



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO,
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO E
INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Geodésicas Simples en Superficies Hiperbólicas con una Cúspide

T E S I N A

*que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:*

YESENIA VILLICAÑA MOLINA

Asesor:
Doctor en Matemáticas Jorge Luis López López

Morelia, Michoacán – Julio, 2015

Índice general

Resumen	2
Abstract	3
Introducción	4
0.1. Unas palabras sobre la importancia del trabajo de McShane	5
1. Repaso de resultados generales	6
1.1. Superficies hiperbólicas	6
1.2. Trompetas	6
1.3. Toro ponchado	7
1.4. Clasificación de isometrías	8
1.5. Lema de Shimizu	9
2. El Teorema de McShane	12
2.1. Densidad de G_∞	13
2.2. Geodésicas simples	13
2.3. Vecindades cuspidales	14
2.4. Construcción de zonas aisladas	15
2.5. Puntos de regreso	18
2.6. Extremos de zonas aisladas	21
2.7. El Teorema de McShane	24
A. Identidad de McShane	26
A.1. Una prueba de la Identidad de McShane	27

Resumen

S denotará una superficie ponchada (i.e. una superficie cerrada menos un punto) dotada de una métrica Riemanniana completa de curvatura constante -1 y área finita. El objetivo de esta tesina es entender sus *geodésicas cuspidales* (i.e. que se escapan de cualquier subconjunto compacto de S), y presentar un bosquejo de la prueba de la Identidad de McShane.

Las geodésicas cuspidales de S son de dos tipos: si los dos extremos se escapan de todo subconjunto compacto decimos que la geodésica es *bicuspidal*, y si solamente uno de sus extremos es el que se escapa entonces la llamamos *unicuspidal*. El conjunto de todas las geodésicas cuspidales (orientadas) está parametrizado de manera natural por un círculo \mathbb{S}^1 . McShane describió las *geodésicas cuspidales simples* de S como subconjunto de tal \mathbb{S}^1 , probando que las geodésicas unicuspidales simples corresponden a un conjunto de Cantor $K \subset \mathbb{S}^1$ y que en cada componente conexa de $\mathbb{S}^1 \setminus K$ existe exactamente un punto correspondiente a una geodésica bicuspidal simple. Además, cada punto que es frontera de una componente conexa de $\mathbb{S}^1 \setminus K$ corresponde a una geodésica unicuspidal simple que se aproxima espiraleando a una geodésica cerrada simple. En el segundo capítulo presentamos una prueba de todos estos resultados.

En el apéndice que anexamos, haciendo uso de trigonometría hiperbólica, del caso especial para el toro ponchado del Teorema de McShane y de que el anterior conjunto de Cantor K tiene medida nula en \mathbb{S}^1 (por un resultado de Birman y Series [3] que usamos aquí sin prueba) se presenta un bosquejo de la demostración de la Identidad de McShane

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{1 + e^{\ell(\alpha)}} = \frac{1}{2}$$

donde la suma es sobre todas las α que son geodésicas cerradas simples en el toro ponchado, y $\ell(\alpha)$ denota la longitud de α . La convergencia de esta serie a la constante $1/2$ es independiente de la métrica Riemanniana (completa, de curvatura constante -1 , con área finita) en el toro ponchado.

Palabras claves: Identidad de McShane, geodésicas simples, superficies hiperbólicas ponchadas, geodésicas cuspidales, toro ponchado.

Abstract

Let S be a punctured surface (i.e a closed surface minus one point) with a complete Riemannian metric of constant curvature and finite area. In this thesis we study the *cuspidal geodesics* in S (i.e. it comes out of any compact subset in S) and show a sketch of the proof about the McShane Identity.

The cuspidal geodesics in S are of two types: if both ends comes out of any compact subset, we say that the geodesic is *bicuspidal*, and if only one of its ends comes out, then it is called *unicuspidal*. The set of all cuspidal geodesics (oriented) is parametrized naturally for a circle \mathbb{S}^1 . McShane described the simple unicuspidal geodesics of S like subset of this \mathbb{S}^1 . He showed that the simple unicuspidal geodesics correspond to a Cantor set $K \subset \mathbb{S}^1$ and each connected component of $\mathbb{S}^1 \setminus K$ contains exactly one point corresponding to a simple bicuspidal geodesic. Further, each endpoint of connected component in $\mathbb{S}^1 \setminus K$ correspond to one simple unicuspidal geodesic and this geodesic spiral onto a simple closed curves. In the second chapter we showed all previous results.

In the appendix, using hyperbolic trigonometry, the special case for the punctured torus in the McShane theorem and a result (without proof) to say that the previous cantor set K has zero measure in \mathbb{S}^1 , we show a sketch of the proof about the McShane Identity

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{1 + e^{\ell(\alpha)}} = \frac{1}{2}$$

where the sum is over all simple closed geodesics α in the punctured torus, and $\ell(\alpha)$ is the length of α . The convergence of this series to the constant $1/2$ is independent of the Riemannian metric (complete, constant curvature -1 , with finite area) in the punctured torus.

Introducción

S denotará una superficie ponchada (i.e. una superficie cerrada menos un punto) dotada de una métrica Riemanniana completa de curvatura constante -1 y área finita. El objetivo de esta tesina es entender sus *geodésicas cuspidales* (i.e. que se escapan de cualquier subconjunto compacto de S), y presentar un bosquejo de la prueba de una identidad sorprendente desde mi punto de vista: la Identidad de McShane.

Las geodésicas cuspidales de S son de dos tipos: si los dos extremos se escapan de todo subconjunto compacto decimos que la geodésica es *bicuspidal*, y si solamente uno de sus extremos es el que se escapa entonces la llamamos *unicuspidal*. El conjunto de todas las geodésicas cuspidales (orientadas) está parametrizado de manera natural por un círculo \mathbb{S}^1 . McShane [1] describió las *geodésicas cuspidales simples* de S como subconjunto de tal \mathbb{S}^1 , probando que las geodésicas unicuspidales simples corresponden a un conjunto de Cantor $K \subset \mathbb{S}^1$ y que en cada componente conexa de $\mathbb{S}^1 \setminus K$ existe exactamente un punto correspondiente a una geodésica bicuspidal simple. Además, cada punto que es frontera de una componente conexa de $\mathbb{S}^1 \setminus K$ corresponde a una geodésica unicuspidal simple que se aproxima espiraleando a una geodésica cerrada simple. En el segundo capítulo probamos todos estos resultados basándonos en [2].

En el apéndice que anexamos, haciendo uso de trigonometría hiperbólica, del caso especial para el toro ponchado del Teorema de McShane (Teorema 32) y de que el anterior conjunto de Cantor K tiene medida nula en \mathbb{S}^1 (por un resultado de Birman y Series [3] que usamos aquí sin prueba) se presenta un bosquejo de la demostración de la Identidad de McShane

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{1 + e^{\ell(\alpha)}} = \frac{1}{2}$$

donde la suma es sobre todas las α que son geodésicas cerradas simples en el toro ponchado, y $\ell(\alpha)$ denota la longitud de α . La convergencia de esta serie a la constante $1/2$ es independiente de la métrica Riemanniana (completa, de curvatura constante -1 , con área finita) en el toro ponchado.

Al final de la tesina se incluye una página de notación para el beneficio del lector.

No hay resultados nuevos en esta tesina. Nos limitamos a llenar detalles en las referencias originales para brindar argumentos que esperamos se puedan seguir con conoci-

tos generales de geometría hiperbólica. Como referencia para tal fin escogimos el libro de Thurston [4]: si un resultado está en él entonces nos sentimos con libertad de usarlo.

0.1. Unas palabras sobre la importancia del trabajo de McShane

La Identidad de McShane ha sido generalizada por varios autores y ha resultado tener aplicaciones interesantes. Por ejemplo, Mirzakhani (medallista Fields recientemente) la generalizó a superficies con frontera y la aplicó de manera sorprendente en tres trabajos: dio una fórmula recursiva para el volumen del espacio moduli de superficies con frontera (dotado de la geometría de Weil-Petersson) [5], dio una fórmula para el comportamiento asintótico del número de geodésicas cerradas simples de longitud menor que $L > 0$ en una superficie hiperbólica cerrada [6] y la usó como herramienta para estudiar la fórmula de Kontsevich-Witten sobre el número de intersección en el espacio moduli de curvas [7].

Por otro lado, la fórmula de McShane también ha sido generalizada a 3-variedades hiperbólicas de volumen finito, dando información sobre la geometría de sus cúspides [8, 9].

Capítulo 1

Repaso de resultados generales

1.1. Superficies hiperbólicas

Denotamos por $\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ al semiplano superior provisto de la métrica $(dx^2 + dy^2)/y^2$ de curvatura constante -1 . El grupo de isometrías de \mathbb{H} que preservan orientación es

$$\text{Isom}^+(\mathbb{H}) = \left\{ f(z) = \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}. \quad (1.1)$$

Una *superficie hiperbólica* es una superficie Riemanniana isométrica a un cociente \mathbb{H}/G en el cual G es un subgrupo discreto de $\text{Isom}^+(\mathbb{H})$ que actúa libremente en \mathbb{H} . Toda superficie conexa orientable dotada de una métrica Riemanniana completa de curvatura constante -1 es una superficie hiperbólica. Pueden consultarse detalles de todos estos resultados en [Secciones 2.2, 3.4 y 3.5 en **4**]. Una referencia un poco más Riemanniana puede ser [Secciones 2.4 y 2.5 en **9**].

1.2. Trompetas

Una *horobola basada en* $x_0 \in \mathbb{R}$ es de la forma

$$\{x + iy \in \mathbb{H} : (x - x_0)^2 + (y - r)^2 \leq r^2\}$$

para algún $r > 0$. Una *horobola basada en* ∞ es de la forma $\{x + iy \in \mathbb{H} : y \geq r\}$ para algún $r > 0$. Una transformación $f \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ que manda x_0 en ∞ manda horobolas basadas en x_0 en horobolas basadas en ∞ , y también conjuga el subgrupo de $\text{Isom}^+(\mathbb{H})$ de las transformaciones que dejan invariante cada horobola basada en x_0 en el subgrupo de las isometrías que dejan invariante cada horobola basada en ∞ . El subgrupo de $\text{Isom}^+(\mathbb{H})$

que está conformado por las transformaciones que dejan invariante cada horobola basada en ∞ es $\{f(z) = z + a : a \in \mathbb{R}\}$. Una *trompeta* es una superficie Riemanniana isométrica al cociente de una horobola $\{x + iy \in \mathbb{H} : y \geq r > 0\}$ por un grupo cíclico generado por una translación $f(z) = z + a$ con $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ahora, supongamos que $S = \mathbb{H}/G$ es una superficie hiperbólica conexa de *volumen finito*. Entonces S admite una descomposición $S = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_n$ donde

1. S_0 es una superficie compacta con frontera, cuya frontera consiste de n componentes, cada una homeomorfa a un círculo;
2. S_j es homeomorfa a $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 1\}$, $j = 1, \dots, n$, con su círculo frontera identificado con una componente de la frontera de S_0 ;
3. geoméricamente S_j es una trompeta. Más precisamente, si $\pi : \mathbb{H} \rightarrow S$ es la proyección al cociente, entonces $\pi^{-1}(S_j)$ tiene componentes conexas que son horobolas. Al fijarnos en una de tales horobolas, resulta que cada elemento de G preserva tal horobola \mathcal{H}_j o la manda en otra horobola, y por lo tanto se puede hablar del subgrupo G_j de G que preserva \mathcal{H}_j . Tal subgrupo resulta ser cíclico, y por lo tanto \mathcal{H}_j/G_j es una trompeta.

Ver [Sección 4.5 en **4**] para detalles de esta descomposición cuspidal en dimensión arbitraria, o la discusión en [Sección 4.4 en **11**] para el caso bidimensional.

1.3. Toro ponchado

El *toro ponchado* es la superficie cerrada de género 1 menos un punto. A dicha superficie la denotaremos por F a partir de ahora. Es sencillo construir en F una métrica Riemanniana completa, de curvatura constante -1 y área finita de la siguiente manera: partiendo del modelo del disco \mathbb{D} del plano hiperbólico, podemos pegar los lados opuestos del cuadrado ideal hiperbólico con vértices en los puntos $\pm 1, \pm i \in \partial\mathbb{D}$. En particular, si identificamos los lados opuestos usando isometrías hiperbólicas cuyos ejes sean $\{x + iy : x = y\} \cap \mathbb{D}$ y $\{x + iy : x = -y\} \cap \mathbb{D}$, podemos conseguir que la geometría de curvatura constante -1 y área finita sea además completa (ver [Sección 3.4] en **4**). En efecto, existe una infinidad de estructuras hiperbólicas en el toro ponchado. Por ejemplo, uno puede considerar pantalones hiperbólicos tales que la cintura mide 0 (es una *cúspide*) y ambas piernas tengan la misma longitud, para luego identificar las piernas. Variando la longitud de las piernas y la torcedura al identificarlas se tienen distintas estructuras en F (ver [Sección 4.6 en **4**] o [Sección 3.4 en **11**]).

1.4. Clasificación de isometrías

Ahora, de la ecuación (1.1), tenemos que cualquier elemento en $\text{Isom}^+(\mathbb{H})$ que no es la identidad tiene a lo más dos puntos fijos en \mathbb{C} ya que los puntos fijos son las soluciones de la ecuación cuadrática $cz^2 + (d - a)z - b = 0$.

Definición 1. Dada $f \in \text{Isom}^+(\mathbb{H})$ diremos que f es una isometría

elíptica: si tiene un punto fijo en el interior de \mathbb{H} .

parabólica: si tiene exactamente un punto fijo y además este punto fijo está en $\mathbb{S}_\infty^1 = \partial(\mathbb{H}) \cup \{\infty\}$.

hiperbólica: si tiene exactamente dos puntos fijos y además éstos están en $\mathbb{S}_\infty^1 = \partial(\mathbb{H}) \cup \{\infty\}$.

Algunas observaciones:

elípticas:

- Esto ocurre cuando $a + d \in (-2, 2)$.
- No son elementos de G , pues las transformaciones de cubierta no triviales no fijan puntos. Por lo tanto, no trabajaremos con este tipo de isometrías.

parabólicas:

- Esto ocurre cuando $a + d = \pm 2$.
- Son conjugadas a traslaciones reales $z + \lambda$, ya que las traslaciones reales son las isometrías que fijan a ∞ .
- Localmente su punto fijo es atractor por un lado y repulsor por el otro. Aquí, decimos que por un lado es repulsor (o atractor) si las imágenes $f^n(x)$ de cualquier elemento x se alejan (o se acercan) del punto fijo cuando n se acerca a ∞ .

hiperbólicas:

- Esto ocurre cuando $a + d \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$.
- Son conjugadas a dilataciones λz , ya que las dilataciones son las isometrías hiperbólicas que fijan al origen y a ∞ .
- La geodésica que conecta los puntos fijos de una isometría f es llamada *el eje de f* , y lo denotaremos como A_f .
- Localmente uno de los puntos fijos es atractor y el otro es repulsor.

Lema 2. Dada $S = \mathbb{H}/G$ una superficie hiperbólica, los ejes de isometrías hiperbólicas en G se corresponden con geodésicas cerradas en S .

Demostración. Consideremos un eje A_f de una isometría $f \in G$, cuyos puntos fijos son a y b . Salvo conjugación podemos suponer que a es el origen y b es ∞ . Si f fija a 0 e ∞ , entonces $f(z) = rz$ para algún $r \in \mathbb{R}$. Por lo tanto el cociente de dicha geodésica con el subgrupo G debe ser una geodésica cerrada en S . Para probar lo anterior, basta observar

que al hacer el cociente por el subgrupo $\langle f \rangle$ ya es una geodésica cerrada en S . Además no puede haber otro r' con $g(z) = r'z \in G$ pues G es discreto, y finalmente el resto de los elementos de G podrían pegar puntos de A_f pero esto sólo ocasionaría que la geodésica cerrada no fuera simple.

Ahora, dada α , una geodésica cerrada en S , consideremos un levantamiento de α en \mathbb{H} y denotémosla por $\tilde{\alpha}$. Sea $x \in \alpha$ tal que en x no hay autointersecciones de α (pues podría ser que α sea una geodésica no simple). Notemos que en $\tilde{\alpha}$ hay una infinidad de levantamientos del punto x pues la longitud de α es finita, mientras que la de $\tilde{\alpha}$ es infinita al ser una geodésica en \mathbb{H} . Denotemos por \tilde{x}_1 y \tilde{x}_2 a dos de dichos levantamientos. Como ambos son levantamientos de x , existe $f \in G$ tal que $f(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. Entonces la geodésica $\tilde{\alpha}$ va a dar mediante f a otra geodésica $\tilde{\alpha}_2$ que pasa por \tilde{x}_2 . Como elegimos a x de modo que α no se autointersectara en x , concluimos que $\tilde{\alpha}_2$ debe ser $\tilde{\alpha}$. Entonces f fija a los extremos de $\tilde{\alpha}$ y por lo tanto $\tilde{\alpha}$ es el eje de la isometría f . \square

Lema 3. *Si $f, g \in G$ son dos isometrías hiperbólicas que comparten un punto fijo entonces también comparten el otro punto fijo.*

Demostración. Procedamos por contradicción suponiendo que existen dos isometrías hiperbólicas $f, g \in G$ que comparten sólo un punto fijo. Entonces A_f y A_g son geodésicas arbitrariamente cercanas cuyas proyecciones son geodésicas cerradas en S las cuales deben estar a distancia positiva. Esto es una contradicción, pues la proyección del espacio cubriente es una isometría. Por lo tanto f y g comparten ambos puntos fijos o no comparten ninguno. \square

1.5. Lema de Shimizu

Una forma explícita de uniformizar las trompetas es mediante el siguiente lema.

Lema 4 (Shimizu). *Si G es un grupo Fuchsiano que contiene a la traslación $g_0(z) = z + 1$, entonces cualquier $g \in G$ que tiene una representación matricial*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}), \quad (1.2)$$

satisface que $|c| \geq 1$ ó $c = 0$.

Demostración. Procedamos por contradicción suponiendo que existe un elemento $g \in G$ con representación matricial A como en (1.2) pero $0 < |c| < 1$. Denotamos por

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}), \quad (1.3)$$

a la representación matricial de g_0 . Después definimos por recursión $A_1 = A$ y $A_{n+1} = A_n A_0 A_n^{-1}$ para cualquier natural $n \geq 1$. Entonces si

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

tenemos que

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = A_{n+1} = A_n A_0 A_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - a_n c_n & a_n^2 \\ -c_n^2 & 1 + a_n c_n \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Ahora, como $c_{n+1} = -c_n^2$, afirmamos que $c_n = -c^{2^{n-1}}$ para cualquier $n \geq 2$, pues probándolo por inducción tenemos que $c_2 = -c^2$ y si $c_n = -c^{2^{n-1}}$, entonces $c_{n+1} = -c_n^2 = -(-c^{2^{n-1}})^2 = -c^{2^n}$. De aquí, $c_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Afirmación: Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $|a_n| \leq M$, donde $M = \max\{|a|, \frac{1}{1-|c|}\}$.

En efecto, $|a_1| \leq M$, y si $|a_n| \leq M$, entonces hay dos casos que verificar:

$$|a_n| \leq \frac{1}{1-|c|} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{1-|c|} < |a_n| \leq |a|.$$

En el primer caso,

$$|a_{n+1}| = |1 - a_n c_n| \leq 1 + |a_n| |c_n| \leq 1 + \frac{|c_n|}{1-|c|} = \frac{1 - |c| - |c|^{2^{n-1}}}{1-|c|} \leq \frac{1}{1-|c|} \leq M.$$

Y en el segundo caso tenemos $1 + |a| |c| \leq |a|$ y por lo tanto,

$$|a_{n+1}| = |1 - a_n c_n| \leq 1 + |a_n| |c_n| \leq 1 + |a| |c| \leq |a| = M,$$

lo cual concluye la prueba de la afirmación.

Finalmente, puesto que $c_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y $|a_n|$ está acotada, tenemos que $a_n c_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Así, igualando entrada a entrada de las matrices en 1.5, tenemos

$$a_{n+1} = 1 - a_n c_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n = 1,$$

$$b_{n+1} = a_n^2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 1,$$

$$d_{n+1} = 1 + a_n c_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d_{n+1} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n = 1.$$

Por lo tanto $c_n \rightarrow 0$ y $a_n, b_n, d_n \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces concluimos que $A_n \rightarrow A_0$ cuando $n \rightarrow \infty$, pero esto contradice el hecho de que G es un grupo discreto. \square

Lema 5. Dada $S = \mathbb{H}/G$ una superficie hiperbólica, se tiene que los puntos fijos de isometrías parabólicas en G se proyectan en cúspides de S .

Demostración. Consideremos $f \in G$ isometría parabólica y sin pérdida de generalidad podemos suponer que ∞ es su punto fijo. Entonces por el Lema 4 cualquier $g \in G$ se ve de la forma

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{con} \quad |c| \geq 1 \quad \text{ó} \quad c = 0.$$

Entonces,

$$\text{Im } g(z) = \frac{g(z) - \overline{g(z)}}{2i} = \frac{\text{Im } z}{|cz + d|^2} \leq \frac{\text{Im } z}{(\text{Im}(cz + d))^2} = \frac{\text{Im } z}{|c|^2(\text{Im } z)^2} = \frac{1}{|c|^2 \text{Im } z} \leq \frac{1}{\text{Im } z},$$

donde la última desigualdad se da porque $|c|^2 \geq 1$.

Entonces si $\text{Im } z > 1$, tenemos que $\text{Im } g(z) < 1$ para cualquier $g \in G$ hiperbólico, o en otras palabras, las isometrías hiperbólicas no actúan en $U = \{z \in \mathbb{H} : \text{Im } z > 1\}$, y por lo tanto $U/G = U/\langle z + 1 \rangle$, es decir U/G es una trompeta. □

Lema 6. Un punto en $\partial(\mathbb{H}) \cup \{\infty\}$ no puede ser punto fijo de una transformación hiperbólica y de una transformación parabólica simultáneamente.

Demostración. Procedamos por contradicción. Supongamos que p es un punto fijo de una isometría parabólica g y también lo es de una isometría hiperbólica f . Por ser punto fijo de una isometría parabólica, el Lema 5 nos dice que cualquier geodésica que tenga a p como uno de sus extremos se proyecta en una geodésica no compacta en S . En particular esto le sucede al eje A_f , el cual se proyecta en una geodésica cerrada en S (ver Lema 2). □

Capítulo 2

El Teorema de McShane

A lo largo de este capítulo reuniremos las herramientas necesarias para finalmente probar el Teorema de McShane (Sección 2.7). A partir de ahora, S denotará una superficie ponchada (i.e. una superficie cerrada menos un punto al que llamaremos cúspide y denotaremos por c) dotada de una métrica Riemanniana completa de curvatura constante -1 y área finita, la cual por ser superficie hiperbólica tenemos que $S = \mathbb{H}/G$, donde G es un subgrupo discreto de $\text{Isom}^+(\mathbb{H})$ que actúa libremente en \mathbb{H} .

La primera sección está dedicada a probar la densidad de los levantamientos de la cúspide en $\partial(\mathbb{H}^2) \cup \{\infty\}$ (a partir de ahora denotaremos por \mathbb{S}_∞^1 a $\partial(\mathbb{H}^2) \cup \{\infty\}$). Luego, en la segunda sección introducimos formalmente la definición de una *geodésica simple* S y de una *geodésica simple en \mathbb{H}* ; y con ello probamos algunas características de las mismas.

En la tercera sección probamos la existencia de vecindades cuspidales, las cuales son vecindades de la cúspide que atrapan geodésicas simples, es decir, dichas vecindades cumplen la propiedad de que si una geodésica simple entra a ella, entonces ya no sale.

Después, consideraremos $\pi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/G = S$ la proyección natural (aplicación cubriente) y sin pérdida de generalidad supondremos que ∞ es levantamiento de c .

Una notación importante durante este capítulo es la de $\tilde{\gamma}_x$, la cual se refiere a la geodésica vertical en \mathbb{H} (orientada hacia abajo) cuyos extremos son ∞ y x . En el caso de que x sea también levantamiento de c diremos que $\tilde{\gamma}_x$ es una *geodésica bicuspidal* y de lo contrario es una *geodésica unicuspidal*. Y finalmente, una *vecindad de una geodésica $\tilde{\gamma}_x$* será un conjunto de geodésicas $\tilde{\gamma}_y$ con $y \in (a, b)$, donde $a < x < b$.

En la Sección 2.4 hacemos una construcción muy importante: para cada geodésica bicuspidal simple $\tilde{\gamma}_x$ construimos una vecindad alrededor de ella a la cual llamaremos *zona aislada*. Le dimos este nombre, pues es una vecindad que aísla a una geodésica bicuspidal simple de las demás geodésicas cuspidales simples (es decir, para toda $\tilde{\gamma}_y$ en dicha vecindad, con $y \neq x$ se tiene que $\tilde{\gamma}_y$ es una geodésica no simple). Y finalmente en la Sección 2.6 entenderemos los extremos de las zonas aisladas: probaremos que estos extremos son

geodésicas verticales que se proyectan en geodésicas simples que se aproximan espiraleando a geodésicas cerradas simples.

2.1. Densidad de G_∞

Proposición 7. *Supongamos que G es un grupo Fuchsiano¹ de coárea finita y G_∞ denota la órbita de ∞ . Si existe $x \in G_\infty \setminus \{\infty\}$, entonces G_∞ es un conjunto denso en \mathbb{S}_∞^1 .*

Demostración. Para probar dicha densidad probaremos que $\overline{G_\infty} = \mathbb{S}_\infty^1$, donde $\overline{G_\infty}$ denota la cerradura de G_∞ . En efecto, procedamos por contradicción suponiendo que existe $x \in \mathbb{S}_\infty^1 \setminus \overline{G_\infty}$ y por lo tanto un intervalo $I = (a, b) \subset \mathbb{S}_\infty^1 \setminus \overline{G_\infty}$ (el intervalo existe pues $\overline{G_\infty}$ es un conjunto cerrado). Podemos suponer I maximal en el sentido de que $a, b \in \overline{G_\infty}$ (esto pues $x \neq \infty$). Después, denotemos por U a la región abierta acotada por I y α_{ab} , donde α_{ab} es la geodésica hiperbólica que une los puntos a y b .

Ahora, H_{ab} será el conjunto de elementos $\gamma \in G$ tales que $\gamma(U) \cap U \neq \emptyset$. Notemos que

$$H_{ab} = \{\gamma \in G : \gamma(a) = a \text{ y } \gamma(b) = b\},$$

pues si $\gamma(U) \cap U \neq \emptyset$, entonces $\gamma(I) \cap I \neq \emptyset$. Así, afirmamos que $\gamma(I) = I$ pues de lo contrario un extremo de $\gamma(I)$ está en el interior de I o un extremo de I está en el interior de $\gamma(I)$. Lo anterior no puede pasar pues los extremos de ambos intervalos son elementos de $\overline{G_\infty}$ y cualquier elemento en el interior de dichos intervalos son elementos de $\mathbb{S}_\infty^1 \setminus \overline{G_\infty}$.

Ahora, como H_{ab} es un subgrupo discreto, debe ser un grupo cíclico generado por un elemento hiperbólico γ y por lo tanto

$$U/G = U/H_{ab} = U/\langle \gamma \rangle.$$

Pero $U/\langle \gamma \rangle$ tiene área infinita lo cual contradice que G tenga coárea finita. \square

2.2. Geodésicas simples

Definición 8. Una geodésica en S es *simple* si cualesquiera dos de sus levantamientos en \mathbb{H} son disjuntos. Una geodésica $\tilde{\gamma}$ en \mathbb{H} es *simple* si $\tilde{\gamma} \cap g(\tilde{\gamma}) = \emptyset$ para todo $g \in G$.

Lema 9. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- a) $\gamma \in S$ es simple.
- b) Algún levantamiento de γ en \mathbb{H} es simple.

¹Un grupo Fuchsiano es un subgrupo discreto de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$

c) Todos los levantamientos de γ en \mathbb{H} son simples.

Demostración. La única implicación que hace falta verificar es $b) \Rightarrow c)$. Supongamos que algún levantamiento de γ es simple, y denotemos por $\tilde{\gamma}$ a dicho levantamiento. Entonces $\tilde{\gamma} \cap g(\tilde{\gamma}) = \emptyset$ para todo $g \in G$. Pero $\{g(\tilde{\gamma}) : g \in G\}$ coincide con el conjunto de todos los levantamientos de γ , lo cual implica que todos estos son simples. \square

Lema 10. Si $\tilde{\gamma}_x$ no es simple, entonces $\tilde{\gamma}_x$ tiene una vecindad de geodésicas no simples.

Demostración. Como $\tilde{\gamma}_x$ no es simple, existe $p = \tilde{\gamma}_x \cap g(\tilde{\gamma}_x)$ con $g \in G$. Consideremos $\delta_1 = \min\left(\frac{|x - g(\infty)|}{2}, \frac{|x - g(x)|}{2}\right)$.

Elegimos q en el segmento geodésico que une a p con $g(x)$ de manera que q no interseque a la cerradura de la vecindad de radio δ_1 alrededor de $\tilde{\gamma}_x$. Consideremos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, para que $B_\varepsilon^H(q)$ no interseque dicha vecindad de $\tilde{\gamma}_x$. Por la continuidad de g , existe δ_2 tal que si $d_H(s, g^{-1}(q)) < \delta_2$ entonces $d_H(g(s), q) < \varepsilon$.

Así, afirmamos que si $\tilde{\gamma}_y$ está en una vecindad de radio $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ alrededor de $\tilde{\gamma}_x$, entonces $g(\tilde{\gamma}_y) \cap \tilde{\gamma}_y \neq \emptyset$. En efecto, puesto que $g(\tilde{\gamma}_y)$ es la geodésica que une a $g(y)$ con $g(\infty)$, sólo necesitamos ver que $g(y) > y$, lo cual sucede por la elección de $\delta < \delta_2$. \square

Lema 11. Si $\tilde{\alpha}$ es una curva simple en \mathbb{H} que es homotópica (mediante una homotopía que fija extremos) a una geodésica $\tilde{\gamma}_x$, entonces $\tilde{\gamma}_x$ también es simple.

Demostración. Procedemos por contradicción suponiendo que $\tilde{\alpha}$ es una curva simple en \mathbb{H} , $\tilde{\gamma}_x$ una geodésica no simple y $H : I \times I \rightarrow \mathbb{H}$ es una homotopía propia entre $\tilde{\gamma}_x$ y $\tilde{\alpha}$ mediante curvas con extremos ∞ y x . Como $\tilde{\gamma}_x$ no es simple, existe $g \in G$ tal que $\tilde{\gamma}_x \cap g(\tilde{\gamma}_x) \neq \emptyset$. Entonces $g \circ H : I \times I \rightarrow \mathbb{H}$ será una homotopía propia entre $g(\tilde{\gamma}_x)$ y $g(\tilde{\alpha})$ mediante curvas con extremos $g(\infty)$ y $g(x)$, los cuales están separados por x . Por lo tanto $g(\tilde{\alpha}) \cap \tilde{\alpha} \neq \emptyset$, es decir, $\tilde{\alpha}$ es una curva no simple, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\tilde{\gamma}_x$ también es simple. \square

2.3. Vecindades cuspidales

Llamaremos *vecindad cuspidal* a una vecindad $\mathcal{U} \subset S$ de c de manera que si una geodésica simple entra a \mathcal{U} entonces ya no sale. Salvo homeomorfismo, tendremos que la frontera de dicha vecindad es \mathbb{S}^1 . La existencia de dichas vecindades se prueba en el siguiente resultado.

Lema 12. Existen vecindades cuspidales en S .

Demostración. Afirmamos que $R = \{z \in \mathbb{H} : \text{Im } z > 1\}$ cubre una vecindad cuspidal en S . En efecto, sin pérdida de generalidad, $f(z) = z + 1 \in G$. Entonces, si γ es una

geodésica vertical que entra a R , entonces ya no sale. De otro modo, si γ es una geodésica que visualizamos como un semicírculo euclideo y γ entra a R , entonces el diámetro de dicho semicírculo debe ser mayor que 1. Pero lo anterior implica que $\gamma \cap f(\gamma) \neq \emptyset$, lo cual contradice la simplicidad de γ . \square

2.4. Construcción de zonas aisladas

Lema 13. *El estabilizador de ∞ es un grupo cíclico generado por un elemento $f \in G$ el cual es parabólico. Este subgrupo lo denotaremos por G^∞ .*

Demostración. Si $g \in G^\infty$, entonces $g(z)$ es de la forma $\alpha z + \beta$ con α y β reales. Como $f(z) = z + 1 \in G$ es una isometría parabólica y fija a ∞ , el Lema 6 nos dice que no hay isometría hiperbólica en G que fija a ∞ . De aquí tenemos que $\alpha = 1$. Entonces G^∞ es subgrupo de $\{z + \beta : \beta \in \mathbb{R}\}$. Finalmente como G^∞ es discreto, concluimos que G^∞ es cíclico. \square

Construcción de zonas aisladas: Consideremos $\tilde{\gamma}_x$ una geodésica bicuspidal simple y $F := \{g(\tilde{\gamma}_x) : g \in G_x\}$ un conjunto de geodésicas que van hacia adentro, es decir geodésicas con extremo final en x . Como x e ∞ pertenecen a la misma órbita (pues $\tilde{\gamma}_x$ es geodésica bicuspidal), existe $h \in G$ tal que $h(\infty) = x$ y por lo tanto $h(\tilde{\gamma}_x)$ es una geodésica cuyo extremo inicial es x .

Afirmación: $h(\tilde{\gamma}_x)$ no coincide (sin importar orientación) con ningún elemento de F .

En efecto, procedamos por contradicción suponiendo que existe $g(\tilde{\gamma}_x) \in F$ que coincide con $h(\tilde{\gamma}_x)$. Entonces $h^{-1}(g(\tilde{\gamma}_x))$ coincide con $\tilde{\gamma}_x$ y por lo tanto $h^{-1}(g(0)) = \infty$ y $h^{-1}(g(\infty)) = 0$. Pero esto último implica que $h^{-1}(g(z)) = \lambda/z$ para algún $\lambda < 0$, lo cual es una contradicción pues $h \circ g$ es una isometría elíptica y no hay isometrías elípticas en G (ver observaciones de la Definición 1).

Ahora, denotamos por $h \circ F$ al conjunto $\{h(g(\tilde{\gamma}_x)) : g \in G_x\}$ que consta de geodésicas hacia afuera, es decir geodésicas con extremo inicial en x . Entonces tenemos que las geodésicas de F están intercaladas con las geodésicas de $h \circ F$.

Luego, como a $\tilde{\gamma}_x$ la elegimos hacia adentro, tenemos que la geodésica más cercana a $\tilde{\gamma}_x$, debe ser una geodésica hacia afuera. A dicha geodésica la llamaremos $\tilde{\gamma}_1$ y por cuestión de notación $\tilde{\gamma}_0 := \tilde{\gamma}_x$. Además, dado que $f(\tilde{\gamma}_x) = \tilde{\gamma}_1$ para algún $f \in G$, definimos

$$\tilde{\gamma}_n := f^n(\tilde{\gamma}_x) \quad \text{y} \quad x_n := f^n(x),$$

para cada natural $n \geq 2$. Notemos que x_n es el final de $\tilde{\gamma}_n$ y el principio de $\tilde{\gamma}_{n+1}$ (ver Figura 2.1). Sea $b = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. De manera análoga, construimos a a la izquierda de x .

Lema 14. *Consideremos $\tilde{\gamma}_x$ geodésica bicuspidal simple y para cada $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{\gamma}_n$ como la construcción anterior. Entonces,*

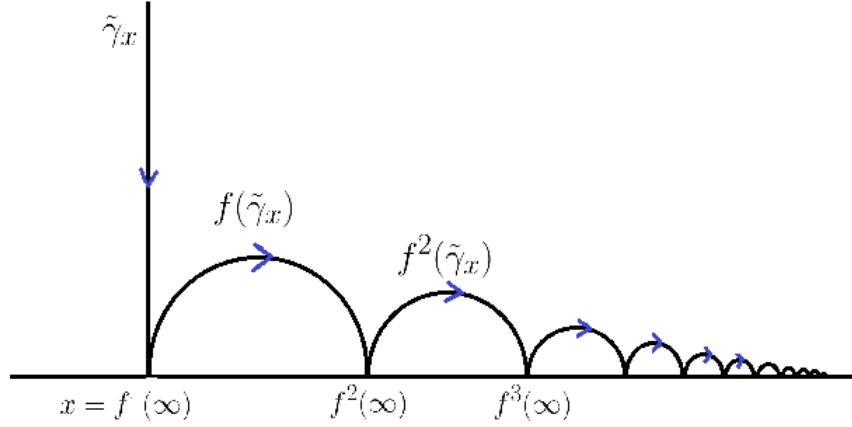


Figura 2.1

- a) No existe $g \in G$ tal que $g(\tilde{\gamma}_x)$ comience o termine en x_n y esté entre $\tilde{\gamma}_n$ y $\tilde{\gamma}_{n+1}$ para algún $n \in \mathbb{N}$.
- b) Para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$, $\tilde{\gamma}_n \cap \tilde{\gamma}_m = \emptyset$.
- c) Todas las geodésicas $\tilde{\gamma}_n$ están orientadas hacia la derecha.

Demostración. a) Procedamos por contradicción. Si existiera una geodésica $g(\tilde{\gamma}_x)$ que pasa por x_n y está entre $\tilde{\gamma}_n$ y $\tilde{\gamma}_{n+1}$, entonces $f^{-n}(g(\tilde{\gamma}_x))$ está entre $\tilde{\gamma}_0$ y $\tilde{\gamma}_1$, lo cual contradice la elección de $\tilde{\gamma}_1$.

- b) Dados $n, m \in \mathbb{N}$, tenemos que $\tilde{\gamma}_m$ y $\tilde{\gamma}_n$ son imágenes de $\tilde{\gamma}_x$ bajo elementos de G y además $\tilde{\gamma}_x$ es una geodésica simple. Entonces, usando el Lema 9 concluimos que $\tilde{\gamma}_n \cap \tilde{\gamma}_m = \emptyset$.
- c) Procedamos nuevamente por contradicción. Sea $\tilde{\gamma}_n$ la primer geodésica orientada hacia la izquierda. Sabemos que $n > 1$ pues construimos $\tilde{\gamma}_1$ orientada hacia la derecha. Por el inciso b) tenemos que $\tilde{\gamma}_n \cap \tilde{\gamma}_j = \emptyset$ para todo $j \in \mathbb{N}$, entonces el otro extremo de $\tilde{\gamma}_n$ debe acabar en algún x_j con $j < n$, lo cual no puede suceder por el inciso a).

□

Definición 15. Dada $\tilde{\gamma}_x$ geodésica bicuspidal simple, construimos a y b como arriba. El conjunto de geodésicas verticales asociadas a puntos en el intervalo (a, b) será llamado la *zona aislada* de $\tilde{\gamma}_x$ y su centro será $\tilde{\gamma}_x$.

Proposición 16. *En una zona aislada, el centro es la única geodésica simple.*

Demostración. Debemos probar que para todo $y \in (a, x) \cup (x, b)$, $\tilde{\gamma}_y$ no es simple. Sin pérdida de generalidad consideremos $y \in (x, b)$. En particular, $y \in (x_{i-1}, x_i]$ para algún $i \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $f(y) \in (x_i, x_{i+1}]$. Puesto que $f(\infty) = x$, tenemos que $f(\tilde{\gamma}_y)$ es la geodésica que une x con $f(y)$. De aquí, $\tilde{\gamma}_y \cap f(\tilde{\gamma}_y) \neq \emptyset$ y por lo tanto $\tilde{\gamma}_c$ no es simple. \square

Proposición 17. *Las geodésicas que corresponden a los extremos de una zona aislada son geodésicas unicuspidales.*

Demostración. Dada $\tilde{\gamma}_x$ geodésica bicuspidal simple, consideremos (a, b) el intervalo correspondiente a su zona aislada. Queremos verificar que a y b no son levantamientos de la cúspide. Procedamos por contradicción suponiendo que b sí lo es (el caso de a es análogo). Consideremos $g \in G$ tal que $g(\tilde{\gamma}_x)$ es una geodésica que sale de b y se dirige a su izquierda. Sabemos que existe dicha geodésica pues existía en x y estamos suponiendo que x está en la misma órbita que b . Por el primer inciso del Lema 14, tenemos que $g(\tilde{\gamma}_x)$ no puede terminar en ninguno de los puntos x_i de nuestra construcción, y por otro lado $\tilde{\gamma}_x$ no puede intersectar a ningún $\tilde{\gamma}_n$ pues es simple. De aquí, b no es levantamiento de c . \square

Lema 18. *Dada $\tilde{\gamma}_x$ geodésica bicuspidal simple, no existe $g \in G$ tal que $g(\tilde{\gamma}_x)$ intersekte a $\tilde{\gamma}_a$ o a $\tilde{\gamma}_b$.*

Demostración. Nuevamente, procedamos por contradicción. Supongamos que existe $g \in G$ tal que $g(\tilde{\gamma}_x) \cap \tilde{\gamma}_b \neq \emptyset$. Algún extremo de $g(\tilde{\gamma}_x)$ debe estar a la izquierda de b . Una vez más por el Lema 14, dicho extremo no puede ser algún x_n de la construcción. Entonces $g(\tilde{\gamma}_x)$ debe intersectar a algún $\tilde{\gamma}_n$, lo cual no puede suceder pues $\tilde{\gamma}_x$ es simple. \square

Proposición 19. *Los extremos de las zonas aisladas $\tilde{\gamma}_a$ y $\tilde{\gamma}_b$, son geodésicas simples.*

Demostración. Supongamos que $\tilde{\gamma}_b$ no es simple. Entonces existe $g \in G$ tal que $g(\tilde{\gamma}_b) \cap \tilde{\gamma}_b \neq \emptyset$. Si $g(\tilde{\gamma}_b)$ está orientada hacia la izquierda, entonces como g preserva orientación, $g^{-1}(\tilde{\gamma}_b) \cap \tilde{\gamma}_b \neq \emptyset$ y $g^{-1}(\tilde{\gamma}_b)$ está orientado hacia la derecha. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $g(\tilde{\gamma}_b)$ está orientada hacia la derecha y así, $g(\infty)$ está a la izquierda de b mientras que $g(b)$ está a su derecha. Puesto que $\tilde{\gamma}_n$ era una cadena de geodésicas cuyos extremos comenzaban en ∞ , seguía el centro x y convergían a b , entonces al aplicar la isometría g , tendremos una nueva cadena de geodésicas, cuyos extremos comienzan en $g(\infty)$ y convergen a $g(b)$, es decir será una cadena por debajo de $g(\tilde{\gamma}_b)$ (ver Figura 2.2). Por la proposición 17 sabemos que b no es levantamiento de c y por lo tanto, no es extremo de ninguna geodésica $g(\tilde{\gamma}_n)$ con $n \in \mathbb{N}$. De aquí, $g(\tilde{\gamma}_n) \cap \tilde{\gamma}_b \neq \emptyset$ para algún $n \in \mathbb{N}$, lo cual contradice el Lema 18, ya que $\tilde{\gamma}_n$ es una geodésica bicuspidal simple al ser imagen bajo un elemento de G , de una geodésica bicuspidal simple. \square

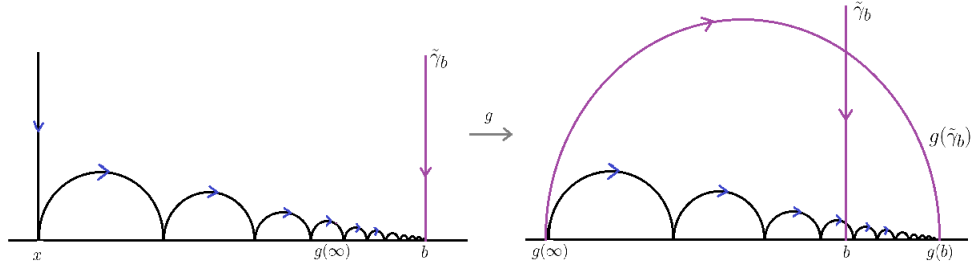


Figura 2.2

2.5. Puntos de regreso

Definición 20. Dada $\tilde{\gamma}_x$ una geodésica vertical no simple, decimos que p es un punto de regreso si existe $g \in G$ tal que $\{p\} = \tilde{\gamma}_x \cap g(\tilde{\gamma}_x)$ y además $\text{Im}(p) < \text{Im}(g^{-1}(p))$.

Observación 21. Toda geodésica vertical no simple tiene al menos un punto de regreso.

En efecto, si $\tilde{\gamma}_x$ es una geodésica no simple, entonces existe p tal que $\{p\} = \tilde{\gamma}_x \cap g(\tilde{\gamma}_x)$ para alguna $g \in G$. Notemos que $g^{-1}(p) \neq p$ pues en G no hay isometrías elípticas (ver observaciones en la Definición 1). Ahora, si $\text{Im}(p) < \text{Im}(g^{-1}(p))$ entonces p es punto de regreso. De lo contrario, $g^{-1}(p)$ lo será, puesto que $\{g^{-1}(p)\} = \tilde{\gamma}_x \cap g^{-1}(\tilde{\gamma}_x)$ y además $\text{Im}(g^{-1}(p)) < \text{Im}(p) = \text{Im}(g(g^{-1}(p)))$.

Definición 22. Dada una geodésica no simple $\tilde{\gamma}_x$, decimos que q es un *punto de regreso más alto* si para cualquier otro punto de regreso p se tiene que $\text{Im}(q) > \text{Im}(p)$.

Lema 23. Cada geodésica vertical bicuspidal no simple tiene punto de regreso más alto.

Demostración. Consideremos $\tilde{\gamma}_x$ geodésica bicuspidal no simple. Como

$$V = \{z \in \mathbb{H} : \text{Im} > 1, 0 < \text{Re} < 1\}$$

es una región fundamental de una vecindad cuspidal (ver demostración del Lema 5 al considerar sin pérdida de generalidad que $g(z) = z + 1$ es generador de G_∞), tenemos que aquí no hay puntos de regreso de $\tilde{\gamma}_x$, ya que en V no puede haber dos puntos de la misma órbita.

Si sólo existe un punto de regreso en $\tilde{\gamma}_x$, hemos acabado pues por definición él es el punto de regreso más alto. De lo contrario, consideremos p_1 y p_2 puntos de regreso y sin pérdida de generalidad supongamos que $0 < \text{Im}(p_1) < \text{Im}(p_2) < 1$. Entonces, para elegir un punto de regreso más alto, basta probar que sólo hay una cantidad finita de ellos con parte imaginaria en $[\text{Im}(p_1), 1]$ y para ésto probaremos que si γ es la proyección en S del

segmento $\tilde{\gamma}_x \cap \{z \in \mathbb{H} : \text{Im}(p_1) < \text{Im}(z) < 1\}$, entonces γ se autointersecta una cantidad finita de veces.

En efecto, sea $\{x_i : i \in I\}$ el conjunto de puntos donde $\tilde{\gamma}_x$ se autointersecta. Para cada uno de estos x_i existe un $\varepsilon_i > 0$ tal que la función exponencial $\exp_{x_i} : T_{x_i}S \rightarrow S$ restringida a la bola B_{ε_i} de radio ε_i es difeomorfismo. Observemos que en una vecindad $\exp_{x_i}(B_{\varepsilon_i})$ no puede haber dos autointersecciones de $\tilde{\gamma}_x$ pues rectas por el origen en B_{ε_i} van a dar a geodésicas en $\exp_{x_i}(B_{\varepsilon_i})$ mediante la función \exp_{x_i} . Ahora, para cada $y \in \gamma \setminus \bigcup \{\exp_{x_i}(B_{\varepsilon_i}) : i \in I\}$, sea V_y una vecindad de y en S de manera que $V_y \cap \{x_i : i \in I\} = \emptyset$. Como estas nuevas vecindades unión $\{\exp_{x_i}(B_{\varepsilon_i}) : i \in I\}$ forman una cubierta de γ y γ es una curva compacta, tenemos que existe una subcubierta finita, la cual debe contener al conjunto $\{B_{\varepsilon_i} : i \in I\}$ pues los abiertos B_{ε_i} eran los únicos elementos de la cubierta que contenían a las autointersecciones x_i . De lo anterior, concluimos que I debe ser un conjunto finito y por lo tanto hemos terminado la prueba. \square

Lema 24. *Si $\tilde{\gamma}_x$ es una geodésica no simple con punto de regreso más alto $\{p\} = \tilde{\gamma}_x \cap g(\tilde{\gamma}_x)$, donde $g \in G$, entonces $\tilde{\gamma}_{g(\infty)}$ es una geodésica simple bicuspidal.*

Demostración. Sabemos que $\tilde{\gamma}_{g(\infty)}$ es bicuspidal, pues ∞ y $g(\infty)$ son levantamientos de la cúspide. Resta probar la simplicidad. Denotaremos por β_1 a la parte de $\tilde{\gamma}_x$ que está arriba de $g^{-1}(p)$, y por β_2 la parte entre $g^{-1}(p)$ y p . Entonces notemos que $g(\beta_1)$ es la parte de $g(\tilde{\gamma}_x)$ que está entre $g(\infty)$ y p ; y finalmente α será la curva obtenida de $\beta_1 \cup \beta_2 \cup g(\beta_1)$ después de hacer una pequeña perturbación para evitar pasar por p .

Afirmación: α es simple.

En efecto, β_1 , β_2 y $g(\beta_1)$ son curvas simples. Entonces para probar que α es simple, basta verificar que no existe $h \in G$ tal que $h(g(\beta_1)) \cap \beta_1 \neq \emptyset$, $h(\beta_1) \cap \beta_2 \neq \emptyset$ ó $h(g(\beta_1)) \cap \beta_2 \neq \emptyset$. Veamos que no puede pasar cada uno de ellos por separado:

- Como β_1 es simple y $h \circ g \in G$, tenemos que $h(g(\beta_1)) \cap \beta_1 = \emptyset$. $h(\beta_1) \cap g(\beta_1) = \emptyset$.
- Los últimos dos casos son análogos. En general, supongamos que $\widehat{h}(\beta_1) \cap \beta_2 = \{q\}$ para algún $\widehat{h} \in G$. Entonces q es punto de regreso de $\tilde{\gamma}_x$ y además $\text{Im}(q) > \text{Im}(p)$, lo cual contradice que p es punto de regreso más alto de $\tilde{\gamma}_x$.

Ahora, como α es simple y propiamente homotópica a la geodésica $\tilde{\gamma}_{g(\infty)}$, por el Lema 11 concluimos que $\tilde{\gamma}_x$ es simple. \square

Proposición 25. *Supongamos que $\tilde{\gamma}_x$ es una geodésica no simple con punto de regreso más alto p , donde $\{p\} = \tilde{\gamma}_x \cap g(\tilde{\gamma}_x)$ para algún $g \in G$. Entonces para cualquier c entre x y $g(\infty)$, la geodésica $\tilde{\gamma}_c$ no es simple.*

Demostración. Como c está entre x y $g(\infty)$, existe q tal que $\{q\} = \tilde{\gamma}_c \cap g(\tilde{\gamma}_x)$.

Afirmación: $\text{Im}(g^{-1}(q)) > \text{Im}(q)$.

En efecto, si consideramos un círculo hiperbólico con centro p y radio $r = d_H(p, q)$, notemos que es un círculo euclideo cuyo centro es algún punto en $\tilde{\gamma}_x$ y por lo tanto el elemento del círculo con parte imaginaria más grande también se encuentra en $\tilde{\gamma}_x$. A dicho punto denotémoslo por s . En particular $\text{Im}(s) > \text{Im}(q)$. Ahora, notemos que p , $g^{-1}(p)$, s , y $g^{-1}(q)$ están en $\tilde{\gamma}_x$, y como g es isometría hiperbólica, $d_H(p, q) = d_H(g^{-1}(p), g^{-1}(q))$. Además, como p es punto de regreso, $\text{Im}(g^{-1}(p)) > \text{Im}(p)$. Por lo tanto, $\text{Im}(g^{-1}(q)) > \text{Im}(s) > \text{Im}(q)$.

Ahora, consideremos las configuraciones

$$A = \{\tilde{\gamma}_c, g(\tilde{\gamma}_x), q\} \quad \text{y} \quad g^{-1}(A) = \{g^{-1}(\tilde{\gamma}_c), \tilde{\gamma}_x, g^{-1}(q)\},$$

las cuales consisten de dos geodésicas (una de ellas vertical) y su punto de intersección. Puesto que g es isometría, ambas configuraciones se intersectan en el mismo ángulo, y por lo tanto son semejantes en el sentido euclideo. Así, como $\text{Im}(g^{-1}(q)) > \text{Im}(q)$, tenemos que $d_E(g^{-1}(q), x) > d_E(q, c)$ y entonces,

$$d_E(g^{-1}(c), x) > d_E(g(x), c) > d_E(x, c),$$

donde la primer desigualdad se da por la semejanza y la última se da por la elección de c . De aquí, c está entre $g^{-1}(c)$ y x , y por lo tanto $g^{-1}(\tilde{\gamma}_c) \cap \tilde{\gamma}_c \neq \emptyset$, es decir, $\tilde{\gamma}_c$ no es simple. \square

Corolario 26. *Las zonas aisladas son disjuntas.*

Demostración. Procedamos por contradicción. En efecto, si dos zonas aisladas se intersectaran, tendríamos que un extremo de una estaría en el interior de la otra. Puesto que los extremos son simples y las únicas geodésicas simples de una zona aislada son centros, tenemos que el extremo de una zona aislada debe ser el centro de la otra, pero esto es una contradicción pues los extremos corresponden a geodésicas unicuspidales y los centros a geodésicas bicuspidales. \square

Proposición 27. *Toda geodésica no simple pertenece a una zona aislada.*

Demostración. Haremos esta prueba en dos casos, cuando $\tilde{\gamma}_x$ es bicuspidal y cuando es unicuspidal.

Caso 1: Consideremos $\tilde{\gamma}_x$ geodésica bicuspidal no simple, y $g \in G$ tal que $\{p\} = \tilde{\gamma}_x \cap g(\tilde{\gamma}_x)$ es el punto de regreso más alto. Por el Lema 24, $\tilde{\gamma}_{g(\infty)}$ es simple y bicuspidal, y por lo tanto es centro de una zona aislada con intervalo asociado $U = (a, b)$, en donde sus extremos $\tilde{\gamma}_a$ y $\tilde{\gamma}_b$ son geodésicas simples (Proposición 19) y para cualquier $y \in U \setminus \{x\}$, $\tilde{\gamma}_y$ no es simple (Proposición 25).

Ahora, el Lema 25 nos dice que para todo y entre $g(\infty)$ y x , $\tilde{\gamma}_y$ no es simple. Entonces ni a ni b pueden estar entre $g(\infty)$ y x . Además, como $\tilde{\gamma}_x$ no es simple, sabemos que x es distinto de a y b . Por lo tanto, $\tilde{\gamma}_x$ está en la zona aislada con intervalo asociado U .

Caso 2: Ahora supongamos que $\tilde{\gamma}_x$ es geodésica unicuspidal no simple. Por el Lema 10, existe un intervalo abierto V que contiene a x , y que para cualquier $y \in V$, $\tilde{\gamma}_y$ no es simple. Ahora, por la Proposición 7 existe $y \in V$ levantamiento de la cúspide, es decir $\tilde{\gamma}_y$ es bicuspidal no simple. Por el caso 1, $\tilde{\gamma}_y$ está en la zona aislada (asociada a un intervalo $U = (a, b)$) de alguna geodésica bicuspidal simple. Los extremos de esta zona aislada $\tilde{\gamma}_a$ y $\tilde{\gamma}_b$ son geodésicas simples (Proposición 19) y por lo tanto a y b no pueden estar en V . De aquí, $x \in V \subseteq U$.

□

Corolario 28. *Toda geodésica bicuspidal pertenece a una zona aislada.*

Demostración. Consideremos $\tilde{\gamma}_x$ geodésica bicuspidal. Si $\tilde{\gamma}_x$ es simple, entonces es centro de una zona aislada y en caso de no ser simple, la Proposición 27 nos asegura que pertenece a alguna zona aislada. □

Lema 29. *Dado $\tilde{\gamma}_b$ extremo derecho de una zona aislada, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in (b, b + \varepsilon)$ tal que $\tilde{\gamma}_x$ es simple y bicuspidal.*

Demostración. Como el conjunto de los levantamientos de la cúspide es denso en \mathbb{S}_∞^1 (Lema 7), sabemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $y_1 \in (b, b + \varepsilon)$ tal que $\tilde{\gamma}_{y_1}$ es bicuspidal. Entonces por el Corolario 28, $\tilde{\gamma}_{y_1}$ pertenece a una zona aislada (a_1, b_1) . Como las zonas aisladas son disjuntas, $a_1 > b$. Ahora, hacemos lo mismo con el intervalo (b, a_1) . Consideramos $y_2 \in (b, a_1)$ tal que $\tilde{\gamma}_{y_2}$ es geodésica bicuspidal, y (a_2, b_2) es la zona aislada a la cual pertenece. Nuevamente, como las zonas aisladas son disjuntas, $b < a_2 < b_2 < a_1 < b + \varepsilon$. Por lo tanto x , el centro de la zona aislada (a_2, b_2) , es un elemento de $(b, b + \varepsilon)$ y $\tilde{\gamma}_x$ es geodésica bicuspidal simple. □

2.6. Extremos de zonas aisladas

Decimos que una geodésica γ en S *espiralea* en una geodésica cerrada α en S si para todo $\varepsilon > 0$ existe t_0 tal que para todo $t > t_0$,

$$d(\gamma(t), \alpha) = \inf_s \{d_H(\gamma(t), \alpha(s))\} < \varepsilon, \quad (2.1)$$

es decir, si γ se acerca más a α conforme transcurre el tiempo. En esta sección probaremos que los extremos de las zonas aisladas construidas en la Sección 2.3 son geodésicas que espiralean en geodésicas cerradas simples.

Lema 30. *Una geodésica $\tilde{\gamma}_x$ se proyecta en una geodésica que espiralea en una curva cerrada si y sólo si x es un punto fijo de una isometría hiperbólica en G .*

Demostración.

- \Leftarrow] Consideremos $x \in \mathbb{H}$ y $f \in G$ isometría hiperbólica tal que $f(x) = x$. Entonces x es un extremo del eje de f al cual llamamos A_f . Como A_f se proyecta en una geodésica cerrada en S (Lema 2) y $\tilde{\gamma}_x$ se aproxima asintóticamente al eje A_f , concluimos que $\tilde{\gamma}_x$ se proyecta en una geodésica que espiralea en A_f .
- \Rightarrow] Consideremos $\tilde{\gamma}_x$ la cual se proyecta en una geodésica que espiralea en una geodésica cerrada α . Entonces $\tilde{\gamma}_x$ se aproxima asintóticamente a algún levantamiento de α al cual denotaremos por $\tilde{\alpha}$. Nuevamente por el Lema 2 concluimos que $\tilde{\alpha}$ es eje de una isometría hiperbólica de la cual x es punto fijo.

□

Proposición 31. *Una geodésica cuspidal simple $\tilde{\gamma}_x$ se proyecta en una geodésica que espiralea en una geodésica cerrada simple si y sólo si $\tilde{\gamma}_x$ es un extremo de una zona aislada.*

Demostración.

- \Leftarrow] Supongamos que $\tilde{\gamma}_b$ es un extremo derecho de una zona aislada (el caso izquierdo se hace de manera análoga). Por construcción de zonas aisladas (ver Sección 2.4), b es punto fijo de una isometría hiperbólica f que cumple que $f^n(\infty) \rightarrow b$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por el Lema anterior tenemos que $\tilde{\gamma}_b$ se proyecta en una geodésica que espiralea en la proyección de A_f y dicha proyección es una geodésica cerrada. Entonces, para concluir la prueba, sólo resta probar que dicha A_f es simple.

En efecto, como b es el extremo derecho de una zona aislada, A_f tiene su otro extremo a la derecha de b pues de lo contrario $\tilde{\gamma}_c \cap f(A_f) = f(\tilde{\gamma}_c \cap A_f) = \emptyset$ lo cual es una contradicción. Al otro extremo de A_f lo denotaremos por y .

Ahora, como b es atractor y y es repulsor de f , tenemos que b es repulsor y y es atractor de f^{-1} . Entonces $f^{-n}(\infty) \rightarrow y$ cuando $n \rightarrow \infty$ y por lo tanto $f^{-n}(\tilde{\gamma}_b) \rightarrow A_f$ cuando $n \rightarrow \infty$. Como cada $f^{-n}(\tilde{\gamma}_b)$ es una geodésica simple, por el Lema 10 concluimos que A_f es simple.

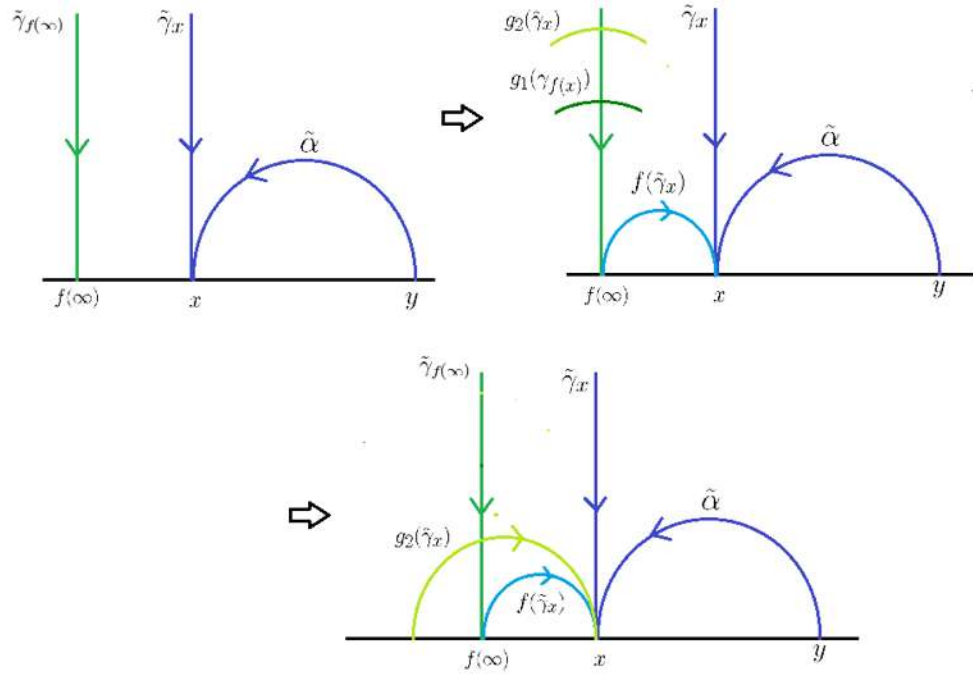


Figura 2.3

⇒] Ahora consideremos una geodésica cuspidal simple $\tilde{\gamma}_x$ que se proyecta en una geodésica que espiralea en una geodésica cerrada simple α . Entonces algún levantamiento de α es arbitrariamente cercano a $\tilde{\gamma}_x$ y por lo tanto tiene como extremo a x . A dicho levantamiento lo denotaremos $\tilde{\alpha}$ y a su otro extremo por y . Sin pérdida de generalidad supongamos que y está a la derecha de x (observemos que y no puede estar en la órbita de ∞ pues y no es levantamiento c). Por el Lema 4 la colección de isometrías hiperbólicas que fijan a x también fijan a y , y en consecuencia dejan invariante a la geodésica que una a x con y .

Ahora, si $F_{xy} = \{f_i \in G\}$ es la colección de dichas isometrías y p es un punto en \mathbb{S}_{∞}^1 , entonces los únicos puntos de acumulación de $F_p = \{f_i(p) : f_i \in F_{xy}\}$ son x y y . En particular, como ∞ no es punto de acumulación de F_{∞} , entonces F_{∞} está contenido en un conjunto acotado de \mathbb{R} y como tampoco hay puntos de acumulación en $(-\infty, x)$ tenemos que existe $f \in F_{xy}$ tal que $\forall g \in F_{xy}$ se tiene que $f(\infty) < g(\infty)$.

Afirmación: $\tilde{\gamma}_{f(\infty)}$ es una geodésica simple.

Para probar esto procedamos por contradicción suponiendo que no es simple. Entonces existe $g_1 \in G$ tal que $g_1(\tilde{\gamma}_{f(\infty)}) \cap \tilde{\gamma}_{f(\infty)} \neq \emptyset$ y como x no es levantamiento de c y $\tilde{\gamma}_\infty$ es una geodésica bicuspidal, sabemos que x no puede ser un extremo de $\tilde{\gamma}_\infty$. Por otro lado, $f(\tilde{\gamma}_x)$ tiene un extremo en x y el otro en $f(\infty)$ ya que $\tilde{\gamma}_x$ tiene un extremo en x y el otro en ∞ y además $f(x) = x$. Entonces $g_1(\tilde{\gamma}_{f(\infty)})$ debe intersectar a $f(\tilde{\gamma}_x)$ ó a $\tilde{\gamma}_x$. Es decir,

$$g_1(\tilde{\gamma}_{f(\infty)}) \cap \tilde{\gamma}_x \neq \emptyset \quad \text{ó} \quad g_1(\tilde{\gamma}_{f(\infty)}) \cap f(\tilde{\gamma}_x) \neq \emptyset. \quad (2.2)$$

Pero lo anterior nos dice que alguna imagen de $\tilde{\gamma}_x$ intersecta a $\tilde{\gamma}_{f(\infty)}$ (ya sea $g^{-1}(\gamma_x)$ ó $(g^{-1} \circ f)(\gamma_x)$). A dicha imagen la llamaremos $g_2(\gamma_x)$ (ver Figura 2.3).

Ahora, como $\tilde{\gamma}_x$ es simple, tenemos que

$$g_2(\tilde{\gamma}_x) \cap \tilde{\gamma}_x = \emptyset \quad \text{y} \quad g_2(\tilde{\gamma}_x) \cap f(\tilde{\gamma}_x) = \emptyset. \quad (2.3)$$

Pero esto implica que x es un extremo de $g_2(\tilde{\gamma}_x)$ (ver Figura 2.3). Como $\tilde{\gamma}_x$ es una geodésica unicuspidal, concluimos que $g_2(x) = x$. Pero entonces $g_2(\infty) < f(\infty)$ y $g_2 \in F_{xy}$, lo cual contradice la elección de f . Por lo tanto $\tilde{\gamma}_{f(\infty)}$ es simple.

Ahora, la colección $\{f^n(\tilde{\gamma}_{f(\infty)})\}$ permanece dentro de la zona aislada de $\tilde{\gamma}_{f(\infty)}$ (esto por construcción de las zonas aisladas) y tiene como extremo derecho a x . Como $\tilde{\gamma}_x$ es simple, concluimos que es extremo izquierdo de la zona aislada de la geodésica simple bicuspidal $\tilde{\gamma}_{f(\infty)}$.

□

2.7. El Teorema de McShane

Teorema 32 (McShane). *Consideremos S superficie hiperbólica ponchada con área finita. Entonces el conjunto $E = \{x \in \mathbb{S}_\infty^1 : \tilde{\gamma}_x \text{ es simple}\}$ consiste de un conjunto de Cantor (al cual le llamaremos K) unión un conjunto de puntos aislados. Además, dado $x \in E$ tenemos las siguientes afirmaciones:*

- a) x es aislado si y sólo si $\tilde{\gamma}_x$ es bicuspidal.
- b) $x \in K$ si y sólo si $\tilde{\gamma}_x$ converge en espirales a una curva cerrada simple.

Más aún, toda componente conexa de $\mathbb{S}_\infty^1 \setminus K$ contiene exactamente un punto aislado de E .

Demostración. La demostración de este teorema será una recapitulación de todo lo que hemos probado a lo largo de este capítulo. En efecto, en los resultados anteriores probamos

que para cada geodésica simple bicuspidal $\tilde{\gamma}_x$, existe un intervalo llamado zona aislada (a, b) . Además nombramos a $\tilde{\gamma}_x$ el centro de dicha zona aislada el cual resultó ser la única geodésica simple, es decir, $\tilde{\gamma}_y$ es una geodésica no simple para todo $y \in (a, x) \cup (x, b)$. También probamos que los extremos de estas zonas aisladas corresponden a geodésicas simples y unicuspidales. Lo anterior probó que las zonas aisladas son disjuntas (Corolario 26).

Por otro lado, tenemos que el conjunto formado por la unión de los intervalos asociados a las zonas aisladas, al cual denotaremos por Z , es un conjunto denso en \mathbb{S}_∞^1 , pues el conjunto de los levantamientos de la cúspide ya lo era, y cada geodésica bicuspidal está en alguna zona aislada.

Ahora, denotemos por $K \in \mathbb{S}_\infty^1$ al conjunto correspondiente a las geodésicas simples unicuspidales. Entonces K es el complemento de Z y el propósito es probar que es un conjunto de Cantor. Es decir, probaremos que K es un conjunto no vacío, compacto, totalmente desconexo, metrizable y perfecto [Sección 30 en **12**].

Compacto. K es un conjunto cerrado pues su complemento es abierto y al ser subconjunto de \mathbb{S}_∞^1 concluimos que K es compacto.

Totalmente desconexo. Sus componentes conexas son singuletes, ya que su complemento es denso.

Metrizable. Es subespacio de \mathbb{S}_∞^1 el cual es metrizable.

Perfecto. Consideremos $x \in K$ y veamos que es punto límite de $K \setminus \{x\}$. Por el Lema 29, sólo hace falta que lo verifiquemos para $x \in K$ tal que x no es extremo de una zona aislada. Consideremos (z, w) vecindad arbitraria de dicho x . Por la Proposición 7 existe $y \in (z, w)$ levantamiento de c . Como $\tilde{\gamma}_y$ es geodésica bicuspidal, se encuentra en una zona aislada $V = (a, b)$ (Corolario 28) y puesto que $K \cap V = \emptyset$, en particular $x \notin V$. Como supusimos que x no es extremo de zonas aisladas, tenemos que un extremo de V debe estar entre x y y , y ese extremo de V es un elemento de K . Al haber considerado V arbitraria, concluimos que x es punto límite de $K \setminus \{x\}$.

Finalmente, todo intervalo de Z (es decir toda zona aislada) contiene exactamente un punto de E (el centro de la zona aislada).

Entonces hemos probado hasta ahora que el conjunto de geodésicas simples consta de un conjunto de Cantor unión un conjunto de puntos aislados y que además los puntos aislados se corresponden con las geodésicas bicuspidales simples y los puntos en el conjunto de Cantor con las geodésicas unicuspidales simples. Para terminar la prueba del teorema, basta verificar que estas geodésicas unicuspidales espiralean en curvas cerradas simples, pero esto sucede por la Proposición 31. \square

Apéndice A

Identidad de McShane

Decidimos agregar este apéndice porque nos pareció interesante cómo de un resultado cualitativo como lo es el Teorema de McShane se puede extraer información cuantitativa.

En efecto, el objetivo de este apéndice será bosquejar una prueba de la Identidad de McShane

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{1 + e^{\ell(\alpha)}} = \frac{1}{2},$$

donde la suma es sobre todas las geodésicas cerradas simples α en el toro ponchado (al cual denotaremos por F) y $\ell(\alpha)$ es la longitud de α .

Es sorprendente cómo una serie que involucra las longitudes de las geodésicas simples en el toro ponchado se deduce de un teorema que aporta información sólo de la topología del espacio de dichas geodésicas.

Para el bosquejo de esta prueba, seremos mucho más informales en el sentido de que nos permitiremos usar los siguientes hechos bien conocidos sin dar referencias:

Resultado 1. En la Proposición 31 probamos que dada una zona aislada (relacionada al intervalo (a, b)), sus extremos $\tilde{\gamma}_a$ y $\tilde{\gamma}_b$ se proyectan en geodésicas que espiralean en geodésicas cerradas simples α y β . Cuando la superficie hiperbólica es el toro ponchado F resulta que α y β coinciden.

Bosquejo de la prueba: α es una geodésica cerrada simple en F y γ es una geodésica bicuspidal simple en F de manera que $\alpha \cap \gamma = \emptyset$ (Lema 18). Entonces, si γ^c es la curva compactificada en el toro F^c (el cual resulta de agregarle el punto al toro ponchado), tenemos que α y γ^c son curvas cerradas simples en F^c tales que $\alpha \cap \gamma^c = \emptyset$. Pero dos curvas cerradas simples que no se intersectan en el toro cerrado deben ser homotópicas (topológicamente son las tapas de los cilindros que resultan al cortar F^c por estas curvas). De manera análoga, tenemos que γ^c es homotópica a β en F^c y por lo tanto α y β son homotópicas en F^c . Como α y β son geodésicas que no pasan por la cúspide, concluimos

que α y β son homotópicas en F (pues podemos conseguir una homotopía entre ellas que evite la cúspide, ya que son frontera de dos cilindros topológicos, uno que tiene la cúspide y otro que no). Finalmente, en variedades hiperbólicas, las geodésicas en cada clase de homotopía son únicas y por lo tanto $\alpha = \beta$.

Resultado 2. A cada geodésica cerrada simple α en F le corresponde una única geodésica bicuspidal simple γ de manera que γ y α no se intersectan.

Bosquejo de la prueba: Consideremos α geodésica cerrada simple en F y η^c una curva homotópica a α en el toro compactificado F^c que además pasa por la cúspide y no intersecta a α . Ahora, η denota a la curva que resulta de quitarle la cúspide a η^c . Nuevamente, esta curva η tiene una única geodésica en su clase de homotopía en F y esta geodésica no intersecta a α pues η no lo hacía.

A.1. Una prueba de la Identidad de McShane

En el capítulo anterior probamos que $E = \{x \in \mathbb{S}_\infty^1 : \tilde{\gamma}_x \text{ es simple}\}$ es un conjunto de Cantor unión una cantidad numerable de puntos aislados. Luego, E se identifica de manera natural con un subconjunto de $H_1 = \{z \in \mathbb{H} : \text{Im } z = 1\}$ mediante la aplicación $x \mapsto \tilde{\gamma}_x \cap H_1$, y al hacer el cociente \mathbb{H}/G relacionamos E con un subconjunto de la frontera de una vecindad cuspidal U . Así, en este capítulo diremos que E es el conjunto $\{x \in \partial(U) \subset F : x \text{ pertenece a una geodésica simple cuspidal en } F\}$.

Ahora, consideremos $x \in E$ en una geodésica simple bicuspidal γ . Por el Teorema 32, tenemos que x es un punto aislado de E pues existe un intervalo (a, b) asociado a su zona aislada en la cual ninguna otra geodésica es simple. Además, probamos que estos intervalos son maximales, en el sentido de que las geodésicas que pasan por a y b son geodésicas simples unicuspidales que convergen en espirales a una geodésica cerrada simple α (ver Resultado 1).

Luego, al cortar F mediante la proyección de α en F , tenemos un pantalón hiperbólico P cuya cintura es una cúspide y cuyas piernas (las otras dos componentes conexas de la frontera) tienen la misma longitud $\ell(\alpha)$.

Afirmación: Este pantalón lo podemos descomponer en dos pentágonos con cuatro ángulos rectos. Para la prueba de esta afirmación ver Figura A.1.

- γ es una geodésica simple bicuspidal que divide a P en dos componentes conexas. En efecto, por el Lema 18 tenemos que γ no intersecta a $\pi(\tilde{\gamma}_a)$ y como $\pi(\tilde{\gamma}_a)$ espiralea en α , concluimos que γ no intersecta a α y por lo tanto divide a P en dos componentes conexas.
- Existe una única geodésica simple η que une las piernas del pantalón y además las intersecta de manera ortogonal. Para una prueba de ello ver [4].

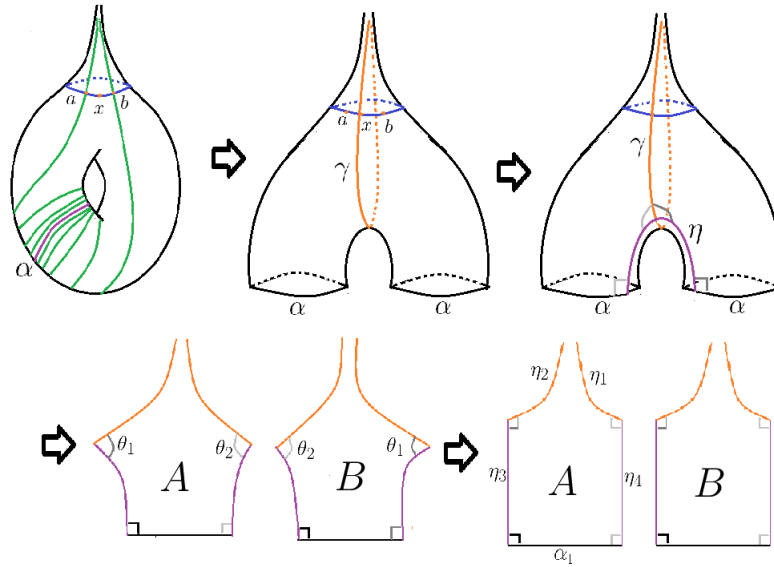


Figura A.1

Así, podemos cortar el pantalón mediante las curvas γ y η para descomponerlo en dos pentágonos A y B con ángulos suplementarios θ_1 y θ_2 . Finalmente, resta observar que $\theta_1 = \pi/2 = \theta_2$. En efecto, asociemos a α el segmento de geodésica en \mathbb{H} contenido en el semicírculo euclidiano con centro en el origen y radio 1 de tal manera que el punto medio de la geodésica es i (ver Figura A.2). Entonces como η_3 y η_4 tienen la misma longitud (ya que vienen de hacer un corte en el toro ponchado) y la cintura es cúspide, concluimos que $\theta_1 = \theta_2$, y al ser ángulos suplementarios, ambos deben ser $\pi/2$. Ésto concluye la prueba de la afirmación.

La magia de la prueba de la Identidad de McShane radica en el cálculo de las áreas de las regiones correspondientes a las zonas aisladas. Así que vamos a construir un pentágono A' en \mathbb{H} isométrico al pentágono A , para calcular su área. Para la construcción de este pentágono A' , notemos que dos de sus lados η_1 y η_2 tienen longitud infinita pues se escapan por la cúspide y además $\ell(\alpha)$ ya está dada. Así que sólo falta determinar $\ell(\eta_3) = \ell(\eta_4)$.

En efecto, denotemos por η a la geodésica vertical que parte del centro de α hacia la cúspide y la asociamos con la geodésica vertical en el origen a la cual denotamos por η' (asumiendo que la cúspide se corresponde con ∞). Para lo que sigue ver la Figura A.3. Consideremos la geodésica que es el semicírculo euclidiano con centro en el origen y radio $r = \tanh(\ell(\alpha)/2)$ (el radio es elegido de esta forma por el beneficio de las cuentas). En esta geodésica estará α' la cual se corresponde con α . Así, queremos encontrar el punto

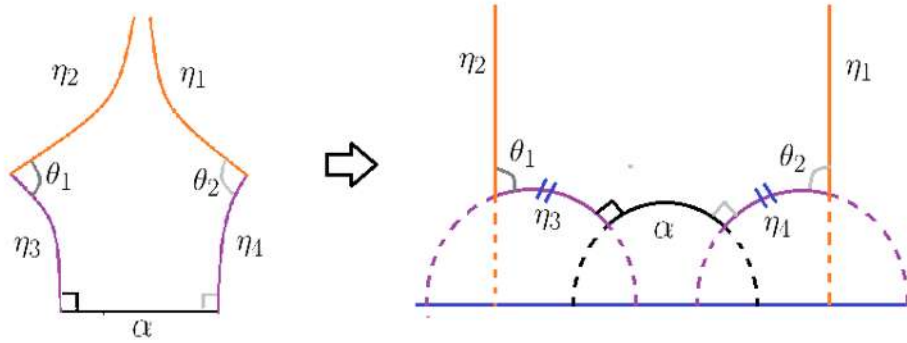


Figura A.2

sobre dicho semicírculo al recorrer $\ell(\alpha)/2$ hacia la derecha y el punto al recorrer $\ell(\alpha)/2$ hacia la izquierda. Para esto, queremos encontrar el ángulo θ . Entonces tenemos

$$\frac{\ell(\alpha)}{2} = d_H(ir, r e^{i\theta}) = \int_{\theta}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t} = \ln\left(\tan \frac{\pi}{4}\right) - \ln\left(\tan \frac{\theta}{2}\right) = -\ln\left(\tan \frac{\theta}{2}\right),$$

lo cual implica que $e^{-\ell(\alpha)/2} = \tan(\theta/2)$. Entonces,

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)} = \frac{2 \tan(\theta/2)}{1 - \tan^2(\theta/2)} = \frac{2e^{-\ell(\alpha)/2}}{1 - e^{-\ell(\alpha)}}. \quad (\text{A.1})$$

Ahora, buscamos encontrar el radio euclidiano R del segmento de geodésica correspondiente a η_3 y a η_4 . Por ser ángulos rectos, tenemos que

$$\tan \theta = \frac{R}{\tanh(|\alpha|/2)}. \quad (\text{A.2})$$

Y por lo tanto, uniendo las ecuaciones (A.1) y (A.2), tenemos

$$R = \frac{2e^{-\ell(\alpha)/2} \tan(\ell(\alpha)/2)}{1 - e^{-\ell(\alpha)}}.$$

Finalmente, usando que

$$\tanh(\ell(\alpha)/2) = \frac{e^{\ell(\alpha)/2} - e^{-\ell(\alpha)/2}}{e^{\ell(\alpha)/2} + e^{-\ell(\alpha)/2}} \quad \text{y} \quad \text{sech}(\ell(\alpha)/2) = \frac{2}{e^{\ell(\alpha)/2} + e^{-\ell(\alpha)/2}},$$

concluimos que $R = \text{sech}(\ell(\alpha)/2)$.

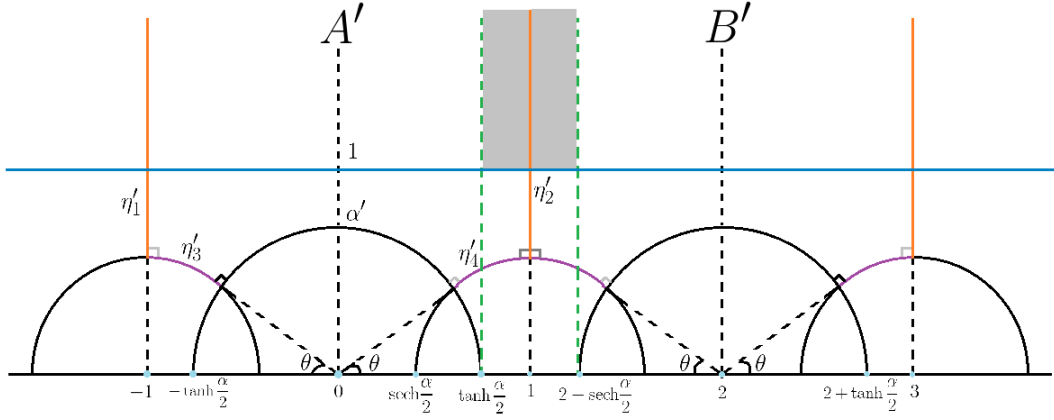


Figura A.3

De manera simétrica, construimos B' asociado a B . Entonces podemos suponer que U se corresponde con la región $R = \{z \in \mathbb{H} : \text{Im } z > 1\} \cap (A' \cup B')$. Y por lo tanto la frontera de U se corresponde con la recta euclídeana $L = \{z \in \mathbb{H} : \text{Im } z = 1\} \cap (A' \cup B')$.

Ahora, como las geodésicas que pasan por a y b son curvas que convergen en espirales α y β respectivamente, entonces a' (el elemento en \mathbb{H} que se corresponde con a) debe ser la intersección de L con la geodésica vertical cuyo otro extremo es $\tanh(\ell(\alpha)/2)$. De manera análoga en B' tendremos que b' (el elemento en \mathbb{H} que se corresponde con b) es la intersección de L con la geodésica vertical cuyo otro extremo es $2 - \tanh(\ell(\alpha)/2)$.

A la región en R que está delimitada por las rectas $\{z \in \mathbb{H} : \text{Re } z = \tanh(\ell(\alpha)/2)\}$ y $\{z \in \mathbb{H} : \text{Re } z = 2 - \tanh(\ell(\alpha)/2)\}$ la denotaremos por Z y la llamaremos *región aislada*. Ahora, puesto que

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_1^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx = \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1,$$

tenemos que

$$\mathcal{A}(Z) = 2 - 2 \tanh(\ell(\alpha)/2) \quad \text{y} \quad \mathcal{A}(R) = 4,$$

donde $\mathcal{A}(Z)$ denota el área hiperbólica de Z y $\mathcal{A}(R)$ denota el área hiperbólica de R .

Entonces al hacer el cociente

$$\frac{\mathcal{A}(Z)}{\mathcal{A}(R)} = \frac{2 - 2 \tanh(\ell(\alpha)/2)}{4} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{e^{\ell(\alpha)/2} - e^{-\ell(\alpha)/2}}{e^{\ell(\alpha)/2} + e^{-\ell(\alpha)/2}} \right) = \frac{e^{-\ell(\alpha)/2}}{e^{\ell(\alpha)/2} + e^{-\ell(\alpha)/2}} = \frac{1}{1 + e^{\ell(\alpha)}}.$$

Finalmente, el Resultado 2 nos dice que a cada geodésica cerrada simple α en F le corresponde una única geodésica bicuspidal simple γ de manera que γ y α no se intersectan.

Pero en nuestra construcción dada una geodésica bicuspidal simple, tenemos dos zonas aisladas (mediante sus dos orientaciones). Por lo tanto concluimos que

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{1 + e^{\ell(\alpha)}} = \frac{1}{2} \frac{\text{Área total de las regiones aisladas}}{\text{Área de la región cuspidal}}.$$

Un resultado de Birman y Series [3] afirma que el área total de las regiones aisladas es igual al área de la región cuspidal y por lo tanto

$$\sum_{\alpha} \frac{1}{1 + e^{\ell(\alpha)}} = \frac{1}{2}.$$

Notación

F	el toro ponchado
F^c	el toro cerrado
c	la cúspide en el toro ponchado
U	una vecindad cuspidal
\mathbb{S}_∞^1	el conjunto $\partial(\mathbb{H}) \cup \{\infty\}$
\mathbb{C}	el plano complejo
\mathbb{H}	el semiplano superior
$\text{Isom}^+(\mathbb{H})$	el conjunto de las isometrías en \mathbb{H} que preservan orientación
S	una superficie hiperbólica ponchada conexa de volumen finito
\mathbb{D}	el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : z \geq 1\}$
G	un grupo Fuchsiano tal que $S = \mathbb{H}/G$
G_x	la órbita de x
G^x	el estabilizador de x
$\tilde{\gamma}_x$	la geodésica vertical en \mathbb{H} con extremos ∞ y x
d_E	es la distancia euclideana
d_H	es la distancia hiperbólica
Z	la unión de los intervalos asociados a las zonas aisladas
P	un pantalón con cintura cero (topológicamente una esfera menos dos discos y un punto).

Referencias

- [1] G. McShane. *Simple geodesics and a series constant over Teichmuller space*. Invent. Math. 132 (1998), no. 3, 607–632.
- [2] C. Goodman-Strauss, Y. Rieck. *Simple geodesics on a punctured surface*. Top. Appl. 154 (2007), no. 1, 155–165.
- [3] J.S. Birman, C. Series. *Geodesics with bounded intersection number on surfaces are sparsely distributed*. Topology 24 (1985), no. 2, 217–225.
- [4] W.P. Thurston. *Three-dimensional Geometry and Topology*, vol. 1, Princeton Univ. Press. 1997.
- [5] M. Mirzakhani. *Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces*. Invent. Math. 167 (2007), no. 2, 179–222.
- [6] M. Mirzakhani. *Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces*. Ann. of Math. 168 (2008), no. 1, 97–125.
- [7] M. Mirzakhani. *Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves*. J. Amer. Math. Soc. 20 (2006), no. 1, 1–23.
- [8] B.H. Bowditch. *A variation of McShane’s identity for once-punctured torus bundles*. Topology 36 (1997), no. 2, 325–334.
- [9] H. Akiyoshi, H. Miyachi, M. Sakuma. *Variations of McShane’s identity for punctured surface groups*. Proceedings of the Workshop “Spaces of Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds”, London Math. Soc. Lecture Note Series 329 (2006), 151–185.
- [10] J.A. Wolf. *Spaces of Constant Curvature*, AMS-Chelsea Publish. 2010.
- [11] P. Buser. *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*. Progress in Math. vol. 106, Birkhauser. 1992.
- [12] Stephen Willard, *General topology*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1970, p.219.