Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Introducción al problema del S- y L-espacio

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas

P R E S E N T A :

Emmanuel Alejandro Balderas Cristóbal

TUTOR:

Dr Fernando Hernández Hernández

Ciudad Universitaria, Morelia, Michoacán,

JUNIO 2019

Dedicado a mi familia...

Índice general

Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer a Dios por permitirme terminar mis estudios de licenciatura. Muchas gracias por siempre darme la fuerza para seguir adelante.

Agradezco especialmente a mi asesor, maestro y amigo Fernando, por toda la paciencia a la hora de dirigir este trabajo, realmente le debo mucho porque, además de ser un excelente matemático y una verdadera inspiración para mi, es un gran ser humano, le agradezco infinitamente todo el apoyo que recibí de su parte durante mi estancia en la facultad, definitivamente es una persona a la que realmente le importan los alumnos de la facultad. Muchas gracias otra vez, la verdad me divertí un montón haciendo este trabajo.

Agradezco también a todos mis profesores por toda la paciencia en clases y por siempre llegar al salón con muchas ganas de trabajar. Especialmente agradezco a mis sinodales Fernando, Bosco, Karina, Ahtziri y Luis Valero por haberse tomado el tiempo de revisar mi trabajo y por todas sus valiosas observaciones. De igual forma agradezco a Reynado por su ayuda en algunas partes de mi tesis, además de su valiosa amistad.

Muchas gracias a Irving, Brenda, Alí, Enoc, Rafa, Emmanuel, Paco, Tena y a todos mis amigos de la facultad, en especial a mis amigos de generación. Los que más me conocen saben que no soy una persona muy amigable ni de muchas palabras, por eso, tengan la seguridad de que si aquí les agradezco, lo hago de todo corazón. Ustedes fueron lo mejor de la carrera, la pase muy bien a su lado y aprendí mucho de ustedes, espero que sigamos manteniendo nuestra amistad.

Muchas gracias a mis amigos de cási toda la vida, Edgar, Beto y Sergio a quienes siempre los tengo presentes como un miembro más de mi familia. Gracias por todos los consejos, palabras de aliento y buenos momentos a su lado.

Finalmente quiero agradecer a las personas más importantes de mi vida; mi familia. Muchas gracias a mi padres, Jesús y Rosa por todo el amor que me han dado, por tenerme fe infinita, por ser un ejemplo a seguir y por ser unas personas que dedicaron su vida a sus hijos; todo lo que soy se los debo a ustedes. Gracias a mis hermanos Jesús y Felipe, que, aunque nunca se los digo, ustedes son lo que más quiero en el mundo.

Les dedico a ustedes, mi familia, este trabajo y este primer gran logro en mi vida profesional. Gracias por todo.

Resumen

En el presente trabajo se introduce al lector al problema del S-espacio y L-espacio, el cual tuvo sus orígenes en la década de 1920 y que fue resuelto en 2006.

En el capítulo 1, se introducen algunas definiciones y resultados importantes de tcoría dc conjuntos, topología y combinatoria infinita quc scrán usados a lo largo dc este trabajo. El capítulo 2 introduce definiciones como: hereditariamente separable, hereditariamente Lindelöf, espacio separado izquierdo y espacio separado derecho, además de que demuestran los primeros resultados acerca de los espacios hereditariamente separables y hereditariamente Lindelöf . En el capítulo 3 presentamos algunas construcciones de S-espacios y L-espacios bajo la Hipótesis del Continuo (abreviado CH) como: La Línea de Kunen y los espacios de Luzin. El trabajo finaliza con la construcción de Justin Moore en ZFC (los axiomas de Zermelo-Fraenkel complementados por el axioma de elección) de un L-espacio. Dicha construcción tiene como cimientos el método de caminos minimales el cual fue desarrollado por Stevo Todorcevic.

Palabras clave: teoría, conjuntos, topología, combinatoria, infinita, hereditariamente, separable, Lindelöf, caminos, minimales.

Abstract

The present text the reader is presented with the problem of S-space and L-space, which had its origins in the 1920s and was resolved in 2006.

In Chapter 1, some definitions and important results of the set theory, topology and infinitary combinatorics are presented that are used throughout this job. Chapter 2 introduces the terms such as: hereditarily separable, hereditarily Lindelöf, separated space left and space separated right, in addition to the first results about the spaces hereditarily separable and hereditarily Lindel"from. In the Chapter 3 presents some constructions of S-spaces and L-spaces under the Continuum Hyphotesis (abbreviated CH) as: The Kunen Line and the spaces of Luzin. The job finish with the construction of Justin Moore in ZFC (the Zermelo-Fraenkel axioms complemented by the Axiom of Choice) of an L-space. Said construction has as principles the method of minimal walks which was developed by Stevo Todorcevic.

Keywords: theory, set, topology, combinatorics, infinitary, hereditarily, separable, Lindelöf, minimal, walks.

Introducción

El problema de la existencia de los S-espacios y L-espacios tuvo sus orígenes alrededor 1920, como un crecimiento natural de la Hipótesis de Suslin y de investigaciones de espacios métricos, semi-métricos y Fréchet. En su forma moderna, el problema se planteó de manera independiente a finales de 1960 y principios de 1970 por Countryman y por Hajnal y Juhász. Para ese entonces la teoría de conjuntos era lo suficientemente fuerte para atacar el problema de forma seria y por los siguientes 10 años fue una de las áreas más activas de la topología teórica.

Un espacio es hereditariamente separable si cualquier subespacio tiene un denso numerable. Por otro lado, un espacio es hereditariamente Lindelöf, si cualquier cubierta de cualquier subespacio tiene subcubierta numerable. Ambos son duales en el sentido de que (bajo una leve reafirmación), cambiando "punto" por "conjunto abierto" en las definiciones, pasamos de una a otra. Entonces, ¿siempre coinciden?

Para espacios no regulares la respuesta es no. Escoja un subespacio no numerable de reales bien ordenado con tipo de orden ω_1 y refine su topología de subespacio declarando abiertos todos los segmentos iniciales. Este espacio es Hausdorff, no regular, hereditariamente separable no Lindelöf. Por otro lado si se declaran como cerrados todos los segmentos iniciales, el espacio es Hausdorff, no regular, hereditariamente

Lindelöf no separable. Así, el problema es interesante sólo para espacios regulares.

Defina un S-espacio como un espacio regular, Hausdorff, hereditariamente separable y no Lindelöf. Por otro lado, un L-espacio es un espacio regular, Hausdorff, hereditariamente Lindelöf y no separable. La pregunta ahora es, ¿existen estos espacios?

Un corolario de Kurepa (1935) es que una Línea de Suslin es un L-espacio. La relación de hereditariamente separable y Lindelöf fue estudiada por la escuela de Topología de Texas en muchas clases de espacios. De esta forma se probó, por ejemplo, que los espacios de Moore hereditariamente separables son metrizables.
En 1967 Jech probó la consistencia de la existencia de una Línea de Suslin; de aquí, la consistencia de la existencia de un L-espacio. En 1972 M.E. Rudin construyó un S-espacio a partir de una línea de Suslin.

Rápidamente, S-espacios y L-espacios con diferentes propiedades fueron construidos bajo la Hipótesis del Continuo (CH), el Principio Combinatorio Diamante ($\diamond$) y usando la técnica de *forcing*. Sin embargo, siempre que un S-espacio o L-espacio era construido, alguien demostraba que la construcción tenía propiedades descartadas por MA+$\neg$CH. La gran pregunta era: ¿es consistente que no hay S-espacios o L-espacios?

Lo más natural fue mirar bajo MA+$\neg$CH pero en 1977 Szentmiklossy demostró que MA+$\neg$CH era consistente con la existencia de S-espacios. Su demostración no se dualizaba para L-espacios.

En 1981 Todorcevic demostró la consistencia de no hay S-espacios. Nuevamente, la prueba no parecía dual para L-espacios. Finalmente, en el 2006, Justin Tatch Moore construyó un L-espacio sin suponer axiomas adicionales.

Se espera preferentemente que el lector tenga un sólido conocimiento en teoría de conjuntos y topología, además de estar familiarizado con argumentos de combinatoria infinita (si el lector lo necesita puede consultar [3], o bien [4]). Aunque en el primer capítulo de este trabajo se da una breve introducción de números ordinales y cardinales, si el lector lo cree necesario puede consultar [2]. Los primeros capítulos de este texto, están basados en el capítulo 7 del libro Handbook of Set-Theoretic Topology (ver [8]).

Finalmente, con lo expuesto en este trabajo, se responde a la siguiente pregunta planteada por Iván Martínez Ruíz, Alejandro Ramírez Páramo y Armando Romero Morales en el artículo de exposición "Espacios $\pi-$completos" publicado en las Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana [6]: ¿si X es un espacio Lindelöf, ccc y con estrechez numerable, entonces X es separable? La respuesta es no, en el capítulo 4 damos un ejemplo en ZFC de un L-espacio de estrechez numerable (ver Teorema 4.4); por lo que en ZFC la pregunta queda resuelta.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo, se introducirán algunas definiciones y resultados básicos de teoría de conjuntos y topología que serán frecuentemente utilizados a lo largo de este trabajo.

1.1. Números ordinales y cardinales

Definición 1.1 *Una relación binaria $\leq$ sobre un conjunto P la llamamos orden (parcial) si es:*

(1) reflexiva: para cada $p \in P$, $p \leq p$;

(2) antisimétrica: para cada $p, q \in P$, $p \leq q$ y $q \leq p$, implica $p = q$;

(3) transitiva: si $p \leq q$ y $q \leq r$, entonces $p \leq r$.

Definición 1.2 *Sean a, b en P, sea $\leq$ un orden en P, decimos que a y b son comparables en el orden $\leq$ si*

$$a \leq b \text{ o } b \leq a.$$

Definición 1.3 *Un orden $\leq$ sobre P se llama orden lineal o total si cualesquiera dos elementos de P son comparables. El par $(P, \leq)$ es entonces llamado conjunto* *linealmente o totalmente ordenado.*

Definición 1.4 *Sea $\leq$ un orden en P, y sea $B \subseteq P$, entonces;*

1) $b \in B$ es elemento mínimo de B en el orden $\leq$ si para cualquier $x \in B$, $b \leq x$,

2) $b \in B$ es elemento minimal de B en el orden $\leq$ si no hay $x \in B$, tal que $x \leq b$ y $x \neq b$,

3) $b \in B$ es elemento máximo de B en el orden $\leq$ si para cualquier $x \in B$, $x \leq b$,

4) $b \in B$ es elemento maximal de B en el orden $\leq$ si no hay $x \in B$, tal que $b \leq x$ y $x \neq b$.

Definición 1.5 *Un conjunto parcialmente ordenado $(W, \leq)$ se llama bien ordenado si cada subconjunto no vacío $B \subseteq W$ tiene elemento mínimo. En este caso $\leq$ se llama buen orden.*

Observe que cualquier conjunto bien ordenado $(P, \leq)$ es en particular un conjunto linealmente ordenado, ya que cualquier subconjunto $\{a, b\} \subseteq P$ tiene elemento mínimo.

Suponga que $(X, \leq)$ es un conjunto linealmente ordenado. Para cada $x \in X$, definimos la familia de vecindades de x denotada por $\mathscr{V}(x)$ como sigue:

- Si $x = \min X$, entonces $V \in \mathscr{V}(x)$ si y sólo si V contiene un intervalo de la forma $[x, y)$ para algún $y > x$,
- Si $x = \max X$, entonces $V \in \mathscr{V}(x)$ si y sólo si V contiene un intervalo de la forma $(y, x]$ para algún $y < x$,
- En otro caso, $V \in \mathscr{V}(x)$ si y sólo si V contiene un intervalo de la forma (y, z) para algunos y y z tales que $y < x < z$.

La topología que estas familias $\mathscr{V}(x)$ generan se llama *topología del orden*. De aquí en adelante cuando hagamos referencia a una topología en un conjunto linealmente ordenado, entenderemos que nos referimos a la topología del orden a menos que se especifique otra topología.

Definición 1.6 *Si $(X, \leq)$ es un orden lineal y $A, B \subseteq X$, decimos que A es cofinal en B si $A \subseteq B$ y para cada $b \in B$, existe $a \in A$, tal que $b \leq a$.*

Aunque esta definición es para conjuntos parcialmente ordenados en general, en este trabajo sólo estará aplicando en números ordinales los cuales se definen a continuación.

Definición 1.7 *Un conjunto X es transitivo si siempre que $x \in X$, entonces $x \subseteq X$.*

Definición 1.8 *Un número ordinal o simplemente ordinal es un conjunto transitivo y bien ordenado por la relación de pertenencia.*

Si α es un ordinal, entonces $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$ también es un ordinal. Por otro lado, cada elemento de un ordinal es, a su vez un ordinal. Así pues, un ordinal α lo llamamos *ordinal sucesor* si existe un β tal que $\alpha = \beta + 1$; de otro modo diremos que α es un *ordinal límite*.

Para dos números ordinales cualesquiera α y β, definimos $\alpha < \beta$ si y sólo si $\alpha \in \beta$. Esta relación resulta ser un buen orden sobre cualquier conjunto de ordinales.

Es importante mencionar que para cualquier conjunto de ordinales X, el conjunto $(\bigcup X) + 1$ es un número ordinal que no pertenece a X. Al ordinal $\bigcup X$ lo llamaremos el *supremo* de X y lo denotaremos $\sup X$. De este modo el conjunto de todos los números ordinales no existe. A la clase de los ordinales la denotaremos por **ON**.

Los números naturales son los números ordinales finitos, así un número natural n es el conjunto de todos los números naturales anteriores $n = \{0, 1, 2, , n - 1\}$. El conjunto de números naturales, denotado por $\mathbb{N}$ o más comúnmente (en este y otros trabajos similares) por ω, es también un ordinal.

Teorema 1.1 (Cantor) *Cualquier conjunto bien ordenado es isomorfo a un único número ordinal.*

El teorema anterior es uno de los resultados más importantes de la teoría de conjuntos, si el lector está interesado en ver la demostración de este teorema puede consultarla en [2]. Además de su gran importancia, sirve para inspirar la siguiente definición. Si $(W, \leq)$ es un conjunto bien ordenado, entonces el *tipo de orden* de $(W, \leq)$ es el único número ordinal isomorfo a W.

Definición 1.9 *Sea δ un ordinal límite, decimos que $C \subseteq \delta$, es un club si es cerrado y no acotado.*

Consideremos ahora dos conjuntos A y B cualesquiera, decimos que A y B tienen la misma *cardinalidad*, denotado $|A| = |B|$ si existe una función biyectiva entre ellos. Así, $|A| \leq |B|$, significa que existe una función inyectiva de A a B. Se sigue del Axióma de Elección que cualesquiera dos conjuntos son comparables bajo el orden $\leq$.

Definición 1.10 *Un número ordinal α, es llamado número cardinal si $|\alpha| \neq |\beta|$ para cada $\beta < \alpha$.*

Así pues, si A es un conjunto, podemos definir $|A| = \text{mín}\{\alpha \in \mathbf{ON} : |A| = |\alpha|\}$. Este número siempre existirá y claramente será un número cardinal. Los números naturales son también cardinales y a los ordinales infinitos que sean cardinales les llamaremos *alephs*, denotándolos por $\aleph$.

Para cada número cardinal $\aleph_\alpha$, existe un cardinal más grande. El *cardinal sucesor* de α, denotado $\aleph_\alpha^+$, será el mínimo cardinal mayor a α. Si X es un conjunto de cardinales, entonces sup X es también un cardinal, por lo que, al igual que con los ordinales, el conjunto de números cardinales no existe. A la clase de los cardinales la denotaremos **CN**.

Usando lo anterior, podemos definir una enumeración de los alephs;

1) $\aleph_0 := \omega_0 := \omega$;

2) $\aleph_{\alpha+1} := \omega_{\alpha+1} := \aleph_\alpha^+$;

3) si α es un ordinal límite $\aleph_\alpha := \omega_\alpha = \sup\{\omega_\beta : \beta < \alpha\}$.

Un cardinal $\aleph_\alpha$, será llamado *cardinal sucesor* si α es ordinal sucesor y *cardinal límite* si α es límite.

Definición 1.11 *Si α es un ordinal, se define la cofinalidad de α como*

$$cf(\alpha) = \text{mín}\{|B| : B \ es \ cofinal \ en \ \alpha\}.$$

Es inmediato que este número siempre existe y, además, $cf(\alpha) \leq \alpha$. Dado que cada cardinal infinito es un ordinal límite, podemos hacer una clasificación de los cardinales de la siguiente manera.

$$\aleph_\alpha \ es \ regular \ si \ cf(\omega_\alpha) = \omega_\alpha \ y \ será \ singular \ si \ cf(\omega_\alpha) < \omega_\alpha.$$

Un ejemplo de un cardinal singular es $\aleph_\omega$, el lector puede convencerse fácilmente de que $\{\aleph_n : n \in \omega\}$ es cofinal en $\aleph_\omega$. Más aún, es posible encontrar cardinales singulares, arbitrariamente grandes, por ejemplo, cualquier cardinal de la forma $\aleph_{\alpha+\omega}$, tendrá cofinalidad ω.

Un cardinal regular y límite es $\aleph_0$, sin embargo, no se puede probar en **ZFC** que existe un cardinal no numerable, regular y límite. A este tipo de cardinales se les llama (*débilmete*) *inaccesibles*.

1.2. Submodelos elementales

En varias demostraciones de este documento usaremos submodelos elementales de un conjunto $H(\theta)$. Si el lector desea profundizar más en los conceptos aquí expuestos, puede consultar [5]. En esta sección daremos una breve introducción y presentaremos resultados que se usarán en algunas demostraciones.

Comencemos introduciendo al conjunto $H(\theta)$ y presentemos algunas de sus propiedades. Recuerde que un conjunto x es *transitivo* si siempre que $y \in x$ se sigue que $y \subseteq x$. Defina la *clausura transitiva* de un conjunto x como el $\subseteq$-mínimo conjunto transitivo $tc(x)$ que contiene a x. Observe que si x es un conjunto, entonces $tc(x) = x \cup \{tc(y) : y \in x\}$.

Definición 1.12 *Para cualquier número cardinal κ, definimos*

$$H(\kappa) := \{x : |tc(x)| < \kappa\}.$$

Un hecho sencillo de ver es que $H(\kappa)$ es un conjunto transitivo. En el siguiente lema encontramos una forma de ver a los conjuntos $H(\theta)$, para θ regular.

Lema 1.1 *Si θ es un cardinal regular, entonces $H(\theta) = \{x \subseteq H(\theta) : |x| < \theta\}$.*

Demostración: Si x está en $H(\theta)$, entonces por ser $H(\theta)$ un conjunto transitivo $x \subseteq H(\theta)$, además como $x \subseteq tc(x)$ se sigue que $|x| < |tc(x)| < \theta$.
Para la segunda contención; sea $x \subseteq H(\theta)$, si y está en x entonces $|tc(y)| < \theta$, por lo tanto $|tc(x)| = |\bigcup\{tc(y) : y \in x\}| < \theta$, pues θ es regular. $\square$

El siguiente lema nos muestra algunas propiedades importantes de $H(\theta)$ fáciles de verificar.

Lema 1.2 *Para cada cardinal infinito κ, se tiene que:*

(1) Si $y \subseteq x$ y $x \in H(\kappa)$, entonces $y \in H(\kappa)$,

(2) $H(\kappa) \cap \boldsymbol{ON} = \kappa$,

(3) Para cada $x, y \in H(\kappa)$, los siguientes conjuntos también son elementos de $H(\kappa)$: $\{x, y\}$, (x, y), $x \cup y$, $x \times y$.

Observe que la última propiedad nos dice que cualquier función $f : x \to y$ está en $H(\kappa)$ siempre que x y y estén en $H(\kappa)$.

Supongamos que $\mathcal{V}$, la clase de todos los conjuntos, es un modelo para **ZFC** con $\in$, la pertenencia usual de conjuntos; entonces cualquier modelo $\mathcal{A} = (A, \in_{\mathcal{A}})$, será un conjunto o una subclase de $\mathcal{V}$ que hereda la relación de pertenencia usual. Haciendo un abuso de notación escribimos $\mathcal{A} = (A, \in)$.

La verdad de una fórmula φ de la teoría de conjuntos se refiere a su verdad en $\mathcal{V}$. Supongamos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}$ y $a_0, a_1, .., a_n$ es una sucesión de elementos de A. Por inducción en la complejidad de φ, definiremos $\mathcal{A} \models \varphi$, la relación de satisfacción para $\mathcal{A}$, como

$$\mathcal{A} \models a \in b \iff a \in b,$$

$$\mathcal{A} \models a = b \iff a = b,$$

$$\mathcal{A} \models (\neg\varphi) \iff \text{no ocurre}\, \mathcal{A} \models \varphi,$$

$$\mathcal{A} \models (\psi \vee \varphi) \iff \mathcal{A} \models \psi \vee \mathcal{A} \models \varphi,$$

$$\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x, a_0, .., a_n) \iff (\exists a \in A)\, \mathcal{A} \models \varphi(a, a_0, .., a_n).$$

Definición 1.13 *Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A}$ es un submodelo elemental de $\mathcal{B}$, escrito $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ si y sólo si para cada fórmula φ de la teoría de conjuntos con n variables* *libres y cualesquiera $a_0, .., a_n \in A$, se cumple que*

$$\mathcal{A} \models \varphi(a_0, .., a_n) \Longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi(a_0, .., a_n).$$

Intuitivamente, $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ si toda afirmación de los elementos de A es cierta para $\mathcal{A}$ si y sólo si es cierta para $\mathcal{B}$. El siguiente lema nos simplifica la tarea de demostrar elementaridad.

Lema 1.3 (Tarski-Vaught) *Suponga que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ si y sólo si, para cada fórmula φ y cualesquiera $a_0, .., , a_n \in A$, se tiene que*

$$\mathcal{B} \models (\exists x)\varphi(a_0, .., a_n, x) \Rightarrow \exists a \in A(\mathcal{A} \models \varphi(a_0, .., a_n, a)).$$

Definición 1.14 *Sea M una clase transitiva y φ una fórmula de la teoría de conjuntos. Definimos la relativización de φ a M, denotado por φ^M, de manera inductiva sobre la complejidad de las fórmulas:*

(1) $(x \in y)^M$ es la fórmula $x \in y$, $(x = y)^M$ es la fórmula $x = y$,

(2) $\neg(\psi)^M$ es la fórmula $(\neg\psi)^M$, $(\psi \wedge \varphi)^M$ es la fórmula $\psi^M \wedge \varphi^M$,

(3) $(\exists x \varphi^M)$ es la fórmula $\exists x(x \in M \vee \varphi^M)$.

Definición 1.15 *Si M es una clase transitiva, una fórmula φ de la teoría de conjuntos es llamada absoluta para M si y sólo si*

$$\forall x_0, .., x_n \in M(\varphi(x_0, .., x_n)) \Longleftrightarrow \varphi^M(x_0, .., x_n).$$

A continuación, enunciaremos una forma general del Teorema de Reflección y enseguida explicaremos su importancia.

Teorema 1.2 *Suponga que $\mathcal{Z}$ es una clase y $\mathcal{Z}(\alpha)$ es un conjunto para cada $\alpha \in$ **ON**, y que satisface lo siguiente:*

(1) $\alpha < \beta \Longrightarrow \mathcal{Z}(\alpha) \subseteq \mathcal{Z}(\beta)$*,*

(2) si γ *es un ordinal límite, entonces* $\mathcal{Z}(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{Z}(\alpha)$*,*

(3) $\mathcal{Z} = \bigcup_{\alpha\in \boldsymbol{ON}} \mathcal{Z}(\alpha)$*.*

Entonces, para cualesquiera fórmulas $\varphi_0, .., \varphi_n$*, se tiene que*

$$\forall\alpha \in \boldsymbol{ON}(\exists\beta > \alpha)(\varphi_0, .., \varphi_n \textit{ son absolutas para } \mathcal{Z}, \mathcal{Z}(\beta)).$$

Note que para cada $\alpha \in \mathbf{ON}$, podemos considerar $\mathcal{Z}(\alpha) := H(|\alpha|)$, entonces $\mathcal{Z} = \mathcal{V}$, el universo de todos los conjuntos. Así pues, el teorema anterior nos afirma que para cada fórmula φ de la teoría de conjuntos, podemos encontrar θ cardinal regular tal que φ sea absoluta para $\mathcal{V}, H(\theta)$. Más aún, dado que cualquier demostración que hagamos termina en un número finito de pasos, podemos encontrar un θ suficientemente grande para el cual todas las fórmulas que usamos para la demostración sean absolutas para $\mathcal{V}, H(\theta)$; además podemos pedir que $H(\theta)$ tenga como elementos a todos los conjuntos que ocupemos. De aquí en adelante, cuando digamos “sea θ suficientemente grande”, nos referiremos a lo anterior, es decir, $H(\theta)$ tendrá todo lo que vayamos a utilizar y las verdades relevantes para nuestra demostración.

Lema 1.4 *Si* θ *es un cardinal regular no numerable,* $H(\theta)$ *es un modelo de* $\boldsymbol{ZFC}^-$*, esto es,* $\boldsymbol{ZFC}$ *sin el axioma del conjunto potencia.*

La demostración de este lema en realidad es muy sencilla, aunque se convierte en larga y tediosa. Si el lector está interesado en la prueba de este lema, puede consultar [5] y ahí encontrará una demostración detallada.

Teorema 1.3 (Löwenheim-Skolem) *Si* θ *es un cardinal regular y no numerable,* $X \subseteq H(\theta)$*; entonces existe* $\mathcal{M} \prec H(\theta)$ *tal que* $X \subseteq \mathcal{M}$ *y* $|\mathcal{M}| = |X| + \aleph_0$*.*

Pese a que no se puede probar la existencia de submodelos elementales para $\mathcal{V}$, el teorema anterior garantiza la existencia de submodelos elementales de $H(\theta)$. Más que eso, garantiza la existencia de submodelos numerables, los cuales serán de gran importancia más adelante.

Definición 1.16 *Suponga que* $N \prec H(\theta)$, φ *una fórmula de la teoría de conjuntos y* $p_0, .., p_n \in N$ *y*

$$b := \{x \in H(\theta) : H(\theta) \models \varphi(x, p_0, .., p_n)\}$$

entonces decimos que b *es definible en* $H(\theta)$ *por una fórmula con parámetros en* N.

Finalizamos esta sección con algunas propiedades importantes cuando se trabaja con submodelos elementales numerables.

Proposición 1.1 *Si* M *es un submodelo elemental numerable de* $H(\theta)$, *entonces se tiene que* $M \cap \omega_1$, *es un ordinal. Más aún, si* F *es un subconjunto numerable de* $H(\theta)$, *el conjunto de ordinales de la forma* $M \cap \omega_1$, *tal que* M *es un submodelo elemental de* $H(\theta)$ *con* $F \subseteq M$, *contiene un club.*

Proposición 1.2 *Si* M *es un submodelo elemental numerable de* $H(\theta)$ *y* $X \subseteq H(\theta)$, *entonces* X *es numerable si y sólo si* $X \subseteq M$.

Proposición 1.3 *Si* M *es un submodelo elemental numerable de* $H(\theta)$ *que contiene como elemento a un subconjunto* A *de* ω_1, *entonces* A *es no numerable si y sólo si* $A \cap M \cap \omega_1$ *no es acotado en* $M \cap \omega_1$.

Proposición 1.4 *Si* M *es un submodelo elemental numerable de* $H(\theta)$, X *está en* $H(\theta)$ *y* X *es definible por una fórmula con parámetros en* M, *entonces* X *está en* M.

1.3. Árboles de Aronszajn

En esta sección se introduce un tipo especial de árbol que será de nuestro particular interés en la parte final de este trabajo.

Primero veamos algo de notación; si X, Y son conjuntos, entonces Y^X es el conjunto de funciones de X a Y; $f|_A$ es la restricción de la función f a A.

Definición 1.17 *Un árbol es un conjunto parcialmente ordenado* $(T, \leq)$*, de modo que* T *tiene un elemento mínimo llamado raíz y el conjunto de predecesores de* t *en* T*,* $\{s \in T : s < t\}$*, está bien ordenado para cada* $t \in T$*.*

Como es costumbre en varios textos, cuando el orden del árbol no esté en controversia, nos referiremos al árbol como T en lugar de $(T, \leq)$. A los elementos de T se les llama *nodos*. Si t es un nodo, el conjunto de sucesores inmediatos es t es $succ(t) = \{s \in T : t \leq s \text{ y } \neg(\exists r \in T)(t < r < s)\}$. La *altura* de un nodo t es el tipo de orden del conjunto de predecesores de t, es decir; $ht(t) = otp\{s \in T : s < t\}$. Una vez definida la altura, es posible definir los *niveles* de T; si α es un ordinal, el α-ésimo nivel de T es

$$Lev(\alpha, T) = \{t \in T : ht(t) = \alpha\}.$$

Ahora la *altura* de T es el mínimo α tal que $Lev(\alpha, T) = \emptyset$. Una *rama* en un árbol es un subconjunto linealmente ordenado $\subseteq$-maximal, es decir, no está contenido propiamente en ningún otro subconjunto linealmente ordenado. Una *rama cofinal* es una rama que intersecta a todos los niveles del árbol. Hay árboles que no tienen ramas cofinales, más adelante presentaremos un ejemplo.

Como se dijo arriba, las ramas de un árbol son cadenas maximales; su contraparte, las *anticadenas*, también son subconjuntos importantes en el estudio de los árboles. Una anticadena es un subconjunto $A \subseteq T$ de modo que cualesquiera dos elementos de A no son comparables en el orden del árbol. Por ejemplo, los niveles de T son anticadenas, pero $Lev(\alpha, T)$ es una anticadena maximal si y sólo si cada nodo de T es comparable con algún elemento de $Lev(\alpha, T)$.

Definición 1.18 *Un árbol de Aronszajn es un árbol T tal que tiene niveles a lo más numerables y no tiene ramas no numerables.*

Teorema 1.4 *Existen los árboles de Aronszajn en **ZFC**.*

Demostración: Construiremos por recursión los niveles $T_\alpha = Lev(T, \alpha)$, para cada $\alpha < \omega_1$, de un árbol de Aronszajn de modo tal que se cumple lo siguiente:

(1) $T_\alpha \subseteq \omega^\alpha$; $|T_\alpha| \leq \aleph_0$;

(2) Si $f \in T_\alpha$, entonces f es inyectiva y $\omega\setminus$ ran(f) es infinito;

(3) Si $f \in T_\alpha$ y $\beta < \alpha$, entonces $f|_\beta \in T_\beta$;

(4) Para cualquier $\beta < \alpha$, cualquier $g \in T_\beta$ y cualquier $X \subseteq \omega\setminus$ ran(g) finito, existe $f \in T_\alpha$, tal que $g \subseteq f$ y $X\cap$ ran$(f)= \emptyset$.

Primero supongamos que dicha construcción puede hacerse y mostraremos que $T = \bigcup_{\alpha<\omega_1} T_\alpha$ es un árbol de Aronszajn. Claramente T es árbol por (3) y cada nivel es a lo más numerable. Observe que por (4), cada T_α es no vacío y por lo tanto T tiene altura ω_1. Además si T tuviera una rama B de longitud ω_1, entonces $\bigcup B$ sería una función inyectiva de ω_1 en ω, lo que es una contradicción.

Procedamos a la construcción de los $T_\alpha{}'s$. Comience haciendo $T_0 = \{\emptyset\}$. Suponga que T_α se ha construido satisfaciendo lo anterior, haga

$$T_{\alpha+1} = \{g \cup (\alpha, a) : g \in T_\alpha \ y \ a \in \omega\setminus ran(g)\}.$$

No es difícil ver que con esta definición se preservan las propiedades recursivas para $\alpha + 1$.

Sea $\alpha < \omega_1$ ordinal límite. Fije $\beta < \alpha$, $g \in T_\beta$ y $X \subseteq \omega\setminus$ ran(g) conjunto finito. Constrúyase una f que dependa de g y de X, como sigue. Primero fije una sucesión creciente $\{a_n : n \in \omega\} \subseteq \alpha$ tal que $a_0 = \beta$ y $\alpha = \sup\{a_n : n \in \omega\}$. Sea $f_0 = g \in T_{\alpha_0}$ y $X_0 = X$. Suponga que ya se han definido $f_n \in T_{\alpha_n}$ y $X_n \subseteq \omega\setminus \operatorname{ran}(f_n)$. Por (2) es posible escoger un conjunto finito $X_{n+1} \supseteq X_n$ tal que $X_{n+1} \cap \operatorname{ran}(f_n) = \emptyset$. Escoja $f_{n+1} \in T_{\alpha_{n+1}}$ tal que $f_{n+1} \supseteq f_n$ y $X_{n+1} \cap \operatorname{ran}(f_{n+1}) = \emptyset$, esto es posible por (4). Haga $f = \bigcup_{n\in\omega} f_n$ para tener que $f : \alpha \to \omega$ es claramente inyectiva, además se tiene que $\operatorname{ran}(f) \cap \bigcup_{n\in\omega} X_n = \emptyset$ y por lo tanto $\omega\setminus \operatorname{ran}(f)$ es infinito, así tenemos que (2) se satisface. Luego, para $\beta < \alpha$, se tiene que $f|_\beta = f_n|_\beta$ siempre que $\beta < a_n$, con esto, tenemos que (3) se satisface también.

Repita la construcción anterior de $f \in T_\alpha$, para cada $g \in \bigcup_{\beta<\alpha} T_\beta$ y para cada $X \subseteq \omega\setminus \operatorname{ran}(g)$; esto hará que (4) se satisfaga. Como $\bigcup_{\beta<\alpha} T_\beta$ es numerable y la cardinalidad de todos los subconjuntos finitos de ω también es numerable, se sigue que T_α es numerable. $\square$

1.4. Otros resultados importantes

En esta sección se presentan algunos teoremas que serán citados frecuentemente a lo largo de este trabajo. Algunos de estos resultados son muy sencillos y tienen la intención de hacer más transparentes y no tan saturadas algunas demostraciones que presentaremos más adelante.

Primero introduzcamos la siguiente notación: si X es un conjunto y κ un número cardinal, entonces $[X]^\kappa = \{A \subseteq X : |A| = \kappa\}$ al igual que $[X]^{<\kappa} = \{A \subseteq X : |A| < \kappa\}$.

Definición 1.19 *Una familia de conjuntos A se llama Δ-sistema si hay un conjunto r tal que $a \cap b = r$ siempre que $a, b \in A$ y $a \neq b$. En tal caso, decimos que r es raíz de A.*

Una de las herramientas más utilizadas en este trabajo está dada por el siguiente teorema.

Teorema 1.5 *Cualquier familia no numerable de conjuntos finitos contiene un Δ-sistema no numerable.*

Demostración: Es equivalente demostrar lo siguiente afirmación:

Para cada $n \in \omega$ y cada $B \subseteq [\omega_1]^n$ no numerable, B contiene un Δ-sistema no numerable.

Procedamos por inducción sobre n. Para $n = 1$, observe que cualquier B como en las hipótesis es un Δ-sistema con raíz $\emptyset$. Suponga que la afirmación es válida para n. Sea $B = \{b_\xi : \xi < \omega_1\} \subseteq [\omega_1]^{n+1}$. Para demostrar que B contiene un Δ-sistema no numerable tenemos dos casos:

Caso 1: Para cada $\alpha \in \omega_1$, el conjunto $\{b \in B : \alpha \in b\}$ es numerable. En este caso, para cada $C \subseteq \omega_1$ numerable el conjunto $\{\xi \in \omega_1 : b_\xi \cap \bigcup_{\eta \in C} b_\eta\} \neq \emptyset$ es numerable. Defina $h : \omega_1 \to \omega_1$ recursivamente como sigue:

$$h(0) = 0;\ \ h(\xi) = \text{mín}\{\eta : b_\eta \cap \bigcup_{\gamma < \xi} b_{h(\gamma)} = \emptyset\}.$$

Entonces la familia $A = \{b_{h(\xi)} : \xi \in \omega_1\}$ es un Δ-sistema con raíz $\emptyset$.

Caso 2: Hay $\alpha \in \omega_1$ tal que $|\{b \in B : \alpha \in b\}| = \aleph_1$. Fije tal α. Sea $C = \{b \in B : \alpha \in b\}$ y $C' = \{c \backslash \{\alpha\} : c \in C\}$, por hipótesis de inducción hay $A' \subseteq C'$ Δ-sistema no numerable con raíz r. Así, $A = \{a \cup \alpha : a \in A'\}$ es un Δ-sistema con raíz $r \cup \{\alpha\}$. Esto finaliza la demostración. $\square$

Existe una generalización de este teorema que es el famoso *Lema del Δ-sistema*. Sin embargo, para nuestros fines, el teorema anterior será suficiente. De aquí en adelante cuando digamos "por el Lema del Δ-sistema", nos referiremos a este teorema.

Lema 1.5 *Sean $X, Y \subseteq \omega_1$ no numerables y ajenos, $f : X \to Y$ una función inyectiva, entonces para cada $\xi \in \omega_1$ es posible encontrar β_ξ y γ_ξ en X y Y respectivamente, tales que $f(\beta_\xi) > \gamma_\xi$ y si $\xi < \xi'$, entonces $\beta_\xi < \gamma_{\xi'}$.*

Demostración: Por recursión. Escoja $\gamma_0 \in Y$ y $\beta_0 \in X$ tales que $f(\beta_0) > \gamma_0$. Sea $\alpha \in \omega_1$ y suponga todo construido para cada $\xi < \alpha$. Sea $\delta = \sup\{\beta_\xi : \xi < \alpha\}$ y escoja γ_α en Y tal que $\gamma_\alpha > \delta$, esto es posible ya que $\{\beta_\xi : \xi < \alpha\}$ es numerable. Finalmente escoja β_α en $X \backslash \{\beta_\xi : \xi < \alpha\}$ tal que $f(\beta_\alpha) > \gamma_\alpha$, otra vez es posible ya que para cada $y \in Y$ sólo hay una cantidad numerable de x en X tal que $f(x) < y$. Esto finaliza la demostración. $\square$

Teorema 1.6 *Sea $\mathscr{F}$ subespacio no numerable de X^{ω_1} con X segundo numerable, entonces existen $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ y $A \subseteq \omega_1$ no numerables tales que para alguna vecindad abierta V en X, $g(\alpha) \notin \overline{V}$ siempre que $g \in \mathscr{G}$ y $\alpha \in A$.*

Demostración: Sea $\mathscr{U}$ base numerable de X. Considere, para cada $\alpha \in \omega_1$, $\{f(\alpha) : f \in \mathscr{F}\}$. Por el Principio del Palomar infinito existen $W_\alpha \in \mathscr{U}$ y $\mathscr{G}_\alpha \subseteq \mathscr{F}$ no numerable tales que $f(\alpha) \in W_\alpha$ siempre que $f \in \mathscr{G}_\alpha$. Otra vez por el principio del Palomar infinito, existen $W \in \mathscr{U}$ y $A \subseteq \omega_1$ no numerable tal que para cada $\alpha \in A$, $W = W_\alpha$. Finalmente haga $\mathscr{G} = \bigcap_{\alpha \in A} \mathscr{G}_\alpha$, entonces $\mathscr{G}$, A y $V = \mathrm{int}(X \backslash W)$ cumplen la conclusión del teorema. $\square$

Teorema 1.7 (Baire) *Si X es un espacio métrico completo entonces, para cada colección $\{U_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos abiertos densos, se tiene que $\bigcap_{n\in\omega} U_n$ es densa.*

El teorema anterior sirve para inspirar la siguiente definición.

Definición 1.20 *Decimos que un espacio X es un espacio de Baire si cualquier intersección numerable de conjuntos densos abiertos es densa.*

Definición 1.21 *Decimos que un espacio X satisface la condición de integridad si: hay una suceción $\{\mathcal{B}_n; n \in \omega\}$ de familias de subconjuntos cerrados de X que satisfacen:*

(a) para cada $n \in \omega$, para cada $x \in X$ y para cada vecindad $\mathcal{U}$ de x en X, existe $B \in \mathcal{B}_n$ tal que $x \in int(B)$ y $B \subseteq \mathcal{U}$ y,

(b) si $\mathcal{W} \subseteq \bigcup\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ es cualquier familia centrada (es decir, es tal que cualquier subfamilia finita tiene intersección no vacía) tal que $\mathcal{W} \cap \mathcal{B}_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$, entonces $\bigcap \mathcal{W} \neq \emptyset$.

Teorema 1.8 *Si X es un espacio que satisface la condición de integridad, entonces X es un espacio de Baire.*

Demostración: Sean $\{D_n : n \in \omega\}$ familia de densos abiertos y $\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ testigo de la condición de integridad.

Se construirán por recursión $\{U_n : n \in \omega\}$, $\{x_n : n \in \omega\}$ y $\{B_n : n \in \omega\}$ tales que, para cada $n \in \omega$

(1) U_n es abierto y $x_n \in U_n$,

(2) $B_n \in \mathcal{B}_n$,

(3) $x \in \text{int}(B_n)$ y $B_n \subseteq U_n$.

Sea V un conjunto abierto y considere $x_0 \in V \cap D_0 = U_0$. Escoja $B_0 \in \mathcal{B}_0$ tal que $x \in \text{int}(B_0)$ y $B_0 \subset U_0$. Así, en el paso n-ésimo, haga $U_n = U_{n-1} \cap D_n$ y escoja $x_n \in U_n$ y $B_n \in \mathcal{B}_n$ tal que $x \in int(B_n)$ y $B_n \subset U_n$. Lo anterior es posible pues X satisface la condición de integridad. Observe entonces que $W = \{B_n : n \in \omega\}$ es una familia centrada tal que $\mathcal{W} \cap \mathcal{B}_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$ y, por lo tanto, $\bigcap W \neq \emptyset$. Finalmente, note que $\bigcap W \subseteq \bigcap_{n\in\omega} D_n$ y $\bigcap W \subseteq V$. Esto finaliza la demostración. $\square$

Capítulo 2

Introducción a los S- y L-espacios

Recuerde que un espacio topológico X es separable si contiene un subconjunto denso numerable; por otro lado X es Lindelöf si cualquier cubierta abierta tiene una subcubierta numerable. Desde siempre, estas dos nociones han parecido íntimamente relacionadas una con la otra. Por ejemplo, ambas se siguen si el espacio tiene una base numerable para su topología o, como bien se sabe, para espacios métricos es equivalente ser separable a ser Lindelöf. Una pregunta natural es, ¿qué pasa cuando pedimos que estas dos propiedades se preserven bajo subespacios?

Definición 2.1 *Un espacio es hereditariamente separable (HS) si cualquier subespacio tiene un denso numerable. Por otro lado, un espacio es hereditariamente Lindelöf (HL), si cualquier cubierta de cualquier subespacio tiene subcubierta numerable.*

Otra vez, ambas nociones son duales en el sentido de que (bajo una leve reafirmación), cambiando "punto" por "conjunto abierto" en las definiciones, pasamos de una a otra. Entonces, ¿siempre coinciden? A lo largo de este capítulo, intentaremos responder esta pregunta.

2.1. Espacios separados derechos y separados izquierdos

Definición 2.2 *Un espacio es separado derecho (izquierdo) si puede bien ordenarse de tal forma que sus segmentos iniciales son abiertos (cerrados). Diremos que es separado derecho (izquierdo) de tipo κ si su buen orden es de tipo κ.*

Teorema 2.1 *Un espacio es hereditariamente separable si y sólo si no contiene ningún subespacio separado izquierdo no numerable.*

Demostración: Suponga que $X = \{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ es un subespacio separado izquierdo no numerable, para cualquier $D \subseteq X$ numerable, existe $\beta < \omega_1$, tal que la clausura de D está contenida en el segmento inicial determinado por x_β. Así, X no es separable.

Suponga ahora que X no es hereditariamente separable. Sea $Y \subseteq X$ no separable, escoja por recursión $\{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\} \subseteq Y$, tal que $x_\alpha \notin \mathrm{cl}\{x_\beta : \beta < \alpha\}$, de esta forma, X tiene un subespacio separado izquierdo de tipo ω_1. $\square$

Teorema 2.2 *Un espacio es hereditariamente Lindelöf si y sólo si no contiene ningún subespacio separado derecho no numerable.*

Demostración: Ningún espacio separado derecho no numerable es Lindelöf, para esto es suficiente considerar la cubierta dada por los segmentos iniciales de los primeros ω_1 puntos en la enumeración.

Si X no es hereditariamente Lindelöf, hay una sucesión estrictamente creciente de conjuntos abiertos $\{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$. Finalmente escoja, para cada $\alpha \in \omega_1$, $x_\alpha \in U_{\alpha+1} \setminus U_\alpha$ para encontrar un subespacio separado derecho de tipo ω_1. $\square$

2.2. Espacios hereditariamente separables y hereditariamente Lindelöf no regulares

Teorema 2.3 *Hay un espacio hereditariamente separable T_2 no regular.*

Demostración: Fije $X \subseteq \mathbb{R}$ de cardinalidad ω_1. Ordene a X como $\{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$. Ahora defina una topología en X tal que los abiertos básicos alrededor de x_α son de la forma

$$U_{\alpha,\epsilon} = B(x_\alpha, \epsilon) \cap \{x_\beta : \beta \leq \alpha\}$$

para cada $\epsilon > 0$. Llamemos a esta nueva topología τ. Así, (X, τ), es separado derecho y por lo tanto no es Lindelöf.

Veamos que (X, τ) es hereditariamente separable. Sea $Y \subseteq X$. Como $\mathbb{R}$ es hereditariamente separable, hay $D \subseteq Y$, denso numerable con la topología usual de $\mathbb{R}$. Sin pérdida de generalidad $D = Y \cap \{x_\alpha : \alpha < \gamma\}$, para algún γ numerable.

Ahora escoja $x_\beta \in Y$, entonces para cualquier $\epsilon > 0$ se cumple lo siguiente:

- si $\beta < \gamma$, entonces $x_\beta \in D$,
- si $\beta \geq \gamma$, entonces $B(x_\beta, \epsilon)$ contiene algún $x_\alpha \in D$, entonces $\alpha < \gamma \leq \beta$ y por lo tanto $x_\alpha \in \{x_\alpha : \alpha \leq \beta\}$. Así, $x_\alpha \in U_{\beta,\epsilon}$.

Esto finaliza la demostración. □

Teorema 2.4 *Hay un un espacio hereditariamente separable T_2 no regular.*

Demostración: Sea (X, τ) subespacio de $\mathbb{R}$ bien ordenado tal que $X = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Además, cada vecindad τ-abierta de un punto x_α será de la forma

$$B(x_\alpha, \epsilon) \cap \{x_\beta : \beta \geq \alpha\},$$

para cada $\epsilon > 0$. De esta forma (X, τ) es separado izquierdo.

Veamos que (X, τ) es hereditariamente Lindelöf. Sea $Y \subseteq X$ y $\{C_\alpha \; \alpha \in A\}$ una cubierta no numerable de Y por conjuntos abiertos básicos. Observe que como los C_α son abiertos básicos, $C_\alpha = Y \cap (I_\alpha \cap U_\alpha)$, donde I_α es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ y $U_\alpha = \{x_\beta : \beta \geq \gamma_\alpha\}$ para algún $\gamma_\alpha \in \omega_1$. Note que $\{I_\alpha : \alpha \in A\}$ es una cubierta abierta para Y en la topología usual de $\mathbb{R}$ y, por lo tanto, tiene subcubierta numerable $\{I_\beta : \beta \in B\}$. Ahora existe $\gamma \in \omega_1$ tal que $\beta < \gamma$ siempre que $\beta \in B$. Sea $C' = \{C_\beta : \beta \in B\}$. Observe que C' cubre a $\{x_\delta : \delta > \gamma\}$.

Finalmente, como γ es numerable, podemos concluir que $C' \cup \{C_\delta : \delta \leq \gamma\}$ es subcubierta numerable de C que cubre a Y. Esto finaliza la demostración. □

Estos dos últimos teoremas nos dan un ejemplo de espacios HL y HS no regulares en donde ambas propiedades no coinciden. Lo anterior hizo que el problema se replanteara, dando paso a las siguientes definiciones, que serán las dos definiciones principales de este trabajo.

Definición 2.3 *Un S-espacio es un espacio regular, Hausdorff, hereditariamente separable y no hereditariamente Lindelöf.*

Definición 2.4 *Un L-espacio es un espacio regular, Hausdorff, hereditariamente Lindelöf y no hereditariamente separable.*

Un corolario de los Teoremas 2.1 y 2.2 es el siguiente;

Corolario 2.1 *Cualquier S-espacio contiene un subespacio separado derecho de tipo ω_1. Cualquier L-espacio contiene un subespacio separado izquierdo de tipo ω_1.*

Este último nos dice que los S-espacios y L-espacios nunca coinciden. Además como es de esperar, los ejemplos de estos espacios no son tan abundantes como con los espacios HS y HL, por lo que la primer pregunta fue, ¿existen estos espacios?

Capítulo 3

Algunas construcciones

Bajo CH, es relativamente fácil construir S-espacios o L-espacios. En este capítulo daremos algunas construcciones usando dos técnicas inductivas básicas y un truco topológico.

Recuerde que un orden parcial es *ccc* si no tiene anticadenas no numerables, por otro lado, decimos que un espacio (X, τ) es *ccc* si $(X, \subseteq)$ es ccc, es decir, si cualquier colección de conjuntos abiertos ajenos por pares es a lo más numerable.

Un espacio topológico X es 0-*dimensional* si tiene una base de conjuntos clopen (es decir, conjuntos abiertos y cerrados a la vez) para su topología.

Suponga que A, B son conjuntos bien ordenados y que f, g son funciones de A a B, defina $\Delta(f, g) = \text{mín}\{a \in A : f(a) \neq g(a)\}$; escribimos $f > g$ si y sólo si $f(\Delta(f, g)) > g(\Delta(f, g))$. Si σ es una función parcial de A a B, entonces $[\sigma] = \{f \in B^A : f > \sigma\}$.

Si τ es una topología en X, y $Y \subseteq X$, denotamos $\tau|_Y$ a la topología relativa a Y. Si τ es topología en X, σ es topología en Y y $Y \subseteq X$, entonces decimos que τ es una extensión conservativa de σ si y sólo si $\sigma = \tau|_Y$; es decir, si y sólo si el espacio (Y, σ) es un subespacio abierto de (X, τ).

Suponga que $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una sucesión creciente de conjuntos, para cada $\alpha < \kappa$, τ_α es topología para X_α y τ_α es *extensión conservativa* de τ_β siempre que $\beta < \alpha$, definimos la *topología límite* $\sigma_{\alpha<\kappa}\tau_\alpha$ como la única extensión conservativa de cada τ_α en $\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha$, es decir, es la topología en $\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ cuya base es $\bigcup_{\alpha<\kappa} \tau_\alpha$.

3.1. La Línea de Kunen

Esta construcción es popularmente conocida como la Línea de Kunen y da un ejemplo, bajo CH de un S-espacio primero numerable.

La idea de la Línea de Kunen es refinar la topología en los reales de tal forma que la clausura de un subconjunto numerable en la nueva topología difiera de la clausura con la topología usual a lo más por un conjunto numerable. Para encontrar un denso numerable de un subespacio no numerable en la nueva topología, es suficiente encontrar un denso en la topología usual y agregar a lo más una cantidad numerable de puntos. Así, el nuevo espacio será hereditariamente separable.

Por anterior, en esta sección nos dedicaremos a probar el siguiente teorema.

Teorema 3.1 (Kunen) *Asuma CH, sea $\{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ una enumeración de $\mathbb{R}$. Entonces hay una topología τ en $\mathbb{R}$ que refina la topología usual $\tau_{\mathbb{R}}$ y es tal que:*

(a) $\{x_\alpha : \alpha < \beta\} \in \tau$ para cada $\beta \in \omega_1$,

(b) $|cl_{\tau_{\mathbb{R}}}(A) \backslash cl_\tau(A)| \leq \aleph_0$ para cada $A \in [\mathbb{R}]^{\aleph_0}$,

(c) $\langle \mathbb{R}, \tau \rangle$ es 0-dimensional.

Note que el teorema anterior implica que $\langle \mathbb{R}, \tau \rangle$ es un S-espacio. Como vimos antes, por (b), $\langle \mathbb{R}, \tau \rangle$ es hereditariamente separable. La regularidad se sigue de (c). Finalmente, la familia $\{\{x_\alpha : \alpha < \beta\} : \beta < \omega_1\}$ es una cubierta abierta sin subcubierta numerable; por lo tanto el nuevo espacio no es Lindelöf.

Veamos cómo construir la topología τ. Sean $\{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ una enumeración de $\mathbb{R}$ y $\{A_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ una enumeración de los subconjuntos numerables infinitos de $\mathbb{R}$. Para cada $\alpha \in \omega_1$, defina $X_\alpha = \{x_\beta : \beta \in \alpha\}$ y sea $\mathfrak{B}_\alpha = \{A_\beta : \beta < \alpha, A_\beta \subset X_\alpha, x_\alpha \in \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(A_\beta)\}$. Enumere $\mathfrak{B}_\alpha$ como $\{C_{\alpha,n} : n \in \omega\}$ de tal forma que cada $C \in \mathfrak{B}_\alpha$ aparezca infinitas veces.

Construiremos por recursión una suceción de topologías $\{\tau_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ donde cada τ_α es topología para X_α y para cada $\alpha < \omega_1$ se tenga que:

(1) Si $\beta < \alpha$ entonces τ_β es topología 0-dimensional que refina la topología de X_β como subespacio de $\mathbb{R}$.

(2) Si $\gamma < \beta < \alpha$, entonces $\tau_\gamma \subset \tau_\beta$ y $\tau_\gamma = \tau_\beta|_{X_\gamma}$.

(3) Si $\beta + 1 < \alpha$ y $A \in \mathfrak{B}_\beta$, entonces $x_\beta \in \mathrm{cl}_{\tau_{\beta+1}}(A)$.

Procedamos a construir las $\tau_\alpha' s$. Sea $\alpha < \omega_1$ y suponga construidas las $\tau_\beta' s$ para $\beta < \alpha$ que cumplen (1), (2) y (3). Si α es un ordinal límite entonces es suficiente definir τ_α, como lo generado por $\bigcup_{\beta<\alpha} \tau_\beta$. Sea $\alpha = \beta + 1$, procedamos a definir $\tau_{\beta+1}$. Como $x_\beta \in \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(C_{\beta,n})$ para cada $n \in \omega$, podemos elegir una sucesion de reales $\{y_n : n \in \omega\}$ tal que $y_n \in C_{\beta,n}$ y las distancias entre los y_n y x_β forman una sucesión decreciente a 0. Sea $\{I_n : n \in \omega\}$ una colección de intervalos abiertos ajenos por pares de $\mathbb{R}$ con $y_n \in I_n$ y $x_\beta \notin \mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(I_n)$. Para cada $n \in \omega$ escoja $U_{\beta,n} \in \tau_\beta$ tal que $U_{\beta,n}$ es vecindad clopen (en τ_β) de y_n contenida en I_n; lo anterior puede hacerse por (1). Defina

$$V_{\beta,k} = \{x_\beta\} \cup \bigcup_{n>k} U_{\beta,n}.$$

y haga $\tau_\beta \cup \{V_{\beta,k} : k \in \omega\}$ base para la topología τ_α. Para verificar la hipótesis de recursión en $\beta + 1$, observe que (2) y la segunda parte de (1) son inmediatos, (3) se sigue del hecho de que cada $A \in \mathfrak{B}_\beta$ es enumerado infinitas veces, así, conseguimos que x_β sea punto límite de A en $\tau_{\beta+1}$.

Para ver que $\langle X_\alpha, \tau_\alpha \rangle$ es 0-dimensional, es suficiente probar que cada $V_{\beta,n}$ es cerrado. Sea $x \in X_\alpha \backslash V_{\beta,k}$, entonces $x \neq x_\beta$. Como $\lim_{n\to\infty} y_n = x_\beta$ y los intervalos I_n no se intersectan, existen $l \in \omega$ y un conjunto abierto W en la topología de $\mathbb{R}$ tales que $x \in W$ y $W \cap \bigcup_{n>l} I_n = \emptyset$. Es decir,

$$W \cap V_{\beta,k} \subset_{\beta,k} \cap_{\beta,k+1} \cdots U_{\beta,l}.$$

El lado derecho de la última contención es cerrado en τ_β pues es intersección finita de cerrados. Como $W \in \tau_\beta$ existe $W_0 \subset W$ vecindad básica de x tal que $W_0 \cap V_{\beta,k} = \emptyset$. Así, por lo anterior, $\tau = \Sigma_{\alpha<\omega_1} \tau_\alpha$ es topología para $\mathbb{R}$ que cumple lo deseado.

3.2. Conjuntos HFD y HFC

Un subconjunto $X \subset 2^{\omega_1}$ es *finalmente denso* si existe $\alpha < \omega_1$ tal que para cualquier función finita $\sigma \in 2^{\omega_1 \backslash \alpha}$, tenemos que $X \cap [\sigma]$ es infinito. $X \in 2^{\omega_1}$ es *hereditariamente finalmente denso* (HFD) si cualquier subconjunto infinito de X es finalmente denso.

Los conjuntos HFD son hereditariamente separables; suponga que X es HFD con un subespacio separado izquierdo $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Sean $\{[\sigma_\alpha] : \alpha < \omega_1\}$ vecindades tales que para cada $\alpha < \omega_1$ $x_\alpha \in [\sigma_\alpha]$ y $x_\beta \notin [\sigma_\alpha]$ siempre que $\beta < \alpha$. Por el Lema del Δ-sistema y un argumento de conteo, podemos suponer que los σ_α's tienen dominios ajenos por pares. Como X es separado izquierdo, $\{x_n : n \in \omega\}$ evita a todos excepto una cantidad numerable de $[\sigma_\alpha]$'s, pero por ser HFD $\{x_n : n \in \omega\}$ intersecta a todos menos una cantidad finita de $[\sigma_\alpha]$'s, lo que es una contradicción.

Sea X un conjunto HFD, para cada $x \in X$ existe algún $x' \in 2^{\omega_1}$, tal que $\{\alpha : x(\alpha) \neq x'(\alpha)\}$ es numerable. Entonces $\{x' : x \in X\}$ es un HFD. Así, si hay un conjunto HFD, entonces hay un conjunto HFD separado izquierdo de tipo ω_1.

Decimos que un conjunto abierto *casi cubre* a un conjunto no numerable X, si contiene a X excepto una cantidad numerable de sus elementos. Un conjunto abierto de 2^{ω_1} es un conjunto *que parte bonito* si es unión numerable de una familia $\{[\sigma_i]: i \in \omega\}$, donde la familia $\{\text{dom } \sigma_i : i \in \omega\}$ es ajena por pares. Decimos que $X \in 2^{\omega_1}$ es *hereditariamente finalmente cubierto* (HFC) si cualquier conjunto que parte bonito, casi cubre a X.

Por el Lema del Δ-sistema y un argumento similar a la prueba de que los conjuntos HFD son hereditariamente separables, los conjuntos HFC son hereditariamente Lindelöf.

Suponga que $\{\beta_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una sucesión creciente de ordinales numerables, $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es un HFC y para cada $\alpha < \omega_1$ elegimos $x'_\alpha \in 2^\omega_1$ tal que $x_\alpha|_{\beta_\alpha} = x'_\alpha|_{\beta_\alpha}$. Entonces $\{x'_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es un HFC.

3.2.1. Un conjunto HFC bajo CH

Asuma CH y sea $\{U_\alpha: \alpha \in \omega_1\}$ una enumeración de los conjuntos que parten bonito, donde $U_\alpha = \bigcup_{n\in\omega}[\sigma_{\alpha,n}]$ para cada $\alpha \in \omega_1$ y $\{\text{dom } \sigma_{\alpha,n} : n \in \omega\}$ es familia ajena por pares. Sea $\mathcal{U}_\alpha$=$\{U_\beta : \beta < \alpha$ y cada dom $\sigma_{\beta,i} \subset \alpha\}$, observe que $\mathcal{U}_\beta \subset \mathcal{U}_\alpha$ si $\beta < \alpha$. Enumere $\mathcal{U}_\alpha$ como $\{V_{\alpha,n} : n \in \omega\}$, donde cada $V_{\alpha,n}$ aparece una cantidad numerable de veces.

Construiremos un conjunto HFC $\{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ por recursión. Sea $\alpha < \omega_1$ y suponga hecho todo antes de α. Considere $\mathcal{U}_\alpha$ y escoja $\{\sigma_i : i \in \omega\}$ tal que:

1) Si $V_{\alpha,i} = U_\beta$ entonces escoja $\sigma_i = \sigma_{\beta,i}$.

2) $\{\text{dom}\sigma_i : i \in \omega\}$ es ajeno por pares.

Lo anterior puede hacerse con facilidad ya que los $V_{\alpha,n}$ parten bonito. Finalmente defina $x_\alpha|_\alpha$ de forma que para cada $i \in \omega$ $\sigma_i \subset x_\alpha$. Por construcción si γ es el primer índice tal que $U_\beta \in \mathcal{U}_\gamma$ entonces $\{x_\alpha : \alpha \geq \gamma\} \subseteq U_\beta$. Así $\{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ es HFC.

3.2.2. Un conjunto HFD bajo CH

Asuma CH, construiremos un conjunto HFD $\{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ de manera recursiva, donde en el paso α se va a escoger $x_\beta(\alpha)$ para $\beta < \alpha$ y se declarará $x_\alpha(\gamma)=0$ si $\gamma \leq \alpha$. Sean $\{A_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ una enumeración de los subconjuntos numerables infinitos de ω_1 y $B_\alpha=\{\beta : \beta < \alpha \text{ y } A_\beta \subset \alpha\}$. Para cada $\alpha \in \omega_1$, sea $S_\alpha= F_n(\alpha,2)$ (el conjunto de funciones finitas de α en 2). Para cada β, defina $X_\beta = \{x_\gamma : \gamma \in A_\beta\}$. Si $\sigma \in S_\alpha$ y $\beta \in B_\alpha$, defina $X_{\beta,\sigma} = \{x_\gamma : x_\gamma \in [\sigma] \text{ y } \gamma \in A_\beta\}$. Sea $C_\alpha = \{X_{\beta,\sigma} : \beta \in B_\alpha \text{ y } \sigma \in S_\alpha\} \cup \{X_\beta : \beta \in B_\alpha\}$, observe que $C_\beta \subset C_\alpha$ si $\beta < \alpha$. Sea $\alpha \in \omega_1$ y suponga que hemos definido $x_\beta(\gamma)$ para $\beta, \gamma < \alpha$ tales que:

(*) Si $\beta < \alpha$ y $Z \in C_\beta$ entonces $\{x \in Z : x(\beta) = 0\}$ y $\{x \in Z : x(\beta) = 1\}$ ambos son infinitos.

Procedamos a construir $x_\beta(\gamma)$ para $\beta,\gamma < \alpha + 1$ tal que (*) se cumple, pero antes considere la siguiente afirmación: Si $\{A_n : n \in \omega\}$ es sucesión de subconjuntos numerables infinitos de ω, entonces existen N y M subconjuntos de ω tales que $N \cup M = \omega$ y además $N \cap A_n$ y $M \cap A_n$ son ambos infinitos para cada $n \in \omega$.

Para definir $x_\beta(\alpha)$ con $\beta < \alpha$, notamos que $\bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$ es una familia numerable de subconjuntos numerables infinitos de $\{x_\beta : \beta \leq \alpha\}$. Sean M y N partición de $\{x_\beta : \beta \leq \alpha\}$ como en la afirmación. Ahora defina, para cada $\beta < \alpha$, $x_\beta(\alpha)=0$ si $x_\beta \in N$ o $x_\beta(\alpha)=1$ si $x_\beta \in M$ y haga $\mathrm{x}_\alpha(\gamma)=0$ para $\gamma \leq \alpha$.

Para verificar la hipótesis de recursión en $\alpha+1$ sea $Z \in C_\beta$ para $\beta \leq \alpha$. Si $\beta < \alpha$, entonces por hipótesis $\{x \in Z : x(\beta) = 0\}$ y $\{x \in Z : x(\beta) = 1\}$ son infinitos; si $\beta = \alpha$, entonces por construcción $\{x \in Z : x(\alpha) = 0\}$ y $\{x \in Z : x(\alpha) = 1\}$ son infinitos. Por construcción, si δ_β es la primera vez que $\beta \in B_{\delta_\beta}$ entonces $\{x_\alpha : \alpha \in A_\beta\}$ es denso después de δ_β, es decir $\{x_\alpha : \alpha \in A_\beta\} \bigcap [\sigma]$ es infinito para cualquier σ función finita de $\omega_1 \backslash \delta_\beta$ en 2. Así $\{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ es HFD.

3.3. Espacios de Luzin

Recuerde que un subconjunto A de un espacio topológico X es *denso en ninguna parte* si su clausura tiene interior vacío. Por otro lado decimos que A es de *primera categoría* si es unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte y es de *segunda categoría* si no es de primera categoría. Defina un *espacio de Luzin* como un espacio regular no numerable, sin puntos aislados y tal que cualquier subconjunto denso en ninguna parte es numerable.

Cualquier espacio de Luzin es hereditariamente ccc: un subespacio discreto de un espacio sin puntos aislados es nunca denso, así cualquier subespacio discreto de un espacio de Luzin es numerable, y un espacio es hereditariamente ccc si y sólo si no tiene subespacios discretos no numerables.

Cualquier espacio de Luzin es hereditariamente Lindelöf: sean X un espacio de Luzin y Y un subconjunto no numerable de X. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de Y. Como $\bigcup\mathcal{U}$ es ccc, algún $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ tiene unión densa en $\bigcup\mathcal{U}$. Como X es de Luzin, $\partial(\bigcup\mathcal{V})$ es numerable, así $Y\setminus\bigcup\mathcal{V}$ es numerable. Por lo tanto Y es de Lindelöf.

Recuerde que un *espacio de Baire* es un espacio en el que cualquier intersección numerable de subconjuntos densos abiertos es densa. Usaremos los espacios de Baire para construir espacios de Luzin.

Asuma CH y suponga que X un espacio ccc de Baire con peso $\leq \omega_1$ y sin puntos aislados. Enumere una base $\mathcal{B}$ de tamaño ω_1, $\mathcal{B} = \{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$. Note que por ser X ccc cualquier subconjunto denso abierto contiene un denso que es unión numerable de elementos en $\mathcal{B}$. Sea $\{V_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ enumeración de todos los densos que son unión numerable de conjuntos en $\mathcal{B}$. Construya por recursión el subespacio $\{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ tal que cada $x_\alpha \in U_\alpha \cap \bigcap_{\beta<\alpha} V_\beta$, esto se puede hacer pues X es espacio de Baire. Como cualquier subconjunto nunca denso de X es ajeno a algún V_α, el subespacio es de Luzin.

Bajo CH la búsqueda de L-espacios a menudo termina en la búsqueda de espacios de Baire ccc no separables con peso ω_1 y sin puntos aislados. Dos importantes ejemplos de estos espacios son los que se describen a continuación:

1) El espacio $\mathcal{K}$ de los subconjuntos compactos nunca densos de $\mathbb{R}$ con la topología de Pixley-Roy [1].

Para cualesquiera subconjuntos F y G de $\mathbb{R}$ definimos el subconjunto $[F, G] \subseteq \mathcal{K}$ como

$$[F, G] = \{K \in \mathcal{K} : F \subseteq K \subseteq G\}.$$

Una vecindad básica de $K \in \mathcal{K}$ con la topología de Pixley-Roy es cualquier subconjunto de la forma $[K, U]$, donde U es una vecindad de K en $\mathbb{R}$.

Si $\mathcal{K}$ tuviera un punto aislado digamos K, significa que hay una vecindad U en $\mathbb{R}$ tal que $[K, U] = \{K\}$, es decir $K = U$, lo que es imposible pues U es de segunda categoría.

Recuerde que una familia de conjuntos es *centrada* si cualquier subfamilia finita tiene intersección no vacía. Decimos que una familia de conjuntos es *σ-centrada* si es unión numerable de subfamilias centradas. Así, en lugar de demostrar que $\mathcal{K}$ es ccc, demostraremos que $\mathcal{K}$ tiene una base σ-centrada ya que, si $\mathcal{U}$ es una familia no numerable de abiertos, sin pérdida de generalidad, básicos, por el Principio del Palomar, una cantidad no numerable de elementos de $\mathcal{U}$ están en el mismo uniendo de la base y por lo tanto tienen intersección no vacía.

Sea $\mathcal{W}$ cualquier base numerable de $\mathbb{R}$ cerrada bajo uniones finitas. Defina para cada $W \in \mathcal{W}$,

$$\mathcal{A}_W = \{[K, W] : K \in \mathcal{K}, W \subset \mathcal{W}\}.$$

Entonces $\mathcal{A} = \bigcup\{\mathcal{A}_W : W \in \mathcal{W}\}$ es base para $\mathcal{K}$. Además $\mathcal{A}$ es σ-centrada. Para cada $W \in \mathcal{W}$ y F un conjunto finito, si $\{V_n = [K_n, W] : n \in F\} \subseteq \mathcal{A}_W$ tenemos que

$\bigcap_{n\in F} V_n = [\bigcup_{n\in F} K_n, W] \in \mathcal{A}_W$.

Demostraremos ahora que ningún subconjunto abierto no vacío es separable. Sea $K \in \mathcal{K}$, sean U una vecindad abierta de K en $\mathbb{R}$ y $\mathcal{D}$ un denso de $[K, U]$; entonces para cada $x \in U$, $K \cup \{x\}$ está contenido en algún elemento de $\mathcal{C}$, por lo tanto $U = \bigcup \mathcal{D}$. Como cada miembro de $\mathcal{D}$ es nunca denso, se sigue que $\mathcal{D}$ es no numerable pues U es de segunda categoría.

Para demostrar que $\mathcal{K}$ es un espacio de Baire, es suficiente demostrar que $\mathcal{K}$ satisface la condición de integridad (ver Teorema 1.8): hay una suceción $\{\mathcal{B}_n; n \in \omega\}$ de familias de subconjuntos cerrados de $\mathcal{K}$ que satisfacen:

(a) Para cada $n \in \omega$, para cada $K \in \mathcal{K}$ y cada vecindad $\mathcal{U}$ de K en $\mathcal{K}$, existe $\mathcal{B} \in \mathcal{B}_n$ tal que $K \subseteq \mathrm{int}_{\mathcal{K}}(\mathcal{B})$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ y

(b) Si $\mathcal{W} \subseteq \bigcup\{\mathcal{B}_n : n \in \omega\}$ es cualquier familia centrada tal que $\mathcal{W} \cap \mathcal{B}_n$ para cada $n \in \omega$, entonces $\bigcap \mathcal{W} \neq \emptyset$.

Si $\{B_n : n \in \omega\}$ es cualquier base para $\mathbb{R}$, definimos las familias $\mathcal{B}_n$ por

$$\mathcal{B}_n = \{[K, F] : K \in \mathcal{K}, F \subset \mathbb{R} \text{ es compacto, } K \subseteq \mathrm{int}_{\mathbb{R}} F, B_n \backslash F \neq \emptyset\}.$$

Entonces (a) es inmediato pues cada miembro de $\mathcal{K}$ es subconjunto compacto nunca denso de $\mathbb{R}$. Ahora sea $\mathcal{W} = \{[K_i, F_i] : i \in I\}$ como en (b). Defina $F = \bigcap\{F_i : i \in I\}$, entonces para cada $n \in \omega$, $B_n \backslash F \neq \emptyset$ ya que $\mathcal{W} \cap \mathcal{B}_n \neq \emptyset$. Se sigue que F es un subconjunto de $\mathbb{R}$ nunca denso compacto. Como $\mathcal{W}$ es centrado, se sigue que $K_i \subseteq F$ para cada $i \in I$, por lo tanto $F \neq \emptyset$. Finalmente como $K_i \subseteq F \subseteq F_i$ para cada $i \in I$, tenemos que $F \in \bigcap \mathcal{W}$.

De esta forma $\mathcal{K}$ es un espacio ccc de Baire no separable con peso ω_1 sin puntos aislados y, por lo tanto, es un L-espacio.

2) El subespacio $\mathcal{S} \subseteq 2^{\omega_1}$ tal que $f \in \mathcal{S}$ si y sólo si $f(\alpha) = 0$ excepto para una cantidad numerable de α.

Sea $\mathcal{D}$ cualquier subconjunto numerable de $\mathcal{S}$, sea $f \in 2^{\omega_1}$ tal que $f(\alpha)$=1 si existe $g \in \mathcal{D}$ con $g(\alpha)$=1 y $f(\alpha)$=0 en otro caso. Entonces $f \in \mathcal{S}$ y cualquier subconjunto abierto en $\mathcal{S}$ que no contenga a f esquiva a $\mathcal{D}$, por lo tanto $\mathcal{S}$ no es separable.

Para ver que $\mathcal{S}$ es ccc, primero observe que para cada $\alpha \subset \omega_1$ finito 2^{α} es ccc. Suponga que $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ es familia de abiertos ajenos en $\mathcal{S}$, cada abierto U_α depende de la elección de una cantidad numerable de coordenadas $a_\alpha \subset \omega_1$. Por el Lema del Δ-sistema existe un Δ-sistema no numerable $\mathcal{C} \subseteq \{a_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ con raíz r; r no puede ser vacío ya que si $a_\alpha \cap \; a_\beta = \emptyset$, implica que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Sea $\pi(U_\alpha)$ la proyección de U_α en 2^r, entonces $\{\pi(U_\alpha) : \alpha \in \omega_1\}$ es una familia de abiertos ajenos para 2^r, lo que es una contradicción, por lo tanto $\mathcal{S}$ es ccc.

Que $\mathcal{S}$ tenga peso ω_1 se sigue del hecho que sólo hay ω_1 abiertos básicos en 2^{ω_1}.

Así, $\mathcal{S}$ cumple ser un espacio ccc de Baire no separable con peso ω_1 sin puntos aislados y, por lo tanto, es un L-espacio.

Capítulo 4

El L-espacio de Justin Moore

En los capítulos anteriores, pudimos observar cómo el problema de los S-espacios y L-espacios fue cambiando con el paso del tiempo; en un principio, la pregunta fue si los conjuntos HL y HS coincidían, después se hizo la misma pregunta con los S-espacios y L-espacios. En ambas ocasiones la respuesta fue negativa, por lo que el problema culminó en la siguiente pregunta: ¿es consistente que hay o no hay S-espacios y L-espacios?

Durante mucho tiempo se creyó que los S-espacios y L-espacios eran duales en el sentido de que si hay un S-espacio en algún modelo de la teoría de conjuntos, entonces hay un L-espacio en el mismo modelo de la teoría de conjuntos. Sin embargo, esto es falso. En 1981 Todorcevic demostró la consistencia de no hay S-espacios, la prueba no parecía dual para L-espacios. Finalmente, en el 2006, Justin Tatch Moore construyó un L-espacio sin suponer axiomas adicionales.

En este capítulo estudiaremos la construcción de un L-espacio de Justin Moore [7] usando el método de caminos minimales [9].

4.1. Escaleras minimales en ordinales

Definición 4.1 *Una C-sucesión es una sucesión $\{C_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que C_α es un subconjunto cofinal de α y si $\gamma < \alpha$, entonces $C_\alpha \cap \gamma$ es finito.*

Ejemplo 4.1 Considere para cada $\alpha < \omega_1$, $C_\alpha \subseteq \alpha$ definida como sigue. Si α es un ordinal sucesor, digamos $\alpha = \beta + 1$ entonces haga $C_\alpha = \{\beta\}$. Si α es un ordinal límite, entonces hay una sucesión $\{x_n : n \in \omega\}$ convergente a α ya que la cofinalidad de α es ω. Haga C_α igual a dicha sucesión. Entonces $\{C_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una C-sucesión.

De aquí en adelante fije $\{C_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una C-sucesión de modo tal que $0 \in C_\alpha$, para cada $\alpha \in \omega_1$. De esta forma, cuando hagamos referencia a una C-sucesión en las siguientes definiciones, entenderemos que nos referimos a la que acabamos de fijar.

Definición 4.2 *Un escalón de un ordinal numerable β a un ordinal más pequeño α es el mínimo $\eta \in C_\beta$ tal que $\eta \geq \alpha$.*

Definición 4.3 *Una escalera minimal de un ordinal numerable β a un ordinal más pequeño α es una sucesión $\beta = \beta_0 > \beta_1 > \cdots > \beta_n = \alpha$ tal que para cualquier $i < n$ el ordinal β_{i+1} es un escalón de β_i a α.*

Las siguientes dos funciones serán de interés para nosotros. La traza superior no será necesaria, pero es útil para hacer las otras definiciones más transparentes.

4.2. La función traza

Definición 4.4 *Si $\alpha \leq \beta$, entonces la traza superior Tr(α, β) se define recursivamente como:*

$$Tr(\alpha, \alpha) = \{\alpha\},$$
$$Tr(\alpha, \beta) = Tr(\alpha, \text{mín}(C_\beta \backslash \alpha)) \cup \{\beta\}.$$

Definición 4.5 *Si $\alpha \leq \beta$, entonces la traza $inferior$L(α, β) se define recursivamente como:*

$$L(\alpha, \alpha) = \{\emptyset\},$$
$$L(\alpha, \beta) = (L(\alpha, \text{mín}(C_\beta \backslash \alpha)) \backslash \text{máx}(C_\beta \cap \alpha)) \cup \{\text{máx}(C_\beta \cap \alpha)\}.$$

Observe que si $\beta = \beta_0 > \beta_1 > \cdots > \beta_n = \alpha$ es una escalera minimal de β a α, entonces

$$Tr(\alpha, \beta) = \{\beta_i : 0 \leq i \leq n\} \quad y \quad L(\alpha, \beta) = \{\lambda_i : 0 \leq i < n\},$$

donde $\lambda_i = \text{máx}(\bigcup_{j=0}^{i} C_{\beta_j} \cap \alpha)$. Para nuestros propósitos, los siguientes hechos acerca de estos conceptos serán frecuente e "implícitamente" usados.

Hecho 1: *Si $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ y $L(\beta, \gamma) < \alpha$, entonces*

$$Tr(\alpha, \gamma) = Tr(\alpha, \beta) \cup Tr(\beta, \gamma).$$

Para ver esto, suponga α, β, γ como en las hipótesis. Si $\xi \in Tr(\alpha, \gamma)$ es tal que $\beta < \xi$, entonces el escalón de ξ a α es mayor que β ya que $L(\beta, \gamma) < \alpha$ y, por lo tanto, $\xi \in Tr(\beta, \gamma)$. Así $\beta \in Tr(\alpha, \gamma)$ y entonces $Tr(\alpha, \gamma) = Tr(\alpha, \beta) \cup Tr(\beta, \gamma)$.

Hecho 2: *Si $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ y $L(\beta, \gamma) < L(\alpha, \beta)$, entonces*

$$L(\alpha,\gamma) = L(\alpha,\beta) \cup L(\beta,\gamma).$$

En efecto, sean α, β y γ como en las hipótesis. Observe que $L(\beta,\gamma) < \alpha$ y por lo tanto $C_\xi \cap \alpha = C_\xi \cap \beta$ siempre que $\xi \in Tr(\beta,\gamma)$. También note que $\beta \in Tr(\alpha,\gamma)$; así $Tr(\alpha,\gamma) = Tr(\alpha,\beta) \cup Tr(\beta,\gamma)$. Sea

$$\gamma = \gamma_0 > \gamma_1 > \cdots > \gamma_l = \alpha$$

enumeración de $Tr(\alpha,\gamma)$ y sea l_0 tal que $\beta = \gamma_{l_0}$. Además $L(\alpha,\gamma)$ es enumerada como

$$\xi_0 > \xi_1 > \cdots > \xi_{l-1},$$

donde

$$\xi_k = \max \bigcup_{j=0}^{k} (C_{\gamma_j} \cap \alpha).$$

Si $k < l_0$, entonces $C_{\gamma_k} \cap \alpha = C_{\gamma_k} \cap \beta$ y por lo tanto $L(\alpha,\beta) = \{\xi_i : 0 \leq i \leq l_0 - 1\}$. Por otro lado,

$$\max(C_{\gamma_{l_0}} \cap \alpha) > \xi_{l_0-1}.$$

Si $k \geq l_0$,

$$\max \bigcup_{j=0}^{k} (C_{\gamma_j} \cap \alpha) = \max \bigcup_{j=l_0}^{k} (C_{\gamma_j} \cap \alpha).$$

Por lo tanto $L(\alpha,\beta) = \{\xi_k : l_0 \leq k \leq l-1\}$.

Hecho 3: *Si $\alpha < \beta$, entonces $L(\alpha,\beta)$ es un conjunto finito no vacío, y si $0 < \beta$ es un ordinal límite, entonces*

$$\lim_{\alpha \to \beta} \min L(\alpha,\beta) = \beta.$$

Esto se sigue de forma inmediata del hecho de que

$$\min L(\alpha,\beta) = \max(C_\beta \cap \alpha).$$

Definición 4.6 *Si $\{e_\beta : \beta \in \omega_1\}$ es una sucesión de funciones tal que $e_\beta : \beta \to \omega_1$ para todo $\beta \in \omega_1$, entonces la sucesión es coherente si siempre que $\beta \leq \gamma < \omega$, $e_\gamma|_\beta$ difiere de e_β por un conjunto finito.*

Ejemplo 4.2 *Si $f : \omega_1 \to \omega_1$ entonces $\{f|_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una sucesión coherente.*

Ejemplo 4.3 *Para cada $\beta \in \omega_1$, defina $f_\beta : \beta \to \omega_1$ por $f_\beta(\alpha) = \beta$ si $\alpha = 0$ y $f_\beta(\alpha) = 0$ en otro caso. Entonces la sucesión $\{f_\beta : \beta < \omega_1\}$ es coherente.*

Definición 4.7 *Si $\alpha \leq \beta$, entonces el peso maximal $\varrho_1(\alpha, \beta)$ se define recursivamente como*

$$\begin{aligned}
&\varrho_1(\alpha, \alpha) = 0, \\
&\varrho_1(\alpha, \beta) = \text{máx}(|C_\beta \cap \alpha|, \varrho_1(\alpha, \text{mín}(C_\beta \backslash \alpha))).
\end{aligned}$$

Alternativamente, $\varrho_1(\alpha, \beta)$ es el máximo de $\{|C_\xi \cap \alpha| : \xi \in Tr(\alpha, \beta)\}$.

Hecho 4: Para cada $\beta \in \omega_1$, defina $e_\beta : \beta \mapsto \omega$ por $e_\beta(\alpha) = \varrho_1(\alpha, \beta)$. Entonces $\{e_\beta : \beta \in \omega_1\}$ es una sucesión coherente; más aún, para cada $\beta \in \omega_1$ y $n \in \omega$, $\{\xi < \beta : e_\beta(\xi) \leq n\}$ es finito.

Veamos que lo anterior es cierto. Sean $\beta \leq \beta' < \omega_1$ y $n \in \omega$ fijos y sea $D = \{\alpha < \beta : e_\beta(\alpha) \leq n$ o $e_\beta(\alpha) \neq e_{\beta'}(\alpha)\}$. Es suficiente demostrar que D no tiene puntos límites. Para ver esto, suponga $\delta \leq \beta$. Note que existe $\delta_0 < \delta$ tal que

$$\begin{aligned}
Tr(\alpha, \beta) &= Tr(\alpha, \delta) \cup Tr(\delta, \beta), \\
Tr(\alpha, \beta') &= Tr(\alpha, \delta) \cup Tr(\delta, \beta'), \\
|C_\delta \cap \alpha| &> n,
\end{aligned}$$

siempre que $\delta_0 < \alpha < \delta$; para ello es suficiente encontrar $\alpha < L(\delta, \beta)$ y hacer $\alpha = \delta_0$.

Observe que si δ es un ordinal sucesor, entonces simplemente tome $\delta_0 = \delta - 1$. Si $\delta_0 < \alpha < \delta$, entonces

$$e_\beta(\alpha) \geq |C_\delta \cap \alpha| > n,$$
$$e_\beta(\alpha) = e_\delta(\alpha) = e_{\beta'}(\alpha),$$

y por lo tanto α no está en D. Consecuentemente δ no es punto límite de D.

Terminamos la sección con el siguiente resultado que utilizaremos más adelante, consecuencia del Hecho 4.

Proposición 4.1 *El árbol*

$$T(\varrho_1) = \{e_\beta|_\alpha : \alpha \leq \beta < \omega_1\}$$

es un árbol de Aronszajn.

Demostración: Suponga que $C \subseteq T(\varrho_1)$ es una cadena no numerable. Entonces C es de la forma $\{e_\beta|_\alpha : \alpha \in A \text{ y } \beta \in B\}$, donde A y B son subconjuntos de ω_1 no numerables. Fije $n \in \omega$. Note que como C es cadena, por el Hecho 4 existen $A' \subseteq A$ y $B' \subseteq B$ no numerables tales que $e_\beta(\alpha) = m$ y $m > n$, siempre que $\alpha \in A$, $\beta \in B$ y $\alpha < \beta$. Aplicando nuevamente lo anterior, es posible encontrar $A'' \subseteq A'$ y $B'' \subseteq B'$ no numerables tales que si $\alpha \in A''$, $\beta \in B''$ y $\alpha < \beta$, entonces $e_\beta(\alpha) > m$. Sin embargo esto es una contradicción a la elección de A' y B'.

Que $T(\varrho_1)$ no tenga niveles no numerables se sigue de la siguiente afirmación: si A, B son conjuntos numerables y $\mathscr{F}$ es una familia de funciones de A a B, tal que para cualesquiera f, g en $\mathscr{F}$, g difiere de f por un conjunto finito, entonces $\mathscr{F}$ es a lo más numerable.

Veamos que lo anterior es cierto. Suponga que $\mathscr{F}$ es no numerable. Fije $g \in \mathscr{F}$ y para cada $f \in \mathscr{F}$, considere el conjunto $F_f \subseteq A$, donde f difiere de g. Por el

Principio del Palomar infinito, existen $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$ no numerable y un conjunto $F \subseteq A$, tales que $F_f = F$ siempre que $f \in \mathscr{G}$. Observe que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que si f, h están en $\mathscr{G}$, entonces dichas funciones sólo difieren en F, ya que fuera de F ámbas son iguales a g. Sin embargo, lo anterior implica que hay una cantidad no numerable de subconjuntos finitos y ajenos por pares de A, lo cual es imposible. Esto termina la demostración. $\square$

4.3. Oscilaciones en la Traza

Definición 4.8 *Suponga que s y t son dos funciones definidas en un conjunto finito común de ordinales F. Sea $Osc(s,t;F)$ el conjunto de todas las $\xi \in F\backslash\{\min F\}$ tales que $s(\xi^-) \leq t(\xi^-)$ y $s(\xi) > t(\xi)$, donde ξ^- es el mayor elemento de F menor que ξ.*

La siguiente notación será conveniente.

Definición 4.9 *Si $\alpha < \beta < \omega_1$, entonces $Osc(\alpha, \beta)$ denota*

$$Osc(e_\alpha, e_\beta; L(\alpha, \beta))$$

y $osc(\alpha, \beta)$ denota la cardinalidad de $Osc(\alpha, \beta)$.

Lema 4.1 *Sean $\mathscr{A} \subset [\omega_1]^k$ y $\mathscr{B} \subset [\omega_1]^l$ familias no numerables de conjuntos ajenos por pares. Hay un club de $\delta < \omega_1$ tales que si $a \in \mathscr{A}\backslash\delta$, $b \in \mathscr{B}\backslash\delta$, y R es o bien la igualdad, $=$, o la relación mayor que, $>$; entonces existen $a^+ \in \mathscr{A}\backslash\delta$, $b^+ \in \mathscr{B}\backslash\delta$ tales que para todo $i < k$, $j < k$:*

(i) $\max L(\delta, b(j))$ es menor que ambos $\Delta(a(i), a^+(i))$ y $\Delta(b(j), b^+(j))$,

(ii) $L(\delta, b(j))$ es una parte inicial propia de $L(\delta, b^+(j))$,

(iii) si $\xi \in L^+ = L(\delta, b^+(j))\backslash L(\delta, b(j))$, entonces $e_{a^+(i)}(\xi)\ R\ e_{b^+(j)}(\xi)$.

Demostración: Sea M un submodelo elemental numerable de $H(\theta)$ que contenga todo lo relevante y sea $\delta = M \cap \omega_1$. Es suficiente demostrar que δ satisface la conclusión del teorema (ver Proposición 1.1).

Primero suponga que R es $=$. Aplique el Hecho 4 y encuentre $\gamma_0 < \delta$ que satisfaga las siguientes condiciones:

(1) Si $j < l$, entonces $L(\delta, b(j)) < \gamma_0$,

(2) Si $i < k,\ j < l$ y $\gamma_0 < \xi < \delta$, $e_{a(i)}(\xi) = e_{b(j)}(\xi)$.

Aplique el Hecho 3 y escoja $\gamma < \delta$ tal que si $\gamma < \xi < \delta$, entonces $\gamma_0 < L(\xi, \delta)$. Considere $D \subseteq \omega_1$ como el conjunto de todos los δ^+ tales que para algún $a^+ \in \mathscr{A} \backslash \delta^+$ y algún $b^+ \in \mathscr{B} \backslash \delta^+$ se satisface lo siguiente:

(3) $e_{a^+(i)}|_{\gamma_0} = e_{a(i)}|_{\gamma_0}$ y $e_{b^+(j)}|_{\gamma_0} = e_{b(j)}|_{\gamma_0}$ para cada $i < k$ y $j < l$,

(4) $L(\delta^+, b^+(j)) = L(\delta, b(j))$ para cada $j < l$,

(5) Si $\gamma < \xi < \delta^+$, entonces $\gamma_0 < L(\xi, \delta^+)$,

(6) Si $\gamma_0 < \xi < \delta^+$, $i < k$ y $j < l$, entonces $e_{a(i)}(\xi) = e_{a^+(i)}(\xi)$.

Observe que para cada $\beta \geq \gamma_0$, $e_\beta|_{\gamma_0} \in M$ pues por el Hecho 4 difiere de e_{γ_0} por un conjunto finito. Por lo tanto, D es definible por parámetros en M. Así, $D \in M$ (ver Proposición 1.4). Como $\delta \in D$, entonces D es no numerable ya que $D \not\subseteq M$ (ver Proposición 1.2) y por lo tanto existe $\delta^+ > \delta$ en D.

Ahora sean $i < k$ y $j < k$ arbitrarios. Primero observe que

$$\gamma_0 \leq \Delta(a(i), a^+(i)),$$
$$\gamma_0 \leq \Delta(b(j), b^+(j)).$$

Haga $L^+ = L(\delta, \delta^+)$. Note que $L(\delta, b^+(j)) = L(\delta^+, b^+(j)) < L^+$ y así

$$L(\delta, b^+(j)) = L(\delta^+, b^+(j)) \cup L^+ = L(\delta, b(j)) \cup L^+.$$

Como $\delta < \delta^+$, L^+ es no vacío. Si $\xi \in L^+$, entonces $\gamma_0 < \xi < \delta^+$ y por lo tanto

$$e_{a^+(i)}(\xi) = e_{b^+(j)}(\xi).$$

Ahora suponga que R es $>$. Sea E el conjunto de todos los $\upsilon < \omega_1$ tales que para todo $a_0 \in \mathscr{A}$, $\upsilon_0 < \upsilon$, $\epsilon < \omega_1$, $n < \omega$ y $L^+ \subset \omega_1 \backslash \upsilon$ finito existe $a_1 \in \mathscr{A} \backslash \epsilon$ tal que

$$\upsilon_0 \leq \Delta(a_0(i), a_1(i)),$$
$$e_{a_1(i)}(\xi) > n$$

siempre que $i < k$ y $\xi \in L^+$. Otra vez $E \in M$ pues E es definible por parámetros en M.

Afirmación: $\delta \in E$. En particular E es no numerable.

En efecto, sean $a_0, \upsilon_0, \epsilon, n$ y L^+ dados como en la definición de E para $\upsilon = \delta$. Por el Hecho 4 podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que υ_0 es cota superior de los $\xi < \delta$ tales que $e_{a_0(i)}(\xi) \leq n$ para algún $i < k$. Ahora considere $D' \subseteq \omega_1$ como el conjunto de todos los δ^+ tales que para algún $a_1 \in \mathscr{A} \backslash \delta^+$ se satisface lo siguiente:

(7) Para todo $i < k$, $e_{a_0(i)}|_{\upsilon_0} = e_{a_1(i)}|_{\upsilon_0}$.

(8) Si $\upsilon_0 < \xi < \delta^+$ e $i < k$, entonces $e_{a_1(i)}(\xi) > n$.

Por el mismo argumento que antes, $D' \in M$ y como $\delta \in D'$, entonces D' es no numerable, por lo tanto, es posible encontrar δ^+ mayor que ϵ, δ y $\max L^+$ y un $a_1 \in \mathscr{A} \backslash \delta^+$ tales que cumplen (7) y (8). Como $L^+ \subseteq \delta^+ \backslash \delta$, entonces tenemos que la afirmación es cierta.

Aplique la elementaridad de M y la no numerabilidad de E para encontrar un elemento $\gamma_0 \in E$ tal que $L(\delta, b(j)) < \gamma_0 < \delta$ para toda $j < l$. Use el Hecho 3 y encuentre $\gamma < \delta$ tal que si $\gamma < \xi < \delta$, entonces $\gamma_0 < L(\xi, \delta)$. Usando el mismo argumento que cuando demostramos que podemos encontrar $\delta^+ > \delta$ y $a_1 \in \mathscr{A} \backslash \delta^+$ tales que cumplen (7) y (8), es posible escoger un límite $\delta^+ > \delta$ y un $b^+ \in \mathscr{B} \backslash \delta^+$ tales que cumplen las siguientes condiciones:

(9) $e_{b^+(j)}|_{\gamma_0} = e_{b(i)}|_{\gamma_0}$ para toda $j < l$,

(10) $L(\delta^+, b^+(j)) = L(\delta, b(j))$ para toda $j < K$,

(11) si $\gamma < \xi < \delta^+$, entonces $\gamma_0 < L(\xi, \delta^+)$.

Haga $L^+ = L(\delta, \delta^+)$. Aplique la definición de E y encuentre $a^+ \in \mathscr{A}\backslash\delta$ tal que para toda $i < k$, $j < l$ y $\xi \in L^+$.

$$L(\delta, b(j)) < \Delta(a(i), a^+(i)), \quad e_{a^+(i)}(\xi) > e_{b^+(j)}(\xi).$$

El resto de la verificación es como en el caso anterior. Esto completa la demostración del lema. $\square$

Teorema 4.1 *Para cada $\mathscr{A} \subset [\omega_1]^k$ y $\mathscr{B} \subset [\omega_1]^l$ familias no numerables de conjuntos ajenos por pares y cada $n \in \omega$, existen $a \in \mathscr{A}$ y $b_m \in \mathscr{B}$ $(m < n)$ tales que para todo $i < k$, $j < k$, y $m < n$:*

$$a < b_m,$$
$$osc(a(i), b_m(j)) = osc(a(i), b_0(j)) + m.$$

Demostración: Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ dados, escoja un submodelo elemental numerable M de $H(\theta)$ que contenga todo lo relevante, ajuste $\delta = M \cap \omega_1$. Como M contiene a $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$, el club del lema anterior está en M y por lo tanto δ está en ese club. Usando el lema anterior es posible encontrar, para cada $m < \omega$, $a_m \in \mathscr{A}\backslash\delta$, $b_m \in \mathscr{B}\backslash\delta$ y $\xi_m \in \delta$, tales que para cada $m < \omega$, $i < k$, $j < l$, se satisfacen las siguientes condiciones:

(12) $L(\delta, b_m(j))$ es una parte inicial propia de $L(\delta, b_{m+1}(j))$,

(13) $L(\delta, b_{m+1}(j))\backslash L(\delta, b_m(j))$ no depende de j y tiene a ξ_m como elemento,

(14) $Osc(a_{m+1}(i), b_{m+1}(j); L(\delta, b_{m+1}(j))$ se forma agregando ξ_m a $Osc(a_m(i), b_m(j); L(\delta, b_m(j)))$,

(15) si $m' < m$, entonces $\xi_{m'}$ es estrictamente menor que $\Delta(a_m(i), a_{m+1}(i))$ y $\Delta(b_m(j), b_{m+1}(j))$,

(16) $e_{a_m(i)}(\text{máx}\, L(\delta, b_m(j))) > e_{b_m(i)}(\text{máx}\, L(\delta, b_m(j)))$.

Sea $n \in \omega$ dado. Escoja $\gamma_0 < \delta$ cota superior de cada $L(\delta, b_m(j))$ para cada $j < k$ y de todos los $\xi < \delta$ tales que para algunos $m, m' \leq n$ y $j, j' < l$,

$$e_{b_m}(\xi) \neq e_{b_{m'}}(\xi)$$

(el último conjunto es finito por el Hecho 4). Usando la elementaridad de M y el Hecho 3, escoja $a \in \mathscr{A}$ tal que $a < \delta$ y para cada $i < k$, $j < l$,

$$L(\delta, b_n(j)) < \Delta(a(i), a_n(i)),$$
$$\gamma_0 < L(a(i), \delta).$$

Ahora sean $i < k$,$j < l$ y $m < n$ fijos. Del Hecho 2 se sigue que

$$L(a(i), b_m(j)) = L(a(i), \delta) \cup L(\delta, b_m(j)).$$

Finalmente $e_{b_m(j)}|_{L(a(i),\delta)}$ no depende de m y por lo tanto

$$Osc(a(i), b_0(j); L(a(i), \delta)) = Osc(a(i), b_m(j); L(a(i), \delta)).$$

Por (16), $Osc(a(i), b_m(j))$ es la unión

$$Osc(a(i), b_m(j); L(a(i), \delta)) \cup Osc(a(i), b_m(j); L(\delta, b_m(j)))$$

(es decir, no hay ningúna nueva oscilación en la “grieta”). Así, por (14),

$$Osc(a(i), b_m(j)) = Osc(a(i), b_o(j)) \cup \{\xi_{m'} : m' < m\}.$$

Esto completa la demostración del teorema. □

4.4. La función o

Considere la circunferencia unitaria, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{T}$ es *racionalmente independiente* si para cada $z \in A$, $z^q \notin A$ siempre que q sea un número racional distinto de uno.

Veamos que hay subconjuntos $A \subseteq \mathbb{T}$ racionalmente independientes no numerables. Sea z_0 cualquier elemento en $\mathbb{T}$. Sea $\alpha < \omega_1$ y suponga que $\{z_\beta : \beta < \alpha\}$ es un conjunto racionalmente independiente, escoja $z_\alpha \in \mathbb{T}\setminus\{(z_\beta)^q : \beta < \alpha$ y $q \in \mathbb{Q}\}$, esto es posible ya que $\{(z_\beta)^q : \beta < \alpha$ y $q \in \mathbb{Q}\}$ es numerable. Si ocurriera que $(z_\alpha)^q = z_\beta$ para algún $\beta < \alpha$ y $q \in \mathbb{Q}$, entonces $(z_\beta)^{q^{-1}} = z_\alpha$, lo que es una contradicción a la elección de z_α. Por lo tanto el conjunto $\{z_\beta : \beta \leq \alpha\}$ es racionalmente independiente y así $\{z_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es el conjunto buscado.

De aquí en adelante, fije una sucesión $\{z_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de elementos de $\mathbb{T}$ racionalmente independientes.

Definición 4.10 *Si $\alpha < \beta$, defina*

$$o(\alpha, \beta) = z_\alpha^{osc(\alpha,\beta)+1}.$$

Esta definición es motivada por el siguiente teorema comúnmente conocido como el *Teorema de Kronecker*.

Teorema 4.2 (Teorema de Kronecker) *Suponga que z_i con $i < k$ son elementos de $\mathbb{T}$ racionalmente independientes. Para cada $\epsilon > 0$ existe $n_\epsilon \in \omega$ tal que si u, v están en $\mathbb{T}^k$, existe $m < n_\epsilon$ tal que para cada $i < k$,*

$$|u_i z_i^m - v_i| < \epsilon.$$

Al igual que pasa con las funciones Traza y el peso maximal, la función o también tiene cierta regularidad. El siguiente teorema además de que "traduce" la información de la función o en una propiedad más topológica, también nos dice que tenemos "control" de dicha función en ciertos puntos.

Teorema 4.3 *Sean $\mathscr{A} \subset [\omega_1]^k$ y $\mathscr{B} \subset [\omega_1]^l$ familias no numerables ajenas por pares. Para cualquier sucesión $\{U_i : i < k\}$ de vecindades abiertas en $\mathbb{T}$ y cualquier $\phi : k \to l$, existen $a \in \mathscr{A}$ y $b \in \mathscr{B}$ tales que $a < b$ y para cada $i < k$,*

$$o(a(i), b(\phi(i))) \in U_i.$$

Demostración: Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que cada U_i es una ϵ-bola alrededor de un punto v_i, para algún $\epsilon > 0$ fijo. Para cada $a \in \mathscr{A}$, sea $n_{\epsilon,a}$ dada por el Teorema de Kronecker, observe que por el Principio del Palomar infinito existe $A \subseteq \mathscr{A}$ no numerable tal que $n_{\epsilon,a}$ es uniforme para cada $a \in A$. Así, refinando a $\mathscr{A}$, si es necesario, podemos asumir que el n_ϵ dado por el Teorema de Kronecker para la sucesión $z_{a(i)}$ $(i < k)$ es uniforme para $a \in \mathscr{A}$. Sean $a \in \mathscr{A}$ y $b_m \in \mathscr{B}$ con $m < n_\epsilon$ tales que para cada $i < k$, $j < l$ y $m < n_\epsilon$,

$$a < b_m,$$
$$osc(a(i), b_m(j)) = osc(a(i), b_0(j)) + m.$$

Para cada $i < k$, haga $u_i = o(a(i), b_0(\phi(i)))$. Por la elección de n_ϵ, existe $m < n_\epsilon$ tal que para cada $i < k$,

$$|u_i z_{a(i)}^m - v_i| < \epsilon;$$

es decir, $o(a(i), b_m(\phi(i))) \in U_i$. Esto finaliza la demostración. □

4.5. Un L-espacio en ZFC

Definición 4.11 *Para cada $\beta \in \omega_1$, defina $w_\beta : \omega_1 \to \mathbb{T}$ por $w_\beta(\xi) = o(\xi, \beta)$ si $\xi < \beta$ y $w_\beta(\xi) = 1$, en otro caso. Sea $\mathscr{L} = \{w_\beta : \beta \in \omega_1\}$, visto como subespacio de $\mathbb{T}^{\omega_1}$.*

Observe que $\mathscr{L}$ es no separable. En efecto, para cualquier subconjunto numerable $A = \{w_{\beta_n} : n \in \omega\} \subset \mathscr{L}$, sea $\eta = \max\{\beta_n : n \in \omega\}$ y escoja un abierto básico $U \subseteq \mathbb{T}^{\omega_1}$ tal que $1 \notin \pi_\eta^{-1}(U)$, entonces $U \cap A = \emptyset$.

Si $X \subseteq \omega_1$, entonces sea $\mathscr{L}_X = \{w_\beta|_X : \beta \in X\}$, visto como subespacio de $\mathbb{T}^X$. Escribiremos solamente w_β en lugar de $w_\beta|_X$ para referirnos a elementos de $\mathscr{L}_X$.

Veremos ahora que $\mathscr{L}_X$ es Fréchet. Sea $\mathscr{U}$ una colección punto numerable de conjuntos abiertos en $\mathbb{T}$ tal que ningún elemento de $\mathscr{U}$ contenga al 1. Sea $\mathscr{F}$ la colección de todos los conjuntos $W_{\alpha,U} = \{w \in \mathscr{L} : w(\alpha) \in U\}$ donde $U \in \mathscr{U}$ y $\alpha \in X$. Note que $\mathscr{F}$ es punto numerable pues si $w_\beta \in \mathscr{L}_X$, entonces w_β sólo puede estar en los $W_{\alpha,U}$ tales que $\alpha < \beta$ y $U \in \mathscr{U}$ que son una cantidad numerable pues $\mathscr{U}$ es punto numerable. Además, la topología en $\mathscr{L}_X$ es la más pequeña en la que los elementos de $\mathscr{F}$ son clopen. El siguiente teorema demuestra que $\mathscr{L}_X$ es Fréchet.

Teorema 4.4 *Si X es un conjunto y $\mathscr{F}$ es una familia de subconjuntos de X que es punto numerable y que separa puntos, entonces la topología en X definida declarando a los elementos de $\mathscr{F}$ clopen tiene estrechez numerable y cualquier subespacio numerable es metrizable. En particular la topología es Fréchet.*

Demostración: La segunda parte del teorema se sigue del bien conocido hecho de que cualquier espacio Hausdorff segundo numerable es metrizable.

Para ver que X tiene estrechez numerable, sean $A \subset X$ y $x \in X$ punto de acumulación de A. Sea M un submodelo elemental numerable de $H(\theta)$ con θ un cardinal regular y suficientemente grande de tal forma que X, $\mathscr{F}$, x y A estén en M. Es suficiente demostrar que x es punto de acumulación de $A \cap M$.

Suponga que este no es el caso y sean $U_i\,(i < k)$ y $V_i\,(i < l)$ elementos de $\mathscr{F}$ tales que

$$W = \bigcap_{i<k} U_i \setminus \bigcup_{j<l} V_j$$

contiene a x y es disjunto de $A \cap M$. Observe que si $V \in \mathscr{F}$, entonces $V \cap M$ no es vacío si y sólo si $V \in M$. Esto se debe a que $\{V \in \mathscr{F} : y \in V\}$ es numerable para cada $y \in X$ y por lo tanto es un subconjunto de M siempre que y esté en M. Por lo tanto cada U_i está en M ya que $x \in U_i$ para cada $i < k$ y $x \in M$. Así, como sólo nos interesa que W sea disjunto de $A \cap M$, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que cada V_j está en M. De esta forma W está en M y por la elementaridad de M, hay un elemento de $W \cap A$ que está en M, lo que es una contradicción.

Ahora suponga que X satisface las condiciones del teorema, sea $A \subseteq X$ y $x \in X$ tal que $x \in \overline{A}$, sea $B \subseteq X$ testigo de la estrechez numerable de X, entonces $B \cup \{x\}$ es metrizable y por lo tanto Fréchet, así X es Fréchet. $\square$

Dado que nuestro principal objetivo es construir un L-espacio, nos gustaría probar ahora que si $X \subseteq \omega_1$ es no numerable, entonces $\mathscr{L}_X$ es hereditariamente Lindelöf. Probaremos el siguiente teorema de interés independiente y derivaremos esto como una consecuencia.

Teorema 4.5 *Si $X, Y \subseteq \omega_1$ tienen intersección numerable, entonces no existe ninguna función continua e inyectiva de algún subespacio no numerable de $\mathscr{L}_X$ a $\mathscr{L}_Y$.*

Demostración: Suponga que sí existe tal función inyectiva, digamos g. Entonces g es de la forma $w_\beta \mapsto w_{f(\beta)}$, donde $f : X_0 \to Y$ es inyectiva para algún $X_0 \subseteq X$ el cual es, sin pérdida de generalidad, disjunto de Y. Para cada $\xi \in \omega_1$, sean β_ξ y γ_ξ elementos de X_0 y Y como en el Lema 1.5. Aplique el Teorema 1.6 para encontrar $A \subseteq \omega_1$ no numerable y una vecindad V en $\mathbb{T}$, tal que $g(w_{\beta_\xi})(\gamma_\xi)$ no esté en $\overline{V}$ siempre que ξ pertenezca a A. Para cada $\xi \in A$, defina

$$W_\xi = \{w \in \mathscr{L}_Y : w(\gamma_\xi) \notin \overline{V}\},$$

use la continuidad de g para encontrar una vecindad básica abierta U_ξ de w_{β_ξ} tal que $U_\xi \subseteq g^{-1}[W_\xi]$.

Afirmación: Existen $A' \subseteq A$ no numerable, vecindades abiertas $U_i\,(i < k)$ en $\mathbb{T}$ y a_ξ en $[X]^k$ tales que para cada $\xi \in A'$ se cumple lo siguiente:

(1) $\{a_\xi : \xi \in A'\}$ es un Δ-sistema con raíz a,

(2) el conjunto

$$\{w \in \mathscr{L}_X : (\forall i < k)(w(a_\xi(i)) \in U_i)\}$$

tiene a w_{β_ξ} como elemento y es subconjunto de U_ξ,

(3) la desigualdad $\beta_\xi < f(\beta_\xi)$ no depende de ξ,

(4) $|\gamma_\xi \cap a_\xi|$ no depende de ξ.

Veamos que la afirmación es cierta. Sea $\mathscr{U}$ base numerable de $\mathbb{T}$. Sin pérdida de generalidad suponga que para cada $\xi \in A$,

$$U_\xi = \prod_{i \in a_\xi} U_{\xi,i} \times \prod_{i \in X \setminus a_\xi} \mathbb{T}_i,$$

con $U_{\xi,i}$ en $\mathscr{U}$. Por el Principio del Palomar infinito, podemos suponer que $|a_\xi| = k$ para cada $\xi \in A$. Considere ahora el conjunto $\{a_\xi : \xi \in A\}$, por el Lema del Δ-sistema, existe $B \subseteq A$ no numerable tal que (1) se cumple, veamos que podemos refinar a B lo suficiente tal que se cumple la afirmación. Para cada $i < k$ considere el conjunto

$$G_i = \{U_{\xi,i} : \xi \in B\},$$

por el Principio del Palomar infinito existe $U_i\,(i < k)$ que aparece una cantidad no numerable de veces en G_i; además existen $B_i \subseteq B\,(i < k)$ no numerables tales que $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \cdots \subseteq B_{k-2} \subseteq B_{k-1}$ y si $i < k$, $\xi \in B_i$, entonces $w_{\beta_\xi}(a_\xi(i)) \in U_i$. Por lo tanto, redefiniendo a B como B_{k-1}, tenemos que (1) y (2) se cumplen. Para verificar (3), observe que para cada $\xi \in B$, sólo hay una cantidad numerable de $\xi' > \xi$ en B tales que $f(\beta'_\xi) < \beta'_\xi$, por lo tanto, refinando nuevamente a B, podemos encontrar un subconjunto de B no numerable que cumple (3). Finalmente para satisfacer (4), note que $|\gamma_\xi \cap a_\xi| = j_\xi$ es un número natural para cada $\xi \in B$, por el Principio del Palomar infinito, existe $A \subseteq B$, no numerable que cumple (4). De esta forma, refinando a B lo suficiente podemos encontrar el A' que satisface la afirmación.

Sean $\mathscr{A}$ la colección de todos los $a_\xi \cup \{\gamma_\xi\} \setminus a$, $\mathscr{B}$ la colección de todos los $\{\beta_\xi, f(\beta_\xi)\}$ y j como en (4). Considere $\phi : k+1 \to 2$ tal que $\phi(i) = 1$ si y sólo si $i = j+1$; aplicando el Teorema 4.3 es posible encontrar $\xi < \xi'$ en A' tal que, para cada $i < k$,

$$a_\xi \cup \{\gamma_\xi\} < \text{mín}(\beta_{\xi'}, f(\beta_{\xi'})),$$

$$w_{\beta_{\xi'}}(a_\xi(i)) = o(a_\xi(i), \beta_{\xi'}) \in U_i,$$

$$g(w_{\beta_{\xi'}})(\gamma_\xi) = w_{f(\beta_{\xi'})}(\gamma_\xi) = o(\gamma_\xi, f(\beta_{\xi'})) \in V.$$

De esta forma, $w_{\beta_{\xi'}}$ es un elemento de U_ξ; sin embargo $g(w_{\beta_{\xi'}})$ no está en W_ξ, lo que es una contradicción a la elección de U_ξ. Esto finaliza la demostración. $\square$

Corolario 4.1 *Para cada X, $\mathscr{L}_X$ es hereditariamente Lindelöf.*

Demostación: Si no lo es, entonces $\mathscr{L}_X$ contiene un subespacio discreto no numerable. Entonces es posible encontrar $Y, Z \subseteq X$ disjuntos tales que $\mathscr{L}_Y$ y $\mathscr{L}_Z$ contienen subespacios discretos no numerables. Sin embargo, cualquier función de un espacio discreto a un espacio discreto es continua, lo que contradice el teorema anterior. $\square$

Consecuencia de lo anterior, si $X \subseteq \omega_1$ es no numerable, entonces $\mathscr{L}_X$ es un L-espacio. Además, por el Teorema 4.4, $\mathscr{L}_X$ es un espacio con estrechez numerable. Así, $\mathscr{L}_X$ es un espacio Lindelöf, ccc con estrechez numerable, no separable. Con dicho espacio, respondemos a una pregunta planteada por Iván Martínez Ruíz, Alejandro Ramírez Páramo y Armando Romero Morales en las Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana [6].

Desde siempre, cada vez que tenemos un espacio con ciertas propiedades, una pregunta natural es si el espacio seguirá preservando esas propiedades bajo operaciones como el producto cartesiano. Kunen demostró que bajo $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$, cualquier L-espacio contiene un discreto no numerable en alguna de sus potencias. Como podría esperarse, esto sucede en la primera instancia posible en nuestro ejemplo.

Teorema 4.6 *Para cada $X \subseteq \omega_1$ no numerable, $\mathscr{L}_X^2$ contiene un subespacio discreto no numerable.*

La demostración de este teorema se sigue esencialmente del siguiente resultado.

Proposición 4.2 *El árbol*

$$T(o) = \{o(\cdot, \beta)|_\alpha : \alpha \leq \beta < \omega_1)\}$$

es un árbol de Aronszajn.

Demostración: Primero veamos que $T(o)$ no tiene ramas no numerables. Para ver esto supongamos que $C \subseteq T(o)$ es una cadena no numerable, entonces los elementos de C son de la forma $o(\cdot, \beta)|_\alpha$ con $\alpha \in A$ y $\beta \in B$, donde A y B son subconjuntos de ω_1 no numerables. Sea U una vecindad abierta de $\mathbb{T}$; aplicando el Teorema 4.3 con $k = l = 1$ es posible encontrar $A' = \{\alpha_\gamma : \gamma \in \omega_1\} \subseteq A$ y $B' = \{\beta_\gamma : \gamma \in \omega_1\} \subseteq B$ tales que

$$o(\alpha_\gamma, \beta_\gamma) \in U,$$

para cada $\gamma \in \omega_1$. Observe que como C es cadena, si $\alpha_\gamma \in A'$ y $\beta_{\gamma'} \in B'$ son tales que $\alpha_\gamma < \beta_{\gamma'}$, entonces

$$o(\alpha_\gamma, \beta_{\gamma'}) \in U.$$

Finalmente considere a A', B' y a V vecindad abierta de $\mathbb{T}$ ajena a U para llegar a una contradicción del Teorema 4.3.

Para probar que todos los niveles de $T(o)$ son numerables, es suficiente probar que los niveles de $T(\varrho_1) = \{e_\beta|_\alpha : \alpha \leq \beta < \omega_1\}$ y $T(L) = \{L(\cdot, \beta)|_\alpha : \alpha \leq \beta < \omega_1\}$ son numerables. Por la Proposición 4.1, sabemos que $T(\varrho_1)$ satisface lo deseado. Veamos que $T(L)$ tiene niveles numerables, sea $\alpha < \omega_1$ fijo. Sea $\beta < \omega_1$ más grande que α. Para cada $\gamma < \alpha + 1$, considere $L(\gamma, \beta)$, por el Hecho 3 existe $\gamma_0 < \gamma$ tal que $L(\gamma, \beta) < L(\xi, \gamma)$ siempre que $\gamma_o < \xi < \gamma$. Usando la compacidad de $\alpha + 1$ es posible encontrar un conjunto finito $F_\beta \subseteq \alpha + 1$ tal que si $\gamma_0 < \gamma$ son elementos consecutivos de F_β entonces cumplen lo anterior mencionado. Es suficiente demostrar que si

$$L(\cdot, \beta)|_{F_\beta} = L(\cdot, \beta')|_{F_{\beta'}},$$

entonces

$$L(\cdot, \beta)|_\alpha = L(\cdot, \beta')|_\alpha.$$

Para ver esto, sea ξ un elemento arbitrario de $\alpha \backslash F_\beta$ y escoja $\gamma_0 < \gamma$ en F_β tal que $\gamma_0 < \xi < \gamma$. Finalmente aplicando el Hecho 2 tenemos que

$$L(\xi, \beta) = L(\xi, \gamma) \cup L(\gamma, \beta) = L(\xi, \gamma) \cup L(\gamma, \beta') = L(\xi, \beta').$$

Esto finaliza la demostración. $\square$

Para probar la veracidad del Teorema 4.6, escoja una sucesión $(\beta^0_\xi, \beta^1_\xi)$ cuyos índices pertenecen a un subconjunto $A \subseteq \omega_1$ no numerable, tal que para cada $\xi \in A$ se satisfacen las siguientes condiciones:

(1) $\beta_\xi^0 < \beta_\xi^1$ y ambos son elementos de X,

(2) Existe un $\epsilon > 0$ fijo tal que

$$|w_{\beta_\xi^0}(\beta_\xi^0) - w_{\beta_\xi^1}(\beta_\xi^0)| = |1 - w_{\beta_\xi^1}(\beta_\xi^0)| \geq \epsilon,$$

(3) Si $\eta < \xi$ está en A, entonces $\beta_\xi^0 < \xi$,

(4) $w_{\beta_\xi^0}|_\xi = w_{\beta_\xi^1}|_\xi$.

Esto es posible ya que $T(o)$ tiene niveles numerables. Ahora considere las siguientes vecindades abiertas

$$U_\xi = \{(u,v) \in \mathscr{L}_X : |w_{\beta_\xi^0}(\beta_\xi^0) - u(\beta_\xi^0)| + |v(\beta_\xi^0) - w_{\beta_\xi^1}(\beta_\xi^0)| < \epsilon\}$$

de $(w_{\beta_\xi^0}, w_{\beta_\xi^1})$ en $\mathscr{L}_X^2$ para $\xi \in A$. Si $\xi < \eta$ está en A, entonces por (2), $(w_{\beta_\xi^0}, w_{\beta_\xi^1})$ no está en U_ξ pues $w_{\beta_\eta^0}(\beta_\xi^0) = 1$. Si $\xi < \eta$, está en A, entonces por (3), $\beta_\xi^0 < \eta$ y por (4),

$$w_{\beta_\eta^0}(\beta_\xi^0) = w_{\beta_\eta^1}(\beta_\xi^0).$$

Consecuentemente, por (2) y la desigualdad del triángulo, $(w_{\beta_\eta^0}, w_{\beta_\eta^1})$ no está en U_ξ. Por lo tanto $(w_{\beta_\eta^0}, w_{\beta_\eta^1})$ está en U_ξ si y sólo si $\xi = \eta$. Luego $\{(w_{\beta_\xi^0}, w_{\beta_\xi^1}) : \xi \in A\}$ es un subespacio discreto no numerable $\mathscr{L}_X^2$.

Bibliografía

[1] Eric K. van Douwen, Franklin D. Tall, and William A. R. Weiss. Nonmetrizable Hereditarily Lindelöf Spaces with Point-Countable Bases From CH. *Proceedings of The American Mathematical Society - Proc Amer Math Soc*, 64, 05 1977.

[2] Fernando Hernández Hernández. *Teoría de Conjuntos (Una introducción)*. Aportaciones Matemáticas No.13, tercera edición, 2011.

[3] Lorenz J. Halbeisen. *Combinatorial set theory. With a Gentle Introduction to Forcing*. Springer, 01 2012.

[4] Winfried Just and Martin Weese. *Discovering Modern Set-Theory. II: Set-Theoretic Tools for Every Mathematician*. American Mathematical Society, 1991.

[5] Kenneth Kunen. *Set Theory : An Introduction to Independence Proofs*. North-Holland Amsterdam, 1980.

[6] Iván Martínez Ruíz, Alejandro Ramírez Páramo, and Armando Romero Morales. Artículos de Exposición - Espacios π-Completos. Editores: Marcelo Aguilar and Luis Hernández Lamoneda. In *Memorias de la Sociedad Matemática Mexicana,* páginas 83 - 97, volumen 14. México: Sociedad Matemática Mexicana, 2018.

[7] Justin Moore. A Solution to the L-space Problem. *Journal of the American Mathematical Society*, 19, 07 2006.

[8] Judy Roitman. Chapter 7 - Basic S and L. In Kenneth Kunen and Jerry E. Vaughan, editors, *Handbook of Set-Theoretic Topology*, pages 295 – 326. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[9] Stevo Todorcevic. *Walks on Ordinals and Their Characteristics*, volume 263. Birkhäuser, 01 2007.