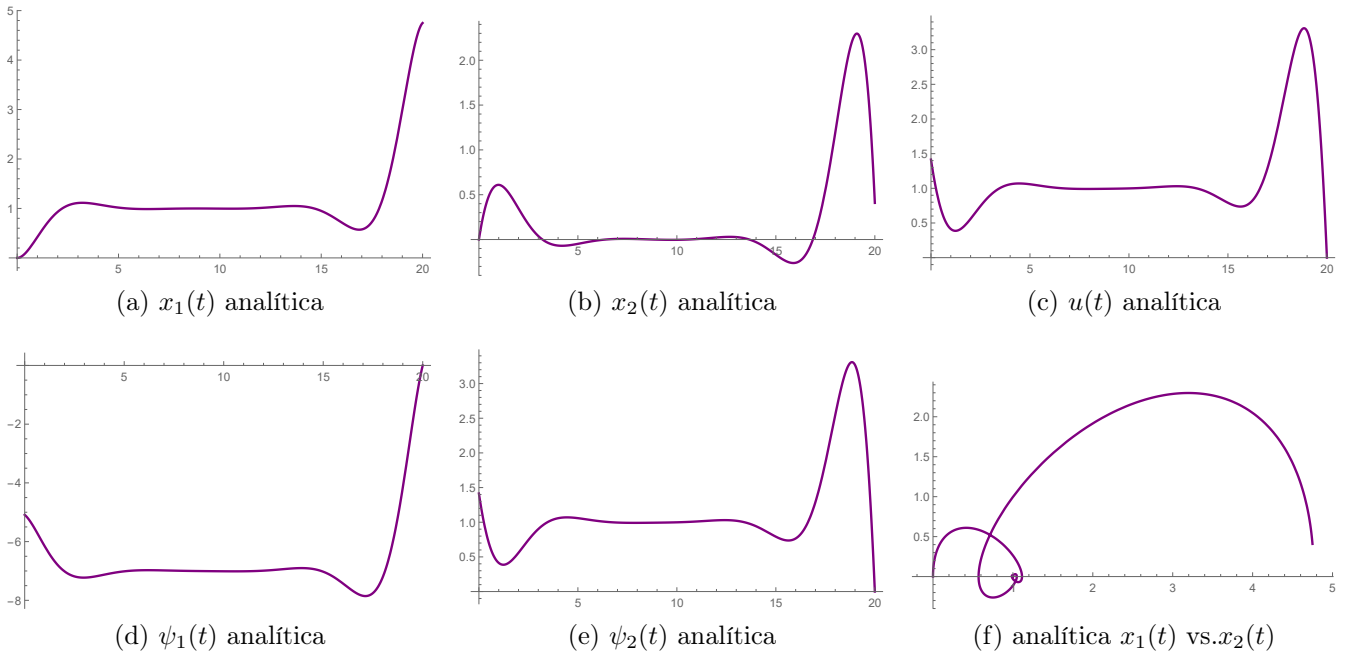


Figura 3.1: Soluciones analítica del caso lineal cuadrático en el intervalo $t \in [0, 20]$

Las trayectorias expuestas en la figura 3.1 son las soluciones óptimas del problema (3.21) que minimiza el funcional (3.22) en tiempo $T = 20$. Es importante resaltar que la función de control $\bar{u} = \bar{\psi}_2$ es óptima gracias a lo establecido en el principio máximo de Pontryagin.

Recordando la premisa de nuestro teorema principal (Teorema 2.2), que establece que las trayectorias óptimas deben de tener un turnpike (su trayectoria debe de mostrar un comportamiento

como el de la figura 2.1). Esto significa que debe existir un intervalo $[\xi, T - \xi]$ con $\xi \in \mathbb{R}$ dentro del cual la trayectoria optima oscila alrededor de la solución al problema estático resuelto hace unos pasos es decir el punto $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{u}) = ((1, 0), (-7, 1), 1)$.

Tras estudiar los datos se obtuvo que $\xi = 5$ por lo tanto el intervalo de turnpike es el intervalo $[5, 15]$. Dentro de este intervalos las soluciones se mantienen suficientemente cerca (una diferencia de aproximadamente ± 0.06) del estado fijo.

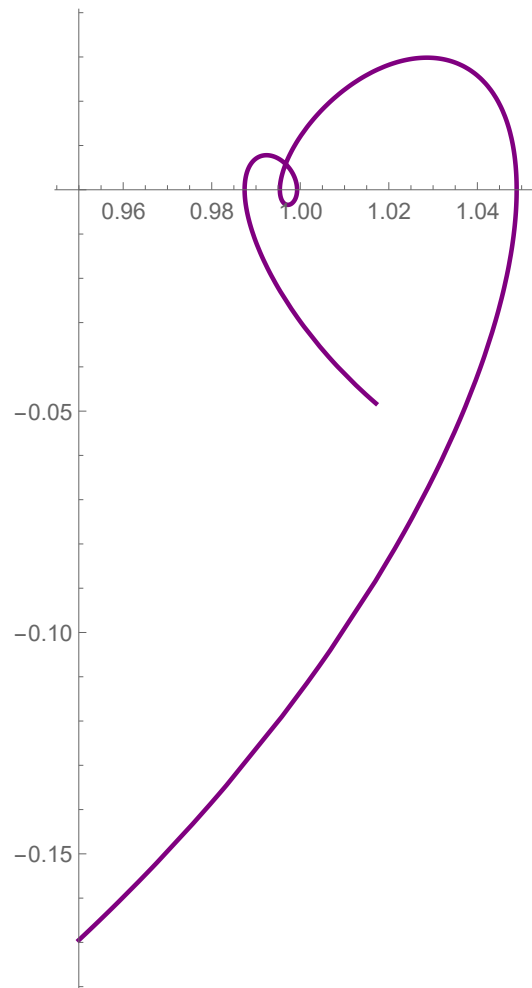


Figura 3.2: Grafica paramétrica de $(x_1(t), x_2(t))$ con $t \in [5, 15]$

Se aprecia esto al graficar (3.2) paramétricamente $x(t)$ en el intervalo de turnpike, donde se muestra el estado oscilatorio que toma la solución alrededor del estado $(1, 0)$.

3.1.1. Variación del Turnpike respecto del Tiempo

Recordamos que las soluciones que presentan la característica de turnpike constan de tres intervalos diferentes (Fig: 2.1). En el ejemplo se obtuvo un intervalo de turnpike en $[5, 15]$, es decir, $\xi = 5$. Este comportamiento se debe mantener mientras el intervalo de tiempo se suficientemente largo para que la solución mantenga esta propiedad.

Observamos que se obtiene una solución que solo depende de los parámetros finales $\psi(T) = (0, 0)$ para algún tiempo $T \in \mathbb{R}$. Se fue disminuyendo el valor de T y se fue resolviendo el sistema(3.32) para cada caso. Esto con la finalidad de ver si el valor de ξ cambia mientras se acortaba el intervalo de tiempo. Se observó que la longitud del intervalo de turnpike de la solución disminuía pero el valor de ξ se mantenía en 5.

En la figura 3.3 se exponen los valores de ξ encontrados al variar el valor de T .

Cuando el valor de T es igual a diez, en la trayectoria de $x_1(t)$ (que será la trayectoria en la cual nos enfocaremos por el momento) carece de un turnpike al solo acercarse al valor de 1 en tres puntos. Uno de ellos es el valor de tiempo igual a cinco. Dado que en las trayectorias anteriores este había sido donde se empezaba el turnpike.

Y se nota que para cualquier valor debajo de T menor que diez ya la trayectoria no se mantiene cerca del punto $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\psi})$. En la figura 3.4 se muestra la gráfica de las trayectorias de $x_1(t)$ en el intervalo de tiempo $t \in [0, T]$ con su respectivo valor de T .

Esta figura muestra claramente el encogimiento proporcional del turnpike mediante se reduce el tiempo total T . Mientras que en las ultimas dos gráficas $T = 10, 8$ carecen completamente del turnpike.

Valor de T	Valor calculado de ξ	Valor de $x_1(\xi)$	Valor de $x_1(T - \xi)$
19	5	1.0173	0.9499
18	5	1.0178	0.9498
17	5	1.0173	0.9499
16	5	1.0153	0.9305
15	5	1.0121	0.9513
14	5	1.0130	0.9502
13	5	1.0272	0.9467
12	5	1.0532	0.9392
11	5	1.0613	0.9389
10	No presente	-	-
8	No presente	-	-

Figura 3.3: Tabla de los valores extremales del Turnpike con T variado

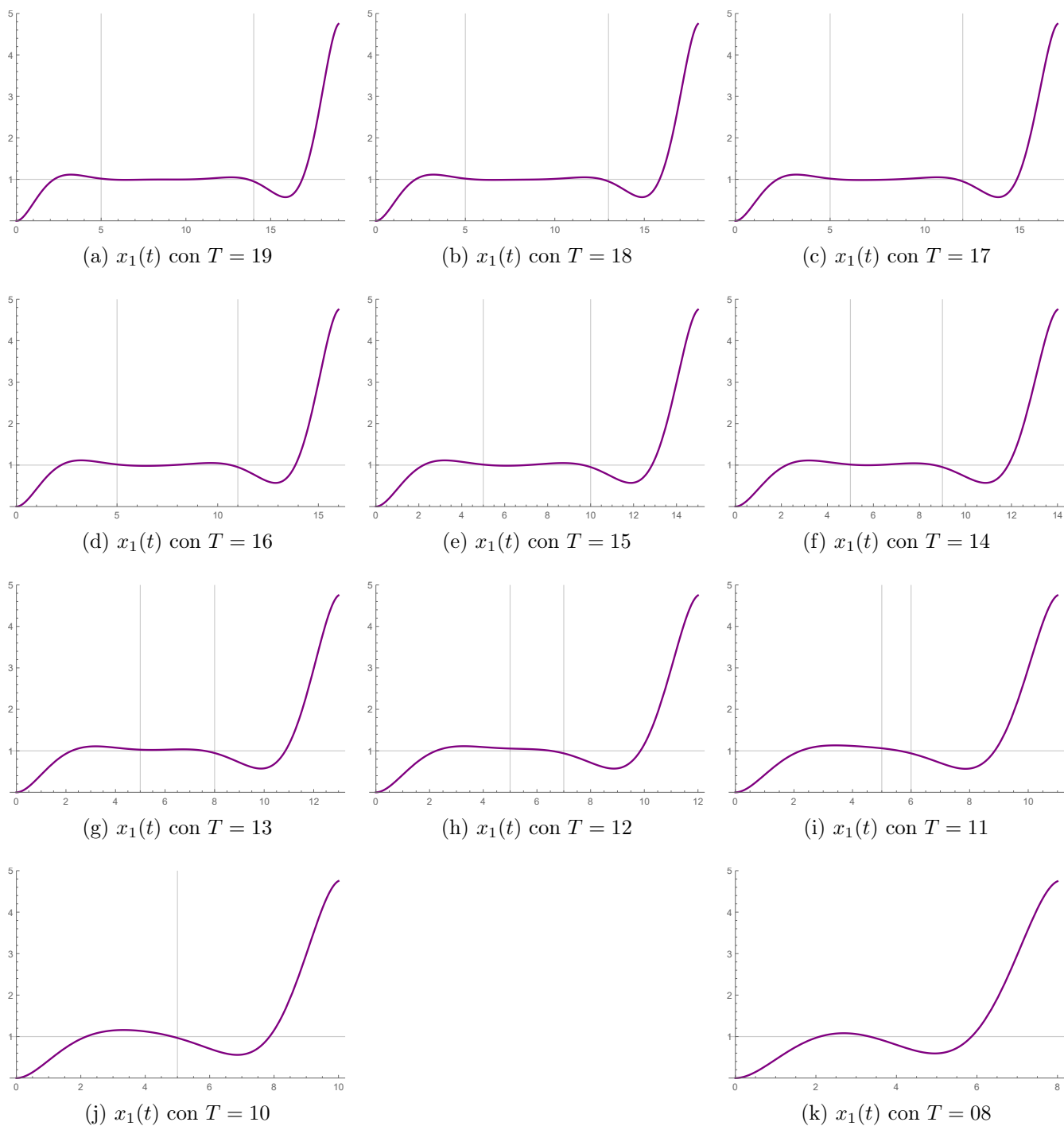


Figura 3.4: Soluciones del caso lineal cuadrático

3.1.2. Ecuación de Riccati

En esta sección revisamos los sistemas y conclusiones mencionadas en el Lema 2.6 con referencia al sistema (3.21), con la finalidad de fortalecer las conclusiones establecidas en el mismo.

El sistema (2.40) se convierte en:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

de donde se obtienen dos matrices simétricas, recordando (3.1), máxima y mínima (ver (2.3)). La ecuación (3.34) tiene como solución a las matrices hermitianas E_- y E_+ :

$$E_- = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sqrt{-1+2\sqrt{2}} & 1-\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & -\sqrt{-1+2\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad E_+ = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sqrt{-1+2\sqrt{2}} & 1-\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & \sqrt{-1+2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

La matriz E_- , ya que al tener eigenvalores $\{\frac{1}{2}((-1-\sqrt{2})\sqrt{-1+2\sqrt{2}}\pm 1)\}$, aproximados numéricamente $\{-2.13, -1.13\}$, que son negativos lo significa que es matriz simétrica negativa definida.

La matriz E_+ , ya que al tener eigenvalores $\{\frac{1}{2}((1+\sqrt{2})\sqrt{-1+2\sqrt{2}}\pm 1)\}$, aproximados numéricamente por $\{2.13, 1.13\}$, que son positivos lo significa que es matriz simétrica positiva definida.

Es importante notar que los eigenvalores de E_- son los negativos de E_+ .

Con las matrices E_- , E_+ y A , U , B , de (2.16) tenemos:

$$A + BU^{-1}B^*E_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{-1+2\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene eigenvalores $\{\frac{-\sqrt{-1+2\sqrt{2}}}{2} \pm \frac{i\sqrt{1+2\sqrt{2}}}{2}\}$. Como se expresa en el Lema 2.6, sus eigenvalores tienen partes reales negativas.

La matriz

$$A + BU^{-1}B^*E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{-1+2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

tiene eigenvalores $\{\frac{\sqrt{-1+2\sqrt{2}}}{2} \pm \frac{i\sqrt{1+2\sqrt{2}}}{2}\}$. Como se expresa en el Lema 2.6 tiene eigenvalores con partes reales positivas y además, son los negativos de los de la matriz $A + BU^{-1}B^*E_-$.

3.1.3. Resultado mediante un método numérico

Debido a la complejidad de algunos problemas reales, no siempre se puede obtener una solución exacta, como en sistemas de control no lineales o simplemente la obtención de la solución explícita es complicado.

En el caso cuando las soluciones del sistema presentan un comportamiento de turnpike (el sistema cumple con las condiciones del teorema principal teorema 1.1) se sabe que por el período de turnpike, intervalo de tiempo $[\xi, T - \xi]$ se mantienen cerca de un estado fijo. Un método simplificado cuya obtención es muy simple y tiene un costo de consulta insignificante pero cuya solución esta dentro de un margen de error de la solución real, puede ser mejor que la solución real.

Usando un método modificado del método numérico shooting, junto con un método de gradiente descendente, explicado en el siguiente capítulo, se obtuvieron los siguientes resultados del mismo problema lineal cuadrático anterior. Obteniendo los resultados mostrados en la figura 3.5.

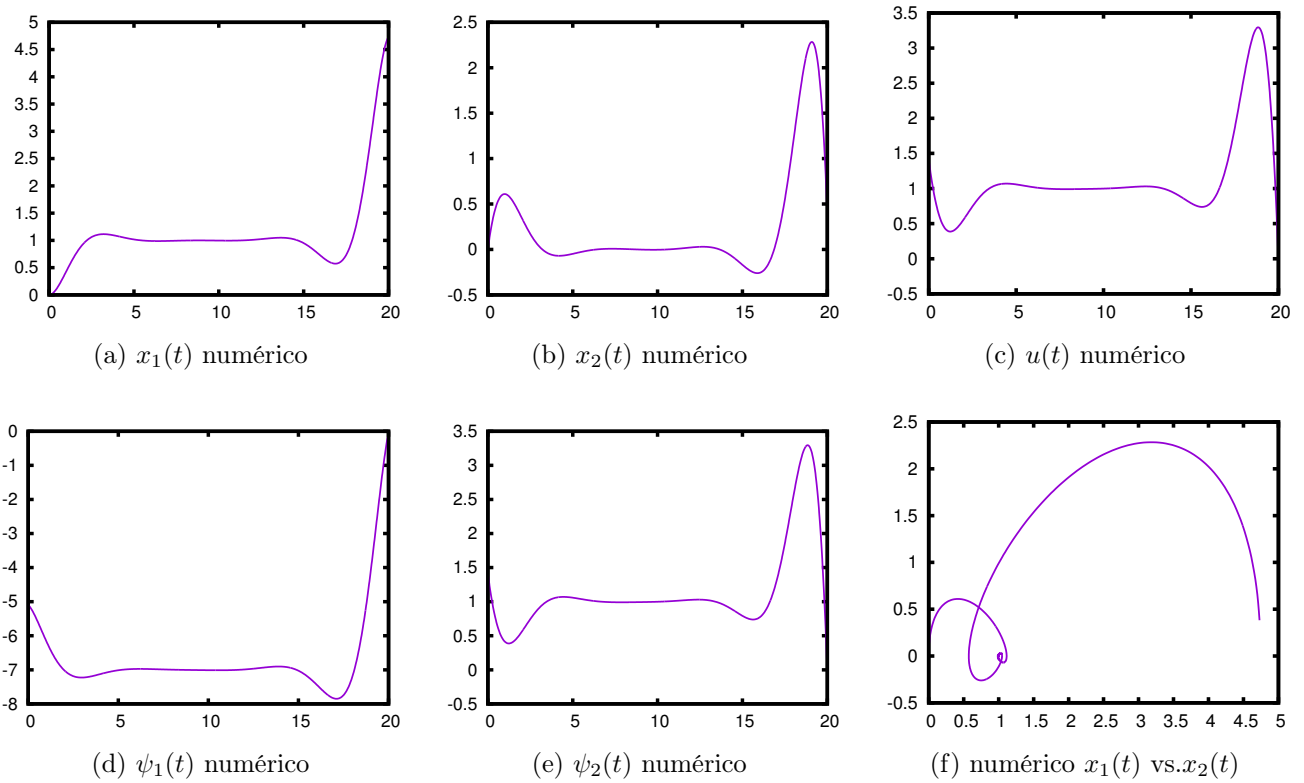


Figura 3.5: Soluciones del caso lineal cuadrático

Se puede apreciar la gran similitud de las soluciones numéricas con las analíticas. A partir de ellas, se calcula el error de las soluciones numéricas. De esta manera, podemos apreciar el error de dichas soluciones, y ver si en efecto son estimaciones viables de las soluciones analíticas. En la figura 3.6 muestra el error absoluto de las aproximaciones numéricas, la subfigura (a) muestra $|\bar{x}_1^{Real}(t) - \bar{x}_1^{Numerica}(t)|$.

El error absoluto se mantiene en un margen de 10^{-3} , lo cual significa que la convergencia de la aproximación numérica es bastante confiable. Además, gracias al teorema se sabe el comportamiento de la solución óptima en un cierto intervalo de tiempo lo que ayuda a realizar más métodos

numéricos simples para la obtención de solución.

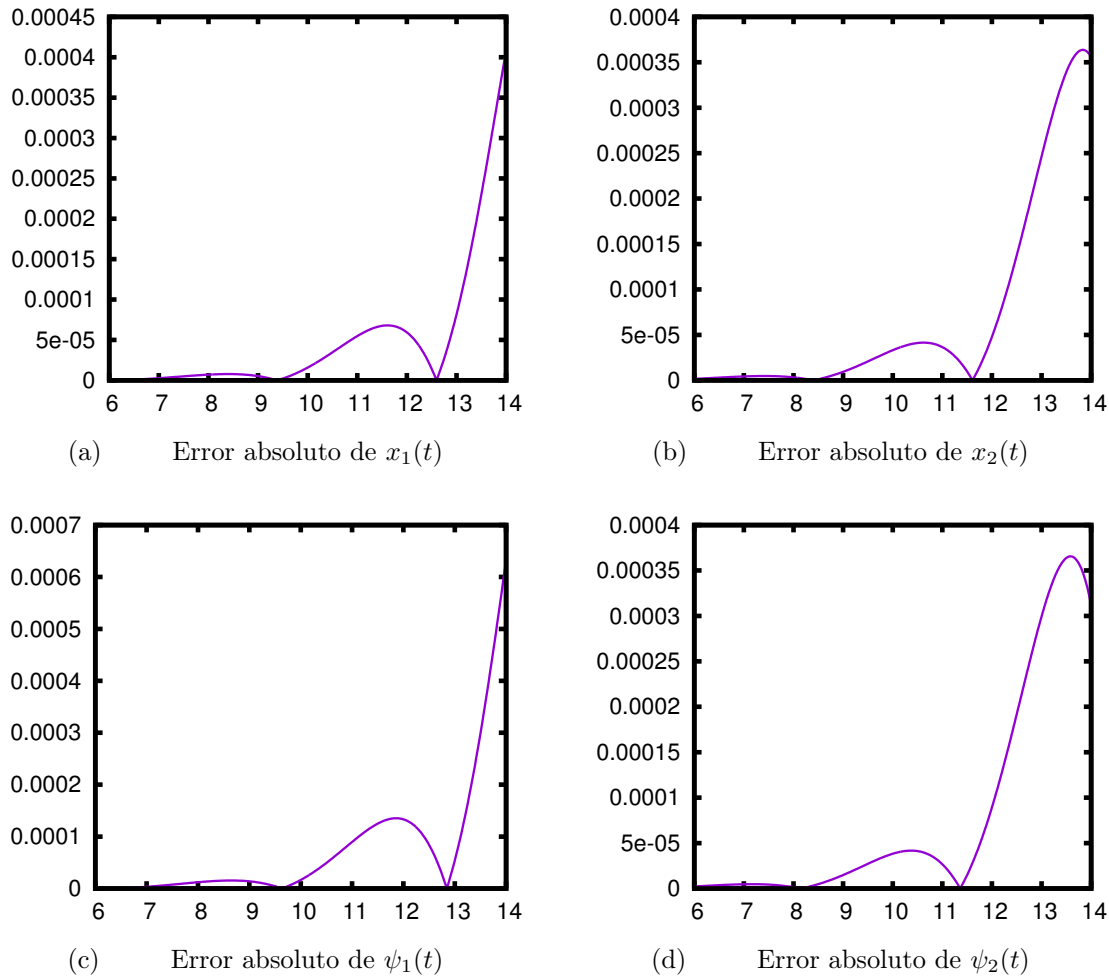


Figura 3.6: Error de las soluciones numéricas

3.2. Sistema controlable canónico con costo cuadrático

3.2.1. Ejemplo 2

Considere el problema de control óptimo con sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= u(t),\end{aligned}\tag{3.35}$$

se pretende llevar el estado inicial $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0)$ al estado final libre en un tiempo $T = 18$ y minimizando el funcional de costo

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^T \left((x_1 - 2)^2 + (x_2 - 7)^2 + u^2 \right) dt. \quad (3.36)$$

Según el Teorema 1.3 existe un sistema adjunto $\psi, \psi_0 = -1$ y un hamiltoniano H :

$$H(x, \psi, -1, u) = -\frac{1}{2} \left((x_1 - 2)^2 + (x_2 - 7)^2 + u^2 \right) + \psi_1(x_2) + \psi_2(u) \quad (3.37)$$

por (1.14) y (1.16) se obtiene que

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= x_1 - 2, \\ \dot{\psi}_2 &= x_2 - \psi_1 - 7, \\ H_u &= -u + \psi_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Esto significa que $\bar{u} = \bar{\psi}_2$. Por teorema 2.2, las trayectorias óptimas se mantienen en un cierto intervalo $[\xi, 18 - \xi] \in [0, 18]$. Dicho estado es la solución al problema de control óptimo estático. Para el presente ejemplo tenemos:

$$L(x, \lambda, u) = \frac{1}{2} \left((x_1 - 2)^2 + (x_2 - 7)^2 + u^2 \right) - \lambda_1 x_2 - \lambda_2 u = 0.$$

De donde se obtienen las derivadas parciales y se igualan a cero

$$\begin{aligned} L_{x_1} &= x_1 - 2 = 0, \\ L_{x_2} &= x_2 - 7 - \lambda_2 = 0, \\ L_u &= u - \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones estan sujetas a la condición $f(x, u) = 0$:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0, \\ u &= 0. \end{aligned}$$

Tras realizar algunas operaciones algebraicas se obtiene como solución $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{u}) = ((2, 0), (-7, 0), 0)$. Comprobamos que dicha solución es mínimo de L . Usando el Teorema 2.1, tenemos:

$$\text{Hess } L \Big|_{((2,0), (-7,0), 0)} = H_L \left((2, 0), (-7, 0), 0 \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\nabla f_{x_1}(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{u}) = (0, 1, 0)^*$ se toma al primer h-vector tangencial de $f(x, u)$ es $h_1 = (\gamma_1, 0, \gamma_3)^*$. Para $\nabla f_{x_2}(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{u}) = (0, 0, 1)^*$ se tiene el segundo h-vector tangencial de $f(x, u)$ como $h_2 = (\gamma_1, \gamma_2, 0)^*$, con $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}$.

$$h_1^* H_L h_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ 0 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = (\gamma_1^2 + \gamma_3^2).$$

Como $(\gamma_1^2 + \gamma_3^2)$ es positivo se tiene que $h_1^* H_L h_1 > 0$ y similarmente

$$h_2^* H_L h_2 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ 0 \end{pmatrix} = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2).$$

De donde $h_2^* H_L h_2 > 0$, lo cual comprueba que el punto $((2, 0), (-7, 0), 0)$ es en efecto un mínimo de f_0 sujeto a $f(x, u) = 0$, y por lo tanto tenemos que éste es el turnpike de las soluciones óptimas. Se comprueba que el sistema (3.35) cumple con las características del Teorema 2.2. Se obtienen las matrices del sistema linealizado (2.8):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verificamos que estas matrices cumplen con la condición de Kalman. Igual que en el ejemplo anterior al ser un problema lineal las matrices A y B son las mismas del sistema (3.35), además se cumple la condición del rango del teorema 1.2:

$$\text{rank}(B, AB) = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Finalmente la matriz W

$$W = - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Al ser W simétrica positiva definida, y ambas matrices A y B satisfacen la condición de Kalman se puede cumplir las condiciones del teorema 2.2, y se puede esperar un comportamiento de turnpike en las soluciones del sistema (3.35).

Debido a la forma cuadrática de f_0 se esperaría que el mínimo estuviera localizado cerca del punto $\bar{x} = (2, 7)$, $\bar{u} = 0$, sin embargo, este punto no satisface las condiciones del problema estático, igual que el ejemplo 1.

Retornando al sistema (3.35) ahora con el sistema adjunto (3.38) se obtiene un nuevo sistema a resolver:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \psi_2 \\ \dot{\psi}_1 = x_1 - 2 \\ \dot{\psi}_2 = x_2 - \psi_1 - 7 \end{cases} \quad (3.40)$$

este nuevo sistema $\dot{z} = \hat{A}z + (0, 0, -2, -7)^*$, escrito de forma matricial:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Al igual que (3.27), se puede encontrar la solución analítica usando (3.31). La solución analítica de (3.41) queda de la forma:

Definiendo:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ b &= \frac{1}{2}, \\ m &= \frac{1}{2\sqrt{3}}, \\ h &= \frac{(3 + \sqrt{3})}{12}, \\ w &= \frac{(3 - \sqrt{3})}{12}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

se obtienen las funciones que forman la matriz fundamental del sistema $\dot{x} = Ax$ en forma de suma finita, es decir,

$$e^{\hat{A}t} = \alpha_0 I_4 + \alpha_1 \hat{A} + \alpha_2 \hat{A}^2 + \alpha_3 \hat{A}^3 \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) &= (we^{at} + he^{-at})(\cos(bt) + \sin(bt)) + (he^{at} + we^{-at})(\cos(-bt) + \sin(-bt)), \\ \alpha_1(t) &= (me^{at} - me^{-at})(\cos(bt) + \sin(bt) + \cos(-bt) + \sin(-bt)) \\ \alpha_2(t) &= (me^{at} - me^{-at})(\cos(bt) + \sin(bt)) + (me^{-at} - me^{at})(\cos(-bt) + \sin(-bt)), \\ \alpha_3(t) &= (he^{-at} + we^{at})(\cos(bt) + \sin(bt)) - (he^{at} + we^{-at})(\cos(-bt) + \sin(-bt)) \end{aligned}$$

Reescribimos la suma (3.43) con las definiciones anteriores de la forma

$$e^{\hat{A}t} = \alpha_0 I_4 + \alpha_1 \hat{A} + \alpha_2 \hat{A}^2 + \alpha_3 \hat{A}^3 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 + \alpha_3 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ -\alpha_3 & \alpha_0 + \alpha_2 & -\alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_0 & \alpha_3 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_1 - \alpha_3 & \alpha_0 - \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Queda un sistema similar a (3.31):

$$z(t) = e^{\hat{A}t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_1^0 \\ \psi_2^0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{-\hat{A}s} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} ds \right). \quad (3.44)$$

Al igual que (3.31), parecería que z quedaría un sistema dependiente de t y además de ψ_1^o y ψ_2^o . Recordando que las condiciones de transversalidad imponen que se cumpla $\psi(18) = (0, 0)$ y por consecuente $(\psi_1^o, \psi_2^o) = (0, 0)$. Resultando en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{aligned} z_3(\psi_1^o, \psi_2^o) \Big|_{t=20} &= 0 \\ z_4(\psi_1^o, \psi_2^o) \Big|_{t=20} &= 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

con solución numérica aproximada¹:

$$\begin{aligned} \psi_1^o &= -3.5359 + o(1), \\ \psi_2^o &= 1.9999 + o(1). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Las soluciones analíticas obtenidas para este problema, haciendo incapie que las notaciones son aquellas definidas en (3.42), en lo referente a este ejercicio se encuentran en el Apéndice 1.

Mediante este método se obtienen las soluciones mostradas en la figura 3.7, igual que en el sistema (3.21) del ejemplo anterior se muestra el mismo fenómeno oscilatorio alrededor del estado estático (el punto $((2, 0), (-7, 0), 0)$). Como se esperaba del sistema al cumplir las condiciones del Teorema 2.2.

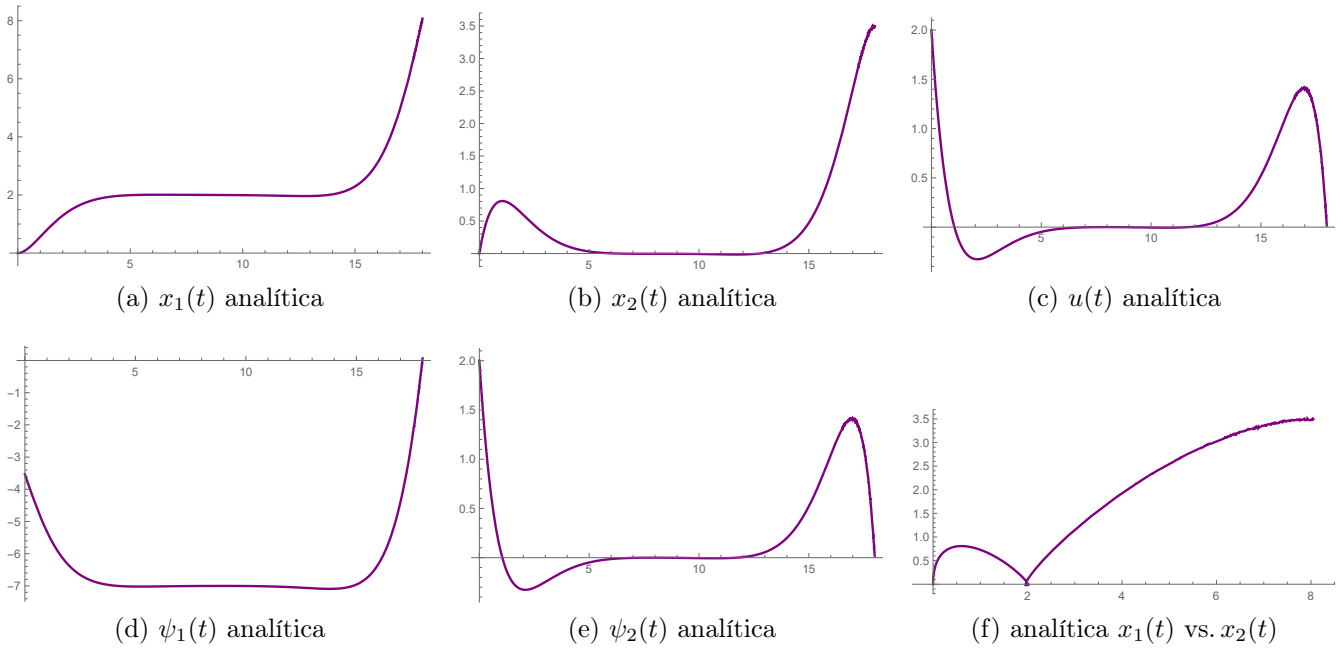


Figura 3.7: Soluciones analítica del sistema (3.35) en el intervalo $t \in [0, 18]$

Las soluciones óptimas del sistema muestran comportamiento turnpike, ya que sus trayectorias asimilar al de la figura 2.1. En la figura 3.8 se muestra la gráfica de $x_1(t)$ con $x_2(t)$ en el intervalo

¹Aproximación se realiza por truncamiento

$[\xi, T - \xi]$ que para este ejemplo es el intervalo $[4, 14]$. Dicha gráfica muestra la oscilación del sistema alrededor del punto $0, 2$, que es el valor del turnpike en para las trayectorias $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

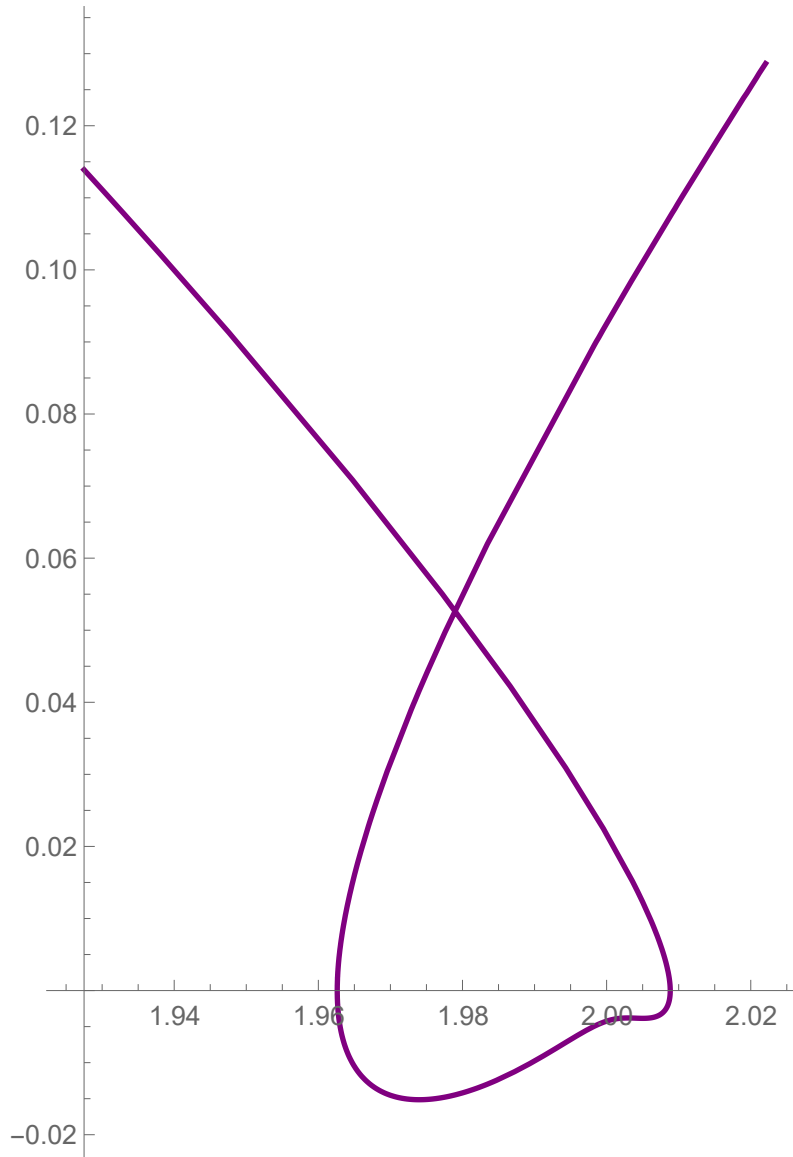


Figura 3.8: Gráfica paramétrica de $(x_1(t), x_2(t))$ con $t \in [4, 14]$

3.2.2. Variación del Turnpike Respecto del Tiempo

Se recuerda que las soluciones que presentan la característica de turnpike constan de tres intervalos diferentes (Fig: 2.1). En el ejemplo se obtuvo un intervalo de turnpike en $[4, 14]$, es decir, $\xi = 4$. Al igual que el ejemplo 1 se eligió el punto entero que se acerque al valor del turnpike en una aproximación de 10^{-1} en el intervalo $[\xi, T - \xi]$. Sin embargo, este comportamiento se debe mantener mientras el intervalo de tiempo sea suficientemente largo para que la solución mantenga

esta propiedad, como se demuestra la demostración del teorema 2.2.

Como la solución depende de los parámetros finales $\psi(T) = (0, 0)$ para algún tiempo $T \in \mathbb{R}$. Se fue disminuyendo el valor de T y se fue resolviendo el sistema (3.45) para cada caso. Esto con la finalidad de ver si el valor de ξ cambiaba mientras se acortaba el intervalo de tiempo. Se observó que la longitud del intervalo de turnpike de la solución disminuía pero el valor de ξ se mantenía en cuatro.

En la figura 3.9 se exponen los valores de ξ encontrados al variar el valor de T .

Cuando el valor de T es igual a ocho, en la trayectoria de $x_1(t)$ (que sera, de nuevo, la trayectoria en la cual nos enfocaremos por el momento) carece de un turnpike al solo acercarse al valor de 2 en dos puntos. Uno de ellos es el valor de tiempo igual a cuatro. Dado que en las trayectorias anteriores este habia sido donde se empezaba el turnpike.

Se nota que para cualquier valor debajo de T menor que diez ya la trayectoria carece de turnpike. En la figura 3.10 se muestra la gráfica de las trayectorias de $x_1(t)$ en el intervalos de tiempo $t \in [0, T]$ con su respectivo valor de T .

Esta figura muestra claramente la disminución proporcional del turnpike mediante se reduce el tiempo total T . Mientras que en las ultimas dos gráficas $T = 9$ y $T = 8$ carecen completamente del turnpike.

Se puede apreciar que en ambos problemas el turnpike siempre empezaba en el mismo valor de tiempo y se acortaba en el intervalo de tiempo $[\xi, T - \xi]$.

Valor de T	Valor calculado de ξ	Valor de $x_1(\xi)$	Valor de $x_1(T - \xi)$
18	4	1.92749	2.02205
17	4	1.92754	2.02066
16	4	1.9276	2.02062
15	4	1.92759	2.02073
14	4	1.92717	2.02113
13	4	1.92551	2.02222
12	4	1.92097	2.0245
11	4	1.91138	2.02785
10	4	1.89702	2.02893
9	No presente	-	-
8	No presente	-	-

Figura 3.9: Tabla de los valores extremales del Turnpike con T variado

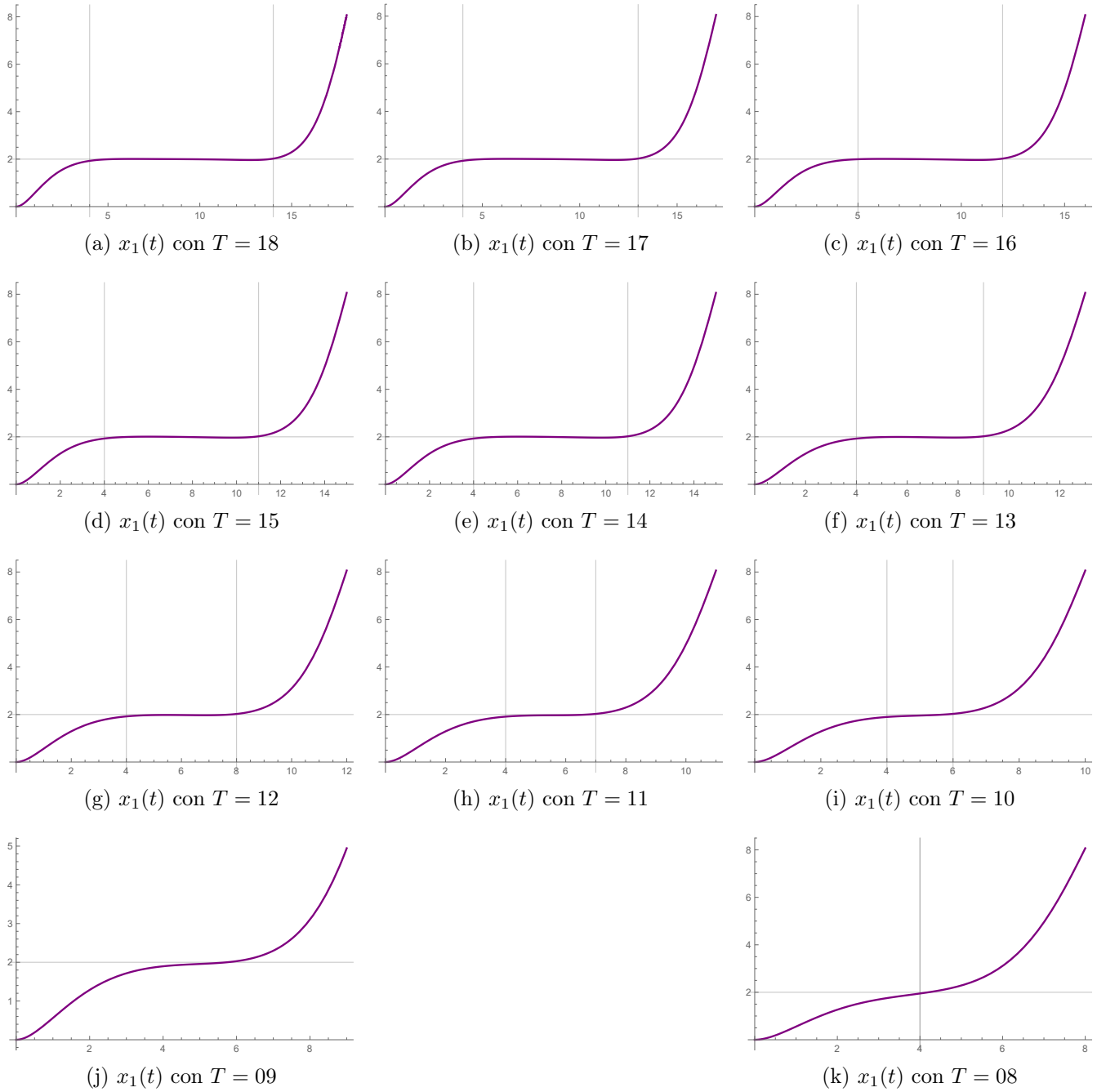


Figura 3.10: Soluciones del caso lineal cuadrático

3.2.3. Ecuación de Riccati del ejemplo 2

En esta sección revisamos los sistemas y conclusiones mencionadas en el Lema 2.6 con referencia al sistema (3.35), con la finalidad de fortalecer las conclusiones establecidas en el mismo.

El sistema (2.40), para este ejemplo, se reduce en:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

De donde se obtienen dos matrices simétricas, recordando (3.1), máxima y mínima (ver (2.3)). La ecuación (3.47) tiene como solución a las matrices hermitianas E_- y E_+ :

$$E_- = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad E_+ = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

La matriz E_- , ya que al tener eigenvalores $\{-\sqrt{3} \pm 1\}$, aproximados numéricamente $\{-0.73, -2.73\}$, que son negativos lo significa que es matriz negativa definida.

La matriz E_+ , ya que al tener eigenvalores $\{\sqrt{3} \pm 1\}$, aproximados numéricamente $\{0.73, 2.73\}$, que son positivos lo significa que es matriz positiva definida.

Es importante notar que los eigenvalores de E_- son los negativos de E_+ .

Con las matrices E_- , E_+ y A , U , B , de (2.16) tenemos:

$$A + BU^{-1}B^*E_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene eigenvalores $\{\frac{-\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}\}$. Como se expresa en el Lema 2.6, sus eigenvalores tienen partes reales negativas.

La matriz

$$A + BU^{-1}B^*E_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

tiene eigenvalores $\{\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}\}$. Como se expresa en el Lema 2.6, tiene eigenvalores con partes reales positivas y además, son los negativos de los de la matriz $A + BU^{-1}B^*E_-$.

3.2.4. Resultado con un método numérico

Como se había mencionado antes, la complejidad de algunos problemas dificultan la obtención de una solución analítica y surge la necesidad de obtener una solución numérica aproximada con un valor de consulta significativamente menor que la consulta de una analítica.

Si se sabe que las soluciones del sistema presentan un comportamiento de turnpike (el sistema cumple con las condiciones del teorema principal teorema 1.1) se sabe que por el periodo de turnpike, intervalo de tiempo $[\xi, T-\xi]$ se mantienen cerca de un estado fijo. Un método simplificado cuya obtención es muy simple y tiene un costo de consulta insignificante pero cuya solución esta dentro de un margen de error de la solución real, puede ser mejor que la solución real.

Usando el mismo método variado del método numérico shooting, junto con un método de gradiente descendente, explicado en el siguiente capítulo, se obtuvieron los siguientes resultados del problema lineal cuadrático del sistema (3.35). Obteniendo los resultados numéricos mostrados en la figura 3.11.

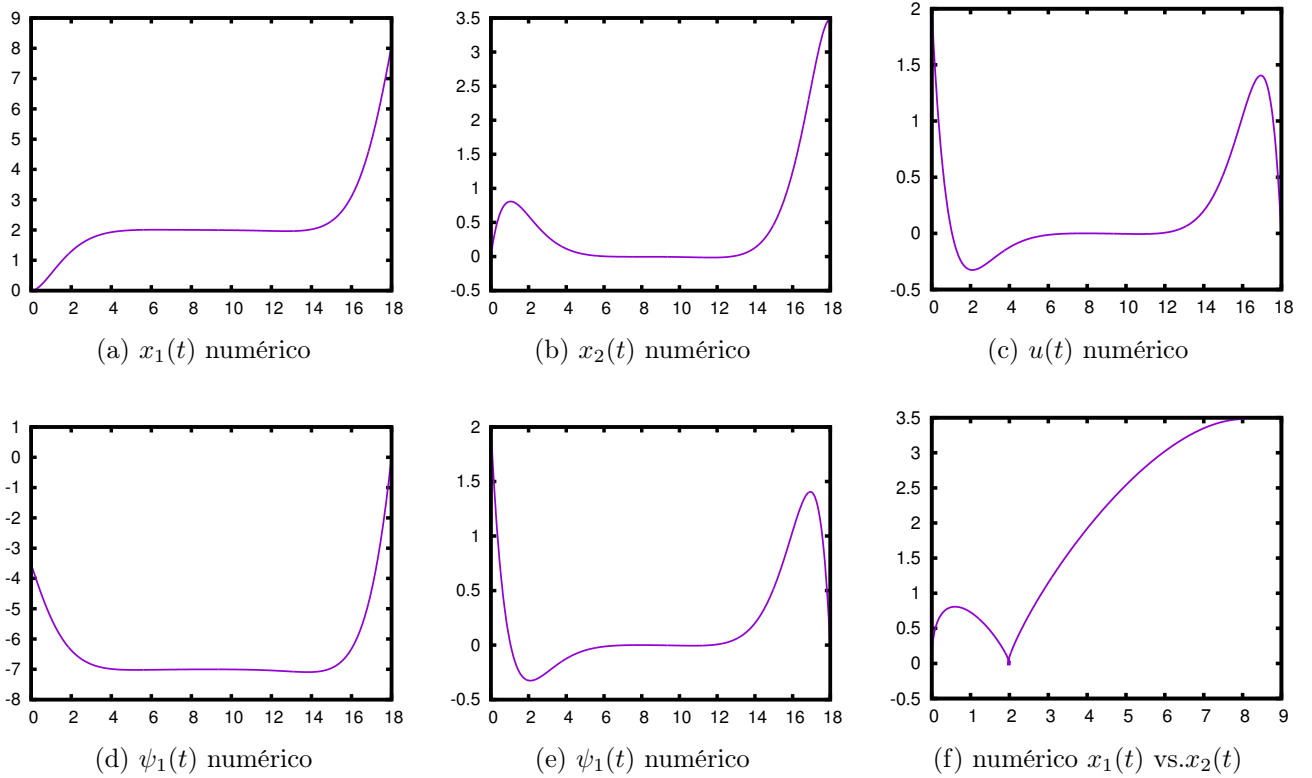


Figura 3.11: Soluciones numéricas del sistema (3.35)

La similitud entre las soluciones numéricas y analíticas es evidente, sin embargo, representamos un cálculo del error absoluto igual que en el ejemplo 1. En la figura 3.12 muestra el error absoluto de las aproximaciones numéricas, la subfigura (a) muestra $|x_1^{Real}(t) - x_1^{Numrica}(t)|$.

El error absoluto se mantiene en un margen de 10^{-2} , lo cual significa que la convergencia de la aproximación numérica es bastante confiable. Gracias al Teorema 2.2 se sabe el comportamiento de la solución óptima en un cierto intervalo de tiempo lo que ayuda a realizar más métodos numéricos simples para la obtención de solución.

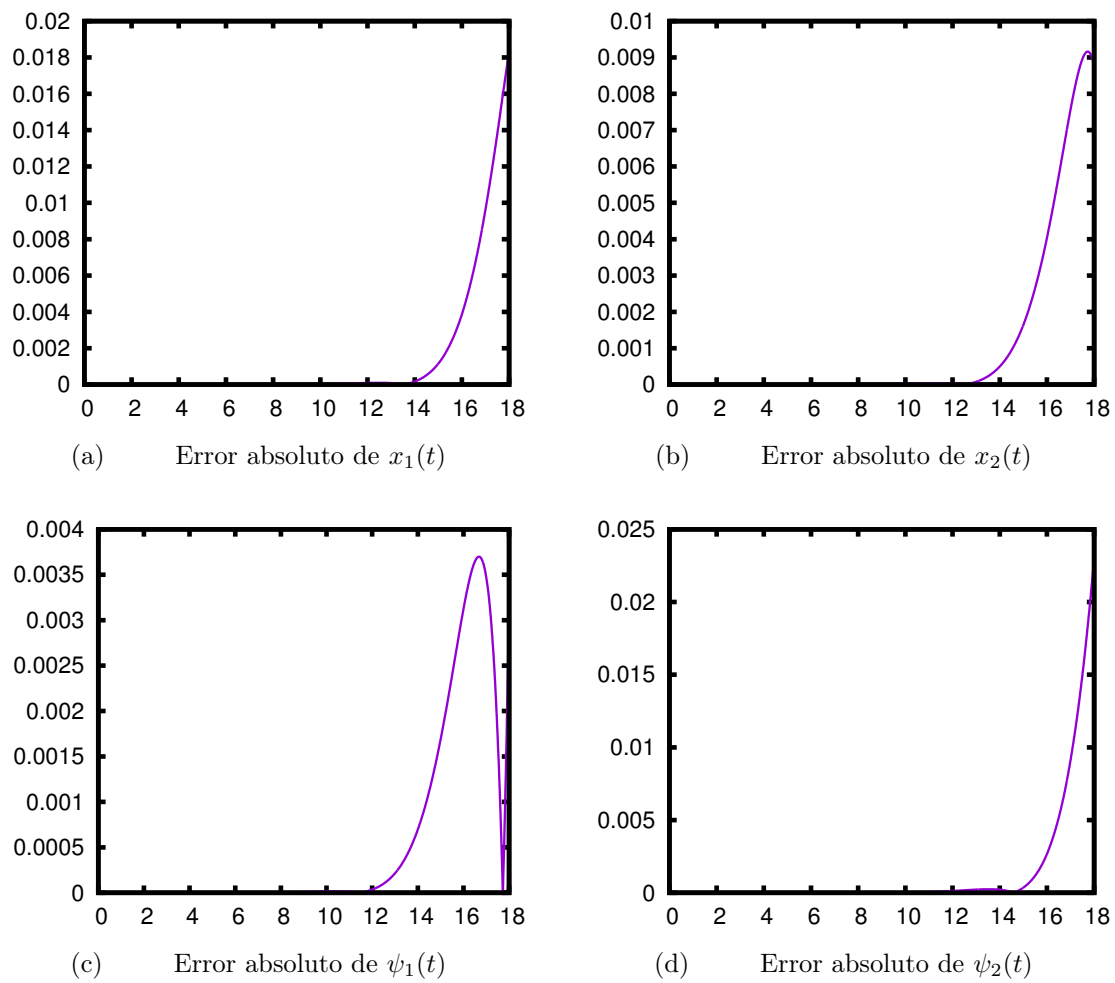


Figura 3.12: Error de las soluciones numéricas

Capítulo 4

Métodos Numéricos

Recordamos el problema típico de frontera (1.15) para el caso $n = 2$. Consideremos el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) \quad , \quad t \in [a, b] \subset \mathbb{R} \\ x_1(a) &= \alpha \quad , \quad x_1(b) = \beta\end{aligned}\tag{4.1}$$

con $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se asume la existencia de una solución única $X(t) \in \mathbb{R}^2$ al problema (4.1), es decir, $X_1(a) = \alpha$ y $X_2(b) = \beta$. Si se conociera el valor de la solución en $X_2(a)$, convirtiendo el problema en uno de valor inicial (Definición 1.14), se integraría numéricamente usando el método de Runge-Kutta y se obtendría una estimación numérica a la solución $X_n(t)$ que cumpla con la igualdad

$$X_n(t) = X(t) + \text{error}.\tag{4.2}$$

Para la obtención de la solución o estimación numérica en el los problemas como el de (4.1) se usa el método numérico llamado método de shooting.

4.1. Método de shooting

En esta sección se explicará el método de shooting clásico para el problema de frontera (4.1). Es importante mencionar que como se asume de antemano la existencia de una solución; se dice que el problema (4.1) está bien plantado. Para la integración numérica inicial se necesita saber los valores $X_1(a)$ y $X_2(a)$ de los cuales solo se tiene el primero, así que se debe de proponer algún valor (Π_1) para $X_2(a)$, este valor propuesto se le denomina ángulo de disparo (o shooting en inglés). Dicho de otra manera asignamos:

$$x_2(a) = \Pi_1.\tag{4.3}$$

Se puede entonces resolver el problema (4.1) como uno de valor inicial (1.14) resultando en una solución $Y(t) \in \mathbb{R}^2$, que por lo general $Y \neq X$ debido a que $Y_1(b) > \beta$. Se propone entonces otro valor

$$x_2(a) = \Pi_2 \quad (4.4)$$

que resulte en otra solución $W(t)$ al problema de valor inicial, y similar se obtiene que $W_1(b) \neq \beta$ por lo que $W(t) \neq X(t)$.

Se sigue modificando el valor Π_2 hasta obtener una aproximación a la solución $X(t)$, es decir, conseguir un valor Π_x tal que su solución numérica sea $X_1^n(b) \approx X_1(b) = \beta$, o, escrito de otra manera, $X_1^n(b) = X_1(b) + \delta_E$ donde $\delta_E \in \mathbb{R}$ es un error de aproximado muy pequeño. Esto es similar a tratar de obtener el cero de una ecuación de frontera como (1.12). Para encontrar el cero se puede recurrir a varios métodos numéricos, sin embargo en este trabajo se usará y enfocará únicamente en el método de gradiente descendiente, dicho método es un método de optimización; busca el mínimo o máximo de una función escalar. Para encontrar el zero de la ecuación de frontera (1.12) se minimizará la norma de (1.12).

4.1.1. Gradiente descendiente

El método de optimización de descendiente de gradiente (gradient descent) o gradiente descendiente es explicado en esta sección.

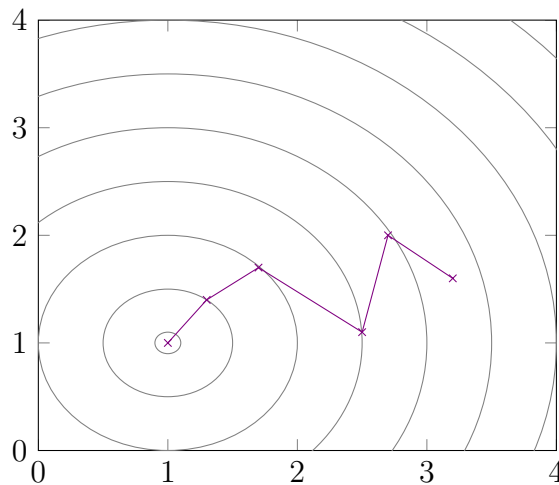


Figura 4.1: Visualización de optimización por método de gradiente

Dada una función escalar $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, se requiere encontrar un $x_m \in \mathbb{R}^n$ tal que $h(x_m)$ sea un mínimo local de h . Se busca un algoritmo que, empezando con algún estimado inicial de x y recursivamente cambia dicho valor, hasta que converga a un valor aproximado de x_m .

El gradiente $\nabla h = \frac{\partial h(x)}{\partial x}$ en la posición x apunta hacia la dirección de mayor incremento de la función. Lo que significa que $-\nabla h$, es la dirección de mayor descenso. Resultando en la actualización del valor de x como:

$$x_i^{nuevo} = x_i^{viejo} - \kappa \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} \quad ; \quad i = \{1, \dots, n\}$$

con $\kappa \in \mathbb{R}$ llamada la magnitud del paso, determina cuánto se avanza en una determinada dirección de descenso. Una de las grandes desventajas de este método es la determinación de una buena magnitud de paso. Debido a que si esta es demasiado grande el paso del gradiente puede alejarse de un mínimo encontrado. Esto es resuelto haciendo que este valor sea metódicamente actualizado en cada iteración. Figura 4.1 muestra un ejemplo del proceso de convergencia de este método.

Uno de los grandes inconvenientes del método de shooting es el definir un ángulo de disparo cercano al valor original. Tomando el ejemplo de (4.1) se requiere para facilitar la convergencia del método de shooting (que el numero de iteraciones sean mínimo) se debe de elegir un valor Π_1 cercano al valor $X_2(a)$. De lo contrario el método puede divergir o encontrar un mínimo local de $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ y no el global del intervalo.

4.2. Modificación del método de shooting

Recordemos el ejemplo (3.21), se obtiene un sistema de $\mathbb{R}^4$ una vez que el principio máximo de Pontryagin fue aplicado, existe un sistema del tipo

$$\dot{z} = F(z(x, \psi)) \quad (4.5)$$

con condiciones de frontera (en el caso de (3.21) son las condiciones de transversalidad $\psi(T) = (0, 0)$ y las iniciales $x(0) = (0, 0)$) escritas como

$$R(z(0), z(T)) = 0.$$

Es importante resaltar que de $z(x, \psi) \in \mathbb{R}^{2n}$ solo n variables desconocidas en los extremos del intervalo de tiempo $[t_0, T]$, estos son los valores del estado inicial ($x(t_0) \in \mathbb{R}^n$) que es dado a priori en los problemas. Los valores finales conocidos son aquellos del vector adjunto ($x(T) \in \mathbb{R}^n$) dados por las condiciones de transversalidad. Por lo general, los valores del vector $\psi(t_0)$ son los que, siguiendo la explicación del método de shooting mencionada antes, se modifican para obtener los valores finales siendo actualizados por algún método numérico. Una de las grandes complicaciones de los métodos de shooting es la inicialización de las variables iniciales desconocidas. Para garantizar la convergencia del método se requiere proporcionar una inicialización de $z(t = 0)$, lo suficientemente preciso para que el método de optimización usado converja. Una propuesta para facilitar este problema es realizada en [5]. Asumimos que estamos dentro del contexto de Teorema 2.2. Nuestra trayectoria, el control y el vector adjunto se encuentran exponencialmente cerca del estado fijo $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{\lambda})$; solución al problema de control óptimo estático. Además, por 2.70 sabemos que existen los puntos que se busca encontrar por medio de shooting, lo cual garantiza la existencia de

una solución. Esta cercanía no puede a priori ser usada directamente para asegurar la convergencia del método de shooting ya que la cercanía de las trayectorias no es asegurada sino hasta que la solución entre al turnpike en el tiempo $t = \xi$. Sin embargo la cercanía de las soluciones óptimas si es asegurada dentro del intervalo de turnpike $t \in [\xi, T - \xi]$. Se sugiere entonces una modificación a la implementación del método, e iniciar la implementación en la posición $t_m = \frac{T}{2}$. Como se asegura que esta posición esta contenida dentro de el intervalo de turnpike, es decir, $t_m \in [\xi, T - \xi]$. Se tiene una buena aproximación inicial que facilitara la convergencia del método.

El nuevo método de shooting implementado sera el siguiente. La variable desconocida $z(\frac{T}{2}) \in \mathbb{R}^{2n}$ se inicializara en el estado estático $(\hat{x}, \hat{\lambda})$, entonces:

- Se integra en sentido contrario el sistema (4.5) usando el método de integración que en esta trabajo se usará únicamente el de Runge-Kutta de cuarto orden, en el intervalo de tiempo $[0, \frac{T}{2}]$ para obtener un valor de $z(0)$;
- Se integra hacia adelante el sistema (4.5), con el mismo método de integración, en el intervalo de tiempo $[\frac{T}{2}, T]$ para obtener un valor de $z(T)$.

Queda entonces el ajuste que al punto $z(\frac{T}{2})$ que se debe realizar iterativamente, generalmente el método generalmete implementado para este ajuste es el método de Newton o alguna variación del mismo.

Este método es usado para modificar el valor $z(\frac{T}{2})$, regresando a la explicación de la nueva implementación del método de shooting. Cabe mencionar que en ambos problemas se toma como función escalar a minimizar como:

$$h(x, \psi) = \sqrt{(x_1(0) - x_1^o)^2 + (x_2(0) - x_2^o)^2 + (\psi_1(T) - \psi_1^T)^2 + (\psi_2(T) - \psi_2^T)^2}.$$

Se muestra en el capítulo anterior en las gráficas de error que el algoritmo es muy estable y converge fácilmente.

Observación: Otros trabajos ([5],[7]) que usan un método de shooting similar al usado dejan el trabajo de optimización a alguna variación del método de Newton de segundo orden (llamado expansión de Taylor de segundo orden), aproximando la función $z(x)$ a este orden alrededor del punto x_0 se obtiene:

$$z(x_0 + \delta_i) \approx z(x_0) + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} \delta_i + \delta_i^* H \delta_i$$

con H siendo la matriz hessiana y, intuitivamente, describe la curvatura parabólica n-dimensional local que aproxima la función. En el caso donde H es positiva definida esta parabola tiene un mínimo definido

$$\delta^m = -H^{-1} \frac{\partial z(x_0)}{\partial x}^*.$$

El método de Newton en cada iteración calcula la aproximación de segundo orden de z , salta al mínimo de esta parábola y vuelve a calcular de ahí. Este es similar al un variante del método del gradiente llamado gradiente covariante (ver [11]). Este método es usado para obtener aproximaciones numéricas de este tipo de sistemas en [17] y [5]. Debido a esto y por la sencillez del método numérico de gradiente se uso en este trabajo.

4.3. Pseudocódigo

Los algoritmos implementados para la obtención de las aproximaciones numéricas se presentan en forma de pseudocódigo, es importante recordar que para la integración numérica hacia delante y hacia atrás se usa el método de Runge-Kutta de cuarto orden.

En ambos ejemplos se toma el intervalo de tiempo $[0, T]$, discretizado en $N = 1000$ pequeños trozos

$$\Delta t = \frac{T - 0}{N},$$

$$t_i = 0 + \Delta t * i \quad , \quad i = \{0, N\},$$

el algoritmo mostrado es el usado para en el primer ejemplo, cuando existan condiciones de transversalidad, además de haber fijado N , se toma $\text{Maxit} = 100$, $\kappa_i = 0.0000505000682$ y $\epsilon_n = 10^{-2}$.

En el segundo ejemplo se toma $\text{Maxit} = 100$, $\kappa_i = 0.0000514253121201$ y $\epsilon_n = 10^{-2}$.

Algoritmo 1 Algoritmo con condiciones de transversalidad

Entorno: Sistema $z(t)$, Punto inicial $z^o = (\hat{x}, \hat{\lambda})^*$, Condiciones de frontera $R(x, \psi)$, Intervalo de tiempo $[t_0, T]$, Magnitud de paso $\kappa \in \mathbb{R}^{2n}$, Gradiente $\Delta_0 \in \mathbb{R}^{2n}$, Tolerancia $= \theta_0$, Máximo de iteraciones $= \text{Maxit}$

Salida: Aproximación numérica

```

1:
2: Procedimiento:
3:   i=0
4:    $z(\frac{T}{2}) = z^o$ 
5:    $\epsilon_n = \infty$ 
6:    $\Delta'_0 = 0$ 
7:
8:   mientras  $i < \text{maxiter}$  &  $\epsilon_n > \theta_0$  hacer
9:     Integrar(  $z(\frac{T}{2})$  ) en  $[\frac{T}{2}, T]$  hacia delante
10:    Integrar(  $z(\frac{T}{2})$  ) en  $[\frac{T}{2}, 0]$  hacia atras
11:    Calcular(  $\Delta_0$  )
12:
13:    para  $j = 1 : 2n$  hacer
14:
15:      si  $\Delta'_{oj} \Delta_{oj} > 0$  entonces
16:         $\kappa_j \leftarrow 1.2\kappa_j$ 
17:
18:      si no si  $\Delta'_{oj} \Delta_{oj} < 0$  entonces
19:         $\kappa_j \leftarrow 0.5\kappa_j$ 
20:         $\Delta_{oj} \leftarrow 0$ 
21:         $z_j(\frac{T}{2}) \leftarrow z_{j-1}(\frac{T}{2}) - \kappa_j \Delta_{oj} \text{sgn}(\Delta_{oj})$ 
22:       $\epsilon_n \leftarrow \|R(z_j(\frac{T}{2}))\|$ 

```

Capítulo 5

Apendice de Resultados

5.1. Ejemplo 1

Se muestran las soluciones analíticas del primer ejemplo:

Recordando que la solución (3.28), que es de la forma

$$z(t) = e^{\hat{A}t} \left(\begin{pmatrix} x_1^o \\ x_1^o \\ \psi_1^0 \\ \psi_2^0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{-\hat{A}\Omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} d\Omega \right).$$

y recordando que solo se sabe que $(x_1^o, x_2^o)^* = (0, 0)^*$ entonces queda las soluciones de la forma:

$$\begin{aligned} x_1(t) = & \frac{1}{14} e^{-t\tau} \left((7(1 + e^{2t\tau}) \cos[t\eta] - (\sqrt{7}e^{2t\tau} - 2(\sqrt{7} + 7m)) \sin[t\eta]) \right. \\ & \left(\frac{1}{\eta^2 + \tau^2} e^{-t\tau} (-4e^{t\tau}(q\eta + w\tau) + ((-\sqrt{7} + 2q + e^{2t\tau}(\sqrt{7} + 2q))\eta \right. \\ & + 2(1 + e^{2t\tau})w\tau) \cos[t\eta] + (2(-1 + e^{2t\tau})w\eta - (\sqrt{7} - 2q \\ & + e^{2t\tau}(\sqrt{7} + 2q))\tau) \sin[t\eta]) + x_1^o) + 14((-1 + e^{2t\tau})h \cos[t\eta] \\ & + (1 + e^{2t\tau})p \sin[t\eta]) \left(\frac{1}{7(\eta^2 + \tau^2)} e^{-t\tau} (98e^{t\tau}(p\eta - q\eta - (h + w)\tau) \right. \\ & + ((2\sqrt{7} - 49p + 49q + e^{2t\tau}(-2\sqrt{7} - 49p + 49q))\eta + 49(1 + e^{2t\tau}) \\ & (h + w)\tau) \cos[t\eta] + (49(-1 + e^{2t\tau})h\eta + 49(-1 + e^{2t\tau})w\eta + (2\sqrt{7} \\ & - 49p + e^{2t\tau}(2\sqrt{7} + 49p - 49q) + 49q)\tau) \sin[t\eta]) + x_2^o) + 14((-1 \\ & + e^{2t\tau})w \cos[t\eta] - (1 + e^{2t\tau})q \sin[t\eta]) \left(\frac{1}{7(\eta^2 + \tau^2)} e^{-t\tau} (e^{t\tau} \right. \\ & ((\sqrt{7} + 14m + 98p + 98q)\eta + 98(-h + w)\tau) - ((-\sqrt{7} + 49p + 49q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e^{2t\tau} (2\sqrt{7} + 14m + 49p + 49q)) \eta - 7(1 + 7h + e^{2t\tau}(-1 + 7h - 7w) \\
& - 7w)\tau) \text{Cos}[t\eta] + (7(-1 - 7h + e^{2t\tau}(-1 + 7h - 7w) + 7w) \eta + (\sqrt{7} \\
& - 49p - 49q + e^{2t\tau} (2\sqrt{7} + 14m + 49p + 49q)) \tau) \text{Sin}[t\eta]) + \psi_1^0) + \\
& 2\sqrt{7}(-1 + e^{2t\tau}) \text{Sin}[t\eta] \left(\frac{1}{2(\eta^2 + \tau^2)} e^{-t\tau} (e^{t\tau} ((\sqrt{7} + 14m - 8p) \eta \right. \\
& + 8h\tau) - ((\sqrt{7} + 2e^{2t\tau}(7m - 2p) - 4p) \eta + (-7 + 4h + e^{2t\tau}(7 + 4h)) \tau) \text{Cos}[t\eta] \\
& \left. - ((7 - 4h + e^{2t\tau}(7 + 4h)) \eta + (\sqrt{7} - 4p + e^{2t\tau}(-14m + 4p)) \tau) \text{Sin}[t\eta]) + \psi_2^0) \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2(t) = & \frac{1}{14} e^{-2t\tau} \left(-\frac{1}{\eta^2 + \tau^2} 14((-1 + e^{2t\tau})(h - w) \text{Cos}[t\eta] + (1 + e^{2t\tau})(p \right. \\
& + q) \text{Sin}[t\eta]) (-4e^{t\tau} q\eta - 4e^{t\tau} w\tau + ((-\sqrt{7} + 2q + e^{2t\tau}(\sqrt{7} + 2q)) \eta \\
& + 2(1 + e^{2t\tau}) w\tau) \text{Cos}[t\eta] - 2w\eta \text{Sin}[t\eta] + 2e^{2t\tau} w\eta \text{Sin}[t\eta] - \sqrt{7}\tau \text{Sin}[t\eta] \\
& - \sqrt{7}e^{2t\tau} \tau \text{Sin}[t\eta] + 2q\tau \text{Sin}[t\eta] - 2e^{2t\tau} q\tau \text{Sin}[t\eta] + e^{t\tau}(\eta^2 + \tau^2) x_1^0) + \\
& e^{t\tau} (7(1 + e^{2t\tau}) \text{Cos}[t\eta] + (\sqrt{7}e^{2t\tau} + 14m) \text{Sin}[t\eta]) \left(\frac{1}{7(\eta^2 + \tau^2)} e^{-t\tau} (98e^{t\tau} \right. \\
& (p\eta - q\eta - (h + w)\tau) + ((2\sqrt{7} - 49p + 49q + e^{2t\tau}(-2\sqrt{7} - 49p + 49q)) \eta \\
& + 49(1 + e^{2t\tau})(h + w)\tau) \text{Cos}[t\eta] + (49(-1 + e^{2t\tau}) h\eta + 49(-1 + e^{2t\tau}) w\eta \\
& + (2\sqrt{7} - 49p + e^{2t\tau}(2\sqrt{7} + 49p - 49q) + 49q) \tau) \text{Sin}[t\eta]) + x_2^0) - 2\sqrt{7}e^{t\tau} \\
& (-1 + e^{2t\tau}) \text{Sin}[t\eta] \left(\frac{1}{7(\eta^2 + \tau^2)} e^{-t\tau} (e^{t\tau} ((\sqrt{7} + 14m + 98p + 98q) \eta \right. \\
& + 98(-h + w)\tau) - ((-\sqrt{7} + 49p + 49q + e^{2t\tau}(2\sqrt{7} + 14m + 49p + 49q)) \eta \\
& - 7(1 + 7h + e^{2t\tau}(-1 + 7h - 7w) - 7w)\tau) \text{Cos}[t\eta] + (7(-1 - 7h + e^{2t\tau}(-1 \\
& + 7h - 7w) + 7w)\eta + (\sqrt{7} - 49p - 49q + e^{2t\tau}(2\sqrt{7} + 14m + 49p + 49q)) \tau) \\
& \text{Sin}[t\eta]) + \psi_1^0) - \frac{1}{\eta^2 + \tau^2} 7((-1 + e^{2t\tau})(h + w) \text{Cos}[t\eta] + (1 + e^{2t\tau})(p \\
& - q) \text{Sin}[t\eta]) (-\sqrt{7}e^{t\tau} \eta - 14e^{t\tau} m\eta + 8e^{t\tau} p\eta - 8e^{t\tau} h\tau + ((\sqrt{7} + 2e^{2t\tau} \\
& (7m - 2p) - 4p)\eta + (-7 + 4h + e^{2t\tau}(7 + 4h)) \tau) \text{Cos}[t\eta] + 7\eta \text{Sin}[t\eta] \\
& + 7e^{2t\tau} \eta \text{Sin}[t\eta] - 4h\eta \text{Sin}[t\eta] + 4e^{2t\tau} h\eta \text{Sin}[t\eta] + \sqrt{7}\tau \text{Sin}[t\eta] \\
& \left. - 14e^{2t\tau} m\tau \text{Sin}[t\eta] - 4p\tau \text{Sin}[t\eta] + 4e^{2t\tau} p\tau \text{Sin}[t\eta] - 2e^{t\tau}(\eta^2 + \tau^2) \psi_2^0) \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_1(t) = & \frac{1}{14} e^{-2t\tau} \left(\frac{1}{\eta^2 + \tau^2} 14((-1 + e^{2t\tau})(h + 3w) \text{Cos}[t\eta] + (1 + e^{2t\tau})(p \right. \\
& - 3q) \text{Sin}[t\eta]) (-4e^{t\tau} q\eta - 4e^{t\tau} w\tau + ((-\sqrt{7} + 2q + e^{2t\tau}(\sqrt{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2q))\eta + 2(1 + e^{2t\tau})w\tau) \cos[t\eta] - 2w\eta \sin[t\eta] + 2e^{2t\tau}w\eta \sin[t\eta] \\
& - \sqrt{7}\tau \sin[t\eta] - \sqrt{7}e^{2t\tau}\tau \sin[t\eta] + 2q\tau \sin[t\eta] - 2e^{2t\tau}q\tau \sin[t\eta] \\
& + e^{t\tau}(\eta^2 + \tau^2)x_1^o) + 4\sqrt{7}e^{t\tau}(-1 + e^{2t\tau})\sin[t\eta] \left(\frac{1}{7(\eta^2 + \tau^2)}e^{-t\tau}(98e^{t\tau} \right. \\
& (p\eta - q\eta - (h + w)\tau) + ((2\sqrt{7} - 49p + 49q + e^{2t\tau}(-2\sqrt{7} - 49p + 49q))\eta \\
& + 49(1 + e^{2t\tau})(h + w)\tau) \cos[t\eta] + (49(-1 + e^{2t\tau})h\eta + 49(-1 + e^{2t\tau})w\eta \\
& + (2\sqrt{7} - 49p + e^{2t\tau}(2\sqrt{7} + 49p - 49q) + 49q)\tau) \sin[t\eta]) + x_2^o) + e^{t\tau}(7 \\
& (1 + e^{2t\tau}) \cos[t\eta] - (\sqrt{7}e^{2t\tau} - 2(\sqrt{7} + 7m)) \sin[t\eta]) \left(\frac{1}{7(\eta^2 + \tau^2)}e^{-t\tau} \right. \\
& (e^{t\tau}((\sqrt{7} + 14m + 98p + 98q)\eta + 98(-h + w)\tau) - ((-\sqrt{7} + 49p + 49q \\
& + e^{2t\tau}(2\sqrt{7} + 14m + 49p + 49q))\eta - 7(1 + 7h + e^{2t\tau}(-1 + 7h - 7w) - 7w)\tau) \\
& \cos[t\eta] + (7(-1 - 7h + e^{2t\tau}(-1 + 7h - 7w) + 7w)\eta + (\sqrt{7} - 49p - 49q + e^{2t\tau} \\
& (2\sqrt{7} + 14m + 49p + 49q))\tau) \sin[t\eta]) + \psi_1^0) + 14e^{t\tau}((-1 + e^{2t\tau})(h - w) \cos[t\eta] \\
& + (1 + e^{2t\tau})(p + q) \sin[t\eta]) \left(\frac{1}{2(\eta^2 + \tau^2)}e^{-t\tau}(e^{t\tau}((\sqrt{7} + 14m - 8p)\eta + 8h\tau) \right. \\
& - ((\sqrt{7} + 2e^{2t\tau}(7m - 2p) - 4p)\eta + (-7 + 4h + e^{2t\tau}(7 + 4h))\tau) \cos[t\eta] - ((7 \\
& - 4h + e^{2t\tau}(7 + 4h))\eta + (\sqrt{7} - 4p + e^{2t\tau}(-14m + 4p))\tau) \sin[t\eta]) + \psi_2^0) \Big).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_2(t) &= \frac{1}{14}e^{-t\tau} \left(-4\sqrt{7}(-1 + e^{2t\tau}) \sin[t\eta] \left(\frac{1}{\eta^2 + \tau^2}e^{-t\tau}(-4e^{t\tau}(q\eta + w\tau) \right. \right. \\
& + ((-\sqrt{7} + 2q + e^{2t\tau}(\sqrt{7} + 2q))\eta + 2(1 + e^{2t\tau})w\tau) \cos[t\eta] + (2(-1 \\
& + e^{2t\tau})w\eta - (\sqrt{7} - 2q + e^{2t\tau}(\sqrt{7} + 2q))\tau) \sin[t\eta]) + x_1^o) + 14((-1 \\
& + e^{2t\tau})(h + 2w) \cos[t\eta] + (1 + e^{2t\tau})(p - 2q) \sin[t\eta]) \left(\frac{1}{7(\eta^2 + \tau^2)}e^{-t\tau} \right. \\
& (98e^{t\tau}(p\eta - q\eta - (h + w)\tau) + ((2\sqrt{7} - 49p + 49q + e^{2t\tau}(-2\sqrt{7} - 49p \\
& + 49q))\eta + 49(1 + e^{2t\tau})(h + w)\tau) \cos[t\eta] + (49(-1 + e^{2t\tau})h\eta + 49(-1 \\
& + e^{2t\tau})w\eta + (2\sqrt{7} - 49p + e^{2t\tau}(2\sqrt{7} + 49p - 49q) + 49q)\tau) \sin[t\eta]) + x_2^o) \\
& + 14((-1 + e^{2t\tau})h \cos[t\eta] - (1 + e^{2t\tau})p \sin[t\eta]) \left(\frac{1}{7(\eta^2 + \tau^2)}e^{-t\tau}(e^{t\tau} \right. \\
& ((\sqrt{7} + 14m + 98p + 98q)\eta + 98(-h + w)\tau) - ((-\sqrt{7} + 49p + 49q + e^{2t\tau} \\
& (2\sqrt{7} + 14m + 49p + 49q))\eta - 7(1 + 7h + e^{2t\tau}(-1 + 7h - 7w) - 7w)\tau) \cos[t\eta] \\
& + (7(-1 - 7h + e^{2t\tau}(-1 + 7h - 7w) + 7w)\eta + (\sqrt{7} - 49p - 49q + e^{2t\tau}(2\sqrt{7} \\
& + 14m + 49p + 49q))\tau) \sin[t\eta]) + \psi_1^0) + (7(1 + e^{2t\tau}) \cos[t\eta] + (\sqrt{7}e^{2t\tau}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 14m) \text{Sin}[t\eta]) \left(\frac{1}{2(\eta^2 + \tau^2)} e^{-t\tau} (e^{t\tau} ((\sqrt{7} + 14m - 8p) \eta + 8h\tau) \right. \\
& - ((\sqrt{7} + 2e^{2t\tau}(7m - 2p) - 4p) \eta + (-7 + 4h + e^{2t\tau}(7 + 4h)) \tau) \text{Cos}[t\eta] - (\\
& \left. (7 - 4h + e^{2t\tau}(7 + 4h)) \eta + (\sqrt{7} - 4p + e^{2t\tau}(-14m + 4p)) \tau) \text{Sin}[t\eta]) + \psi_2^0 \right).
\end{aligned}$$

(3.32) describe el proceso para obtener los valores de las incógnitas (ψ_1^0, ψ_2^0) , en el cual (3.32) es un sistema 2×2 que hay que resolver. Este sistema en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} \varsigma_{11} & \varsigma_{12} \\ \varsigma_{21} & \varsigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^0 \\ \psi_2^0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

donde los valres de la matriz $\varsigma \in \mathbb{R}$ de dimensión 2×2 son

$$\begin{aligned}
\varsigma_{11} &= \frac{1}{14} e^{-40\tau} (e^{20\tau} (7(1 + e^{40\tau}) \text{Cos}[20\eta] - (\sqrt{7}e^{40\tau} - 2(\sqrt{7} + 7m)) \text{Sin}[20\eta])) , \\
\varsigma_{12} &= \frac{1}{14} e^{-40\tau} (14e^{20\tau} ((-1 + e^{40\tau})(h - w) \text{Cos}[20\eta] + (1 + e^{40\tau})(p + q) \text{Sin}[20\eta])) , \\
\varsigma_{21} &= \frac{1}{14} e^{-20\tau} (14((1 - e^{40\tau}) h \text{Cos}[20\eta] - (1 + e^{40\tau}) p \text{Sin}[20\eta])) , \\
\varsigma_{22} &= \frac{1}{14} e^{-20\tau} ((7(1 + e^{40\tau}) \text{Cos}[20\eta] + (\sqrt{7}e^{40\tau} + 14m) \text{Sin}[20\eta])) ,
\end{aligned}$$

Los valres de la matriz $\delta \in \mathbb{R}$ de dimensión 2×1 son

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \frac{1}{14} e^{-40\tau} \left(\frac{1}{\eta^2 + \tau^2} 14((-1 + e^{40\tau})(h + 3w) \text{Cos}[20\eta] + (1 + e^{40\tau})(p - 3q) \text{Sin}[20\eta]) \right. \\
& (-4e^{20\tau} q\eta - 4e^{20\tau} w\tau + ((-\sqrt{7} + 2q + e^{40\tau}(\sqrt{7} + 2q)) \eta + 2(1 + e^{40\tau}) w\tau) \text{Cos}[20\eta] \\
& - 2w\eta \text{Sin}[20\eta] + 2e^{40\tau} w\eta \text{Sin}[20\eta] - \sqrt{7}\tau \text{Sin}[20\eta] - \sqrt{7}e^{40\tau} \tau \text{Sin}[20\eta] \\
& + 2q\tau \text{Sin}[20\eta] - 2e^{40\tau} q\tau \text{Sin}[20\eta]) + \frac{1}{\sqrt{7}(\eta^2 + \tau^2)} 4(-1 + e^{40\tau}) \text{Sin}[20\eta] \\
& (98e^{20\tau}(p\eta - q\eta - (h + w)\tau) + ((2\sqrt{7} - 49p + 49q + e^{40\tau}(-2\sqrt{7} - 49p + 49q)) \eta \\
& + 49(1 + e^{40\tau})(h + w)\tau) \text{Cos}[20\eta] + (49(-1 + e^{40\tau})h\eta + 49(-1 + e^{40\tau})w\eta + (2\sqrt{7} \\
& - 49p + e^{40\tau}(2\sqrt{7} + 49p - 49q) + 49q) \tau) \text{Sin}[20\eta]) + 14e^{20\tau}((-1 + e^{40\tau})(h - w) \\
& \text{Cos}[20\eta] + (1 + e^{40\tau})(p + q) \text{Sin}[20\eta]) \left(\frac{1}{2(\eta^2 + \tau^2)} e^{-20\tau} (e^{20\tau} ((\sqrt{7} + 14m - 8p) \right. \\
& \eta + 8h\tau) - ((\sqrt{7} + 2e^{40\tau}(7m - 2p) - 4p) \eta + (-7 + 4h + e^{40\tau}(7 + 4h)) \tau) \text{Cos}[20\eta] \\
& - ((7 - 4h + e^{40\tau}(7 + 4h)) \eta + (\sqrt{7} - 4p + e^{40\tau}(-14m + 4p)) \tau) \text{Sin}[20\eta]) + e^{20\tau} \\
& (7(1 + e^{40\tau}) \text{Cos}[20\eta] - (\sqrt{7}e^{40\tau} - 2(\sqrt{7} + 7m)) \text{Sin}[20\eta]) \left(\frac{1}{7(\eta^2 + \tau^2)} e^{-20\tau} \right. \\
& (e^{20\tau} ((\sqrt{7} + 14m + 98p + 98q) \eta + 98(-h + w)\tau) - ((-\sqrt{7} + 49p + 49q + e^{40\tau} \\
& (2\sqrt{7} + 14m + 49p + 49q)) \eta - 7(1 + 7h + e^{40\tau}(-1 + 7h - 7w) - 7w) \tau) \text{Cos}[20\eta]
\end{aligned}$$

$$+ (7(-1 - 7h + e^{40\tau}(-1 + 7h - 7w) + 7w)\eta + (\sqrt{7} - 49p - 49q + e^{40\tau}(2\sqrt{7} + 14m + 49p + 49q))\tau)\text{Sin}[20\eta])).$$

$$\begin{aligned} \delta_2 = & \frac{1}{14}e^{-20\tau} \left(\frac{1}{\eta^2 + \tau^2} 2e^{-20\tau} ((-1 + e^{40\tau})(h + 2w)\text{Cos}[20\eta] + (1 + e^{40\tau})(p - 2q)\text{Sin}[20\eta]) \right. \\ & (98e^{20\tau}(p\eta - q\eta - (h + w)\tau) + ((2\sqrt{7} - 49p + 49q + e^{40\tau}(-2\sqrt{7} - 49p + 49q))\eta \\ & + 49(1 + e^{40\tau})(h + w)\tau)\text{Cos}[20\eta] + (49(-1 + e^{40\tau})h\eta + 49(-1 + e^{40\tau})w\eta + (2\sqrt{7} \\ & - 49p + e^{40\tau}(2\sqrt{7} + 49p - 49q) + 49q)\tau)\text{Sin}[20\eta]) - \frac{1}{\eta^2 + \tau^2} 4\sqrt{7}e^{-20\tau}(-1 + e^{40\tau}) \\ & \text{Sin}[20\eta](-4e^{20\tau}(q\eta + w\tau) + ((-\sqrt{7} + 2q + e^{40\tau}(\sqrt{7} + 2q))\eta + 2(1 + e^{40\tau})w\tau) \\ & \text{Cos}[20\eta] + (2(-1 + e^{40\tau})w\eta - (\sqrt{7} - 2q + e^{40\tau}(\sqrt{7} + 2q))\tau)\text{Sin}[20\eta]) + (7(1 \\ & + e^{40\tau})\text{Cos}[20\eta] + (\sqrt{7}e^{40\tau} + 14m)\text{Sin}[20\eta]) \left(\frac{1}{2(\eta^2 + \tau^2)} e^{-20\tau} (e^{20\tau}((\sqrt{7} + 14m \\ & - 8p)\eta + 8h\tau) - ((\sqrt{7} + 2e^{40\tau}(7m - 2p) - 4p)\eta + (-7 + 4h + e^{40\tau}(7 + 4h))\tau) \right. \\ & \text{Cos}[20\eta] - ((7 - 4h + e^{40\tau}(7 + 4h))\eta + (\sqrt{7} - 4p + e^{40\tau}(-14m + 4p))\tau)\text{Sin}[20\eta])) \\ & + 14((1 - e^{40\tau})h\text{Cos}[20\eta] - (1 + e^{40\tau})p\text{Sin}[20\eta]) \left(\frac{1}{7(\eta^2 + \tau^2)} e^{-20\tau} (e^{20\tau}((\sqrt{7} \\ & + 14m + 98p + 98q)\eta + 98(-h + w)\tau) - ((-\sqrt{7} + 49p + 49q + e^{40\tau}(2\sqrt{7} + 14m + 49p \\ & + 49q))\eta - 7(1 + 7h + e^{40\tau}(-1 + 7h - 7w) - 7w)\tau)\text{Cos}[20\eta] + (7(-1 - 7h + e^{40\tau} \\ & (-1 + 7h - 7w) + 7w)\eta + (\sqrt{7} - 49p - 49q + e^{40\tau}(2\sqrt{7} + 14m + 49p + 49q))\tau)\text{Sin}[20\eta])) \right). \end{aligned}$$

El sistema (5.1) al resolverse nos da los valores iniciales del vector adjunto que, cumpla con las condiciones de transversalidad $\psi(T) = 0$. Dicho resultado es

$$\begin{aligned} \psi_1^0 = & - \left(\left(e^{-60\tau} (7(1 + e^{40\tau})\text{Cos}[20\eta] + (\sqrt{7}e^{40\tau} + 14m)\text{Sin}[20\eta]) \left(\frac{1}{\eta^2 + \tau^2} 14 \right. \right. \right. \\ & ((-1 + e^{40\tau})(h + 3w)\text{Cos}[20\eta] + (1 + e^{40\tau})(p - 3q)\text{Sin}[20\eta]) - 4e^{20\tau}q\eta \\ & - 4e^{20\tau}w\tau + ((-\sqrt{7} + 2q + e^{40\tau}(\sqrt{7} + 2q))\eta + 2(1 + e^{40\tau})w\tau)\text{Cos}[20\eta] \\ & - 2w\eta\text{Sin}[20\eta] + 2e^{40\tau}w\eta\text{Sin}[20\eta] - \sqrt{7}\tau\text{Sin}[20\eta] - \sqrt{7}e^{40\tau}\tau\text{Sin}[20\eta] \\ & + 2q\tau\text{Sin}[20\eta] - 2e^{40\tau}q\tau\text{Sin}[20\eta]) + \frac{1}{\eta^2 + \tau^2} 7((-1 + e^{40\tau})(h - w)\text{Cos}[20\eta] \\ & + (1 + e^{40\tau})(p + q)\text{Sin}[20\eta]) (e^{20\tau}((\sqrt{7} + 14m - 8p)\eta + 8h\tau) - ((\sqrt{7} + 2e^{40\tau} \\ & (7m - 2p) - 4p)\eta + (-7 + 4h + e^{40\tau}(7 + 4h))\tau)\text{Cos}[20\eta] - ((7 - 4h + e^{40\tau}(7 \\ & + 4h))\eta + (\sqrt{7} - 4p + e^{40\tau}(-14m + 4p))\tau)\text{Sin}[20\eta]) + \frac{1}{\sqrt{7}(\eta^2 + \tau^2)} 4(-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +e^{40\tau}) \operatorname{Sin}[20\eta] (98e^{20\tau}(p\eta - q\eta - (h+w)\tau) + ((2\sqrt{7} - 49p + 49q + e^{40\tau} \\
& (-2\sqrt{7} - 49p + 49q)) \eta + 49(1 + e^{40\tau})(h+w)\tau) \operatorname{Cos}[20\eta] + (49(-1 \\
& +e^{40\tau})h\eta + 49(-1 + e^{40\tau})w\eta + (2\sqrt{7} - 49p + e^{40\tau}(2\sqrt{7} + 49p - 49q) \\
& + 49q)\tau)\operatorname{Sin}[20\eta]) + \frac{1}{7(\eta^2 + \tau^2)} (7(1 + e^{40\tau}) \operatorname{Cos}[20\eta] - (\sqrt{7}e^{40\tau} \\
& - 2(\sqrt{7} + 7m)) \operatorname{Sin}[20\eta]) (e^{20\tau} ((\sqrt{7} + 14m + 98p + 98q) \eta + 98(-h + w)\tau) \\
& - ((-\sqrt{7} + 49p + 49q + e^{40\tau}(2\sqrt{7} + 14m + 49p + 49q)) \eta - 7(1 + 7h + e^{40\tau}(-1 \\
& + 7h - 7w) - 7w)\tau) \operatorname{Cos}[20\eta] + (7(-1 - 7h + e^{40\tau}(-1 + 7h - 7w) + 7w) \eta \\
& + (\sqrt{7} - 49p - 49q + e^{40\tau}(2\sqrt{7} + 14m + 49p + 49q)) \tau) \operatorname{Sin}[20\eta])))/ \\
& (196 (\frac{1}{196}e^{-40\tau} (7(1 + e^{40\tau}) \operatorname{Cos}[20\eta] + (\sqrt{7}e^{40\tau} + 14m) \operatorname{Sin}[20\eta]) \\
& (7(1 + e^{40\tau}) \operatorname{Cos}[20\eta] - (\sqrt{7}e^{40\tau} - 2(\sqrt{7} + 7m)) \operatorname{Sin}[20\eta]) - e^{-40\tau}((1 \\
& - e^{40\tau})h\operatorname{Cos}[20\eta] - (1 + e^{40\tau})p\operatorname{Sin}[20\eta])((-1 + e^{40\tau})(h - w)\operatorname{Cos}[20\eta] \\
& + (1 + e^{40\tau})(p + q)\operatorname{Sin}[20\eta]))) + (e^{-40\tau}((-1 + e^{40\tau})(h - w)\operatorname{Cos}[20\eta] \\
& + (1 + e^{40\tau})(p + q)\operatorname{Sin}[20\eta]) (\frac{1}{2(\eta^2 + \tau^2)}e^{-20\tau} (7(1 + e^{40\tau}) \operatorname{Cos}[20\eta] \\
& + (\sqrt{7}e^{40\tau} + 14m) \operatorname{Sin}[20\eta]) (e^{20\tau} ((\sqrt{7} + 14m - 8p) \eta + 8h\tau) - ((\sqrt{7} \\
& + 2e^{40\tau}(7m - 2p) - 4p) \eta + (-7 + 4h + e^{40\tau}(7 + 4h)) \tau) \operatorname{Cos}[20\eta] - ((7 \\
& - 4h + e^{40\tau}(7 + 4h)) \eta + (\sqrt{7} - 4p + e^{40\tau}(-14m + 4p)) \tau) \operatorname{Sin}[20\eta]) \\
& + \frac{1}{\eta^2 + \tau^2} 2e^{-20\tau} ((-1 + e^{40\tau})(h + 2w)\operatorname{Cos}[20\eta] + (1 + e^{40\tau})(p - 2q) \\
& \operatorname{Sin}[20\eta]) (98e^{20\tau}(p\eta - q\eta - (h+w)\tau) + ((2\sqrt{7} - 49p + 49q + e^{40\tau} \\
& (-2\sqrt{7} - 49p + 49q)) \eta + 49(1 + e^{40\tau})(h+w)\tau) \operatorname{Cos}[20\eta] + (49 \\
& (-1 + e^{40\tau})h\eta + 49(-1 + e^{40\tau})w\eta + (2\sqrt{7} - 49p + e^{40\tau}(2\sqrt{7} + 49p \\
& - 49q) + 49q)\tau)\operatorname{Sin}[20\eta]) - \frac{1}{\eta^2 + \tau^2} 4\sqrt{7}e^{-20\tau} (-1 + e^{40\tau}) \operatorname{Sin}[20\eta] \\
& (-4e^{20\tau}(q\eta + w\tau) + ((-\sqrt{7} + 2q + e^{40\tau}(\sqrt{7} + 2q)) \eta + 2(1 + e^{40\tau})w\tau) \\
& \operatorname{Cos}[20\eta] + (2(-1 + e^{40\tau})w\eta - (\sqrt{7} - 2q + e^{40\tau}(\sqrt{7} + 2q)) \tau) \operatorname{Sin}[20\eta]) \\
& + \frac{1}{\eta^2 + \tau^2} 2e^{-20\tau} ((1 - e^{40\tau})h\operatorname{Cos}[20\eta] - (1 + e^{40\tau})p\operatorname{Sin}[20\eta]) (e^{20\tau} ((\sqrt{7} \\
& + 14m + 98p + 98q)\eta + 98(-h + w)\tau) - ((-\sqrt{7} + 49p + 49q + e^{40\tau}(2\sqrt{7} \\
& + 14m + 49p + 49q))\eta - 7(1 + 7h + e^{40\tau}(-1 + 7h - 7w) - 7w) \tau) \operatorname{Cos}[20\eta] + (7 \\
& (-1 - 7h + e^{40\tau}(-1 + 7h - 7w) + 7w) \eta + (\sqrt{7} - 49p - 49q + e^{40\tau}(2\sqrt{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 14m + 49p + 49q))\tau)\text{Sin}[20\eta])) / (14 \left(\frac{1}{196} e^{-40\tau} (7(1 + e^{40\tau}) \text{Cos}[20\eta] \right. \\
& + (\sqrt{7}e^{40\tau} + 14m) \text{Sin}[20\eta]) (7(1 + e^{40\tau}) \text{Cos}[20\eta] - (\sqrt{7}e^{40\tau} - 2(\sqrt{7} \\
& + 7m))\text{Sin}[20\eta]) - e^{-40\tau} ((1 - e^{40\tau}) h\text{Cos}[20\eta] - (1 + e^{40\tau}) p\text{Sin}[20\eta]) \\
& ((-1 + e^{40\tau}) (h - w)\text{Cos}[20\eta] + (1 + e^{40\tau}) (p + q)\text{Sin}[20\eta]))).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_2^0 = & \left(e^{-60\tau} ((1 - e^{40\tau}) h\text{Cos}[20\eta] - (1 + e^{40\tau}) p\text{Sin}[20\eta]) \left(\frac{1}{\eta^2 + \tau^2} 14 \right. \right. \\
& ((-1 + e^{40\tau}) (h + 3w)\text{Cos}[20\eta] + (1 + e^{40\tau}) (p - 3q)\text{Sin}[20\eta]) \\
& (-4e^{20\tau} q\eta - 4e^{20\tau} w\tau + ((-\sqrt{7} + 2q + e^{40\tau} (\sqrt{7} + 2q)) \eta + 2 \\
& (1 + e^{40\tau}) w\tau) \text{Cos}[20\eta] - 2w\eta\text{Sin}[20\eta] + 2e^{40\tau} w\eta\text{Sin}[20\eta] \\
& - \sqrt{7}\tau\text{Sin}[20\eta] - \sqrt{7}e^{40\tau}\tau\text{Sin}[20\eta] + 2q\tau\text{Sin}[20\eta] - 2e^{40\tau}q\tau\text{Sin}[20\eta]) \\
& + \frac{1}{\eta^2 + \tau^2} 7 ((-1 + e^{40\tau}) (h - w)\text{Cos}[20\eta] + (1 + e^{40\tau}) (p + q)\text{Sin}[20\eta]) \\
& (e^{20\tau} ((\sqrt{7} + 14m - 8p) \eta + 8h\tau) - ((\sqrt{7} + 2e^{40\tau}(7m - 2p) - 4p) \eta \\
& + (-7 + 4h + e^{40\tau}(7 + 4h)) \tau) \text{Cos}[20\eta] - ((7 - 4h + e^{40\tau}(7 + 4h)) \eta \\
& + (\sqrt{7} - 4p + e^{40\tau}(-14m + 4p)) \tau) \text{Sin}[20\eta]) + \frac{1}{\sqrt{7}(\eta^2 + \tau^2)} 4(-1 \\
& + e^{40\tau}) \text{Sin}[20\eta] (98e^{20\tau}(p\eta - q\eta - (h + w)\tau) + ((2\sqrt{7} - 49p + 49q \\
& + e^{40\tau}(-2\sqrt{7} - 49p + 49q)) \eta + 49(1 + e^{40\tau})(h + w)\tau) \text{Cos}[20\eta] + (49 \\
& (-1 + e^{40\tau}) h\eta + 49(-1 + e^{40\tau}) w\eta + (2\sqrt{7} - 49p + e^{40\tau}(2\sqrt{7} + 49p - 49q) \\
& + 49q)\tau)\text{Sin}[20\eta]) + \frac{1}{7(\eta^2 + \tau^2)} (7(1 + e^{40\tau}) \text{Cos}[20\eta] - (\sqrt{7}e^{40\tau} - 2 \\
& (\sqrt{7} + 7m)) \text{Sin}[20\eta]) (e^{20\tau} ((\sqrt{7} + 14m + 98p + 98q) \eta + 98(-h + w)\tau) \\
& - ((-\sqrt{7} + 49p + 49q + e^{40\tau}(2\sqrt{7} + 14m + 49p + 49q)) \eta - 7(1 + 7h + e^{40\tau} \\
& (-1 + 7h - 7w) - 7w)\tau)\text{Cos}[20\eta] + (7(-1 - 7h + e^{40\tau}(-1 + 7h - 7w) + 7w) \eta \\
& + (\sqrt{7} - 49p - 49q + e^{40\tau}(2\sqrt{7} + 14m + 49p + 49q)) \tau) \text{Sin}[20\eta])))) / \\
& (14 \left(\frac{1}{196} e^{-40\tau} (7(1 + e^{40\tau}) \text{Cos}[20\eta] + (\sqrt{7}e^{40\tau} + 14m) \text{Sin}[20\eta]) \right. \\
& (7(1 + e^{40\tau}) \text{Cos}[20\eta] - (\sqrt{7}e^{40\tau} - 2(\sqrt{7} + 7m)) \text{Sin}[20\eta]) - e^{-40\tau} ((1 \\
& - e^{40\tau}) h\text{Cos}[20\eta] - (1 + e^{40\tau}) p\text{Sin}[20\eta]) ((-1 + e^{40\tau}) (h - w)\text{Cos}[20\eta] \\
& + (1 + e^{40\tau}) (p + q)\text{Sin}[20\eta])))) - (e^{-40\tau} (7(1 + e^{40\tau}) \text{Cos}[20\eta] - (\sqrt{7}e^{40\tau} \\
& - 2(\sqrt{7} + 7m)) \text{Sin}[20\eta]) \left(\frac{1}{2(\eta^2 + \tau^2)} e^{-20\tau} (7(1 + e^{40\tau}) \text{Cos}[20\eta] \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\sqrt{7}e^{40\tau} + 14m) \operatorname{Sin}[20\eta] \left(e^{20\tau} \left((\sqrt{7} + 14m - 8p) \eta + 8h\tau \right) - \left((\sqrt{7} \right. \right. \\
& + 2e^{40\tau}(7m - 2p) - 4p) \eta + (-7 + 4h + e^{40\tau}(7 + 4h)) \tau \operatorname{Cos}[20\eta] - ((7 \\
& - 4h + e^{40\tau}(7 + 4h)) \eta + (\sqrt{7} - 4p + e^{40\tau}(-14m + 4p)) \tau \operatorname{Sin}[20\eta]) \\
& + \frac{1}{\eta^2 + \tau^2} 2e^{-20\tau} ((-1 + e^{40\tau})(h + 2w) \operatorname{Cos}[20\eta] + (1 + e^{40\tau})(p - 2q) \\
& \operatorname{Sin}[20\eta]) \left(98e^{20\tau}(p\eta - q\eta - (h + w)\tau) + ((2\sqrt{7} - 49p + 49q + e^{40\tau} \right. \\
& (-2\sqrt{7} - 49p + 49q)) \eta + 49(1 + e^{40\tau})(h + w)\tau \operatorname{Cos}[20\eta] + (49(-1 + e^{40\tau})h\eta \\
& + 49(-1 + e^{40\tau})w\eta + (2\sqrt{7} - 49p + e^{40\tau}(2\sqrt{7} + 49p - 49q) + 49q) \tau \\
& \operatorname{Sin}[20\eta]) - \frac{1}{\eta^2 + \tau^2} 4\sqrt{7}e^{-20\tau} (-1 + e^{40\tau}) \operatorname{Sin}[20\eta] (-4e^{20\tau}(q\eta + w\tau) \\
& + ((-\sqrt{7} + 2q + e^{40\tau}(\sqrt{7} + 2q)) \eta + 2(1 + e^{40\tau})w\tau) \operatorname{Cos}[20\eta] + (2(-1 + e^{40\tau})w\eta \\
& - (\sqrt{7} - 2q + e^{40\tau}(\sqrt{7} + 2q)) \tau) \operatorname{Sin}[20\eta]) + \frac{2e^{-20\tau}}{\eta^2 + \tau^2} ((1 - e^{40\tau})h \operatorname{Cos}[20\eta] \\
& - (1 + e^{40\tau})p \operatorname{Sin}[20\eta]) \left(e^{20\tau} \left((\sqrt{7} + 14m + 98p + 98q) \eta + 98(-h + w)\tau \right) \right. \\
& - ((-\sqrt{7} + 49p + 49q + e^{40\tau}(2\sqrt{7} + 14m + 49p + 49q)) \eta - 7(1 + 7h + e^{40\tau}(-1 \\
& + 7h - 7w) - 7w)\tau) \operatorname{Cos}[20\eta] + (7(-1 - 7h + e^{40\tau}(-1 + 7h - 7w) + 7w) \eta + (\sqrt{7} \\
& - 49p - 49q + e^{40\tau}(2\sqrt{7} + 14m + 49p + 49q)) \tau) \operatorname{Sin}[20\eta]) \left. \right) / (196 \left(\frac{1}{196} e^{-40\tau} \right. \\
& (7(1 + e^{40\tau}) \operatorname{Cos}[20\eta] + (\sqrt{7}e^{40\tau} + 14m) \operatorname{Sin}[20\eta]) (7(1 + e^{40\tau}) \\
& \operatorname{Cos}[20\eta] - (\sqrt{7}e^{40\tau} - 2(\sqrt{7} + 7m)) \operatorname{Sin}[20\eta]) - e^{-40\tau} ((1 - e^{40\tau}) \\
& h \operatorname{Cos}[20\eta] - (1 + e^{40\tau})p \operatorname{Sin}[20\eta]) ((-1 + e^{40\tau})(h - w) \operatorname{Cos}[20\eta] \\
& + (1 + e^{40\tau})(p + q) \operatorname{Sin}[20\eta]))).
\end{aligned}$$

5.2. Ejemplo 2

Se muestran las soluciones analíticas del primer ejemplo:

Recordando que la solución (3.44), que es de la forma

$$z(t) = e^{\hat{A}t} \left(\begin{pmatrix} x_1^o \\ x_1^o \\ \psi_1^o \\ \psi_2^o \end{pmatrix} + \int_0^t e^{-\hat{A}\Omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} d\Omega \right).$$

y recordando que solo se sabe que $(x_1^o, x_2^o)^* = (0, 0)^*$ entonces queda las soluciones de la forma:

$$\begin{aligned}
x_1(t) = & \frac{1}{a^2+b^2} e^{-2at} ((- (1 + e^{2at}) (h + w) \text{Cos}[bt] + (-1 + e^{2at}) (h - w) \text{Sin}[bt]) (4e^{at} \\
& (a(h - w) + b(h + w)) - 2(a(1 + e^{2at}) (h - w) + b(h + e^{2at}h - 7m + 7e^{2at}m + w + e^{2at}w)) \\
& \text{Cos}[bt] + 2(-b(-1 + e^{2at}) (h - w) + a((-1 + e^{2at})h + 7(1 + e^{2at})m + (-1 + e^{2at})w)) \text{Sin}[bt]) \\
& + (-(-1 + e^{2at}) (h - 2m - w) \text{Cos}[bt] + (1 + e^{2at}) (h + w) \text{Sin}[bt]) (14e^{at}(a(h - 2m - w) \\
& + b(h + w)) - (7a(1 + e^{2at}) (h - 2m - w) + b(7(1 + e^{2at})h + 4(-1 + e^{2at})m + 7(1 + e^{2at})w)) \\
& \text{Cos}[bt] + (-7b(-1 + e^{2at}) (h - 2m - w) + a(7(-1 + e^{2at})h + 4(1 + e^{2at})m + 7(-1 + e^{2at})w)) \\
& \text{Sin}[bt]) + e^{at}((-1 + e^{2at}) (h - w) \text{Cos}[bt] - (1 + e^{2at}) (h + w) \text{Sin}[bt]) (e^{-at} (14e^{at}(a(h - w) \\
& + b(h + w)) - (a(5 + 9e^{2at})h + b(5 + 9e^{2at})h - a(9 + 5e^{2at})w + b(9 + 5e^{2at})w) \text{Cos}[bt] + (b \\
& (5 - 9e^{2at})h + a(-5 + 9e^{2at})h + a(-9 + 5e^{2at})w + b(-9 + 5e^{2at})w) \text{Sin}[bt]) + (a^2 + b^2) \psi_1^0) \\
& + 2e^{at} (1 - e^{2at}) m \text{Sin}[bt] (e^{-at} (4e^{at}(a(h - 2m - w) + b(h + w)) + (b((-9 + 5e^{2at})h - 14 \\
& (-1 + e^{2at})m + (5 - 9e^{2at})w) + a((-9 + 5e^{2at})h + 4(1 + e^{2at})m + (-5 + 9e^{2at})w)) \text{Cos}[bt] \\
& + (b((9 + 5e^{2at})h + 4(-1 + e^{2at})m + (5 + 9e^{2at})w) + a(-(9 + 5e^{2at})h + 14(1 + e^{2at})m \\
& + (5 + 9e^{2at})w)) \text{Sin}[bt]) - (a^2 + b^2) \cdot \psi_2^0))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2(t) = & e^{-2at} \frac{1}{a^2+b^2} ((- (-1 + e^{2at}) (h - w) \text{Cos}[bt] + (1 + e^{2at}) (h + w) \text{Sin}[bt]) \\
& (4e^{at}(a(h - w) + b(h + w)) - 2(a(1 + e^{2at}) (h - w) + b(h + e^{2at}h - 7m + 7e^{2at}m + w + e^{2at}w)) \\
& \text{Cos}[bt] + 2(-b(-1 + e^{2at}) (h - w) + a((-1 + e^{2at})h + 7(1 + e^{2at})m + (-1 + e^{2at})w)) \text{Sin}[bt]) \\
& + ((1 + e^{2at}) (h + w) \text{Cos}[bt] - (-1 + e^{2at}) (h - 2m - w) \text{Sin}[bt]) (14e^{at}(a(h - 2m - w) + b(h + w)) \\
& - (7a(1 + e^{2at}) (h - 2m - w) + b(7(1 + e^{2at})h + 4(-1 + e^{2at})m + 7(1 + e^{2at})w)) \text{Cos}[bt] + (-7b \\
& (-1 + e^{2at}) (h - 2m - w) + a(7(-1 + e^{2at})h + 4(1 + e^{2at})m + 7(-1 + e^{2at})w)) \text{Sin}[bt]) + 2e^{at} \\
& (1 - e^{2at}) m \text{Sin}[bt] (e^{-at} (14e^{at}(a(h - w) + b(h + w)) - (a(5 + 9e^{2at})h + b(5 + 9e^{2at})h \\
& - a(9 + 5e^{2at})w + b(9 + 5e^{2at})w) \text{Cos}[bt] + (b(5 - 9e^{2at})h + a(-5 + 9e^{2at})h + a(-9 + 5e^{2at}) \\
& w + b(-9 + 5e^{2at})w) \text{Sin}[bt]) + (a^2 + b^2) \psi_1^0 - e^{at} (-(-1 + e^{2at}) (h - 2m - w) \text{Cos}[bt] + (1 + e^{2at}) \\
& (h + w) \text{Sin}[bt]) (e^{-at} (4e^{at}(a(h - 2m - w) + b(h + w)) + (b((-9 + 5e^{2at})h - 14(-1 + e^{2at})m \\
& + (5 - 9e^{2at})w) + a((-9 + 5e^{2at})h + 4(1 + e^{2at})m + (-5 + 9e^{2at})w)) \text{Cos}[bt] + (b((9 + 5e^{2at})h \\
& + 4(-1 + e^{2at})m + (5 + 9e^{2at})w) + a(-(9 + 5e^{2at})h + 14(1 + e^{2at})m + (5 + 9e^{2at})w)) \text{Sin}[bt]) \\
& - (a^2 + b^2) \psi_2^0)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_1(t) = & \frac{1}{a^2+b^2} e^{-2at} (2(1-e^{2at}) m \cos[bt] (4e^{at}(a(h-w)+b(h+w)) - 2(a(1+e^{2at}) \\
& (h-w) + b(h+e^{2at}h-7m+7e^{2at}m+w+e^{2at}w)) \cos[bt] + 2(-b(-1+e^{2at})(h-w) + a \\
& ((-1+e^{2at})h+7(1+e^{2at})m+(-1+e^{2at})w)) \sin[bt]) - 2(1-e^{2at}) m \sin[bt] (14e^{at} \\
& (a(h-2m-w) + b(h+w)) - (7a(1+e^{2at})(h-2m-w) + b(7(1+e^{2at})h+4(-1+e^{2at})m \\
& +7(1+e^{2at})w)) \cos[bt] + (-7b(-1+e^{2at})(h-2m-w) + a(7(-1+e^{2at})h+4(1+e^{2at})m \\
& +7(-1+e^{2at})w)) \sin[bt]) + e^{at}((1+e^{2at})(h+w) \cos[bt] - (-1+e^{2at})(h-w) \sin[bt]) \\
& (e^{-at} (14e^{at}(a(h-w) + b(h+w)) - (a(5+9e^{2at})h + b(5+9e^{2at})h - a(9+5e^{2at})w + b(9 \\
& +5e^{2at})w) \cos[bt] + (b(5-9e^{2at})h + a(-5+9e^{2at})h + a(-9+5e^{2at})w + b(-9+5e^{2at})w) \\
& \sin[bt]) + (a^2+b^2) \psi_1^0) - e^{at}(-(-1+e^{2at})(h-w) \cos[bt] + (1+e^{2at})(h+w) \sin[bt]) (e^{-at} \\
& (4e^{at}(a(h-2m-w) + b(h+w)) + (b((-9+5e^{2at})h - 14(-1+e^{2at})m + (5-9e^{2at})w) + a(\\
& (-9+5e^{2at})h + 4(1+e^{2at})m + (-5+9e^{2at})w)) \cos[bt] + (b((9+5e^{2at})h + 4(-1+e^{2at})m \\
& + (5+9e^{2at})w) + a(-9+5e^{2at})h + 14(1+e^{2at})m + (5+9e^{2at})w)) \sin[bt]) - (a^2+b^2) \psi_2^0)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_2(t) = & \frac{1}{a^2+b^2} e^{-2at} (-2(1-e^{2at}) m \sin[bt] (4e^{at}(a(h-w) + b(h+w)) - 2(a(1+e^{2at})(h-w) + b \\
& (h+e^{2at}h-7m+7e^{2at}m+w+e^{2at}w)) \cos[bt] + 2(-b(-1+e^{2at})(h-w) + a((-1+e^{2at})h \\
& +7(1+e^{2at})m+(-1+e^{2at})w)) \sin[bt]) - 2(1-e^{2at}) m \cos[bt] (14e^{at}(a(h-2m-w) + b \\
& (h+w)) - (7a(1+e^{2at})(h-2m-w) + b(7(1+e^{2at})h+4(-1+e^{2at})m+7(1+e^{2at})w)) \\
& \cos[bt] + (-7b(-1+e^{2at})(h-2m-w) + a(7(-1+e^{2at})h+4(1+e^{2at})m+7(-1+e^{2at})w)) \\
& \sin[bt]) + e^{at}((-1+e^{2at})(h-2m-w) \cos[bt] - (1+e^{2at})(h+w) \sin[bt]) (e^{-at} (14e^{at} \\
& (a(h-w) + b(h+w)) - (a(5+9e^{2at})h + b(5+9e^{2at})h - a(9+5e^{2at})w + b(9+5e^{2at})w) \\
& \cos[bt] + (b(5-9e^{2at})h + a(-5+9e^{2at})h + a(-9+5e^{2at})w + b(-9+5e^{2at})w) \sin[bt]) \\
& + (a^2+b^2) \psi_1^0) - e^{at}((1+e^{2at})(h+w) \cos[bt] - (-1+e^{2at})(h-2m-w) \sin[bt]) (e^{-at} (4e^{at} \\
& (a(h-2m-w) + b(h+w)) + (b((-9+5e^{2at})h - 14(-1+e^{2at})m + (5-9e^{2at})w) + a((-9+ \\
& 5e^{2at})h + 4(1+e^{2at})m + (-5+9e^{2at})w)) \cos[bt] + (b((9+5e^{2at})h + 4(-1+e^{2at})m + \\
& (5+9e^{2at})w) + a(-9+5e^{2at})h + 14(1+e^{2at})m + (5+9e^{2at})w)) \sin[bt]) - (a^2+b^2) \psi_2^0)).
\end{aligned}$$

(3.45) describe el proceso para obtener los valores de las incógnitas (ψ_1^0, ψ_2^0) , en el cual (3.45) es

un sistema 2×2 que hay que resolver. Este sistema en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} \varsigma_{11} & \varsigma_{12} \\ \varsigma_{21} & \varsigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1^0 \\ \psi_2^0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

donde los valres de la matriz $\varsigma \in \mathbb{R}$ de dimensión 2×2 son

$$\begin{aligned} \varsigma_{11} &= e^{18a} \frac{1}{a^2 + b^2} e^{-36a} \left((1 + e^{36a}) (h + w) \text{Cos}[18b] - (-1 + e^{36a}) (h - w) \text{Sin}[18b] \right) (a^2 + b^2) \\ \varsigma_{12} &= - (a^2 + b^2) \frac{1}{a^2 + b^2} e^{-36a} e^{18a} \left((1 - e^{36a}) (h - w) \text{Cos}[18b] + (1 + e^{36a}) (h + w) \text{Sin}[18b] \right) \\ \varsigma_{21} &= (a^2 + b^2) e^{18a} \frac{1}{a^2 + b^2} e^{-36a} \left((-1 + e^{36a}) (h - 2m - w) \text{Cos}[18b] - (1 + e^{36a}) (h + w) \text{Sin}[18b] \right) \\ \varsigma_{22} &= (a^2 + b^2) e^{18a} \frac{1}{a^2 + b^2} e^{-36a} \left((1 + e^{36a}) (h + w) \text{Cos}[18b] - (-1 + e^{36a}) (h - 2m - w) \text{Sin}[18b] \right). \end{aligned}$$

Los valres de la matriz $\delta \in \mathbb{R}$ de dimensión 2×1 son

$$\begin{aligned} \delta_1 &:= \frac{2}{a^2 + b^2} e^{-36a} (1 - e^{36a}) m \text{Cos}[18b] (4e^{18a} (a(h - w) + b(h + w)) - 2(a(1 + e^{36a})(h - w) + b \\ &\quad (h + e^{36a}h - 7m + 7e^{36a}m + w + e^{36a}w)) \text{Cos}[18b] + 2(-b(-1 + e^{36a})(h - w) + a((-1 + e^{36a})h \\ &\quad + 7(1 + e^{36a})m + (-1 + e^{36a})w)) \text{Sin}[18b]) - \frac{2}{a^2 + b^2} e^{-36a} (1 - e^{36a}) m \text{Sin}[18b] (14e^{18a} (a(h \\ &\quad - 2m - w) + b(h + w)) - (7a(1 + e^{36a})(h - 2m - w) + b(7(1 + e^{36a})h + 4(-1 + e^{36a})m + 7(1 + \\ &\quad e^{36a})w)) \text{Cos}[18b] + (-7b(-1 + e^{36a})(h - 2m - w) + a(7(-1 + e^{36a})h + 4(1 + e^{36a})m + 7 \\ &\quad (-1 + e^{36a})w)) \text{Sin}[18b]) + (e^{18a} \frac{1}{a^2 + b^2} e^{-36a} ((1 + e^{36a})(h + w) \text{Cos}[18b] - (-1 + e^{36a}) \\ &\quad (h - w) \text{Sin}[18b]) e^{-18a} (14e^{18a} (a(h - w) + b(h + w)) - (a(5 + 9e^{36a})h + b(5 + 9e^{36a})h \\ &\quad - a(9 + 5e^{36a})w + b(9 + 5e^{36a})w) \text{Cos}[18b] + (b(5 - 9e^{36a})h + a(-5 + 9e^{36a})h + a(-9 + \\ &\quad 5e^{36a})w + b(-9 + 5e^{36a})w) \text{Sin}[18b])) + (-e^{-18a} \frac{1}{a^2 + b^2} e^{-36a} e^{18a} ((1 - e^{36a})(h - w) \\ &\quad \text{Cos}[18b] + (1 + e^{36a})(h + w) \text{Sin}[18b]) (4e^{18a} (a(h - 2m - w) + b(h + w)) + (b((-9 + \\ &\quad 5e^{36a})h - 14(-1 + e^{36a})m + (5 - 9e^{36a})w) + a((-9 + 5e^{36a})h + 4(1 + e^{36a})m + (-5 \\ &\quad + 9e^{36a})w)) \text{Cos}[18b] + (b((9 + 5e^{36a})h + 4(-1 + e^{36a})m + (5 + 9e^{36a})w) + a((-9 - \\ &\quad 5e^{36a})h + 14(1 + e^{36a})m + (5 + 9e^{36a})w)) \text{Sin}[18b]))). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \frac{-2}{a^2 + b^2} e^{-36a} (1 - e^{36a}) m \text{Sin}[18b] (4e^{18a} (a(h - w) + b(h + w)) - 2(a(1 + e^{36a})(h - w) \\ &\quad + b(h + e^{36a}h - 7m + 7e^{36a}m + w + e^{36a}w)) \text{Cos}[18b] + 2(-b(-1 + e^{36a})(h - w) + a((-1 \\ &\quad + e^{36a})h + 7(1 + e^{36a})m + (-1 + e^{36a})w)) \text{Sin}[18b]) - \frac{2}{a^2 + b^2} e^{-36a} (1 - e^{36a}) m \text{Cos}[18b] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (14e^{18a}(a(h-2m-w)+b(h+w))-(7a(1+e^{36a})(h-2m-w)+b(7(1+e^{36a})h+4(-1 \\
& +e^{36a})m+7(1+e^{36a})w))\cos[18b]+(-7b(-1+e^{36a})(h-2m-w)+a(7(-1+e^{36a})h+ \\
& 4(1+e^{36a})m+7(-1+e^{36a})w))\sin[18b])+(e^{-18a}e^{18a}\frac{1}{a^2+b^2}e^{-36a}((-1+e^{36a})(h-x \\
& (e^{-18a}e^{18a}\frac{1}{a^2+b^2}e^{-36a}((-1+e^{36a})(h-2m-w)\cos[18b]-(1+e^{36a})(h+w)\sin[18b])) \\
& (14e^{18a}(a(h-w)+b(h+w))-(a(5+9e^{36a})h+b(5+9e^{36a})h-a(9+5e^{36a})w+b(9 \\
& +5e^{36a})w)\cos[18b]+(b(5-9e^{36a})h+a(-5+9e^{36a})h+a(-9+5e^{36a})w+b(-9+5e^{36a}) \\
& w)\sin[18b]))+(-e^{-18a}e^{18a}\frac{1}{a^2+b^2}e^{-36a}((1+e^{36a})(h+w)\cos[18b]-(-1+e^{36a}) \\
& (h-2m-w)\sin[18b]))(4e^{18a}(a(h-2m-w)+b(h+w))+(b((-9+5e^{36a})h-14(-1 \\
& +e^{36a})m+(5-9e^{36a})w)+a((-9+5e^{36a})h+4(1+e^{36a})m+(-5+9e^{36a})w))\cos[18b] \\
& +(b((9+5e^{36a})h+4(-1+e^{36a})m+(5+9e^{36a})w)+a((-9-5e^{36a})h+14(1+e^{36a}) \\
& m+(5+9e^{36a})w))\sin[18b])).
\end{aligned}$$

El sistema (5.2) al resolverse nos da los valores iniciales del vector adjunto que, cumpla con las condiciones de transversalidad $\psi(T) = 0$. Dicho resultado es

$$\begin{aligned}
\psi_1^0 = & \left(e^{-9\sqrt{3}-36a} \left(\left(\frac{1}{12}(-3+\sqrt{3}) + \frac{1}{12}(3+\sqrt{3}) \right) \left(1 - e^{18\sqrt{3}} \right) \cos[9] + \left(\frac{1}{12}(3-\sqrt{3}) + \frac{1}{12}(3+ \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{3}) \right) \left(1 + e^{18\sqrt{3}} \right) \sin[9] \right) (((-1+e^{36a})(h-2m-w)\cos[18b]-(1+e^{36a})(h+w)\sin[18b]) \\
& (14e^{18a}(a(h-w)+b(h+w))-(a(5+9e^{36a})h+b(5+9e^{36a})h-a(9+5e^{36a})w+b(9+5e^{36a}) \\
& w)\cos[18b]+(b(5-9e^{36a})h+a(-5+9e^{36a})h+a(-9+5e^{36a})w+b(-9+5e^{36a})w)\sin[18b]) \\
& -2(1-e^{36a})m\sin[18b])(4e^{18a}(a(h-w)+b(h+w))-2(a(1+e^{36a})(h-w)+b(h+e^{36a}h-7m \\
& +7e^{36a}m+w+e^{36a}w))\cos[18b]+2(-b(-1+e^{36a})(h-w)+a((-1+e^{36a})h+7(1+e^{36a})m+(-1 \\
& +e^{36a})w))\sin[18b])-2(1-e^{36a})m\cos[18b])(14e^{18a}(a(h-2m-w)+b(h+w))-(7a(1+e^{36a}) \\
& (h-2m-w)+b(7(1+e^{36a})h+4(-1+e^{36a})m+7(1+e^{36a})w))\cos[18b]+(-7b(-1+e^{36a})(h-2m \\
& -w)+a(7(-1+e^{36a})h+4(1+e^{36a})m+7(-1+e^{36a})w))\sin[18b])-(1+e^{36a})(h+w)\cos[18b]- \\
& (-1+e^{36a})(h-2m-w)\sin[18b]))(4e^{18a}(a(h-2m-w)+b(h+w))+(b((-9+5e^{36a})h-14(-1+ \\
& e^{36a})m+(5-9e^{36a})w)+a((-9+5e^{36a})h+4(1+e^{36a})m+(-5+9e^{36a})w))\cos[18b]+(b((9 \\
& +5e^{36a})h+4(-1+e^{36a})m+(5+9e^{36a})w)+a((-9-5e^{36a})h+14(1+e^{36a})m+(5+9e^{36a})w)) \\
& \sin[18b])))) / \left((a^2+b^2) \left(\frac{2\cos[9]^2}{3} + \frac{1}{6}e^{-18\sqrt{3}}\cos[9]^2 + \frac{1}{6}e^{18\sqrt{3}}\cos[9]^2 + \frac{2\sin[9]^2}{3} + \frac{1}{6}e^{-18\sqrt{3}} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \sin[9]^2 + \frac{1}{6}e^{18\sqrt{3}}\sin[9]^2 \right) - \left(e^{-9\sqrt{3}-36a} \left(\left(\frac{1}{12}(3-\sqrt{3}) + \frac{1}{12}(3+\sqrt{3}) \right) (1+e^{18\sqrt{3}}) \cos[9] \right. \right. \\
& - \left. \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{12}(-3+\sqrt{3}) + \frac{1}{12}(3+\sqrt{3}) \right) (-1+e^{18\sqrt{3}}) \sin[9] \right) (((1+e^{36a})(h+w)\cos[18b] \\
& - (-1+e^{36a})(h-w)\sin[18b]) (14e^{18a}(a(h-w)+b(h+w)) - (a(5+9e^{36a})h + b(5+9e^{36a}) \\
& h - a(9+5e^{36a})w + b(9+5e^{36a})w) \cos[18b] + (b(5-9e^{36a})h + a(-5+9e^{36a})h + a(-9+5e^{36a}) \\
& w + b(-9+5e^{36a})w) \sin[18b]) + 2(1-e^{36a})m \cos[18b] (4e^{18a}(a(h-w)+b(h+w)) - 2(a(1 \\
& +e^{36a})(h-w) + b(h+e^{36a}h - 7m + 7e^{36a}m + w + e^{36a}w)) \cos[18b] + 2(-b(-1+e^{36a})(h-w) \\
& + a((-1+e^{36a})h + 7(1+e^{36a})m + (-1+e^{36a})w)) \sin[18b]) - 2(1-e^{36a})m \sin[18b] (14 \\
& e^{18a}(a(h-2m-w) + b(h+w)) - (7a(1+e^{36a})(h-2m-w) + b(7(1+e^{36a})h + 4(-1+e^{36a}) \\
& m + 7(1+e^{36a})w)) \cos[18b] + (-7b(-1+e^{36a})(h-2m-w) + a(7(-1+e^{36a})h + 4(1+e^{36a})m \\
& + 7(-1+e^{36a})w)) \sin[18b]) - ((1-e^{36a})(h-w)\cos[18b] + (1+e^{36a})(h+w)\sin[18b]) (4e^{18a} \\
& (a(h-2m-w) + b(h+w)) + (b((-9+5e^{36a})h - 14(-1+e^{36a})m + (5-9e^{36a})w) + a((-9+5e^{36a}) \\
& h + 4(1+e^{36a})m + (-5+9e^{36a})w)) \cos[18b] + (b((9+5e^{36a})h + 4(-1+e^{36a})m + (5+9e^{36a})w) + \\
& a((-9-5e^{36a})h + 14(1+e^{36a})m + (5+9e^{36a})w)) \sin[18b] \Big) \Big) / \left((a^2 + b^2) \left(\frac{2\cos[9]^2}{3} + \frac{1}{6} \right. \right. \\
& \left. \left. e^{-18\sqrt{3}}\cos[9]^2 + \frac{1}{6}e^{18\sqrt{3}}\cos[9]^2 + \frac{2\sin[9]^2}{3} + \frac{1}{6}e^{-18\sqrt{3}}\sin[9]^2 + \frac{1}{6}e^{18\sqrt{3}}\sin[9]^2 \right) \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_2^0 = & - \left(\left(e^{-9\sqrt{3}-36a} \left(\left(\frac{1}{12}(3-\sqrt{3}) + \frac{1}{12}(3+\sqrt{3}) \right) (1+e^{18\sqrt{3}}) \cos[9] - \left(\frac{1}{12}(-3+\sqrt{3}) \right. \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{12}(3+\sqrt{3}) \right) (-1+e^{18\sqrt{3}}) \sin[9] \right) (((-1+e^{36a})(h-2m-w)\cos[18b] - (1+e^{36a}) \\
& (h+w)\sin[18b]) 14e^{18a}(a(h-w) + b(h+w)) - (a(5+9e^{36a})h + b(5+9e^{36a})h - a \\
& (9+5e^{36a})w + b(9+5e^{36a})w) \cos[18b] + (b(5-9e^{36a})h + a(-5+9e^{36a})h + a(-9 \\
& + 5e^{36a})w + b(-9+5e^{36a})w) \sin[18b]) - 2(1-e^{36a})m \sin[18b] (4e^{18a}(a(h-w) \\
& + b(h+w)) - 2(a(1+e^{36a})(h-w) + b(h+e^{36a}h - 7m + 7e^{36a}m + w + e^{36a}w)) \cos[18b] \\
& + 2(-b(-1+e^{36a})(h-w) + a((-1+e^{36a})h + 7(1+e^{36a})m + (-1+e^{36a})w)) \sin[18b]) \\
& - 2(1-e^{36a})m \cos[18b] (14e^{18a}(a(h-2m-w) + b(h+w)) - (7a(1+e^{36a})(h-2m- \\
& w) + b(7(1+e^{36a})h + 4(-1+e^{36a})m + 7(1+e^{36a})w)) \cos[18b] + (-7b(-1+e^{36a}) \\
& (h-2m-w) + a(7(-1+e^{36a})h + 4(1+e^{36a})m + 7(-1+e^{36a})w)) \sin[18b]) - ((1 \\
& +e^{36a})(h+w)\cos[18b] - (-1+e^{36a})(h-2m-w)\sin[18b]) (4e^{18a}(a(h-2m-w) \\
& + b(h+w)) + (b((-9+5e^{36a})h - 14(-1+e^{36a})m + (5-9e^{36a})w) + a((-9+5e^{36a})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& h + 4(1 + e^{36a})m + (-5 + 9e^{36a})w) \cos[18b] + (b((9 + 5e^{36a})h + 4(-1 + e^{36a})m + \\
& (5 + 9e^{36a})w) + a((-9 - 5e^{36a})h + 14(1 + e^{36a})m + (5 + 9e^{36a})w) \sin[18b])) / \\
& \left((a^2 + b^2) \left(\frac{2\cos[9]^2}{3} + \frac{1}{6}e^{-18\sqrt{3}}\cos[9]^2 + \frac{1}{6}e^{18\sqrt{3}}\cos[9]^2 + \frac{2\sin[9]^2}{3} + \frac{1}{6}e^{-18\sqrt{3}} \right. \right. \\
& \left. \left. \sin[9]^2 + \frac{1}{6}e^{18\sqrt{3}}\sin[9]^2 \right) \right) + \left(e^{-9\sqrt{3}-36a} \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{12}(-3 + \sqrt{3}) + \frac{1}{12}(3 + \sqrt{3}) \right) \right. \right. \\
& \left. \left. (-1 + e^{18\sqrt{3}}) \cos[9] - \left(\frac{1}{12}(3 - \sqrt{3}) + \frac{1}{12}(3 + \sqrt{3}) \right) (1 + e^{18\sqrt{3}}) \sin[9] \right) ((1 + \right. \\
& e^{36a})(h + w)\cos[18b] - (-1 + e^{36a})(h - w)\sin[18b]) (14e^{18a}(a(h - w) + b(h + w) \\
&)) - (a(5 + 9e^{36a})h + b(5 + 9e^{36a})h - a(9 + 5e^{36a})w + b(9 + 5e^{36a})w) \cos[18b] + \\
& (b(5 - 9e^{36a})h + a(-5 + 9e^{36a})h + a(-9 + 5e^{36a})w + b(-9 + 5e^{36a})w) \sin[18b]) + \\
& 2(1 - e^{36a})m\cos[18b] (4e^{18a}(a(h - w) + b(h + w)) - 2(a(1 + e^{36a})(h - w) + b(h + \\
& e^{36a})h - 7m + 7e^{36a}m + w + e^{36a}w)) \cos[18b] + 2(-b(-1 + e^{36a})(h - w) + a((-1 + \\
& e^{36a})h + 7(1 + e^{36a})m + (-1 + e^{36a})w)) \sin[18b]) - 2(1 - e^{36a})m\sin[18b] (14 \\
& e^{18a}(a(h - 2m - w) + b(h + w)) - (7a(1 + e^{36a})(h - 2m - w) + b(7(1 + e^{36a})h + 4 \\
& (-1 + e^{36a})m + 7(1 + e^{36a})w)) \cos[18b] + (-7b(-1 + e^{36a})(h - 2m - w) + a(7(- \\
& -1 + e^{36a})h + 4(1 + e^{36a})m + 7(-1 + e^{36a})w)) \sin[18b]) - ((1 - e^{36a})(h - w) \\
& \cos[18b] + (1 + e^{36a})(h + w)\sin[18b]) (4e^{18a}(a(h - 2m - w) + b(h + w)) + (b \\
& ((-9 + 5e^{36a})h - 14(-1 + e^{36a})m + (5 - 9e^{36a})w) + a((-9 + 5e^{36a})h + 4(1 + e^{36a}) \\
&)m + (-5 + 9e^{36a})w)) \cos[18b] + (b((9 + 5e^{36a})h + 4(-1 + e^{36a})m + (5 + 9e^{36a}) \\
& w) + a((-9 - 5e^{36a})h + 14(1 + e^{36a})m + (5 + 9e^{36a})w) \sin[18b])) / ((a^2 + b^2 \\
&) \left(\frac{2\cos[9]^2}{3} + \frac{1}{6}e^{-18\sqrt{3}}\cos[9]^2 + \frac{1}{6}e^{18\sqrt{3}}\cos[9]^2 + \frac{2\sin[9]^2}{3} + \frac{1}{6}e^{-18\sqrt{3}} \right. \\
& \left. \sin[9]^2 + \frac{1}{6}e^{18\sqrt{3}}\sin[9]^2 \right)).
\end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] Agarwal, R. and O'Regan, D. (2009). *An introduction to ordinary differential equations*. New York, NY: Springer.
- [2] Pontryagin L., Boltianskii, V., Gamkrelidze, R., Mishchenko, E. and Neustadt, L. (n.d.). *The mathematical theory of optimal processes*.
- [3] R.R Wilde, P.V. Kokotovic, *A dichotomy in linear control theory*, IEEE Trans. Automatic Control 17 (1972).
- [4] J.T. Bet, *Practical methods for optimal control and estimation using nonlinear programming*, Second edition, Advances in Design and Control, 19, SIAM, Philadelphia,PA, 2010.
- [5] E. Trélat and E. Zuazua, *The turnpike property in finite-dimensional nonlinear optimal control*, J. Diff. Equ. 258 (2015).
- [6] R. Bulirsch and J. Stoer, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer, Heidelberg, 2002.
- [7] Ascher, U., Mattheij, R. and Russell, R. (1995), *Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations*, Philadelphia: SIAM.
- [8] Reviews, C. (2013), *Studyguide for fortran 90/95 for scientists and engineers by chapman*, [Place of publication not identified]: Academic Internet Publish.
- [9] Hastings, C., Mischo, K. and Morrison, M. (n.d.). *Hands-on start to Wolfram Mathematica*.
- [10] H. Kwakernaak, R. Sivan, *Linear optimal control systems*, Wiley-Interscience, New York-London-Sydney.
- [11] Chapra, S. and Canale, R. (2010). *Numerical methods for engineers*, 6th ed. New York: McGraw-Hill.
- [12] Gohberg, I., Lancaster, P. and Rodman, L. (2005). *Indefinite Linear Algebra and Applications*. Birkhauser Verlag: Springer Science+Business Media, pp.309-313.
- [13] Pinch, E. (2002). *Optimal control and the calculus of variations*. Oxford: Oxford University Press, pp.18-31.
- [14] Athans, M., & Falb, P. (2007). *Optimal control* (pp. 15,750-804). Mineola: Dover Publ.

- [15] Brauer, F., Van den Driessche, P., Wu, J., & Allen, L. (2008). *Mathematical epidemiology* (1st ed., pp. 52-55). Berlin: Springer.
- [16] SCHMIDT, D., & INNOCENTI, M. (1984). Quadratic optimal cooperative control synthesis with flight control application. *Journal Of Guidance, Control, And Dynamics*, 7(2), 206-214. doi: 10.2514/3.8568
- [17] Aitziber Ibañez (2017) Optimal control of the Lotka-Volterra system: turnpike property and numrical simulations, *journal of biological Dinamics*, 11:1, 25-4, DOI: 10.1080/17513758.2016.1226435
- [18] Leung, S. (2007). An economic application of the Dubovitskii–Milyutin version of the Maximum Principle. *Optimal Control Applications and Methods*, 28(6), pp.435-449.
- [19] Gamkrelidze, R.V.. (1970). Discovery of the Maximum Principle. 10.1007/3-540-29462-7_5.
- [20] Zabczyk, J. (2008). *Mathematical control theory*. Boston: Birkhauser, p.17.
- [21] R. Lebovitz, N. (n.d.). *Ordinary Differential Equations*. 1st ed. [ebook] Chicago: University of Chicago, pp.179-187. Available at: <http://people.cs.uchicago.edu/~lebovitz/Eodesbook/stabeq.pdf> [Accessed 3 Mar. 2019].
- [22] Kolmogorov, A., Fomin, S. and Silverman, R. (1975). *Introductory real analysis*. New York: Dover Publications, p.284.
- [23] Halmos, P. (1974). *Measure theory*. New York: Springer-Verlag, p.77.
- [24] Zaslavski, A. (2006). *Turnpike Properties in the Calculus of Variations and Optimal Control* (p. ix - xxi). Boston, MA: Springer Science+Business Media, Inc.
- [25] Paige, Chris; Styan, George P. H.; Wang, Bo-Ying; and Zhang, Fuzhen, *Hua’s Matrix Equality and Schur Complements* (2008). *Mathematics Faculty Articles*. 62.