



**UNIVERSIDAD MICHOACANA
DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS
MAT LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ

**CARACTERIZACIÓN DE UNA
PANTALLA COMERCIAL DE
CRISTAL LÍQUIDO COMO
MODULADOR DE FASE**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS

PRESENTA:

**ANGEL EMETERIO CALVILLO
VAZQUEZ**

ASESOR:

DR. MAURICIO ORTIZ GUTIÉRREZ

MORELIA, MICHOACÁN AGOSTO 2019



Agradecimientos

Al Dr. Mauricio Ortiz Gutiérrez por sus valiosas enseñanzas, por su apoyo en laboratorio y en mi formación. Le agradezco porque él creyó en mí en que podría lograrlo.

A los miembros del jurado por tomarse el tiempo de leer el presente trabajo y por los comentarios realizados a este: al Dr. Luis Mariano Hernández Ramírez, Dr. Héctor Igor Pérez Aguilar, M.C Gabriel Arroyo Correa y M. en C. Patricia Manríquez Zavala.

A los laboratorios de la Facultad de ciencias Físico Matemáticas, en especial al laboratorio de Óptica, también le agradezco a Marco el técnico del laboratorio ya que siempre ha apoyado a todos los tesisistas y alumnos.

A mi Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, a mi Facultad en Ciencias Físico Matemáticas y a mis compañeros y amigos de esta.

A mis padres Marco Antonio Calvillo Aguilar y Ma. Guadalupe Vazquez Yépez porque desde niño cuidaron, quisieron y creyeron en mí y gracias a ellos pude llegar a la Universidad.

A mis hermanos Jonathan, Marco, Michael, Diana por el apoyo que me ofrecieron en todos estos años y por luchar esta vida juntos. A mis tíos, abuelos, primos y a mi mascota acuarela quien me brinda amor.

A mi novia Monserrat por apoyarme moral y emocionalmente estos 5 años que fueron muy bellos, puesto que en ellos aprendí que caer significa levantarse, donde una mala calificación significa un gran esfuerzo y donde aprendes que el amor lo vence todo.

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mi familia que estuvieron siempre presentes en mi travesía a lo largo de estos años.

A mi novia por estar junto a mi desde el comienzo hasta el fin de mi carrera y compartir conmigo momentos tristes y felices.

Angel Emeterio Calvillo Vazquez

Resumen

En este trabajo se utilizó la teoría de polarización con el objetivo de construir una matriz de una TN-LCD (Twisted Nematic-Liquid Crystal Device, por sus siglas en inglés) que se utiliza en el método de Soutar y Lu para calcular valores característicos de ella, como lo es: el ángulo director, debido a que es una TN-LCD comercial y no está caracterizada. El ángulo es importante porque al dirigir un haz de luz polarizado paralelo a éste, la TN-LCD presenta un valor máximo de fase.

La fase se midió utilizando el método de Efecto Talbot donde se construyó una rejilla periódica binaria que se despliega en la LCD y a un cuarto de su distancia de Talbot genera una rejilla de fase periódica que con el método de Mellado se encuentra la relación entre los niveles de gris de esta imagen, que se procesa dividiéndola en regiones y en cada una de ellas se analiza el contraste del patrón de irradiancia para por fin obtener la fase de ella que fue diferente en cada región de la pantalla. Una vez obtenido el comportamiento de la fase de la LCD se encontró una ecuación que representa la fase en cada región, por lo que se pudo calcular una fase constante para la LCD. Posteriormente con la experiencia adquirida se propuso a generar un holograma por computadora y reconstruirlo tanto físicamente como virtualmente para hacer uso de hologramas dinámicos en tiempo real.

Palabras claves: Modulador espacial de luz, Medio anisótropo, Efecto Talbot, Caracterización por fase, Holograma.

Abstract

In this work the polarization theory was used with the objective of fixing a matrix of a TN-LCD that is used in the method of Soutar and Lu to calculate its characteristic values, as they are the director angle because it is a TN-LCD commercial and is not characterized. The angle is important because when sending a beam of polarized light parallel to this, the TN-LCD presents a maximum phase value, which allowed the commercial TN-LCD to be used as a phase modulator.

The phase was measured using the Talbot Effect method where a binary periodic grid was built, which is displayed on the LCD and a quarter of its distance from Talbot generates a periodic phase grid that with the Mellado's method is the relationship between the levels of gray of this image, which is processed by dividing it in regions and in each of them the contrast of the irradiance pattern is analyzed to finally obtain the phase of it that was different in each region of the screen. Once the behavior of the LCD phase was obtained, an equation representing the phase in each region was found, so a constant phase for the LCD could be calculated. Later, with the acquired experience, we proposed to generate a hologram by computer and reconstruct it both physically and virtually to make use of dynamic holograms in real time.

Keywords: Spatial light modulator, Anisotropic medium, Talbot effect, Characterization by phase, Hologram.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Objetivo general	3
1.2. Objetivos específicos	3
1.3. Estructura de la tesis	4
2. Polarización	5
2.1. Ecuaciones de Maxwell	5
2.2. Estados de polarización	7
2.2.1. Polarización elíptica	9
2.2.2. Polarización circular	10
2.2.3. Polarización lineal	11
2.3. Vectores de Jones para la polarización	12
2.4. Polarizadores	14
2.5. Matriz de Jones	14
2.6. Propagación de una onda en un medio anisótropo	17
2.6.1. Cristal uniaxial	20
2.7. Retardadores	22
2.7.1. Retardador de cuarto de onda	22
2.7.2. Retardador de media de onda	22
2.8. Matriz de Jones para retardadores	23
3. Pantalla de cristal líquido	25
3.1. Componentes de una LCD y su funcionamiento	25
3.1.1. Cristal líquido	26
3.1.2. Cristal líquido nemático	27
3.1.3. Electrodo y polarizadores	28
3.1.4. Celda de cristal líquido nemático con estructura de hélice	29
3.1.5. Respuesta de una TN-LCD a un campo eléctrico	30

3.2. Matriz de Jones para TN-LC	31
3.2.1. Determinación de los parámetros de la TN-LCD	35
4. Difracción	38
4.1. Series de Fourier	38
4.1.1. Analogía de ondas planas con la serie de Fourier	40
4.2. Efecto Talbot	42
4.2.1. Patrón de difracción a la mitad de la distancia de Talbot	44
4.2.2. Patrón de difracción a un cuarto de la distancia de Talbot	44
4.2.3. Medición de fase por efecto Talbot	47
4.3. Hologramas	49
4.3.1. Generación de un holograma	50
4.4. Holograma generado por computadora (HGC)	51
4.4.1. Holograma de Fourier	52
4.4.2. Construcción del HGC de Fourier	54
5. Resultados	55
5.1. Adaptación del proyector	55
5.1.1. Especificaciones de la LCD utilizada	56
5.2. Medición del vector director	57
5.2.1. Resultados de la medición del vector director	59
5.3. Caracterización de la fase de una TN-LC	66
5.3.1. Diseño y construcción de una rejilla binaria	68
5.3.2. Arreglo experimental para la obtención de fase	69
5.3.3. Método de división de la rejilla a un cuarto de la distancia de Talbot	71
5.3.4. Procesamiento de las sub-imágenes	72
5.3.5. Representación de la fase para cada región de la LCD .	75
5.4. Holograma generado por computadora	78
6. Conclusiones	82
Apéndices	83
A. Transformada de Fourier	83
B. Códigos de Matlab	87
Referencias	92

Capítulo 1

Introducción

Los moduladores espaciales de luz (SLM, Spatial Light Modulators, por sus siglas en inglés) son dispositivos que modifican sus propiedades ópticas de manera dinámica, como lo son la fase y la amplitud. Éstas se pueden encontrar como: electro-ópticos, magneto-ópticos, mecánicos compuestos por micro espejos, acusto-ópticos y cristales líquidos. Estos últimos son sustancias que presentan una fase intermedia entre los estados sólido y líquido y por ello tienen propiedades ópticas, cuya estructura hace que modifique el haz de luz [1, 2, 3] .

Los cristales líquidos pueden ser utilizados como retardadores variables, atenuadores variables, moduladores de fase, generadores de estados de polarización, etc. Los más frecuentes son los basados en cristales líquidos nemáticos con estructura helicoidal (TN, twisted nematic, por sus siglas en inglés). El modo TN consiste en un giro controlable del plano de polarización de la luz que atraviesa una celda de cristal líquido y presenta una estructura molecular en forma de hélice [4]. La mayoría de las TN poseen un giro molecular de 90 grados que se sitúan entre dos polarizadores y la variación del voltaje es proporcional a una modulación de intensidad; es decir, un despliegue de información. Por ello, los TN-LCD se utilizaron en el diseño de pantallas para calculadoras y relojes [5].

Con el avance de la tecnología de los sistemas electrónicos, aparecieron dispositivos formados por celdas que se activaban mediante un esquema de multiplexado conocido como passive-matrix addressing. Ya en 1990 se construyeron pantallas de cristal líquido de alta resolución que tenían un esquema

de control activo conocido como active-matrix addressing, donde se utilizaba un elemento electrónico (TFT) unido a cada elemento de la pantalla (pixel) y que permite el control electrónico individual. Para 1994 el tamaño de una TFT-LCD era de 9.5 pulgadas (en diagonal) con una resolución VGA (640×480 píxeles). Por esto se fabricaron las TN-LCD comerciales que funcionaban como proyectores con un reducido tamaño y que permitían proyectar la imagen en grande del ordenador. Es de aquí el interés por éstas ya que son económicamente accesibles. Recientemente existe la mejora como dispositivos de cristal líquido y son sobre silicio (LCoS, Liquid Crystal on Silicon, por sus siglas en inglés), que funcionan por reflexión y trabajan en el régimen de modulación pura de fase. Usualmente los TN-LCD se emplean como moduladores espaciales de intensidad en el diseño de pantallas.

La utilización de las TN-LCD comerciales como moduladores espaciales de luz carece de información acerca de los parámetros físicos que la caracterizan, como son el giro molecular, la birrefringencia, entre otros. Para ello se usa el método propuesto por Soutar y Lu [6] que consiste en el ajuste numérico de las curvas de irradiancia obtenidas al situar una TN-LCD entre dos polarizadores lineales, cuyos ejes de transmisión cambian de orientación simultáneamente, paralelos o bien perpendiculares.

En 1990 Saleh y Lu [7] fueron los primeros en encontrar las condiciones donde una pantalla de cristal líquido *twis-90* grados podía utilizarse como modulador de fase. En [8] García-Martínez, P., García, J., y de Dios, D. calibraron en tiempo real la intensidad de las pantallas de cristal líquido nemático mediante el procesamiento de una imagen de salida, dando un ajuste correcto a los valores como: brillo, contraste, gamma, etc. En [9] Schadt M. y Helfrich, W. estudiaron cristales líquidos con resoluciones bajas que corresponden a pantallas con pocos píxeles. En 1996 [10] Coy J. A., Zaldarriaga M., Grosz D. F. y Martinez O. E. caracterizaron una pantalla de cristal líquido proveniente de un televisor como modulador de luz e introdujeron por primera vez el efecto de los bordes de una LC, que afectan los resultados obtenidos. En 1998 [11] Konforti N., Marom E. y Wu S. T. mediante un arreglo interferométrico de Math Zehnder demostraron que la LCD se puede utilizar como modulador de amplitud colocando los polarizadores cruzados y encontraron que para modular en fase se debe colocar el eje de transmisión del primer polarizador paralelo al de las moléculas. En [12] Alvarez M. L., Márquez A., Puerta L. A., Estévez R. Fernandez-Varo H., Beléndez A. y Pascual I. carac-

terizaron una pantalla de cristal líquido con poca resolución y calcularon la fase sin necesidad de las características de ella.

Otros trabajos posteriores se encuentran en [13, 14, 15]. En el 2013 Villaseñor G. M. [16] caracterizó una pantalla de LCD de reflexión modelo HED 6010 xxx de LCoS por medio del Efecto Talbot, encontrando que la pantalla puede modular la fase en 2π radianes en función de los niveles de gris que se obtienen en la pantalla.

Como se observa en el transcurso del tiempo ha habido varias maneras de caracterizar una pantalla de cristal líquido. La elaboración de este trabajo pretende poder utilizar una pantalla comercial como modulador de fase o para crear hologramas por computadora que se puedan visualizar dinámicamente.

Por lo anterior se plantea el siguiente objetivo general.

1.1. Objetivo general

Caracterizar en función de la fase una pantalla comercial de cristal líquido y utilizarla como medio dinámico para desplegar hologramas generados por computadora.

Los objetivo específicos son los siguientes.

1.2. Objetivos específicos

- Comprender el concepto de polarización de la luz y su representación vectorial.
- Comprender el funcionamiento de una LCD y su representación matricial.
- Comprender el fenómeno de difracción de campo cercano y campo lejano.
- Comprender el efecto Talbot o fenómeno de autoimágenes.

- Simular el efecto de difracción de campo lejano para construir hologramas de Fourier.
- Visualizar HGC en la LCD.

1.3. Estructura de la tesis

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera: El capítulo 2 contiene conceptos básicos de los diferentes estados de luz; su representación por medio de los vectores de Jones, así como el comprender el comportamiento de la luz dentro de un medio anisotrópico como lo es un cristal líquido.

En el capítulo 3 se mencionarán los conceptos de las pantallas de cristal líquido, de una TN-LCD y su interpretación como una matriz de Jones, donde se discute el método de Soutar y Lu para encontrar las características de la TN-LCD.

En el capítulo 4 los conceptos de difracción en campo cercano (Efecto Talbot para la caracterización en fase de la LCD) y de campo lejano (Transformada de Fourier para generación de hologramas); así como un método para la caracterización de la LCD (Mellado) y conceptos de holografía.

En el capítulo 5 se presentan los resultados obtenidos en esta tesis, así como las discusiones sobre ellos.

Capítulo 2

Polarización

En base a las ecuaciones de Maxwell se entiende a la luz como una forma de energía electromagnética, dado un punto arbitrario en el espacio, el estado de la onda queda especificado por dos vectores: el campo eléctrico y el campo magnético. Se puede deducir que la luz puede tratarse como una onda electromagnética transversal [17], lo que significa que el campo eléctrico y magnético son siempre perpendiculares a la dirección de propagación de la onda.

La forma en como oscila el campo eléctrico denomina lo que se conoce como polarización. Si un haz de luz tiene su campo eléctrico que cambia de dirección al azar se le conoce como luz natural, en cambio, si la dirección de este campo se mantiene en una dirección en específico se conoce como luz polarizada. En este capítulo se mencionan los diferentes estados de polarización de la luz y como se pueden expresar matemáticamente, además de ver cómo se comporta una onda electromagnética dentro de un material anisótropo.

2.1. Ecuaciones de Maxwell

En la teoría de ondas, la luz está compuesta por ondas electromagnéticas propagándose en el espacio que son descritas por cuatro cantidades fundamentales: campo eléctrico $\mathbf{E}$, desplazamiento eléctrico $\mathbf{D}$, campo magnético $\mathbf{H}$ y la inducción magnética $\mathbf{B}$. Las ecuaciones de Maxwell [18] proporcionan un entorno adecuado para el estudio de ondas electromagnéticas, tal como la propagación de la luz a través de la materia, porque relacionan las cantidades

fundamentales ya descritas mediante las siguientes ecuaciones:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

donde las cantidades ρ y $\mathbf{J}$ son la densidad de carga eléctrica y la densidad de corriente respectivamente, además $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ y $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$ se les conocen como vectores de desplazamiento eléctrico y de inducción magnética respectivamente siendo ϵ y μ constantes que dan la característica eléctrica y magnética del medio. En el vacío $\epsilon = \epsilon_0 = 8,8542 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ y $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N} \cdot \text{s}^2/\text{C}^2$.

Las ecuaciones de Maxwell se pueden relacionar entre sí para dar origen a las ecuaciones de onda para un medio no conductor que se encuentra en el vacío y son dadas por:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (2.5)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (2.6)$$

Las ecuaciones (2.5) y (2.6) son casos generales de la ecuación de onda dada por:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \quad (2.7)$$

donde v es la velocidad de la onda que toma el valor de $v = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. Una solución para la ecuación (2.7) se escribe de la siguiente manera:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (2.8)$$

siendo A la amplitud de la onda, ω la frecuencia angular, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ y $\mathbf{k}$ es el vector de onda, el cual apunta hacia la dirección de propagación cuya amplitud se obtiene en términos del índice de refracción n , la velocidad de luz c y la longitud de onda de la luz en el vacío λ_0 y es escrito como:

$$k = n \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}. \quad (2.9)$$

Por otro lado la solución para la ecuación (2.5) es una onda plana monocromática que se representa por su campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (2.10)$$

donde $\mathbf{E}_0$ es el vector constante que representa la amplitud de la onda.

Una solución particular de la ecuación (2.5) que toma los valores $\mathbf{r} = z\hat{k}$ y $\mathbf{E}_0 = E_{0x}\hat{i}$ tiene como resultado:

$$\mathbf{E}(z, t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \phi_x)\hat{i}. \quad (2.11)$$

La gráfica de la onda descrita por la ecuación (2.11) para un tiempo $t=0$ se esquematiza en la figura 2.1. Se puede ver que la onda vibra u oscila en el plano xz y se dice que la onda es horizontalmente polarizada. En las siguientes secciones se analizan diferentes estados de polarización.

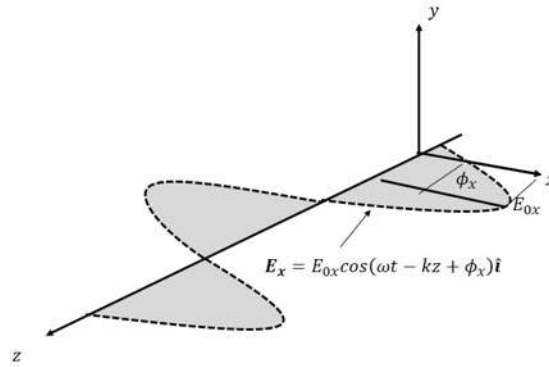


Figura 2.1: Esquema de una onda $\mathbf{E}_x(z, t)$ con fase ϕ_x para un instante $t=0$.

2.2. Estados de polarización

La luz polarizada tiene la característica de que la orientación del campo eléctrico es constante aunque su magnitud y signo varíen con el tiempo. Debido a que los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ componen a una onda transversal, de las ecuaciones de Maxwell se tiene una relación entre ellos escrita como $|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|$. En esta relación se observa que se puede tomar el campo eléctrico $\mathbf{E}$, e ignorar el campo magnético $\mathbf{B}$, ya que su magnitud es mas pequeña que la de $\mathbf{E}$.

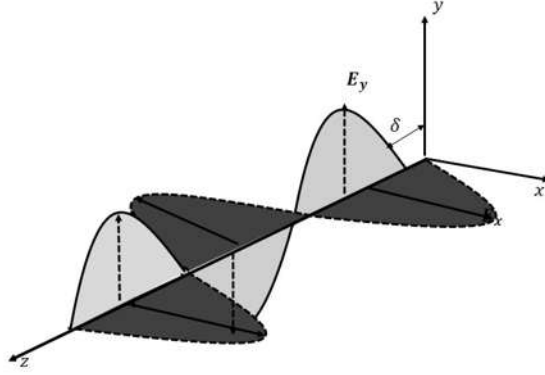


Figura 2.2: Esquema de dos ondas eléctricas que son perpendiculares entre sí y se propagan en dirección del eje z .

Si se consideran dos campos eléctricos linealmente polarizados que son perpendiculares entre sí, que se propagan en la misma dirección y vibran en los planos xz y yz como se puede ver en la figura 2.2, entonces las ecuaciones de estas dos ondas se pueden escribir como:

$$E_x(z, t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t), \quad (2.12)$$

$$E_y(z, t) = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \delta). \quad (2.13)$$

La superposición de estas dos ondas produce una nueva onda con polarización diferente que depende de las amplitudes E_{0x} y E_{0y} , así como de la diferencia de fase relativa δ entre ellas y se escribe a continuación:

$$\mathbf{E}(z, t) = E_x(z, t)\hat{i} + E_y(z, t)\hat{j}. \quad (2.14)$$

Al sustituir las ecuaciones (2.12) y (2.13) en la ecuación (2.14) se obtiene:

$$\mathbf{E}(z, t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t)\hat{i} + E_{0y} \cos(kz - \omega t + \delta)\hat{j}. \quad (2.15)$$

La ecuación (2.15) es una solución de la ecuación de onda dada por la ecuación (2.5), sin embargo también corresponde a un nuevo estado de polarización y a partir de esta se derivan todos los casos de luz polarizada. El primer caso que se analiza es el estado de polarización elíptica.

2.2.1. Polarización elíptica

La expresión de la ecuación (2.15) produce un estado de polarización elíptica. Para conocer el perfil que describe este estado se debe evitar la dependencia espacial y temporal de las ecuaciones constitutivas. Por ello las ecuaciones (2.12) y (2.13) se pueden reescribir como:

$$E_x(z, t)/E_{0x} = \cos(kz - \omega t), \quad (2.16)$$

$$E_y(z, t)/E_{0y} = \cos(kz - \omega t + \delta). \quad (2.17)$$

Con la identidad trigonométrica $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$, la ecuación (2.17) se reescribe como:

$$E_y(z, t)/E_{0y} = \cos(kz - \omega t) \cos\delta - \sin(kz - \omega t) \sin\delta, \quad (2.18)$$

que sustituyendo la ecuación (2.16) en la ecuación (2.18) se obtiene:

$$E_y(z, t)/E_{0y} - E_x(z, t)/E_{0x} \cos\delta = -\sin(kz - \omega t) \sin\delta, \quad (2.19)$$

donde $\sin(kz - \omega t) = (1 - \cos(kz - \omega t))^{1/2}$. Ahora sustituyendo en la ecuación (2.16) y a su vez sustituyendo en la ecuación (2.19), se tiene una expresión simplificada que no depende del argumento $(kz - \omega t)$ y está dada por:

$$\frac{E_y(z, t)}{E_{0y}} - \frac{E_x(z, t)}{E_{0x}} \cos\delta = -\sqrt{1 - \left(\frac{E_x(z, t)}{E_{0x}}\right)^2} \sin\delta. \quad (2.20)$$

Elevando al cuadrado la ecuación (2.20) y ordenando los términos finalmente se llega a:

$$\frac{E_y^2(z, t)}{E_{0y}^2} + \frac{E_x^2(z, t)}{E_{0x}^2} - 2\frac{E_x(z, t)}{E_{0x}} \cos\delta = \sin^2\delta. \quad (2.21)$$

La ecuación (2.21) representa una elipse que forma un ángulo α con el sistema coordenado (E_x, E_y) como se puede ver en la figura 2.3, donde el ángulo α está dado por:

$$\tan 2\alpha = \frac{2E_{0x}E_{0y} \cos\delta}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}. \quad (2.22)$$

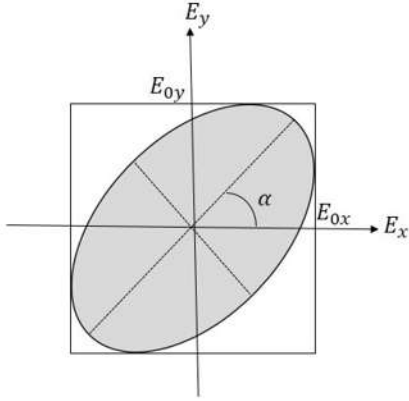


Figura 2.3: Estado de polarización elíptica a un ángulo α en el sistema (E_x, E_y) .

Si se toma $\alpha = 0$ y además $\delta = (2m - 1)\pi/2$ con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, la ecuación (2.21) se puede reducir a:

$$\left(\frac{E_x(z, t)}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y(z, t)}{E_{0y}}\right)^2 = 1. \quad (2.23)$$

La ecuación (2.23) representa a una elipse centrada en el origen de coordenadas con ejes E_{0x} y E_{0y} . A partir del estado de polarización elíptica se deducen los siguientes estados de polarización.

2.2.2. Polarización circular

La polarización circular es un caso particular de la polarización elíptica que se obtiene al tomar las amplitudes iguales ($E_{0y} = E_{0x} = E_0$) y una diferencia de fase $\delta = (2m - 1)\pi/2$ (donde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) en la ecuación (2.21) quedando así:

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2, \quad (2.24)$$

La ecuación (2.24), representa un estado de polarización circular.

Si ahora se considera la ecuación (2.15) con $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ y se toma diferencias de fase de $\frac{\pi}{2} \pm 2m\pi$ y $-\frac{\pi}{2} \pm 2\pi m$, se obtiene dos estados de polarización circular distintos dados a continuación:

1. Para una diferencia de fase $\frac{\pi}{2} \pm 2m\pi$, la ecuación (2.15) se convierte en:

$$\mathbf{E} = E_0 \left[\cos(kz - \omega t)\hat{i} - \sin(kz - \omega t)\hat{j} \right], \quad (2.25)$$

dado un punto fijo $z = z_0$, la ecuación (2.25) tiene un ángulo θ dado por:

$$\tan \theta = -\frac{\sin(kz_0 - \omega t)}{\cos(kz_0 - \omega t)} = \tan(-kz_0 + \omega t). \quad (2.26)$$

De la ecuación (2.26) $\theta = -kz_0 + \omega t$, tomando un diferencial de ángulo $d\theta = \omega t$, se obtiene que el diferencial es positivo, que de acuerdo a la definición de un ángulo positivo y uno negativo, la onda polarizada irá en dirección contraria a las manecillas del reloj y se dice entonces, que tiene polarización circular izquierda definido por L.

2. Para una diferencia de fase $-\frac{\pi}{2} \pm 2m\pi$, la ecuación (2.15), se tiene:

$$\mathbf{E} = E_0 \left[\cos(kz - \omega t)\hat{i} + \sin(kz - \omega t)\hat{j} \right], \quad (2.27)$$

al realizar el procedimiento por el cual se dedujo la polarización circular izquierda, para un punto fijo $z = z_0$ la ecuación (2.27) tiene un ángulo θ el cual girá en el mismo sentido a las manecillas del reloj ($d\theta = -\omega t$) y se dice entonces que tiene polarización circular derecha definido por R.

2.2.3. Polarización lineal

Otro caso particular de la polarización elíptica es la polarización lineal que se obtiene cuando el desfase entre ambas componentes del haz de luz (ecuaciones (2.12) y (2.13)) toman los siguientes valores:

1. $\delta = 2m\pi$ con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ En este caso la ecuación (2.21) se puede reducir a

$$\left(\frac{E_x(z, t)}{E_{0x}} \right)^2 - 2 \left(\frac{E_x(z, t)E_y(z, t)}{E_{0x}E_{0y}} \right) + \left(\frac{E_y(z, t)}{E_{0y}} \right)^2 = 0,$$

$$\left(\frac{E_x(z, t)}{E_{0x}} - \frac{E_y(z, t)}{E_{0y}} \right)^2 = 0,$$

$$E_y(z, t) = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x(z, t). \quad (2.28)$$

La ecuación (2.28) representa una línea recta que tiene la forma $y = mx + b$ con $b = 0$ y pendiente $m = E_{0y}/E_{0x}$. Se dice entonces que la superposición de las ondas genera una onda con polarización lineal. La polarización es lineal a 45° respecto de la horizontal cuando la magnitud de las amplitudes es igual para ambas ondas ($E_{0y} = E_{0x} = E_0$).

2. $\delta = (2m + 1)\pi$ con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ En este caso la ecuación (2.21) se puede reducir a

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_x(z, t)}{E_{0x}} \right)^2 + 2 \left(\frac{E_x(z, t)E_y(z, t)}{E_{0x}E_{0y}} \right) + \left(\frac{E_y(z, t)}{E_{0y}} \right)^2 &= 0, \\ \left(\frac{E_x(z, t)}{E_{0x}} + \frac{E_y(z, t)}{E_{0y}} \right)^2 &= 0, \\ E_y(z, t) &= -\frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x(z, t). \end{aligned} \quad (2.29)$$

De manera similar, la ecuación (2.29) representa luz con polarización lineal pero ahora con pendiente negativa ($m = -E_{0y}/E_{0x}$). Cabe mencionar que si las amplitudes son iguales, la polarización está inclinada a un ángulo de -45° respecto de la horizontal.

2.3. Vectores de Jones para la polarización

Otra representación de la polarización de la luz es en términos del campo eléctrico que se obtiene por medio de un arreglo en forma de columna dado por la ecuación (2.30) y toma el nombre de vector de Jones,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

donde $E_x(t)$ y $E_y(t)$ son las componentes instantáneas de $\mathbf{E}$. Si se conserva la información de fase, las componentes de la ecuación (2.30) se escriben como:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i\phi_x} \\ E_{0y}e^{i\phi} \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

siendo E_i y ϕ_i la amplitud y fase inicial respectivamente con $i = x, y$. En la ecuación (2.31) se omite el término $e^{i(\omega t - kz)}$ por ser común en ambas componentes y característico del frente de onda.

Debido a que sólo se quiere conocer el estado de polarización de la onda, es conveniente usar los vectores normalizados de Jones que cumplen lo siguiente:

$$\mathbf{E}^\dagger \cdot \mathbf{E} = 1, \quad (2.32)$$

donde $\mathbf{E}^\dagger$ es el complejo conjugado de $\mathbf{E}$.

Un ejemplo de un vector de Jones, corresponde a luz polarizada a lo largo de una dirección que forma un ángulo θ con respecto al eje x y está dado por:

$$\mathbf{L}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Se puede observar que el vector de Jones de la ecuación (2.33) cumple con la ecuación (2.32), esto indica que es un vector normalizado. En la tabla 2.1 se encuentran los vectores de Jones de norma unitaria para los estados de polarización estudiados en la sección anterior.

Tabla 2.1: Vectores de Jones correspondientes a sus estados de polarización.

Estado de polarización	Vectores de Jones
Estado lineal horizontal	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Estado lineal vertical	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Estado lineal a 45°	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Estado lineal a -45°	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
Estado circular R	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$
Estado circular L	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Para analizar la luz polarizada se utilizan dispositivos conocidos como polarizadores y retardadores que son descritos en las siguientes secciones.

2.4. Polarizadores

Con la definición de luz polarizada, el siguiente paso corresponde el comprender las técnicas que se utilizan para generarla y manipularla. Un polarizador es un dispositivo óptico cuya energía de entrada es luz natural y cuya salida es algún estado de polarización de la luz.

Un instrumento que separa en dos componentes a la luz natural (la cual se puede representar como la superposición de dos estados de polarización ortogonales, incoherentes y de igual amplitud), descartando una y dejando pasar la otra, se le conoce como polarizador lineal.

Los polarizadores toman configuraciones muy diferentes, pero todos ellos se fundamentan en uno de los cuatro mecanismos físicos esenciales: dicroísmo o absorción selectiva, reflexión, esparcimiento y birrefringencia o doble refracción. Estos mecanismos tienen una propiedad importante que comparten y es el poseer una asimetría asociada con el proceso de fabricación. En este trabajo se menciona únicamente la birrefringencia o doble refracción, los otros mecanismos se pueden encontrar en [17].

2.5. Matriz de Jones

Cuando la luz pasa a través de un dispositivo sensible a la polarización, el estado de la polarización se modifica; es decir si un haz incidente polarizado que es representado por su vector de Jones $\mathbf{E}_i$, atraviesa un elemento óptico, sale un nuevo vector $\mathbf{E}_t$ correspondiente a la onda transmitida. Entonces este proceso se puede describir utilizando una matriz de 2×2 denotada por A que está dada por:

$$\mathbf{E}_t = A\mathbf{E}_i. \quad (2.34)$$

Un ejemplo de un dispositivo óptico corresponde a un polarizador que al incidir luz natural, éste transmite luz linealmente polarizada paralela al eje de transmisión que está horizontalmente y su matriz se puede escribir como:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Una de las propiedades que se tiene al utilizar las matrices, es que si una onda atraviesa una serie de elementos ópticos representados por matrices,

$A_1, A_2, \dots, A_n$, entonces se cumple la siguiente relación:

$$\mathbf{E}_t = A_n A_{n-1} \cdots A_1 \mathbf{E}_i. \quad (2.36)$$

Las matrices A_i de la ecuación (2.36) no conmutan, por tanto es importante aplicar el orden adecuado. La onda que sale del primer elemento óptico en la serie es $A_1 \mathbf{E}_i$; después de atravesar el segundo elemento se convierte en $A_2 A_1 \mathbf{E}_i$ y así sucesivamente.

En la tabla 2.2 hay un listado breve de las matrices de Jones para diferentes elementos ópticos.

Tabla 2.2: Matrices de Jones para diferentes sistemas ópticos.

Sistema óptico	Matriz de Jones
Polarizador lineal horizontal	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Polarizador lineal vertical	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Polarizador lineal a 45°	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
Polarizador lineal a -45°	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
Polarizador circular derecho	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$
Polarizador circular izquierdo	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

Un sistema óptico de importancia consiste en una rotación del sistema de coordenadas en el que está descrita la onda de luz. Las componentes de la onda en el nuevo sistema de referencia mostrado en la figura 2.4 son:

$$E'_x = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta, \quad (2.37)$$

$$E'_y = E_y \cos \theta - E_x \sin \theta. \quad (2.38)$$

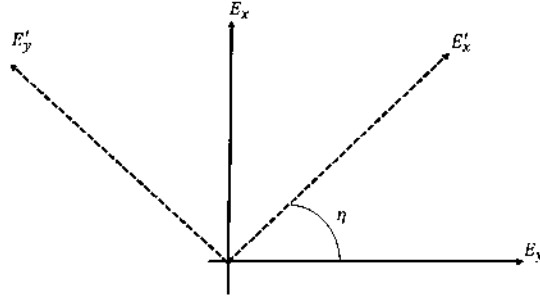


Figura 2.4: Esquema de la relación entre el sistema primado y el sistema inicial.

Las ecuaciones (2.37) y (2.38) se pueden reescribir como:

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

La ecuación (2.39) muestra que el campo eléctrico en el sistema primado se puede representar por medio del campo eléctrico del sistema inicial (no primado), que atraviesa un sistema óptico a través de la matriz de rotación $\mathbf{R}(\theta)$ dada por la ecuación (2.40).

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Una propiedad interesante de la matriz de rotación sucede cuando a la onda se le hace una rotación de sistema de coordenadas a un ángulo θ_1 y luego se le hace otra rotación a un ángulo θ_2 en el mismo sentido, la matriz de Jones de la rotación total se calcula a partir de la ecuación (2.36), por lo que la matriz de Jones que representa las dos rotaciones es:

$$\mathbf{R}(\theta_1 + \theta_2) = \mathbf{R}(\theta_2) \cdot \mathbf{R}(\theta_1). \quad (2.41)$$

Si se aplica una rotación a un ángulo θ y después se aplica esa misma rotación en sentido antihorario, se obtiene un sistema de coordenadas original representado como:

$$\mathbf{R}(-\theta) \cdot \mathbf{R}(\theta) = \mathbf{I}, \quad (2.42)$$

siendo $\mathbf{I}$ la matriz identidad. Debido a que la matriz que cumple la ecuación (2.42) es la matriz inversa, se tiene:

$$\mathbf{R}(-\theta) = \mathbf{R}^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Si se tiene un dispositivo cuya matriz de Jones en el sistema de coordenadas xy es $\mathbf{M}$ y el dispositivo es rotado a un ángulo θ , la nueva matriz de Jones en el mismo sistema de coordenadas $\mathbf{M}$ se obtiene haciendo uso de la matriz de rotación de sistemas de coordenadas y se escribe como:

$$\mathbf{M}(\theta) = \mathbf{R}^{-1}(\theta) \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}(\theta). \quad (2.44)$$

2.6. Propagación de una onda en un medio anisótropo

Se mencionaron las ecuaciones constituyentes para un medio, que son las ecuaciones de Maxwell. Un estudio detallado son los medios anisótropos en los cuales la luz se propaga en diferentes direcciones por tanto tendrá diferentes índices de refracción y se propagará con diferente velocidad.

En un medio isótropo la propagación de una onda de luz se caracteriza por una constante dieléctrica independiente de la dirección en la cual se propague la luz. Debido a que se estudia la propagación de la luz en un medio uniforme, magnético y anisotrópico se tiene que $\mathbf{J} = 0$. La velocidad de la luz en este medio y la variación de la fase depende de la dirección del campo eléctrico con respecto al eje óptico del medio. Las propiedades de un medio anisotrópico se describen por el tensor dieléctrico ϵ , el cual relaciona el campo $\mathbf{E}$ con el desplazamiento eléctrico $\mathbf{D}$ como:

$$D_i = \epsilon_0 \epsilon_{ij} E_j, \quad (2.45)$$

donde los índices i, j van de los ejes x, y y z , los cuales caracterizan a un cristal.

Puesto que el medio es transparente y no absorbente el tensor dieléctrico ϵ_{ij} es un tensor simétrico y real. Siempre es posible escoger un sistema con ejes ortogonales tal que solo la diagonal del tensor dieléctrico sean no ceros

el cual es de la forma:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

Utilizando la ecuación (2.46), la ecuación (2.1) para medio anisotrópico se convierte en:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon_0 \epsilon \cdot \mathbf{E}) = 0 \quad (2.47)$$

La ecuación (2.47) asegura que $\mathbf{D} = 0$ es perpendicular a la dirección de propagación, pero no asegura que $\mathbf{E}$ también lo sea.

Para un análisis en la propagación de onda en este medio se debe dejar las ecuaciones de Maxwell en términos de $\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$ y no $\mathbf{E}$ con $\mathbf{H}$ o $\mathbf{B}$, a esto se le llama desacoplar el campo magnético. Aplicando el operador rotacional en la ecuación (2.3) y sabiendo que $\mathbf{B}$ exhibe buen comportamiento, se tiene que

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t}. \quad (2.48)$$

Aplicando la identidad $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ y sustituyendo la ecuación (2.4) en la ecuación (2.48)

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (2.49)$$

Al considerar una onda plana monocromática vista en la sección 2.1, la ecuación (2.10) puede reescribirse mediante una función de onda periódica con fase $(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$, dada por:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (2.50)$$

donde $\mathbf{k}$ es el vector de onda escrito como:

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n \hat{s} = k_0 n (s_x \hat{x} + s_y \hat{y} + s_z \hat{z}), \quad (2.51)$$

siendo k_0 la magnitud del vector de onda dado por la ecuación (2.9) y $\hat{s}$ un vector unitario que indica la dirección de propagación de la onda.

Para tener una ecuación que describa una onda electromagnética a través de un medio anisotrópico se sustituye la ecuación (2.50) en (2.49) y se obtiene:

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{k} - k^2 \mathbf{E} = -k_0^2 \epsilon \cdot \mathbf{E}. \quad (2.52)$$

Desarrollando las operaciones de la ecuación (2.52) y sustituyendo el tensor dieléctrico de la ecuación (2.46)

$$\begin{pmatrix} k_0^2 \epsilon_x - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_z & k_0^2 \epsilon_y - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & k_0^2 \epsilon_z - k_x^2 - k_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0. \quad (2.53)$$

Para que una solución no trivial exista en la matriz de la ecuación (2.53), el determinante de esta debe ser igual a cero, es decir

$$\det \begin{vmatrix} k_0^2 \epsilon_x - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_z & k_0^2 \epsilon_y - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & k_0^2 \epsilon_z - k_x^2 - k_y^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.54)$$

Resolviendo la ecuación (2.54) se obtiene la ecuación (2.55), llamada ecuación de Fresnel

$$\begin{aligned} n^4 (\epsilon_x s_x^2 + \epsilon_y s_y^2 + \epsilon_z s_z^2) - n^2 [s_x^2 \epsilon_x (\epsilon_y + \epsilon_z) + s_y^2 \epsilon_y (\epsilon_x + \epsilon_z) + s_z^2 \epsilon_z (\epsilon_x + \epsilon_y)] \\ + \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z = 0, \end{aligned} \quad (2.55)$$

considerando que $\mathbf{k}$ toma el valor de la ecuación (2.51) y realizando operaciones algebraicas, entonces la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{s_x^2}{(n^2 - n_x^2)} + \frac{s_y^2}{(n^2 - n_y^2)} + \frac{s_z^2}{(n^2 - n_z^2)}, \quad (2.56)$$

donde $n_i^2 = \epsilon_i$, siendo $i = x, y, z$ los índices de refracción principales.

La ecuación (2.56) representa una superficie tridimensional en el espacio (k_x, k_y, k_z) , la cual es conocida como superficie normal. Ésta consiste de dos sábanas que, en general, tienen cuatro puntos en común y se determinan por los índices de refracción principales. Las líneas que van del origen a estos puntos son conocidos como el eje óptico. Además es cuadrática para n y diferente de cero, por tanto la propagación tiene dos soluciones

Si se considera que los índices de refracción son iguales $n_x = n_y = n_z$, se dice que el cristal es un medio isótropo. Otro caso es cuando los índices de refracción no son iguales, en este caso existen dos ejes ópticos y se dice que

el cristal es biaxial. En muchos materiales como la calcita, el cuarzo o la LC, sucede que dos de sus índices de refracción son iguales $n_x = n_y = n_o$, y el otro es diferente $n_z = n_e$, se dice que el cristal es uniaxial.

Un material que tiene dos índices de refracción diferentes se le conoce como material birrefringente. En este trabajo no se tratan los cristales biaxiales o isotrópicos.

2.6.1. Cristal uniaxial

Para un cristal uniaxial existe sólo un eje óptico y el índice de refracción correspondiente a los dos elementos iguales se llama ordinario (n_o), mientras que el otro índice desigual es el extraordinario (n_e) y su dirección corresponde al eje óptico que define el vector unitario de dirección de propagación.

La superficie normal para el caso de un cristal uniaxial puede transformarse a partir de la ecuación (2.54) como:

$$\left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{n_e^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left(\frac{k^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 0. \quad (2.57)$$

La ecuación (2.57) representa dos superficies: una superficie normal que consiste en una esfera y un elipsoide de revolución que tiene dos puntos en común en el eje z . Un corte transversal de estas superficies se aprecia en la figura 2.5.

La ecuación (2.57) tiene dos soluciones, que a continuación se describen:

■ Solución 1:

Es evidente que en la ecuación (2.57), el segundo miembro sea igual a cero, con lo que se obtiene:

$$n_1 = n_o. \quad (2.58)$$

■ Solución 2:

Considerando que la propagación es a lo largo del vector $\hat{s}$ y que el valor de $\mathbf{k}$ está dado por la ecuación (2.51), entonces el primer miembro de la ecuación (2.57) en coordenadas esféricas ($\hat{s} = \sin\theta\cos\phi\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\hat{y} + \cos\theta\hat{z}$), se puede transformar como:

$$\frac{\sin^2(\theta)}{n_e^2} + \frac{\cos^2(\theta)}{n_o^2} - \frac{1}{n(\theta)} = 0, \quad (2.59)$$

por tanto otra de las soluciones está dado por:

$$n_2 = n(\theta) = \frac{n_e n_o}{[n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.60)$$

Se puede observar que n_2 es igual a n_o cuando $\theta = 0^\circ$ y n_e cuando $\theta = 90^\circ$. Esto se observa en la figura 2.5.

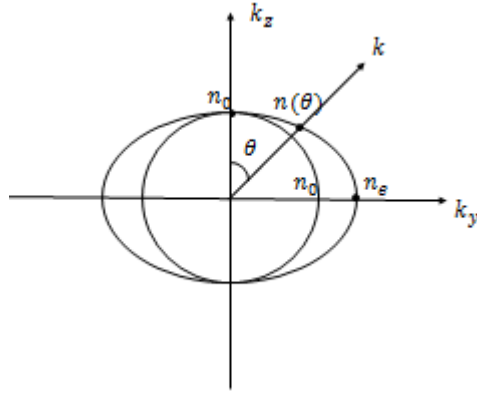


Figura 2.5: Esquema de la sección transversal de la superficie de un cristal uniaxial, en el que las dos superficies se interceptan en un punto común n_o el cual se define como eje óptico.

Suponga un haz de luz polarizado cuyas componentes están dirigidas en las direcciones en la que el material tiene su estructura con índice n_e y con la dirección perpendicular que tiene índice n_o . Este haz incide sobre el material y viaja una distancia d dentro de éste. De acuerdo a la ecuación (2.60), el índice de refracción para la componente ordinaria es n_o y para la componente extraordinaria está dada por la ecuación:

$$n_e(\theta) = \frac{n_e n_o}{[n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta]^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.61)$$

después de atravesar una lámina de espesor d la onda electromagnética resultante será la superposición de las ondas e y o, que ahora tienen una diferencia de fase relativa Γ . Recordando que la diferencia relativa de la longitud de camino óptico está dada por $DCO = d(n_e - n_o)$, su diferencia de fase del haz está dado por:

$$\Gamma = k DCO = \frac{\omega}{c} (n_e(\theta) - n_o) d. \quad (2.62)$$

2.7. Retardadores

Un ejemplo de los dispositivos ópticos basados en los materiales anisótropos uniaxiales son los retardadores los cuales son dispositivos capaces, sin absorber, de producir un haz de luz formado por dos componentes que vibran en direcciones perpendiculares, estableciendo entre ellas un desfase determinado Γ dado en la ecuación (2.62). Para fabricar un retardador suele utilizarse una lámina plano paralela de espesor d de un cristal uniáxico como el cuarzo, la calcita o los LC, talladas paralelamente al eje óptico, tomando d de forma apropiada se puede obtener láminas que generen diferentes desfases.

Las direcciones del eje óptico y su perpendicular se suelen llamar líneas neutras de la lámina, pues la lámina no ejerce ninguna acción sobre un haz de luz polarizado linealmente que atraviere vibrando en estas direcciones. También estas líneas suelen denominarse eje lento y eje rápido.

En función del espesor los retardadores adquieren diferentes nombres que se mencionan a continuación.

2.7.1. Retardador de cuarto de onda

Un retardador de cuarto de onda es un elemento óptico que introduce un desfase $\Gamma = \frac{\pi}{2}$ entre las componentes ortogonales o y e de una onda.

Si incide sobre esta lámina un haz de luz a 45° a la salida del retardador se tendrá luz polarizada circular, donde el espesor d que corresponde a esta lámina es:

$$d = \frac{\lambda_0}{4(n_e - n_o)}. \quad (2.63)$$

2.7.2. Retardador de media de onda

Si sobre una lámina cristalina tallada paralelamente al eje óptico incide perpendicularmente sobre una de sus caras luz polarizada linealmente con el vector del campo eléctrico formando un ángulo con el eje óptico y produce una diferencia de fase entre las ondas ordinaria y extraordinaria de $\Gamma = \pi$,

deberá tener un espesor de:

$$d = \frac{\lambda_0}{2(n_e - n_o)}, \quad (2.64)$$

y se llama retardador de media onda.

2.8. Matriz de Jones para retardadores

Para un retardador que introduce una diferencia de fase entre las componentes del vector de polarización, se puede introducir las matrices de Jones, el cual hace más fácil el tratamiento matemático de un sistema óptico. Dado un cristal uniaxial birrefringente de espesor d tal que el eje óptico está alineado en dirección x y paralelo a la interfaz, al introducir un campo eléctrico en está se tiene:

$$\mathbf{E}_f = \begin{pmatrix} e^{i\phi_x} E_x \\ e^{i\phi_y} E_y \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

siendo $\phi_y = -in_e kd$, $\phi_x = -in_o kd$, $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ y n_e , n_o son respectivamente los índices de refracción lento y rápido de la lámina. La ecuación (2.65) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\mathbf{E}_f = \begin{bmatrix} e^{i\phi_x} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_y} \end{bmatrix} \mathbf{E}_i, \quad (2.66)$$

donde la matriz que acompaña a $\mathbf{E}_i$ está dado por:

$$\mathbf{W}_{\text{retardo}} = \begin{bmatrix} e^{i\phi_x} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_y} \end{bmatrix}. \quad (2.67)$$

Debido a que este retardador introduce una diferencia de fase relativa dada por la ecuación (2.62), la ecuación (2.67) puede ser escrita como:

$$\mathbf{W}_{\text{retardo}} = e^{-i\Phi} \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\Gamma}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\Gamma}{2}} \end{bmatrix}, \quad (2.68)$$

donde Φ puede escribirse como:

$$\Phi = \frac{\pi(n_e + n_o)}{\lambda_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_o d + \frac{\Gamma}{2}. \quad (2.69)$$

Definiendo $\Gamma = 2\beta$, la ecuación (2.68) se reescribe como:

$$\mathbf{W}_{\text{retardo}}(\beta) = \mathbf{W}_0(\beta) = e^{-i\beta + \frac{2\pi}{\lambda_0} n_0 d} \begin{bmatrix} e^{-i\beta} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

La ecuación (2.70) es la matriz de Jones que describe un retardador de espesor d .

Se puede obtener la matriz de Jones de una lámina con retardo Γ orientada en un ángulo θ utilizando la ecuación (2.44).

$$\mathbf{W}(\theta, \beta) = \mathbf{R}^{-1}(\theta) \cdot \mathbf{W}(\beta) \cdot \mathbf{R}(\theta), \quad (2.71)$$

la ecuación (2.71) es importante debido a que el retardador puede trabajarse en diferentes sistemas de referencia.

Algunas matrices para retardadores se muestran en la tabla 2.3.

Tabla 2.3: Matrices de Jones para retardadores.

Retardador	Matriz de Jones
Retardador de cuarto de onda, eje rápido vertical	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$
Retardador de cuarto de onda, eje rápido horizontal	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

Capítulo 3

Pantalla de cristal líquido

En la actualidad las pantallas de cristal líquido (LCD, Liquid Crystal Display), están muy difundidas y son útiles ya que permiten mostrar información clara y concisa. Están formadas por un material de cristal líquido, electrodos y polarizadores.

Los cristales líquidos fueron descubiertos alrededor del año 1888 por el botánico australiano Friedrich Reinitzer y son considerados como medios dieléctricos anisótropos.

En este capítulo se presentan principios físicos, modelos matemáticos y conceptos para un cristal líquido, electrodos y elementos polarizadores, con la finalidad de comprender mejor el funcionamiento de una LCD.

3.1. Componentes de una LCD y su funcionamiento

La LCD consiste de un cristal líquido que está contenido entre dos placas de vidrio recubiertas con electrodos transparentes en forma de pixeles y además tiene dos polarizadores. Las LCD pueden ser por transmisión, reflexión, o por transreflección. En la figura 3.1 se muestra el diagrama para un pixel de una LCD de transmisión, con sus componentes ya mencionados.

3.1.1. Cristal líquido

Algunos materiales orgánicos presentan una fase intermedia entre los estados sólido y líquido, denominada fase de Cristal Líquido (LC).

Los LC son sustancias químicas formadas por moléculas orgánicas que se encuentran en forma alargada o en forma de discos, las cuales son llamadas calamíticos y discóticos respectivamente. La mayoría de los LC que se encuentran en el mercado son del tipo calamíticos, además de que éstas poseen una propiedad anisotrópica uniaxial, es decir, poseen un único eje alrededor del cual existe simetría. Por tanto sus moléculas se orientan según una dirección y en algunos casos sus posiciones carecen de ordenación.

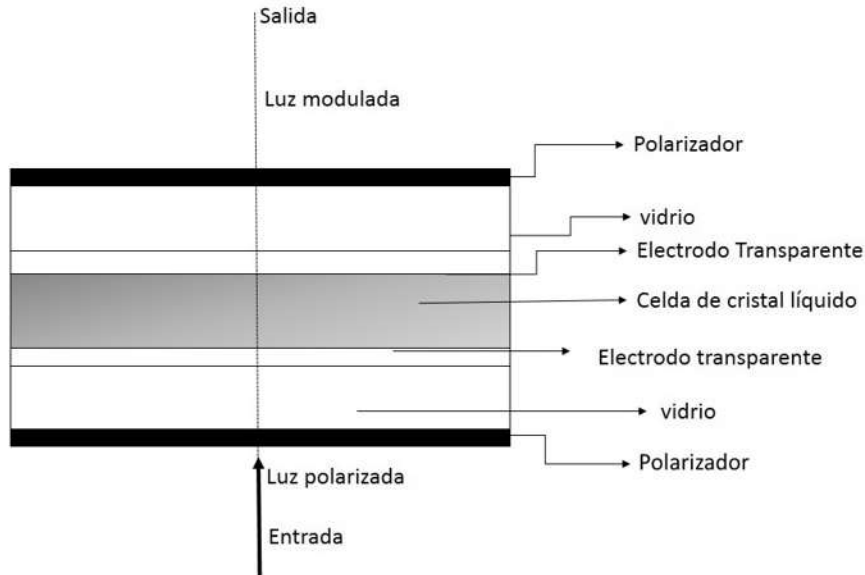


Figura 3.1: Esquema de componentes de una LCD de transmisión.

Para un grupo de moléculas de LC, la orientación media de sus ejes largos define una magnitud electro-óptica relevante conocida como vector director, indicado como $\hat{n}$ y esta dirección define el índice de refracción extraordinario n_e . Existen 3 tipos de LC: termotrópico, lyotrópico y polimérico [2, 19].

Los LC termotrópicos a bajas temperaturas pueden llegar a ser sólidos cristalinos y a altas temperaturas líquidos isotrópicos, además pueden en-

contrarse en 3 mesofases; esméctica, nemática y colestérica. En la figura 3.2 se muestran las mesofases que existen, las cuales tienen diferentes arreglos moleculares que se mencionan a continuación:

- LC de mesofase Nemática (N-LC): las moléculas se hallan aproximadamente orientadas en una misma dirección, pero las posiciones que ocupan dentro del volumen son aleatorias (figura 3.2 a)).
- LC de mesofase Esméctica: las moléculas están orientadas de manera paralelas y se disponen formando capas (figura 3.2 b)).
- LC de mesofase colestérica: las moléculas forman capas y la orientación de ellas describe una rotación helicoidal alrededor de un eje (figura 3.2 c)).

El vector director $\hat{n}$ para las distintas mesofases se muestran en la figura 3.2. Las mesofases de la LC esméctica y colestérica no son tratadas en este trabajo.

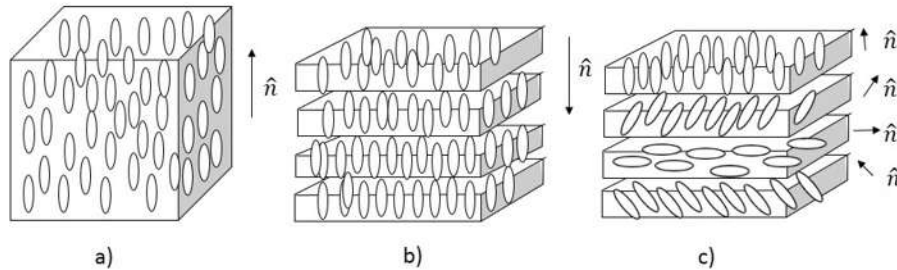


Figura 3.2: Estructura de las diferentes mesofases con su vector director correspondiente.

3.1.2. Cristal líquido nemático

La mayoría de los LC utilizados en Óptica son compuestos nemáticos (N-LC) en los que la posición de sus moléculas es aleatoria, pero están muy ordenados en dirección del vector director $\hat{n}$ tal como se muestra en la figura 3.2 a). En los N-LC homogéneos la dirección molecular es constante a lo largo de todo el material.

Las propiedades ópticas mas relevantes de las N-LC provienen de la anisotropía que presentan las moléculas que la forman y se comportan como medios birrefringentes uniáxicos, en los que la dirección del eje óptico coincide con la del vector director del cristal. Los dieléctricos que exhiben una simetría óptica uniáxica poseen dos índices de refracción principales, el ordinario n_o y el extraordinario n_e , es decir, que la constante dieléctrica del material depende del eje considerado. Para la mayoría de los LC, n_o es del orden de 1.5 y la diferencia de índices, $\delta n = n_e - n_o$, es positiva y toma valores entre 0.05 y 0.45 [20].

3.1.3. Electrodos y polarizadores

Para poder orientar la dirección de las moléculas se necesita la aplicación de un campo eléctrico externo, por tanto se coloca entre las superficies internas del vidrio un par de películas de metal transparente que actúan como electrodos. Normalmente éstas son láminas de ITO (Indium -Tin-Oxide u Óxido de estaño-indio), cuyo grosor es de orden de nanómetros.

Los electrodos funcionan de tal forma que las láminas de ITO inducen en el LC un voltaje determinado. Cuando no se aplica voltaje, el vector director permanece en su dirección inicial y cuando se aplica voltaje se genera un campo eléctrico dentro de la celda de LC, provocando que las moléculas roten o se muevan para alinearse en forma paralela a las líneas del campo eléctrico. Como la celda de LC es de transmisión los electrodos son ambos transparentes, para que permita la entrada y salida de la luz.

Comúnmente, las celdas de LC se utilizan entre dos polarizadores con sus ejes de transmisión perpendiculares entre sí. El primer polarizador produce luz linealmente polarizada a un ángulo predefinido. El segundo polarizador bloquea la luz cuyo ángulo de polarización no haya sido rotado por el LC. De esta forma se puede controlar la amplitud de la luz por medio de una tensión aplicada. Este principio es básico para la modulación en amplitud que es utilizado en proyectores y pantallas LCD.

3.1.4. Celda de cristal líquido nemático con estructura de hélice

Una de las variantes más comunes de LCD son los TN-LCD (twisted nematic liquid crystal display), descubierta por Helfrich y Schadt. El modo TN consiste en un giro controlable del plano de polarización de la luz que atraviesa una celda de cristal líquido y presenta una estructura molecular en forma de hélice.

En la figura 3.3 se muestra un esquema de una TN-LCD. Las placas de ITO (Electrodos) son recubiertas con un polímero que se frota o se pule en una dirección particular llamadas placas de alineación, las cuales establecen una dirección predefinida para las moléculas en contacto con ellas, logrando que el eje director de las moléculas se alinee paralelamente con la dirección del pulido. Las moléculas tienden a permanecer alineadas entre ellas y el eje director va girando gradualmente a lo largo del material. La estructura TN-LCD presentada en la figura 3.3 es conocida como LCD de matriz activa TFT (Thin Film Transistor), donde el cristal líquido es encerrado entre dos placas de vidrio, una de las cuales posee una delgada lámina con un transistor por pixel construido por deposición química. Un tipo especial de TN-LCD es el construido por los dispositivos que se emplean en sistemas de videoproyección, caracterizados por su reducido tamaño.



Figura 3.3: Componentes y funcionamiento de una TN-LCD de TFT.

Como el cristal líquido posee anisotropía axial de las moléculas, el medio presenta diferentes parámetros eléctricos y ópticos si se considera propagación de ondas en un eje paralelo al eje director o en un plano perpendicular a él.

3.1.5. Respuesta de una TN-LCD a un campo eléctrico

Cuando se induce una diferencia de potencial en una celda de LC, genera un campo eléctrico que hace que las moléculas se polaricen comportándose como un dipolo eléctrico por lo que rotan de tal forma que tratarán de alinearse en dirección a él, como se aprecia en la figura 3.4. El grado de rotación depende de la magnitud del campo eléctrico inducido en la LC.

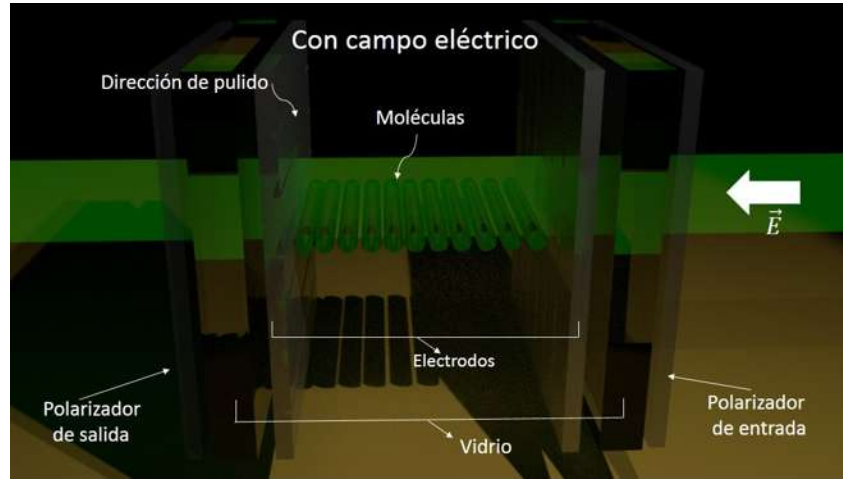


Figura 3.4: Esquema del funcionamiento de una TN-LCD de TFT en presencia de un campo eléctrico.

Para un haz de luz polarizado que incide en dirección paralela al eje extraordinario de la celda LC, el haz se propaga a una distancia d en el material, por tanto el índice de refracción corresponde a n_e de la ecuación (2.61) y el haz sufre una diferencia de fase Γ dada por la ecuación (2.62) tratadas en la sección 2.6.1

Para las TN-LC la polarización del haz que incide en la LCD debe ser paralela a la dirección del eje director de las moléculas, para que sea una onda extraordinaria modulada en fase por Γ . Debido a que es importante el ángulo de las moléculas para poder modular en fase una LCD es necesario conocerlo,

en base a esto se analiza matemáticamente un cristal líquido utilizando las matrices de Jones, de acuerdo al formalismo tratado en la secciones (2.5) y (2.8), con esto cada elemento del cual está integrado la TN-LCD puede expresarse como un vector o una matriz.

3.2. Matriz de Jones para TN-LC

Como se mencionó anteriormente el funcionamiento de una TN-LCD depende del voltaje aplicado entre las placas de ITO para que las moléculas se orienten en dirección del campo eléctrico. Ahora se trata de encontrar una matriz que represente el cristal líquido encerrado entre los vidrios de la TN-LCD, es decir, la TN-LC y para ello se utiliza el sistema esquematizado en la figura 3.5, donde z coincide con la dirección de propagación de la luz y la dirección del eje x es paralelo al vector director. Definiendo el plano de entrada del display como la capa de entrada, el ángulo total de rotación de las moléculas a través del material se conoce como ángulo de giro (twist) y es llamado α , considerando un caso lineal solamente se tiene:

$$\alpha(z) = cz, \quad (3.1)$$

donde c es una constante. El giro total α al final de la capa de salida es:

$$\phi = \alpha(d) = cd. \quad (3.2)$$

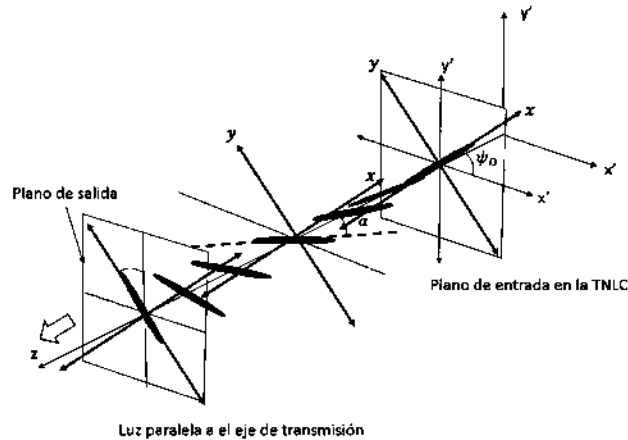


Figura 3.5: Esquema que muestra como rota y gira la molécula en presencia de un campo eléctrico.

Aquí α (en grados por unidad de longitud), varía de 0° a 90° . El ángulo de alineación del vector director en la capa de entrada respecto al sistema de coordenadas del laboratorio (x', y', z') es llamado ψ_D . Para obtener la matriz de Jones de una TN-LC, se supone a la LC como una sucesión de capas donde las moléculas van rotando desde la capa de entrada hasta la de salida, que se puede ver en [1]. En cada capa todas las moléculas de cristal líquido poseen la misma orientación y por tanto, cada capa puede considerarse como una lámina birrefringente uniaxial con índices n_e y n_o .

Asumiendo que el vector director de las moléculas en la capa de entrada está alineado con el eje x , entonces $\psi_D = 0$.

El material de espesor d puede dividirse en N capas delgadas con grosor $\Delta d = \frac{d}{N}$. La primera y última capa tienen las direcciones de frotamiento alineadas con el eje x y el eje y , respectivamente. El eje de rotación es el eje z que también coincide con el eje de propagación de la luz, tal como se muestra en la figura 3.6.

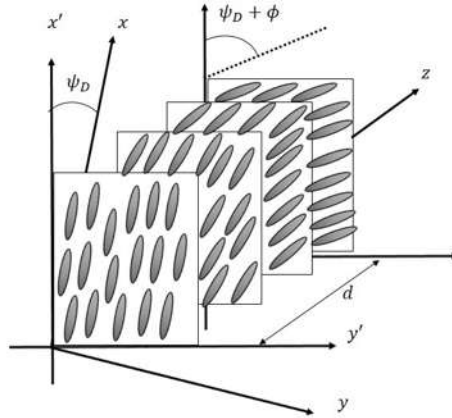


Figura 3.6: Esquema que muestra el cristal TN-LC dividido por N láminas.

La i -ésima capa está localizada a una distancia $z = z_i = i\Delta z$ para $i = 1 \cdots N$, del origen y actúa como un retardador de onda cuyo eje óptico hace un ángulo $\phi_i = i\Delta\phi$ con el eje x , donde $\Delta\phi = \frac{\Delta d}{d}\phi = \frac{\phi}{N}$, cada una de éstas introduce un retardo de $\frac{\Gamma}{N}$. La matriz de Jones de la i -ésima capa sería

entonces:

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{R}^{-1}(\phi_i) \cdot \mathbf{W}\left(\frac{\beta}{N}\right) \cdot \mathbf{R}(\phi_i), \quad (3.3)$$

donde $\mathbf{W}\left(\frac{\beta}{N}\right)$ está dado por la ecuación (2.70) que para una sola lámina se tiene la ecuación (3.4).

$$\mathbf{W}\left(\frac{\beta}{N}\right) = e^{-i\frac{\beta}{N}} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\beta}{N}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\beta}{N}} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Ya que se supuso que el campo eléctrico entre el TN-LC pasa a través de cada una de las láminas birrefringentes cuya matriz de cada una que la representa está dada por la ecuación (3.4), entonces usando la ecuación (2.36) se tiene que la luz atravesará N - capas expresadas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = & \mathbf{R}^{-1}(\phi_N) \cdot \mathbf{W}\left(\frac{\beta}{N}\right) \cdot \mathbf{R}(\phi_N) \cdot \mathbf{R}^{-1}(\phi_{N-1}) \cdot \mathbf{W}\left(\frac{\beta}{N}\right) \cdot \mathbf{R}(\phi_{N-1}) \\ & \dots \mathbf{R}^{-1}(\phi_2) \cdot \mathbf{W}\left(\frac{\beta}{N}\right) \cdot \mathbf{R}(\phi_2) \cdot \mathbf{R}^{-1}(\phi_1) \cdot \mathbf{W}\left(\frac{\beta}{N}\right) \cdot \mathbf{R}(\phi_1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Utilizando la propiedad de la ecuación (2.41) tenemos que una de las componentes quedaría como:

$$\mathbf{R}(\phi_i) \cdot \mathbf{R}(\phi_{i-1}) = \mathbf{R}(\Delta\phi) = \mathbf{R}\left(\frac{\phi}{N}\right). \quad (3.6)$$

Sustituyendo la ecuación (3.6) en la ecuación (3.5) y usando $\phi_N = N\Delta\phi = \phi$:

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}^{-1}(\phi) \cdot \left[\mathbf{W}\left(\frac{\beta}{N}\right) \cdot \mathbf{R}\left(\frac{\phi}{N}\right) \right]^N. \quad (3.7)$$

Llevando acabo el producto dentro de los corchetes de la ecuación (3.7) se tiene que:

$$\mathbf{M} = e^{-i\beta} \mathbf{R}^{-1}(\phi) \cdot \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\beta}{N}} \cos\left(\frac{\phi}{N}\right) & e^{-i\frac{\beta}{N}} \sin\left(\frac{\phi}{N}\right) \\ -e^{i\frac{\beta}{N}} \sin\left(\frac{\phi}{N}\right) & e^{i\frac{\beta}{N}} \cos\left(\frac{\phi}{N}\right) \end{bmatrix}^N. \quad (3.8)$$

La ecuación (3.8) puede resolverse encontrando las soluciones para la matriz en corchete, o bien puede utilizarse la identidad de Chebyshev [25]:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{A \sin(n\Lambda) - \sin([n-1]\Lambda)}{\sin(\Lambda)} & B \frac{\sin(n\Lambda)}{\sin(\Lambda)} \\ C \frac{\sin(n\Lambda)}{\sin(\Lambda)} & \frac{D \sin(n\Lambda) - \sin([n-1]\Lambda)}{\sin(\Lambda)} \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

donde

$$\cos(\Lambda) = \frac{1}{2}(A + B). \quad (3.10)$$

Calculando primero Λ

$$\cos(\Lambda) = \cos(\Delta\phi) \cos\left(-\frac{\beta}{N}\right), \quad (3.11)$$

de la ecuación (3.11), se puede utilizar la serie de Taylor para los cosenos y ya que los ángulos son pequeños sólo se queda el orden cuadrático.

$$\Lambda = \sqrt{\left(\frac{\beta}{N}\right)^2 + \left(\frac{\phi}{N}\right)^2}. \quad (3.12)$$

Definiendo $N\Lambda = \gamma = \sqrt{\beta^2 + \phi^2}$, que resolviendo el límite cuando N tiende al infinito y sustituyendo en la matriz de corchetes de la ecuación (3.8), se encuentra que:

$$\mathbf{M} = e^{-i\beta} \mathbf{R}^{-1}(\phi) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\gamma) - i\frac{\beta}{\gamma} \sin(\gamma) & \frac{\phi}{\gamma} \sin(\gamma) \\ -\frac{\phi}{\gamma} \sin(\gamma) & \cos(\gamma) + i\frac{\beta}{\gamma} \sin(\gamma) \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

La ecuación (3.13) representa una matriz de Jones de una celda de cristal líquido nemático con estructura de hélice.

Si se tiene un estado de polarización que incide dentro de una celda TN-LC, cuando salga de ésta su estado de polarización cambia y está expresado por la ecuación (3.14).

$$\mathbf{E}_f = \mathbf{M} \cdot \mathbf{E}, \quad (3.14)$$

donde la ecuación anterior representa el estado final de la TN-LCD, debido a que tendrá incidiendo y transmitiendo luz polarizada a través de la TN-LC, ya que $\mathbf{M}$ corresponde a una matriz de Jones para el eje de coordenadas (x, y) , en el cual el eje x corresponde al eje óptico de la entrada de la celda. Como para algunos TN-LCD comerciales no se conoce el ángulo de las moléculas (eje óptico), entonces se tiene que determinar en el sistema de referencia (x', y') de la figura 3.5, por lo que la Matriz de Jones total para este sistema está dado por la ecuación (3.15).

$$\mathbf{J}_{LC} = \mathbf{R}^{-1}(\psi_D) \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}(\psi_D). \quad (3.15)$$

Haciendo los cálculos completos se llega a que la matriz de Jones para una TN-LC que no se conoce el ángulo molecular, está dado por:

$$\mathbf{J}_{\text{LC}} = e^{-i\beta} \begin{pmatrix} f - ig & h - ij \\ -h - ij & f + ig \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

donde:

$$\begin{aligned} f &= \cos(\gamma) \cos(\phi) + \frac{\phi}{\gamma} \sin(\gamma) \sin(\phi), \\ g &= \frac{\beta}{\gamma} \sin(\gamma) \cos(\phi + 2\psi_D), \\ h &= -\cos(\gamma) \sin(\phi) + \frac{\phi}{\gamma} \sin(\gamma) \cos(\phi), \\ j &= \frac{\beta}{\gamma} \sin(\gamma) \sin(\phi + 2\psi_D). \end{aligned}$$

3.2.1. Determinación de los parámetros de la TN-LCD

En los TN-LCD contenidos en los proyectores, el fabricante no proporciona las características específicas de estos, sin embargo se pueden conocer utilizando el método experimental [5] de Soutar y Lu que consiste en iluminar la LCD con un haz de luz plana monocromática y linealmente polarizada paralela a la dirección del vector director Ψ_D , como se muestra en la figura 3.7. Puede observarse que el polarizador y analizador tienen el eje de transmisión paralelos. Este método consiste además de los siguientes pasos:

1. Girar el polarizador y el analizador simultáneamente en pasos de 5° desde 0° hasta 360° y medir la irradiancia.
2. Repetir el paso 1, pero ahora considerando que el eje de transmisión del analizador y polarizador sean perpendiculares.

En la figura 3.7 la luz polarizada paralela al vector director en el sistema (x,y) se puede expresar en términos de los vectores de Jones.

EL vector de Jones de luz incidente en la celda está dado por:

$$\mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} \cos\phi_1 \\ \sin\phi_1 \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

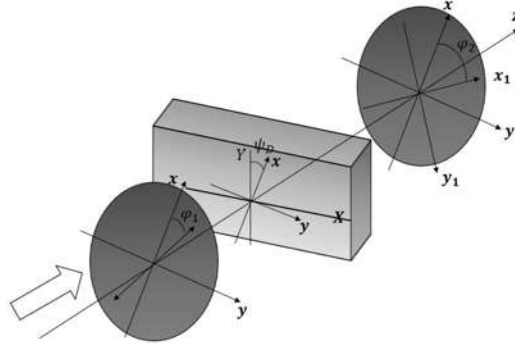


Figura 3.7: Esquema de dos polarizadores utilizado en el método de Soutar y Lu.

Después de pasar a través de la TN-LC, el vector de entrada en el analizador está dado por la multiplicación del vector de Jones de la ecuación (3.17) por la matriz de la ecuación (3.13), obteniendo así un vector que representa a una LCD y se escribe como:

$$\mathbf{E}_{\text{LCD}} = e^{-i\beta} R^{-1}(\phi) \cdot \begin{pmatrix} \cos\gamma - i\frac{\beta}{\gamma}\sin\gamma & \frac{\phi}{\gamma}\sin\gamma \\ -\frac{\phi}{\gamma}\sin\gamma & \cos\gamma + i\frac{\beta}{\gamma}\sin\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\phi_1 \\ \sin\phi_1 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Llamando $u = \cos\gamma$, $v = \frac{\beta}{\gamma}\sin\gamma$ y $w = \frac{\phi}{\gamma}\sin\gamma$, la ecuación (3.18) queda como:

$$\mathbf{E}_{\text{LCD}} = e^{-i\beta} R^{-1}(\phi) \cdot \begin{pmatrix} u - iv & w \\ -w & u + iv \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\phi_1 \\ \sin\phi_1 \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

que evaluando la ecuación (3.19) el vector de Jones de salida de la TN-LCD, viene dado por:

$$\mathbf{E}_{\text{LCD}} = e^{-i\beta} \begin{pmatrix} u\cos(\phi_1 + \phi) - iv\cos(\phi_1 - \phi) + w\sin(\phi_1 + \phi) \\ u\cos(\phi_1 + \phi) - iv\cos(\phi_1 - \phi) + w\sin(\phi_1 + \phi) \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Cuando el vector dado en la ecuación (3.20) pasa a través del analizador, éste le cambia la polarización y su vector de Jones está dado por:

$$\mathbf{E}_f = \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}(\phi_2) \cdot \mathbf{E}_{\text{LCD}}, \quad (3.21)$$

donde $\mathbf{P}$ está dado por la ecuación (3.22) y corresponde a un polarizador con eje de transmisión horizontal como se observa en la figura 3.7. Obsérvese que el analizador está en el plano (x_1, y_1) .

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.22), (3.20) y (2.40) en la ecuación (3.21), se obtiene el vector de Jones de la luz polarizada de salida dado por:

$$\mathbf{E}_f = e^{-i\beta} \begin{pmatrix} u \cos(\phi_1 - \phi_2 + \phi) - i v \cos(\phi_1 + \phi_2 - \phi) + w \sin(\phi_1 - \phi_2 + \phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

cuya irradiancia está dada entonces como:

$$I = \mathbf{E}_f^\dagger \cdot \mathbf{E}_f, \quad (3.24)$$

$$I = [u \cos(\phi_1 - \phi_2 + \phi) + w \sin(\phi_1 - \phi_2 + \phi)]^2 + [v \cos(\phi_1 + \phi_2 - \phi)]^2. \quad (3.25)$$

La ecuación (3.25) es la irradiancia del sistema, pero ya que no se conoce el ángulo de las moléculas ψ_D y en la figura 3.7 se tiene: $\phi_1 + \psi_D = \theta_1$ y $\phi_2 + \psi_D = \theta_2$, la ecuación (3.25) se puede reescribir en términos del sistema de laboratorio X y Y dada por:

$$I = [u \cos(\theta_1 - \theta_2 + \phi) + w \sin(\theta_1 - \theta_2 + \phi)]^2 + [v \cos(\theta_1 + \theta_2 - \phi - 2\psi_D)]^2. \quad (3.26)$$

Aplicando el método de Soutar y Lu considerando que el eje de transmisión del analizador y polarizador son paralelos, entonces $\theta_1 = \theta_2$ y la irradiancia es:

$$I_{||} = \left[\cos\gamma \cos\phi + \frac{\phi}{\gamma} \sin\gamma \cos\phi \right]^2 + \left[\frac{\beta}{\gamma} \sin\gamma \cos(2\phi_1 - \phi - 2\psi_D) \right]^2, \quad (3.27)$$

Aplicando el paso 2 del método de Soutar y Lu que corresponde cuando los ejes de transmisión entre el analizador y polarizador son perpendiculares, entonces $\theta_2 = \frac{\phi}{2} + \theta_1$ y la irradiancia de la ecuación (3.26) queda como:

$$I_p = \left[\cos\gamma \sin\phi - \frac{\phi}{\gamma} \cos\phi \sin\gamma \right]^2 + \left[\frac{\beta}{\gamma} \sin\gamma \sin(-2\psi_D - \phi + 2\phi_1) \right]^2. \quad (3.28)$$

Con las expresiones (3.27) y (3.28) se puede calcular las variables β , ϕ y ψ_D ajustando algún método.

Capítulo 4

Difracción

La difracción juega un papel muy importante en la física por lo que en este capítulo se describe la difracción de un objeto periódico representado a través de una serie de Fourier.

4.1. Series de Fourier

Las series de Fourier se pueden representar por medio de funciones armónicas y surgen en la tarea práctica de representar de forma alterna funciones generales [21]. En este trabajo se emplean funciones periódicas que se definen de la siguiente manera: "se dice que $f(x)$ es periódica si $f(x+p) = f(x)$ ". Una función $f(x)$ de período p puede representarse por una serie trigonométrica denominada serie de Fourier dada por:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{2\pi mx}{p}\right) + b_m \sin\left(\frac{2\pi mx}{p}\right) \right]. \quad (4.1)$$

Otra manera de representar esta función es utilizando la fórmula de Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ que permite expresar la serie de Fourier de una función $f(x)$ como:

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} c_m e^{i\frac{2\pi mx}{p}} = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} c_m e^{i2\pi \nu mx}, \quad (4.2)$$

donde $\nu = \frac{1}{p}$ es conocida como frecuencia espacial y los coeficientes de las

ecuaciones (4.1) y (4.2) están dados por las siguientes ecuaciones:

$$a_m = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi mx}{p}\right) dx, \quad (4.3)$$

$$b_m = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi mx}{p}\right) dx, \quad (4.4)$$

$$c_m = \frac{1}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) e^{-i\left(\frac{2\pi mx}{p}\right)} dx. \quad (4.5)$$

Una manera interesante para representar las series consiste en que cualquier función $f(x)$ se puede expresar mediante la suma de dos funciones, una par y otra impar, por lo que la ecuación (4.2) se escribe como:

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} c_{2m} e^{i2m2\pi x/p} + \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} c_{2m+1} e^{i(2m+1)2\pi x/p}, \quad (4.6)$$

Una función periódica desplazada medio período se puede representar por medio de la serie de Fourier escrita de la siguiente manera:

$$f(x \pm p/2) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} c_m e^{i2\pi m(x \pm \frac{p}{2})/p} = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} c_m e^{i2\pi mx/p} e^{\pm im\pi}, \quad (4.7)$$

donde el término $e^{\pm im\pi}$ tiene dos posibles valores a saber:

$$e^{\pm im\pi} = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ es par} \\ -1 & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases}, \quad (4.8)$$

por tanto la ecuación (4.7) se puede reescribir como una suma de dos subseries, una para números pares y la otra para impares como sigue:

$$f(x \pm p/2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{2m} e^{i\frac{2\pi(2m)}{p}x} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{2m+1} e^{i\frac{2\pi(2m+1)}{p}x}. \quad (4.9)$$

Las ecuaciones (4.6) y (4.9) serán utilizadas más adelante.

4.1.1. Analogía de ondas planas con la serie de Fourier

En general, una onda plana estacionaria ($t=0$) de amplitud unitaria que satisface la ecuación (2.7), puede escribirse de la siguiente manera:

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (4.10)$$

donde $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ y $\mathbf{k}$ es el vector de onda dado por la ecuación (2.51) que se puede reescribir en términos de sus cosenos directores como:

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k} \right), \quad (4.11)$$

los valores α, β, γ son los ángulos que forma el vector $\mathbf{k}$ con los ejes x, y, z respectivamente, además satisfacen que $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Por tanto, sustituyendo $\mathbf{r}$ y $\mathbf{k}$ en la ecuación (4.10) se obtiene una expresión para una onda que va viajando en la dirección del vector $\mathbf{k}$ tal como se muestra en la figura 4.1.

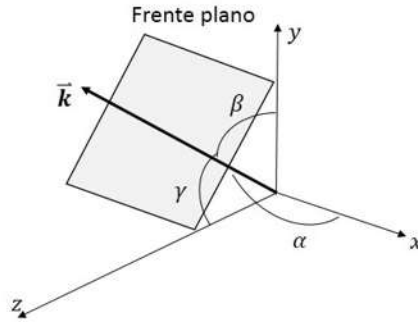


Figura 4.1: Representación esquemática de un frente de onda plano propagándose en dirección $\mathbf{k}$, con sus ángulos directores correspondientes.

La onda representada en la figura 4.1 en términos de los cosenos directores, se puede reescribir como:

$$\Psi(x, y, z) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)}. \quad (4.12)$$

Supóngase que el vector de propagación de la onda está inscrito en el plano xz , lo cual es posible si $\beta = 90^\circ$ por tanto $\cos \beta = 0$. En el plano $z = 0$ la ecuación (4.12) se reduce a:

$$\Psi(x, z = 0) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda} \cos \alpha x}. \quad (4.13)$$

Por comparación, el núcleo o kernel de la expresión compleja de la serie de Fourier de la ecuación (4.2) es igual a la expresión de la ecuación (4.13) si se considera que:

$$\cos \alpha = \frac{m\lambda}{p}, \quad (4.14)$$

por lo que la función exponencial de la serie de Fourier se puede interpretar como una onda plana, cuyo coseno director está dado por la ecuación (4.14). Por tanto la serie de Fourier se puede interpretar como una suma de ondas planas que viajan en direcciones discretas dadas por los cosenos directores $\dots, \frac{-2\lambda}{p}, \frac{-\lambda}{p}, 0, \frac{2\lambda}{p}, \frac{\lambda}{p}, \dots$. Este conjunto de ondas se pueden interpretar como el espectro de Fourier de la onda plana dada en la ecuación (4.13).

Otro caso sucede cuando se tiene una onda plana que se propaga en dirección del eje z , es decir $z \neq 0$, por lo que la ecuación que describe esta onda está dada por:

$$\Psi(x, z) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(x \cos \alpha + z \cos \gamma)} = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(x \cos \alpha)} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(z \cos \gamma)}, \quad (4.15)$$

donde se sigue cumpliendo que $\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma = 1$, o visto de otra manera:

$$\cos \gamma = (1 - \cos^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.16)$$

pero de la serie de Fourier se sabe que $\nu = \frac{1}{p}$ y en analogía con la onda plana cuyo coseno director es $\cos \alpha = \frac{\lambda}{p}$ (con $m=1$) se tiene que $\cos \alpha = \frac{\lambda}{p} = \lambda\nu$. Sustituyendo en la ecuación (4.16) se tiene:

$$\cos \gamma = (1 - \lambda^2 \nu^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.17)$$

Como es de interés la propagación de un campo de luz sobre el eje z , ($z > 0$) no todas las ondas representadas en la serie de Fourier (ecuación (4.2)) contribuyen en el campo, sólo contribuyen las ondas que viajan casi paralelas a este eje. Este caso es conocido como aproximación paraxial, en el que el ángulo α se aproxima o es cercano a 90° . Es decir:

$$\cos \alpha \rightarrow 0, \quad (4.18)$$

por lo que $\lambda^2 \nu^2 \ll 1$. Considerando esta aproximación la ecuación (4.17) se puede considerar como:

$$\cos \gamma \approx 1 - \frac{\lambda^2 \nu^2}{2}, \quad (4.19)$$

donde se tomaron los 2 primeros términos de la aproximación $(1 - x)^{\frac{1}{2}} = 1 - x^2/2 + x^4/4 + \dots$ por lo que la ecuación (4.15) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\Psi(x, z) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}z} e^{-i\pi\lambda z\nu^2} e^{i2\pi\nu x}, \quad (4.20)$$

o de otro modo la ecuación (4.20) se puede escribir en términos de $\Psi(x, z = 0)$ (dada en la ecuación (4.13)) como:

$$\Psi(x, z) = \Psi(x, z = 0)F(z), \quad (4.21)$$

donde $F(z)$ es llamado el factor de propagación de la onda y se define de la siguiente manera:

$$F(z) = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}z} e^{-i\pi\lambda z\nu^2}. \quad (4.22)$$

Este resultado se puede expandir para el campo $u(x, z)$ propagado a una distancia $z \neq 0$ y está dado por la serie de Fourier representada por:

$$\begin{aligned} u(x, z) = f(x, z) &= e^{i\frac{2\pi}{\lambda}z} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} c_m e^{-i\frac{\pi\lambda m^2}{p^2}z} e^{i\frac{2\pi m}{p}x} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} c_m e^{i\frac{2\pi m}{p}x} F(z). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Se observa que para $z = 0$ el campo de la ecuación (4.23), se reduce a la ecuación (4.24) como:

$$u_o(x, z = 0) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} c_m e^{i\frac{2\pi m}{p}x} \quad (4.24)$$

Esta expresión que corresponde a un campo periódico es idéntica a la ecuación de la función periódica (4.2), si se considera como un objeto o transparencia con estructura periódica iluminada por una onda plana de amplitud unitaria.

Un caso particular de la ecuación (4.23) sucede cuando el campo se propaga a distancias periódicas, como se verá en la siguiente sección. Además se utilizó la terminología elaborada en [22] para la representación de la onda.

4.2. Efecto Talbot

El efecto Talbot o fenómeno de autoimágenes se presenta con objetos periódicos que son iluminados con una onda plana monocromática. A lo largo del

eje de propagación de la luz aparecen réplicas idénticas del objeto iluminado (autoimagen) sin necesidad de algún sistema óptico formador de imágenes. La distancia a la cual aparece la primera réplica del objeto se conoce como distancia de Talbot. Las demás imágenes o réplicas aparecen a distancias múltiples de esta cantidad. La distancia de Talbot está dada por:

$$z = z_T = \frac{2p^2}{\lambda}. \quad (4.25)$$

Para demostrar que sucede la misma replica a la distancia Talbot, se sustituye esta expresión en la ecuación (4.23). De acuerdo a la ecuación (4.22), el factor de propagación es $F(z) = 1$ por lo que la ecuación (4.23) se reduce a la ecuación (4.24) que corresponde al mismo campo inicial, es decir, se encuentra una réplica del mismo campo que es conocida como su autoimagen.

Del mismo modo si al valor de z_T se le multiplica por un múltiplo entero n el factor de propagación es igual a 1 y entonces se obtiene el mismo campo de Fresnel que cuando $z = 0$, es decir, se tienen réplicas de la imagen inicial. En la figura 4.2 se esquematiza lo anterior.

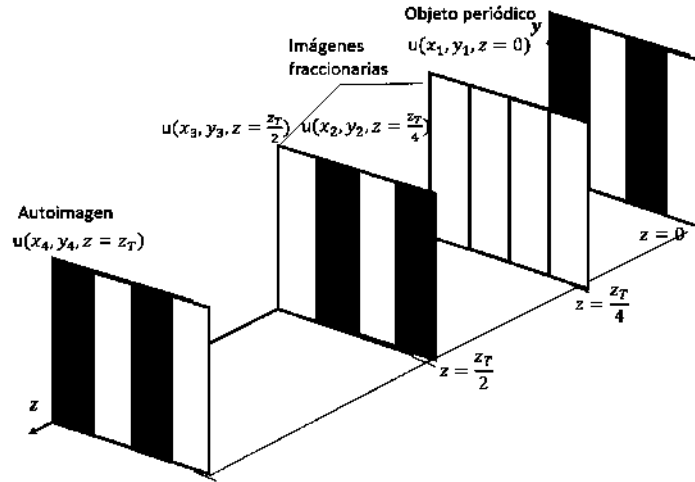


Figura 4.2: Esquema de la propagación del campo periódico $u(x, y, z)$ para formar el efecto Talbot.

Varios casos de interés se encuentran al analizar distancias fraccionarias de la distancia de Talbot.

4.2.1. Patrón de difracción a la mitad de la distancia de Talbot

Considerando una distancia $z = \frac{z_T}{2}$, el factor de propagación de la ecuación (4.22) toma los siguientes valores:

$$F(m, z = z_T/2) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ es par} \\ -1 & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases}, \quad (4.26)$$

por tanto el campo propagado de la ecuación (4.23) se escribe como:

$$u(x_3, z_T/2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{2m} e^{i \frac{2\pi(2m)x}{p}} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{2m+1} e^{i \frac{2\pi(2m+1)x}{p}}. \quad (4.27)$$

La ecuación (4.27) es similar a la ecuación (4.9) que corresponde a un objeto periódico desplazado lateralmente medio período es decir:

$$u\left(x_3, \frac{z_T}{2}\right) = u\left(x_1 - \frac{p}{2}, z = 0\right). \quad (4.28)$$

Este resultado indica que cuando $s = z_T/2$, el campo que se observa es idéntico al objeto periódico desplazado medio período.

4.2.2. Patrón de difracción a un cuarto de la distancia de Talbot

Si se considera una distancia $z = \frac{z_T}{4}$ en la ecuación (4.22), el factor de propagación toma los siguientes valores:

$$F(m, z = z_T/4) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ es par} \\ -i & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases}, \quad (4.29)$$

por tanto el campo de difracción de Fresnel para $z = z_T/4$ está dado por:

$$u(x_2, z = z_T/4) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{2m} e^{i \frac{2\pi(2m)x}{p}} - i \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{2m+1} e^{i \frac{2\pi(2m+1)x}{p}}, \quad (4.30)$$

en la ecuación (4.30) se observa que el campo de Fresnel se puede escribir como dos sub-series, una para números pares y otra para números impares.

Utilizando las ecuaciones (4.6) y (4.9) se puede llegar a:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{2m} e^{i \frac{2\pi(2m)x}{p}} = \frac{1}{2} \left[u(x) + u\left(x - \frac{p}{2}\right) \right], \quad (4.31)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{2m+1} e^{i \frac{2\pi(2m+1)x}{p}} = \frac{1}{2} \left[u(x) - u\left(x - \frac{p}{2}\right) \right]. \quad (4.32)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.31) y (4.32) en la ecuación (4.30) se tiene que:

$$u(x_2, z = z_T/4) = \frac{1}{2} \left[u(x)(1 - i) + u\left(x - \frac{p}{2}\right)(1 + i) \right], \quad (4.33)$$

y mediante álgebra se puede reducir a:

$$u(x_2, z = z_T/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i \frac{\pi}{4}} \left[u(x) + i u\left(x - \frac{p}{2}\right) \right]. \quad (4.34)$$

La ecuación (4.34) indica el patrón de difracción de Fresnel de un objeto periódico a una distancia $z = z_T/4$ y se puede observar que el campo $u(x, z)$ se escribe como la superposición de dos campos iguales $u(x)$, uno de ellos desplazado medio período y multiplicado por un factor de fase de $e^{i \frac{\pi}{2}}$. Es decir, la ecuación (4.34) representa a un objeto puramente de fase cuyo escalón de fase es igual a $\frac{\pi}{2}$ radianes, esto es debido a que $i = e^{i \frac{\pi}{2}}$.

Un ejemplo de un objeto periódico es una rejilla de amplitud que contiene una colección de rendijas separadas periódicamente una distancia p como se observa en la figura 4.3. Si este objeto es iluminado con una onda plana, monocromática y coherente, a la distancia de Talbot se encontrará su autoimagen.

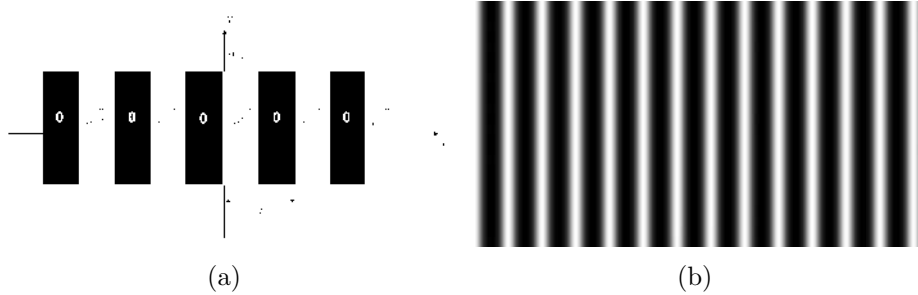


Figura 4.3: Rejilla a la distancia de Talbot donde: a) es el esquema de la rejilla binaria y b) es la simulación de la propagación de una rejilla binaria.

En este trabajo se utilizan objetos o funciones periódicas de fase $\phi(x)$ por lo que se puede representar como:

$$u(x, y) = e^{i\phi(x)}. \quad (4.35)$$

Si a este objeto (o función) se ilumina con una onda plana, monocromática y coherente, es posible entonces encontrar sus autoimágenes. En particular es de interés el plano $z = \frac{z_T}{4}$, por lo que el campo propagado a esta distancia se puede escribir mediante la ecuación (4.36) y es representado en la figura 4.4.

$$u(x_2, z = z_T/4, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left[e^{i\phi(x)} + ie^{i\phi\left(x - \frac{p}{2}\right)} \right]. \quad (4.36)$$

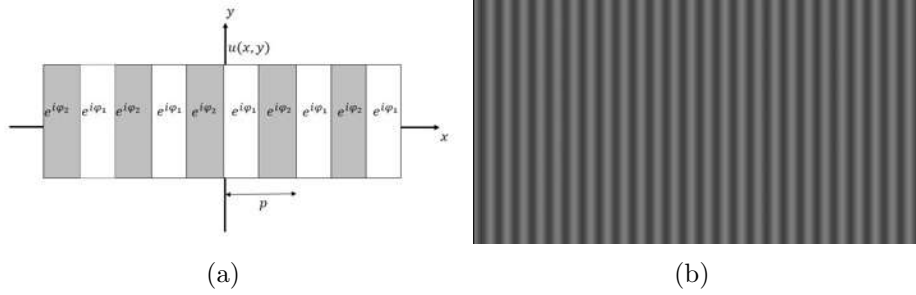


Figura 4.4: a) Esquema de la rejilla de fase ϕ periódica a una distancia fraccionaria de Talbot y b) simulación de la propagación de la rejilla.

Sin embargo en el laboratorio no es posible medir la fase de un campo, si no que se mide la irradiancia, por lo que la energía del campo de acuerdo a la ecuación (4.36) y realizando algunos pasos algebraicos es:

$$I = u(x, y, z)^* u(x, y, z) = 1 - \sin \left(\phi(x) - \phi \left(x - \frac{p}{2} \right) \right). \quad (4.37)$$

La ecuación (4.37) es una función de amplitud, es decir, es un objeto con valores o niveles de gris. Se puede decir, entonces que la imagen fraccionaria a un cuarto de la distancia de Talbot de una rejilla de fase dada por la ecuación (4.36) corresponde a un objeto de amplitud con niveles de gris dada por la ecuación (4.37). Además, también se observa que la fase $\phi(x)$ se puede medir de forma indirecta si se conoce el valor de la irradiancia y para ello se considera el contraste o visibilidad de las franjas que se define como:

$$V = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}, \quad (4.38)$$

donde I_1 es el valor máximo de irradiancia e I_2 es el mínimo de irradiancia medidas en franjas adyacentes. De esta forma se tiene las irradiancias y están dadas como:

$$I_1 = 1 + \sin(\phi), \quad (4.39)$$

$$I_2 = 1 - \sin(\phi), \quad (4.40)$$

donde $\phi = \phi_1 - \phi_2$ es la diferencia de fase que existe entre dos franjas adyacentes (o escalón de fase) tal como se muestra en la figura 4.4. Sustituyendo las ecuaciones (4.39) y (4.40) en la ecuación (4.38) se obtiene:

$$V = \sin(\phi). \quad (4.41)$$

De esta manera, se encuentra que si se mide la visibilidad de las franjas de la autoimagen a un cuarto de distancia de Talbot de una rejilla puramente de fase, entonces se puede determinar la fase $\phi(x)$ de la rejilla a través de la función:

$$\phi = \arcsen(V). \quad (4.42)$$

La función de la ecuación (4.42) será importante para la caracterización de fase de una rejilla periódica desplegada en una LCD y que se deja propagar por medio del Efecto Talbot.

4.2.3. Medición de fase por efecto Talbot

En la sección 3 se habló acerca de las LCD, las cuales permiten desplegar la información que se muestra en una computadora. Para calcular la información de fase de una rejilla periódica desplegada en una LCD que se ilumina y se propaga, se utiliza el Efecto Talbot ya que la imagen es periódica y a múltiplos de la distancia de Talbot se obtendrá las autoimágenes, donde se demostró que a un cuarto de la distancia de Talbot se obtiene la información de fase de la rejilla periódica dada por la ecuación (4.41). Para un número de rejillas en las que se varía el nivel de gris de las franjas, se utiliza el método de división de Mellado para una imagen [16] que sirve para calcular la fase de la LCD y está consiste en lo siguiente:

1. Tener una serie de imágenes de la rejilla periódica propagada a un cuarto de la distancia de Talbot capturadas por una CCD (charge-coupled device), que corresponden a rejillas binarias, cuyas franjas claras y oscuras se generan con dos niveles de gris g_1 y g_2 . Para este análisis la

primera franja, g_1 , es oscura y se le asigna el valor 0. Para la segunda franja, g_2 , va de los niveles de gris 1 a 255. Un ejemplo se observa en la figura 4.5.

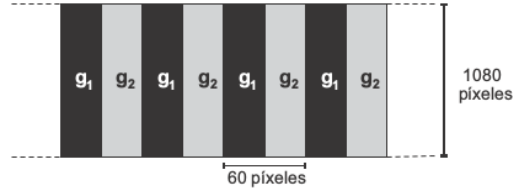


Figura 4.5: Rejilla binaria utilizada por Mellado para encontrar la fase de una LC.

- Después de tener las imágenes capturadas, se observó que para una rejilla con los niveles de gris $g_1 = 0$ y $g_2 = 150$, el contraste de un par de franjas contiguas no es igual en una zona central que en una zona extrema de la rejilla, por tal motivo se procede a subdividir la rejilla en zonas tal como se muestra en la figura 4.6.

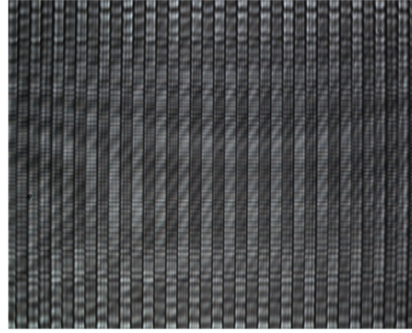


Figura 4.6: Rejilla binaria propagada a una distancia $z_T/4$, donde se observa la diferencia de contraste en la imagen y las zonas en las que se dividió.

- Con la ecuación (4.42) Mellado visualizó que si $\phi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ y 2π se obtienen valores mínimos y máximos de contraste y a esos valores los describió como puntos críticos. Por tanto sólo es necesario encontrar estos puntos en las subimágenes para encontrar la fase en cada zona.

Los pasos anteriores son los que sugirió Mellado para poder caracterizar por fase una LC. Para el fin de esta tesis, se utilizaron los pasos 1 y 2 para caracterizar una LC comercial mediante el efecto de Talbot.

4.3. Hologramas

A continuación se mencionan algunos antecedentes importantes sobre el origen de los hologramas [23].

En 1948, Dennis Gabor [24] propuso un proceso fotográfico de dos pasos el cual llamó reconstrucción de frente de onda y que ahora es conocido como holografía. Este consiste en grabar un patrón de interferencia [17] que se genera entre dos haces, uno proveniente de un objeto llamado haz objeto y uno de un haz de referencia.

En 1962, con el surgimiento del láser Leith y Upatnicks [26] inventaron la técnica de holografía fuera de eje que logró eliminar ciertos problemas encontrados por Gabor, donde encontraron la manera de hacer hologramas con una grandiosa visualización, extendiendo así la aplicabilidad de la holografía.

En 1966 Brown y Lohmann [27] inventaron el holograma generado por computadora, una técnica que utilizaba procesos computacionales y la TF (transformada de Fourier). El objetivo de la holografía es el poder crear una imagen que contenga información tanto de amplitud como de fase de un frente de onda.

Según lo ya visto en la sección 4.2 un campo periódico que se propaga a una distancia $z > 0$ puede ser escrito como una serie de Fourier. El campo se puede interpretar como un objeto y como bien se sabe los objetos no necesariamente son periódicos. Para estos casos, la propagación se escribe en términos de la transformada de Fourier (ver Apéndice A) y se sabe que en el plano de Fourier se encuentra la información codificada del objeto. Además se sabe que una lente positiva puede generar en su plano focal una transformada de Fourier del objeto.

Si un objeto se ilumina con una onda coherente, monocromática y plana y se deja propagar, entonces en el plano de Fourier se puede capturar la

información que contiene la amplitud y fase. Como bien se sabe una onda tiene información de fase como de amplitud, por lo que al registrar el campo propagado se pierde la información de fase. Para que esta información de fase no se pierda, se puede utilizar un segundo haz de luz llamado haz de referencia, el cual interferirá con el haz del objeto propagado. El material de grabado puede ser un material fotosensible o una película holográfica. La información que queda almacenada en el material fotosensible se le conoce como interferograma.

4.3.1. Generación de un holograma

Matemáticamente un holograma se puede obtener como se muestra en la figura 4.7, en la que el campo objeto se representa como O y el haz de referencia como R y como se mencionó anteriormente, para grabar un holograma se requiere un patrón de interferencia producido por dos haces. La superposición de estas dos ondas es:

$$\Psi = O + R, \quad (4.43)$$

debido a que sólo se graba la irradiancia en la película holográfica se tiene:

$$I = O^2 + R^2 + O \cdot R^* + O^* \cdot R. \quad (4.44)$$

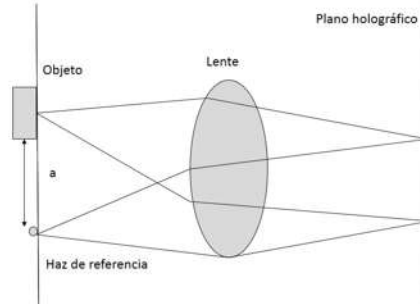


Figura 4.7: Esquema que se utiliza para formar un holograma.

Para mostrar el holograma grabado, se ilumina el interferograma ya obtenido con un haz similar con el que se creó el holograma. El holograma

actúa como una rejilla de difracción por lo que los haces difractados forman dos imágenes: una imagen real del objeto detrás de holograma y una imagen virtual de lado donde incide el láser, además de sus respectivas imágenes conjugadas.

Lo mencionado anteriormente corresponde a multiplicar la ecuación (4.45) por el haz de referencia R obteniendo lo siguiente:

$$I_f = |O|^2 R + |R|^2 R + O^* R R + R^* O R. \quad (4.45)$$

Se puede observar que los dos primeros términos dependen únicamente de la intensidad de ambas ondas, el tercer y cuarto término tienen la información de las fases por lo tanto tienen información del objeto. El procedimiento anterior es el que se usa para grabar y reconstruir un holograma.

Existen varios tipos de hologramas: de transmisión ya sea de amplitud o fase, de reflexión y hologramas generados por computadora que se pueden encontrar con Claudio Iemmi [28]. El holograma de interés en este trabajo es el generado por computadora.

4.4. Holograma generado por computadora (HGC)

Un holograma generado por computadora consiste en calcular el interferograma por medio de una computadora y transferir estos resultados a una transparencia controlada por un dispositivo de salida. El dispositivo de salida anteriormente era a través de un papel transparente en el que imprimían el holograma generado. Ahora con los avances de la tecnología este proceso puede reducirse en tiempo si se utiliza un dispositivo que pueda mostrar la imagen generada. La ventaja de esto es que se pueden crear imágenes que nunca existieron en el mundo real y únicamente se estaría limitado a el proceso computacional de la elaboración de ellos.

El proceso para crear un holograma es el siguiente:

1. Crear una aproximación digital del proceso holográfico que se lleva a cabo, es decir, calcular la intensidad del interferograma deseado.
2. Adoptar un modo de representación fiel de este resultado para transferirlo a una transparencia adecuada, que puede ser una impresión o

bien mostrarlo mediante un aparato que en este caso es una pantalla de cristal líquido.

Los HGC pueden ser de Fourier, Fresnel u otros tipos. La formación y reconstrucción de un holograma se muestra en la sección de resultados.

4.4.1. Holograma de Fourier

Para obtener un HGC se utilizó un holograma de Fourier que se esquematiza en la figura 4.7. Por tanto se menciona a continuación la construcción matemática de éste. Para generar un holograma de Fourier se considera una onda plana como en la ecuación (2.8) que se puede representar como:

$$R = Ae^{i2\pi\nu ax}, \quad (4.46)$$

donde A es la amplitud de la onda, ν es la frecuencia espacial dada por $\nu = 1/\lambda$, λ la longitud de onda y a es la distancia entre el objeto y la referencia.

La onda R se puede representar en términos de una transformada de Fourier de la siguiente manera:

$$R = \mathcal{F}[\delta(x-a)\delta(y)] = \frac{A}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(x-a)\delta(y)] e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy, \quad (4.47)$$

El haz del objeto O se puede representar como la transformada de Fourier del objeto, por tanto:

$$O = \mathcal{F}[f(x, y)] = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x, y)] e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy, \quad (4.48)$$

donde $f(x, y)$ representa la función matemática del objeto conocida como función de transmitancia. Para reconstruir la imagen grabada se sustituyen las ecuaciones (4.47) y (4.48) en la ecuación (4.45) quedando así:

$$I_f = R|\mathcal{F}[f(x, y)]|^2 + RA^2 + RAe^{i2\pi ua}\mathcal{F}^*[f(x, y)] + RAe^{-i2\pi ua}\mathcal{F}[f(x, y)]. \quad (4.49)$$

Los dos primeros términos tienen que ver con la intensidad del objeto y con el orden cero de difracción por esta razón se excluye; el tercer y cuarto término representados como I_{3f} y I_{4f} respectivamente contienen información

del objeto por este motivo se analizan a continuación. Para el cuarto término se tiene que:

$$I_{3f} = RAe^{-i2\pi ua} \mathcal{F}[f(x, y)]. \quad (4.50)$$

Sustituyendo la ecuación de onda representada como en la ecuación (4.46), omitiendo constantes y aplicando propiedades de transformada de Fourier se obtiene:

$$I_{3f} = f(-x - a, -y). \quad (4.51)$$

El valor de la ecuación (4.51) representa la imagen real del objeto que se encuentra en un punto a en el eje x positivo, siendo el orden 1 de difracción. Desarrollando el último término de la ecuación , se tiene:

$$I_{4f} = RAe^{-i2\pi ua} \mathcal{F}^*[f(x, y)]. \quad (4.52)$$

Realizando el procedimiento análogo a I_{3f} en la ecuación (4.52) se obtiene:

$$I_{4f} = f^*(-x + a, -y). \quad (4.53)$$

Este término representa la imagen conjugada del objeto en la posición $x=-a$ y es el orden -1 del patrón de difracción [28, pág. 224], como se ve en la figura 4.8.

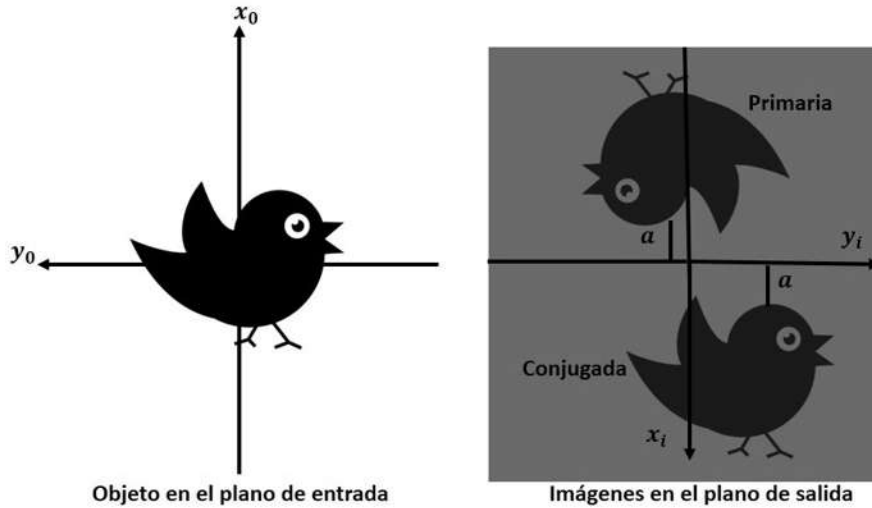


Figura 4.8: Reconstrucción del holograma de Fourier.

4.4.2. Construcción del HGC de Fourier

Para la construcción de un Holograma de Fourier por computadora, se siguen algunos pasos de los artículos [29, 30, 31] que sigue los siguientes pasos:

Algoritmo 1 Algoritmo para construir y reconstruir un HGC

- 1: Leer una imagen que representa al objeto O .
 - 2: Construir el haz de referencia R en el holograma que es representado por una matriz de ceros del tamaño del objeto, asignándole a un valor de la matriz 255 cuyo significado es un pixel iluminado y todos los demás oscuros.
 - 3: Obtener la transformada de Fourier del objeto $\mathcal{F}[O]$ y del haz de referencia $\mathcal{F}[R]$.
 - 4: Obtener la irradiancia del objeto O y del haz de referencia R , es decir, $I_1 = \text{abs}(\mathcal{F}[O]) * \text{abs}(\mathcal{F}[O])$ y $I_2 = \text{abs}(\mathcal{F}[R]) * \text{abs}(\mathcal{F}[R])$.
 - 5: Obtener la difracción del haz de referencia y del objeto cuya interpretación digitalmente es la transformada de Fourier de la suma de ellos $\mathcal{F}[R + O]$.
 - 6: Obtener la irradiancia de la transformada de Fourier de la suma, $I_3 = \text{abs}(\mathcal{F}[R + O]) * \text{abs}(\mathcal{F}[R + O])$.
 - 7: El valor obtenido corresponde al interferograma que para visualizarlo se le resta la irradiancia del objeto difractado a la irradiancia de la suma, es decir, $I_4 = I_3 - I_1$.
-

Con los pasos enumerados del algoritmo 1 es posible generar un holograma por computadora. El algoritmo puede realizarse en Matlab ya que permite la lectura de imágenes de una manera fácil mediante el comando `read`, que interpreta una imagen como una matriz de $n_x \times n_y$. También permite utilizar el comando de la transformada de Fourier (FFT2). Para asegurarse que la difracción esté centrada se utiliza el comando `fftshift`. El haz de referencia es una Delta de dirac que puede ser interpretada en Matlab como una matriz de ceros de $n_x \times n_y$ donde sólo el centro de la matriz es 1 y los demás ceros.

Lo mencionado anteriormente son algunos comandos que se necesitan para la elaboración de un holograma por computadora.

Capítulo 5

Resultados

En este capítulo se presentan los resultados y la caracterización de la pantalla de cristal líquido por fase mediante el efecto Talbot, previamente se encuentra el ángulo director por el método de Soutar y Lu. Una vez caracterizada la LCD, se presenta un holograma generado por computadora, desplegado en la LCD y reconstruido experimentalmente.

5.1. Adaptación del proyector

Se intentó utilizar una LCD que pertenecía a un televisor portátil, sin embargo ésta no tenía un buen número de píxeles. Otra alternativa fue el uso de una LCD que correspondía a un proyector. Para esto se utilizaron varios proyectores, uno que utilizaba conexión RGB que necesitaba un adaptador RGB a VGA. Este último es la entrada más común de las computadoras en donde se manda información a la pantalla del proyector, por lo que se consiguió un proyector de la marca SHARP, modelo PG-A10S-SL (ver figura 5.1) que constaba de 3 LCD y funciona mediante una lámpara halógena que dirige la luz a tres cristales dicróicos cuyas funciones son el redireccionar la luz a las tres pantallas LCD con un color diferente: verde, rojo y azul y en medio ellas se encuentra un prisma que mezcla las imágenes para finalmente proyectar la luz por medio de una lente.



Figura 5.1: Proyector SHARP, modelo PG-A10S-SL.

Para utilizar una LCD se prosiguió a desarmar el proyector. Se quitó la lámpara halógena, el prisma, los cristales dicróicos y los ventiladores, para fines de esta tesis se dejó el contenido del proyector como se aprecia en la figura 5.2. Como cada LCD poseía polarizadores, estos se quitaron debido a que en laboratorio se tienen polarizadores rotatorios. El montaje de la LC quedó como se muestra en la figura 5.2(a).

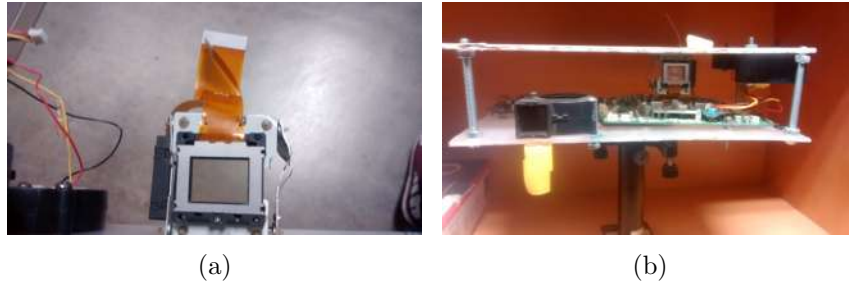


Figura 5.2: LCD utilizada siendo: a) LC extraída del proyector SHARP, b) Adaptación de la LC como sistema de proyección de una computadora para fines de laboratorio.

Con el arreglo de la figura 5.2(b) se pudo utilizar la LC en la mesa de laboratorio para su caracterización.

5.1.1. Especificaciones de la LCD utilizada

La LC se obtuvo a partir de un proyector de 3 LCD's como se dijo anteriormente, la resolución de cada LC es de 800×600 píxeles y cada una tiene

un área total de 4 cm^2 . El tamaño del pixel es de $20 \mu\text{m}$ y fue medido en el laboratorio utilizando la retícula de un microscopio óptico, el área activa de la LCD es de $1,6 \text{ cm} \times 1,8 \text{ cm}$ dando un total de $1,92 \text{ cm}^2$. Una de las 3 LCD fue reincorporada en otro arreglo como se muestra en la figura 5.2(a). Algunas de las características generales de la LCD son:

1. Sistema Matriz Activa TFT.
2. Número 480000 pixeles por cada LCD.
3. El panel de LCD es de material poly silicon.

5.2. Medición del vector director

Para medir el ángulo director de la TN-LC se utilizó el arreglo del método de Soutar y Lu (sección 3.2.1) en donde se utiliza un láser que genera un haz no polarizado, dos polarizadores P_1 y P_2 llamados polarizador y analizador respectivamente, una LC y un radiómetro que mide la intensidad de salida, como se representa en la figura 5.3. En esta figura el frente de onda tiene que ser plano y monocromático por lo que se utiliza un filtro espacial o colimador compuesto por un objetivo de microscopio, un pinhole y una lente positiva.

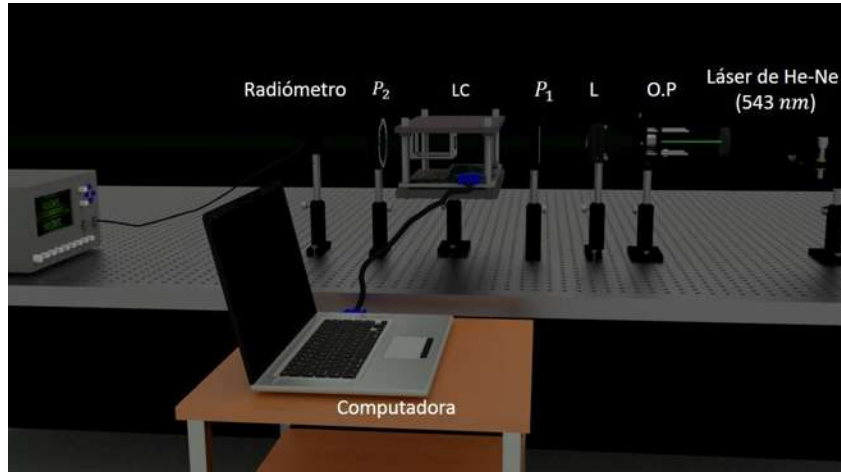


Figura 5.3: Esquema del arreglo experimental utilizado para obtener el vector director de la LCD empleada, donde P_1 y P_2 son el polarizador y analizador respectivamente.

De acuerdo al arreglo de la figura 5.3, el método de Soutar y Lu consiste en obtener valores de la intensidad en función del ángulo que existe entre los dos polarizadores.

El convenio de los signos para los ángulos establece que un ángulo es positivo cuando gira en dirección contraria a las manecillas del reloj, visto por un observador colocado sobre el eje de propagación hacia el cual viaja la luz y es negativo en el caso contrario.

Para encontrar el vector director se consideraron dos casos: en el primer caso se colocaron los ejes de transmisión de los polarizadores (polarizador y analizador) paralelos entre sí; en el segundo caso, los ejes de transmisión se colocaron perpendicularmente entre ellos.

Para el primer caso, los ejes de transmisión del polarizador y analizador se colocaron paralelos y se giraron simultáneamente en pasos de 5° de 0° hasta 360° y se midió la irradiancia con la ayuda del radiómetro como se muestra en la figura 5.4.

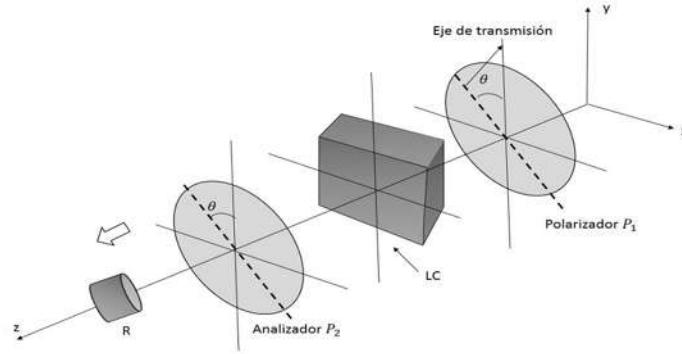


Figura 5.4: Esquema del arreglo utilizado para medir la irradiancia que sale de la LC cuando los ejes de transmisión del polarizador y del analizador son paralelos, donde R es el radiómetro.

En el segundo caso los ejes de transmisión del polarizador y el analizador se colocaron perpendiculares, se giraron simultáneamente en pasos de 5° de 0° hasta 360° y se midió la irradiancia con la ayuda del radiómetro como se muestra en la figura 5.5.

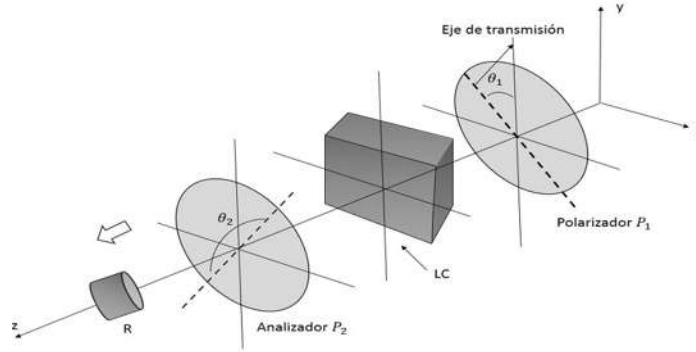


Figura 5.5: Esquema del arreglo utilizado para medir la irradiancia que sale de la LC cuando los ejes de transmisión del polarizador y del analizador son perpendiculares donde $\theta_1 = \theta_2 + \pi/2$ y R el radiómetro.

5.2.1. Resultados de la medición del vector director

Como se mencionó anteriormente se midieron dos valores de la irradiancia: cuando los ejes de transmisión del polarizador y el analizador son paralelos, es decir $\theta_1 = \theta_2$ obteniendo I_1 y cuando los ejes de transmisión son perpendiculares, es decir $\theta_2 = \theta_1 + \pi/2$ obteniendo I_2 . Como ambas configuraciones son complementarias, la suma de ellos $I_1 + I_2$ representa para cada ángulo la intensidad total que atraviesa el sistema óptico. Las ecuaciones de irradiancia que describen los arreglos anteriores son dadas en la sección (3.2.1) y son renombradas como:

$$I_{\parallel} = \left[\cos\gamma \cos\phi + \frac{\phi}{\gamma} \sin\gamma \cos\phi \right]^2 + \left[\frac{\beta}{\gamma} \sin\gamma \cos(2\phi_1 - \phi - 2\psi_D) \right]^2, \quad (5.1)$$

$$I_{\perp} = \left[\cos\gamma \sin\phi - \frac{\phi}{\gamma} \cos\phi \sin\gamma \right]^2 + \left[\frac{\beta}{\gamma} \sin\gamma \sin(-2\psi_D - \phi + 2\phi_1) \right]^2, \quad (5.2)$$

donde $\gamma = \sqrt{\phi^2 + \beta^2}$ y $\phi = \alpha$. Como se puede observar, estas ecuaciones están normalizadas por lo que es necesario normalizar los datos experimentales obtenidos. Esta normalización se puede hacer mediante las siguientes expresiones:

$$I_{1f} = \frac{I_1(\theta)}{I_1(\theta) + I_2(\theta)}, \quad (5.3)$$

$$I_{2f} = \frac{I_2(\theta)}{I_1(\theta) + I_2(\theta)}, \quad (5.4)$$

siendo I_{1f} y I_{2f} las irradiancias normalizadas para el primer y segundo caso respectivamente.

Teniendo en cuenta las instrucciones a seguir en laboratorio con los 2 arreglos mencionados, se montó el arreglo experimental de acuerdo a la figura 5.6 en el que se utilizó un láser de longitud de onda $\lambda = 543,5 \text{ nm}$, una lente con foco de 10 cm, un dispositivo compuesto por un objetivo de microscopio, un pinhole y una lente positiva que permiten hacer que el haz tenga un perfil de onda plana, dos polarizadores P_1 y P_2 , la LC y el radiómetro.

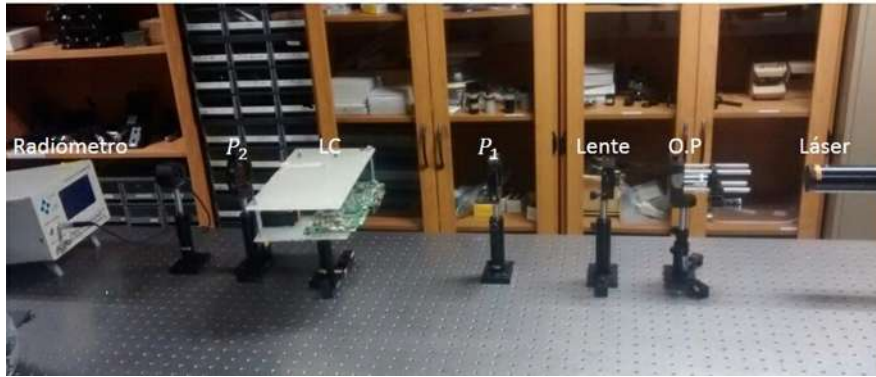


Figura 5.6: Montaje experimental utilizado en laboratorio donde O.P corresponde al objetivo de microscopio y al pinhole, P_1 y P_2 al polarizador y al analizador respectivamente.

Con la ayuda del radiómetro en el montaje experimental se midió la irradiancia para los dos casos en función del ángulo.

Los valores de la intensidad y el ángulo para el primer arreglo, cuando los ejes de transmisión del polarizador y el analizador son girados gradualmente de forma paralela, se registraron en Excel y se graficaron en Matlab. La gráfica correspondiente se muestra en la figura 5.7.

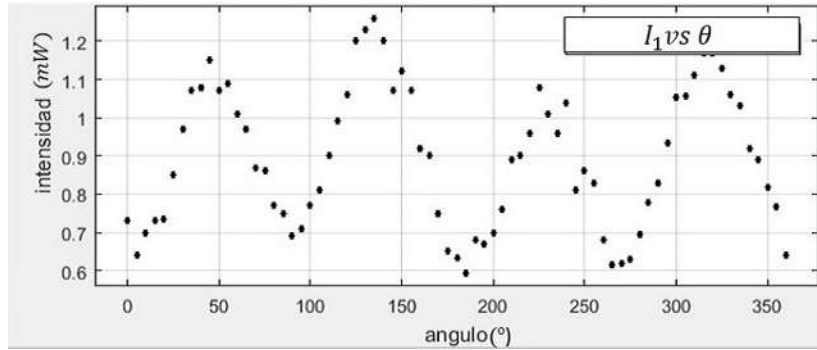


Figura 5.7: Datos obtenidos cuando los ejes de transmisión del polarizador y del analizador giran gradualmente de manera paralela.

Los resultados obtenidos para el segundo caso cuando se tienen los ejes de transmisión del polarizador y analizador perpendiculares y se giran simultáneamente cada 5° se muestran en la figura 5.8.

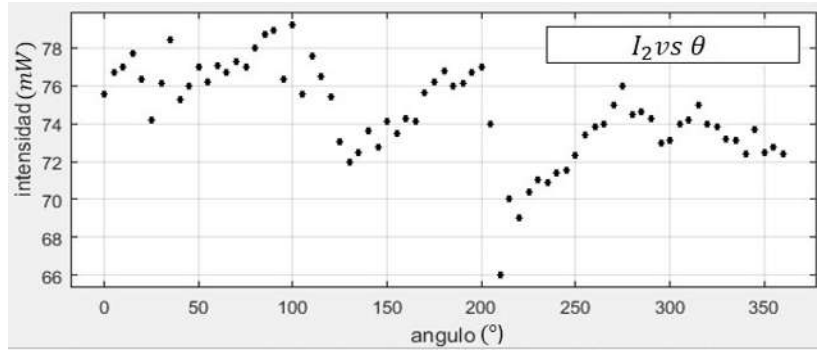


Figura 5.8: Datos obtenidos cuando los ejes de transmisión del polarizador y del analizador giran gradualmente de manera perpendicular.

Como las gráficas anteriores corresponden a valores no normalizados, utilizando las ecuaciones (5.3) y (5.4), se obtiene para cada ángulo las gráficas para la configuración paralela normalizada (figura 5.9) y perpendicular normalizada (figura 5.10).

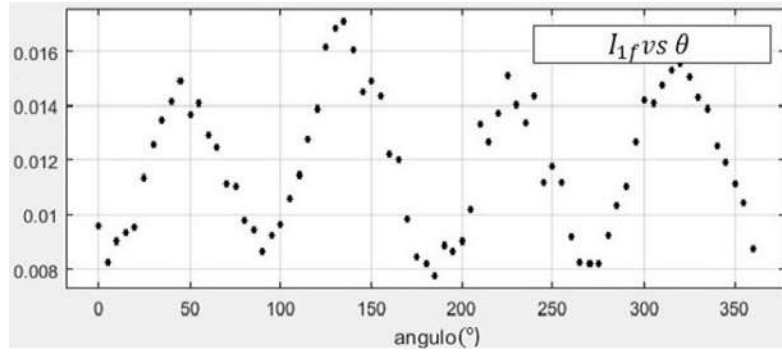


Figura 5.9: Datos normalizados correspondientes a I_1 , cuando los ejes de transmisión del polarizador y del analizador giran gradualmente de manera paralela.

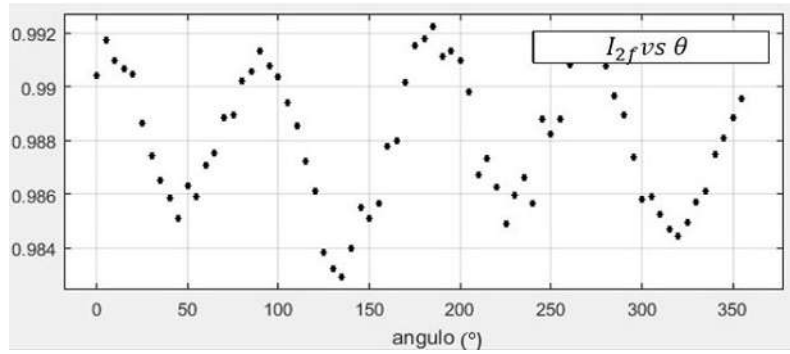


Figura 5.10: Datos normalizados correspondientes a I_2 , cuando los ejes de transmisión del polarizador y del analizador giran gradualmente de manera perpendicular.

Los datos obtenidos experimentalmente, se almacenaron y se normalizaron utilizando Excel, posteriormente se exportaron a Matlab mediante el código que se anexa en el Apéndice B mostrado en el listado (1). El código permitió graficar los valores almacenados en Excel incluidos en Matlab. Se realizó un ajuste por usuario a los datos ya mostrados.

Con los datos de las gráficas (figuras 5.9 y 5.10) mediante la aplicación Curve Fitting de Matlab permitió utilizar ajustes como se aprecia en la figura 5.11.

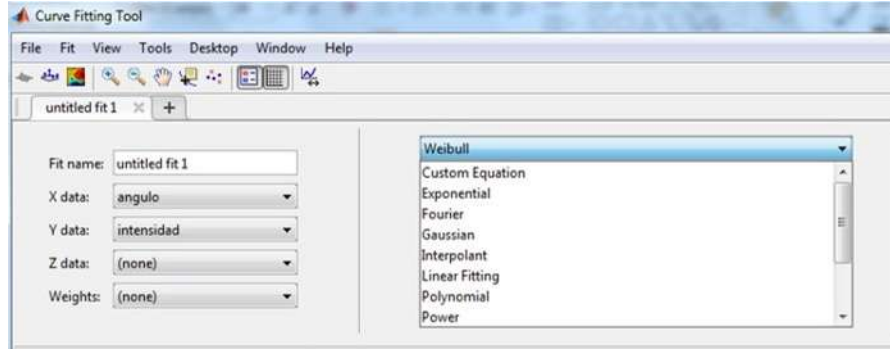


Figura 5.11: Ajustes que permite utilizar la aplicación Curve Fitting a un conjunto de datos (como lo son la intensidad y el ángulo).

Como se observa la aplicación permitió ingresar los valores del eje x y del eje y que corresponden al ángulo y la intensidad respectivamente. También se observa que se logró realizar un ajuste por usuario, que es importante debido a que los datos obtenidos tienen un comportamiento armónico que no viene dentro de las opciones mas comunes manejadas por Matlab.

El ajuste por usuario acorde a las ecuaciones (5.1) y (5.2) se realizó como se muestra en la tabla 5.1.

Tabla 5.1: Ajuste por usuario utilizado en los arreglos 1 y 2 respectivamente.

$$I_1 = I_{||} = [\cos(\{\sqrt{a^2+b^2}\} \cdot \{\pi/180\}) \cdot \cos(\{a^2\} \cdot \{\pi/180\}) + \{a/\{\sqrt{a^2+b^2}\}\} \cdot \sin(\{\sqrt{a^2+b^2}\} \cdot \{\pi/180\}) \cdot \cos(\{a \cdot \{\pi/180\}\})^2 + \{b/\{\sqrt{a^2+b^2}\}\} \cdot \sin(\{\sqrt{a^2+b^2}\} \cdot \{\pi/180\}) \cdot \cos(\{2 \cdot x - a - 2 \cdot \psi\} \cdot \{\pi/180\})]^2$$

$$I_2 = I_p = [\cos(\{\sqrt{a^2+b^2}\} \cdot \{\pi/180\}) \cdot \sin(\{a \cdot \{\pi/180\}\}) \{a/\{\sqrt{a^2+b^2}\}\} \cdot \sin(\{\sqrt{a^2+b^2}\} \cdot \{\pi/180\}) \cdot \cos(\{a \cdot \{\pi/180\}\})^2 + \{b/\{\sqrt{a^2+b^2}\}\} \cdot \sin(\{\sqrt{a^2+b^2}\} \cdot \{\pi/180\}) \cdot \sin(\{2 \cdot x - a - 2 \cdot \psi\} \cdot \{\pi/180\})]^2$$

Siendo $a = \alpha$, $b = \beta$, $\psi = \psi_D$. Se utilizó como condiciones iniciales que $\alpha = 90^\circ$, $\beta < 360^\circ$ ya que la LC es TN y β va de 0° a 360° , estas condiciones se ingresaron en fit options.

Los resultados de los ajustes por usuario para las configuraciones paralelas y perpendiculares se muestran en las siguientes figuras:

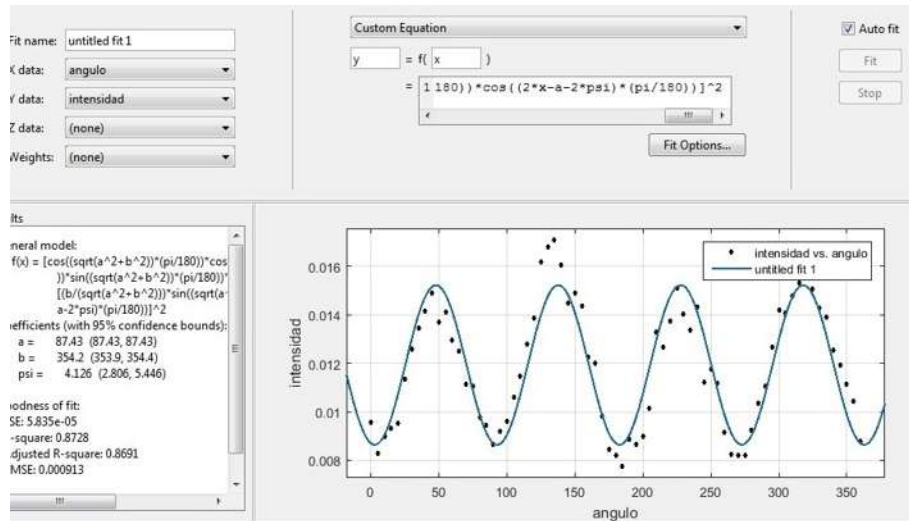


Figura 5.12: Ajuste por usuario para los datos relacionados a I_{1f} (configuración paralela normalizada), donde se obtiene un coeficiente de correlación de $R=0.8728$.

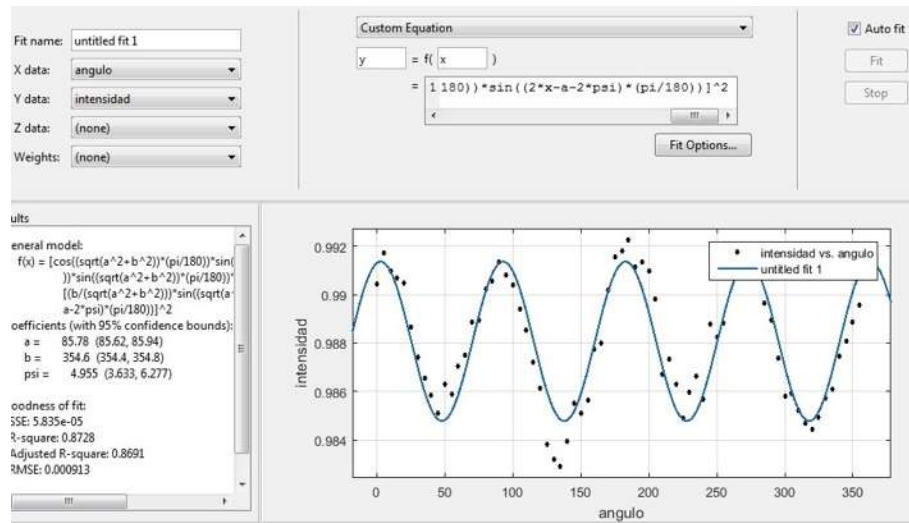


Figura 5.13: Ajuste por usuario para los datos relacionados a I_{2f} (configuración perpendicular normalizada), donde según la gráfica de arriba también es $R=0.8691$.

Se obtuvieron una serie de datos: $\alpha = 87,43^\circ$, $\beta = 354,2^\circ$ y $\psi_D = 4,126^\circ$

para la configuración paralela; $\alpha = 85,78^\circ$, $\beta = 354,6^\circ$ y $\psi_D = 4,955^\circ$ para la configuración perpendicular. Como los resultados son una buena solución de las ecuaciones (3.27) y (3.28), el promedio de éstas es un resultado mejor. Promediando, el resultado final fue de: $\alpha = 86,605^\circ$, $\beta = 354,4^\circ$ y $\psi_D = 4,54^\circ$.

Para poder comprobar este resultado, se tomó una serie de valores en laboratorio, dejando el polarizador $P_1 = 0^\circ$, mientras que el analizador P_2 fue girado gradualmente. Como los valores de laboratorio tienen una amplitud, fue necesario encontrar la amplitud para los valores teóricos, para ello se tomó en cuenta una constante E en las ecuaciones (3.27) y (3.28) no normalizadas que representa la amplitud.

Con los valores obtenidos de $\alpha = 86,605^\circ$, $\beta = 354,2^\circ$ y $\psi_D = 4,54^\circ$, se generó la función de la tabla 5.2 en la que se encontró que el coeficiente de correlación es de $R=0.8417$ y el valor de $E = e = 62,69$.

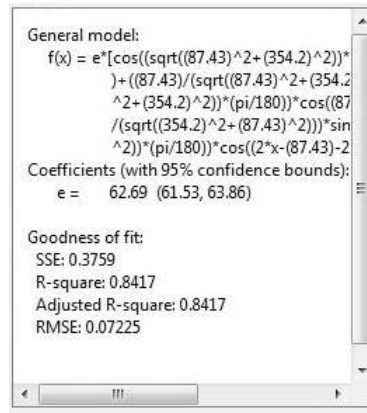


Tabla 5.2: Ajuste y resultado para obtener el valor de E.

Con los valores necesarios que representan las características de la LCD, se comparó el comportamiento teórico de la LCD con el comportamiento experimental; para ello, se utilizó el código anexado en el Apéndice B mostrado en el listado 2. La gráfica obtenida del código mencionado se muestra en la figura 5.14.

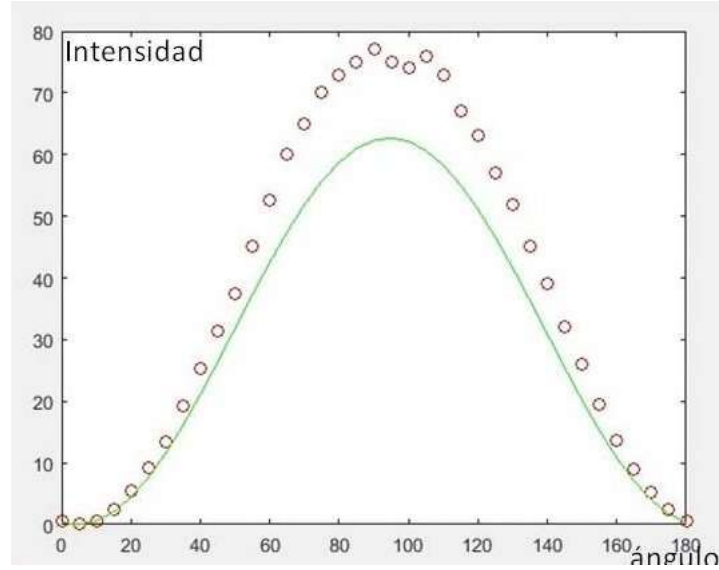


Figura 5.14: Gráfica que muestra el comportamiento analítico y experimental de una serie de datos correspondiente al polarizador y analizador ($\theta_1 = 0^\circ$) y $\theta_2 = \theta$ respectivamente, donde los círculos representan los valores experimentales.

Como se observa en la figura 5.14 que el valor de E varía en ambos, esto por errores de variación de intensidad de la LC en presencia del láser, los polarizadores, el radiómetro, entre otros errores sistemáticos a la hora de medir la intensidad, por tanto como la gráfica teórica sigue un comportamiento similar a la gráfica experimental, se encontró que los valores son correctos y se concluye que el ángulo director es $\psi_D = 4,5^\circ$ respecto de la vertical.

5.3. Caracterización de la fase de una TN-LC

Para caracterizar la pantalla de cristal líquido en función de la fase se utilizó el Efecto Talbot, ya que como se mencionó en la sección 4.2 a través del análisis de una imagen fraccionaria se puede conocer la fase de la LC.

Para la medición de fase se utilizó el esquema mostrado en la figura 5.15, donde O.P son el objetivo de microscopio y pinhole, L la lente que se utilizaron para obtener un perfil plano del haz de luz. Posteriormente se colocó un polarizador P que permitió cambiar el estado de polarización del haz que

entra en la LC y al final se colocó una CCD (charge-coupled device) que es una cámara cuya función es captar la imagen debido a la sensibilidad a la luz que presenta el silicio.

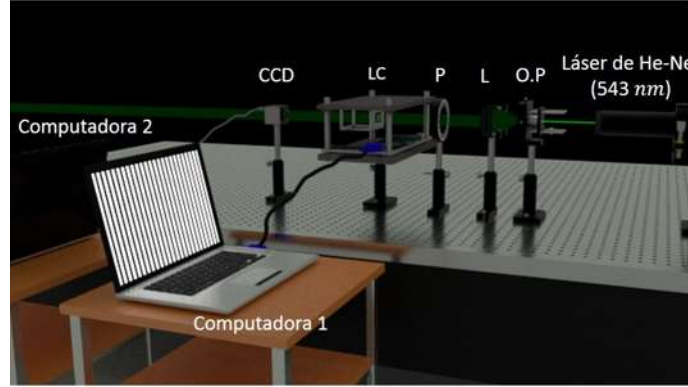


Figura 5.15: Esquema utilizado para obtener un haz con perfil plano y cuyos campos vibran paralelo al eje de transmisión del polarizador P que se encuentra a $4,5^\circ$ respecto a la vertical.

De acuerdo a lo anterior, el método del Efecto Talbot consiste en desplegar una rejilla periódica en la LC, iluminarla con la onda plana y propagarla, se sabe, por la sección 4.2, que esta rejilla tiene autoimágenes a múltiplos de la distancia de Talbot z_T , también se sabe, que a mitad de esta distancia se tiene la misma rejilla periódica, solo desplazada medio período y que a un cuarto de la distancia de Talbot se tiene la suma de dos rejillas, una de estas con una fase de $e^{i\pi/2} = \Gamma$. Por lo que a un cuarto de distancia de Talbot se tiene información de fase de esta rejilla. Es por esta razón que se utiliza el efecto de Talbot para caracterizar una pantalla de cristal líquido por fase. Estos detalles se muestran en la figura 5.16.

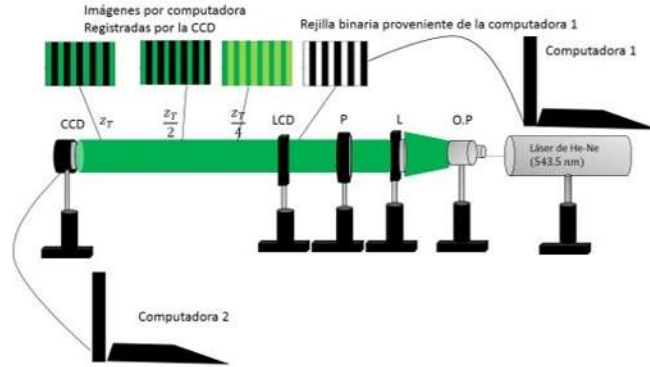


Figura 5.16: Esquema utilizado para obtener autoimágenes periódicas con la ayuda de una LC, donde O.P es el objetivo de microscopio, L la lente, P el polarizador y se utiliza una CCD para capturar la imagen a la distancia de Talbot z_T .

5.3.1. Diseño y construcción de una rejilla binaria

La rejilla binaria periódica que se desplegó en la LC fue diseñada con la ayuda del código hecho en Matlab, que se anexa en el Apéndice B mostrado en el listado 3. En este código la rejilla binaria se obtuvo creando una matriz de 800x600 elementos. Para que esta rejilla se pudiera desplegar correctamente en la LC se utilizó una frecuencia $f=20$ en Matlab equivalente a 40 pixeles en la LC. Esto es debido a que la pantalla tiene 800 pixeles y se dividen entre 20 períodos por lo que arroja que cada período equivale a 40 pixeles. Si cada pixel mide $20 \mu\text{m}$ entonces, el período físico de la rejilla que se muestra en la LC es de $800 \mu\text{m}$.

Una de las ventajas del código que está en el listado 3 es que permite mostrar la rejilla periódica con diferentes niveles de gris, es decir, con diferente contraste. En la figura 5.17 se muestran tres rejillas con diferente contraste desplegadas en una LC.

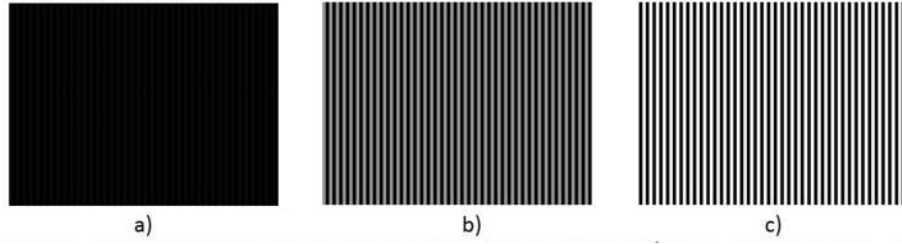


Figura 5.17: Rejillas con diferente contraste desplegadas en una LC. El valor asignado a la franja oscura $g_1 = 0$ y la franja brillante g_2 son: a) $g_2 = 10$, b) $g_2 = 150$, c) $g_2 = 255$.

Utilizando el efecto Talbot para cada rejilla, considerando el valor del período mencionado y la longitud de onda del láser $\lambda = 543.5 \text{ nm}$. Tomando el error mínimo de 1 pixel, se obtuvo que la distancia de Talbot para esta rejilla es de $z_T = 2.355 \text{ m} \pm 0.118 \text{ m}$, y la distancia media y cuarta de Talbot son $z = 1.178 \text{ m} \pm 0.059 \text{ m}$ y $z = 0.589 \text{ m} \pm 0.030 \text{ m}$ respectivamente.

5.3.2. Arreglo experimental para la obtención de fase

En laboratorio se montó el arreglo mostrado en la figura 5.18 para efectuar el Efecto Talbot. Se desplegó una rejilla periódica en la LC y a una distancia z se capturó la imagen propagada por medio de una CCD. Se utilizó un láser verde con una longitud de onda de $\lambda = 543.5 \text{ nm}$, un colimador que permite al haz tener un perfil plano y un polarizador P con el eje de transmisión a $4,5^\circ$ respecto a la vertical, paralelo a la dirección del vector director calculado en la sección anterior.



Figura 5.18: Arreglo experimental utilizado en laboratorio, donde O.P es el objetivo de microscopio y P el pinhole, L la lente, P el polarizador, LC el cristal líquido y la CCD la cámara que captura la imagen a una distancia z de la LC.

Con la ayuda de una computadora se desplegaron rejillas periódicas con diferente contraste en la LC.

La primera réplica de la rejilla periódica se obtuvo en $z_T = 2.36 \text{ m} \pm 0.1 \text{ m}$, por lo que las autoimágenes a un medio y a un cuarto de las distancia de Talbot se encontraron en $z = 1.18 \text{ m} \pm 0.05 \text{ m}$ y $z = 0.59 \text{ m} \pm 0.03 \text{ m}$ respectivamente.

Se demostró anteriormente que a un cuarto de la distancia de Talbot de la rejilla periódica propagada se tiene información de fase. Por tal motivo se procedió a colocar la CCD a la distancia $z_T/4$ para capturar la imagen de la rejilla. Posteriormente ya que la fase está en función del contraste y este en relación a los niveles de gris, se procedió a propagar las rejillas por medio del Efecto Talbot, la figura 5.19 muestra rejillas capturadas con la CCD a un cuarto de la distancia de Talbot con diferente nivel de gris.

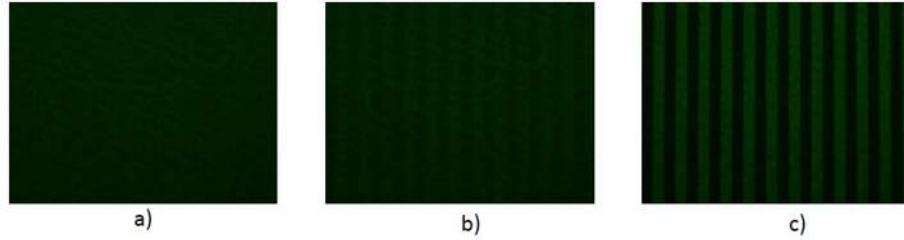


Figura 5.19: Rejillas con diferentes contraste capturadas por la CCD a un cuarto de la distancia de Talbot. El valor asignado a la franja oscura fue $g_1 = 0$ y la franja brillante g_2 se le asignó los valores: a) $g_2 = 10$, b) $g_2 = 150$, c) $g_2 = 255$.

En las imágenes de la figura 5.19 se observa diferente visibilidad de las rejillas capturadas por la CCD, donde la figura 5.19 a) corresponde al ruido de la LC.

5.3.3. Método de división de la rejilla a un cuarto de la distancia de Talbot

Para poder encontrar la fase de una LC, se utilizó el método de división de Mellado (4.2.3), donde a partir del Efecto Talbot se capturaron una serie de imágenes a un cuarto de la distancia de Talbot variando los niveles de gris de una rejilla binaria periódica, de 0 a 250 en pasos de 10 en 10, es decir, se tomaron 26 imágenes y de acuerdo al período de las rejillas y a la resolución de la imagen capturada se subdividió cada una de éstas como se ve en la figura 5.20. Se dividió a la imagen lateralmente en 12 regiones ya que cada región contenía un par de franjas, por tanto se dividió la imagen en 144 sub-imágenes y a cada región se le asignó un nombre: para la primera región fue (1,1), para la segunda región fue (1,2), etc...

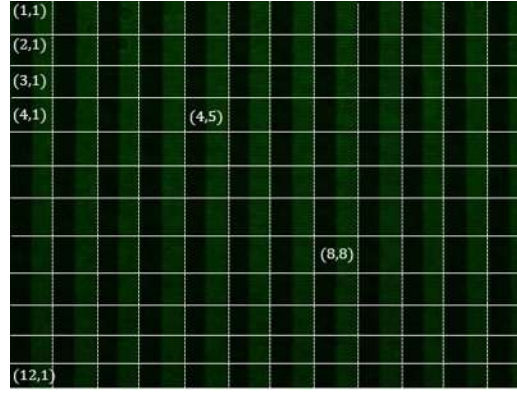


Figura 5.20: División que se utilizó a una rejilla con nivel de gris 250 y con el nombre de sus determinadas sub-imágenes.

5.3.4. Procesamiento de las sub-imágenes

En cada región mediante la ecuación (4.42) fue posible calcular la fase de estas sub-imágenes, donde el valor de la intensidad respecto a la ecuación (4.38) se calculó de la siguiente manera: el valor I_1 representó el valor máximo de intensidad que se tuvo en una región de la imagen y I_2 indicó el valor mínimo de la intensidad de una región de la imagen. Posteriormente para cada sub-imagen fue necesario obtener los valores de las intensidades máximas y mínimas, por ello se graficó un renglón de la imagen para ver el comportamiento de la intensidad como se puede ver en la figura 5.21.

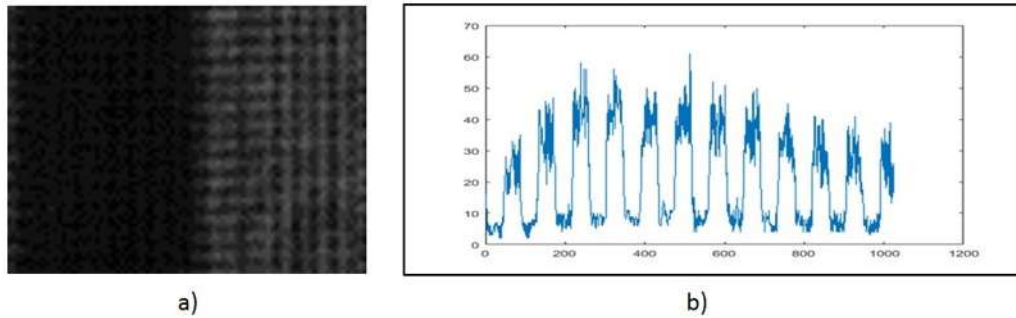


Figura 5.21: Rejilla capturada por la CCD donde: a) representa la región (6,7) de la imagen, b) representa a la intensidad de la imagen del renglón 300 a una escala de gris de 250.

En la figura 5.21 a) se puede apreciar que la intensidad presenta ruido en los picos, que al obtener la diferencia de las intensidades máximas y mínimas éstas dan errores, por tal motivo, se utilizó un filtro pasa bandas. Su función fue la siguiente: permitió utilizar la transformada de Fourier para dejar pasar una parte importante de la rejilla, de este modo, la misma sub-imagen correspondiente a la región (6,7) se transformó en la rejilla periódica de la figura 5.22.

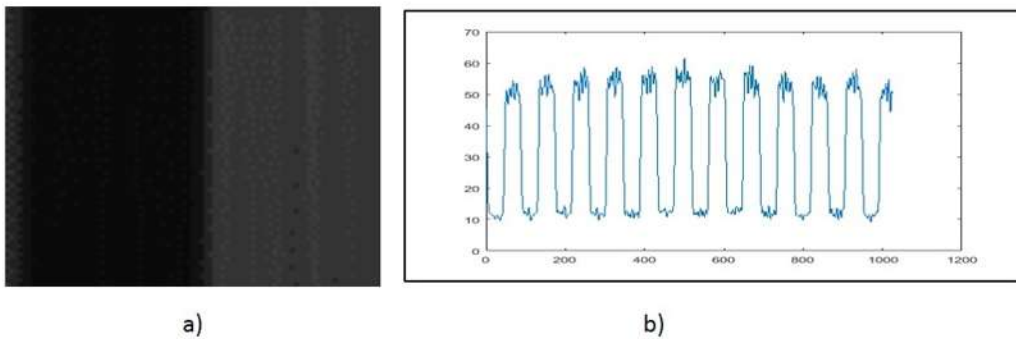


Figura 5.22: Rejilla obtenida después de utilizar el filtro pasa bandas, donde: a) región (6,7) de la imagen, b) renglón 300 correspondiente a la intensidad de la imagen con nivel de gris de 250.

Comparando el renglón de intensidad de la figura 5.22 b) con el de la figura 5.21 b) se aprecia que se redujo notablemente el ruido en los extremos

de la intensidad. Se utilizó el filtro pasabandas a las 26 imágenes capturadas por la CCD, donde a cada región de éstas se les calculó la fase mediante la suma y diferencia del contraste de las franjas adyacentes.

La fase se calculó mediante el código que se anexa en el Apéndice B listado 4, que calcula el promedio del máximo y mínimo de cada renglón de la sub-imagen para así promediar todos los renglones y obtener el valor máximo y el valor mínimo de las intensidades, es decir, I_1 y I_2 que se utilizaron para obtener la fase en una determinada región de una imagen a una escala de gris. Posteriormente para todas las demás imágenes.

Con el código del listado 4 y el uso de la ecuación (4.42) se obtuvo la fase Γ para la región (6,7) a un nivel de gris de 180 que fue de $\Gamma = 0,58$ radianes. Posteriormente mediante el código anterior se calculó la fase para la región (6,7) de las 26 imágenes que varían en el nivel de gris, es decir, de 0 a 250. Esto permitió obtener una curva de la región (6,7) de fase para la LC en función de los niveles de gris como se puede ver en la figura 5.23.

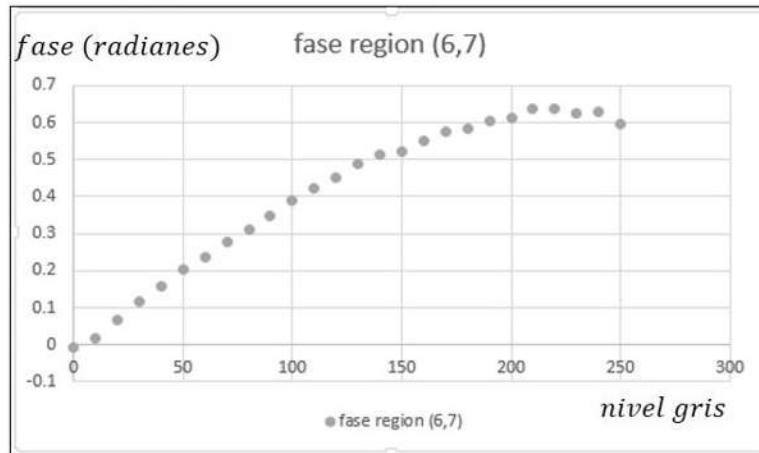


Figura 5.23: Fase correspondiente a la región (6,7) de la LC donde se usó las 26 imágenes que corresponden al nivel de gris de la rejilla periódica de 0 a 250 en pasos de 10 en 10.

Debido a que se tenían 144 regiones, entonces se obtuvieron 144 curvas de fase que representan la fase de la LC. En la figura 5.24 se muestran tres curvas de fase correspondientes a las regiones (1,1), (4,8) y (11,8).

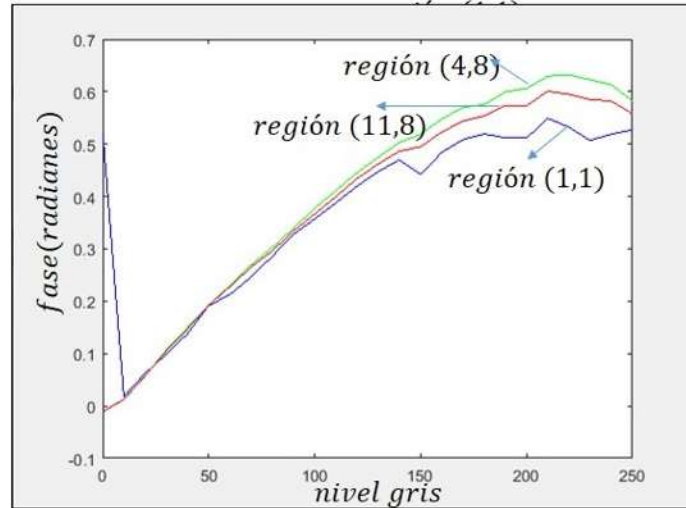


Figura 5.24: Curva de fase para las regiones (1,1), (4,8) y (11,8).

En las curvas de la figura 5.24 se encontró que la fase para cada una de estas regiones tiene un comportamiento similar, pero para la región (1,1) y sus bordes, así como para niveles bajos el comportamiento es muy diferente y difiere a partir del nivel de gris de 100. Las 144 curvas de fase obtenidas representaron el comportamiento de fase de la LC, donde el valor máximo de la fase fue de 0.6 radianes aunque no fue igual para todas las regiones de la LC.

EL valor de la fase obtenida fue bajo, algunas de sus posibles explicaciones: es que el tamaño del pixel es de $20\ \mu\text{m}$ comparado con el tamaño de pixel de otras LC que han sido reportadas. Otra posible explicación es debido a que la pantalla de cristal líquido era TN-LC de transmisión comercial, es decir que entre los tres LCD se tiene una mejor visualización y por último el error experimental en el efecto Talbot al ser desplegada la rejilla o en su captura por la CCD, entre otros.

5.3.5. Representación de la fase para cada región de la LCD

Encontrada la fase de una LC que varía de 0 grados a 30 grados y comparando las curvas de fase de ella se pudo obtener un ajuste para cada una de

ellas. A continuación se muestra un ajuste a la región central.

La curva de fase para la región central se graficó en la figura 5.25.

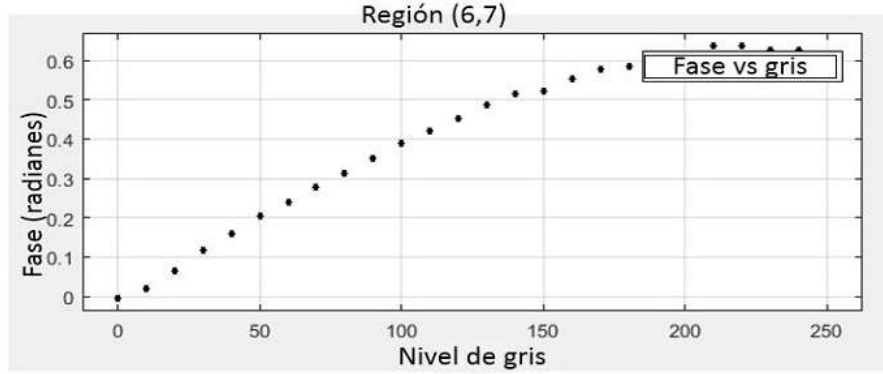


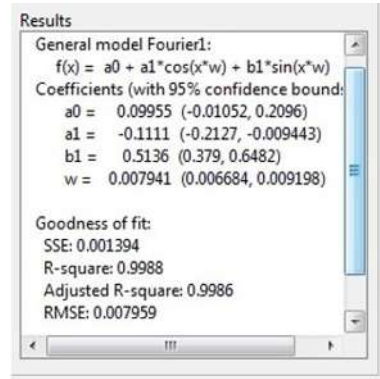
Figura 5.25: Datos de la fase en función de los niveles de gris de la región central (6,7).

El ajuste realizado para describir los datos fue un ajuste de Fourier de orden 1, de la siguiente manera:

$$f(x) = a_0 + a_1 * \cos(w * x) + b_1 * \sin(w * x), \quad (5.5)$$

donde x corresponde a los niveles de gris y $f(x)$ corresponde a la fase. Al usar el ajuste de la ecuación (5.5) en los datos de la zona central (6,7) (figura 5.25) se obtuvo el resultado de la tabla 5.3. Se observa que su coeficiente de correlación está cerca de 0.99, lo que significa que el ajuste es aceptable, siendo $a_0 = 0,09955$, $a_1 = -0,1111$, $b_1 = 0,5136$, $w = 0,0079$. Con estos datos se pudo representar la fase de la región (6,7).

Tabla 5.3: Resultados del ajuste de la ecuación (5.5) a los datos de la zona central (6,7).



Realizando el procedimiento anterior se garantizó el comportamiento de la fase de la LC para sus diferentes regiones. Como el rango de fase de la LC va de 0-0.6 radianes, se logró describir el comportamiento de los niveles de gris para cada región teniendo sólo una fase constante de 0.4 radianes para toda la pantalla. Para ello se utilizó la ecuación (5.5) donde se obtuvo el ajuste para las 144 regiones de la LC, con cada ajuste se obtuvo el nivel de gris para la fase 0.4 radianes. En la figura 5.26 se encontraron los niveles de gris para cada región de la LC con fase constante de 0.4 radianes.

116	106	111	103	103	106	103	102	100	104	109	101
111	107	108	100	102	104	99	101	98	103	100	102
104	106	104	98	102	101	98	101	107	95	102	103
102	102	106	98	103	103	98	102	109	96	106	103
98	100	106	99	99	102	101	105	105	101	106	103
95	99	104	96	101	102	103	109	106	99	104	102
96	105	106	95	101	98	100	105	104	101	109	108
97	106	108	97	94	95	100	101	104	100	108	110
98	101	103	97	96	96	103	101	99	105	105	112
98	100	100	98	101	102	105	102	96	105	108	119
101	104	107	102	105	106	109	109	110	110	118	129
110	109	109	104	107	104	108	108	109	110	127	116

Figura 5.26: Niveles de gris para cada región de la LC correspondiente a una fase 0.4 radianes.

Se aprecia que en las regiones de la figura 5.26 los niveles de gris con los que se representó una fase de 0.4 radianes en la LC variaron del nivel 95 al 110, algunos alcanzaron un valor de 127 que corresponden a los bordes y que estos representan errores. Se utilizó el programa de Matlab para generar la imagen de los niveles de gris correspondientes a la fase 0.4 radianes de la LC con resolución de 1024×768 pixeles como se ve en la figura 5.27.



Figura 5.27: Niveles de gris correspondientes a una fase de 0.4 radianes en la LCD.

Se caracterizó la LCD para una fase de 0.4 radianes, de la misma manera se podría obtener el comportamiento de la fase de 0 a 30 grados, sólo que 0.4 radianes es el valor mejor obtenido para todas las curvas de fase de las regiones correspondientes a la LC.

Con los niveles de gris de la figura 5.27 al desplegarla en la LC se logró representar una fase constante de 0.4 radianes.

5.4. Holograma generado por computadora

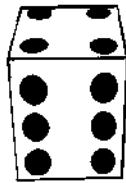
El holograma que se utilizó fue elaborado en Matlab y se anexa en el código del Apéndice B, listado 5, donde se siguieron los pasos del algoritmo 1 de la elaboración del holograma por computadora, donde se tomó al haz de luz

como una función δ y a la función objeto O se interpretó como una objeto propagado por tal motivo se le obtuvo una transformada de Fourier (TF, ver Apéndice A), además se aplicó el comando `fftshift` cuya función fue el centrar a la transformada de Fourier. El haz de referencia y del objeto se sumaron y se le aplicó la transformada de Fourier (como en laboratorio tanto en cuestiones numéricas se mide solo la irradiancia), enseguida se obtuvo la irradiancia de la TF que corresponde a $I = \text{abs}(\text{valor}).*\text{abs}(\text{valor})$.

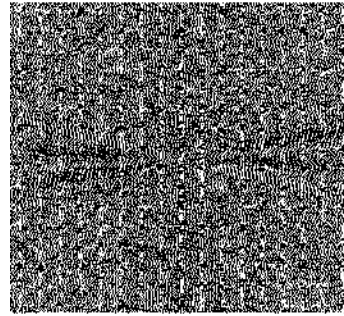
Con el procedimiento visto anteriormente se obtuvo el holograma, pero en la ecuación (4.44) el holograma tiene el término $(\mathcal{F}[O])^2$ que numéricamente contiene demasiada intensidad y por tal motivo como la información de fase y del objeto corresponde al tercer y cuarto término, se restó el valor anterior a la irradiancia de la suma del objeto y de la delta.

Obtenido el interferograma se utilizó en una pantalla de cristal líquido para construir el holograma obtenido y los resultados se muestran a continuación.

El código de Matlab que se encuentra en el listado 5 generó el interferograma y se construyó de la siguiente manera: el objeto inicial fue representado por la figura 5.28 a) que al pasar a través del código del listado 5 se obtuvo el interferograma de la figura 5.28 b).



(a)



(b)

Figura 5.28: Datos ingresados y obtenidos del listado 5 siendo: a) El objeto al cual se le obtuvo el holograma, b) interferograma del objeto.

La reconstrucción del holograma computacionalmente se hizo haciendo

uso del código del listado 5, donde se obtuvo el holograma de la figura 5.29 que muestra la imagen conjugada y real del objeto.

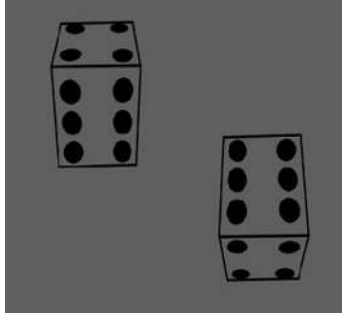


Figura 5.29: Holograma reconstruido mediante la computadora.

La figura 5.29 representa el holograma reconstruido mediante la computadora. Para la reconstrucción del holograma en laboratorio se utilizó el arreglo experimental de la figura 5.30, donde la computadora 1 desplegó información del interferograma de la figura 5.28 b) en la LC, que después se iluminó por una onda plana proveniente de un láser con longitud de onda $\lambda = 543 \text{ nm}$ y se utilizó una lente L' para obtener la transformada de Fourier inversa del interferograma. Así se obtuvo el holograma reconstruido mediante el uso de una LCD.

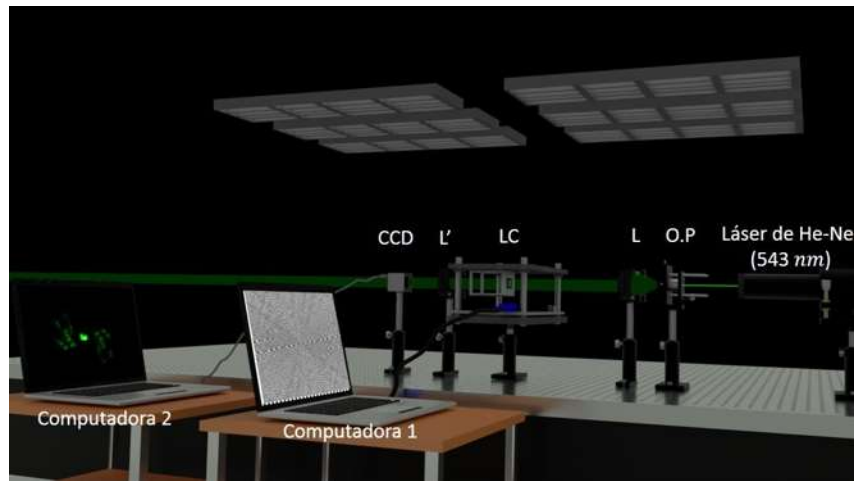


Figura 5.30: Esquema del arreglo experimental utilizado para la reconstrucción del holograma en laboratorio.

El holograma que se reconstruyó mediante el uso de la LCD se muestra en la figura 5.31.

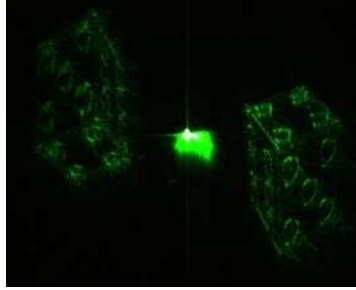


Figura 5.31: Holograma reconstruido en laboratorio mediante el uso de una LCD.

Como se observa en la figura 5.31 la visualización del holograma reconstruido es el esperado puesto que la fase máxima alcanzada de la LC fue de 30 grados. Otra observación se encontró mirando la figura 5.29 que representa el holograma reconstruido mediante la computadora y la figura 5.31 donde se observa que es el mismo holograma reconstruido sólo que una es su imagen espejo, esto es debido a que el interferograma se despliega en una LCD.

Una ventaja de la reconstrucción del holograma mediante el uso de una LCD es que permitió realizar una serie de hologramas dinámicos en tiempo real, como se observa en las imágenes siguientes.

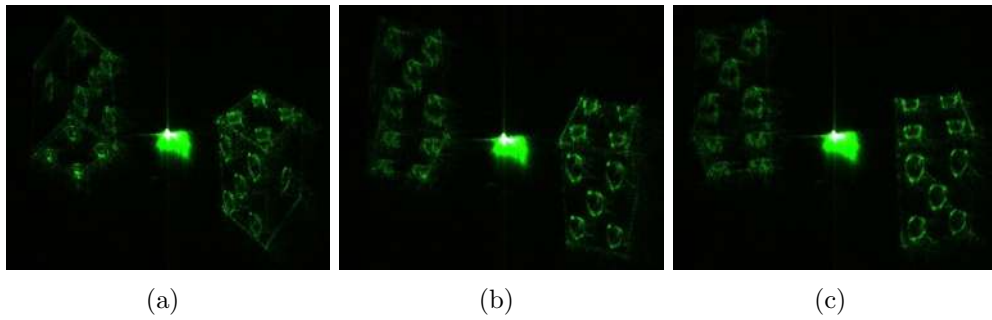


Figura 5.32: Hologramas reconstruidos en laboratorio que simulan un holograma dinámico a) holograma posición del dado 1 b) holograma posición del dado 2, c) holograma posición del dado 3.

Capítulo 6

Conclusiones

Según los resultados obtenidos lo expuesto en este trabajo permite arribar a las siguientes conclusiones:

Se pudo usar una LCD comercial proveniente de un proyector como modulador de fase gracias a que se obtuvo el ángulo director que fue 4.5 grados respecto a la vertical de esta pantalla. La fase que se obtuvo se encontró en el rango de 0 a 30 grados pero esta fase es rotundamente baja debido a que la LCD es comercial.

También se encontró la caracterización de fase constante en la pantalla correspondiente a 0.4 radianes (23 grados).

Por último se logró reconstruir físicamente un holograma elaborado por computadora gracias a la utilización de la pantalla de LC. La visualización del holograma tiene que ver con la fase de la pantalla por tal motivo se visualiza pero no de la manera que se esperaba. Se logró utilizar el holograma como un holograma dinámico y el resultado obtenido fue satisfactorio.

Con esto concluyo que se pudo encontrar características de una LCD comercial ya que estas no se encuentran en internet y son característicos de ella y se pudo usar la LC como modulador de fase que en laboratorio tiene fines científicos y didácticos. Se recomienda hacer uso de esta LC como fines didácticos o bien que algunos experimentos se realicen haciendo uso del margen de la fase de ella.

Apéndice A

Transformada de Fourier

Las series de Fourier que se estudiaron en el capítulo 4 constituyen un instrumento para el tratado de objetos periódicos. Puesto que los objetos en su mayoría no son periódicos se necesita de un método diferente que es conocido como Transformada de Fourier. Si una función $f(x)$ periódica descrita por una serie de Fourier dada por la ecuación (4.2), tiene su período infinito, es decir, $p \rightarrow \infty$ entonces la función $f(x)$ resultante deja de ser periódica y para poder representarla se usa una integral conocida como transformada de Fourier representada por el símbolo $\mathcal{F}$ dada por:

$$F(\nu_x) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi\nu_x x} dx. \quad (\text{A.1})$$

Análogamente $\mathcal{F}^{-1}$ es el símbolo que representa la operación inversa a la ecuación (A.1) y se denomina transformada de Fourier inversa dada por :

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\nu_x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu_x)e^{i2\pi\nu_x x} d\nu_x. \quad (\text{A.2})$$

Para que exista la transformada de Fourier se debe cumplir lo siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty, \quad (\text{A.3})$$

que en otros términos quiere decir que la integral del valor absoluto de $f(x)$ debe ser finita. La transformada de Fourier $\mathcal{F}\{f(x)\}$ es conocido como el espectro de frecuencias de la función $f(x)$ o el espectro de Fourier y su amplitud es el módulo al cuadrado de este espectro.

Un ejemplo interesante es la función impulso unitario o delta de Dirac que se define como sigue:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es } 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}, \quad (\text{A.4})$$

aplicando la transformada de Fourier se tiene:

$$\mathcal{F}\{\delta(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i2\pi f_x x} dx, \quad (\text{A.5})$$

como $\delta(x) = 1$ cuando $x=0$, entonces;

$$\mathcal{F}\{\delta(x)\} = 1. \quad (\text{A.6})$$

El espectro de Fourier de una función delta tiene una densidad espectral unitaria. La transformada que se definió en las ecuaciones anteriores son para una función $f(x)$ que está en $\mathbb{R}$ y es para una función en una dimensión. La transformada de Fourier también representa objetos bidimensionales. Para este caso la transformada de Fourier de un objeto $u(x,y)$ se define como:

$$U(f_x, f_y) = \mathcal{F}\{u(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-i2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy, \quad (\text{A.7})$$

donde las variables independientes f_x y f_y se conocen como frecuencias espaciales. De la misma manera como se definió la transformada inversa de Fourier para una dimensión, está es:

$$u(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{U(f_x, f_y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(f_x, f_y) e^{i2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y. \quad (\text{A.8})$$

La Transformada de Fourier de un objeto $u(x,y)$ tiene varias propiedades interesantes pero antes de hablar de ello se mencionan algunas condiciones de existencia para tener una Transformada de Fourier. Éstas son:

1. $u(x,y)$ debe ser integrable en el plano infinito (x,y) .
2. $u(x,y)$ sólo debe tener un número finito de discontinuidades.
3. $u(x,y)$ no debe tener discontinuidades infinitas.

Anunciadas las condiciones de existencia a continuación se expondrán algunas de las propiedades matemáticas básicas de la transformada (para ver su demostración se puede recurrir a la referencia [32] que se aplican tanto para funciones unidimensionales como bidimensionales). En los siguientes casos se considera que las transformadas de Fourier de las funciones $g(x, y)$ y $h(x, y)$ están dadas por $\mathcal{F}(g) = G(f_x, f_y)$ y $\mathcal{F}(h) = H(f_x, f_y)$ respectivamente.

1. Teorema de linealidad.

La transformada de Fourier de una suma ponderada de dos (o más) funciones es idéntica a la suma ponderada de las transformadas individuales,

$$\mathcal{F}\{\alpha g + \beta h\} = \alpha \mathcal{F}(g) + \beta \mathcal{F}(h). \quad (\text{A.9})$$

2. Teorema de similaridad.

La amplificación de las coordenadas en el dominio espacial (x,y) resulta en una contracción de las coordenadas en el dominio de las frecuencias (f_x, f_y) , además de un cambio en la amplitud total del espectro,

$$\mathcal{F}\{g(\alpha x, \beta y)\} = \frac{1}{|\alpha\beta|} G\left(\frac{f_x}{\alpha}, \frac{f_y}{\beta}\right). \quad (\text{A.10})$$

3. Teorema de desplazamiento.

Una traslación de la función en el dominio espacial introduce un cambio de fase lineal en el espectro de frecuencias,

$$\mathcal{F}\{g(x - \alpha, y - \beta)\} = G(f_x, f_y) e^{-i2\pi(\alpha f_x + \beta f_y)}. \quad (\text{A.11})$$

4. Teorema de Rayleigh (Teorema de Parseval).

La integral del lado izquierdo del teorema puede ser interpretada como la energía contenida en un frente de una $g(x,y)$. Lo que nos conduce a la idea de que la cantidad $|G(f_x, f_y)|$ puede ser interpretada como una densidad de energía en el dominio de las frecuencias. Este teorema también se le conoce como principio de conservación de energía,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f_x, f_y)|^2 df_x df_y. \quad (\text{A.12})$$

5. Teorema de convolución.

La transformada de Fourier de una convolución de dos funciones en el

dominio espacial es equivalente a la más simple operación de multiplicar sus transformadas individuales,

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\epsilon, \eta) h(x - \epsilon, y - \eta) d\epsilon d\eta \right\} = G(f_x, f_y) H(f_x, f_y). \quad (\text{A.13})$$

6. Teorema de Auto-correlación.

Este teorema puede ser considerado como un caso especial del Teorema de convolución donde se realiza la convolución entre $g(x, y)$ con $g * (-x, -y)$,

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\epsilon, \eta) g * (x - \epsilon, y - \eta) d\epsilon d\eta \right\} = |G(f_x, f_y)|^2. \quad (\text{A.14})$$

7. Teorema de integral de Fourier.

La transformada sucesiva y la transformada inversa de una función producen la función original, excepto por sus puntos de discontinuidad, es decir:

$$\mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}\{g(x, y)\}\} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{g(x, y)\}\} = g(x, y). \quad (\text{A.15})$$

La utilidad de este teorema permite apreciar la importancia de la transformada de Fourier porque establece la relación entre las funciones y forma un ciclo, es decir, si se tiene una función se puede transformar en una función de frecuencias y se puede regresar usando la transformada inversa de Fourier a la función del inicio.

Las anteriores propiedades de Fourier no sólo son de interés teórico sino que tienen una gran aplicación práctica y proveen las herramientas básicas para la manipulación de la transformada de Fourier y puede ahorrar mucho tiempo de arduo trabajo al analizar una función.

Apéndice B

Códigos de Matlab

```
1  % IMPORTACION DE DATOS
2  clear; clc; close all;
3  num = xlsread('datos1normalizado.xlsx'); % Importación de los datos.
4  intensidad=num(1:73,1); % Eje de las y, vector columna.
5  angulo1=num(1:73,2); % Eje de las x.
6  angulo=angulo1'; % Vector fila correspondiente a x.
7  plot(angulo,intensidad,'ro'); % Graficar.
8  h=plot(angulo,intensidad,'b'); % Unir la línea.
9  hold on % Unir los puntos de el o en círculos.
10 x=90;
11 fp=(pi/180);
12 % intensidad=[cos(sqrt(fi^2+b^2))*cos(fi)+(fi/sqrt(fi^2+b^2))*
13 % sin(sqrt(fi^2+b^2))*cos(fi)]^2 + [(b/sqrt(fi^2+b^2))*sin(sqrt(fi^2+b^2))*
14 % cos(angulo-fi-2*psi)]^2
```

Listado 1: Código utilizado en Matlab para importar datos desde Excel.

```

1  % VALOR NÚMÉRICO
2  clc; clear; close all;
3  % Valores base, \angulo total, birrefrigencia, \angulo director y Amplitud
4  x=0:5:180; a=87.46; b=156; psi=4.1, e=75.36;
5  % Ajuste utilizado, tener en cuenta que va junto todo en un rengl\on
6  y = e*[cos((sqrt((a)^2+(b)^2))*(pi/180))*cos((x+(a))*(pi/180))+
7         ((a)/(sqrt((a)^2+(b)^2)))*sin((x+(a))*(pi/180))*
8         sin((sqrt((a)^2+(b)^2))*(pi/180))] .^2+
9         e*[((b))/(sqrt((a)^2+(b)^2)))*sin((sqrt((a)^2+(b)^2))*pi/180)*
10        cos((x-(a)-2*(psi))*(pi/180))] .^2;
11
12 % VALOR REAL (LABORATORIO)
13 num = xlsread('resultadosnuevossinfiltro.xlsx');
14 [ny,nx]=size(num);
15 intensidad=num(1:37,1); % Eje de las y, vector columna.
16 angulo1=num(1:37,2); % Eje de las x.
17 angulo=angulo1'; % Vector fila.
18
19 %Graficar los valores
20 plot(intensidad,angulo,'ro',x,y, 'g');

```

Listado 2: Código que permite comparar los valores obtenidos en laboratorio y los analíticos.

```

1  %CREACI\ 'ON DE UNA REJILLA BINARIA
2  clc; clear; close all;
3  nx=800;% Tama\ ~no en x.
4  ny=600; % Tama\ ~no en y.
5  A=zeros(ny,nx); % Creaci\ 'on de una matriz de ceros, imagen g1=0.
6  C=255*ones(ny,nx);
7  p=20; % Periodo.
8  g2=255; % Escala de grises para la segunda franja.
9  for i=1:(nx/p);
10     A(:,1+(i-1)*p:(p/2)+(i-1)*p)=1; % Creando la rejilla binaria.
11 end
12     B=A*g2; % Cambio de nivel de gris para la rejilla.
13 % Visualizaci\ 'on de la rejilla binaria
14 figure
15 colormap(gray(255));
16 image(B);
17 axis on
18 % Almacenamiento de la rejilla como una imagen .bmp.
19 imwrite(B,gray(255),'rejillap20g255800x600.bmp')
20 %% El anterior rengl\ 'on, es importante la parte gray(255),
21 %% que permite guardar la imagen tomando nivel de gris de 255,
22 %% de este modo nos almacena imwrite la imagen adecuada.

```

Listado 3: Código en Matlab que garantiza obtener una rejilla binaria de período p y resolución 800×600 .

```

1  % Programa para obtener el promedio de altos y bajos de una regi\on
2  clc; close all; clear;
3  A= imread('g250mejorada.bmp','bmp'); % Lectura de la rejilla.
4  D=A;
5  %[ny,nx]=size(A)
6  a=0; s=0; z=0; y=0;
7  %Calculando el promedio de el contraste
8  %Nota: en x va de 86 a 86, en y de 64 en 64.
9  %Promediando renglones de una regi\on en espec\ifico
10 for i=257:320;      % Región (3,6).
11     a=a+mean(A(i,345:345+(86/2)));
12     z=z+1;
13     s=s+mean(A(i,345+(86/2)+1:430));
14
15 end
16 z
17 %Valores de intensidad min y max de una regi\on respectivamente
18 a1=a/z
19 s2=s/z

```

Listado 4: Código empleado en Matlab que permite obtener el valor de I_1 y I_2 de una sub-región variando el nivel de gris de 0 a 250, donde $a1 = I_1$ y $s2 = I_2$.

```

1  % Holograma de Fourier
2  clc; clear all; close all;
3  A=imread('Diapositiva1.jpg','jpg');
4  A=rgb2gray(A); ! Convertir a nivel de gris por si es a color.
5  [ny,nx]=size(A)
6  % Delta de dirac que corresponde al haz de referencia
7  B=zeros(ny,nx);
8  B(250,470)=255;
9  % Generaci\on de la difracci\on
10 A1=fftshift(fft2(A)); ! Transformada del objeto.
11 I1=abs(A1).*abs(A1); ! Irradiancia del objeto.
12 B1=fftshift(fft2(B)); ! Transformada de la delta.
13 I2=abs(B1).*abs(B1); ! Irradiancia de la delta.
14 % Cosntruccion y filtraje del holograma
15 D1=A1+B1; ! Holograma
16 I3=abs(D1).*abs(D1);
17 I4=(I3-I1); ! Filtraje
18 figure
19 colormap(gray(255));
20 image(I4)
21 imwrite(I4,gray,'hologramadado1.bmp');
22 % Reconstrucci3n del holograma
23 D2=fftshift(fft2(I4)); ! Centrado del holograma.
24 max1=max(D2); max2=max(max1); scale=1/max2;
25 D2=scale*D2; ! Holograma escalado.
26 I5=abs(D2).*abs(D2);
27 % Graficar el holograma reconstruido
28 figure
29 colormap(gray(255))
30 image(240*I5);

```

Listado 5: Código en Matlab que garantiza obtener un holograma y su reconstrucción.

Referencias

- [1] YANG, D. K. & WU S. T. (2014). *Fundamentals of liquid crystal devices*. John Wiley & Sons.
- [2] SCHARF, T. (2007). *Polarized light in liquid crystals and polymers*. John Wiley & Sons.
- [3] UIGA, E. (1995). *Optoelectronics*. Prentice Hall.
- [4] SCHADT, M., & HELFRICH, W. (1971). *Voltage- dependent optical activity of a twisted nematic liquid crystal*. Applied Physics Letters, 18(4), 127-128.
- [5] KAWAMOTO, H. (2002). *The history of liquid-crystal displays*. Proceedings of the IEEE, 90(4), 460-500.
- [6] SOUTAR, C., & LU, K. (1994). *Determination of the physical properties of an arbitrary twisted-nematic liquid crystal cell*. Optical Engineering, 33(8), 2704-2713.
- [7] LU, K., & SALEH, B. E. (1990). *Theory and design of the liquid crystal TV as an optical spatial phase modulator*. Optical Engineering, 29(3), 240-247.
- [8] GARCÍA-MARTÍNEZ, P., GARCÍA, J., & DE DIOS, D. (2005). *Método de calibración en tiempo real para moduladores de cristal líquido*. Optica pura y aplicada, 38(2), 67-74.
- [9] LEDESMA, S. A., LOZZA, H., & POMATA, M. (1999). *Undergraduate optical experiments using simple liquid crystal displays*. In PROCEEDINGS-SPIE THE INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICAL ENGINEERING (pp. 342-351). International Society for Optical Engineering.

- [10] COY, J. A., ZALDARRIAGA, M., GROSZ, D. F., & MARTINEZ, O. E. (1996). *Characterization of a liquid crystal television as a programmable spatial light modulator*. Optical Engineering, 35(1), 15-20.
- [11] KONFORTI, N., MAROM, E., & WU, S. T. (1988). *Phase-only modulation with twisted nematic liquid-crystal spatial light modulators*. Optics letters, 13(3), 251-253.
- [12] ALVAREZ, M. L., MÁRQUEZ, A., PUERTA, L. A., ESTÉVEZ, R., FERNANDEZ-VARO, H., BELÉNDEZ, A., & PASCUAL, I. (2007). *Caracterización de una pantalla de cristal líquido de baja resolución para su uso como modulador óptico*. Opt. Pura Apl. 40 (1) 95-103.
- [13] DURÁN BOSCH, V. (2007). *Optimización del funcionamiento de un modulador espacial de luz de cristal líquido mediante el modelo retardador-rotor*. Tesis de doctorado. Universitat de Valencia.
- [14] SAMPAYO MARTÍNEZ A. (2014). *Caracterización óptica del modulador espacial de luz de cristal líquido de reflexión PLUTO-VIS*. Tesis de maestría. INAOE.
- [15] BURMAN A. (2010). *Caracterización y Control de un Microdisplay como Modulador Espacial de Luz*. Tesis de grado de Ingeniería Electrónica. Universidad de Buenos Aires.
- [16] MELLADO VILLASEÑOR, G. (2013). *Caracterización de una pantalla de cristal líquido de fase*. Tesis de Maestría. INAOE.
- [17] HECHT, E. (2000). *Óptica*. Pearson Educación.
- [18] REITZ, J. R., & MILFORD, F. J. (1969). *Fundamentos de la teoría electromagnética*. Uteha.
- [19] MARTÍNEZ GUARDIOLA, F. J. (2015) *Liquid Crystal on Silicon Displays characterization for Diffractive Applications and for Holographic Data Storage*. Tesis de doctorado. Universidad de Argentina.
- [20] YEH, P., & GU, C. (1999). *Optics of Liquid Crystal Displays*. New York: John Wiley & Sons.
- [21] HSU, H. P., MEHRA, R., & VELASCO COBA, F. (1987). *Análisis de Fourier*. Addison Wesley Longman.

- [22] ORTIZ GUTIÉRREZ, M. (1996). *Difracción de fresnel de rejillas anisotrópicas*. Tesis de maestría. INAOE.
- [23] GABOR, D. (1972). *Holography, 1948-1971*. Science, 177(4046), 299-313.
- [24] GABOR, D. (1949). *Microscopy by reconstructed wave-fronts*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, 197(1051), 454-487.
- [25] AMNON, Y., & YEH, P. (1984). *Optical waves in crystals: propagation and control of laser radiation*. New York City, NY: Wiley.
- [26] LEITH, E., & UPATNIEKS, J. (1962) *Reconstructed Wavefronts and Communication Theory*. JOSA 52, 1123.
- [27] BROWN, B. R., & LOHMANN, A. W. (1967). *Computer-generated Binary Holograms*. IBM Journal of research and Development, 13(2), 160-168.
- [28] IEMMI, C. 2010. *Optica de Fourier*. Facultad de Ciencia Naturales y Exactas. Universidad de Buenos Aires, Argentina.
- [29] VIJAYAKUMAR, A., JACKIN, B. J., & PALANISAMY, P. K. (2012). *Computer generated Fourier holograms for undergraduate optics laboratory*. Physics Education, 28(4).
- [30] DIVYA, P. S., & SHEEJA, M. K. (2013). *A study and simulation of computer generated holograms*. International Journal of Advances in Engineering & Technology, 6(3), 1340.
- [31] AHMED, F., & MAHMUD, M. S. (2015). *Fourier Optics and Computer Generated Hologram*. International Journal of Computational Science and Engineering, 5(1), 1-7.
- [32] GOODMAN, J. W. (2003). *Introduction to Fourier Optics*. McGraw Hill, New York.