



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

**MOVIMIENTO SOBRE LA 2-ESFERA CON POTENCIAL
VERTICAL CONSTANTE**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:
CYNTHIA RAMOS ERAPE

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ELMAR WAGNER



MORELIA MICH.

OCTUBRE DE 2019

A mis padres Rolando y Fidelina que mi logro sea su orgullo

AGRADECIMIENTOS

A mi papá el Ing. Rolando Ramos Baltazar y mi mamá la Sra. Fidelina Erape Rojas, por el inmenso e incondicional apoyo que siempre me han brindado en cada uno de mis pasos que emprendo en mi vida, por no dejarme sola, por cuidarme, por entender mis atrasos y sobre todo por el incansable y respetado esfuerzo que hacen día a día para darnos a mis hermanas y a mi una vida llena de amor, satisfacción y felicidad. Por todo éso y mucho más, muchísimas gracias papi, muchísimas gracias mami. Los amo mucho.

A mis hermanas, Patricia, Erashamann y Marcela, por ese apoyo incondicional de hermanas con el que sé que puedo contar por siempre, por ser pacientes y comprensibles en las cosas que hago y dejo de hacer. Las amo mucho, en el camino siempre juntas.

A mi asesor de tesis, Dr. Elmar Wagner, por la paciencia y el tiempo que me dedicó para que se preparará mejor este trabajo, por las observaciones, correcciones y sugerencias que realizó al mismo.

Morelia, Mich., Mex., 15 de octubre de 2019

RESUMEN

Estudiamos el comportamiento cualitativo que sigue una partícula de masa $m > 0$ restringida sobre la 2-esfera \mathbb{S}^2 , describiendo trayectorias con ciertas condiciones iniciales de las variables fundamentales que se originan a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales de movimiento de Hamilton, en coordenadas polares, así como aumentando el valor de la fuerza de gravitación g . Consideramos dos casos importantes a estudiar:

Caso 1: Sistema de ecuaciones de movimiento de Hamilton sin potencial.

Caso 2: Sistema de ecuaciones de movimiento de Hamilton con potencial.

Por otro lado, en ciertos casos encontrar soluciones exactas con métodos analíticos de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias es imposible debido a su grado de complejidad, entonces al no obtener ciertas soluciones es posible hacer uso de métodos numéricos adecuados que modelan soluciones numéricas aproximadas en un determinado conjunto de puntos.

El análisis cualitativo que se llevó a cabo en este trabajo, nos brinda una idea para conocer el comportamiento que sigue la trayectoria de la partícula sin conocer las soluciones exactas del sistema de movimiento de Hamilton y más relevante cómo son esas trayectorias. Con la finalidad de encontrar soluciones numéricas del sistema de Hamilton que nos ayuden a entender gráficamente la teoría cualitativa desarrollada se utilizó el integrador numérico *Runge-Kutta 4*, se logró encontrar soluciones numéricas aproximadas de tal sistema, así como gráficos que describen las trayectorias de la partícula en \mathbb{S}^2 .

Palabras clave: mecánica de Hamilton, sistemas dinámicos, potencial gravitatorio, métodos numéricos, solución de ecuaciones diferenciales.

Abstract

We studied the qualitative behavior that follows a particle of mass $m > 0$ restricted on the 2-sphere \mathbb{S}^2 , describing trajectories with certain initial conditions of the fundamental variables that are originated from a system of Hamilton's differential equations of motion, in polar coordinates, as well as increasing the value of the gravitational force g . We considered two important cases to study:

Case 1: Hamilton's equation system without potential.

Case 2: Hamilton's equation system with potential.

On the other hand, in certain cases finding exact solutions with analytical methods of systems of ordinary differential equations is impossible due to their degree of complexity, so by not obtaining certain solutions it is possible to make use of suitable numerical methods that model approximate numerical solutions in a certain set of points.

The qualitative analysis that was carried out in this work, gives us an idea to know the behavior that follows the trajectory of the particle without knowing the exact solutions of the Hamilton motion system and more importantly how those trajectories are. In order to find numerical solutions of the Hamilton system that help us to graphically understand the qualitative theory developed, the numerical integrator *Runge-Kutta 4* was used, it was possible to find approximate numerical solutions of such a system, as well as graphics which describe the trajectories of the particle in \mathbb{S}^2 .

Keywords: Hamilton mechanics, dynamic systems, gravitational potential, numerical methods, solution of ordinary differential equations.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	III
Abstract	IV
1 Introducción	1
2 Mecánica, de Newton a Hamilton	4
2.1 Formalismo de Newton	4
2.2 Ecuaciones de Lagrange y principio de mínima acción	7
2.3 La transformada de Legendre y las Ecuaciones de Hamilton	11
3 Descripción de la 2-esfera con sus coordenadas	15
3.1 Las ecuaciones de Hamilton en la 2-esfera sin potencial	15
3.2 Las ecuaciones en la 2-esfera con la presencia de un potencial	18
4 $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ en un campo de fuerzas constante	22
4.1 Descripción de primeras integrales en la 2-esfera con potencial gravitatorio	22
4.2 Caso I. $p_\vartheta(t) = p_\vartheta(0) = 0$	24
4.3 Caso II. $p_\vartheta(t) = p_\vartheta(0) \neq 0$	29
4.4 Análisis cualitativo de las trayectorias	34
4.5 Estabilidad en los puntos norte y sur	42
5 Resultados	43
5.1 Runge-Kutta de orden 4	43
5.2 Gráficos	46
6 Conclusiones	55
Bibliografía	56

Capítulo 1

Introducción

El movimiento de los cuerpos es un estudio que se remonta desde hace siglos. Galileo Galilei (1564-1642) descubre las leyes que rigen la caída de los cuerpos y el movimiento de proyectiles; aportaciones que años más tarde llevó a Isaac Newton (1642-1727) a reformular esos conocimientos demostrando matemáticamente en qué consisten, dando origen a lo que se conoce como las tres leyes del movimiento de los cuerpos y su aportación de la ley de la gravitación universal, originando de este modo las ecuaciones del movimiento que rigen el formalismo de la mecánica de Newton. Joseph Luis Lagrange (1736-1813) físico y matemático, genera un cambio en la mecánica de Newton a través de aportaciones acerca del estudio de magnitudes variables llamadas *funcionales* de la forma $S[q] = \int_{t_0}^{t_1} F(q, \dot{q}, t) dt$, por medio de métodos que permiten investigar valores máximos y mínimos de dicho tipo de funcionales llamados problemas variacionales, formulando así, un principio de minimización de un funcional, que dice que la condición necesaria para que haya un extremo es la anulación de la variación de la funcional lo que llevó a encontrar ecuaciones del movimiento conocidas como las ecuaciones de Lagrange,

$$\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right) = 0,$$

las cuales expresan la condición para que dada una curva $q(t)$ sea un punto crítico de tal tipo de funcionales asociados a la función $F(q, \dot{q}, t)$. Aplicando lo anterior a una función llamada el *Lagrangiano* del sistema $L(q, \dot{q})$, donde L es una función diferenciable que depende de la posición y la velocidad garantiza que para poder describir un sistema mecánico es suficiente tener la función Lagrangiano definida como la diferencia entre la energía cinética y la potencial y el sistema de ecuaciones de Lagrange. En 1834 el matemático irlandés William Hamilton (1805-1865), establece una forma diferente de considerar la mecánica. Hamilton reformula la mecánica de Lagrange al introducir un nuevo concepto el *momento* p y q la posición como variables fundamentales. Mediante una transformada de Legendre de la función Lagrangiano, Hamilton descubrió una nueva función que más tarde se llamaría

el *Hamiltoniano* del sistema, que a diferencia de la función Lagrangiano, depende de la posición y la nueva variable que él mismo introdujo el momento. Usando el Hamiltoniano y el sistema de ecuaciones de Lagrange logró obtener un nuevo sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x}.\end{aligned}$$

Un sistema de ecuaciones de primer orden, el cual facilitaba más el estudio que el sistema de ecuaciones de Lagrange que por tener el término $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\right)$ lo convierte en un sistema de segundo orden. La ventaja de los sistemas Hamiltonianos es su riqueza de posibilidades que poseen. Gráficamente el tener a p como ordenada y a q como abscisa se denomina el espacio de fase, decimos que la trayectoria de una partícula queda representada por una curva en este espacio.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan una realidad en específico, aumentan su grado de complejidad a medida que se aproxima cada vez más al comportamiento del fenómeno en estudio, lo que origina que en la mayoría de los casos encontrar soluciones por métodos analíticos es imposible, lo que nos lleva a utilizar los métodos numéricos que calculan soluciones aproximadas por medio de un número infinito de iteraciones que mejora su eficiencia de manera más rápida al utilizar un adecuado software de simulación.

El interés por el estudio del péndulo a través de los siglos ha constituido una fuente inagotable de problemas, ideas y técnicas. El estudio del péndulo sobre un plano, estaba ligado a dos problemas fundamentales de la época: la forma de la tierra y la verificación de la ley de atracción gravitatoria. Galileo Galilei (1564, 1642) astrónomo y físico italiano, fue el primero en observar que el período del péndulo no es independiente de la amplitud inicial de la oscilación y lo hizo observando una lámpara en oscilación de la catedral de Pisa. Se sabe que no hay funciones exactas conocidas que resuelvan el problema del péndulo matemático para oscilaciones mayores donde la relación exacta para el período no es constante con la amplitud e involucra integrales elípticas [3]. Resolver integrales elípticas de manera exacta no es posible debido a su grado de complejidad, para ello se usa un software computacional para analizar las soluciones aproximadas obtenidas.

Aumentando la dificultad del problema del péndulo, es decir, ya no estudiamos el movimiento de un péndulo sobre un plano. Estudiamos su movimiento restringido sobre una superficie la 2-esfera. El objetivo de este trabajo es dar las condiciones necesarias para analizar cualitativamente sin usar métodos de aproximación, los casos en los que una partícula de masa $m > 0$ su movimiento queda restringido en \mathbb{S}^2 con la presencia de un potencial

gravitatorio g donde se pueden conocer las trayectorias y dar descripciones geométricas cualitativas de su dinámica que predicen el comportamiento de esas trayectorias obtenidas con un método numérico adecuado [5].

En el capítulo primero se motiva el estudio del formalismo de Newton describiendo los conceptos básicos de la mecánica clásica del movimiento de los cuerpos. También estudiar los conceptos del formalismo de Lagrange y de Hamilton y analizar cuáles son las condiciones en las que estas dos formulaciones son equivalentes en el espacio euclidiano.

El segundo capítulo tiene dos objetivos interesantes. El primero es describir cómo son las coordenadas de \mathbb{S}^2 para encontrar las ecuaciones de Hamilton que nos van a permitir estudiar cualitativamente el movimiento de una partícula de masa $m > 0$ restringida en la 2-esfera. El segundo es estudiar las ecuaciones de Hamilton en dos partes: la primera es analizar un sistema Hamiltoniano sin un potencial lo que origina un sistema de ecuaciones de primer orden en dichas coordenadas. La segunda es similar a la primera, analizar el mismo Hamiltoniano a diferencia que ahora con un potencial gravitatorio g presente.

El capítulo tercero tiene dos nociones importantes. La primera es analizar los casos considerando ciertas condiciones iniciales para las variables del Hamiltoniano con potencial gravitatorio. La segunda es el análisis cualitativo de las trayectorias que sigue la partícula con ciertas condiciones de las variables de dicho Hamiltoniano así como la estabilidad de los puntos críticos encontrados.

El capítulo cuarto presenta los resultados de los gráficos obtenidos gracias a la herramienta utilizada de un método numérico, es decir, un integrador numérico conocido como *Runge-Kutta de orden 4* que confirma todo el análisis cualitativo presentado en el capítulo tercero.

Capítulo 2

Mecánica, de Newton a Hamilton

2.1. Formalismo de Newton

La formulación de las leyes de la mecánica, comienza con el estudio del primer modelo matemático, sobre la velocidad, la aceleración, la caída de cuerpos, la masa y la energía desembarcando de este modo a la formulación de las ecuaciones de movimiento de Newton. Así, la mecánica de Newton se construye a partir del concepto de inercia, establecida ésta como ley fundamental del movimiento. La mecánica de Newton se rige sobre tres postulados:

1. Todo cuerpo permanece en estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme a no ser que una fuerza externa modifique su estado de movimiento. También se llama Ley de Inercia.
2. La fuerza ejercida sobre un objeto es directamente proporcional a su masa por su aceleración $F = m\ddot{x}$, donde \ddot{x} es la aceleración del objeto (el punto denota la derivada con respecto al tiempo).
3. A toda acción le corresponde una reacción de igual magnitud pero en sentido contrario tales que se anulan entre sí. También es conocida como Ley de acción y reacción.

Comenzamos con la idea básica del movimiento de una partícula. La posición de la partícula está determinada por su vector posición x en coordenadas cartesianas y sea v su vector velocidad, como sigue:

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}.$$

La cantidad de momento de la partícula es, por definición, el producto de su masa por su velocidad:

$$p := m \dot{x} \quad (2.1)$$

La mecánica de la partícula se dice que está regida por la Segunda Ley de Newton del movimiento, es decir, el movimiento de la partícula está descrito por la ecuación diferencial, cuando la masa de la partícula es constante [1],

$$F = m \frac{d\dot{x}}{dt} = m \ddot{x}$$

donde $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ se conoce como el vector aceleración de la partícula. Veamos que con la ecuación (2.1) podemos tener lo siguiente

$$F = \frac{d}{dt}(m \dot{x}) = \dot{p}.$$

Recordemos que en la expresión anterior, F representa la resultante de todas las fuerzas aplicadas sobre la partícula. Cuando la fuerza total se anula, obtenemos el correspondiente teorema de conservación de la cantidad de momento: Si $F = 0$, será $\dot{p} = 0$ y la cantidad de momento p , se conservará. Lo anterior nos dice que, el movimiento de una partícula en ausencia de fuerzas, es tal que, se conserva su cantidad de momento, es decir, su velocidad se mantiene constante, describiendo así, un movimiento rectilíneo uniforme.

Consideremos una partícula de masa m , con m constante y el trabajo que realiza una fuerza exterior F sobre ella, cuando ésta se traslada del punto 1 al punto 2, a través de una trayectoria $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. El trabajo elemental realizado por F en un desplazamiento infinitesimal dr a lo largo de γ , se define como sigue

$$W_\gamma := \int_a^b F \cdot dr \quad (2.2)$$

De lo anterior se tiene que, como el trabajo es la integral curvilínea del campo vectorial F a través de la trayectoria γ , entonces no depende de la parametrización orientada que se elija. Luego como la masa es constante, el resultado anterior tiene la siguiente forma:

$$\int_\gamma F \cdot ds = m \int_a^b \frac{d\dot{x}}{dt} \cdot \dot{x} dt = \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} \cdot \dot{x}^2 dt$$

resultando

$$W_\gamma = \frac{m}{2}(\dot{x}^2(b) - \dot{x}^2(a))$$

donde la expresión $\frac{m}{2}\dot{x}^2$ se conoce como la *Energía Cinética* de la partícula, representada

por T , es decir,

$$T := \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (2.3)$$

de donde obtenemos que el trabajo que se efectuá es igual a la variación de la energía cinética, como sigue:

$$W_\gamma = T_b - T_a. \quad (2.4)$$

Este resultado se conoce como el *Teorema de la Energía Cinética* [1].

Consideremos un sistema cerrado y conservativo. Recordemos que en éste, el trabajo realizado por la fuerza, para recorrer el camino entre dos puntos dados, es independiente de la trayectoria γ seguida para ir de uno al otro. Así para distintas trayectorias γ_1, γ_2 que tienen en común el punto inicial a y el punto final b , tenemos:

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dr = \int_{\gamma_2} F \cdot dr.$$

Es fácil ver que la condición anterior es equivalente a decir que el trabajo realizado para recorrer cualquier trayectoria cerrada, sea nula, es decir,

$$\oint_{\gamma} F \cdot dr = 0.$$

Así, consideremos una curva cualquiera $\gamma(t)$, a la que pertenecen los puntos a y b . Esta puede descomponerse en dos curvas abiertas con extremos en a y b : $\gamma = \gamma_1^+ + \gamma_2^-$. Donde γ_1^+ representa el sentido de a a b y γ_2^- el sentido de b a a , así, la integral curvilínea sobre γ y usando el resultado anterior, se tiene

$$\oint_{\gamma} F \cdot dr = \int_{\gamma_1^+} F \cdot dr + \int_{\gamma_2^-} F \cdot dr = \int_{\gamma_a^+} F \cdot dr - \int_{\gamma_b^-} F \cdot dr = 0 \quad (2.5)$$

como se quería demostrar.

Considerando el resultado anterior, podemos definir el potencial como el trabajo que realiza el sistema para realizar el movimiento de un cuerpo. Del curso de cálculo vectorial, un teorema básico establece que la condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial F tenga una trayectoria nula para cualquier curva cerrada es que sea un campo de gradientes, es decir, que existirá un campo escalar $U(r)$, función de la posición, tal que, podemos definir de esta forma al potencial [1], como sigue:

$$F := -\nabla U. \quad (2.6)$$

Al expresar a F con un gradiente, el trabajo elemental resulta ser una diferencial exacta:

$$F \cdot dr = -\nabla U \cdot dr = -dU$$

si integramos la expresión anterior para así obtener el trabajo realizado entre los puntos a y b , y usando el resultado (2.4), tenemos:

$$\begin{aligned} T_b - T_a = W_\gamma &= \int_a^b F \cdot dr \\ &= U_a - U_b. \end{aligned}$$

Lo anterior nos dice que, se conserva la suma de la energía cinética más la energía potencial:

$$T_a + U_a = T_b + U_b$$

Definimos la energía como la capacidad para realizar un trabajo. Con el resultado anterior podemos definir la *Energía total del sistema* como la suma de *energía cinética* con la *energía potencial* como sigue:

$$E := T + U = C \quad (2.7)$$

donde C , es una constante, tenemos pues, la expresión del conocido *Teorema de conservación de energía* [1].

El formalismo newtoniano permite describir de la forma más sencilla el movimiento de un sistema de partículas, para ello es necesario y suficiente dar simultáneamente las posiciones y velocidades iniciales de todas las partículas, esto permite, en principio, determinar completamente el estado del sistema, es decir, es posible determinar sus posiciones y velocidades en cualquier otro instante [3]. Desde un punto de vista matemático, esto se traduce en la existencia de una función F , conocida como fuerza, que determina la dinámica por la llamada Segunda Ley de Newton del movimiento $F = m \ddot{x}$, decimos entonces que la fuerza define lo que es un sistema mecánico newtoniano. En general, las relaciones entre las aceleraciones, las velocidades y las posiciones se les conoce como ecuaciones del movimiento o dinámica del sistema [3].

2.2. Ecuaciones de Lagrange y principio de mínima acción

El formalismo de Lagrange es otro de los puntos de partida para el estudio de la mecánica. Se basa en la observación de que existen principios variacionales. Los resultados obtenidos por este método han de ser idénticos a los que resultan de las ecuaciones de Newton. Pero no decimos que se trata de la introducción de una nueva teoría que sea independiente del formalismo newtoniano. El formalismo de Lagrange para un sistema cerrado y conser-

vativo consiste en tener dos cosas: una función L que llamaremos Lagrangiana del sistema y las ecuaciones de Lagrange.

Recordemos que para determinar la posición de un sistema de N partículas en el espacio, hace falta dar N vectores de posición, es decir, $3N$ coordenadas [3]. En general, el número de magnitudes independientes que determinan de manera unívoca la posición de un sistema se llama número de *grados de libertad* del sistema. Consideremos s magnitudes cualesquiera $q_1, q_2, q_3, \dots, q_s$ que definen completamente la posición de un sistema (de s grados de libertad) se llaman sus *coordenadas generalizadas* y sus derivadas \dot{q}_i , sus *velocidades generalizadas*. Es necesario recordar que dadas simultáneamente las coordenadas y las velocidades se determina completamente el estado del sistema y permite, en un principio, predecir el estado de movimiento del sistema. Esto es, matemáticamente, que dadas las coordenadas y las velocidades en un cierto instante del tiempo quedan definidas unívocamente las aceleraciones \ddot{q} en ese instante de tiempo [3]. La formulación más general de la ley del movimiento de los sistemas mecánicos es el *Principio de la mínima acción* (o *principio de Hamilton*) que nos dice que todo sistema mecánico está caracterizado por una función definida de la siguiente manera:

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t) \quad (2.8)$$

o $L(q, \dot{q}, t)$ (donde para simplificar designaremos por q al conjunto de todas las coordenadas q_1, q_2, \dots, q_s y por \dot{q} al conjunto de todas sus velocidades). *El principio de Hamilton* establece que podemos elegir curvas $q_s(t)$ de tal modo que podemos unir dos puntos fijos en estas curvas durante un intervalo de tiempo fijo $[a, b]$ de manera que la integral

$$S = \int_a^b L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2.9)$$

tome el menor valor posible, es decir, sea un mínimo, más general: punto crítico o estacionario. La función L se conoce como *Lagrangiana* del sistema. La Lagrangiana sólo depende de q y \dot{q} y posiblemente de t , ya que como se indicó anteriormente de que un estado de un sistema mecánico queda completamente definido si se conocen simultáneamente sus coordenadas y sus velocidades, es por lo anterior que en (2.8) no aparecen las derivadas superiores \ddot{q}, \dots . Sin complicación, supongamos que el sistema sólo cuenta con un sólo grado de libertad, sea $q = q(t)$ la curva para la cual S es precisamente un mínimo, es decir, que S crece cuando se reemplaza $q(t)$ por una función cualquiera, consideremos,

$$q(t) + \delta q(t) \quad (2.10)$$

donde $\delta q(t)$ se conoce como *variación* de la función $q(t)$, es una función que es pequeña en todo el intervalo dado $[a, b]$. Como para $t = a$ y $t = b$ todas las funciones (2.8) deben tomar

los mismos valores en las curvas $q_s(t)$, obtenemos:

$$\delta q(a) = \delta q(b) = 0. \quad (2.11)$$

Luego, el resultado que obtenemos de variar S cuando se sustituye q por $q(t) + \delta q(t)$ es:

$$\int_a^b L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_a^b L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2.12)$$

al realizar el desarrollo en serie de potencias de la diferencia de la variación anterior, comienza por términos de primer orden, luego, la condición necesaria para que exista un mínimo es la anulación de la variación, es decir, la anulación del conjunto de esos términos, se le conoce también como primera variación. Así, podemos escribir la integral (2.9) como:

$$\delta S = \delta \int_a^b L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \quad (2.13)$$

y aplicando la variación:

$$\int_a^b L(q, \dot{q}, t) dt = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0. \quad (2.14)$$

Luego, integramos por partes el segundo término del sumando y tomando en cuenta que $\delta \dot{q} = d/dt(\delta q)$ se obtiene

$$\delta S = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_a^b + \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0. \quad (2.15)$$

Tomando en cuenta la condición (2.14) el primer término de esta expresión desaparece. Nos queda una integral, que debe anularse para todo valor de δq , lo anterior es posible solamente si el integrando es idénticamente nulo y 2.15 es equivalente a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (2.16)$$

En casos de que en el sistema existan varios grados de libertad, las s funciones diferentes $q(t)$ deben variar independientemente. Luego, obtenemos s ecuaciones de la forma siguiente:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (2.17)$$

En Mecánica, las ecuaciones encontradas se les conoce como *Ecuaciones de Lagrange* [3]. Matemáticamente las ecuaciones 2.17 forman un sistema de s ecuaciones diferenciales de segundo orden con s funciones desconocidas $q_i(t)$. Su solución general del sistema

anterior, contiene $2s$ constantes arbitrarias, para definir completamente el movimiento del sistema mecánico, es necesario que se conozcan las condiciones iniciales, es decir, los valores iniciales de las coordenadas y de las velocidades. Si se puede conocer la Lagrangiana del sistema mecánico dado, entonces las ecuaciones (2.17) son las ecuaciones del movimiento del sistema, es decir, establecen la relación entre las aceleraciones, las velocidades y las coordenadas del sistema.

Consideremos ahora un sistema *cerrado*, es decir, partículas que interactúan entre sí, pero que se encuentran aisladas de otros cuerpos. Así, definimos a la Lagrangiana de la siguiente manera:

$$L := \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - U(x_1, x_2, \dots), \quad (2.18)$$

donde hemos agregado dos funciones. La suma:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$$

como ya sabemos, es la *Energía Cinética*, y una cierta función de las coordenadas, denominando esta función por $-U(x_i)$, (donde x_i es el vector de posición de la partícula i) se conoce como la *Energía Potencial*. La expresión (2.18) es la forma general de la Lagrangiana de un sistema cerrado con conservación de energía mecánica [3].

Veamos que, el movimiento de un sistema en un campo exterior se va describir por una Lagrangiana, digamos, del tipo usual, con una única diferencia, que ahora, la Energía Potencial será una función explícita del tiempo, esto es, su forma general será:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x, t),$$

así, su respectiva ecuación de movimiento, será:

$$m \ddot{x} = - \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Luego, si evaluamos la Lagrangiana (2.18) definida en las ecuaciones de Lagrange obtenemos,

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = - \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (2.19)$$

Esto es, las ecuaciones de Lagrange se reducen a la Segunda ley de Newton $F = m\ddot{x}$.

Del resultado anterior concluimos que el formalismo de Lagrange, con la Lagrangiana dada, trae consigo las ecuaciones de Newton de la mecánica. Para profundizar más sobre el formalismo lagrangiano revisar [3] y [1].

2.3. La transformada de Legendre y las Ecuaciones de Hamilton

El otro punto de partida del estudio de la mecánica, es el *Formalismo Hamiltoniano*. En este sentido el formalismo hamiltoniano es más fundamental que el formalismo de Newton. En el aspecto que se basa directamente en el concepto de energía de mecánica cuántica. Sabemos que la fusión de la mecánica cuántica y la relatividad general sigue siendo uno de los principales problemas pendientes de la mecánica. Vimos que un estado mecánico del sistema queda completamente determinado dando simultáneamente sus coordenadas y velocidades generalizadas. Pero, éste no es el único camino posible, veremos que la descripción del estado de un sistema queda determinada en función de sus coordenadas y momentos generalizados, y que otorga un gran número de ventajas y para ello es necesario introducir la deducción de las ecuaciones de movimiento correspondientes. Para ello, vamos a estudiar la transformada de Legendre, con la finalidad de poder construir una nueva función f , que nos ayude a dar el paso de un conjunto de variables independientes a otro. En la teoría Lagrangiana, la transformada de Legendre aplicada al Lagrangiano L da lugar a una nueva función llamada *Hamiltoniana* y que es la base para introducir un nuevo formalismo en la mecánica [3].

Veamos cómo se deduce la transformada de Legendre, posteriormente veremos cómo se aplica dentro del formalismo lagrangiano.

Dada una función F de n variables independientes u_1, \dots, u_n ,

$$F(u_1, \dots, u_n) := F(u_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.20)$$

su diferencial total viene dada por:

$$dF(u_i) = \frac{\partial F}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial F}{\partial u_2} du_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial u_n} du_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(u_i)}{\partial u_j} du_j \quad (2.21)$$

y si se hace:

$$v_i = \frac{\partial F(u_i)}{\partial u_i}. \quad (2.22)$$

Para garantizar que la Transformada de Legendre esta bien definida, es suficiente demostrar que la matriz *Hessiana* es definida positiva. Recordemos que la matriz Hessiana está formada por las segundas derivadas $Hess(F)_{ij} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right)$, $i, j = 1, \dots, n$. Entonces podemos escribir,

$$dF(u_i, t) = \sum_{i=1}^n v_i du_i + \frac{\partial F}{\partial t} dt. \quad (2.23)$$

Por otro lado, podemos escribir

$$d\left(\sum_{i=1}^n u_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n u_i dv_i + \sum_{i=1}^n v_i du_i. \quad (2.24)$$

Ahora al restar miembro a miembro (2.23) de (2.24) se obtiene,

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{i=1}^n u_i v_i\right) - dF(u) &= \sum_{i=1}^n u_i dv_i + \sum_{i=1}^n v_i du_i - \sum_{i=1}^n v_i du_i, \\ d\left[\sum_{i=1}^n u_i v_i - F(u)\right] &= \sum_{i=1}^n u_i dv_i. \end{aligned}$$

finalmente tenemos

$$dG(v) = \sum_{i=1}^n u_i dv_i, \quad (2.25)$$

donde $G(v) = G(v_1, \dots, v_n)$ es una nueva función que se define como la *la Transformación de Legendre* para n variables independientes y la definimos como sigue,

$$G(v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i - F(u_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.26)$$

Ahora consideremos un sistema que está descrito por una función de Lagrange con n grados de libertad $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, y le aplicaremos una transformada de Legendre para obtener la función Hamiltoniana.

Hamilton (1805-1865) propuso describir el sistema mediante las variables (q, p, t) donde los p_i son los momentos generalizados canónicamente conjugados a las coordenadas generalizadas q_i definidos anteriormente por:

$$p_i := \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (2.27)$$

Aquí, en lugar de usar las velocidades generalizadas \dot{q}_i , emplearemos a los momentos conjugados. Notemos primero que de las ecuaciones de Lagrange se tiene,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} \Rightarrow \frac{d}{dt}(p_i) = \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (2.28)$$

Consideremos la función de Lagrange de la forma $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, la

diferencial total de esta función está dada como sigue

$$\begin{aligned}
 dL &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\
 &= \sum_{i=1}^n (\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \\
 &= \sum_{i=1}^n (d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i + \dot{p}_i dq_i) + \frac{\partial L}{\partial t} dt.
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Pasando al lado izquierdo el primer término del lado derecho de la igualdad y multiplicando por menos uno, tenemos

$$d \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \right) = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{2.30}$$

En esta parte conviene recapitular. Lo que se quiere es hacer una nueva formulación en donde en lugar de trabajar con las velocidades generalizadas se convenga trabajar con los momentos conjugados. Hagamos énfasis que en el lado izquierdo de (2.30) se tiene una ecuación diferencial exacta y que en el lado derecho de la misma, no aparecen diferenciales en \dot{q}_i . Esto nos dice que el lado derecho es una función que sólo depende de las coordenadas y momentos y no de las velocidades generalizadas. Definamos entonces

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L =: H(q_1, q_2, \dots, p_1, p_2, \dots, p_n, t). \tag{2.31}$$

Debemos tener cuidado, ya que el lado izquierdo de la igualdad no es en sí la función de Hamilton. Esta es por definición $H = H(q_i, p_i, t)$ (el lado derecho), cuya diferencial es

$$\begin{aligned}
 dH &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\
 &= d \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt.
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Dado que estamos trabajando con coordenadas y momentos independientes entonces, para que se de la igualdad anterior, los coeficientes de las diferenciales del lado izquierdo y

derecho deben ser las mismas. Esto es, se debe cumplir que:

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t}.\end{aligned}\tag{2.33}$$

Las dos primeras ecuaciones son las interesantes, por ejemplo si L no depende explícitamente del tiempo, la tercera ecuación no aparece, por eso es más conveniente definir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}.\end{aligned}\tag{2.34}$$

Las *ecuaciones de Hamilton* (2.34), a causa de su sencillez y simetría, se les llama *ecuaciones canónicas*. Se hace énfasis en la simetría que guardan estas ecuaciones y por eso cada par de variables (p_i, q_i) , constituyen un conjunto de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden, entre las $2n$ funciones incógnitas p_i, q_i que sustituyen a las n ecuaciones de segundo orden obtenidas ya, por el método de Lagrange. Luego hay que hacer notar el hecho de que pasar de la formulación de Lagrange a la formulación de Hamilton se hizo a través de una *transformada de Legendre* (anteriormente deducida paso a paso) en donde la podemos resumir como sigue, dada una función de Lagrange se obtiene la función de Hamilton como:

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L\tag{2.35}$$

La transformada de Legendre es el puente para pasar de la formulación Lagrangiana a la formulación Hamiltoniana de la mecánica, mediante esta transformada. Un sistema mecánico con un sistema de ecuaciones con cierta función Lagrangiana L se transforma (sin perder la información) en una función H que se define como la transformada de Legendre de L y donde también se transforman las velocidades generalizadas en momentos generalizados. Para una mayor ampliación del tema, el análisis anterior puede consultarse en [3].

Capítulo 3

Descripción de la 2-esfera con sus coordenadas

3.1. Las ecuaciones de Hamilton en la 2-esfera sin potencial

Queremos calcular las ecuaciones de *Hamilton* para la esfera \mathbb{S}^2 , para ello es necesario describir cómo son las coordenadas. Para un análisis de lo que a continuación se estudia, se puede revisar un trabajo similar en [7]. Tomemos de la \mathbb{S}^2 las cartas formadas por las parametrizaciones en coordenadas polares:

$$\psi(\vartheta, \varphi) := (\cos\vartheta \cos\varphi, \sin\vartheta \cos\varphi, \sin\varphi) \quad (3.1)$$

con $(\vartheta, \varphi) \in (\vartheta_0 - \pi, \vartheta_0 + \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Para un $r(t) \in \mathbb{S}^2$ tomemos la parametrización en coordenadas polares de (3.1) como sigue:

$$r(t) := \psi(\vartheta, \varphi)(\cos\vartheta(t) \cos\varphi(t), \sin\vartheta(t) \cos\varphi(t), \sin\varphi(t)). \quad (3.2)$$

se desea obtener la derivada con respecto a t como sigue, definimos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vartheta} &:= \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}(\vartheta, \varphi) = (-\sin\vartheta \cos\varphi, \cos\vartheta \cos\varphi, 0), \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} &:= \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}(\vartheta, \varphi) = (-\cos\vartheta \sin\varphi, -\sin\vartheta \sin\varphi(t), \cos\varphi). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Usando (3.2) y (3.3) tenemos que para cada t , la curva $r(t)$ tiene como vector tangente:

$$\begin{aligned}\dot{r}(t) &= \frac{d}{dt} \psi(\vartheta, \varphi) \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}(\vartheta(t), \varphi(t)) \dot{\vartheta}(t) + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}(\vartheta(t), \varphi(t)) \dot{\varphi}(t) \\ &= \dot{\vartheta}(t) \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \dot{\varphi}(t) \frac{\partial}{\partial \varphi}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Consideremos la métrica g inducida de \mathbb{R}^3 dada por:

$$\begin{aligned}g_{\vartheta\vartheta} &:= \left\langle \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = \cos^2 \varphi \\ g_{\vartheta\varphi} = g_{\varphi\vartheta} &:= \left\langle \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0 \\ g_{\varphi\varphi} &:= \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = 1.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Luego, podemos obtener la energía cinética del sistema usando (3.4) y (3.5) como sigue:

$$\begin{aligned}T(r, \dot{r}) &= \frac{m}{2} \|\dot{r}\|^2 \\ &= \frac{m}{2} \left\| \frac{\partial}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta}(t) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \dot{\varphi}(t) \right\|^2 \\ &= \frac{m}{2} \left(\left\| \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right\|^2 \dot{\vartheta}(t)^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\|^2 \dot{\varphi}(t)^2 \right) \\ &= \frac{m}{2} (\cos^2 \varphi(t) \dot{\vartheta}(t)^2 + \dot{\varphi}(t)^2).\end{aligned}\tag{3.6}$$

Con el resultado anterior podemos obtener el *Lagrangiano* del sistema, que sabemos por el Capítulo 2, se define como la diferencia entre la *Energía cinética* y la *Energía Potencial* del sistema, supóngamos que el sistema no tiene energía potencial, por lo que el *Lagrangiano* es la energía cinética en coordenadas polares como sigue:

$$\begin{aligned}L(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) &:= T(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) \\ &= \frac{m}{2} (\cos^2 \varphi(t) \dot{\vartheta}(t)^2 + \dot{\varphi}(t)^2).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Luego, podemos obtener los momentos generalizados en las mismas coordenadas,

$$\begin{aligned} p_\varphi(t) &:= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \dot{\varphi}(t), \\ p_\vartheta(t) &:= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = m \cos^2 \varphi(t) \dot{\vartheta}(t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

De las ecuaciones anteriores podemos despejar las velocidades y tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \frac{1}{m} p_\varphi(t), \\ \dot{\vartheta}(t) &= \frac{p_\vartheta(t)}{m \cos^2 \varphi(t)}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

También por el Capítulo 2, sabemos que el *Hamiltoniano* en coordenadas locales está definido como la transformada de Legendre del Lagrangiano, entonces podemos construir nuestro Hamiltoniano en coordenadas polares como sigue:

$$\begin{aligned} H(\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi) &= p_\varphi \dot{\varphi} + p_\vartheta \dot{\vartheta} - L(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) \\ &= \frac{1}{m} p_\varphi^2 + \frac{1}{m \cos^2 \varphi} p_\vartheta^2 - \frac{m}{2} \left[\cos^2 \varphi \left(\frac{p_\vartheta}{m \cos^2 \varphi} \right)^2 + \left(\frac{1}{m} p_\varphi \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{m} p_\varphi^2 + \frac{1}{m \cos^2 \varphi} p_\vartheta^2 - \left[\frac{p_\vartheta^2}{2m \cos^2 \varphi} + \frac{p_\varphi^2}{2m} \right] \\ &= \frac{1}{2m} \left(\frac{p_\vartheta^2}{\cos^2 \varphi} + p_\varphi^2 \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Del resultado anterior obtenemos las ecuaciones de *Hamilton* de movimiento [7], dadas por

$$\begin{aligned} \dot{p}_\vartheta(t) &= - \frac{\partial H}{\partial \vartheta} (\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t)) = 0, \\ \dot{p}_\varphi(t) &= - \frac{\partial H}{\partial \varphi} (\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t)) = - \left(\frac{\tan \varphi(t)}{m \cos^2 \varphi(t)} p_\vartheta^2(t) \right), \end{aligned} \quad (3.11)$$

y las trayectorias [7], están dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta} (\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t)) = \frac{p_\vartheta(t)}{m \cos^2 \varphi(t)}, \\ \dot{\varphi}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} (\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t)) = \frac{1}{m} p_\varphi(t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

De esta forma, hemos obtenido las ecuaciones del movimiento de un sistema mecánico sobre la \mathbb{S}^2 , revisar [7]. En la sección siguiente, vamos a analizar cómo son las ecuaciones en este sistema si definimos un potencial que implique algunas transformaciones en el sistema.

3.2. Las ecuaciones en la 2-esfera con la presencia de un potencial

Consideremos como antes, una partícula de masa $m > 0$ que realiza un movimiento restringido en \mathbb{S}^2 , recordemos la parametrización en coordenadas polares, donde parametrizamos la esfera con $\psi(\vartheta, \varphi) = (\cos\vartheta \cos\varphi, \sin\vartheta \cos\varphi, \sin\varphi)$ con $(\vartheta, \varphi) \in (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ahora con una fuerza gravitacional g [7].

Dada una fuerza en \mathbb{R}^3 y \mathbb{S}^2 , queremos encontrar la fuerza potencial correspondiente en coordenadas polares:

$$F_{\mathbb{R}^3} = -(0, 0, mg), \quad m, g \in (0, \infty) \text{ constantes,}$$

$$F_{\mathbb{S}^2} = -mg(\cos\varphi) \frac{\partial}{\partial\varphi},$$

ver Figura 3.1:

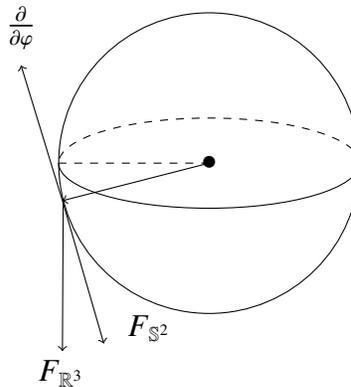


Figura 3.1: Fuerza potencial

Sea $(\cos\vartheta \cos\varphi, \sin\vartheta \cos\varphi, \sin\varphi) \in \mathbb{S}^2$ y $p_0 \in \mathbb{S}^2$ fijo. Consideremos un camino diferenciable $c : [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^2$ tal que $c(0) = p_0$, $c(T) = (\cos\vartheta \cos\varphi, \sin\vartheta \cos\varphi, \sin\varphi)$, en particular $\varphi(T) = \varphi$. Para cada t la curva c tiene como vector tangente a $\dot{c}(t) = \frac{\partial}{\partial\vartheta} \dot{\vartheta}(t) +$

$\frac{\partial}{\partial \varphi} \dot{\varphi}(t)$. Usando (2.2), podemos calcular lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 W_c &= \int_c \vec{F}_{\mathbb{S}^2} dc \\
 &= \int_0^T \left\langle mg \cos \varphi(t) \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta}(t) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \dot{\varphi}(t) \right\rangle dt \\
 &= mg \int_0^T \cos \varphi(t) \left(\left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right\rangle \dot{\vartheta}(t) + \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle \dot{\varphi}(t) \right) dt \\
 &= mg \int_0^T (\cos \varphi(t) \cdot \dot{\varphi}(t)) dt \\
 &= mg \int_0^T \cos \varphi(t) \cdot \dot{\varphi}(t) dt \\
 &= mg \int_0^T \frac{d}{dt} (\sin \varphi(t)) dt \\
 &= mg (\sin \varphi(T) - \sin \varphi(0)) \\
 &= mg \cdot \sin \varphi(T) - mg \cdot \sin \varphi(0)
 \end{aligned}$$

Observamos que W_c no depende del camino c , entonces la energía potencial

$$U(\vartheta, \varphi) := mg \sin(\varphi), \quad \forall \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \vartheta \in \mathbb{R} \quad (3.13)$$

está bien definida.

Ahora podemos definir el *Lagrangiano* del sistema. Considerando que éste se define como vimos en el Capítulo 2, como la diferencia entre la energía cinética y potencial, en coordenadas polares tenemos:

$$\begin{aligned}
 L(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) &:= T(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) - U(\varphi) \\
 &= \frac{m}{2} \left(\cos^2 \varphi(t) \dot{\vartheta}(t)^2 + \dot{\varphi}(t)^2 \right) - mg \sin(\varphi).
 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Luego podemos obtener los momentos generalizados en estas coordenadas como sigue:

$$\begin{aligned}
 p_\varphi &:= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \dot{\varphi}(t), \\
 p_\vartheta &:= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = m \cos^2 \varphi(t) \cdot \dot{\vartheta}(t).
 \end{aligned} \quad (3.15)$$

De las ecuaciones anteriores despejamos las velocidades y obtenemos:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{1}{m} p_{\varphi}, \\ \dot{\vartheta} &= \frac{p_{\vartheta}}{m \cos^2 \varphi(t)}.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Veamos que podemos obtener el *Hamiltoniano*, usando la *Transformada de Legendre del Lagrangiano* como sigue:

$$\begin{aligned}H(\vartheta, \varphi, p_{\vartheta}, p_{\varphi}) &= p_{\varphi} \dot{\varphi} + p_{\vartheta} \dot{\vartheta} - L(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) \\ &= \left[\frac{1}{m} p_{\varphi}^2 + \frac{1}{m \cos^2 \varphi(t)} p_{\vartheta}^2 - \left[\frac{m}{2} \left[\cos^2 \varphi(t) \left(\frac{p_{\vartheta}}{m \cos^2 \varphi(t)} \right)^2 + \left(\frac{1}{m} p_{\varphi} \right)^2 \right] - mg \sin \varphi(t) \right] \right] \\ &= \frac{1}{m} p_{\varphi}^2 + \frac{1}{m \cos^2 \varphi(t)} p_{\vartheta}^2 - \left[\frac{p_{\vartheta}^2}{2m \cos^2 \varphi(t)} + \frac{p_{\varphi}^2}{2m} - mg \sin \varphi(t) \right] \\ &= \frac{1}{m} p_{\varphi}^2 + \frac{1}{m \cos^2 \varphi(t)} p_{\vartheta}^2 - \frac{p_{\vartheta}^2}{2m \cos^2 \varphi(t)} - \frac{p_{\varphi}^2}{2m} + mg \sin \varphi(t) \\ &= \frac{1}{2m} \left(\frac{p_{\vartheta}^2}{\cos^2 \varphi(t)} + p_{\varphi}^2 \right) + mg \sin(\varphi).\end{aligned}$$

Hemos obtenido así, el *Hamiltoniano* del sistema como en la sección anterior, sólo que ahora con un potencial gravitacional g presente [7], como sigue:

$$H(\vartheta, \varphi, p_{\vartheta}, p_{\varphi}) = \frac{1}{2m} \left(\frac{p_{\vartheta}^2}{\cos^2 \varphi(t)} + p_{\varphi}^2 \right) + mg \sin \varphi(t).\tag{3.17}$$

Recordemos las ecuaciones de Hamilton en la esfera \mathbb{S}^2 como en (3.11), pero ahora con la presencia de un potencial g , dadas por

$$\begin{aligned}\dot{p}_{\vartheta}(t) &= - \frac{\partial H}{\partial \vartheta}(\vartheta(t), \varphi(t), p_{\vartheta}(t), p_{\varphi}(t)) = 0, \\ \dot{p}_{\varphi}(t) &= - \frac{\partial H}{\partial \varphi}(\vartheta(t), \varphi(t), p_{\vartheta}(t), p_{\varphi}(t)) = - \left(\frac{\tan \varphi(t)}{m \cos^2 \varphi(t)} p_{\vartheta}^2(t) + mg \cos \varphi(t) \right).\end{aligned}\tag{3.18}$$

Por otro lado tenemos que las trayectorias están dadas como en (3.12)

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_{\vartheta}}(\vartheta(t), \varphi(t), p_{\vartheta}(t), p_{\varphi}(t)) = \frac{p_{\vartheta}(t)}{m \cos^2 \varphi(t)}, \\ \dot{\varphi}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi}}(\vartheta(t), \varphi(t), p_{\vartheta}(t), p_{\varphi}(t)) = \frac{1}{m} p_{\varphi}(t).\end{aligned}\tag{3.19}$$

Haber encontrado las ecuaciones de movimiento en \mathbb{S}^2 con un potencial gravitacional g nos lleva a realizar en el Capítulo 4 un análisis para encontrar puntos de equilibrio, primeras integrales, también para estudiar el tipo de trayectorias que realiza la partícula y describir su movimiento dependiendo de las condiciones iniciales, si existen cantidades conservadas, etc.

Capítulo 4

$\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ en un campo de fuerzas constante

4.1. Descripción de primeras integrales en la 2-esfera con potencial gravitatorio

La noción más importante para el estudio cualitativo es la de estabilidad de las soluciones de equilibrio de un sistema, ya que el conocimiento del comportamiento de los puntos de equilibrio puede bastar para tener una idea del comportamiento del resto de soluciones del sistema.

Recordemos la partícula de masa $m > 0$ que realiza un movimiento restringido en \mathbb{S}^2 donde tenemos la parametrización de la esfera dada por

$$\psi(\vartheta(t), \varphi(t)) = (\cos\vartheta(t) \cos\varphi(t), \sin\vartheta(t) \cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$$

con $(\vartheta, \varphi) \in (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Consideremos el *Lagrangiano* dado por la ecuación (3.14), como sigue:

$$L(\vartheta, \varphi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} (\cos^2 \varphi(t) \dot{\vartheta}(t)^2 + \dot{\varphi}(t)^2) - mg \sin(\varphi)$$

y el *Hamiltoniano* dado por la ecuación (3.17):

$$H(\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi) = \frac{1}{2m} \left(\frac{p_\vartheta^2}{\cos^2 \varphi} + p_\varphi^2 \right) + mg \sin \varphi.$$

Veamos que el *Hamiltoniano* no depende de la coordenada ϑ , entonces $\dot{p}_\vartheta = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = 0$. Podemos escribir $H(\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi) = H(\varphi, p_\vartheta, p_\varphi)$ y tenemos que, para todo $t \in [0, T]$, $p_\vartheta = a$, con a constante. Decimos entonces que tenemos una primera integral para el

sistema, porque p_ϑ es conservado, para toda solución de las ecuaciones de Hamilton.

Otra magnitud conservada es el Hamiltoniano mismo.

Sea $(\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t))$, $t \in [T_0, T_1]$, una solución de las ecuaciones de Hamilton (2.34).

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t)) &= \frac{\partial H}{\partial \vartheta}(\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t)) \dot{\vartheta}(t) + \frac{\partial H}{\partial \varphi}(\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) + \\ &+ \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta}(\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t)) \dot{p}_\vartheta(t) + \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}(\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t)) \dot{p}_\varphi(t) \\ &= -\dot{p}_\vartheta(t) \dot{\vartheta}(t) - \dot{p}_\varphi(t) \dot{\varphi}(t) + \dot{\vartheta}(t) \dot{p}_\vartheta(t) + \dot{\varphi}(t) \dot{p}_\varphi(t) \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto H es constante a lo largo de las trayectorias definidas por las soluciones de las ecuaciones de Hamilton. Se puede escribir $H = T + U$, donde

$$T(\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi) = \frac{1}{2m} \left(\frac{p_\vartheta^2}{\cos^2(\varphi)} + p_\varphi^2 \right)$$

es la energía cinética y

$$U(\varphi) = mg \sin(\varphi) + E_0$$

es la energía potencial con una constante de normalización $E_0 \in \mathbb{R}$ que no afecta las ecuaciones de Hamilton. Como

$$\begin{aligned} H(\vartheta, \varphi, p_\vartheta, p_\varphi) &= \frac{1}{2m} \left(\frac{p_\vartheta^2}{\cos^2 \varphi} + p_\varphi^2 \right) + mg \sin \varphi + E_0 \\ &\geq mg \sin(\varphi) + E_0 \\ &= H(\vartheta, \varphi, 0, 0), \quad \forall \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \vartheta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

y tenemos que:

$$\begin{aligned} &\inf \{H(\vartheta, \varphi, 0, 0) : \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\} \\ &= \inf \{mg \sin(\varphi) + E_0 : \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\} \\ &= -mg + E_0, \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Se puede definir $E_0 := mg$ tal que $H \geq 0$ y $\lim_{\varphi(t) \rightarrow -\frac{\pi}{2}} H(\vartheta, \varphi, 0, 0) = 0$.

Luego

$$\begin{aligned} E &= H(\vartheta(t), \varphi(t), p_{\vartheta}(t), p_{\varphi}(t)) \\ &= \frac{1}{2m} \left(\frac{p_{\vartheta}^2}{\cos^2 \varphi(t)} + p_{\varphi}^2 \right) + mg \sin \varphi(t) + mg \end{aligned} \quad (4.1)$$

representa la energía del sistema con un mínimo $E = 0$ cuando el sistema esté en reposo en el punto $\lim_{\varphi(t) \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \psi(\vartheta, \varphi) = (0, 0, -1)$.

A continuación queremos estudiar todos los posibles casos y describir cómo es la trayectoria que realiza la partícula en dichos casos.

4.2. Caso I. $p_{\vartheta}(t) = p_{\vartheta}(0) = 0$

Lo anterior implica que $\dot{\vartheta}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_{\vartheta}} = \frac{p_{\vartheta}(t)}{m \cos^2 \varphi(t)} = 0$, luego $\vartheta(t) := \vartheta_0 = a, \forall t$ con a una constante. Reparametrizando $\vartheta \mapsto \vartheta_0$ podemos asumir sin pérdida de generalidad (aplicamos una rotación) $\vartheta(t) = 0 \forall t$, entonces el movimiento ocurre en el plano

$$\begin{aligned} &\mathbb{S}^2 \cap \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\cos \alpha, 0, \sin \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &\cong \mathbb{S}^1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, basta considerar una sola coordenada

$$r(\varphi) = (\cos \varphi, 0, \sin \varphi), \varphi \in \mathbb{R}$$

con unicidad en intervalos abiertos de longitud 2π .

Con las coordenadas anteriores se desea encontrar las ecuaciones de Hamilton. Consideremos el *Lagrangiano*

$$\begin{aligned} L(\varphi, \dot{\varphi}) &= T - U, \\ T(\varphi, \dot{\varphi}) &= \frac{m}{2} \dot{\varphi}^2, \\ U(\varphi) &= mg \sin \varphi + E_0, \end{aligned}$$

donde elegimos la constante E_0 tal que $U(-\frac{\pi}{2}) = \inf \{U(\varphi) : \varphi \in \mathbb{R}\} = 0$. Entonces $L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} \dot{\varphi}^2 - (mg \sin \varphi + mg)$ y

$$p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\dot{\varphi}. \quad (4.2)$$

Podemos obtener el *Hamiltoniano* correspondiente para estas coordenadas, y como el Hamiltoniano no depende de la coordenada ϑ , podemos escribir lo siguiente

$$H(\varphi, p_\varphi) = \frac{p_\varphi^2}{2m} + mg \sin \varphi + mg,$$

con el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{1}{m} p_\varphi, \\ \dot{p}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -mg \cos \varphi, \end{aligned} \quad (4.3)$$

pero por (4.2) tenemos que $\dot{p}_\varphi = m\ddot{\varphi}(t)$. Sustituyendo en el sistema (4.3) para $\dot{p}_\varphi + mg \cos \varphi(t) = 0$, por las ecuaciones de Hamilton, tenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} m\ddot{\varphi} + mg \cos \varphi(t) &= 0, \\ \ddot{\varphi} &= -g \cos \varphi. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Recordemos que $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, entonces trasladando en $\frac{\pi}{2}$ tenemos $\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin \alpha$, donde definimos $\alpha := \varphi + \frac{\pi}{2}$, luego $\varphi = \alpha - \frac{\pi}{2}$ y $\ddot{\alpha} = \ddot{\varphi}$, entonces por (4.4) tenemos

$$\ddot{\alpha} = -g \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -g \sin \alpha, ;$$

por lo tanto tenemos

$$\ddot{\alpha} + g \sin \alpha = 0. \quad (4.5)$$

Esta ecuación diferencial es conocida por describir el movimiento de un péndulo matemático con una constante de gravitación g [7].

Consideremos como un *caso especial* al Caso I, los *Puntos de equilibrio*.

Nos interesa la condición inicial

$$\dot{\vartheta}(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0 \quad (4.6)$$

lo anterior implica que $p_\vartheta(t) = 0$, $p_\varphi(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, la partícula en este caso no se mueve, es decir, tenemos un punto de equilibrio. Supongamos que $\varphi(0) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\vartheta(0) \in \mathbb{R}$, sea un punto de equilibrio, como $p_\vartheta(t) = p_\vartheta(0) = 0$, por (4.2) tenemos $0 = \dot{p}_\vartheta(t) = mg \cos \varphi$ con $\varphi(t) = \varphi(0) \in \{\pm \frac{\pi}{2}\}$ entonces $(\vartheta(t), \varphi(t)) = (\vartheta(0), \varphi(0)) \in \{(\vartheta(0), -\frac{\pi}{2}), (\vartheta(0), \frac{\pi}{2})\}$, con $\vartheta(0)$ arbitrarios, implica que tenemos dos puntos: *polo norte* y *polo sur* de \mathbb{S}^2 . Considere-

mos $(\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(t), p_\varphi(t)) = (\vartheta(0), \pm\frac{\pi}{2}, 0, 0)$ con

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta}(t) &= 0, \\ \dot{\varphi}(t) &= 0, \\ \dot{p}_\vartheta(t) &= 0, \\ \dot{p}_\varphi(t) &= 0,\end{aligned}$$

y observamos que es una solución a las ecuaciones de Hamilton.

Caso 1.1: $E = 0$

En este caso se tiene,

$$0 = H(\varphi(t), p_\varphi(t)) = \frac{p_\varphi^2(t)}{2m} + mg \sin(\varphi(t)) + mg, \quad (4.7)$$

por lo tanto, $p_\varphi(t) = 0$ y $\varphi(t) = -\frac{\pi}{2} \bmod 2\pi, \forall t \in \mathbb{R}$. Observamos que las funciones $\varphi(t) = -\frac{\pi}{2}, p_\varphi(t) = 0$ satisfacen las ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{aligned}0 = \dot{\varphi}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}(\varphi(t), p_\varphi(t)) = \frac{1}{m} p_\varphi(t) \\ 0 = \dot{p}_\varphi(t) &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -mg \cos(\varphi(t))\end{aligned}$$

Esta solución corresponde a un punto de equilibrio $(\varphi(t), p_\varphi(t)) = (-\frac{\pi}{2}, 0) \forall t \in \mathbb{R}$. Veremos que este punto de equilibrio es estable. Si $\epsilon \in (0, 1)$ y $E = mg\epsilon$, entonces por la conservación de energía,

$$H(\varphi(t), p_\varphi(t)) = mg\epsilon.$$

Sea $\varphi_\epsilon \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ definido por $\sin(\varphi_\epsilon) = (\epsilon - 1)$. Como $mg\epsilon = \frac{p_\varphi^2}{2m} + mg \sin(\varphi(t)) + mg$, y $\frac{p_\varphi^2}{2m} \geq 0$, se tiene que $\varphi(t) \in [-\pi - \varphi_\epsilon, \varphi_\epsilon]$ con $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \varphi_\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \pi - \varphi_\epsilon = -\frac{\pi}{2}$, entonces las trayectorias se quedan cerca del punto de equilibrio.

Caso 1.2: $0 < E < 2mg$

Sea $\varphi_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tal que $\sin(\varphi_0) = \frac{E}{mg} - 1$. Como $H(\varphi(t), p_\varphi(t)) = E$ para toda solución de las ecuaciones de Hamilton y $\frac{p_\varphi^2}{2m} \geq 0$, tenemos $\varphi(t) \in [-\pi - \varphi_0, \varphi_0] \forall t$. Supongamos que

$\varphi(t_0) = -\pi - \varphi_0$. Entonces

$$\begin{aligned} E &= \frac{p_\varphi^2(t_0)}{2m} + mg(\sin(-\pi - \varphi_0) + 1) \\ &= \frac{p_\varphi^2(t_0)}{2m} + mg(\sin(\varphi_0) + 1) \\ &= \frac{p_\varphi^2(t_0)}{2m} + E, \end{aligned}$$

por lo tanto $\dot{\varphi}(t) = \frac{p_\varphi(t_0)}{m} = 0$.

Además, $\ddot{\varphi}(t) = -g \cos(\varphi(t)) > 0 \forall t \geq t_0$ tal que $\varphi(t) \in \left[-\pi - \varphi_0, -\frac{\pi}{2}\right)$. Entonces la función $\dot{\varphi}(t)$ crece, aumentando su velocidad $\dot{\varphi}(t)$ y alcanzando la velocidad máxima en t_1 cuando $\varphi(t)$ llega al punto $\varphi(t_1) = -\frac{\pi}{2}$.

Luego, por $\dot{\varphi}(t_1) > 0$ y la continuidad de $\varphi(t)$ y $\dot{\varphi}(t)$, existe un $\delta > 0$ tal que $\varphi(t_2) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \varphi_0\right)$ y $\dot{\varphi}(t_2) > 0 \forall t_2 \in (t_1, t_1 + \delta)$.

Consideremos las condiciones iniciales $\varphi(t_2) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \varphi_0\right)$ y $\dot{\varphi}(t_2) > 0$. Demostraremos que $\varphi(t)$ alcanza el punto φ_0 en tiempo finito $t_3 > t_2$. Supongamos que $\varphi(t) < \varphi_0 \forall t \geq t_2$. Como $\dot{\varphi}(t_2) > 0$ y $\dot{\varphi}(t)$ es continua, existe un $\epsilon > 0$ tal que $\dot{\varphi}(t) > 0 \forall t \in [t_2, t_2 + \epsilon)$, entonces $\varphi(t)$ es creciente $\forall t \in [t_2, t_2 + \epsilon)$ y deja de ser creciente en el punto $\tau \geq t_2 + \epsilon$ tal que $\dot{\varphi}(\tau) = 0$ y $\dot{\varphi}(t) > 0 \forall t \in [t_2, \tau)$. Luego, como $\varphi(t)$ es creciente en $[t_2, \tau)$, tendremos $\varphi(t) \geq \varphi(t_2) > -\frac{\pi}{2} > -\pi - \varphi_0 \forall t \in [t_2, \tau)$. Por otro lado, $\dot{\varphi}(\tau) = 0$ implica $p_\varphi(\tau) = m\dot{\varphi}(\tau) = 0$, entonces $E = mg(\sin(\varphi(\tau)) + 1)$, pero esto solamente es posible si $\varphi(\tau) \in \{\varphi_0, -\pi - \varphi_0\}$. Además, como $\varphi(t) \geq \varphi(t_2) > -\pi - \varphi_0 \forall t \in [t_2, \tau)$, tenemos $\varphi(\tau) = \varphi_0$, una contradicción a $\varphi(t) < \varphi_0 \forall t \geq t_2$. Por lo tanto, $\tau = \infty$ y $\dot{\varphi}(t) > 0 \forall t \in [t_2, \infty)$.

Además, como $\varphi(t)$ es creciente $\forall t \in [t_2, \infty)$ tenemos $\varphi(t) \in [\varphi(t_2), \varphi_0) \forall t \in [t_2, \infty)$. Como $[\varphi(t_2), \varphi_0] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, concluimos que $\forall s \in [t_2, \infty)$, $\cos(\varphi(t)) \geq \cos(\varphi(t_2)) =: \mu > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \dot{\varphi}(t_2) + \int_{t_2}^t \ddot{\varphi}(s) ds = \dot{\varphi}(t_2) - \int_{t_2}^t g \cos(\varphi(s)) ds \\ &\leq \dot{\varphi}(t_2) - \int_{t_2}^t g \mu ds \\ &= \dot{\varphi}(t_2) + g \mu t_2 - g \mu t \\ &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty, \end{aligned} \tag{4.8}$$

una contradicción a que $\dot{\varphi}(t) > 0 \forall t \in [t_2, \infty)$. Por lo tanto existe un $t_3 > t_2$ tal que $\dot{\varphi}(t_3) = 0$ y $\dot{\varphi}(t) > 0 \forall t \in [t_2, t_3)$. En particular, $\varphi(t)$ alcanza su máximo $\varphi(t_3) = \varphi_0$ en t_3 .

Ahora $\ddot{\varphi}(t_3) = -g \cos(\varphi_0) < 0$, entonces existe un $\eta > 0$ tal que $\dot{\varphi} < 0 \forall t \in [t_3, t_3 + \eta)$, es decir, la función $\dot{\varphi}(t)$ decrece, aumentando la velocidad y alcanzando la velocidad máxima cuando $\varphi(t)$ llega al punto $\varphi(t_4) = -\frac{\pi}{2}$. Después se demuestra con argumentos similares en líneas arriba, que $\varphi(t)$ llega en tiempo finito $t_5 > t_4$ a su mínimo $\varphi(t_5) = -\pi - \varphi_0$, donde $\varphi(t) \in [-\pi - \varphi_0, -\frac{\pi}{2}) \forall t \in [t_4, t_5)$. Finalmente el movimiento se repite, es decir, la partícula se restringe a un movimiento de "sube y baja", ver Figura 4.1.

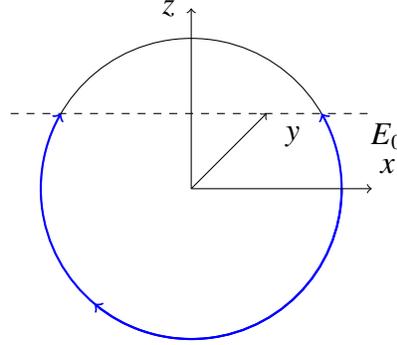


Figura 4.1

Caso 1.3: $E > 2mg$.

La expresión anterior implica que

$$\frac{p_\varphi(t)^2}{2m} = E - (mg \sin(\varphi(t)) + mg) \geq E - 2mg > 0,$$

entonces $p_\varphi^2(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}$. En particular, si $\dot{\varphi}(t_0) > 0$, entonces $\dot{\varphi}(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Esto significa que, el movimiento que realiza la partícula son recorridos completos sobre la circunferencia de \mathbb{S}^1 en el sentido antihorario.

Análogamente, si $\dot{\varphi}(t_0) < 0$, entonces la partícula realiza recorridos completos sobre la circunferencia del \mathbb{S}^1 en el sentido horario.

El valor del momento está subiendo y bajando con $|p_\varphi(t)|$ siendo máximo si $\varphi(t) = -\frac{\pi}{2} \bmod 2\pi$ y $|p_\varphi(t)|$ mínimo si $\varphi(t) = \frac{\pi}{2} \bmod 2\pi$.

Caso 1.4: $E = 2mg$

Supóngamos que $\varphi(t_0) = \frac{\pi}{2}$. Como $E = 2mg$ es constante, tenemos

$$\begin{aligned} 2mg &= \frac{p_{\varphi}^2(t_0)}{2m} + mg(\sin(\varphi(t_0)) + 1) \\ &= \frac{p_{\varphi}^2(t_0)}{2m} + 2mg, \end{aligned}$$

entonces $p_{\varphi}(t_0) = 0$. Observemos que:

$$\begin{aligned} p_{\varphi}(t) &= p_{\varphi}(t_0) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ \varphi(t) &= \varphi(t_0) = \frac{\pi}{2}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

es una solución de las ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi}} = 0 = \frac{1}{m} p_{\varphi}(t) \\ \dot{p}_{\varphi} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 = -mg \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -mg \cos(\varphi(t)). \end{aligned}$$

Entonces $(\varphi(t), p_{\varphi}(t)) = (-\frac{\pi}{2}, 0)$ corresponde a un punto de equilibrio. Este punto de equilibrio es *inestable* porque si se perturba el sistema con una cantidad de energía con una pequeña variación $E_{\epsilon} = 2mg + \epsilon$, $\epsilon \neq 0$, $|\epsilon| \ll 2mg$, entonces el sistema se encuentra en el Caso 1.2 o Caso 1.3 y en ambos casos la partícula llega en tiempo finito $t_1 > t_0$ al punto $\varphi(t_1) = -\frac{\pi}{2}$, es decir, al punto más lejano del equilibrio $\varphi(t_0) = \frac{\pi}{2}$.

4.3. Caso II. $p_{\vartheta}(t) = p_{\vartheta}(0) \neq 0$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer $p_{\vartheta}(t) = p_{\vartheta}(0) > 0$ (en el caso contrario aplicamos una reflexión $\vartheta \mapsto -\vartheta$ tal que $p_{\vartheta}(t) \mapsto -p_{\vartheta}(t)$).

Lema 4.1. *Sea $p_{\vartheta}(0) \neq 0$. Para toda solución de las ecuaciones de Hamilton $(\vartheta(t), \varphi(t), p_{\vartheta}(t), p_{\varphi}(t))$ $t \in (a, b)$, $a, b \in (-\infty, \infty) \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$, existen $\varphi_{\min}, \varphi_{\max} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\varphi_{\min} \leq \varphi_{\max}$, tal que $\varphi(t) \in [\varphi_{\min}, \varphi_{\max}] \forall t \in (a, b)$, es decir, $\varphi(t)$ no alcanza los polos.*

Demostración. Supóngamos que $\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = \pm \frac{\pi}{2}$, $t_0 \in (a, b)$. Tenemos

$$\begin{aligned} E &= H(\vartheta(t), \varphi(t), p_{\vartheta}(t), p_{\varphi}(t)) \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{1}{2m} \left(\frac{p_{\vartheta}^2(0)}{\cos^2 \varphi(t)} + p_{\varphi}^2(t) \right) + mg \sin \varphi(t) + mg \right) \\ &\geq \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{p_{\vartheta}^2(0)}{2m} \frac{1}{\cos^2 \varphi(t)} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

una contradicción a que $E = \text{constante}$. Por tanto, existen dos números reales $\varphi_{\min}, \varphi_{\max} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tal que $\varphi(t) \in [\varphi_{\min}, \varphi_{\max}] \forall t \in \mathbb{R}$. Considerando condiciones iniciales, podemos definir, para soluciones globales (suponemos que la solución existe) lo siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi_{\min} &:= \inf \{ \varphi(t) : t \in \mathbb{R} \}, \\ \varphi_{\max} &:= \sup \{ \varphi(t) : t \in \mathbb{R} \}. \end{aligned}$$

En particular, sabemos que $\varphi(t)$ nunca alcanza los polos de \mathbb{S}^2 y que

$$(\vartheta, \varphi) \in (\vartheta_0, \vartheta_0 + 2\pi) \times [\varphi_{\min}, \varphi_{\max}] \mapsto (\cos \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \cos \varphi, \sin \varphi)$$

es inyectivo. □

Observación 1: No existe problema con la ambigüedad de $\vartheta(t)$ en los polos en el caso $p_{\vartheta}(0) \neq 0$, tampoco para el péndulo matemático, ya que si $p_{\vartheta}(0) = 0$ podemos suponer que $\vartheta(t) = \vartheta(0) = 0 \forall t$, entonces el movimiento, como vimos antes, se encuentra parametrizado por

$$\{ \cos \varphi(t), 0, \sin \varphi(t) : t \in \mathbb{R} \}$$

Caso 2.1. $\varphi(t) = \text{constante}$

Supóngamos que $\varphi(t) = \varphi(0) = \varphi_c$, $\varphi_c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, es decir, la partícula se mueve sobre un círculo de altura constante. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\varphi}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi}} = \frac{1}{m} p_{\varphi}(t), \Rightarrow p_{\varphi}(t) = 0 \forall t, \\ 0 &= \dot{p}_{\varphi}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\left(\frac{\tan \varphi(t)}{m \cos^2 \varphi(t)} p_{\vartheta}^2(t) + mg \cos \varphi(t) \right) \\ &= -\frac{p_{\vartheta}^2(0)}{m} \frac{1}{\cos^3 \varphi_c} \left(\sin \varphi_c + \frac{m^2 g}{p_{\vartheta}^2(0)} \cos^4 \varphi_c \right) \\ &= -\frac{p_{\vartheta}^2(0)}{m} \frac{1}{\cos^3 \varphi_c} \left(\sin \varphi_c + K(1 - \sin^2(\varphi_c))^2 \right) \end{aligned} \tag{4.9}$$

donde $K := \frac{m^2 g}{p_\vartheta^2} > 0$, [7]. Obviamente, $-\frac{p_\vartheta^2(0)}{m} \frac{1}{\cos^3 \varphi_c} \neq 0, \forall t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ahora, queremos ver si $(\sin \varphi_c + K(1 - \sin^2(\varphi_c))^2)$ se puede hacer cero. Por lo tanto, consideramos la ecuación

$$\sin \varphi_c + K(1 - \sin^2(\varphi_c))^2 = 0.$$

Observación 2: Si $\varphi_c \in [0, \frac{\pi}{2})$, entonces $\sin(\varphi_c) \geq 0$ y $(1 - \sin^2(\varphi_c))^2 > 0$, luego tenemos que $\sin \varphi_c + K(1 - \sin^2(\varphi_c))^2 > 0$, por lo tanto $\dot{p}_\varphi > 0$, pero esto es una contradicción a lo que buscamos. Entonces $\varphi_c \in [\varphi_{min}, 0) \subset (-\frac{\pi}{2}, 0)$, [7].

Consideremos la función

$$f(\varphi) = \sin \varphi + K(1 - \sin^2(\varphi))^2, \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right).$$

Queremos encontrar las raíces para la función f en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, 0)$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi(t) \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(\varphi) &= -1 \\ \lim_{\varphi(t) \rightarrow 0} f(\varphi) &= k, \quad k > 0. \end{aligned}$$

Como f es continua, existe $\varphi_c \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ tal que, $f(\varphi_c) = 0$, por el teorema del valor intermedio, [6], queremos ver que existe una solución de las ecuaciones de Hamilton con $\varphi(t) = \varphi_c \in (-\frac{\pi}{2})$ constante.

Ahora, sea $\varphi(t) = \varphi_c \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \forall t \in \mathbb{R}$, y por (4.3) tenemos,

$$\frac{1}{m} p_\varphi(t) = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt}(\varphi_c) = 0,$$

entonces

$$p_\varphi(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

también

$$p_\vartheta(t) = p_\vartheta(0)$$

entonces

$$\dot{p}_{\vartheta}(t) = 0 \quad \forall t$$

además por (3.16),

$$\dot{\vartheta}(t) = \frac{1}{m} \frac{p_{\vartheta}(0)}{\cos^2 \varphi_c} = \text{constante},$$

así $\vartheta(t) = \omega t + \vartheta_0$, donde $\omega := \frac{1}{m} \frac{p_{\vartheta}(0)}{\cos^2 \varphi_c}$ y $\vartheta_0 = \vartheta(0)$, es la condición inicial en $t = 0$.

Entonces

$$\left(\vartheta(t), \varphi(t), p_{\vartheta}(t), p_{\varphi}(t) \right) = (\omega t + \vartheta_0, \varphi_c, p_{\vartheta}(0), 0)$$

es una solución, ver [7].

Como $\left(\vartheta(t), \varphi(t), p_{\vartheta}(t), p_{\varphi}(t) \right) = (\omega t + \vartheta_0, \varphi_c, p_{\vartheta}(0), 0)$ es una solución a las ecuaciones de Hamilton, ésto significa que la partícula se mueve sobre rotaciones en el plano $z = \sin(\varphi_c)$, es decir, gira en el círculo:

$$\psi(\omega t + \vartheta_0, \varphi_c) = (\cos(\omega t + \vartheta_0), \cos(\varphi_c), \sin(\omega t + \vartheta_0) \cos(\varphi_c), \sin(\varphi_c)), \quad t \in \mathbb{R},$$

con frecuencia angular constante ω . Ver Figura 4.2:

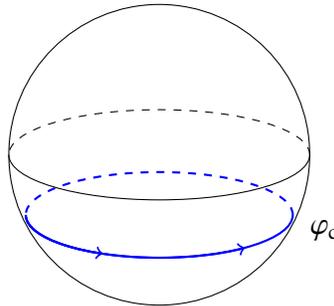


Figura 4.2

Ahora, queremos demostrar que φ_c es único.

Lema 4.2. Para todo $K > 0$, existe un único número $\varphi_c \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ tal que

$$0 = f(\varphi_c) = \sin \varphi_c + K(1 - \sin^2 \varphi_c)^2$$

Demostración. Por el teorema del valor intermedio [6], sabemos que $\varphi_c \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ existe. Aquí $\sin(\varphi)$ es monóticamente creciente para $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, entonces podemos reemplazar

$s := \sin(\varphi)$. Consideremos $f(s) := s + K(1 - s^2)^2$, $s \in (-1, 0)$. Entonces, como $s \in (-1, 0)$ y $K > 0$ tenemos

$$f'(s) = 1 - 4Ks(1 - s^2) > 0.$$

Entonces $f'(s) = 1 - 4Ks(1 - s^2) \geq 0$, $\forall s \in (-1, 0)$, así f es estrictamente creciente y

$$f : (-1, 0) \rightarrow (-1, K)$$

es una biyección. Entonces f tiene una única raíz $s := \sin(\varphi_c)$ en $(-1, 0)$. \square

Por el lema anterior, para todo $K = \frac{m^2 g}{p_\theta^2(0)}$ existe un único φ_c que depende de la condición inicial $p_\theta(0)$. Para $K_1 > K_2$ y $f_i(s) = s + K_i(1 - s^2)^2$, $s \in (-1, 0)$, tenemos $f_1(s) > f_2(s)$ entonces $(\varphi_c)_1 < (\varphi_c)_2$, ver Figura 4.3.

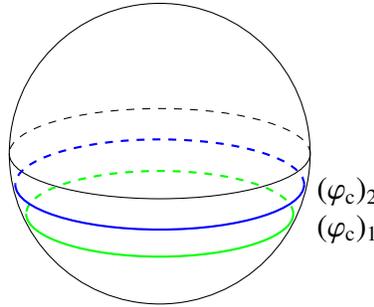


Figura 4.3

Para un momento $p_\theta(0)$ dado, tenemos el siguiente análisis: cuando se presenten momentos iniciales $p_\theta(0)$ más grandes, el círculo crítico $\varphi(t) = \varphi_c$ se posicionará más cerca del ecuador, en caso contrario, para momentos iniciales $p_\theta(0)$ más cerca del valor cero, el círculo crítico $\varphi(t) = \varphi_c$ se aproximará al punto del polo sur, es decir, muy próximo a $-\frac{\pi}{2}$, ver Figura 4.3, resumiendo lo anterior, tenemos

- $p_\theta(0) \rightarrow \infty$, $K = \frac{m^2 g}{p_\theta^2(0)} \rightarrow 0 \Rightarrow 0 = f(\varphi) = \sin \varphi_c + K(1 - \sin^2 \varphi_c)^2 \rightarrow \sin \varphi_c \Rightarrow \varphi_c \rightarrow 0$
- $p_\theta(0) \rightarrow 0$, $K = \frac{m^2 g}{p_\theta^2(0)} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{K}f(\varphi) = \frac{1}{K}\sin \varphi_c + (1 - \sin^2 \varphi_c)^2 \rightarrow (1 - \sin^2 \varphi_c)^2 \Rightarrow \varphi_c \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

Observación 3: Si $\varphi(t) = \varphi_c \forall t \in \mathbb{R}$, entonces $\varphi_{min} = \varphi_{max} = \varphi_c$.

Caso 2.2. $\dot{\varphi}(t_0) = 0$, $\dot{p}_\varphi(t_0) \neq 0$

Como $\dot{p}_\varphi(t_0) \neq 0$, entonces $\varphi(t_0) \neq \varphi_c$ por (4.9), en particular nuevamente por (4.9),

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}(t_0) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (\dot{\varphi}(t)) = \frac{1}{m} \dot{p}_\varphi(t_0) \\ &= -\frac{p_\varphi^2(0)}{m^2} \frac{1}{\cos^3 \varphi(t_0)} \left(\sin \varphi(t_0) + K(1 - \sin^2(\varphi(t_0)))^2 \right) \\ &= -\frac{p_\varphi^2(0)}{m^2} \frac{1}{\cos^3 \varphi(t_0)} f(\sin \varphi(t_0))\end{aligned}$$

Tenemos dos posibilidades:

1. Si $\varphi_{\min} \leq \varphi(t_0) < \varphi_c$, entonces $f(\sin \varphi(t_0)) < 0$, por lo tanto

$$\ddot{\varphi}(t_0) = -\frac{p_\varphi^2(0)}{m^2} \frac{1}{\cos^3 \varphi(t_0)} f(\sin \varphi(t_0)) > 0,$$

entonces $\dot{\varphi}(t_0) = 0$, y $\ddot{\varphi}(t_0) > 0$, implica que se tiene un mínimo local.

2. Si $\varphi_c < \varphi(t_0) \leq \varphi_{\max}$, entonces $f(\sin \varphi(t_0)) > 0$, por lo tanto

$$\ddot{\varphi}(t_0) = -\frac{p_\varphi^2(0)}{m^2} \frac{1}{\cos^3 \varphi(t_0)} f(\sin \varphi(t_0)) < 0,$$

entonces $\dot{\varphi}(t_0) = 0$, y $\ddot{\varphi}(t_0) < 0$, implica que se tiene un máximo local.

Ver Figura 4.4

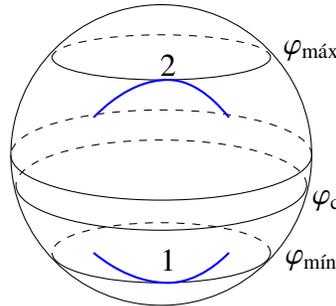


Figura 4.4

4.4. Análisis cualitativo de las trayectorias

Queremos demostrar el siguiente comportamiento de las trayectorias con $\varphi(t) \neq \text{constante}$, inicialmente decreciente en un punto en φ_{\max} y baja cruzando el ecuador, el círculo crítico φ_c y finalmente toca en algún punto de φ_{\min} después origina una trayectoria que ahora será creciente hasta tocar nuevamente a φ_{\max} y el proceso se repite una y otra vez. Para ello se ha realizado la siguiente figura que nos ayudará a tener más claro el comportamiento que sigue la partícula y los casos que vamos a estudiar.

Observación 4: Las velocidades en la Figura 4.5, es decir, la longitud de las flechas, aumentan si $\varphi(t)$ disminuye y son iguales en la misma altura.

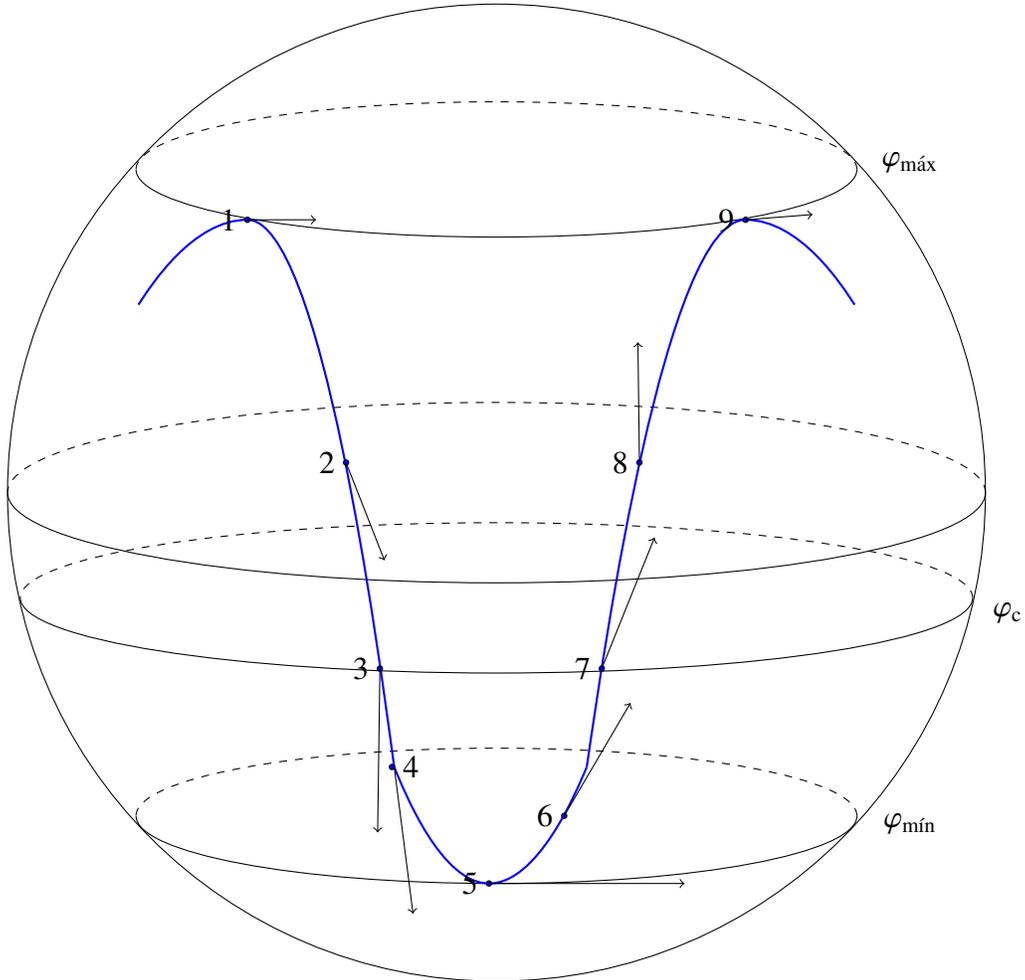


Figura 4.5

Analizaremos consecutivamente los siguientes casos y demostraremos que de cada caso se llega al próximo hasta que se repite el proceso.

1. $\dot{\varphi}(t_1) = 0$, $\varphi(t_1) > \varphi_c$.
2. $\dot{\varphi}(t_2) < 0$, $\varphi(t_2) > \varphi_c$.
3. $\dot{\varphi}(t_3) < 0$, $\varphi(t_3) = \varphi_c$.
4. $\dot{\varphi}(t_4) < 0$, $\varphi(t_4) < \varphi_c$.
5. $\dot{\varphi}(t_5) = 0$, $\varphi(t_5) < \varphi_c$.
6. $\dot{\varphi}(t_6) > 0$, $\varphi(t_6) < \varphi_c$.
7. $\dot{\varphi}(t_7) > 0$, $\varphi(t_7) = \varphi_c$.
8. $\dot{\varphi}(t_8) > 0$, $\varphi(t_8) > \varphi_c$.

Caso 1. Supongamos que $\dot{\varphi}(t_1) = 0$, y $\varphi(t_1) > \varphi_c$
Por las ecuaciones (4.3) y (4.9) tenemos la siguiente expresión:

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{1}{m} \dot{p}(t) = -\frac{p_{\vartheta}^2(0)}{m^2} \frac{1}{\cos^3(\varphi(t))} f(\sin(\varphi(t))) \quad (4.10)$$

donde $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(s) = s + k(1 - s^2)^2$, $f(\sin(\varphi_c)) = 0$, y $f(\sin(\varphi(t))) > 0 \Leftrightarrow \varphi(t) > \varphi_c$, $f(\sin(\varphi(t))) < 0 \Leftrightarrow \varphi(t) < \varphi_c$.

Como $\varphi(t_1) > \varphi_c$, por la expresión anterior, tenemos que $f(\sin(\varphi(t_1))) > 0$; entonces $\ddot{\varphi}(t_1) < 0$, por el criterio de la segunda derivada para máximos [6], tenemos que $\varphi(t_1)$ es un máximo local, así existe un $\delta > 0$ tal que $\varphi_c < \varphi(t) < \varphi(t_1) \forall t \in (t_1, t_1 + \delta]$ (por la propiedad de ser máximo local). En particular, para $t_2 := t_1 + \delta$, δ suficientemente pequeño, tenemos que $\varphi(t_2) > \varphi_c$ y $\dot{\varphi}(t_2) < \dot{\varphi}(t_1) = 0$, entonces, $\varphi(t_2) > \varphi_c$ y $\dot{\varphi}(t_2) < 0$, que cumple con el Caso 2.

Caso 2. Supongamos que $\varphi(t_2) > \varphi_c$, y $\dot{\varphi}(t_2) < 0$.

Como $f(\varphi(t)) > 0 \forall \varphi(t) > \varphi_c$, tenemos $\ddot{\varphi}(t) < 0 \forall \varphi(t) > \varphi_c$ por (4.10), entonces $\dot{\varphi}(t)$ es *decreciente* $\forall t$, con $t \geq t_2$, $\varphi(t) > \varphi_c$. Queremos demostrar que se llega a φ_c en tiempo finito.

Sea $T_2 := \sup \{t > t_2 : \varphi(s) \geq \varphi_c \forall s \in [t_2, t]\}$. Supongamos que $\varphi(t) > \varphi_c, \forall t > t_2$, como

$f(\sin(\varphi(t))) > 0, \forall \varphi(t) > \varphi_c$, entonces tenemos que $\ddot{\varphi}(t) < 0, \forall t > t_2$. Por lo tanto, $\dot{\varphi}(t) \leq \dot{\varphi}(t_2) < 0, \forall t > t_2$ (aquí $\dot{\varphi}(t_2)$ es una cota superior), tenemos:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \int_{t_2}^t \dot{\varphi}(s) ds + \varphi(t_2) \\ &\leq \dot{\varphi}(t_2) \int_{t_2}^t ds + \varphi(t_2) \\ &= \underbrace{\dot{\varphi}(t_2)}_{<0} \underbrace{(t - t_2)}_{\rightarrow \infty} + \underbrace{\varphi(t_2)}_{\rightarrow \infty} \rightarrow -\infty,\end{aligned}$$

una contradicción a que $\varphi(t) > \varphi_c \forall t > t_2$. Entonces existe un $t_3 > t_2$ tal que, $\varphi(t) > \varphi_c \forall t \in [t_2, t_3)$, $\dot{\varphi}(t) \leq \dot{\varphi}(t_2) < 0 \forall t \in [t_2, t_3]$ y $\varphi(t_3) = \varphi_c$, que cumple con el Caso 3.

Caso 3. Supongamos que $\dot{\varphi}(t_3) < 0, \varphi(t_3) = \varphi_c$.

Como $\varphi(t_3) = \varphi_c$ con $\dot{\varphi}(t_3) < 0$, la trayectoria sigue decreciendo. Por continuidad, existe $\delta > 0$ tal que $\dot{\varphi}(t) < 0, \forall t \in [t_3, t_3 + \delta]$. Definimos $t_4 := t_3 + \delta$. Como $\dot{\varphi}(t) < 0 \forall t \in [t_3, t_3 + \delta]$, sabemos que $\varphi(t_4) < \varphi(t_3) = \varphi_c$. Además $\dot{\varphi}(t_4) < 0$, esto por lo anterior. Así, vemos que se cumple el Caso 4.

Caso 4. $\dot{\varphi}(t_4) < 0, \varphi(t_4) < \varphi_c$

Supongamos que $\dot{\varphi}(t) < 0, \forall t \geq t_4$, entonces tenemos $\varphi(t) \leq \varphi(t_4), \forall t \geq t_4$. Por resultados anteriores, sabemos que lo anterior implica que $-\frac{\pi}{2} < \varphi_{min} \leq \varphi(t) \leq \varphi(t_4) < \varphi_c < 0, \forall t \geq t_4$. Sabemos también que la función $\sin(\varphi) : (-\frac{\pi}{2}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ es creciente y $f : (-1, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ es creciente, también $-\frac{1}{\cos^3 \varphi} : (-\frac{\pi}{2}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ es creciente. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}(t) &= -\frac{p_{\theta}^2(0)}{m^2} \frac{1}{\cos^3 \varphi(t)} f(\sin(\varphi(t))) \\ &\geq -\frac{p_{\theta}^2(0)}{m^2} \frac{1}{\cos^3 \varphi(t_4)} f(\sin(\varphi(t_4))) \\ &= \ddot{\varphi}(t_4) > 0\end{aligned}$$

Observemos que el producto de funciones crecientes es creciente, aquí $\dot{\varphi}$ empieza a crecer. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) &= \int_{t_4}^t \ddot{\varphi}(s) ds + \dot{\varphi}(t_4) \\ &\geq \ddot{\varphi}(t_4) \int_{t_4}^t ds + \dot{\varphi}(t_4) \\ &= \ddot{\varphi}(t_4) (t - t_4) + \dot{\varphi}(t_4) \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

una contradicción a que $\dot{\varphi}(t) < 0 \forall t \geq t_4$. Entonces existe un $t_5 > t_4$ tal que, $\dot{\varphi}(t_5) = 0$ y $\dot{\varphi}(t) < 0, \forall t \in [t_4, t_5)$, pero como $\dot{\varphi}(t) < 0 \forall t \in [t_4, t_5)$, sabemos que $\varphi(t_5) < \varphi(t_4) < \varphi_c$. Entonces se cumple el Caso 5.

Caso 5. $\dot{\varphi}(t_5) = 0, \varphi(t_5) < \varphi_c$

Por la ecuación (4.10) veamos que :

$$\ddot{\varphi}(t_5) = - \underbrace{\frac{p_{\theta}^2(0)}{m^2}}_{< 0} \frac{1}{\cos^3 \varphi(t_5)} \underbrace{f(\sin(\varphi(t_5)))}_{< 0} > 0.$$

De este modo, $\dot{\varphi}(t_5) = 0$ y $\ddot{\varphi}(t_5) > 0$, entonces tenemos un mínimo local, pero no constante localmente. Por lo tanto existe un $\delta > 0$ tal que $\varphi(t_5) < \varphi(t) < \varphi_c \forall t \in (t_5, t_5 + \delta]$, y $\ddot{\varphi}(t) > 0 \forall t \in (t_5, t_5 + \delta]$. Definimos a $t_6 := t_5 + \delta$, luego $\varphi(t_6) < \varphi_c$ y $\dot{\varphi}(t_6) > 0$ es decir, se cumple el Caso 6.

Caso 6. $\dot{\varphi}(t_6) > 0, \varphi(t_6) < \varphi_c$

Supongamos que $\varphi(t) < \varphi_c \forall t \leq t_6$, entonces $f(\sin(\varphi(t))) < 0 \forall t \geq t_6$. Luego $\ddot{\varphi}(t) > 0$, por (4.10) por lo tanto tenemos $\dot{\varphi}(t) \geq \dot{\varphi}(t_6) \forall t \geq t_6$, entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_6}^t \dot{\varphi}(s) ds + \varphi(t_6) \\ &\geq \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\varphi}(t_6) \int_{t_6}^t ds + \varphi(t_6) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\varphi}(t_6)(t - t_6) + \varphi(t_6) \\ &= \infty, \end{aligned}$$

una contradicción a que $\varphi(t) < \varphi_c \forall t > t_6$. Entonces, existe un $t_7 > t_6$ tal que $\varphi(t_7) = \varphi_c$ con $\varphi(t) < \varphi_c \forall t \in [t_6, t_7)$. Además $\dot{\varphi}(t_7) \geq \dot{\varphi}(t_6)$ porque $\ddot{\varphi}(t) > 0 \forall t \in [t_6, t_7)$ por ecuación (4.10), ya que $\varphi(t) < \varphi_c \forall t \in [t_6, t_7)$. Así se cumple el Caso 7.

Caso 7. $\dot{\varphi}(t_7) > 0, \varphi(t_7) = \varphi_c$

Como se cumple que $\dot{\varphi}(t_7) > 0$ por continuidad existe un $\delta > 0$ tal que $\dot{\varphi}(t) > 0 \forall t \in (t_7, t_7 + \delta]$ en consecuencia, $\varphi(t)$ es creciente en el intervalo $(t_7, t_7 + \delta]$, por lo tanto $\varphi(t_7 + \delta) > \varphi_c$. Definimos $t_8 := t_7 + \delta$, entonces $\varphi(t_8) > \varphi_c$ y $\dot{\varphi}(t_8) > 0$. Observamos que el Caso 8, se cumple.

Caso 8. $\dot{\varphi}(t_8) > 0, \varphi(t_8) > \varphi_c$

Supongamos que $\dot{\varphi}(t) > 0 \forall t \geq t_8$. Como $\dot{\varphi}(t) > 0 \forall t \geq t_8$, entonces $\varphi(t) \geq \varphi(t_8), \forall t \geq t_8$. Primero vamos a analizar el caso cuando todo el movimiento se encuentra por abajo del

ecuador.

Sub-Caso 8.1. Supongamos que $\varphi(t) \leq 0, \forall t > t_8$.

Observemos que, el asumir que $\varphi(t) \leq 0$, implica que la trayectoria que realiza la partícula nunca sube por encima del ecuador. Como $\dot{\varphi}(t) > 0$, $\varphi(t)$ esta creciendo y como también $\varphi(t) \leq 0$, sabemos que $f(\sin(\varphi(t)))$ está creciendo, ver la demostración del Lema 4.2. Además $\frac{1}{\cos^3 \varphi(t)} \geq 1, \forall t \geq t_8$, por lo tanto $\ddot{\varphi}(t) \leq -\frac{p_{\vartheta}^2(0)}{m^2} f(\sin(\varphi(t_8))) := \alpha, \alpha < 0$. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\varphi}(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_8}^t \ddot{\varphi}(s) ds + \dot{\varphi}(t_8) \\ &\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_8}^t \alpha ds + \dot{\varphi}(t_8) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t - t_8) + \dot{\varphi}(t_8) \\ &= -\infty, \end{aligned} \tag{4.11}$$

una contradicción a que $\dot{\varphi}(t) > 0 \forall t \geq t_8$.

Tenemos dos hipótesis, la hipótesis del Caso 8 y la hipótesis del Sub-Caso 8.1. Entonces pueden ocurrir dos casos para resolver la contradicción:

- Se cumple $\varphi(t) \leq 0 \forall t > t_8$ y existe un $t_9 > t_8$ tal que $\dot{\varphi}(t_9) = 0$ y $\dot{\varphi}(t) > 0, \forall t \in [t_8, t_9)$. Además $\varphi(t_9) > \varphi(t_8) > \varphi_c$. Todo el análisis corresponde a lo que pasaría si tenemos el caso cuando el movimiento se realiza por abajo del ecuador.

Si ésto no ocurre, entonces:

- Existe un $t_{8'} > t_8$ tal que, $\varphi(t_{8'}) > 0$ y $\dot{\varphi}(t) > 0, \forall t \in [t_8, t_{8'}]$.

Sub-Caso 8.2. $\dot{\varphi}(t_{8'}) > 0, \varphi(t_{8'}) > 0$

Supongamos que $\dot{\varphi}(t) > 0, \forall t > t_{8'}$. Como $\varphi(t_{8'}) > 0$ y $\dot{\varphi}(t) > 0$, tenemos que $\frac{\pi}{2} > \varphi_{max} \geq \varphi(t) \geq \varphi(t_{8'}) \forall t > t_{8'}$. Además la función $\varphi(t)$ está creciendo, por lo tanto $\sin(\varphi(t)) \geq \sin(\varphi(t_{8'}))$. Luego:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}(t) &= -\frac{p_{\vartheta}^2(0)}{m^2} \frac{1}{\cos^3(\varphi(t))} (\sin(\varphi(t)) + K(1 - \sin^2(\varphi(t))))^2 \\ &\leq -\frac{p_{\vartheta}^2(0)}{m^2} \sin(\varphi(t)) \\ &\leq -\frac{p_{\vartheta}^2(0)}{m^2} \sin(\varphi(t_{8'})) \\ &:= \beta. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Observemos que $\varphi(t_{8'}) \in (0, \frac{\pi}{2})$, implica que $\beta < 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\varphi}(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_{8'}}^t \ddot{\varphi}(s) ds + \dot{\varphi}(t_{8'}) \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_{8'}}^t \beta ds + \dot{\varphi}(t_{8'}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \beta (t - t_{8'}) + \dot{\varphi}(t_{8'}) \\ &= -\infty \end{aligned} \tag{4.13}$$

una contradicción a que $\dot{\varphi}(t) > 0 \forall t \geq t_{8'}$. Entonces existe un $t_9 > t_{8'}$ tal que $\dot{\varphi}(t_9) = 0$ y $\dot{\varphi}(t) > 0 \forall t \in [t_{8'}, t_9)$. Además, como $\dot{\varphi}(t) > 0 \forall t \in [t_8, t_9)$, tenemos que $\varphi_{max} \geq \varphi(t_9) > \varphi(t_{8'}) > 0 > \varphi_c > \varphi_{min}$.

En ambos casos tenemos la siguiente situación:

$$\dot{\varphi}(t_9) = 0, \quad \varphi(t_9) > \varphi_c.$$

Decimos que el Caso 9 se cumple y llegamos a tener la misma situación del Caso 1 y toda la discusión se repite. Es decir, la partícula siempre estará oscilando entre un máximo local más grande que φ_c y un mínimo local más pequeño que φ_c .

Ahora queremos demostrar que todos los máximos locales y mínimos locales son iguales. Consideremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} E &= H(\vartheta(t), \varphi(t), p_{\vartheta}(0), p_{\varphi}(t)) \\ &= \frac{1}{2m} \left(\frac{p_{\vartheta}^2(0)}{\cos^2 \varphi(t)} + p_{\varphi}^2(t) \right) + mg \sin \varphi(t) + mg. \end{aligned}$$

El término extra mg en la expresión anterior significa que deseamos que una partícula en reposo en el polo sur tenga una energía de valor igual a 0. Sabemos que $p_{\varphi}(t) = m\dot{\varphi}(t)$, entonces $\dot{\varphi}(t_0) = 0$ implica que $p_{\varphi}(t_0) = 0$. Luego

$$\begin{aligned} E &= H(\vartheta(t_0), \varphi(t_0), p_{\vartheta}(t_0), 0) \\ &= \frac{1}{2m} \frac{p_{\vartheta}^2(0)}{\cos^2 \varphi(t_0)} + mg \sin \varphi(t_0) + mg. \end{aligned}$$

Podemos usar la propiedad $\cos^2 \varphi(t_0) + \sin^2 \varphi(t_0) = 1$ y hacemos $s = \sin \varphi(t_0)$ con $s \in$

$(-1, 1)$. Así obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2m} \left(\frac{p_\theta^2}{1 - \sin^2 \varphi(t_0)} \right) + mg(1 + \sin \varphi(t_0)) - E, \\ 0 &= \frac{1}{2m} \left(\frac{p_\theta^2(0)}{1 - s^2} \right) + mg(1 + s) - E, \\ 0 &= \frac{p_\theta^2(0)}{2m} + mg(1 + s)(1 - s^2) - E(1 - s^2), \\ 0 &= \frac{p_\theta^2(0)}{2m^2g} + (1 + s)(1 - s^2) - \frac{E}{mg}(1 - s^2). \end{aligned}$$

Sean $\gamma := \frac{p_\theta^2(0)}{2m^2g} \in (0, \infty)$, y $\mu := \frac{E}{mg} \in (\gamma, \infty)$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma + (1 + s)(1 - s^2) - \mu(1 - s^2) \\ &= -s^3 + (\mu - 1)s^2 + s + (\gamma - \mu + 1). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Por el análisis anterior, cada vez que $\dot{\varphi}(t) = 0$, $s = \sin(\varphi(t)) \in (-1, 1)$ es una raíz para el polinomio de grado 3 en (4.14). Observemos que el polinomio en (4.14) toma el valor $\gamma > 0$ para $s = 1$ y $s = -1$.

Sea $P(t) = \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$, con $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}$ y $\alpha_3 \neq 0$, tal que $P(-1) = P(1) = \gamma > 0$. Supongamos que existen $t_1, t_2, t_3 \in (-1, 1)$, tal que, $-1 < t_1 < t_2 < t_3 < 1$ y $P(t_1) = P(t_2) = P(t_3) = 0$, entonces $P(t) = \alpha_3 (t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)$. Como $P(t) \neq 0 \forall t < t_1$ y $P(-1) > 0$, entonces $P(t) > 0 \forall t < t_1$. Además $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |P(t)| = \infty$ para todo polinomio no constante. Por lo tanto:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} P(t) = +\infty.$$

como $P(t)$ es un polinomio de grado tres:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = -\infty.$$

pero como $P(t) \neq 0 \forall t > t_3$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = -\infty$, tenemos que $P(t) < 0 \forall t > t_3$ y $t_3 < 1$. Por otro lado $P(1) = P(-1) = \gamma > 0$, llegamos a una contradicción. Por lo tanto, $P(t)$ tiene a lo máximo dos raíces en $(-1, 1)$.

Recordemos que $\dot{\varphi}(t_1) = 0, \varphi(t_1) > 0$ y $\dot{\varphi}(t_3), \varphi(t_3) < \varphi_c$. Definimos $s_1 := \sin \varphi(t_1)$ y

$s_2 := \sin \varphi(t_5)$ con $-1 < s_2 < s_1 < 1$. Como

$$\begin{aligned} E &= H(\vartheta(t), \varphi(t), p_\vartheta(0), 0) \\ &= \frac{1}{2m} \frac{p_\vartheta^2(0)}{1-s_1^2} + mg(1+s_1) \\ &= \frac{1}{2m} \frac{p_\vartheta^2(0)}{1-s_2^2} + mg(1+s_2), \end{aligned}$$

s_1 y s_2 son las únicas raíces del polinomio (4.14) en el intervalo $(-1, 1)$. Entonces $\varphi(t_1)$ es el único máximo local y $\varphi(t_5)$ es el único mínimo local. Además, por el análisis anterior, la partícula sube y baja entre $\varphi(t_1)$ y $\varphi(t_5)$. Por lo tanto, $\varphi_{max} = \varphi(t_1)$ es el máximo global y $\varphi_{min} = \varphi(t_5)$ es el mínimo global de la trayectoria. Si $\varphi(t_1) \leq 0$, se cumple con el Sub-Caso 8.1 y si $\varphi(t_1) > 0$, se cumple con el Sub-Caso 8.2.

Si tenemos que $s_1 = s_2$, entonces $\sin(\varphi_{min}) = \sin(\varphi_{max})$. Por tanto se tiene que $\varphi_{min} = \varphi_{max} = \varphi_c$ y la partícula se mueve a lo largo de círculo $\varphi(t) = \varphi_c \forall t \in \mathbb{R}$, ver Figura 4.6.

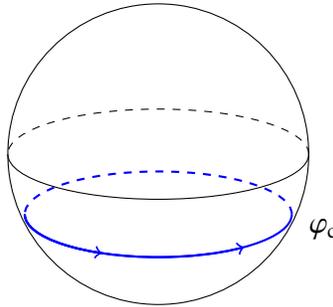


Figura 4.6

4.5. Estabilidad en los puntos norte y sur

En el análisis del caso para $p_\vartheta(0) = 0$ (péndulo matemático) hemos visto que el polo norte es un punto de equilibrio inestable si la partícula se encuentra en reposo. Queremos demostrar que el polo sur con $E = 0$ es un punto de equilibrio estable. Consideramos una perturbación del sistema con una energía $E \in (0, 2mg)$. El caso $p_\vartheta(0) = 0$ ya se estudió en el análisis del péndulo matemático. Supongamos que $p_\vartheta(0) \neq 0$ y definimos $s_1 := \sin(\varphi_{max})$ con $\varphi_{max} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Entonces $E = \frac{1}{2m} \frac{p_\vartheta^2(0)}{1-s_1^2} + mg(1+s_1)$, por lo tanto $0 < mg(1+s_1) < E$, lo que implica que $\lim_{E \rightarrow 0} s_1 = -1$. En consecuencia, $\lim_{E \rightarrow 0} \varphi_{max} = -\frac{\pi}{2}$, es decir, la trayectoria se acerca al polo sur de manera que el polo sur con $E = 0$ es un punto de equilibrio estable.

Capítulo 5

Resultados

En general, no es posible calcular de forma explícita las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales, sin embargo, puede obtenerse información sobre las propiedades de las soluciones mediante la teoría cualitativa de sistemas de ecuaciones diferenciales, como hemos visto en el capítulo anterior. Por otro lado se puede resolver el sistema de ecuaciones diferenciales con métodos numéricos y verificar que la teoría cualitativa coincide con la solución numérica.

5.1. Runge-Kutta de orden 4

Para encontrar soluciones numéricamente aproximadas del sistema de ecuaciones (3.18) y (3.19) se utilizó el integrador numérico *Runge-Kutta 4*. Los integradores numéricos son familia de métodos numéricos convencionales diseñados especialmente para la simulación de sistemas de ecuaciones diferenciales que por definición reemplazan la solución exacta por una aproximación. El método se describe como sigue:

La solución exacta de la ecuación diferencial ordinaria trivial (EDO) [2],

$$y' = f(t), \quad t \geq t_0, \quad y(t_0) = y_0,$$

cuyo lado derecho es independiente de y , es $y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$. Existen métodos numéricos poderosos para calcular integrales numéricamente, es normal pensar en utilizarlos para encontrar la solución general de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs), del siguiente problema de valor inicial:

$$y' = f(t, y), \quad t \geq t_0, \quad y(t_0) = y_0, \tag{5.1}$$

y es éste el objetivo de los métodos Runge-Kutta, encontrar soluciones aproximadas. Antes de comenzar a debatir tales métodos, vamos dedicar un poco de atención al cálculo numérico de integrales para entender cómo es la teoría que hay detrás de los llamados integradores numéricos. Existe un procedimiento llamado *cuadratura* que consiste en reemplazar una integral con una suma finita. Sea $\omega \in (a, b)$, una función no negativa tal que

$$0 < \int_a^b \omega(\tau) d\tau < \infty, \quad \left| \int_a^b \tau^j \omega(\tau) d\tau \right| < \infty, \quad j = 1, 2, \dots;$$

donde ω se conoce como *función de peso*. La aproximación es como sigue:

$$\int_a^b f(\tau) \omega(\tau) d\tau \approx \sum_{j=1}^v b_j f(c_j), \quad (5.2)$$

donde los números b_1, b_2, \dots, b_v y c_1, c_2, \dots, c_v se llaman los pesos en cuadratura y nodos, respectivamente. Para profundizar más en este tema revisar [2].

Los métodos de Runge-Kutta se construyen a partir de un método de Taylor. Recordemos que los métodos numéricos de la serie de Taylor tienen la característica deseable de que el error global final es de orden $O(h^N)$, donde h es el tamaño de paso [4], de este modo se tiene la ventaja de que podemos escoger N tan grande como queramos para que el error sea tan pequeño como deseemos. Pero estos métodos presentan dos desventajas: el cálculo de derivadas de orden superior y la necesidad de determinar N con anterioridad, un procedimiento lento y complicado motivo por el cual rara vez se emplean. Así, los métodos Runge-Kutta tienen como error global final del mismo orden que los métodos de Taylor, $O(h^N)$, pero a diferencia que pueden prescindir de la evaluación de las derivadas y del cálculo de N . Existe una familia de métodos de Runge-Kutta que vienen en varios órdenes de precisión N , sin embargo para finalidades del presente trabajo nos centraremos en describir el método de Runge-Kutta de orden $N = 4$ ya que entre todos los métodos numéricos anteriores, es bastante preciso, estable y fácil de programar [4].

En 1895 en sus trabajos, Runge propuso reevaluar procesos sucesivos de la función $f(t, y)$ en puntos que fueran adecuados, él observó que si se forma sucesivamente evaluaciones de función

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad k_2 = f\left(t_n + h, y_n + \left(\frac{h}{2}\right)k_1\right)$$

la fórmula $y_{n+1} = y_n + h k_2$, tiene orden dos, es decir los errores locales son proporcionales a h^3 . Entonces siguiendo ésta idea de Runge, se pueden deducir fórmulas de segundo orden con dos evaluaciones de función por paso. En particular se tiene la bien conocida fórmula

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{h}{6}\right)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (5.3)$$

donde

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(t_n, y_n), \\
 k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\
 k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\
 k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3).
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

que es el método de cuarto orden de Runge-Kutta (RK4), emparejando estos coeficientes con los del método de la serie de Taylor de orden $N = 4$ de manera que el error de truncamiento local sea de orden $O(h^5)$. En el contexto de los métodos numéricos el error local en un punto (t_n, y_n) es el error cometido al avanzar un paso desde dicho punto y obviamente dicho error depende de la longitud del paso h , por tanto se trata de ajustar dicha longitud de manera que el error se mantenga inferior a una tolerancia de error prefijada por el usuario, se trata de idear procedimientos que no requieran un excesivo costo computacional [4]. (RK4) simula la precisión del método de la serie de Taylor de orden $N = 4$ y consiste en calcular la aproximación y_{n+1} en (5.1). En general, un método de Runge-Kutta explícito es un método de un paso que avanza la solución desde (t_n, y_n) a $(t_{n+i} = t_n + h, y_{n+1})$, usando una fórmula de aproximación del tipo

$$y_{n+1} = y_n + h[b_1k_1 + \cdots + b_s k_s],$$

donde las llamadas etapas k_1, \dots, k_s se calculan sucesivamente desde las ecuaciones

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(t_n, y_n), \\
 k_2 &= f(t_n + c_2h, y_n + ha_{21}k_1), \\
 k_3 &= f(t_n + c_3h, y_n + ha_{31}g_2), \\
 &\vdots \\
 k_s &= f(t_n + c_s h, y_n + ha_{s1}g_1 + \cdots + ha_{s,s-1}k_{s-1}).
 \end{aligned}$$

El número s se llama número de etapas y se considera como una medida del gasto computacional, los números reales b_i y a_{ij} se llaman pesos y nodos respectivamente de la fórmula y los $c_i = a_{i1} + \cdots + a_{i,i-1}$ [4]. Por su simplicidad, la facilidad de programar y los resultados numéricos satisfactorios que proporciona, es ampliamente usado en muchos lenguajes numéricos de simulación (MATLAB, MAPLE, MATHEMATICA, FORTRAN, ETC.). Para profundizar en la teoría y simulación de los métodos numéricos revisar [2] y [4].

El presente trabajo presenta una serie de gráficos que han sido proporcionados por una serie de simulaciones del método de Runge-Kutta de orden 4 (RK4) descrito anteriormente, comenzando con la simulación en el software de FORTRAN se encontraron las soluciones

numéricas del sistema de ecuaciones (3.18) y (3.19) con diferentes condiciones iniciales así como variando el valor de la fuerza gravitacional g . La finalidad de cambiar las condiciones iniciales y el valor de g fue para observar el comportamiento de la trayectoria de la partícula para ello se generaron archivos de datos así como gráficos en el plano euclidiano que se conoce como *espacio de fases*, posteriormente todos los archivos de datos generados se utilizaron para simularlos con el software de MATLAB [?], los archivos de datos se transportaron a MATLAB a través de una matriz, también la ecuación de esfera \mathbb{S}^2 en sus coordenadas polares descritas por (3.1) para obtener los gráficos de las 2-esferas para observar y confirmar finalmente que aunque el sistema de ecuaciones de Hamilton (3.18) y (3.19) no tiene soluciones analíticas, pero su análisis cualitativo presentado en el Capítulo 4, puede simularse aproximando soluciones con el integrador numérico (RK4).

5.2. Gráficos

Los siguientes gráficos se obtuvieron de un cierto número de simulaciones utilizando el desarrollo del integrador numérico *Runge-Kutta 4* que fue descrito en la sección anterior. Se quiere mostrar que si consideramos ciertas condiciones iniciales y variando el valor de la fuerza de gravitación g podemos estudiar el comportamiento de la partícula y encontramos la relación con la teoría cualitativa desarrollada en el Capítulo 4.

A continuación se presentan dos conjuntos de condiciones iniciales y un valor de g aumentando en cada gráfico y un caso especial *el péndulo matemático*. Cada gráfico presentado lleva consigo todos los casos desarrollados en el Capítulo 4.

Consideremos las siguientes condiciones iniciales

$$\begin{aligned}\vartheta(0) &= 0.0 \\ \varphi(0) &= -\frac{\pi}{4} \\ p_{\vartheta}(0) &= 1.0 \\ p_{\varphi}(0) &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

queremos encontrar cómo se comporta la trayectoria de la partícula con diferente fuerza de gravedad g :

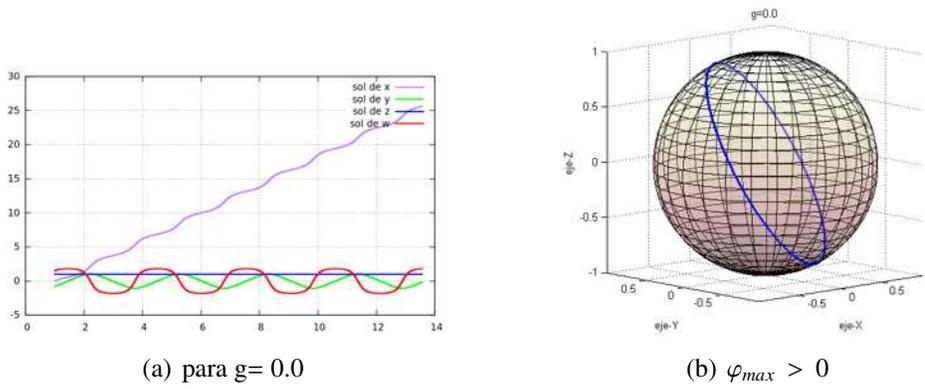


Figura 5.1

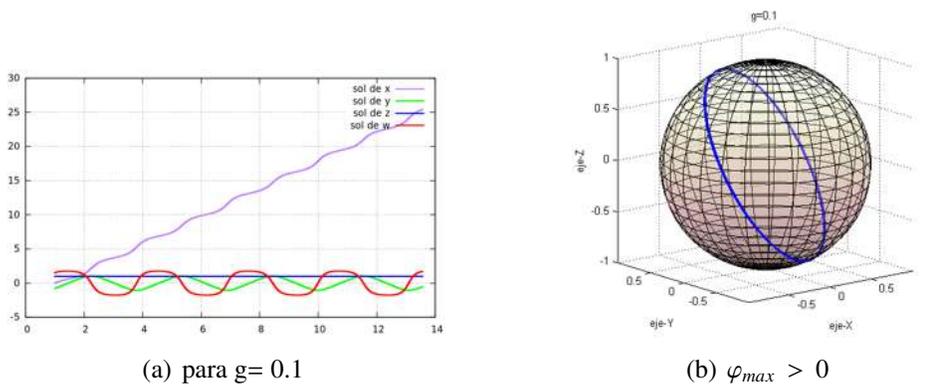


Figura 5.2

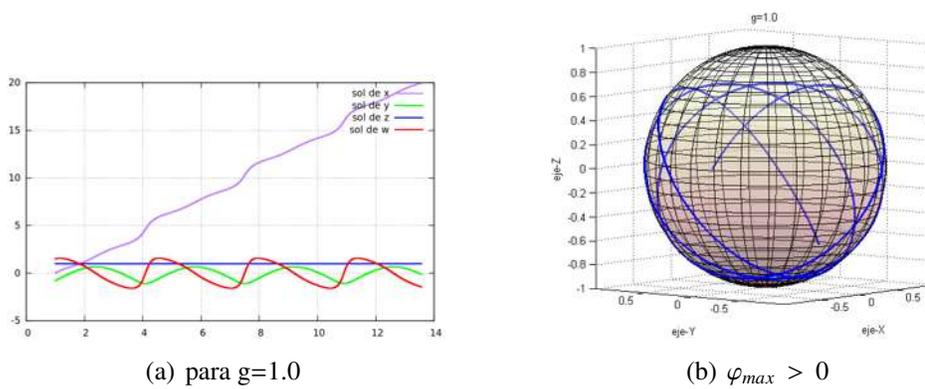


Figura 5.3

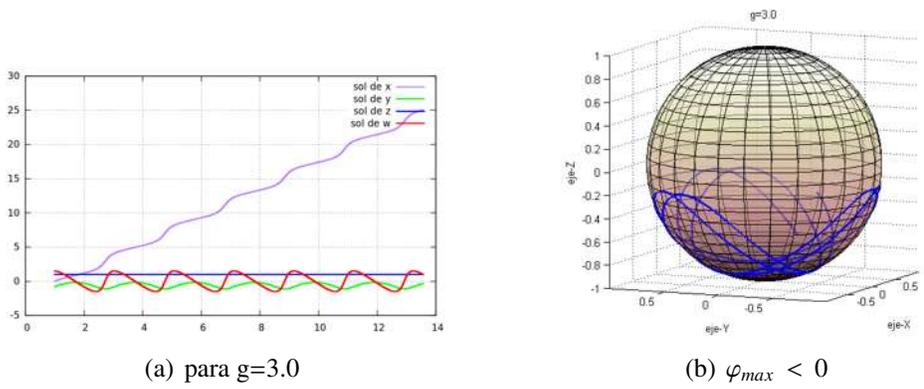


Figura 5.4

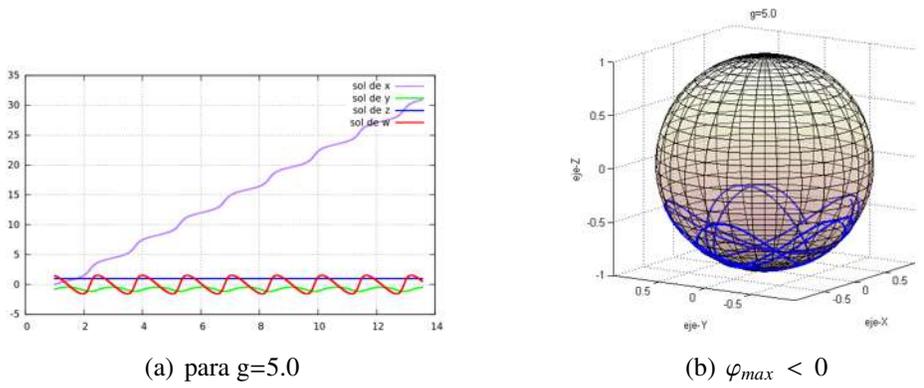


Figura 5.5

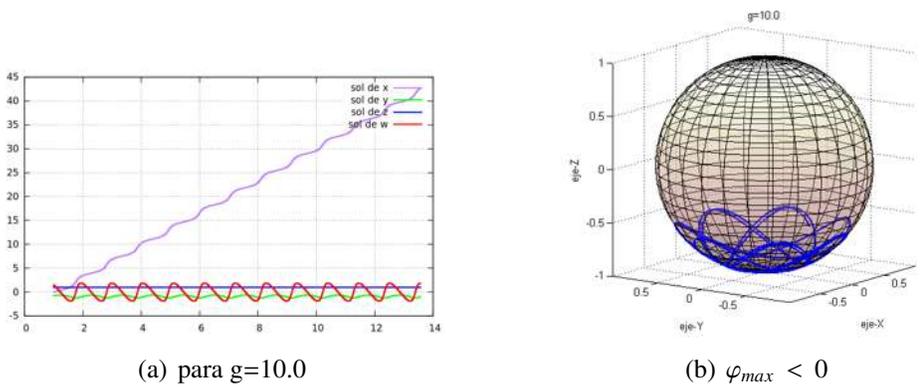


Figura 5.6

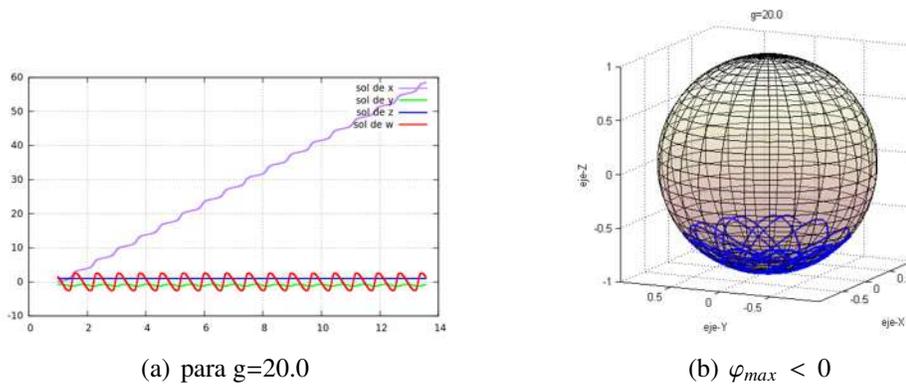


Figura 5.7

Ahora queremos analizar cómo se comporta la trayectoria de la partícula con las siguientes condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}\vartheta(0) &= 0.0 \\ \varphi(0) &= -\frac{\pi}{12} \\ p_{\vartheta}(0) &= 1.0 \\ p_{\varphi}(0) &= 1.0\end{aligned}$$

se obtuvieron las siguientes gráficas para una fuerza gravitacional g que aumenta de valor

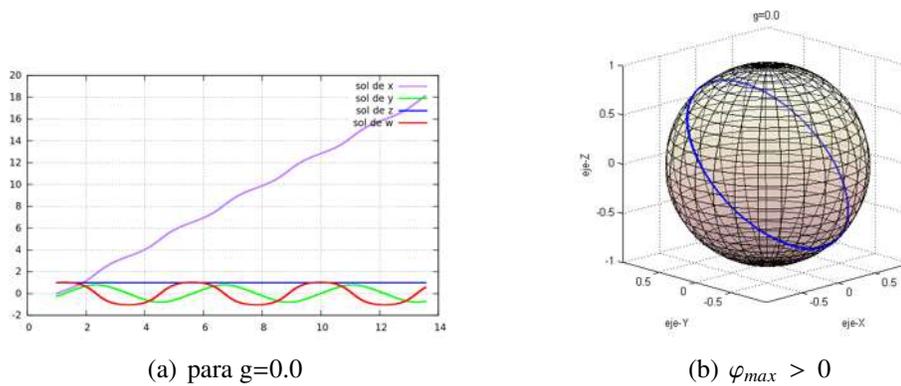


Figura 5.8

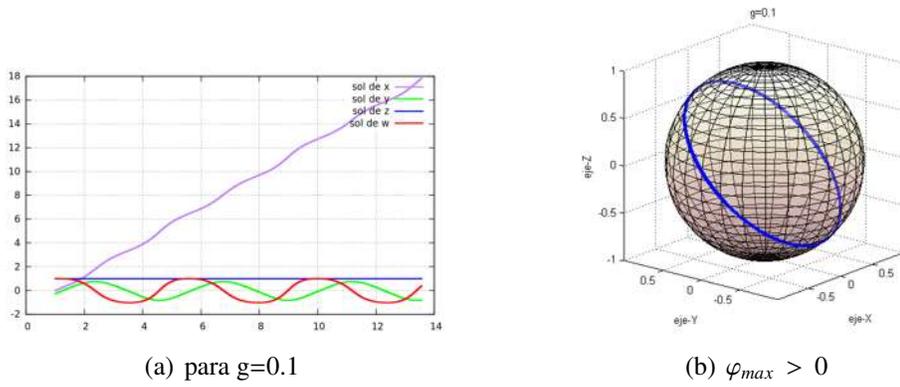


Figura 5.9

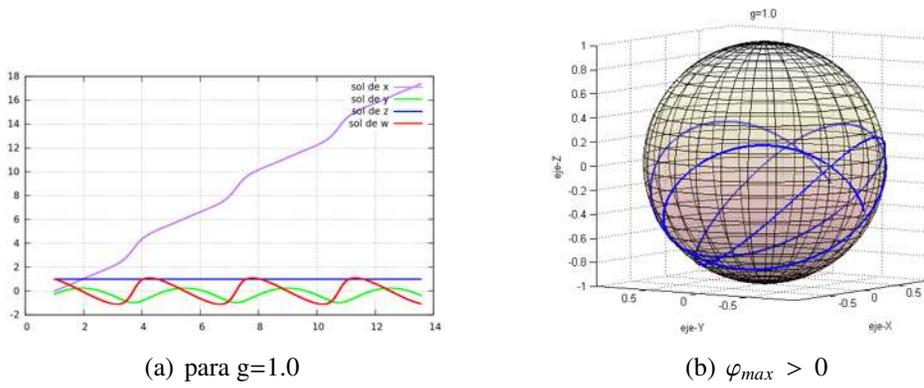


Figura 5.10

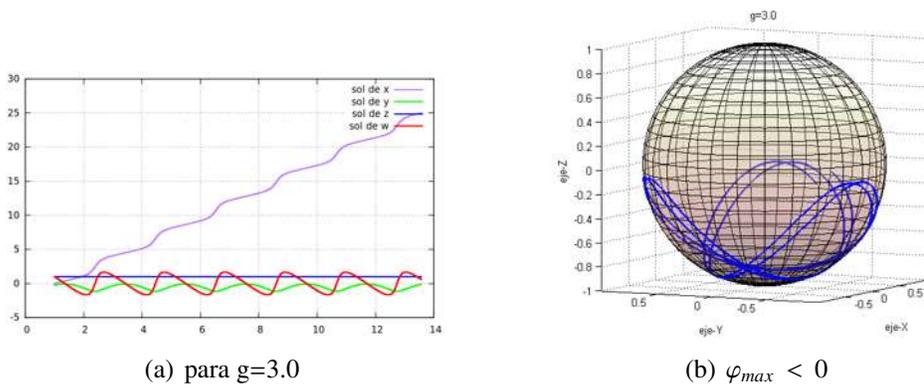


Figura 5.11

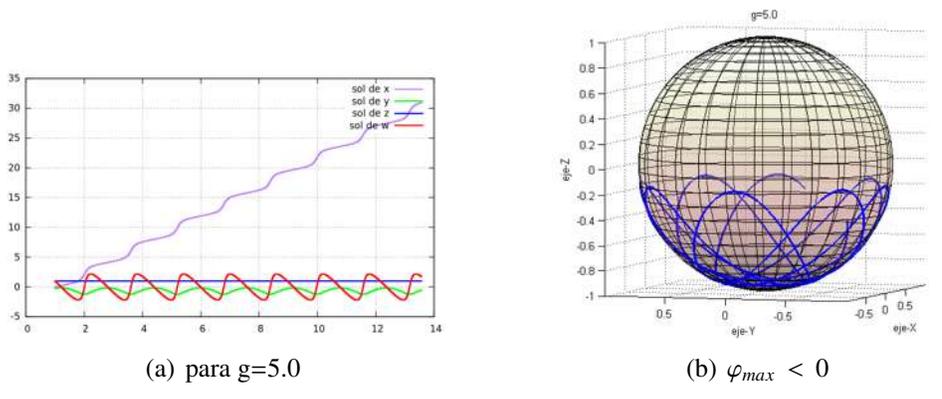


Figura 5.12

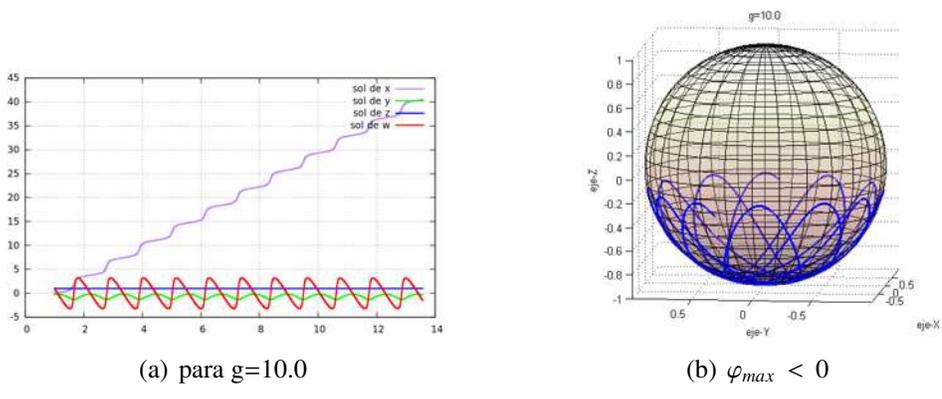


Figura 5.13

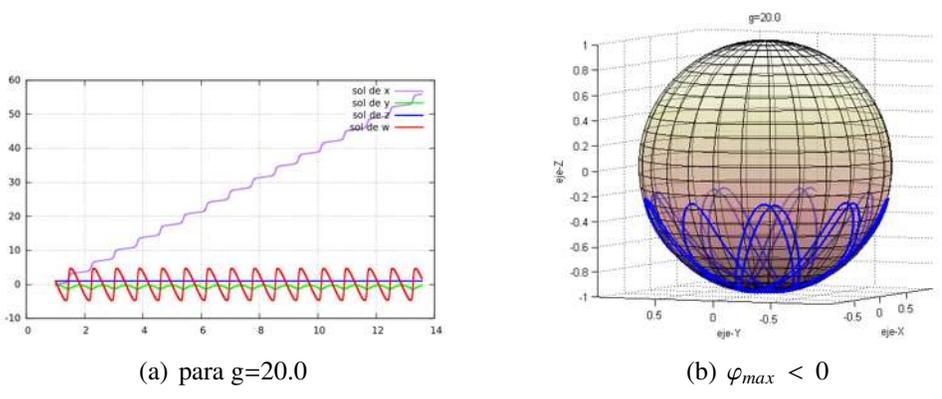


Figura 5.14

Como caso especial se analizó el comportamiento de la trayectoria de la partícula cuando se consideran condiciones iniciales que nos transportan al caso del péndulo matemático, veamos

$$\begin{aligned}\vartheta(0) &= 0.0 \\ \varphi(0) &= -\frac{\pi}{4} \\ p_{\vartheta}(0) &= 0.0 \\ p_{\varphi}(0) &= 1.0\end{aligned}$$

se obtuvieron los siguientes gráficos:

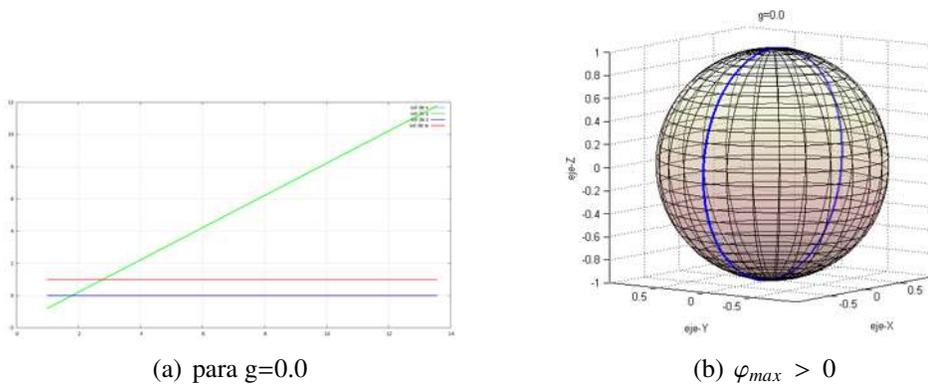


Figura 5.15

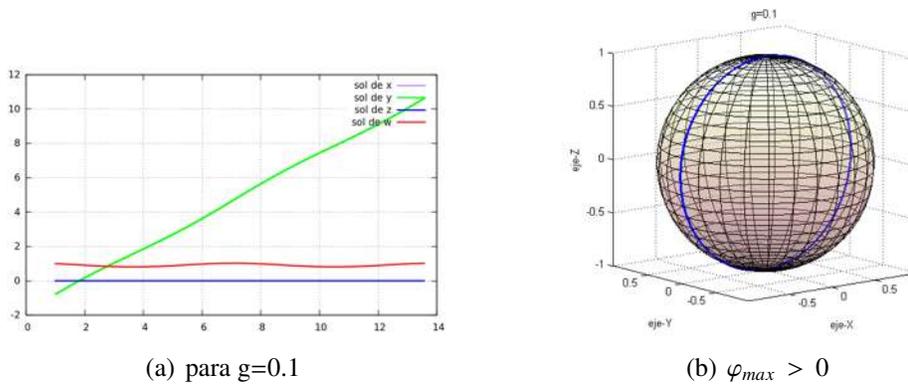


Figura 5.16

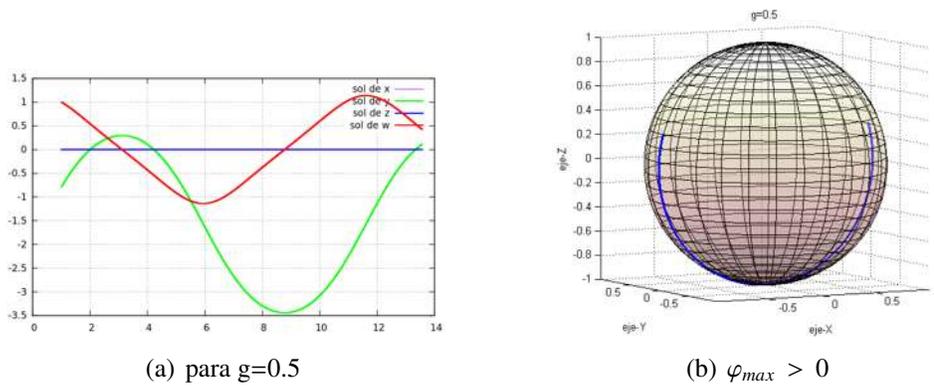


Figura 5.17

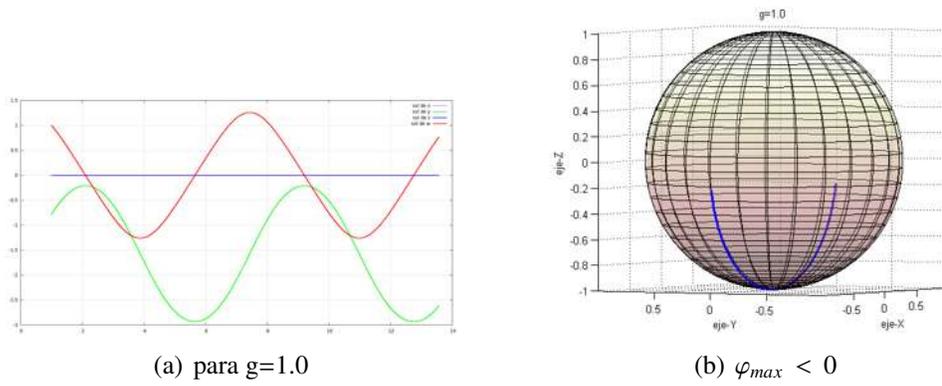


Figura 5.18

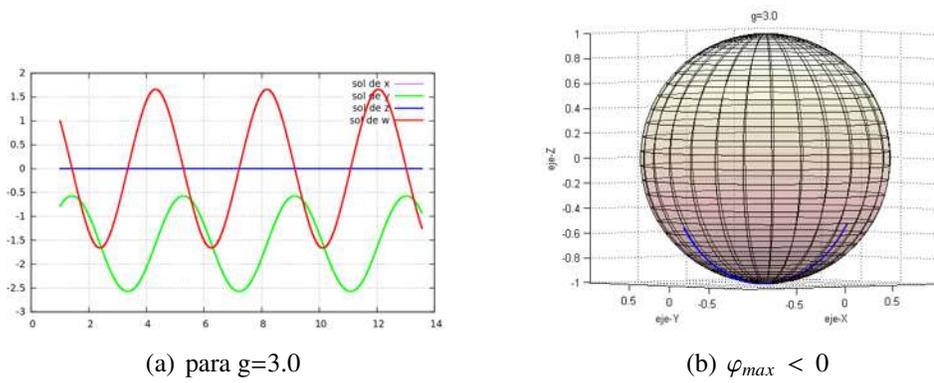


Figura 5.19

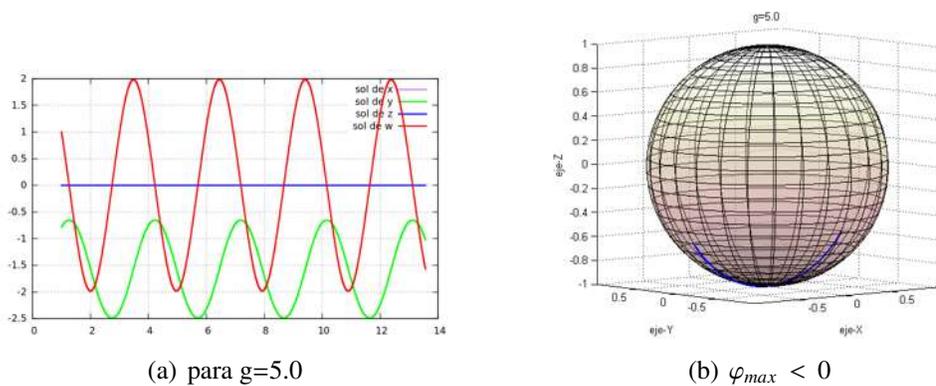


Figura 5.20

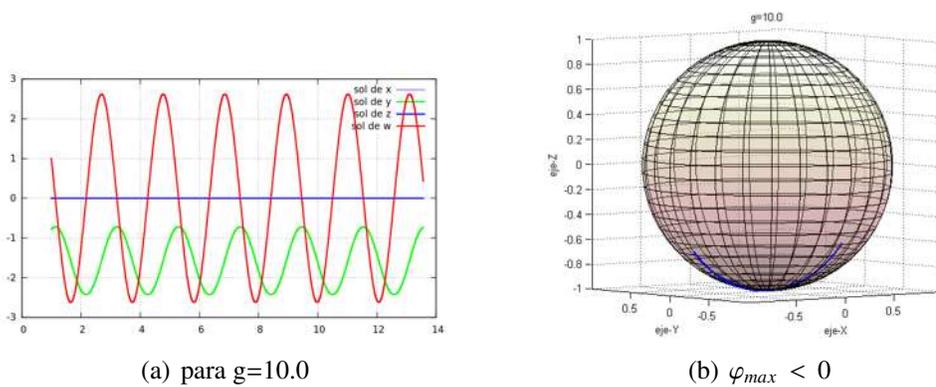


Figura 5.21

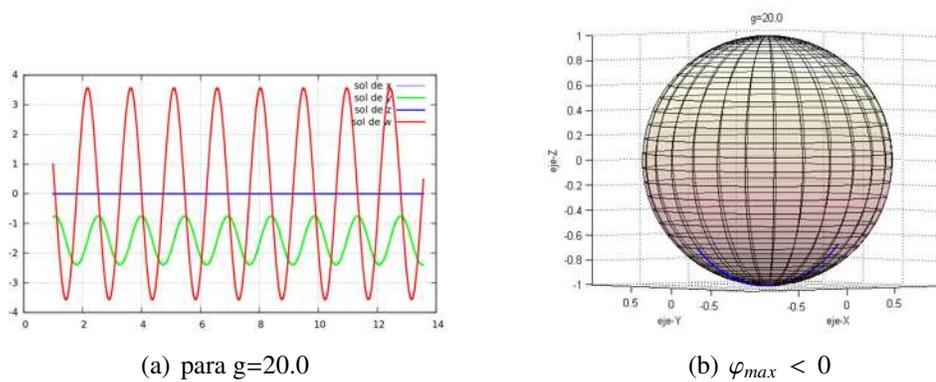


Figura 5.22

Capítulo 6

Conclusiones

La principal aportación de este trabajo ha sido presentar un análisis cualitativo de la trayectoria que sigue una partícula de masa $m > 0$ de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de Hamilton, tal que su movimiento se encuentra restringido en una esfera \mathbb{S}^2 de radio $r = 1$. Este hecho nos motiva a desarrollar una teoría que generalmente en los libros de mecánica no se presenta. En particular nos interesan dos sistemas mecánicos Hamiltonianos. El primero un sistema mecánico libre de una fuerza gravitacional g , pero que satisface toda la teoría cualitativa desarrollada. El segundo el mismo sistema mecánico pero con una fuerza gravitacional g presente, lo cual nos llevó a estudiar cómo es el movimiento que realiza la partícula cuando aumentamos el valor de g . En ambos casos se busca la relación entre dos sistemas mecánicos Hamiltonianos en un campo gravitatorio. Existen sistemas de ecuaciones diferenciales que no es posible encontrar soluciones exactas a través de métodos analíticos conocidos, en estos casos el siguiente paso a seguir es el de realizar su estudio cualitativo. De esta forma aunque desconocemos las soluciones del sistema, podemos saber en cambio cómo se comportan en cierto tiempo. Sin embargo, existen situaciones donde es preciso conocer, de forma aproximada, el valor de la solución en un cierto punto. Por tal motivo, el objetivo que buscamos al final de este trabajo, es el de ofrecer técnicas de aproximación numérica que nos brinden respuestas para este tipo de situaciones. Se mostró que el manejo adecuado de un método numérico, para este trabajo; el integrador numérico de *Runge-Kutta 4* proporcionó soluciones aproximadas del sistema de movimiento de Hamilton.

Bibliografía

- [1] H. Goldstein. *Mecánica Clásica*. Editorial Reverté, Barcelona, 1994.
- [2] A. Iserles. *A first Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*. Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University, 2008.
- [3] Landau L.D. and Lifschitz E.M. *Mecánica*. Editorial Reverté, Barcelona, 1994.
- [4] Fink K.D Mathews, J.H. *Métodos Numéricos con MATLAB*. Prentice Hall, Madrid, 2000.
- [5] MATLAB© Versión R2014a. *The language of technical computing*. The MathWorks, Inc. Massachusetts, 2014.
- [6] M. Spivak. *Calculus*. Editorial Reverté, Barcelona, 1974.
- [7] Villa Morales, José Antonio. *Momento angular en la mecánica hamiltoniana*. Tesis de Maestría, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, 2015.