



**UNIVERSIDAD MICHOACANA
DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO**



Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez ”

Difracción de Sommerfeld sobre un semiplano

Tesis

que para obtener el título de:

Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas

Presenta:

Rafael Fraga Ramírez

Director de Tesis:

Dr. Anatoli Merzon

Morelia, Michoacán. Diciembre 2019

DEDICATORIA

Dedicado a mis padres Rafael Fraga y Angelina Ramírez, y a mis hermanos Yesenia, Maria del Carmen, Valeria y José Luis por darme más de lo que pude desear a lo largo de toda mi vida.

Agradecimientos

Hay tantas personas a las que debo agradecerles por la meta que estoy cumpliendo que sería imposible hacer un listado con su nombre, por ello me limitaré a citarlos de manera general. Si tú formas parte de esa lista creeme que estás ahí incluido y que te estoy profundamente agradecido.

- A mi familia, por ser una luciernaga en la oscuridad guiando mi camino a cada paso en los días de mayor oscuridad.
- A mis amigos, por convertir cada momento de estrés en una risa que me permitió sobrevivir cada prueba que tuve que enfrentar a lo largo del camino.
- A mis profesores, por todo el conocimiento que me han transmitido, en especial al Dr. Anatoli Merzon por asesorarme en este proyecto.

Índice general

Resumen	1
Abstract	3
1. Introducción	5
2. Planteamiento del problema de difracción de Sommerfeld	9
3. Integral de Sommerfeld	13
4. La ecuación de Helmholtz	19
5. Soluciones del problema de Sommerfeld para las condiciones en la frontera DD, NN y DN	23
5.1. Problemas DD y NN	23
5.2. Solución del problema DN	25
5.3. Las funciones A_D , A_N y A_{DN} satisfacen la ecuación de Helmholtz y las condiciones de frontera DD, NN, DN	26
6. Descomposición de A_D y decaimiento de la onda difractada A_{dD}	33
6.1. Descomposición	33
6.2. Decaimiento de la onda A_{dD}	40
7. Descomposición de A_N y decaimiento de la onda difractada A_{dN}	47
7.1. Descomposición	47
7.2. Decaimiento de la onda A_{dN}	49
8. Descomposición de A_{DN} y decaimiento de la onda difractada A_{dDN}	53
8.1. Descomposición	53
8.2. Decaimiento de la onda A_{dDN}	57
9. Solución del problema de Sommerfeld en un semiplano para el caso $\alpha = 0$	61
9.1. Planteamiento del problema	61
9.2. Soluciones del problema de Sommerfeld para las condiciones en la frontera DD, NN y DN con $\alpha = 0$	62

10.Solución del problema de Sommerfeld en un semiplano para el caso	
$\alpha = \pi$	65
10.1. Planteamiento del problema	65
10.2. Soluciones del problema de Sommerfeld para las condiciones en la frontera	
DD, NN y DN con $\alpha = \pi$	66
11.Conclusiones	71
A.	73
A.1. Desigualdad de la integral de Sommerfeld	73
A.2. Demostración del Lema 3.0.6	73
A.3. Cambio de contorno de integración	74
A.4. Demostración del Teorema 4.0.1	74
A.5. Cálculo de $\partial_\varphi A_N$	75
A.6. Funciones hiperbólicas	76
A.7. Cálculo de $\partial_\varphi^2 A_{DN}$	77
Bibliografía	79

Resumen

Analizamos la solución de Sommerfeld para la difracción estacionaria en un semiplano. Consideramos tres casos para las condiciones de frontera del tipo: Dirichlet, Neumann y Dirichlet-Neumann. El último caso es el nuevo. Damos las formulas explícitas de las soluciones. También incluimos los casos límites para la onda incidente.

Palabras claves: Sommerfeld, Difracción, Ecuación de Helmholtz, Solución de Sommerfeld, Semiplano, Descomposición.

Abstract

We analyze Sommerfeld's solution for stationary diffraction in a semi-plane. We consider three cases for boundary conditions of the type: Dirichlet, Neumann and Dirichlet-Neumann. The last case is the new one. We give the explicit formulas of the solutions. We also include the limit cases for the incident wave.

Keywords: Sommerfeld, Diffraction, Helmholtz equation, Sommerfeld solution, Semiplane, Descomposition.

Capítulo 1

Introducción

El problema de difracción de una onda plana sobre un semiplano fue el primer problema de difracción que se resolvió en la forma matemática rigurosa. Arnold Sommerfeld en su artículo [1] dió un método original para la solución de este problema.

Nosotros interpretamos el problema de Sommerfeld como el caso límite del problema de difracción estacionario.

Consideramos la dispersión bidimensional de ondas planas dependientes del tiempo sobre la cuña: $W^\phi := \{(\rho, \varphi) : \rho \geq 0, \varphi \in [2\pi - \phi, 2\pi]\}$ de una magnitud $\phi \geq 0$.

Las ondas planas incidentes u_i son descritas por la fórmula:

$$u_i(x, t) = e^{-i\omega_0(t - n \cdot x)} f(t - n \cdot x), \quad (1.0.1)$$

donde $\omega_0 > 0$ es la frecuencia, $n = (n_1, n_2) = (\cos(\pi + \alpha), \sin(\pi + \alpha))$ es el vector de onda, y f es “una función de perfil”, i.e.,

$$f(s) = 0 \quad \text{para} \quad s < 0, \quad \text{y} \quad f(s) \rightarrow 1, \quad s \rightarrow +\infty. \quad (1.0.2)$$

Esta función de perfil puede ser continua o incluso una distribución. Para la concreción, suponemos que la cuña W^ϕ es suficientemente estrecha, es decir,

$$\phi < \varphi_- := \pi - \alpha. \quad (1.0.3)$$

En este caso, no hay reflejo de la onda incidente (1.0.1) desde el lado $\varphi = 2\pi - \phi$ (ver Figura 1).

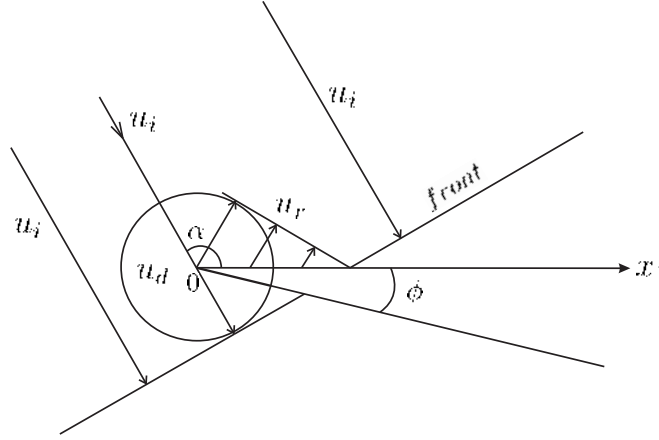


Figura 1. Difracción dependiente del tiempo en una cuña.

La dispersión dependiente del tiempo con las condiciones de frontera de tipo Dirichlet DD se describe mediante el problema mixto:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\partial_t^2 - \Delta)u^\phi(x, t) = 0, & x \in Q^\phi \\ u^\phi(x, t) = 0, & x \in \partial Q^\phi \end{array} \right| t \in \mathbb{R}, \quad (1.0.4)$$

donde $Q^\phi := \mathbb{R}^2 \setminus W^\phi$ y Δ es el operador de Laplace.

Con las condiciones de frontera del tipo Neumann NN el problema se describe por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\partial_t^2 - \Delta)u^\phi(x, t) = 0, & x \in Q^\phi \\ \partial_\nu u^\phi(x, t)|_{\partial Q^\phi} = 0, & \end{array} \right| t \in \mathbb{R}, \quad (1.0.5)$$

Con las condiciones de frontera del tipo Dirichlet-Neumann DN se describe mediante:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\partial_t^2 - \Delta)u^\phi(x, t) = 0, & x \in Q^\phi \\ \partial_\nu u^\phi(x, t)|_{\partial Q^\phi} = u^\phi(x, t)|_{\partial Q^\phi} = 0, & \end{array} \right| t \in \mathbb{R}, \quad (1.0.6)$$

donde ν en (1.0.5) y (1.0.6) es la normal unitaria exterior a la frontera ∂Q^ϕ .

Las condiciones iniciales se determinan por medio de la siguiente identidad:

$$u^\phi(x, t) = u_i^\phi(x, t) := \left\{ \begin{array}{ll} u_i(x, t), & \varphi \in (0, \varphi_+) \\ 0, & \varphi \in (\varphi_+, 2\pi - \phi) \end{array} \right|, \quad x \in Q^\phi, t < 0, \quad (1.0.7)$$

donde u_i es la onda plana incidente (1.0.1) y $\varphi_+ := \pi + \alpha$.

En los artículos [2] y [3] fue demostrado que los problemas (1.0.4) y (1.0.5) admiten una solución única en un espacio funcional adecuado y existen las amplitudes límites de estas soluciones cuando el tiempo t tiende a infinito.

En [3] fue demostrado que estas amplitudes límites son las soluciones de los problemas

estacionarios de difracción sobre cuñas que corresponden a (1.0.4)-(1.0.6) y cuando la cuña se convierte en semiplano ($\phi \rightarrow 0$), las amplitudes límites son las soluciones de Sommerfeld para los problemas DD y NN. En esta tesis construimos todas las demostraciones de estos hechos para los casos DD, NN y lo que es nuevo, consideramos el caso DN del problema de difracción de Sommerfeld de la onda plana sobre un semiplano. En el siguiente capítulo damos el planteamiento del problema de Sommerfeld.

Capítulo 2

Planteamiento del problema de difracción de Sommerfeld

En este capítulo formulamos el problema de difracción de Sommerfeld estacionario, cuya solución es la amplitud límite del problema planteado en el capítulo 1. Para empezar, reescribimos la onda incidente no estacionaria, dada por (1.0.1), como:

$$u_i(x, t) = e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega_0(n \cdot x)} f(t - n \cdot x) = e^{-i\omega_0 t} A_i(x, t), \quad (2.0.1)$$

donde la amplitud $A_i(x, t)$ de la onda u_i es,

$$A_i(x, t) := e^{i\omega_0(n \cdot x)} f(t - n \cdot x). \quad (2.0.2)$$

Cuando $t \rightarrow +\infty$ la amplitud $A_i(x, t)$ tiene el límite $A_i(x)$,

$$A_i(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{i\omega_0(n \cdot x)} f(t - n \cdot x) = e^{i\omega_0(n \cdot x)}, \quad (2.0.3)$$

por (1.0.2), dado que cuando $t \rightarrow \infty$, la función de perfil $f(t - n \cdot x) \rightarrow 1$. Esto significa que las condiciones iniciales (1.0.7) también corresponden al principio de la amplitud límite, lo mismo pasa con las soluciones $u^\phi(x, t)$.

Reescribiendo $A_i(x)$ en las coordenadas polares, $x = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$, obtenemos

$$A_i(\rho, \varphi) = e^{-i\omega_0 \rho \cos(\varphi - \alpha)}, \quad \rho > 0. \quad (2.0.4)$$

En efecto, por la definición del vector n en (1.0.1), tenemos (ver Figura 2):

$$A_i(\rho, \varphi) = e^{i\omega_0(\cos(\pi + \alpha), \sin(\pi + \alpha)) \cdot (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)} = e^{-i\omega_0 \rho \cos(\varphi - \alpha)}, \quad (2.0.5)$$

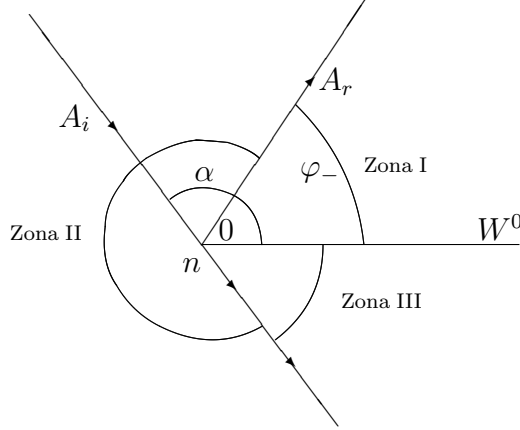


Figura 2. Difracción en un semiplano.

Asumimos

$$0 < \alpha < \pi. \quad (2.0.6)$$

Los casos límites $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$, se consideran en los capítulos 9 y 10.

Es bien conocido (veasé por ejemplo [1]) que la solución de Sommerfeld se deriva de la parte óptica (onda incidente + onda reflejada) y la onda difractada por el borde del semiplano (i.e. el origen 0).

El problema de difracción de Sommerfeld sobre el semiplano, con las condiciones de frontera del tipo DD, NN y ND se puede formular de la siguiente manera: encontrar las amplitudes límites $A_D(x)$, $A_N(x)$ y $A_{DN}(x)$ tales que

$$\begin{cases} (\Delta + \omega_0^2)A_D(x) = 0, \\ A_D(x_1, 0\pm) = 0, \end{cases} \quad x \in Q^0; \quad (2.0.7)$$

$$\begin{cases} (\Delta + \omega_0^2)A_N(x) = 0, \\ \partial_\nu A_N(x_1, 0\pm) = 0, \end{cases} \quad x \in Q^0; \quad (2.0.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta + \omega_0^2)A_{DN}(x) = 0, \\ A_{DN}(x_1, x_2 + 0) = 0, \\ \partial_\nu A_{DN}(x_1, x_2 - 0) = 0, \end{array} \right| \quad x \in Q^0, x_1 > 0, \quad (2.0.9)$$

donde ∂_ν es la derivada direccional con respecto a la normal exterior a W^0 , $W^0 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0, x_1 > 0\}$ y $Q^0 := \mathbb{R}^2 \setminus W^0$. Además, por razones físicas se requiere que estas amplitudes límites admitan la descomposición en la forma

$$\begin{aligned} A_D(x) &= A_i^0(x) + A_{rD}^0(x) + A_{dD}(x), \\ A_N(x) &= A_i^0(x) + A_{rN}^0(x) + A_{dN}(x), \\ A_{DN}(x) &= A_i^0(x) + A_{rDN}^0(x) + A_{dDN}(x), \end{aligned} \quad (2.0.10)$$

donde la amplitud de la onda incidente cumple

$$A_i^0(x) := \begin{cases} A_i(x), & \varphi \in (0, \varphi_+) \\ 0, & \varphi \in (\varphi_+, 2\pi). \end{cases} \quad (2.0.11)$$

Las amplitudes A_{rD} , A_{rN} y A_{rDN} de las ondas reflejadas se contruyen de tal manera que ellas son las amplitudes de las ondas planas (i.e. de las ondas del tipo (1.0.1)) y su suma con la amplitud de la onda incidente A_i^0 satisface las condiciones de frontera DD, NN, DN respectivamente. Esto nos da que las amplitudes para las ondas reflejadas para las condiciones de DD y DN están dadas por

$$A_{rD}^0(x) = A_{rDN}^0(x) := \begin{cases} -e^{-i\omega_0\rho\cos(\varphi+\alpha)}, & \varphi \in (0, \varphi_-) \\ 0, & \varphi \in (\varphi_-, 2\pi). \end{cases} \quad (2.0.12)$$

De la misma manera obtenemos que la onda reflejada para el caso NN está dada por

$$A_{rN}(x) := \begin{cases} e^{-i\omega_0\rho\cos(\varphi+\alpha)}, & \varphi \in (0, \varphi_-) \\ 0, & \varphi \in (\varphi_-, 2\pi). \end{cases} \quad (2.0.13)$$

Finalmente, también por razones físicas, las ondas difractadas tienen la propiedad

$$\begin{aligned} A_{dD}(x) &\longrightarrow 0, \\ A_{dN}(x) &\longrightarrow 0, \\ A_{dDN}(x) &\longrightarrow 0, \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} |x| \longrightarrow \infty, \quad \varphi \neq \pi \pm \alpha. \end{array} \right. \quad (2.0.14)$$

Capítulo 3

Integral de Sommerfeld

En este capítulo investigamos la integral de Sommerfeld que juega el papel principal en las fórmulas para las soluciones. Sommerfeld resolvió el problema de la difracción (2.0.7)-(2.0.8) de la onda plana estacionaria (2.0.4) sobre un semiplano para las condiciones de frontera DD y NN introduciendo la siguiente función:

$$U(\rho, \psi) := \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{i\frac{\gamma}{2}}}{e^{i\frac{\gamma}{2}} - e^{i\frac{\psi}{2}}} e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \quad \rho > 0, \quad \psi \in \mathbb{R}, \quad (3.0.1)$$

donde $\mathcal{C}$ es cualquier contorno del tipo Sommerfeld (los dos lazos) (por ejemplo, ver Figura 3).

Nosotros también utilizamos la integral de este tipo para encontrar la solución del problema DN. En este capítulo nuestra meta es demostrar que (3.0.1) converge y mostrar que admite derivadas de cualquier orden, es decir, es una función de clase C^∞ , también se dan las fórmulas explícitas para el valor de estas derivadas.

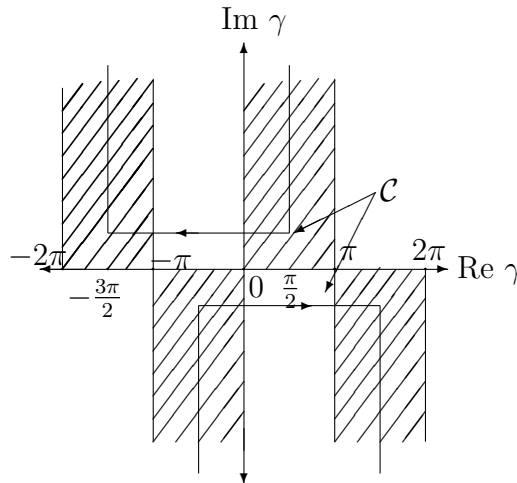


Figura 3. Contorno de Sommerfeld $\mathcal{C}$

Para demostrar que la integral en (3.0.1) converge, en el siguiente lema establecemos que la función $e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}$ decrece súper-exponencialmente y como $e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}$ es el termino

dominante en (3.0.1) esto nos ayudará a garantizar la convergencia de la integral (3.0.1).

Lema 3.0.1. *La función $e^{-i\omega_0\rho\cos\gamma}$ para $\omega_0 > 0, \rho > 0$ decrece súper exponencialmente en el contorno $\mathcal{C}$ cuando $|\operatorname{Im}\gamma| \rightarrow +\infty$, es decir, $\exists C = C(\omega_0, \rho), c = c(\omega_0, \rho)$ tales que*

$$|e^{-i\omega_0\rho\cos\gamma}| \leq Ce^{-ce^{|\operatorname{Im}\gamma|}}, \quad \gamma \in \mathcal{C}. \quad (3.0.2)$$

Demostración. Obtendremos el resultado (3.0.2), por ejemplo, para la parte superior $\mathcal{C}_+$ de $\mathcal{C}$, es decir, para $\gamma \in \mathcal{C}$ y $\operatorname{Im}\gamma > 0$. El caso del contorno inferior se analiza similarmente. Sea $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, que pertenecen a las líneas verticales de $\mathcal{C}_+$. Entonces $\gamma_1 = -3\pi/2$ ó $\gamma_1 = \pi/2$ y

$$|e^{-i\omega_0\rho\cos\gamma}| = |e^{-i\omega_0\rho\cos(\gamma_1)\cosh(\gamma_2)}e^{-\omega_0\rho\sin(\gamma_1)\sinh(\gamma_2)}| = e^{-\omega_0\rho\sin(\gamma_1)\sinh(\gamma_2)}. \quad (3.0.3)$$

Dado que $\sin\gamma_1 = 1$, existe $\delta_1(\omega_0, \rho) > 0$ tal que para cualquier $\delta_2 > 0$

$$\omega_0\rho\sin\gamma_1\sinh\gamma_2 \geq \omega_0\rho\sinh\gamma_2 \geq \delta_1(\omega_0, \rho)e^{\gamma_2}, \quad \gamma_2 \geq \delta_2 > 0, \gamma \in \mathcal{C}_+. \quad (3.0.4)$$

Por lo tanto,

$$-\omega_0\rho\sin\gamma_1\sinh\gamma_2 \leq -\delta_1(\omega_0, \rho)e^{\gamma_2}, \quad \gamma_2 \geq \delta_2 > 0, \gamma \in \mathcal{C}_+.$$

Con lo que obtenemos finalmente, $|e^{-i\omega_0\rho\cos\gamma}| \leq Ce^{-ce^{\gamma_2}}$, para $\gamma \in \mathcal{C}_+$. Entonces se cumple (3.0.2) y el Lema 3.0.1 se demostró. ■

En el siguiente lema, apoyados en el resultado obtenido en el Lema 3.0.1, concluimos que (3.0.1) converge.

Lema 3.0.2. *La integral (3.0.1) converge.*

Demostración. Por la cota (3.0.2) es suficiente probar que el otro factor del integrando en (3.0.1) es acotado, es decir,

$$I(\gamma) := \left| \frac{e^{i\gamma/2}}{e^{i\gamma/2} - e^{i\psi/2}} \right| \leq C < \infty, \quad \gamma \in \mathcal{C}. \quad (3.0.5)$$

Tenemos

$$I(\gamma) = \frac{1}{1 - e^{i(\psi-\gamma)/2}} = \frac{1}{1 - e^{i(\psi-\gamma_1-i\gamma_2)/2}} = \frac{1}{1 - e^{i(\psi-\gamma_1)/2}e^{\gamma_2/2}}. \quad (3.0.6)$$

Primero, notemos que $I(\gamma)$ es continua sobre $\mathcal{C}$. Para mostrarlo es suficiente mostrar que

$$e^{i(\psi-\gamma_1)/2}e^{\gamma_2/2} \neq 1, \quad \gamma \in \mathcal{C}.$$

Pero es evidente ya que si $\psi \in \mathbb{R}$, entonces $|e^{i(\psi-\gamma_1)/2}| = 1$ y $e^{\gamma_2/2} \neq 1$ ya que $|\gamma_2| > 0$, dado que el contorno $\mathcal{C}$ no intersecta el eje $\operatorname{Re}\gamma$, (ver Figura 3).

Segundo, tenemos de (3.0.6) que

$$I(\gamma) \rightarrow 0, \quad \gamma_2 \rightarrow +\infty, \quad (3.0.7)$$

y

$$I(\gamma) \rightarrow 1, \quad \gamma_2 \rightarrow -\infty. \quad (3.0.8)$$

Por lo tanto (3.0.5) se sigue de la siguiente afirmación, bien conocida:

Lema 3.0.3. Sea $f(z)$ continua en $z \in \gamma$, donde γ es un contorno en $\mathbb{C}$. Entonces f es acotada si existe $R > 0$ tal que f es acotada sobre $\gamma \cap (\mathbb{C} \setminus B_R)$. ■

Ya demostramos que (3.0.1) converge, nos resta demostrar que las derivadas de cualquier orden de esta función existen. Para ello en el siguiente lema damos la expresión para la derivada de la integral (3.0.1) respecto de ρ .

Lema 3.0.4. La integral (3.0.1) también converge después de la diferenciación del integrando en ρ cualquier número de veces.

Demostración. Derivando formalmente (3.0.1) n veces bajo el signo de la integral, con respecto de ρ obtenemos:

$$\partial_\rho^n U(\rho, \psi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{e^{i\frac{\gamma}{2}}}{e^{i\frac{\gamma}{2}} - e^{i\frac{\psi}{2}}} [(-i)^n \omega_0^n \cos^n \gamma] e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma. \quad (3.0.9)$$

Nos falta demostrar el decaimiento del integrando. Tenemos que,

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{i\frac{\gamma}{2}}}{e^{i\frac{\gamma}{2}} - e^{i\frac{\psi}{2}}} (-i)^n \omega_0^n \cos^n \gamma e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} \right| &= \left| \frac{e^{i\frac{\gamma}{2}}}{e^{i\frac{\gamma}{2}} - e^{i\frac{\psi}{2}}} \right| |(\omega_0^n \cos^n \gamma) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| \\ &\leq |(\omega_0^n \cos^n \gamma)| C e^{-c e^{|\gamma_2|}} \quad \gamma \in \mathcal{C}, \end{aligned}$$

por las estimaciones (3.0.2) y (3.0.5). Por otro lado, para $\gamma_1 = -3\pi/2$ ó $\gamma_1 = \pi/2$

$$|\cos \gamma|^n = |\cos(\gamma_1 + i\gamma_2)|^n = |\cos(\gamma_1) \cosh(\gamma_2) - i \sin(\gamma_1) \sinh(\gamma_2)|^n \leq \frac{1}{2} e^{n|\gamma_2|}. \quad (3.0.10)$$

Finalmente,

$$\exists C_1 > 0, c > 0, c_1 > 0 \quad \text{tal que} \quad e^{n|\gamma_2|} e^{-c e^{|\gamma_2|}} \leq C_1 e^{-c_1 e^{|\gamma_2|}}, \quad \gamma_2 \in \mathbb{R}.$$

Esta desigualdad (véase Anexo A: Desigualdad de la integral de Sommerfeld) y la estimación (3.0.10) implican la convergencia de la integral (3.0.9). Así el Lema 3.0.4 queda demostrado. ■

Ya hemos probado la existencia de la derivada enésima de (3.0.1) respecto a ρ . Nos falta hacer lo mismo para ψ .

Para empezar, en el siguiente lema damos la expresión formal para la derivada de la integral (3.0.1) respecto de ψ .

Lema 3.0.5. Para $n \geq 1$ la derivada enésima de (3.0.1) respecto a ψ es:

$$\partial_\psi^n U(\rho, \psi) = \int_{\mathcal{C}} e^{i\frac{\gamma}{2}} e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} \left[\frac{k_1(\psi)}{[e^{i\frac{\gamma}{2}} - e^{i\frac{\psi}{2}}]^{n+1}} + \frac{k_2(\psi)}{[e^{i\frac{\gamma}{2}} - e^{i\frac{\psi}{2}}]^n} + \cdots + \frac{k_n(\psi)}{[e^{i\frac{\gamma}{2}} - e^{i\frac{\psi}{2}}]^2} \right] d\gamma. \quad (3.0.11)$$

Demostración. Para demostrar que la derivada de (3.0.1) respecto a ψ tiene la forma (3.0.11) usamos inducción sobre n .

I. Caso base, $n = 1$. Derivando (3.0.1) obtenemos

$$\partial_\psi U(\rho, \psi) = \frac{i}{8\pi} \int_{\mathcal{C}} e^{i\frac{\gamma}{2}} e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} \left[\frac{e^{i\psi/2}}{[e^{i\frac{\gamma}{2}} - e^{i\frac{\psi}{2}}]^2} \right] d\gamma = \int_{\mathcal{C}} e^{i\frac{\gamma}{2}} e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} \left[\frac{k_1(\psi)}{[e^{i\frac{\gamma}{2}} - e^{i\frac{\psi}{2}}]^2} \right] d\gamma, \quad (3.0.12)$$

donde observamos que se cumple la identidad (3.0.11).

II. Supongamos que (3.0.11) vale para n y demostremos la valides para $n + 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_\psi^{n+1} U(\rho, \psi) &= \partial_\psi \partial_\psi^n U(\rho, \psi) \\ &= \partial_\psi \left[\int_{\mathcal{C}} e^{i\frac{\gamma}{2}} e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} \left[\frac{k_1(\psi)}{[e^{i\frac{\gamma}{2}} - e^{i\frac{\psi}{2}}]^{n+1}} + \frac{k_2(\psi)}{[e^{i\frac{\gamma}{2}} - e^{i\frac{\psi}{2}}]^n} + \cdots + \frac{k_n(\psi)}{[e^{i\frac{\gamma}{2}} - e^{i\frac{\psi}{2}}]^2} \right] d\gamma \right] \\ &= \int_{\mathcal{C}} e^{i\frac{\gamma}{2}} e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} \left[\frac{-i(n+1)e^{i\psi/2}k_1(\psi)}{2[e^{i\frac{\gamma}{2}} - e^{i\frac{\psi}{2}}]^{n+2}} - \frac{\partial_\psi k_1(\psi)}{[e^{i\frac{\gamma}{2}} - e^{i\frac{\psi}{2}}]^{n+1}} + \frac{-ine^{i\psi/2}k_2(\psi)}{2[e^{i\frac{\gamma}{2}} - e^{i\frac{\psi}{2}}]^{n+1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial_\psi k_2(\psi)}{[e^{i\frac{\gamma}{2}} - e^{i\frac{\psi}{2}}]^n} + \cdots + \frac{k_{n+1}(\psi)}{[e^{i\frac{\gamma}{2}} - e^{i\frac{\psi}{2}}]^2} \right] d\gamma \\ &= \int_{\mathcal{C}} e^{i\frac{\gamma}{2}} e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} \left[\frac{\tilde{k}_1(\psi)}{[e^{i\frac{\gamma}{2}} - e^{i\frac{\psi}{2}}]^{n+2}} + \frac{\tilde{k}_2(\psi)}{[e^{i\frac{\gamma}{2}} - e^{i\frac{\psi}{2}}]^{n+1}} + \cdots + \frac{\tilde{k}_{n+1}(\psi)}{[e^{i\frac{\gamma}{2}} - e^{i\frac{\psi}{2}}]^2} \right] d\gamma. \end{aligned}$$

con lo que demostramos la valides de nuestra hipótesis de inducción y por lo tanto, se cumple el Lema 3.0.5. ■

Para demostrar que la integral (3.0.11) converge vamos a estimar:

$$B_n(\gamma) := \left| \frac{e^{i\gamma/2}}{(e^{i\gamma/2} - e^{i\psi/2})^n} \right|. \quad (3.0.13)$$

Lema 3.0.6. Para $n \in \mathbb{N} \exists C_n$ tal que

$$|B_n| \leq C_n, \quad \gamma \in \mathcal{C}. \quad (3.0.14)$$

Demostración. Primero notemos que $B_n(\gamma)$ es continua sobre $\mathcal{C}$. Esto se demuestra de la misma manera que la demostración de la continuidad de $I(\gamma)$, (véase Lema 3.0.2). Es claro, por (3.0.13), que

$$B_n(\gamma) = \frac{e^{-\gamma_2/2}}{|e^{i\gamma/2} - e^{i\psi/2}|^n}, \quad n \geq 1. \quad (3.0.15)$$

En el Anexo A: Demostración del Lema 3.0.6, se demuestra que

$$B_n(\gamma) \longrightarrow 0, \quad \gamma_2 \longrightarrow +\infty. \quad (3.0.16)$$

Ahora, escribiendo B_n en la forma

$$B_n(\gamma) = \frac{1}{(e^{-\gamma_2/2})^{n-1} |e^{i\gamma_1/2} - e^{\gamma_2/2} e^{i\psi/2}|^n} \quad (3.0.17)$$

es evidente que

$$B_n(\gamma) \longrightarrow 0, \quad \gamma_2 \longrightarrow -\infty, \quad n > 1. \quad (3.0.18)$$

Para $n = 1$ tenemos que

$$|B_n(\gamma)| \leq b, \quad \gamma \in \mathcal{C}, \quad (3.0.19)$$

por (3.0.17) y (3.0.5). Con las estimaciones (3.0.16), (3.0.18) y (3.0.19) observamos (3.0.14). De modo que el Lema 3.0.6 queda demostrado. ■

Finalmente, la integral (3.0.1) converge, lo que implica que la derivada enésima de U respecto a ψ existe.

Lema 3.0.7. *La integral (3.0.11) converge.*

Demostración. Es suficiente demostrar que, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{e^{i\gamma/2} e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}}{|e^{i\gamma/2} - e^{i\psi/2}|^n} d\gamma \quad (3.0.20)$$

converge. Pero esto se sigue de las cotas (3.0.2) y (3.0.14) ■

Por lo tanto, de los Lemas 3.0.4 y 3.0.7 obtenemos la siguiente afirmación:

Lema 3.0.8. *La función (3.0.1) es de clase C^∞ , es decir, admite todas las derivadas con respecto a ρ y ψ . Las cuales se representan por (3.0.9) y (3.0.11) respectivamente.* ■

Capítulo 4

La ecuación de Helmholtz

Como tarea principal en este capítulo demostramos que (3.0.1) satisface la ecuación de Helmholtz, como lo establece el siguiente teorema:

Teorema 4.0.1. *Sea $U(\rho, \psi)$ como en (3.0.1) y $\Delta = \frac{1}{\rho} \partial_\rho [\rho \partial_\rho] + \frac{1}{\rho^2} \partial_\psi^2$ el operador de Laplace en coordenadas polares (ρ, φ) . Entonces se cumple*

$$(\Delta + \omega_0^2)U(\rho, \psi) = 0, \quad \rho > 0, \quad \psi \in \mathbb{R}. \quad (4.0.1)$$

Demostración.

I. Primero, sea

$$Z(\rho, \psi, \gamma) := \frac{e^{i\frac{\gamma}{2}}}{e^{i\frac{\gamma}{2}} - e^{i\frac{\psi}{2}}} e^{-i\omega_0 \rho \cos(\gamma)}. \quad (4.0.2)$$

Haciendo el cambio de variable $\gamma = \beta + \psi$ en (4.0.2), tenemos

$$\begin{aligned} Z_1(\rho, \psi, \beta) := Z(\rho, \psi, \beta + \psi) &= \left[\frac{e^{i\frac{(\beta+\psi)}{2}}}{e^{i\frac{(\beta+\psi)}{2}} - e^{i\frac{\psi}{2}}} \right] e^{-i\omega_0 \rho \cos(\beta+\psi)} \\ &= \left[\frac{e^{i\frac{\beta}{2}}}{e^{i\frac{\beta}{2}} - 1} \right] e^{-i\omega_0 \rho \cos(\beta+\psi)}, \quad \beta \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (4.0.3)$$

Aplicando el operador $(\Delta + \omega_0^2)$ a (4.0.3)

$$\begin{aligned} (\Delta + \omega_0^2)Z_1(\rho, \psi, \beta) &= (\Delta + \omega_0^2) \left[\frac{e^{i\frac{\beta}{2}}}{e^{i\frac{\beta}{2}} - 1} \right] e^{-i\omega_0 \rho \cos(\beta+\psi)} \\ &= \left[\frac{e^{i\frac{\beta}{2}}}{e^{i\frac{\beta}{2}} - 1} \right] (\Delta + \omega_0^2) e^{-i\omega_0 \rho \cos(\beta+\psi)}, \quad \beta \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Dado que,

$$\begin{aligned}
 (\Delta + \omega_0^2)e^{-i\omega_0\rho\cos(\beta+\psi)} &= \frac{1}{\rho}\partial_\rho[\rho\partial_\rho e^{-i\omega_0\rho\cos(\beta+\psi)}] + \frac{1}{\rho^2}\partial_\psi^2 e^{-i\omega_0\rho\cos(\beta+\psi)} \\
 &\quad + \omega_0^2 e^{-i\omega_0\rho\cos(\beta+\psi)} \\
 &= -e^{-i\omega_0\rho\cos(\beta+\psi)} \left[\frac{iw}{\rho} \cos(\beta + \psi) + \omega_0^2 \cos^2(\beta + \psi) \right] \\
 &\quad + e^{-i\omega_0\rho\cos(\beta+\psi)} \left[\frac{iw}{\rho} \cos(\beta + \psi) - \omega_0^2 \sin^2(\beta + \psi) \right] \\
 &\quad + \omega_0^2 e^{-i\omega_0\rho\cos(\beta+\psi)} = 0, \quad \beta \in \mathbb{C},
 \end{aligned} \tag{4.0.4}$$

se obtiene

$$(\Delta + \omega_0^2)Z_1(\rho, \psi, \beta) = 0, \quad \beta \in \mathbb{C}. \tag{4.0.5}$$

II. De (4.0.9) y (4.0.3) tenemos

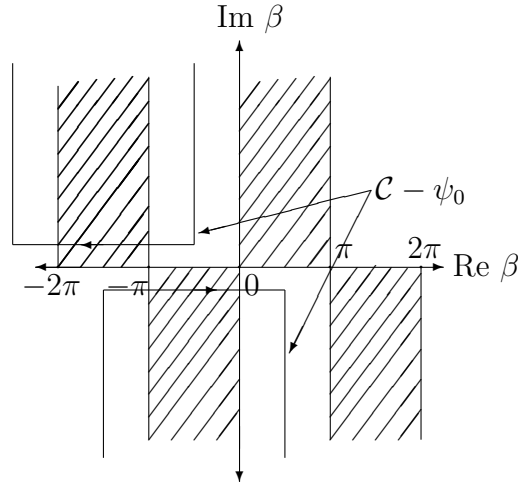
$$U(\rho, \psi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}-\psi} Z_1(\rho, \psi, \beta) d\beta \quad \rho > 0, \quad \psi \in \mathbb{R}, \tag{4.0.6}$$

donde

$$\mathcal{C} - \psi = \{\beta - \psi : \beta \in \mathcal{C}\}. \tag{4.0.7}$$

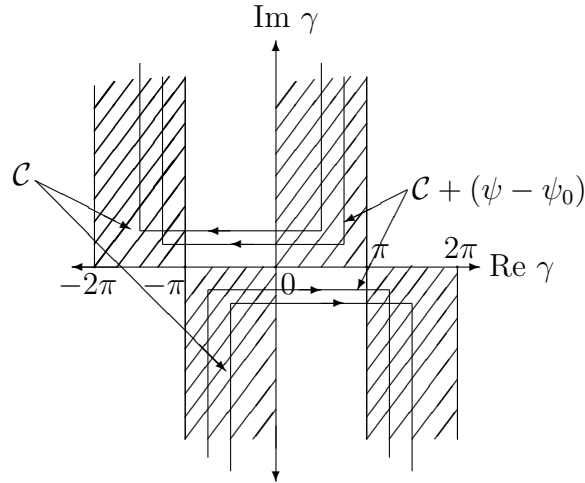
Podemos "fijar" $\mathcal{C} - \psi$. En otras palabras, podemos escribir en (4.0.6) en lugar de $\mathcal{C} - \psi$ el contorno $\mathcal{C} - \psi_0$ y (4.0.6) será válida si $|\psi - \psi_0| < \epsilon$, para ϵ suficientemente pequeño. En efecto, esto se sigue del Teorema de Cauchy (véase Anexo A: Cambio de contorno de integración), donde se presenta una argumentación técnica). Con este cambio de contorno obtenemos (véase Figura 4),

$$U(\rho, \psi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}-\psi_0} \left[\frac{e^{i\frac{\beta}{2}}}{e^{i\frac{\beta}{2}} - 1} \right] e^{-i\omega_0\rho\cos(\beta+\psi)} d\beta, \quad |\psi - \psi_0| < \epsilon. \tag{4.0.8}$$


 Figura 4. Contorno de Sommerfeld $\mathcal{C} - \psi_0$.

Notemos que $\mathcal{C} - \psi_0$ no necesariamente pertenece a la región sombreada, pero la integral (4.0.8) es convergente, dado que la exponencial contiene $\beta + \psi$.

Continuando la demostración del Teorema 4.0.1, tenemos que $\beta \in \mathcal{C} - \psi_0 \iff \gamma = \beta + \psi \in \mathcal{C} - \psi_0 + \psi = \mathcal{C} + (\psi - \psi_0)$. Consideremos el contorno $\mathcal{C} + (\psi - \psi_0)$ (véase Figura 5).


 Figura 5. Contorno de Sommerfeld $\mathcal{C} + (\psi - \psi_0)$.

Ya que $|\psi - \psi_0| < \epsilon$, entonces para $\epsilon < \pi/2$ el contorno $\mathcal{C} + (\psi - \psi_0)$ permanece en la zona sombreada del contorno $\mathcal{C}$ (véase Figura 5) y por lo tanto la integral (3.0.1) sobre $\mathcal{C} + (\psi - \psi_0)$ es igual a la integral (3.0.1) sobre $\mathcal{C}$ por el Teorema de Cauchy, (véase Anexo A: Cambio de contorno de integración). Apliquemos este teorema a nuestro problema, tomando $\Gamma = \mathcal{C}$, $\alpha = \psi - \psi_0$. Es decir,

$$U(\rho, \psi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}+(\psi-\psi_0)} \left[\frac{e^{i\frac{\gamma}{2}}}{e^{i\frac{\gamma}{2}} - e^{i\frac{\psi}{2}}} \right] e^{-i\omega_0 \rho \cos(\gamma)} d\gamma. \quad (4.0.9)$$

Regresando a la variable $\beta = \gamma - \psi$, vemos que (4.0.8) se cumple.

Ahora, derivando bajo el signo de la integral la ecuación (4.0.8) y utilizando (4.0.5) junto con el Lema 3.0.4 se obtiene (4.0.1), como queríamos demostrar. Por lo tanto el Teorema 4.0.1 se demostró. ■

Capítulo 5

Soluciones del problema de Sommerfeld para las condiciones en la frontera DD, NN y DN

En este capítulo transformamos las fórmulas de Sommerfeld para los problemas DD y NN a una forma apropiada para manipularlas y demostramos que estas fórmulas satisfacen (2.0.7) y (2.0.8) respectivamente. También damos la solución para el problema DN y demostramos que satisface (2.0.9).

5.1. Problemas DD y NN

Sommerfeld define la solución al problema de la difracción mediante la antisimetría, es decir, a través de:

$$\begin{aligned} A_D(\rho, \varphi) &:= U(\rho, \varphi - \alpha) - U(\rho, \varphi + \alpha) \\ A_N(\rho, \varphi) &:= U(\rho, \varphi - \alpha) + U(\rho, \varphi + \alpha) \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

En el siguiente lema damos una representación de las soluciones de Sommerfeld más conveniente para la demostración de (2.0.7)-(2.0.9) y (2.0.10).

Lema 5.1.1.

$$A_D(\rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_c \mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \tag{5.1.2}$$

$$A_N(\rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_c \mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \tag{5.1.3}$$

donde,

$$\mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) := \frac{1}{2} [\coth((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4) - \coth((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)], \tag{5.1.4}$$

$$\mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) := -\frac{1}{2} [\coth((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4) + \coth((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)]. \tag{5.1.5}$$

Demostración. Primero, por definición de $\coth z$ tenemos que:

$$\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \frac{e^{2x} - 1 + 2}{e^{2x} - 1} = 1 + \frac{2}{e^{2x} - 1} = 1 - \frac{2}{1 - e^{2x}} \quad (5.1.6)$$

De aquí, considerando $z = i(-\gamma + \varphi - \alpha)/2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - e^{i\frac{-\gamma + \varphi - \alpha}{2}}} - \frac{1}{1 - e^{i\frac{-\gamma + \varphi + \alpha}{2}}} &= \frac{1}{2} [\coth((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4) - \coth((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)] \\ &= \mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

entonces, usando (3.0.1) y (5.1.1) tenemos

$$A_D(\rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \left[\frac{1}{1 - e^{i\frac{-\gamma + \varphi - \alpha}{2}}} - \frac{1}{1 - e^{i\frac{-\gamma + \varphi + \alpha}{2}}} \right] e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \quad (5.1.8)$$

Finalmente, por (5.1.7) obtenemos que (5.1.2) coincide con (5.1.1).

Ahora vamos a demostrar (5.1.3), notemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - e^{i\frac{-\gamma + \varphi - \alpha}{2}}} + \frac{1}{1 - e^{i\frac{-\gamma + \varphi + \alpha}{2}}} &= -\frac{1}{2} [\coth((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4) + \coth((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4) - 2] \\ &= \mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) + 1. \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

Por lo tanto, usando (5.1.9) tenemos que

$$A_N(\rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \left[\frac{1}{1 - e^{i\frac{-\gamma + \varphi - \alpha}{2}}} + \frac{1}{1 - e^{i\frac{-\gamma + \varphi + \alpha}{2}}} \right] e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \quad (5.1.10)$$

usando (5.1.9) concluimos

$$A_N(\rho, \varphi) = -\frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{C}} [\coth((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4) + \coth((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4) - 1] e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma. \quad (5.1.11)$$

Con este resultado podemos escribir la solución para el caso Neumann como

$$\begin{aligned} A_N(\rho, \varphi) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma. \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

En efecto,

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma = 0, \quad (5.1.13)$$

pues $e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} = e^{-i\omega_0 \rho \cos(-\gamma)}$, lo que implica que el integrando en (5.1.13) es par y al integrarlo en $\mathcal{C}$ es cero. De esta manera (5.1.3) se demostró.

Ya que U de (3.0.1) está bien definida y A_D , A_N se obtienen a partir de U , ellas también están bien definidas, pero revisemos esto directamente. Para ello demosremos que las integrales (5.1.2) y (5.1.3) convergen absolutamente. Consideremos

$$\begin{aligned} |\coth((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)e^{-i\omega_0\rho\cos\gamma}| &= |\coth((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)| |e^{-i\omega_0\rho\cos\gamma}| \\ &\leq |\coth((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)| C_1 e^{-ce^{|\operatorname{Im}\gamma|}}, \end{aligned}$$

donde se usó Lema 3.0.1, por otro lado

$$\coth((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4) = 1 - \frac{2}{1 - e^{(-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/2}}. \quad (5.1.14)$$

Demostremos que

$$\frac{2}{1 - e^{(-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/2}} \longrightarrow 0, \quad \gamma_2 \longrightarrow \infty, \quad (5.1.15)$$

y

$$\frac{2}{1 - e^{(-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/2}} \longrightarrow 2, \quad \gamma_2 \longrightarrow -\infty, \quad (5.1.16)$$

en efecto, tomando $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, $\gamma_{1,2} \in \mathbb{R}$, tenemos

$$|e^{(-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/2}| = e^{\gamma_2} \longrightarrow \begin{cases} \infty, & \gamma_2 \longrightarrow \infty, \\ 0, & \gamma_2 \longrightarrow -\infty. \end{cases} \quad (5.1.17)$$

Por lo tanto

$$|\coth((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)e^{-i\omega_0\rho\cos\gamma}| \leq C_2 e^{-ce^{|\gamma_2|}} \quad (5.1.18)$$

y podemos concluir que

$$|[\coth((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4) - \coth((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)]e^{-i\omega_0\rho\cos\gamma}| \leq C e^{-ce^{|\gamma_2|}} \quad (5.1.19)$$

para C suficientemente grande, de esta manera por Lema (3.0.1) las integrales (5.1.2) y (5.1.3) convergen.

Por lo tanto el Lema 5.1.1 se demostró. ■

5.2. Solución del problema DN

Ya hemos obtenido la solución para los casos Dirichlet y Neumann, por lo tanto nos falta solamente el caso mixto, Dirichlet- Neumann, el cual se muestra a continuación.

Definamos

$$A_{DN}(\rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_C \mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0\rho\cos\gamma} d\gamma, \quad (5.2.20)$$

donde

$$\mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) := \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sinh((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)} - \frac{1}{\sinh((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)} \right]. \quad (5.2.21)$$

A continuación demostramos que (5.2.20) está bien definida, con ayuda del siguiente lema:

Lema 5.2.1. *La integral en (5.2.20) converge absolutamente.*

Demostración. Tenemos que

$$\left| \frac{1}{\sinh((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)} \right| = \frac{2}{|e^{(-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4} - e^{-(-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4}|}, \quad (5.2.22)$$

considerando

$$|e^{(-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4} - e^{-(-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4}| \geq |e^{(-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4}| - |e^{-(-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4}| = e^{\gamma_2/4} - e^{-\gamma_2/4} \quad (5.2.23)$$

por ende

$$\left| \frac{1}{\sinh((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)} \right| \leq \frac{2}{e^{\gamma_2/4} - e^{-\gamma_2/4}} = \frac{1}{\sinh(\gamma_2/4)} \rightarrow 0, \quad \gamma_2 \rightarrow \pm\infty. \quad (5.2.24)$$

Finalmente

$$\left| \left[\frac{1}{\sinh((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)} - \frac{1}{\sinh((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)} \right] e^{-i\omega_0\rho\cos\gamma} \right| \rightarrow 0, \quad \gamma_2 \rightarrow \pm\infty, \quad (5.2.25)$$

por (5.2.23) y Lema 3.0.1. De esta manera tenemos que (5.2.20) converge. ■

5.3. Las funciones A_D , A_N y A_{DN} satisfacen la ecuación de Helmholtz y las condiciones de frontera DD, NN, DN

El trabajo de este capítulo lo dividiremos en cuatro partes. En la primera demostramos que (5.1.2), (5.1.3) y (5.2.20) satisfacen la ecuación de Helmholtz y en las tres restantes demostramos que las soluciones cumplen las condiciones de frontera dadas en (2.0.7), (2.0.8) y (2.0.9) respectivamente.

Lema 5.3.1. i) *Las funciones $A_D(\rho, \varphi)$, $A_N(\rho, \varphi)$ y $A_{DN}(\rho, \varphi)$ satisfacen la ecuación de Helmholtz, es decir, se cumplen:*

$$\begin{aligned} (\Delta + \omega_0^2)A_D(\rho, \varphi) &= 0, & \rho > 0, \quad \varphi \in (0, 2\pi) \\ (\Delta + \omega_0^2)A_N(\rho, \varphi) &= 0, & \rho > 0, \quad \varphi \in (0, 2\pi), \\ (\Delta + \omega_0^2)A_{DN}(\rho, \varphi) &= 0, & \rho > 0, \quad \varphi \in (0, 2\pi). \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

ii) *La función A_D satisface las condiciones de frontera de Dirichlet*

$$A_D(\rho, 0) = A_D(\rho, 2\pi) = 0, \quad \rho > 0. \quad (5.3.27)$$

iii) *La función A_N satisface las condiciones de frontera de Neumann,*

$$\partial_\varphi A_N(\rho, 0\pm) = 0, \quad \rho > 0. \quad (5.3.28)$$

iv) *La función A_{DN} satisface las condiciones en la frontera Dirichlet-Neuman,*

$$\begin{aligned} A_{DN}(\rho, 0) &= 0, \\ \partial_\varphi A_{DN}(\rho, 2\pi) &= 0. \end{aligned} \quad (5.3.29)$$

Demostración. i) Para empezar, introducimos las funciones:

$$\begin{aligned} K_D(\rho, \varphi, \gamma) &= \mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} \\ K_N(\rho, \varphi, \gamma) &= \mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} \\ K_{DN}(\rho, \varphi, \gamma) &= \mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} \end{aligned} \quad (5.3.30)$$

correspondientes a los integrandos de (5.1.2), (5.1.3) y (5.2.20) respectivamente.

Ahora, haciendo el cambio de variable $\gamma = \beta + \varphi$ en (5.1.4), (5.1.5) y (5.2.21) tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{z}}_D(\beta) &:= \frac{1}{2} [\coth((-i\beta + i\alpha)/4) - \coth((-i\beta - i\alpha)/4)] \\ \tilde{\mathfrak{z}}_N(\beta) &:= \frac{1}{2} [\coth((-i\beta + i\alpha)/4) + \coth((-i\beta - i\alpha)/4)] \\ \tilde{\mathfrak{z}}_{DN}(\beta) &:= \frac{1}{2} [\sinh^{-1}((-i\beta + i\alpha)/4) - \sinh^{-1}((-i\beta - i\alpha)/4)]. \end{aligned} \quad (5.3.31)$$

Denotemos

$$\begin{aligned} \tilde{K}_D(\rho, \varphi, \beta) &:= K_D(\rho, \varphi, \beta + \varphi) \\ \tilde{K}_N(\rho, \varphi, \beta) &:= K_N(\rho, \varphi, \beta + \varphi) \\ \tilde{K}_{DN}(\rho, \varphi, \beta) &:= K_{DN}(\rho, \varphi, \beta + \varphi). \end{aligned} \quad (5.3.32)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \tilde{K}_D(\rho, \varphi, \beta) &= \tilde{\mathfrak{z}}_D(\beta) e^{-i\omega_0 \rho \cos(\beta + \varphi)} \\ \tilde{K}_N(\rho, \varphi, \beta) &= \tilde{\mathfrak{z}}_N(\beta) e^{-i\omega_0 \rho \cos(\beta + \varphi)} \\ \tilde{K}_{DN}(\rho, \varphi, \beta) &= \tilde{\mathfrak{z}}_{DN}(\beta) e^{-i\omega_0 \rho \cos(\beta + \varphi)} \end{aligned} \quad (5.3.33)$$

Ya que las funciones $\tilde{\mathfrak{z}}_N, \tilde{\mathfrak{z}}_D$ y $\tilde{\mathfrak{z}}_{DN}$ no dependen de ni de ρ , ni de φ , entonces por (4.0.4) se cumplen

$$\begin{aligned} (\Delta + \omega_0^2) \tilde{K}_D(\rho, \varphi, \beta) &= 0, \\ (\Delta + \omega_0^2) \tilde{K}_N(\rho, \varphi, \beta) &= 0, \\ (\Delta + \omega_0^2) \tilde{K}_{DN}(\rho, \varphi, \beta) &= 0. \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

Por lo que se cumple que

$$(\Delta + \omega_0^2) A_D(\rho, \varphi) = \int_{\mathcal{C}-\varphi} (\Delta + \omega_0^2) \tilde{K}_D(\rho, \varphi, \beta) d\beta = 0, \quad (5.3.35)$$

$$(\Delta + \omega_0^2) A_N(\rho, \varphi) = \int_{\mathcal{C}-\varphi} (\Delta + \omega_0^2) \tilde{K}_N(\rho, \varphi, \beta) d\beta = 0, \quad (5.3.36)$$

$$(\Delta + \omega_0^2) A_{DN}(\rho, \varphi) = \int_{\mathcal{C}-\varphi} (\Delta + \omega_0^2) \tilde{K}_{DN}(\rho, \varphi, \beta) d\beta = 0, \quad (5.3.37)$$

donde $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Para finalizar la demostración debemos justificar que las integrales (5.1.2), (5.1.3) y (5.2.20) siguen siendo válidas para el cambio en el contorno de integración

$$\mathcal{C} + \varphi = \{\beta + \varphi : \beta \in \mathcal{C}, \varphi \in (0, 2\pi)\}, \quad (5.3.38)$$

es decir, debemos justificar que

$$A_D(\rho, \varphi) = \int_{\mathcal{C}-\varphi} \tilde{K}_D(\rho, \varphi, \beta) d\beta \quad (5.3.39)$$

$$A_N(\rho, \varphi) = \int_{\mathcal{C}-\varphi} \tilde{K}_N(\rho, \varphi, \beta) d\beta, \quad (5.3.40)$$

$$A_{DN}(\rho, \varphi) = \int_{\mathcal{C}-\varphi} \tilde{K}_{DN}(\rho, \varphi, \beta) d\beta. \quad (5.3.41)$$

Usando el teorema de Cauchy podemos fijar φ en cierto valor φ_0 siempre y cuando $|\varphi - \varphi_0| < \epsilon$, para ϵ suficientemente pequeño, de esta manera

$$\int_{\mathcal{C}-\varphi} \tilde{K}_D(\rho, \varphi, \beta) d\beta = \int_{\mathcal{C}-\varphi_0} \tilde{K}_D(\rho, \varphi, \beta) d\beta, \quad (5.3.42)$$

$$\int_{\mathcal{C}-\varphi} \tilde{K}_N(\rho, \varphi, \beta) d\beta = \int_{\mathcal{C}-\varphi_0} \tilde{K}_N(\rho, \varphi, \beta) d\beta, \quad (5.3.43)$$

$$\int_{\mathcal{C}-\varphi} \tilde{K}_{DN}(\rho, \varphi, \beta) d\beta = \int_{\mathcal{C}-\varphi_0} \tilde{K}_{DN}(\rho, \varphi, \beta) d\beta, \quad (5.3.44)$$

Luego, tenemos que

$$\beta \in \mathcal{C} - \varphi_0 \iff \gamma = \beta + \varphi \in \mathcal{C} - \varphi_0 + \varphi = \mathcal{C} + (\varphi - \varphi_0) \quad (5.3.45)$$

Consideremos el contorno $\mathcal{C} + (\varphi - \varphi_0)$, tenemos que si $|\varphi - \varphi_0| < \epsilon$, entonces para $\epsilon < \pi/2$ el contorno $\mathcal{C} + (\varphi - \varphi_0)$ permanece en la zona sombreada del contorno $\mathcal{C}$ y por lo tanto la integral (3.0.1) sobre $\mathcal{C} + (\varphi - \varphi_0)$ es igual a la integral (3.0.1) sobre $\mathcal{C}$ por el Teorema de Cauchy (véase Figura 5), es decir

$$\int_{\mathcal{C}} K_D(\rho, \varphi, \gamma) d\gamma = \int_{\mathcal{C}+(\varphi-\varphi_0)} K_D(\rho, \varphi, \gamma) d\gamma, \quad |\varphi - \varphi_0| < \epsilon. \quad (5.3.46)$$

$$\int_{\mathcal{C}} K_N(\rho, \varphi, \gamma) d\gamma = \int_{\mathcal{C}+(\varphi-\varphi_0)} K_N(\rho, \varphi, \gamma) d\gamma, \quad |\varphi - \varphi_0| < \epsilon. \quad (5.3.47)$$

$$\int_{\mathcal{C}} K_{DN}(\rho, \varphi, \gamma) d\gamma = \int_{\mathcal{C}+(\varphi-\varphi_0)} K_{DN}(\rho, \varphi, \gamma) d\gamma, \quad |\varphi - \varphi_0| < \epsilon. \quad (5.3.48)$$

si regresamos a $\gamma = \beta + \varphi$ obtenemos (5.3.39), (5.3.40) y (5.3.41), como queríamos demostrar.

ii) Demostremos que (5.3.27) se cumple. Para las condiciones DD, de la expresión (5.1.2) tenemos:

$$A_D(\rho, 0) = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{C}} [\coth((-i\gamma + i\alpha)/4) - \coth((-i\gamma - i\alpha)/4)] e^{-i\omega_0\rho \cos \gamma} d\gamma \quad (5.3.49)$$

considerando

$$\begin{aligned}\coth((-i\gamma + i\alpha)/4) - \coth((-i\gamma - i\alpha)/4) &= \coth(-(i\gamma - i\alpha)/4) - \coth(-(i\gamma + i\alpha)/4) \\ &= -\coth((i\gamma - i\alpha)/4) + \coth((i\gamma + i\alpha)/4)\end{aligned}$$

y que $e^{-i\omega_0\rho\cos\gamma} = e^{-i\omega_0\rho\cos(-\gamma)}$, concluimos que el integrando es una función par y como $\mathcal{C}$ es un “contorno impar” entonces

$$A_D(\rho, 0) = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{C}} [\coth((-i\gamma + i\alpha)/4) - \coth((-i\gamma - i\alpha)/4)] e^{-i\omega_0\rho\cos\gamma} d\gamma = 0. \quad (5.3.50)$$

Para la segunda condición del tipo Dirichlet en (5.3.27) obtenemos:

$$A_D(\rho, 2\pi) = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{C}} [\coth((-i\gamma + i2\pi + i\alpha)/4) - \coth((-i\gamma + i2\pi - i\alpha)/4)] e^{-i\omega_0\rho\cos\gamma} d\gamma. \quad (5.3.51)$$

Tenemos que (véase Anexo A: Funciones hiperbólicas)

$$\begin{aligned}\coth((-i\gamma + i2\pi + i\alpha)/4) - \coth((-i\gamma + i2\pi - i\alpha)/4) &= \\ \tanh((-i\gamma + i\alpha)/4) - \tanh((-i\gamma - i\alpha)/4),\end{aligned} \quad (5.3.52)$$

usando continuidad de $\tanh z$, obtenemos

$$\begin{aligned}\tanh((-i\gamma + i\alpha)/4) - \tanh((-i\gamma - i\alpha)/4) &= \tanh(-(i\gamma + i\alpha)/4) - \tanh(-(i\gamma + i\alpha)/4) \\ &= -\tanh((i\gamma - i\alpha)/4) + \tanh((i\gamma + i\alpha)/4).\end{aligned}$$

Por lo tanto el integrando también es una función par como en el caso anterior y podemos concluir

$$A_D(\rho, 2\pi) = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{C}} [\coth((-i\gamma + i2\pi + i\alpha)/4) - \coth((-i\gamma + i2\pi - i\alpha)/4)] e^{-i\omega_0\rho\cos\gamma} d\gamma = 0. \quad (5.3.53)$$

Entonces las condiciones de frontera para el problema DD se demostraron.

iii) Para la condición de frontera dada por (5.3.28), (véase Anexo A: Cálculo de $\partial_\varphi A_N$), es suficiente demostrar que los núcleos de las integrales de (A.5.11) y (A.5.13) son funciones pares.

Para (A.5.11) debemos demostrar que:

$$\begin{aligned}& [\operatorname{csch}^2((-i\gamma + i\alpha)/4) + \operatorname{csch}^2((-i\gamma - i\alpha)/4)] e^{-i\omega_0\rho\cos\gamma} \\ &= [\operatorname{csch}^2((i\gamma + i\alpha)/4) + \operatorname{csch}^2((i\gamma - i\alpha)/4)] e^{-i\omega_0\rho\cos(-\gamma)}.\end{aligned}$$

Tomando en cuenta $e^{-i\omega_0\rho\cos\gamma} = e^{-i\omega_0\rho\cos(-\gamma)}$, nos resta demostrar que,

$$\operatorname{csch}^2((-i\gamma + i\alpha)/4) + \operatorname{csch}^2((-i\gamma - i\alpha)/4) = \operatorname{csch}^2((i\gamma + i\alpha)/4) + \operatorname{csch}^2((i\gamma - i\alpha)/4) \quad (5.3.54)$$

Primero tenemos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{csch}^2((-i\gamma + i\alpha)/4) + \operatorname{csch}^2((-i\gamma - i\alpha)/4) &= \operatorname{csch}^2(-(i\gamma - i\alpha)/4) + \operatorname{csch}^2(-(i\gamma + i\alpha)/4) \\
 &= [-\operatorname{csch}((i\gamma - i\alpha)/4)]^2 + [-\operatorname{csch}((i\gamma + i\alpha)/4)]^2 \\
 &= \operatorname{csch}^2((i\gamma - i\alpha)/4) + \operatorname{csch}^2((i\gamma + i\alpha)/4)
 \end{aligned}$$

donde se usó $\operatorname{csch}(-z) = -\operatorname{csch}(z)$, por lo que (5.3.54) se demostró, entonces el núcleo de la integral de (A.5.11) es par. Por lo tanto

$$\partial_\varphi A_N(\rho, 0) = -\frac{i}{16\pi} \int_{\mathcal{C}} [\operatorname{csch}^2((-i\gamma + i\alpha)/4) + \operatorname{csch}^2((-i\gamma - i\alpha)/4)] e^{-i\omega_0\rho \cos \gamma} d\gamma = 0. \quad (5.3.55)$$

Ya que el integrando es una función par y el contorno de integración $\mathcal{C}$ es un “contorno impar”.

De manera similar, para (A.5.13), tenemos que demostrar que se cumple la identidad

$$\begin{aligned}
 &\operatorname{csch}^2((-i\gamma + 2\pi i + i\alpha)/4) + \operatorname{csch}^2((-i\gamma + 2\pi i - i\alpha)/4) \\
 &= \operatorname{csch}^2((i\gamma + 2\pi i + i\alpha)/4) + \operatorname{csch}^2((i\gamma + 2\pi i - i\alpha)/4)
 \end{aligned}$$

Por Lema A.6 (véase Anexo A: Funciones hiperbólicas), tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{csch}^2((-i\gamma + 2\pi i + i\alpha)/4) &= -\operatorname{sech}^2((-i\gamma + i\alpha)/4) \\
 \operatorname{csch}^2((-i\gamma + 2\pi i - i\alpha)/4) &= -\operatorname{sech}^2((-i\gamma - i\alpha)/4).
 \end{aligned}$$

Estos dos resultados implican que es suficiente demostrar que:

$$\operatorname{sech}^2((-i\gamma + i\alpha)/4) + \operatorname{sech}^2((-i\gamma - i\alpha)/4) = \operatorname{sech}^2((i\gamma + i\alpha)/4) + \operatorname{sech}^2((i\gamma - i\alpha)/4). \quad (5.3.56)$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sech}^2((-i\gamma + i\alpha)/4) + \operatorname{sech}^2((-i\gamma - i\alpha)/4) &= \operatorname{sech}^2(-(i\gamma - i\alpha)/4) + \operatorname{sech}^2(-(i\gamma + i\alpha)/4) \\
 &= [\operatorname{sech}((i\gamma - i\alpha)/4)]^2 + [\operatorname{sech}((i\gamma + i\alpha)/4)]^2 \\
 &= \operatorname{sech}^2((i\gamma - i\alpha)/4) + \operatorname{sech}^2((i\gamma + i\alpha)/4).
 \end{aligned}$$

Entonces (5.3.56) se demostró. Con ello concluimos que el núcleo de la integral (A.5.13) es par, por lo tanto

$$\partial_\varphi A_N(\rho, 2\pi) = \frac{i}{16\pi} \int_{\mathcal{C}} (\operatorname{csch}^2((-i\gamma + 2\pi i + i\alpha)/4) + \operatorname{csch}^2((-i\gamma + 2\pi i - i\alpha)/4)) e^{-i\omega_0\rho \cos \gamma} d\gamma = 0. \quad (5.3.57)$$

Con los resultados (5.3.55) y (5.3.57) obtenemos:

$$\partial_\varphi A_N(\rho, 0\pm) = 0, \quad (5.3.58)$$

iv. Consideremos las condiciones del tipo Dirichlet-Neumman de $A_{DN}(\rho, \varphi)$. Tenemos

$$A_{DN}(\rho, 0) = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{C}} \left[\frac{1}{\sinh((-i\gamma + i\alpha)/4)} - \frac{1}{\sinh((-i\gamma - i\alpha)/4)} \right] e^{-i\omega_0\rho \cos \gamma} d\gamma \quad (5.3.59)$$

De nuevo debemos demostrar que el integrando es par, es decir, por demostrar

$$\sinh^{-1}((-i\gamma + i\alpha)/4) - \sinh^{-1}((-i\gamma - i\alpha)/4) = \sinh^{-1}((i\gamma + i\alpha)/4) - \sinh^{-1}((i\gamma - i\alpha)/4). \quad (5.3.60)$$

Primero, notemos que

$$\begin{aligned} \sinh^{-1}((i\gamma + i\alpha)/4) - \sinh^{-1}((i\gamma - i\alpha)/4) &= \sinh^{-1}(-(-i\gamma - i\alpha)/4) - \sinh^{-1}(-(-i\gamma + i\alpha)/4) \\ &= -\sinh^{-1}((-i\gamma - i\alpha)/4) + \sinh^{-1}((-i\gamma + i\alpha)/4), \end{aligned}$$

donde se usó que $\sinh z$ es impar, con este resultado se obtiene (5.3.60) y concluimos que

$$A_{DN}(\rho, 0) = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{C}} \left[\frac{1}{\sinh((-i\gamma + i\alpha)/4)} - \frac{1}{\sinh((-i\gamma - i\alpha)/4)} \right] e^{-i\omega_0\rho \cos \gamma} d\gamma = 0 \quad (5.3.61)$$

Para la segunda condición de frontera tenemos (véase Anexo A: Funciones hiperbólicas)

$$\partial_{\varphi} A_{DN}(\rho, \varphi) = -\frac{i}{8\pi} \int_{\mathcal{C}} \left[\frac{\cosh((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)}{\sinh^2((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)} - \frac{\cosh((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)}{\sinh^2((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)} \right] e^{-i\omega_0\rho \cos \gamma} d\gamma, \quad (5.3.62)$$

por lo tanto, para la condición de frontera

$$\partial_{\varphi} A_{DN}(\rho, 2\pi) = -\frac{i}{8\pi} \int_{\mathcal{C}} \left[\frac{\cosh((-i\gamma + 2i\pi + i\alpha)/4)}{\sinh^2((-i\gamma + 2i\pi + i\alpha)/4)} - \frac{\cosh((-i\gamma + 2i\pi - i\alpha)/4)}{\sinh^2((-i\gamma + 2i\pi - i\alpha)/4)} \right] e^{-i\omega_0\rho \cos \gamma} d\gamma, \quad (5.3.63)$$

considerando las identidades $\cosh(z + i\pi/2) = i \sinh(z)$, y $\sinh(z + i\pi/2) = i \cosh(z)$ (véase Anexo A: Funciones hiperbólicas).

$$\partial_{\varphi} A_{DN}(\rho, 2\pi) = -\frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{C}} \left[\frac{\sinh((-i\gamma + i\alpha)/4)}{\cosh^2((-i\gamma + i\alpha)/4)} - \frac{\sinh((-i\gamma - i\alpha)/4)}{\cosh^2((-i\gamma - i\alpha)/4)} \right] e^{-i\omega_0\rho \cos \gamma} d\gamma, \quad (5.3.64)$$

al igual que para la primera condición de frontera, debemos probar

$$\left[\frac{\sinh((-i\gamma + i\alpha)/4)}{\cosh^2((-i\gamma + i\alpha)/4)} - \frac{\sinh((-i\gamma - i\alpha)/4)}{\cosh^2((-i\gamma - i\alpha)/4)} \right] = \left[\frac{\sinh((i\gamma + i\alpha)/4)}{\cosh^2((i\gamma + i\alpha)/4)} - \frac{\sinh((i\gamma - i\alpha)/4)}{\cosh^2((i\gamma - i\alpha)/4)} \right]. \quad (5.3.65)$$

Manipulando el lado derecho de (5.3.65) tenemos

$$\begin{aligned} \left[\frac{\sinh((i\gamma + i\alpha)/4)}{\cosh^2((i\gamma + i\alpha)/4)} - \frac{\sinh((i\gamma - i\alpha)/4)}{\cosh^2((i\gamma - i\alpha)/4)} \right] &= \left[\frac{\sinh(-(-i\gamma - i\alpha)/4)}{\cosh^2(-(-i\gamma - i\alpha)/4)} - \frac{\sinh(-(-i\gamma + i\alpha)/4)}{\cosh^2(-(-i\gamma + i\alpha)/4)} \right] \\ &= \left[-\frac{\sinh((-i\gamma - i\alpha)/4)}{\cosh^2((-i\gamma - i\alpha)/4)} + \frac{\sinh((-i\gamma + i\alpha)/4)}{\cosh^2((-i\gamma + i\alpha)/4)} \right] \end{aligned}$$

con lo que demostramos que (5.3.65) se cumple, entonces concluimos que el integrando de (5.3.64) es par, por lo que

$$\partial_{\varphi} A_{DN}(\rho, 2\pi) = 0. \quad (5.3.66)$$

Por lo tanto concluimos la demostración del Lema 5.3.1. ■

Entonces hemos demostrado que las funciones (5.1.2), (5.1.3) y (5.2.20) satisfacen las ecuación de Helmholtz junto con sus respectivas condiciones de frontera en cada caso, con lo que concluimos uno de los principales objetivos de esta tesis, como se estableció en (2.0.7), (2.0.8) y (2.0.9), con ello hemos encontrado las soluciones al problema de difracción de Sommerfeld en un semiplano para las condiciones de frontera de Dirichlet, Neumann y Dirichlet-Neuman respectivamente.

En el siguiente capítulo demostraremos que estas soluciones admiten la descomposición en la forma dada en (2.0.10) y daremos las fórmulas explícitas para cada caso.

Capítulo 6

Descomposición de A_D y decaimiento de la onda difractada A_{dD}

6.1. Descomposición

En este capítulo demostraremos que A_D dada en (5.1.2) se descompone en la suma de las ondas incidente, reflejada y difractada.

Lema 6.1.1.

$$A_D(\rho, \varphi) = A_i^0(\rho, \varphi) + A_{rD}^0(\rho, \varphi) + A_{dD}(\rho, \varphi), \quad (6.1.1)$$

donde A_i^0 se define en (2.0.11), A_{rD}^0 se define en (2.0.12) y A_{dD} está dada por la siguiente expresión

$$A_{dD}(\rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \quad \varphi \neq \pi \pm \alpha, \quad (6.1.2)$$

donde Γ es el contorno con la dirección indicada en la Figura 6 y $\mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi)$ se define en (5.1.4).

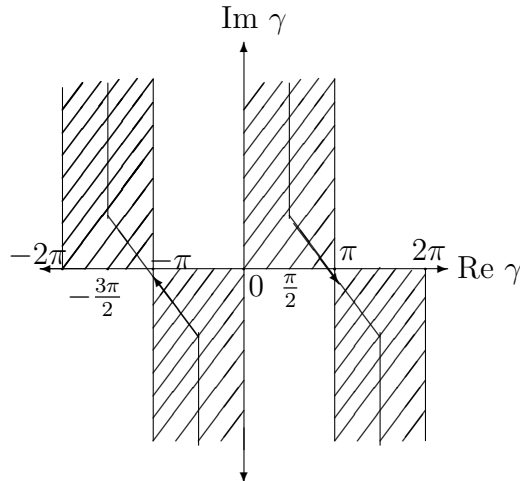


Figura 6. Contorno Γ .

Demostración. Introducimos el contorno auxiliar Γ_1 el cual se muestra en la Figura 7. De esta manera, podemos apreciar que $\mathcal{C} = \Gamma + \Gamma_1$, donde $\mathcal{C}$ es el contorno dado en la Figura 3.

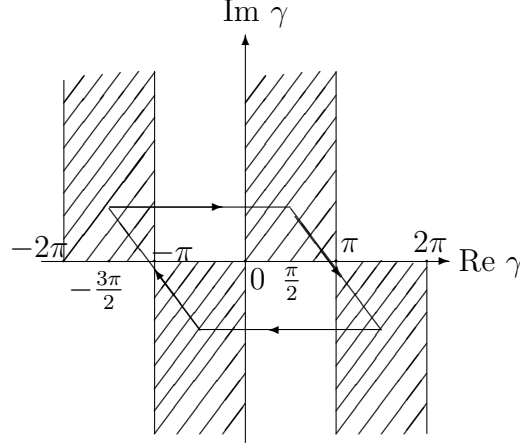


Figura 7. Contorno Γ_1 .

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A_D(\rho, \varphi) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma. \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

De aquí y de (6.1.2) tenemos que

$$A_D(\rho, \varphi) = A_{dD} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma. \quad (6.1.4)$$

Nos falta demostrar que:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma = A_i^0(\rho, \varphi) + A_{rD}^0(\rho, \varphi). \quad (6.1.5)$$

Como apreciamos en la Figura 7. Γ_1 es una trayectoria cerrada negativamente orientada, por lo que podemos utilizar el Teorema de residuos para calcular su valor, es decir,

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma = \frac{1}{4\pi} \left[-2\pi i \sum_{l=1}^L \text{Res}[\mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}, \gamma_l] \right]. \quad (6.1.6)$$

donde γ_l ($l = 1, 2, \dots, L$) son un número finito de puntos singulares de la función $\mathfrak{z}_D(\gamma, \cdot)$ interiores a Γ_1 .

Definamos

$$\begin{aligned} f_1(\gamma, \varphi) &:= \frac{1}{2} [\coth((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)] e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}, \\ f_2(\gamma, \varphi) &:= \frac{1}{2} [\coth((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)] e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}. \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

Entonces por (6.1.6) y por (5.1.4)

$$\int_{\Gamma_1} \mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma = -2\pi i \left[\sum_{i=1}^N \text{Res}[f_1(\gamma, \varphi), \gamma_i] - \sum_{j=1}^M \text{Res}[f_2(\gamma, \varphi), \gamma_j] \right], \quad (6.1.8)$$

donde $\gamma_i = \gamma_i(\varphi, \alpha)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) y $\gamma_j = \gamma_j(\varphi, \alpha)$ ($j = 1, 2, \dots, M$) son un conjunto finito de puntos singulares de las funciones $f_1(\gamma, \varphi)$ y $f_2(\gamma, \varphi)$ respectivamente, que se encuentran en el interior de Γ_1 .

De (6.1.7) tenemos

$$\begin{aligned} f_1(\gamma, \varphi) &= \frac{1}{2} [\coth((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)] e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\cosh((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)}{\sinh((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)} \right] e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}, \\ f_2(\gamma, \varphi) &= \frac{1}{2} [\coth((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)] e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\cosh((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)}{\sinh((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)} \right] e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}. \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

Ya que $\sinh(\gamma) = 0 \iff \gamma = i\pi n, n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\sinh((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4) = 0 \iff \gamma_n = \varphi + \alpha + 4\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (6.1.10)$$

$$\sinh((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4) = 0 \iff \gamma_k = \varphi - \alpha + 4\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (6.1.11)$$

Ya que $f(\gamma) = g(\gamma)/q(\gamma)$, con $g(\gamma)$ y $q(\gamma)$ funciones analíticas en $\mathbb{C}$ (véase (6.1.9), donde por ejemplo $g(\gamma, \cdot) = [\coth((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)] e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}$ y $q(\gamma, \cdot) = \sinh((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)$), entonces

$$\text{Res}[f(\gamma), \gamma_k] = \frac{g(\gamma_k)}{q'(\gamma_k)}, \quad (6.1.12)$$

donde γ_k es polo simple de $f(\gamma)$, $g(\gamma_k) \neq 0$ y $q'(\gamma)$ es la derivada de $q(\gamma)$ distinta de cero en γ_k .

También observemos que tanto γ_n como γ_k son todos valores reales, por ello necesitamos los residuos de $f_1(\gamma, \varphi)$ y $f_2(\gamma, \varphi)$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$, que son los valores reales que se encuentran dentro del contorno Γ_1 , como lo muestra la Figura 7.

Utilizando (6.1.12) y (6.1.9) tenemos:

$$\begin{aligned}
 \text{Res} [f_1(\gamma, \varphi), \gamma_n] &= \frac{1}{2} \text{Res} [\coth((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}, \gamma_n] \\
 &= \frac{1}{2} \text{Res} \left[\frac{\cosh((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)}{\sinh((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)} e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}, \gamma_n \right] \\
 &= -2i \left[\frac{\cosh((-i\gamma_n + i\varphi + i\alpha)/4)}{\cosh((-i\gamma_n + i\varphi + i\alpha)/4)} e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma_n} \right] \\
 &= -2i [e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma_n}], \quad n \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned} \tag{6.1.13}$$

Hagamos un análisis de los polos por casos. Primero, para $f_1(\gamma, \varphi)$ por (6.1.10)

$$\gamma_n \in (4\pi n, (4n + 3)\pi), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{6.1.14}$$

I. $n \geq 1 \implies \gamma_n \notin (-\pi, \pi)$, dado que $\gamma_n \geq 4\pi \forall n \geq 1$ por (6.1.14).

II. $n \leq -1 \implies \gamma_n \notin (-\pi, \pi)$ dado que $\gamma_n \leq -\pi \forall n \leq -1$ por (6.1.14).

III. $n = 0 \implies \gamma_0 = \varphi + \alpha \implies \gamma_0 \in (0, 3\pi)$, por (6.1.14). Además, para $\varphi \in (0, 2\pi)$ y $\alpha \in (0, \pi)$

$$\gamma_0 \in (-\pi, \pi) \iff -\pi < \varphi + \alpha < \pi \iff 0 < \varphi < \pi - \alpha, \tag{6.1.15}$$

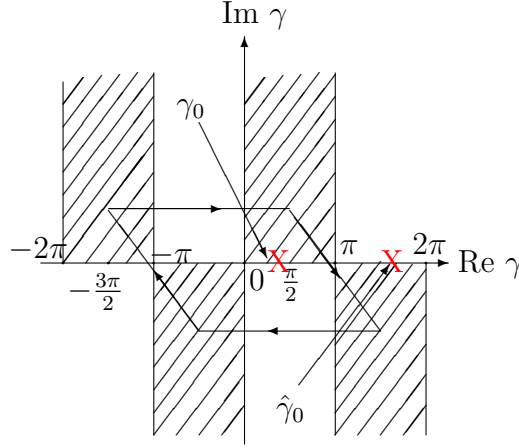
$$\gamma_0 \in (\pi, 3\pi) \iff \pi < \varphi + \alpha < 3\pi \iff \pi - \alpha < \varphi < 2\pi. \tag{6.1.16}$$

De esta manera, por (6.1.13) y (6.1.15)

$$\sum_{i=1}^N \text{Res} [f_1(\gamma, \varphi), \gamma_i] = -2ie^{-i\omega_0 \rho \cos(\varphi + \alpha)}, \quad 0 < \varphi < \pi - \alpha, \quad \alpha \in (0, \pi). \tag{6.1.17}$$

La condición (6.1.16) implica que $\gamma_0 \notin (-\pi, \pi)$ si $\pi - \alpha < \varphi < 2\pi$ y $\alpha \in (0, \pi)$, por lo tanto estos valores de γ_0 no contribuyen al valor de la integral (6.1.6).

Ambos casos para γ_0 se representan de manera esquemática en la Figura 8, donde el valor de γ_0 que se encuentra fuera de Γ_1 se denota por $\hat{\gamma}_0$.


 Figura 8. Residuos de $f_1(\gamma, \varphi)$.

Hagamos lo mismo para $f_2(\varphi, \alpha)$. Utilizando (6.1.12) y (6.1.9) tenemos:

$$\begin{aligned}
 \text{Res}[f_2(\gamma, \varphi), \gamma_k] &= \frac{1}{2} \text{Res} \left[\coth((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}, \gamma_k \right] \\
 &= \frac{1}{2} \text{Res} \left[\frac{\cosh((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)}{\sinh((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)} e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}, \gamma_k \right] \\
 &= -2i \left[\frac{\cosh((-i\gamma_k + i\varphi - i\alpha)/4)}{\cosh((-i\gamma_k + i\varphi - i\alpha)/4)} e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma_k} \right] \\
 &= -2i \left[e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma_k} \right], \quad k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned} \tag{6.1.18}$$

Hagamos un análisis de los polos por casos. Primero, para $f_2(\gamma, \varphi)$ por (6.1.11)

$$\gamma_k \in ((4k - 1)\pi, (4k + 2)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{6.1.19}$$

- I. $k \geq 1 \implies \gamma_k \notin (-\pi, \pi)$, dado que $\gamma_k \geq 3\pi \forall k \geq 1$ por (6.1.19).
- II. $k \leq -1 \implies \gamma_k \notin (-\pi, \pi)$ dado que $\gamma_k \leq -2\pi \forall k \leq -1$ por (6.1.19).
- III. $k = 0 \implies \gamma_0 = \varphi - \alpha \implies \gamma_0 \in (-\pi, 2\pi)$ por (6.1.19). Además, para $\varphi \in (0, 2\pi)$ y $\alpha \in (0, \pi)$

$$\gamma_0 \in (-\pi, \pi) \iff -\pi < \varphi - \alpha < \pi \iff 0 < \varphi < \pi + \alpha, \tag{6.1.20}$$

$$\gamma_0 \in (\pi, 2\pi) \iff \pi < \varphi - \alpha < 2\pi \iff \pi + \alpha < \varphi < 2\pi. \tag{6.1.21}$$

De esta manera, por (6.1.18) y (6.1.20)

$$\sum_{k=1}^M \text{Res}[f_2(\gamma, \varphi), \gamma_k] = -2i e^{-i\omega_0 \rho \cos(\varphi - \alpha)}, \quad 0 < \varphi < \pi + \alpha, \quad \alpha \in (0, \pi). \tag{6.1.22}$$

La condición (6.1.21) implica que $\gamma_0 \notin (-\pi, \pi)$ si $\pi + \alpha < \varphi < 2\pi$ y $\alpha \in (0, \pi)$, por lo tanto estos valores de γ_0 no contribuyen al valor de la integral (6.1.6).

Ambos casos para γ_0 se representan de manera esquemática en la Figura 9, donde el valor de γ_0 que se encuentra fuera de Γ_1 se denota por $\hat{\gamma}_0$.

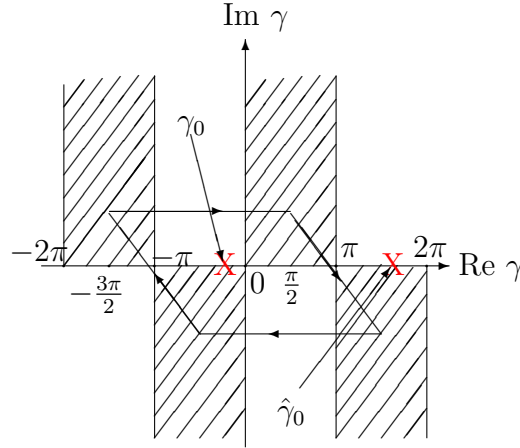


Figura 9. Residuos de $f_2(\gamma, \varphi)$.

Por lo tanto para (6.1.8) tenemos los siguientes casos:

I. Usando (6.1.15) y (6.1.20), tanto γ_0 dada por (6.1.10), como γ_0 dada por (6.1.11) están dentro del contorno Γ_1 (véase Figura 10), entonces por (6.1.17), (6.1.22) y (6.1.8)

$$\int_{\Gamma_1} \mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma = 4\pi [e^{-i\omega_0 \rho \cos(\varphi - \alpha)} - e^{-i\omega_0 \rho \cos(\varphi + \alpha)}], \quad 0 < \varphi < \pi - \alpha. \quad (6.1.23)$$

Sustituyendo (6.1.23) en (6.1.3) obtenemos:

$$A_D(\gamma, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma + e^{-i\omega_0 \rho \cos(\varphi - \alpha)} - e^{-i\omega_0 \rho \cos(\varphi + \alpha)}, \quad 0 < \varphi < \pi - \alpha. \quad (6.1.24)$$

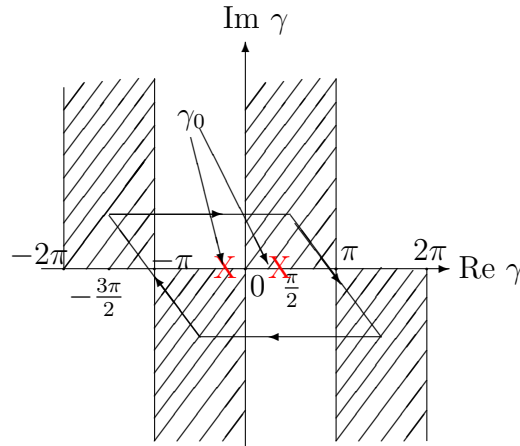


Figura 10. γ_0 , para $0 < \varphi < \pi - \alpha$.

II. Usando (6.1.16) y (6.1.20), vemos que solamente γ_0 dada por (6.1.11) está dentro de Γ_1 (véase Figura 11), entonces por (6.1.22) y (6.1.8)

$$\int_{\Gamma_1} \mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma = e^{-i\omega_0 \rho \cos(\varphi - \alpha)}, \quad \pi - \alpha < \varphi < \pi + \alpha. \quad (6.1.25)$$

Sustituyendo (6.1.25) en (6.1.3) obtenemos:

$$A_D(\gamma, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma + e^{-i\omega_0 \rho \cos(\varphi - \alpha)}, \quad \pi - \alpha < \varphi < \pi + \alpha. \quad (6.1.26)$$

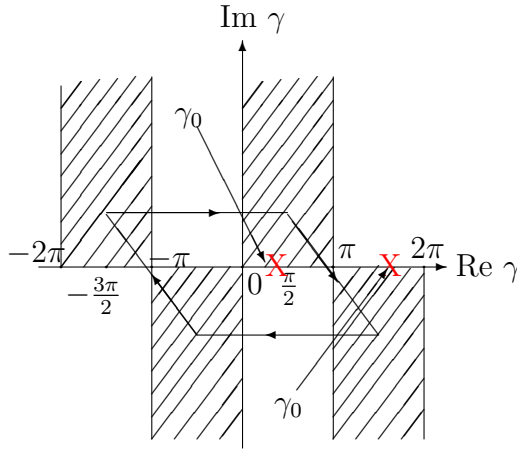


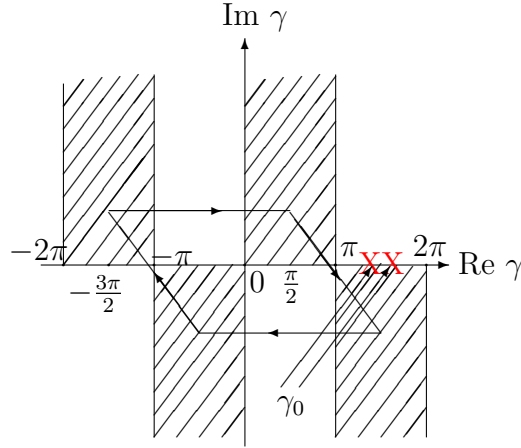
Figura 11. γ_0 , para $\pi - \alpha < \varphi < \pi + \alpha$.

III. Usando (6.1.21) vemos que Γ_1 no contiene ninguna singularidad (véase Figura 12), por lo tanto, por el Teorema de Cauchy

$$\int_{\Gamma_1} \mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma = 0 \quad \pi + \alpha < \varphi < 2\pi. \quad (6.1.27)$$

De esta manera (6.1.3) da:

$$A_D(\gamma, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \quad \pi + \alpha < \varphi < 2\pi. \quad (6.1.28)$$


 Figura 12. γ_0 , para $\pi + \alpha < \varphi < 2\pi$.

Tomando en cuenta (2.0.11), (2.0.12), (6.1.2) y las representaciones (6.1.24), (6.1.26) y (6.1.28) expresamos A_D en forma general como

$$A_D(\rho, \varphi) = A_i^0(\rho, \varphi) + A_{rD}^0(\rho, \varphi) + A_{dD}(\rho, \varphi), \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad \alpha \in (0, 2\pi).$$

Por lo que el Lema 6.1.1 queda demostrado. ■

Con este resultado obtuvimos la fórmula explícita de la solución al problema de difracción para las condiciones de frontera de Dirichlet, la cual se descompone en la suma de la onda incidente, reflejada y difractada; como lo anticipamos al inicio del capítulo.

6.2. Decaimiento de la onda A_{dD}

Debemos demostrar que (6.1.2) cumple la condición (2.0.14) cuando $\rho \rightarrow \infty$.

Haremos la demostración para el contorno Γ_+ (Véase Figura 13), que corresponde a la parte superior izquierda del contorno Γ y para el contorno Γ_- (Véase Figura 14) que corresponde a la parte superior derecha del contorno Γ (Véase Figura 6), la demostración de que (6.1.2) cumple (2.0.14) en el resto del contorno Γ se hace de manera similar.

Lema 6.2.1.

$$\left| \int_{\Gamma_+} \mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma \right| \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (6.2.29)$$

Demostración. Consideremos $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, con $\gamma_1 \in [-3\pi/2, -\pi]$ y $\gamma_2 \in [0, \infty)$ (Véase Figura 13). Descomponemos Γ_+ como

$$\Gamma_+ = \gamma^+ + \gamma^- \quad (6.2.30)$$

donde

$$\gamma^- = \{ \gamma \mid \gamma_2 \in [0, \pi/2], \gamma_1 = -\pi - \gamma_2 \} \quad (6.2.31)$$

$$\gamma^+ = \{ \gamma \mid \gamma_2 \in [\pi/2, \infty), \gamma_1 = -3\pi/2 \}. \quad (6.2.32)$$

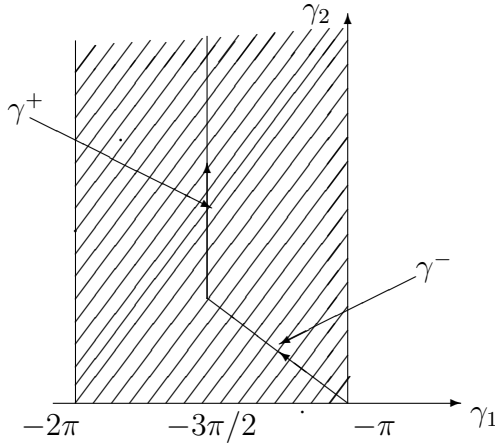


Figura 13. Contorno Γ_+ .

Tenemos que

$$\left| \int_{\Gamma_+} \mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma \right| \leq \int_{\Gamma_+} |\mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma. \quad (6.2.33)$$

Por (6.2.30)

$$\int_{\Gamma_+} |\mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \leq \int_{\gamma^-} |\mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma + \int_{\gamma^+} |\mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma, \quad (6.2.34)$$

donde γ^+ está dado por (6.2.32) y γ^- por (6.2.31).

I. Hagamos primero la demostración para γ^+ . Tenemos

$$\int_{\gamma^+} |\mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \leq \int_{\pi/2}^{\infty} C e^{-\omega_0 \rho c e^{\gamma_2}} d\gamma_2. \quad (6.2.35)$$

por (5.1.19) y (6.2.32). Considerando $\gamma_2 \in [\pi/2, \infty)$ tenemos

$$e^{\gamma_2} \geq \gamma_2 \implies -e^{\gamma_2} \leq -\gamma_2 \implies -\omega_0 \rho c e^{\gamma_2} \leq -\omega_0 \rho c \gamma_2, \quad \omega_0, \rho, c > 0. \quad (6.2.36)$$

Usando (6.2.36) obtenemos

$$\int_{\pi/2}^{\infty} C e^{-\omega_0 \rho c e^{\gamma_2}} d\gamma_2 \leq \int_{\pi/2}^{\infty} C e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2} d\gamma_2 = \frac{C}{\omega_0 \rho c} e^{-\pi \omega_0 \rho c / 2} \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty, \quad (6.2.37)$$

por lo tanto

$$\int_{\gamma^+} |\mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty. \quad (6.2.38)$$

II. Ahora demostremos para el contorno γ^- . Por (6.1.10) y (6.1.11) los puntos singulares de la función (5.1.4) se encuentran en el eje γ_1 , por lo tanto $\mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi)$ puede divergir en Γ_+ cuando $\gamma_1 = -\pi$ y $\gamma_2 = 0$, esto implica, por (6.1.10) y (6.1.11) que

$$\begin{aligned} \varphi + \alpha - 4n\pi &= -\pi, \\ \varphi - \alpha - 4n\pi &= -\pi, \end{aligned} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (6.2.39)$$

Considerando $\varphi \in (0, 2\pi)$ y $\alpha \in [0, \pi]$ tenemos que la función $\mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}$ es continua en todo Γ_+ y por lo tanto $\mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi)$ es acotada en γ^- por ser un compacto.

Además tenemos

$$\cos \gamma = \cos \gamma_1 \cosh \gamma_2 + \sin \gamma_1 \sinh \gamma_2 \geq \sin \gamma_1 \sinh \gamma_2, \quad \gamma_2 \in [0, \pi/2], \quad \gamma_1 \in [-\pi, -\pi/2], \quad (6.2.40)$$

esto implica, por (6.2.31), que

$$\int_{\gamma^-} |\mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \leq \int_0^{\pi/2} C e^{-\omega_0 \rho \sin(-\gamma_2 - \pi) \sinh(\gamma_2)} d\gamma_2 = \int_0^{\pi/2} C e^{-\omega_0 \rho \sin(\gamma_2) \sinh(\gamma_2)} d\gamma_2. \quad (6.2.41)$$

Entonces

$$\int_0^{\pi/2} C e^{-\omega_0 \rho \sin(\gamma_2) \sinh(\gamma_2)} d\gamma_2 \leq \int_0^{\pi/2} C e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2^2} d\gamma_2 \leq C \int_0^{\infty} e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2^2} d\gamma_2. \quad (6.2.42)$$

En (6.2.42) se usó que

$$\lim_{\gamma_2 \rightarrow 0} \frac{\sin \gamma_2}{\gamma_2} = 1 \implies \sin \gamma_2 \geq c_1 \gamma_2, \quad 0 < c_1 < 1/2, \quad \gamma_2 \in [0, \pi/2], \quad (6.2.43)$$

$$\sinh \gamma_2 \geq c_1 \gamma_2, \quad \gamma_2 \in [0, \pi/2], \quad (6.2.44)$$

de estas dos expresiones obtenemos

$$\sin(\gamma_2) \sinh(\gamma_2) \geq c \gamma_2^2 \implies -\omega_0 \rho \sin(\gamma_2) \sinh(\gamma_2) \leq -c \omega_0 \rho \gamma_2^2, \quad \omega_0, \rho > 0. \quad (6.2.45)$$

Por lo tanto

$$\int_0^{\infty} C e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2^2} d\gamma_2 = C \sqrt{\frac{\pi}{c \omega_0 \rho}} \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty, \quad (6.2.46)$$

implica que

$$\int_{\gamma^-} |\mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty. \quad (6.2.47)$$

Con los resultados (6.2.38) y (6.2.47) tenemos que el Lema 6.2.1 se demostró. ■

Lema 6.2.2.

$$\int_{\Gamma_-} |\mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty, \quad \varphi \neq \pi \pm \alpha. \quad (6.2.48)$$

Demostración. Consideremos $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, con $\gamma_1 \in [\pi/2, \pi]$ y $\gamma_2 \in [0, \infty)$ (Véase Figura 14). Descomponemos Γ_- como

$$\Gamma_- = \gamma_+ + \gamma_- \quad (6.2.49)$$

donde

$$\gamma_- = \{ \gamma \mid \gamma_2 \in [0, \pi/2], \gamma_1 = \pi - \gamma_2 \}, \quad (6.2.50)$$

$$\gamma_+ = \{ \gamma \mid \gamma_2 \in [\pi/2, \infty), \gamma_1 = \pi/2 \}. \quad (6.2.51)$$

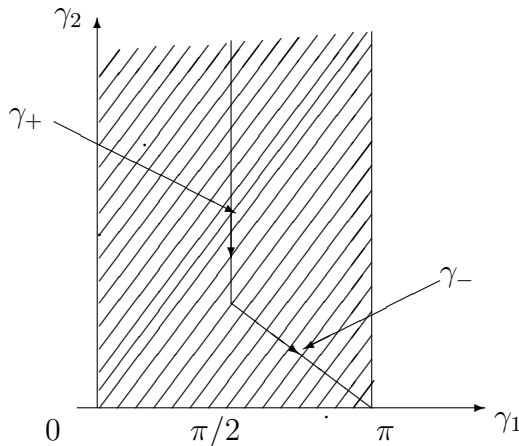


Figura 14. Contorno Γ_- .

Tenemos que

$$\left| \int_{\Gamma_-} \mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma \right| \leq \int_{\Gamma_-} |\mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma. \quad (6.2.52)$$

Por (6.2.49)

$$\int_{\Gamma_-} |\mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \leq \int_{\gamma_-} |\mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma + \int_{\gamma_+} |\mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma, \quad (6.2.53)$$

donde γ_+ está dado por (6.2.51) y γ_- por (6.2.50).

I. Hagamos primero la demostración para γ_+ . Tenemos

$$\int_{\gamma_+} |\mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \leq \int_{\pi/2}^{\infty} C e^{-\omega_0 \rho c e^{\gamma_2}} d\gamma_2 \quad (6.2.54)$$

por (5.1.19) y (6.2.51). Usando (6.2.36)

$$\int_{\pi/2}^{\infty} C e^{-\omega_0 \rho c e^{\gamma_2}} d\gamma_2 \leq \int_{\pi/2}^{\infty} C e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2} d\gamma_2. \quad (6.2.55)$$

Tenemos

$$\int_{\pi/2}^{\infty} C e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2} d\gamma_2 = \frac{-C}{\omega_0 \rho c} e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2} \Big|_{\pi/2}^{\infty} = \frac{C}{\omega_0 \rho c} e^{-\pi \omega_0 \rho c / 2} \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty, \quad (6.2.56)$$

por lo tanto

$$\int_{\gamma_+} |\mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty. \quad (6.2.57)$$

II. Ahora demostremos para el contorno γ_- . Por (6.2.39) y considerando $\varphi \in (0, 2\pi)$ y $\alpha \in [0, \pi]$, tenemos que la función $\mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi)$ es discontinua para

$$\begin{aligned} \varphi + \alpha &= \pi, \\ \varphi - \alpha &= \pi, \end{aligned} \quad (6.2.58)$$

Por lo tanto, para $|\varphi - (\pi - \alpha)| \geq \epsilon > 0$, $|\varphi - (\pi + \alpha)| \geq \epsilon > 0$, por (6.2.40) tenemos

$$\int_{\gamma_-} |\mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \leq \int_0^{\pi/2} C(\varphi) e^{-\omega_0 \rho \sin(-\gamma_2 + \pi) \sinh(\gamma_2)} d\gamma_2. \quad (6.2.59)$$

Entonces, considerando $\sin(-\gamma_2 + \pi) = \sin \gamma_2$,

$$\int_0^{\pi/2} C(\varphi) e^{-\omega_0 \rho \sin(\gamma_2) \sinh(\gamma_2)} d\gamma_2 \leq C(\varphi) \int_0^{\infty} e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2^2} d\gamma_2. \quad (6.2.60)$$

En (6.2.60) se usó (6.2.45).

Por lo tanto

$$\int_0^\infty C(\varphi) e^{-\omega_0 \rho c \gamma^2} d\gamma_2 = C(\varphi) \sqrt{\frac{\pi}{c \omega_0 \rho}} \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty, \quad (6.2.61)$$

implica que

$$\int_{\gamma^-} |\mathfrak{z}_D(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty, \quad \varphi \neq \pi \pm \alpha. \quad (6.2.62)$$

Con los resultados (6.2.57) y (6.2.62) tenemos que el Lema 6.2.2 se demostró. ■

Capítulo 7

Descomposición de A_N y decaimiento de la onda difractada A_{dN}

7.1. Descomposición

En este capítulo demostraremos que A_N dada en (5.1.3) se descompone en la suma de las ondas incidente, reflejada y difractada.

Lema 7.1.1.

$$A_N(\rho, \varphi) = A_i^0(\rho, \varphi) + A_{rN}^0(\rho, \varphi) + A_{dN}(\rho, \varphi), \quad (7.1.1)$$

donde A_i^0 se define en (2.0.11), A_{rN}^0 se define en (2.0.13) y A_{dN} está dada por la siguiente expresión

$$A_{dN}(\rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \quad \varphi \neq \pi \pm \alpha, \quad (7.1.2)$$

donde Γ es el contorno con la dirección indicada en la Figura 6 y $\mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi)$ se define en (5.1.5).

Demostración. Usamos el contorno auxiliar Γ_1 el cual se muestra en la Figura 7. De esta manera, podemos apreciar que $\mathcal{C} = \Gamma + \Gamma_1$, donde $\mathcal{C}$ es el contorno dado en la Figura 3.

Por lo tanto,

$$A_N(\rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma. \quad (7.1.3)$$

De aquí y de (7.1.2) tenemos que

$$A_N(\rho, \varphi) = A_{dN} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma. \quad (7.1.4)$$

Nos falta demostrar que:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma = A_i^0(\rho, \varphi) + A_{rN}^0(\rho, \varphi). \quad (7.1.5)$$

Como podemos apreciar en la Figura 7, Γ_1 es una trayectoria cerrada negativamente orientada, por lo que podemos utilizar el Teorema de residuos para calcular su valor, es decir,

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma = \frac{1}{4\pi} \left[-2\pi i \sum_{l=1}^L \text{Res}[\mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}, \gamma_l] \right]. \quad (7.1.6)$$

donde γ_l ($l = 1, 2, \dots, L$) son un número finito de puntos singulares de la función $\mathfrak{z}_N(\gamma, \cdot)$ interiores a Γ_1 .

Entonces, usando (5.1.5), (6.1.9) y (7.1.6)

$$\int_{\Gamma_1} \mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma = -2\pi i \left[\sum_{i=1}^N \text{Res}[f_1(\gamma, \varphi), \gamma_i] + \sum_{j=1}^M \text{Res}[f_2(\gamma, \varphi), \gamma_j] \right], \quad (7.1.7)$$

donde $\gamma_i = \gamma_i(\varphi, \alpha)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) y $\gamma_j = \gamma_j(\varphi, \alpha)$ ($j = 1, 2, \dots, M$) son un conjunto finito de puntos singulares, de las funciones $f_1(\gamma, \varphi)$ y $f_2(\gamma, \varphi)$, definidas en (6.1.9), respectivamente, y que se encuentran en el interior de Γ_1 .

Ahora, haciendo un análisis por casos, para los diferentes valores de los polos de la función $\mathfrak{z}_N(\gamma, \cdot)$, tenemos:

I. Usando (6.1.15) y (6.1.20), tanto γ_0 dada por (6.1.10), como γ_0 dada por (6.1.11) están dentro del contorno Γ_1 (véase Figura 10), entonces por (6.1.17), (6.1.22) y (7.1.7)

$$\int_{\Gamma_1} \mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma = 4\pi [e^{-i\omega_0 \rho \cos(\varphi-\alpha)} + e^{-i\omega_0 \rho \cos(\varphi+\alpha)}], \quad 0 < \varphi < \pi - \alpha. \quad (7.1.8)$$

Sustituyendo (7.1.8) en (7.1.3) obtenemos:

$$A_N(\gamma, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma + e^{-i\omega_0 \rho \cos(\varphi-\alpha)} + e^{-i\omega_0 \rho \cos(\varphi+\alpha)}, \quad 0 < \varphi < \pi - \alpha. \quad (7.1.9)$$

II. Usando (6.1.16) y (6.1.20), vemos que solamente γ_0 dada por (6.1.11) está dentro de Γ_1 (véase Figura 11), entonces por (6.1.22) y (7.1.7)

$$\int_{\Gamma_1} \mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma = e^{-i\omega_0 \rho \cos(\varphi-\alpha)}, \quad \pi - \alpha < \varphi < \pi + \alpha. \quad (7.1.10)$$

Sustituyendo (7.1.10) en (7.1.3) obtenemos:

$$A_N(\gamma, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma + e^{-i\omega_0 \rho \cos(\varphi-\alpha)}, \quad \pi - \alpha < \varphi < \pi + \alpha. \quad (7.1.11)$$

III. Usando (6.1.21) vemos que Γ_1 no contiene ninguna singularidad (véase Figura 12), por lo tanto, por el Teorema de Cauchy

$$\int_{\Gamma_1} \mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma = 0 \quad \pi + \alpha < \varphi < 2\pi. \quad (7.1.12)$$

De esta manera (7.1.3) da:

$$A_N(\gamma, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \quad \pi + \alpha < \varphi < 2\pi. \quad (7.1.13)$$

Tomando en cuenta (2.0.11), (2.0.13), (7.1.2) y las representaciones (7.1.9), (7.1.11) y (7.1.13) expresamos A_N en forma general como

$$A_N(\rho, \varphi) = A_i^0(\rho, \varphi) + A_{rN}^0(\rho, \varphi) + A_{dN}(\rho, \varphi), \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad \alpha \in (0, 2\pi).$$

Por lo que el Lema 7.1.1 queda demostrado. ■

Con este resultado, al igual que para A_D , obtuvimos la fórmula explícita de la solución al problema de difracción para las condiciones de frontera de Neumann, la cual también se descompone como la suma de la onda incidente, reflejada y difractada; como lo anticipamos al inicio del capítulo.

7.2. Decaimiento de la onda A_{dN}

Debemos demostrar que (7.1.2) cumple la condición (2.0.14) cuando $\rho \rightarrow \infty$. Haremos la demostración para el contorno Γ_+ (Véase Figura 13), que corresponde a la parte superior derecha del contorno Γ y para el contorno Γ_- (Véase Figura 14) que corresponde a la parte superior izquierda del contorno Γ (Véase Figura 6), la demostración de que (7.1.2) cumple (2.0.14) en el resto del contorno Γ se hace de manera similar.

Lema 7.2.1.

$$\left| \int_{\Gamma_+} \mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma \right| \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (7.2.14)$$

Demostración. Consideremos Γ_+ como en (6.2.30) (Véase Figura 13). Esto implica

$$\int_{\Gamma_+} |\mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \leq \int_{\gamma^-} |\mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma + \int_{\gamma^+} |\mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma, \quad (7.2.15)$$

donde γ^+ está dado por (6.2.32) y γ^- por (6.2.31).

I. Hagamos primero la demostración para γ^+ . Tenemos

$$\int_{\gamma^+} |\mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \leq \int_{\pi/2}^{\infty} C e^{-\omega_0 \rho c e^{\gamma_2}} d\gamma_2. \quad (7.2.16)$$

Usando (6.2.36) tenemos

$$\int_{\pi/2}^{\infty} C e^{-\omega_0 \rho c e^{\gamma_2}} d\gamma_2 \leq \int_{\pi/2}^{\infty} C e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2} d\gamma_2 = \frac{C}{\omega_0 \rho c} e^{-\pi \omega_0 \rho c / 2} \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty, \quad (7.2.17)$$

por lo tanto

$$\int_{\gamma^+} |\mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty. \quad (7.2.18)$$

II. Ahora demostremos para el contorno γ^- . Por (6.2.39), considerando $\varphi \in (0, 2\pi)$ y $\alpha \in (0, \pi)$ tenemos que la función $\mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}$ es continua en todo Γ_+ y por lo tanto $\mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi)$ es acotada en γ^- por ser un compacto. Además, usando (6.2.40) y (6.2.31)

$$\int_{\gamma^-} |\mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \leq \int_0^{\pi/2} C e^{-\omega_0 \rho \sin(-\gamma_2 - \pi) \sinh(\gamma_2)} d\gamma_2. \quad (7.2.19)$$

Entonces

$$\int_0^{\pi/2} C e^{-\omega_0 \rho \sin(\gamma_2) \sinh(\gamma_2)} d\gamma_2 \leq \int_0^{\pi/2} C e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2^2} d\gamma_2 \leq C \int_0^{\infty} e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2^2} d\gamma_2. \quad (7.2.20)$$

En (7.2.20) se usó (6.2.45).

Por lo tanto

$$\int_0^{\infty} C e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2^2} d\gamma_2 = C \sqrt{\frac{\pi}{c \omega_0 \rho}} \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty, \quad (7.2.21)$$

implica que

$$\int_{\gamma^-} |\mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty. \quad (7.2.22)$$

Con los resultados (7.2.18) y (7.2.22) tenemos que el Lema 7.2.1 se demostró. ■

Lema 7.2.2.

$$\int_{\Gamma_-} |\mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty, \quad \varphi \neq \pi \pm \alpha. \quad (7.2.23)$$

Demostración. Consideremos Γ_- como en (6.2.49) (Véase figura 14). Esto implica

$$\int_{\Gamma_-} |\mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \leq \int_{\gamma_-} |\mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma + \int_{\gamma_+} |\mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma, \quad (7.2.24)$$

donde γ_+ está dado por (6.2.51) y γ_- por (6.2.50).

I. Hagamos primero la demostración para γ_+ . Tenemos

$$\int_{\gamma_+} |\mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \leq \int_{\pi/2}^{\infty} C e^{-\omega_0 \rho c e^{\gamma_2}} d\gamma_2 \quad (7.2.25)$$

por (5.1.19) y (6.2.51). Usando (6.2.36)

$$\int_{\pi/2}^{\infty} C e^{-\omega_0 \rho c e^{\gamma_2}} d\gamma_2 \leq \int_{\pi/2}^{\infty} C e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2} d\gamma_2. \quad (7.2.26)$$

Por lo tanto tenemos

$$\int_{\pi/2}^{\infty} C e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2} d\gamma_2 = \frac{-C}{\omega_0 \rho c} e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2} \Big|_{\pi/2}^{\infty} = \frac{C}{\omega_0 \rho c} e^{-\pi \omega_0 \rho c / 2} \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty, \quad (7.2.27)$$

por lo tanto

$$\int_{\gamma_+} |\mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty. \quad (7.2.28)$$

II. Ahora demostremos para el contorno γ_- . Por (6.2.39) y considerando $\varphi \in (0, 2\pi)$ y $\alpha \in (0, \pi)$, tenemos que la función $\mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi)$ es discontinua para

$$\begin{aligned} \varphi + \alpha &= \pi, \\ \varphi - \alpha &= \pi, \end{aligned} \quad (7.2.29)$$

Por lo tanto, para $|\varphi - (\pi - \alpha)| \geq \epsilon > 0$, $|\varphi - (\pi + \alpha)| \geq \epsilon > 0$, por (6.2.40) tenemos

$$\int_{\gamma_-} |\mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \leq \int_0^{\pi/2} C(\varphi) e^{-\omega_0 \rho \sin(\gamma_2) \sinh(\gamma_2)} d\gamma_2. \quad (7.2.30)$$

Entonces

$$\int_0^{\pi/2} C(\varphi) e^{-\omega_0 \rho \sin(\gamma_2) \sinh(\gamma_2)} d\gamma_2 \leq C(\varphi) \int_0^{\infty} e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2^2} d\gamma_2. \quad (7.2.31)$$

En (7.2.31) se usó (6.2.45).

Por lo tanto

$$\int_0^{\infty} C(\varphi) e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2^2} d\gamma_2 = C(\varphi) \sqrt{\frac{\pi}{c \omega_0 \rho}} \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty, \quad (7.2.32)$$

implica que

$$\int_{\gamma_-} |\mathfrak{z}_N(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty, \quad \varphi \neq \pi \pm \alpha. \quad (7.2.33)$$

Con los resultados (7.2.28) y (7.2.33) el Lema 7.2.2 queda demostrado. ■

Capítulo 8

Descomposición de A_{DN} y decaimiento de la onda difractada A_{dDN}

8.1. Descomposición

En este capítulo demostraremos que A_{DN} dada en (5.2.20) se descompone en la suma de las ondas incidente, reflejada y difractada.

Lema 8.1.1.

$$A_{DN}(\rho, \varphi) = A_i^0(\rho, \varphi) + A_{rDN}^0(\rho, \varphi) + A_{dDN}(\rho, \varphi), \quad (8.1.1)$$

donde A_i^0 se define en (2.0.11), A_{rDN}^0 se define en (2.0.12) y A_{dDN} está dada por la siguiente expresión

$$A_{dDN}(\rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \quad \varphi \neq \pi \pm \alpha, \quad (8.1.2)$$

donde Γ es el contorno con la dirección indicada en la Figura 6 y $\mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi)$ se define en (5.2.21).

Demostración. Usamos el contorno auxiliar Γ_1 el cual se muestra en la Figura 7. De esta manera, podemos apreciar que $\mathcal{C} = \Gamma + \Gamma_1$, donde $\mathcal{C}$ es el contorno dado en la Figura 3.

Por lo tanto,

$$A_{DN}(\rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma \quad (8.1.3)$$

De aquí y de (8.1.2) tenemos que

$$A_{DN}(\rho, \varphi) = A_{dD} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma. \quad (8.1.4)$$

Nos falta demostrar que:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma = A_i^0(\rho, \varphi) + A_{rDN}^0(\rho, \varphi). \quad (8.1.5)$$

Como podemos apreciar en la Figura 7. Γ_1 es una trayectoria cerrada negativamente orientada, por lo que podemos utilizar el Teorema de residuos para calcular su valor, es decir,

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma = \frac{1}{4\pi} \left[-2\pi i \sum_{l=1}^L \text{Res}[\mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}, \gamma_l] \right], \quad (8.1.6)$$

donde γ_l ($l = 1, 2, \dots, L$) son un número finito de puntos singulares de la función $\mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \cdot)$ interiores a Γ_1 .

Definamos

$$\begin{aligned} f_1(\gamma, \varphi) &:= \frac{1}{2} \left[\sinh^{-1}((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} \right], \\ f_2(\gamma, \varphi) &:= \frac{1}{2} \left[\sinh^{-1}((-i\gamma - i\varphi - i\alpha)/4) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} \right]. \end{aligned} \quad (8.1.7)$$

Entonces por (8.1.6) y por (5.2.21)

$$\int_{\Gamma_1} \mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma = -2\pi i \left[\sum_{i=1}^N \text{Res}[f_1(\gamma, \varphi), \gamma_i] - \sum_{j=1}^M \text{Res}[f_2(\gamma, \varphi), \gamma_j] \right], \quad (8.1.8)$$

donde $\gamma_i = \gamma_i(\varphi, \alpha)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) y $\gamma_j = \gamma_j(\varphi, \alpha)$ ($j = 1, 2, \dots, M$) son un conjunto finito de puntos singulares, de las funciones $f_1(\gamma, \varphi)$ y $f_2(\gamma, \varphi)$, definidas en (8.1.7), respectivamente, que se encuentran en el interior de Γ_1 .

Ya que $\sinh(\gamma) = 0 \iff \gamma = i\pi n, n \in \mathbb{Z}$, entonces los polos de las funciones (8.1.7) son determinados por (6.1.10) y (6.1.11), para $f_1(\gamma, \varphi)$ y $f_2(\gamma, \varphi)$ respectivamente.

Ya que $f(\gamma) = g(\gamma)/q(\gamma)$, con $g(\gamma)$ y $q(\gamma)$ funciones analíticas en $\mathbb{C}$ (véase (8.1.7), donde por ejemplo $g(\gamma, \cdot) = e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}$ y $q(\gamma, \cdot) = \sinh((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)$), entonces los residuos están dados por la expresión (6.1.12).

También observemos que tanto γ_n como γ_k son todos valores reales, por ello necesitamos los residuos de $f_1(\gamma, \varphi)$ y $f_2(\gamma, \varphi)$ en el intervalo $(-\pi, \pi)$, que son los valores reales que se encuentran dentro del contorno Γ_1 , como lo muestra la Figura 7.

Utilizando (6.1.12) y (8.1.7) tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Res}[f_1(\gamma, \varphi), \gamma_n] &= \frac{1}{2} \text{Res}[\sinh^{-1}((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}, \gamma_n] \\ &= -2i \left[\cosh^{-1}((-i\gamma_n + i\varphi + i\alpha)/4) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma_n} \right] \\ &= -2i \left[\cosh^{-1}((-i(\varphi + \alpha)/4 + i\varphi + i\alpha)/4) e^{-i\omega_0 \rho \cos((\varphi + \alpha)/4)} \right] \\ &= -2i \left[\cosh^{-1}(0) e^{-i\omega_0 \rho \cos((\varphi + \alpha)/4)} \right] \\ &= -2i \left[e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma_n} \right], \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (8.1.9)$$

Hagamos un análisis de los polos por casos. Primero, para $f_1(\gamma, \varphi)$ por (6.1.10)

$$\gamma_n \in (4\pi n, (4n+3)\pi), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8.1.10)$$

I. $n \geq 1 \implies \gamma_n \notin (-\pi, \pi)$, dado que $\gamma_n \geq 4\pi \forall n \geq 1$ por (8.1.10).

II. $n \leq -1 \implies \gamma_n \notin (-\pi, \pi)$ dado que $\gamma_n \leq -\pi \forall n \leq -1$ por (8.1.10).

III. $n = 0 \implies \gamma_0 = \varphi + \alpha \implies \gamma_0 \in (0, 3\pi)$, por (8.1.10). Además, para $\varphi \in (0, 2\pi)$ y $\alpha \in (0, \pi)$

$$\gamma_0 \in (-\pi, \pi) \iff -\pi < \varphi + \alpha < \pi \iff 0 < \varphi < \pi - \alpha, \quad (8.1.11)$$

$$\gamma_0 \in (\pi, 3\pi) \iff \pi < \varphi + \alpha < 3\pi \iff \pi - \alpha < \varphi < 2\pi. \quad (8.1.12)$$

De esta manera, por (8.1.9) y (8.1.11)

$$\sum_{i=1}^N \text{Res}[f_1(\gamma, \varphi), \gamma_i] = -2ie^{-i\omega_0\rho \cos(\varphi+\alpha)}, \quad 0 < \varphi < \pi - \alpha, \quad \alpha \in (0, \pi). \quad (8.1.13)$$

La condición (8.1.12) implica que $\gamma_0 \notin (-\pi, \pi)$ si $\pi - \alpha < \varphi < 2\pi$ y $\alpha \in (0, \pi)$, por lo tanto estos valores de γ_0 no contribuyen al valor de la integral (8.1.6).

Ambos casos para γ_0 se representan de manera esquemática en la Figura 8, donde el valor de γ_0 que se encuentra fuera de Γ_1 se denota por $\hat{\gamma}_0$.

Hagamos lo mismo para $f_2(\varphi, \alpha)$. Utilizando (6.1.12) y (8.1.7) tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Res}[f_2(\gamma, \varphi), \gamma_k] &= \frac{1}{2} \text{Res}[\sinh^{-1}((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)e^{-i\omega_0\rho \cos \gamma}, \gamma_k] \\ &= -2i [\cosh^{-1}((-i\gamma_k + i\varphi - i\alpha)/4)e^{-i\omega_0\rho \cos \gamma_k}] \\ &= -2i [\cosh^{-1}((-i(\varphi - \alpha)/4 + i\varphi - i\alpha)/4)e^{-i\omega_0\rho \cos((\varphi - \alpha)/4)}] \\ &= -2i [\cosh^{-1}(0)e^{-i\omega_0\rho \cos((\varphi - \alpha)/4)}] \\ &= -2i [e^{-i\omega_0\rho \cos \gamma_k}], \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (8.1.14)$$

Hagamos un análisis de los polos por casos. Primero, para $f_2(\gamma, \varphi)$ por (6.1.11)

$$\gamma_k \in ((4k-1)\pi, (4k+2)\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (8.1.15)$$

I. $k \geq 1 \implies \gamma_k \notin (-\pi, \pi)$, dado que $\gamma_k \geq 3\pi \forall k \geq 1$ por (8.1.15).

II. $k \leq -1 \implies \gamma_k \notin (-\pi, \pi)$ dado que $\gamma_k \leq -2\pi \forall k \leq -1$ por (8.1.15).

III. $k = 0 \implies \gamma_0 = \varphi - \alpha \implies \gamma_0 \in (-\pi, 2\pi)$ por (8.1.15). Además, para $\varphi \in (0, 2\pi)$ y $\alpha \in (0, \pi)$

$$\gamma_0 \in (-\pi, \pi) \iff -\pi < \varphi - \alpha < \pi \iff 0 < \varphi < \pi + \alpha, \quad (8.1.16)$$

$$\gamma_0 \in (\pi, 2\pi) \iff \pi < \varphi - \alpha < 2\pi \iff \pi + \alpha < \varphi < 2\pi. \quad (8.1.17)$$

De esta manera, por (8.1.14) y (8.1.16)

$$\sum_{k=1}^M \text{Res}[f_2(\gamma, \varphi), \gamma_k] = -2ie^{-i\omega_0\rho \cos(\varphi-\alpha)}, \quad 0 < \varphi < \pi + \alpha, \quad \alpha \in (0, \pi). \quad (8.1.18)$$

La condición (8.1.17) implica que $\gamma_0 \notin (-\pi, \pi)$ si $\pi + \alpha < \varphi < 2\pi$ y $\alpha \in (0, \pi)$, por lo tanto estos valores de γ_0 no contribuyen al valor de la integral (8.1.6).

Ambos casos para γ_0 se representan de manera esquemática en la Figura 9, donde el valor de γ_0 que se encuentra fuera de Γ_1 se denota por $\hat{\gamma}_0$.

Por lo tanto para (8.1.8) tenemos los siguientes casos:

I. Usando (8.1.11) y (8.1.16), tanto γ_0 dada por (6.1.10), como γ_0 dada por (6.1.11) están dentro del contorno Γ_1 (véase Figura 10), entonces por (8.1.13), (8.1.18) y (8.1.8)

$$\int_{\Gamma_1} \mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma = 4\pi [e^{-i\omega_0 \rho \cos(\varphi-\alpha)} - e^{-i\omega_0 \rho \cos(\varphi+\alpha)}], \quad 0 < \varphi < \pi - \alpha. \quad (8.1.19)$$

Sustituyendo (8.1.19) en (8.1.3) obtenemos:

$$A_{DN}(\gamma, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma + e^{-i\omega_0 \rho \cos(\varphi-\alpha)} - e^{-i\omega_0 \rho \cos(\varphi+\alpha)}, \quad 0 < \varphi < \pi - \alpha. \quad (8.1.20)$$

II. Usando (8.1.12) y (8.1.16), vemos que solamente γ_0 dada por (6.1.11) está dentro de Γ_1 (véase Figura 11), entonces por (8.1.18) y (8.1.8)

$$\int_{\Gamma_1} \mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma = e^{-i\omega_0 \rho \cos(\varphi-\alpha)}, \quad \pi - \alpha < \varphi < \pi + \alpha. \quad (8.1.21)$$

Sustituyendo (8.1.21) en (8.1.3) obtenemos:

$$A_{DN}(\gamma, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma + e^{-i\omega_0 \rho \cos(\varphi-\alpha)}, \quad \pi - \alpha < \varphi < \pi + \alpha. \quad (8.1.22)$$

III. Usando (8.1.17) vemos que Γ_1 no contiene ninguna singularidad (véase Figura 12), por lo tanto, por el Teorema de Cauchy

$$\int_{\Gamma_1} \mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma = 0 \quad \pi + \alpha < \varphi < 2\pi. \quad (8.1.23)$$

De esta manera (8.1.3) da:

$$A_{DN}(\gamma, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \quad \pi + \alpha < \varphi < 2\pi. \quad (8.1.24)$$

Tomando en cuenta (2.0.11), (2.0.12), (8.1.2) y las representaciones (8.1.20), (8.1.22) y (8.1.24) expresamos A_{DN} en forma general como

$$A_{DN}(\rho, \varphi) = A_i^0(\rho, \varphi) + A_{rDN}^0(\rho, \varphi) + A_{dDN}(\rho, \varphi), \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad \alpha \in (0, 2\pi).$$

Con lo que el Lema 8.1.1 queda demostrado. ■

8.2. Decaimiento de la onda A_{dDN}

Debemos demostrar que (8.1.2) cumple la condición (2.0.14) cuando $\rho \rightarrow \infty$. Haremos la demostración para el contorno Γ_+ (Véase Figura 13), que corresponde a la parte superior derecha del contorno Γ y para el contorno Γ_- (Véase Figura 14) que corresponde a la parte superior izquierda del contorno Γ (Véase Figura 6), la demostración de que (8.1.2) cumple (2.0.14) en el resto del contorno Γ se hace de manera similar.

Lema 8.2.1.

$$\left| \int_{\Gamma_+} \mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma \right| \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (8.2.25)$$

Demostración. Consideremos Γ_+ como en (6.2.30) (Véase Figura 13). Esto implica

$$\int_{\Gamma_+} |\mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \leq \int_{\gamma^-} |\mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma + \int_{\gamma^+} |\mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma, \quad (8.2.26)$$

donde γ^+ está dado por (6.2.32) y γ^- por (6.2.31).

I. Hagamos primero la demostración para γ^+ . Tenemos

$$\int_{\gamma^+} |\mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \leq \int_{\pi/2}^{\infty} C e^{-\omega_0 \rho c e^{\gamma_2}} d\gamma_2 \quad (8.2.27)$$

Usando (6.2.36) tenemos

$$\int_{\pi/2}^{\infty} C e^{-\omega_0 \rho c e^{\gamma_2}} d\gamma_2 \leq \int_{\pi/2}^{\infty} C e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2} d\gamma_2 = \frac{C}{\omega_0 \rho c} e^{-\pi \omega_0 \rho c / 2} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (8.2.28)$$

por lo tanto

$$\int_{\gamma^+} |\mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (8.2.29)$$

II. Ahora demostremos para el contorno γ^- . Por (6.2.39), considerando $\varphi \in (0, 2\pi)$ y $\alpha \in (0, \pi)$ tenemos que la función $\mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}$ es continua en todo Γ_+ y por lo tanto $\mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi)$ es acotada en γ^- por ser un compacto. Además, usando (6.2.40) y (6.2.31)

$$\int_{\gamma^-} |\mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \leq \int_0^{\pi/2} C e^{-\omega_0 \rho \sin(-\gamma_2 - \pi) \sinh(\gamma_2)} d\gamma_2. \quad (8.2.30)$$

Entonces

$$\int_0^{\pi/2} C e^{-\omega_0 \rho \sin(\gamma_2) \sinh(\gamma_2)} d\gamma_2 \leq \int_0^{\pi/2} C e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2^2} d\gamma_2 \leq C \int_0^{\infty} e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2^2} d\gamma_2. \quad (8.2.31)$$

En (8.2.31) se usó (6.2.45).

Por lo tanto

$$\int_0^\infty C e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2^2} d\gamma_2 = C \sqrt{\frac{\pi}{c \omega_0 \rho}} \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty, \quad (8.2.32)$$

implica que

$$\int_{\gamma^-} |\mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty. \quad (8.2.33)$$

Con los resultados (8.2.29) y (8.2.33) tenemos que el Lema 8.2.1 se demostró. ■

Lema 8.2.2.

$$\int_{\Gamma_-} |\mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty, \quad \varphi \neq \pi \pm \alpha. \quad (8.2.34)$$

Demostración. Consideremos Γ_- como en (6.2.49) (Véase figura 14). Esto implica

$$\int_{\Gamma_-} |\mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \leq \int_{\gamma_-} |\mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma + \int_{\gamma_+} |\mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma, \quad (8.2.35)$$

donde γ_+ está dado por (6.2.51) y γ_- por (6.2.50).

I. Hagamos primero la demostración para γ_+ . Tenemos

$$\int_{\gamma_+} |\mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \leq \int_{\pi/2}^\infty C e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2^2} d\gamma_2 \quad (8.2.36)$$

por (5.1.19) y (6.2.51). Usando (6.2.36)

$$\int_{\pi/2}^\infty C e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2^2} d\gamma_2 \leq \int_{\pi/2}^\infty C e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2^2} d\gamma_2. \quad (8.2.37)$$

Por lo tanto tenemos

$$\int_{\pi/2}^\infty C e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2^2} d\gamma_2 = \frac{-C}{\omega_0 \rho c} e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2^2} \Big|_{\pi/2}^\infty = \frac{C}{\omega_0 \rho c} e^{-\pi \omega_0 \rho c / 2} \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty, \quad (8.2.38)$$

por lo tanto

$$\int_{\gamma_+} |\mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty. \quad (8.2.39)$$

II. Ahora demostremos para el contorno γ_- . Por (6.2.39) y considerando $\varphi \in (0, 2\pi)$ y $\alpha \in (0, \pi)$, tenemos que la función $\mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi)$ es discontinua para

$$\begin{aligned}\varphi + \alpha &= \pi, \\ \varphi - \alpha &= \pi.\end{aligned}\tag{8.2.40}$$

Por lo tanto, para $|\varphi - (\pi - \alpha)| \geq \epsilon > 0$, $|\varphi - (\pi + \alpha)| \geq \epsilon > 0$, por (6.2.40) tenemos

$$\int_{\gamma_-} |\mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \leq \int_0^{\pi/2} C(\varphi) e^{-\omega_0 \rho \sin(\gamma_2) \sinh(\gamma_2)} d\gamma_2.\tag{8.2.41}$$

Entonces

$$\int_0^{\pi/2} C(\varphi) e^{-\omega_0 \rho \sin(\gamma_2) \sinh(\gamma_2)} d\gamma_2 \leq C(\varphi) \int_0^{\infty} e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2^2} d\gamma_2.\tag{8.2.42}$$

En (8.2.42) se usó (6.2.45).

Por lo tanto

$$\int_0^{\infty} C(\varphi) e^{-\omega_0 \rho c \gamma_2^2} d\gamma_2 = C(\varphi) \sqrt{\frac{\pi}{c\omega_0 \rho}} \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty,\tag{8.2.43}$$

implica que

$$\int_{\gamma_-} |\mathfrak{z}_{DN}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty, \quad \varphi \neq \pi \pm \alpha.\tag{8.2.44}$$

Con los resultados (8.2.39) y (8.2.44) el Lema 8.2.2 queda demostrado. ■

En las secciones anteriores encontramos las fórmulas explícitas de las soluciones para A_D , A_N y A_{DN} . A partir de los Lemas 6.1.1, 7.1.1 y 8.1.1 obtuvimos la descomposición de la solución al problema de difracción de Sommerfeld en un semiplano para las condiciones de frontera del tipo Dirichlet, Neumann y Dirichlet-Neumann respectivamente, desarrollando la descomposición de dicha solución como una suma de la onda incidente, reflejada y difractada en cada caso.

También se demostró que la onda difractada para las condiciones del tipo DD, NN y DN desaparece en el infinito, condición que debe cumplir dicha onda según se estableció en el planteamiento del problema en el capítulo 2.

Con esto hemos logrado cumplir la segunda parte importante del trabajo planteado para esta tesis, demostrando que (2.0.10) se cumple.

Finalmente, como se dijo en el capítulo 2, trataremos los casos límites para la onda incidente, es decir, los casos en que el ángulo de incidencia toma los valores $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$.

Capítulo 9

Solución del problema de Sommerfeld en un semiplano para el caso $\alpha = 0$

Consideremos primero el caso límite $\alpha = 0$ para la onda incidente, en el presente capítulo procederemos a formular el problema de difracción para las diferentes condiciones de frontera y a continuación determinaremos las fórmulas explícitas de las soluciones correspondientes a cada caso.

9.1. Planteamiento del problema

Ya que

$$A_i(\rho, \varphi, \alpha) \longrightarrow e^{-i\omega_0 \rho \cos \varphi}, \quad \alpha \longrightarrow 0, \quad (9.1.1)$$

de la ecuación (2.0.4) tenemos

$$A_{i0}(\rho, \varphi) = e^{-i\omega_0 \rho \cos \varphi}, \quad \omega_0, \rho > 0. \quad (9.1.2)$$

(9.1.2) será la forma de nuestra onda plana incidente para el caso límite $\alpha = 0$ (véase Figura 14).

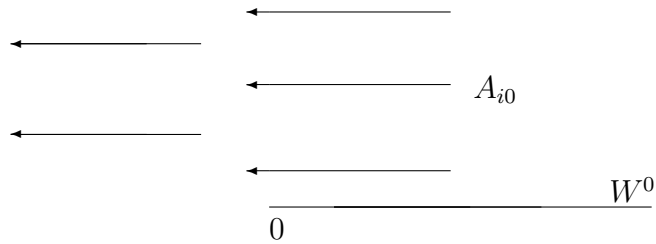


Figura 14. Onda incidente para $\alpha = 0$

Nuestro objetivo es encontrar las funciones $A_{D0}(x)$, $A_{N0}(x)$ y A_{DN0} que cumplan

$$\begin{cases} (\Delta + \omega_0^2)A_{D0}(x) = 0, \\ A_{D0}(x)|_{W^0} = 0, \end{cases} \quad x \in Q. \quad (9.1.3)$$

$$\begin{cases} (\Delta + \omega_0^2)A_{N0}(x) = 0, \\ \partial_n A_{N0}(x)|_{W^0} = 0, \end{cases} \quad x \in Q. \quad (9.1.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta + \omega_0^2)A_{DN0}(x) = 0, \\ A_{DN0}(x_1, x_2 + 0) = 0, \\ \partial_n A_{DN0}(x_1, x_2 - 0) = 0, \end{array} \right. \quad x \in Q, x_1 > 0, \quad (9.1.5)$$

donde ∂_n es la derivada direccional con respecto a la normal exterior.

Estas soluciones admiten la descomposición en la forma

$$\begin{aligned} A_{D0}(x) &= A_{i0}^0(x) + A_{rD0}^0(x) + A_{dD0}(x), \\ A_{N0}(x) &= A_{i0}^0(x) + A_{rN0}^0(x) + A_{dN0}(x), \\ A_{DN0}(x) &= A_{i0}^0(x) + A_{rDN0}^0(x) + A_{dDN0}(x), \end{aligned} \quad (9.1.6)$$

donde,

$$A_{i0}^0(x) = \begin{cases} A_{i0}(x), & \varphi \in (0, \pi) \\ 0, & \varphi \in (\pi, 2\pi) \end{cases} \quad (9.1.7)$$

$$A_{rD0}^0(x) = A_{rDN0}^0(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} A_{rD}^0(x) = \begin{cases} -e^{-i\omega_0 \rho \cos \varphi}, & \varphi \in (0, \pi) \\ 0, & \varphi \in (\pi, 2\pi) \end{cases} \quad (9.1.8)$$

$$A_{rN0}(x) = A_{rN}^0(x) = \begin{cases} e^{-i\omega_0 \rho \cos \varphi}, & \varphi \in (0, \pi) \\ 0, & \varphi \in (\pi, 2\pi) \end{cases} \quad (9.1.9)$$

Además, $A_{dD0}(x)$, $A_{dN0}(x)$ y $A_{dDN0}(x)$ de (9.1.6) satisfacen (2.0.14).

9.2. Soluciones del problema de Sommerfeld para las condiciones en la frontera DD, NN y DN con $\alpha = 0$.

I. Primero, para las condiciones de frontera del tipo DD, considerando (5.1.4) tenemos

$$\mathfrak{z}_{D0}(\gamma, \varphi) := \frac{1}{2} [\coth((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4) - \coth((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)] \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad (9.2.10)$$

esto implica, por (5.1.2),

$$A_{D0}(\rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_c^\infty \mathfrak{z}_{D0}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma = 0. \quad (9.2.11)$$

Por lo tanto, para las condiciones en la frontera del tipo DD, tenemos, para $\alpha = 0$

$$A_{D0} = 0. \quad (9.2.12)$$

Lo cual nos dice que para $\alpha = 0$ y las condiciones en la frontera del tipo DD, la solución al problema de difracción es la solución trivial.

II. De igual manera, para las condiciones de frontera NN, por (5.1.3) y (5.1.5) considerando $\alpha = 0$ tenemos

$$A_{N0}(\rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \mathfrak{z}_{N0}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad (9.2.13)$$

donde

$$\mathfrak{z}_{N0}(\gamma, \varphi) := -\coth((-i\gamma + i\varphi)/4). \quad (9.2.14)$$

Ahora bien, usando la descomposición de A_N y considerando $\alpha = 0$ por (7.1.9), podemos expresar la onda A_{N0} en la suma de una onda incidente, reflejada y difractada con

$$A_{i0}^0(\gamma, \varphi) = A_{rN0}^0(\gamma, \varphi) = e^{-i\omega_0 \rho \cos \varphi} \quad \varphi \in (0, \pi), \quad (9.2.15)$$

$$A_{dN0}(\gamma, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_{N0}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \quad \varphi \in (0, \pi). \quad (9.2.16)$$

Por lo tanto la solución tiene la siguiente forma

$$A_{N0}(\rho, \varphi) = 2e^{-i\omega_0 \rho \cos \varphi} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_{N0}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \quad \varphi \in (0, \pi), \quad (9.2.17)$$

que es la descomposición de la solución de nuestro problema de difracción para las condiciones de frontera del tipo NN en el intervalo $\varphi \in (0, \pi)$, donde Γ es el contorno que aparece en la Figura 6.

Mientras que considerando (9.1.7), (9.1.9) y (7.1.13) tenemos

$$A_{i0}^0(\gamma, \varphi) = A_{rN0}^0(\gamma, \varphi) = 0 \quad \varphi \in (\pi, 2\pi), \quad (9.2.18)$$

$$A_{dN0}(\gamma, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_{N0}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \quad \varphi \in (\pi, 2\pi). \quad (9.2.19)$$

Con estas expresiones obtenemos

$$A_{N0}(\rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_{N0}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \quad \varphi \in (\pi, 2\pi). \quad (9.2.20)$$

Que es la descomposición de la solución de nuestro problema de difracción para las condiciones de frontera del tipo NN en el intervalo $\varphi \in (\pi, 2\pi)$.

Es fácil verificar que A_{N0} satisface (9.1.4) usando (9.2.13) y que satisface (9.1.6) usando (9.2.17) y (9.2.20), falta mostrar que la onda difractada (9.2.16) cumple (2.0.14).

Primero, consideremos que la función $\mathfrak{z}_{N0}(\gamma, \varphi)$ es continua en Γ_+ , con $\varphi \in (0, 2\pi)$, como se sigue de (9.2.14) (véase Figura 13). Entonces, usando Lema 7.2.1 para $\alpha = 0$ temos que

$$\left| \int_{\Gamma_+} \mathfrak{z}_{N0}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma \right| \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (9.2.21)$$

y para el contorno Γ_- consideremos que la función $\mathfrak{z}_{N0}(\gamma, \varphi)$ es continua para $\varphi \neq \pi$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, como se sigue de (9.2.14) (véase Figura 14). Por lo tanto usando Lema 7.2.2 para $\alpha = 0$ vemos que

$$\int_{\Gamma_-} |\mathfrak{z}_{N0}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma}| d\gamma \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty, \quad \varphi \neq \pi. \quad (9.2.22)$$

De esta manera podemos concluir que efectivamente A_{dN0} satisface (2.0.14).

III. De manera similar, para el caso DN, considerando (5.2.21) para $\alpha = 0$ obtenemos

$$\mathfrak{z}_{DN0}(\gamma, \varphi) := \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sinh((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)} - \frac{1}{\sinh((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)} \right] \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad (9.2.23)$$

esto implica, por (5.1.2),

$$A_{DN0}(\rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \mathfrak{z}_{DN0}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma = 0. \quad (9.2.24)$$

Por lo tanto, para las condiciones en la frontera del tipo DN, tenemos, para $\alpha = 0$

$$A_{DN0} = 0. \quad (9.2.25)$$

Lo cual nos dice que para $\alpha = 0$ y las condiciones en la frontera del tipo DN, la solución al problema de difracción es la solución trivial.

Capítulo 10

Solución del problema de Sommerfeld en un semiplano para el caso $\alpha = \pi$

10.1. Planteamiento del problema

De la ecuación (2.0.4) para $\alpha = \pi$ tenemos

$$A_{i\pi}(\rho, \varphi) = e^{-i\omega_0 \rho \cos(\varphi - \pi)} = e^{i\omega_0 \rho \cos \varphi}, \quad \varphi \in (0, 2\pi) \quad (10.1.1)$$

que ahora será la amplitud de nuestra onda plana incidente (véase Figura 15).

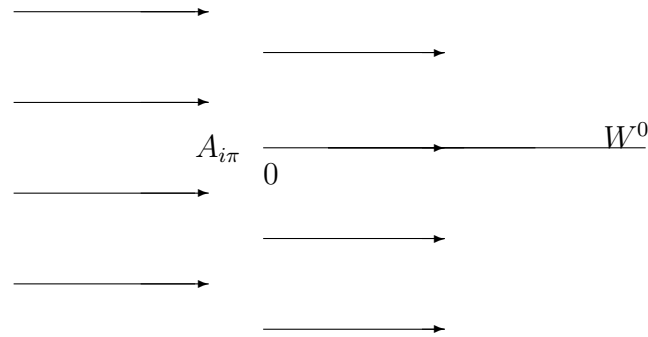


Figura 15. Onda incidente para $\alpha = \pi$

Nuestro objetivo es encontrar las funciones $A_{D\pi}(x)$, $A_{N\pi}(x)$ y $A_{DN\pi}$ que cumplan

$$\begin{cases} (\Delta + \omega_0^2)A_{D\pi}(x) = 0, \\ A_{D\pi}(x)|_{W^0} = 0, \end{cases} \quad x \in Q. \quad (10.1.2)$$

$$\begin{cases} (\Delta + \omega_0^2)A_{N\pi}(x) = 0, \\ \partial_n A_{N\pi}(x)|_{W^0} = 0, \end{cases} \quad x \in Q. \quad (10.1.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta + \omega_0^2)A_{DN\pi}(x) = 0, \\ A_{DN\pi}(x_1, x_2 + 0) = 0, \\ \partial_n A_{DN\pi}(x_1, x_2 - 0) = 0, \end{array} \right. \quad x \in Q, x_1 > 0. \quad (10.1.4)$$

donde ∂_n es la derivada direccional con respecto a la normal exterior.

Estas soluciones admiten la descomposición en la forma

$$\begin{aligned} A_{D\pi}(x) &= A_{i\pi}^0(x) + A_{rD\pi}^0(x) + A_{dD\pi}(x), \\ A_{N\pi}(x) &= A_{i\pi}^0(x) + A_{rN\pi}^0(x) + A_{dN\pi}(x), \\ A_{DN\pi}(x) &= A_{i\pi}^0(x) + A_{rDN\pi}^0(x) + A_{dDN\pi}(x), \end{aligned} \quad (10.1.5)$$

donde, por (2.0.11) para $\alpha = \pi$

$$A_{i\pi}^0(x) = A_{i\pi}(x), \quad \varphi \in (0, 2\pi). \quad (10.1.6)$$

Por (2.0.12) para $\alpha = \pi$

$$A_{rD\pi}^0(x) = 0, \quad \varphi \in (0, 2\pi). \quad (10.1.7)$$

También, por (2.0.13) para $\alpha = \pi$

$$A_{rN\pi}^0(x) = 0, \quad \varphi \in (0, 2\pi). \quad (10.1.8)$$

Finalmente, por (2.0.12) para $\alpha = \pi$

$$A_{rDN\pi}^0(x) = 0, \quad \varphi \in (0, 2\pi). \quad (10.1.9)$$

Es decir, para las condiciones de frontera de DD, NN y DN no existe onda reflejada en el caso límite $\alpha = \pi$.

También, en (10.1.5) $A_{dD\pi}(x)$, $A_{dN\pi}(x)$ y $A_{dDN\pi}(x)$ satisfacen (2.0.14).

10.2. Soluciones del problema de Sommerfeld para las condiciones en la frontera DD, NN y DN con $\alpha = \pi$

I. Primero, para las condiciones en la frontera del tipo DD, por (5.1.2) y (5.1.4) tenemos, para $\alpha = \pi$

$$A_{D\pi}(\rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_C \mathfrak{z}_{D\pi}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad (10.2.10)$$

donde,

$$\mathfrak{z}_{D\pi}(\gamma, \varphi) = \frac{1}{2} [\coth((-i\gamma + i\varphi + i\pi)/4) - \coth((-i\gamma + i\varphi - i\pi)/4)]. \quad (10.2.11)$$

Ahora bien, utilizando la descomposición de A_D dada en (6.1.26) para $\alpha = \pi$ podemos expresar $A_{D\pi}$ en la suma de una onda incidente, reflejada y difractada con

$$A_{i\pi}^0(\gamma, \varphi) = e^{i\omega_0 \rho \cos \varphi}, \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad (10.2.12)$$

$$A_{rD\pi}^0(\gamma, \varphi) = 0, \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad (10.2.13)$$

$$A_{dD\pi}(\gamma, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_{D\pi}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \quad \varphi \in (0, 2\pi). \quad (10.2.14)$$

De esta manera obtenemos la descomposición

$$A_{D\pi}(\rho, \varphi) = e^{i\omega_0 \rho \cos \varphi} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_{D\pi}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \quad \varphi \in (0, 2\pi). \quad (10.2.15)$$

Es fácil verificar que $A_{D\pi}$ satisface (10.1.2) usando (10.1.6) y que satisface (10.1.5) usando (10.2.15). Falta mostrar que la onda difractada (10.2.14) cumple (2.0.14).

Considerando $\alpha = \pi$ en (6.1.10) y (6.1.11) tenemos

$$\begin{aligned} \varphi - \pi &= -\gamma + 4n\pi, \\ \varphi + \pi &= -\gamma + 4n\pi, \end{aligned} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (10.2.16)$$

Para $\gamma = \pi$ tenemos

$$\begin{aligned} \varphi &= 4n\pi, \\ \varphi &= 2\pi(2n - 1), \end{aligned} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (10.2.17)$$

Como $\varphi \in (0, 2\pi)$ vemos que estos puntos singulares no se alcanzan para ningún valor de n .

Para $\gamma = -\pi$ tenemos

$$\begin{aligned} \varphi &= 2\pi(2n + 1), \\ \varphi &= 4n\pi, \end{aligned} \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (10.2.18)$$

Como $\varphi \in (0, 2\pi)$ vemos que estos puntos singulares tampoco se alcanzan para ningún valor de n .

Por lo tanto, de (10.2.17) y (10.2.18), vemos que la función $\mathfrak{z}_{D\pi}(\gamma, \varphi)$ es continua en todo Γ . Con estos resultados, usando Lema 6.2.1 para $\alpha = \pi$ tenemos

$$\left| \int_{\Gamma_+} \mathfrak{z}_{D\pi}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma \right| \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty. \quad (10.2.19)$$

Y de manera similar usando Lema 6.2.2 para $\alpha = \pi$

$$\left| \int_{\Gamma_-} \mathfrak{z}_{D\pi}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma \right| \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty. \quad (10.2.20)$$

De esta manera concluimos que $A_{dD\pi}$ satisface (2.0.14).

II. De igual manera, sustituyendo $\alpha = \pi$ en (5.1.5), por (5.1.3), tenemos para las condiciones de frontera NN

$$A_{N\pi}(\rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_c \mathfrak{z}_{N\pi}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \quad (10.2.21)$$

donde

$$\mathfrak{z}_{N\pi}(\gamma, \varphi) = \frac{1}{2} [\coth((-i\gamma + i\varphi + i\pi)/4) + \coth((-i\gamma + i\varphi - i\pi)/4)]. \quad (10.2.22)$$

Por lo tanto, usando el resultado (7.1.11) y considerando $\alpha = \pi$ podemos descomponer esta solución en la suma de una onda incidente, reflejada y difractada con

$$A_{i\pi}^0(\gamma, \varphi) = e^{i\omega_0 \rho \cos \varphi}, \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad (10.2.23)$$

$$A_{rN\pi}^0(\gamma, \varphi) = 0, \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad (10.2.24)$$

$$A_{dN\pi}(\gamma, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_{N\pi}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad (10.2.25)$$

Con lo que obtenemos la solución

$$A_{N\pi}(\rho, \varphi) = e^{i\omega_0 \rho \cos \varphi} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_{N\pi}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \quad \varphi \in (0, 2\pi). \quad (10.2.26)$$

Es fácil verificar que $A_{N\pi}$ satisface (10.1.3) usando (10.1.6) y que satisface (10.1.5) usando (10.2.26). Falta mostrar que la onda difractada (10.2.25) cumple (2.0.14).

Considerando (10.2.17) y (10.2.18), vemos que la función $\mathfrak{z}_{N\pi}(\gamma, \varphi)$ también es continua en todo Γ . Con estos resultados, usando Lema 7.2.1 para $\alpha = \pi$ tenemos

$$\left| \int_{\Gamma_+} \mathfrak{z}_{N\pi}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma \right| \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty. \quad (10.2.27)$$

Y de manera similar usando Lema 7.2.2 para $\alpha = \pi$

$$\left| \int_{\Gamma_-} \mathfrak{z}_{N\pi}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma \right| \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty. \quad (10.2.28)$$

Con estos dos resultados podemos concluir que efectivamente $A_{dN\pi}$ también satisface (2.0.14).

III. De manera similar, para el caso DN, por (5.2.20) y (5.2.21) para $\alpha = \pi$

$$A_{DN\pi}(\rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_c \mathfrak{z}_{DN\pi}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \quad (10.2.29)$$

donde

$$\mathfrak{z}_{DN\pi}(\gamma, \varphi) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sinh((-i\gamma + i\varphi + i\pi)/4)} - \frac{1}{\sinh((-i\gamma + i\varphi - i\pi)/4)} \right]. \quad (10.2.30)$$

Finalmente, usando (8.1.22) y considerando $\alpha = \pi$ podemos descomponer esta solución en la suma de una onda incidente, reflejada y difractada con

$$A_{i\pi}^0(\gamma, \varphi) = e^{i\omega_0\rho \cos \varphi}, \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad (10.2.31)$$

$$A_{rDN\pi}^0(\gamma, \varphi) = 0, \quad \varphi \in (0, 2\pi), \quad (10.2.32)$$

$$A_{dDN\pi}(\gamma, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_{DN\pi}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0\rho \cos \gamma} d\gamma, \quad \varphi \in (0, 2\pi). \quad (10.2.33)$$

Obteniendo la solución

$$A_{DN\pi}(\rho, \varphi) = e^{i\omega_0\rho \cos \varphi} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathfrak{z}_{DN\pi}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0\rho \cos \gamma} d\gamma, \quad \varphi \in (0, 2\pi). \quad (10.2.34)$$

Es fácil verificar que $A_{DN\pi}$ satisface (10.1.4) usando (10.1.6) y que satisface (10.1.5) usando (10.2.34). Falta mostrar que la onda difractada (10.2.33) cumple (2.0.14).

Considerando (10.2.17) y (10.2.18), vemos que la función $\mathfrak{z}_{DN\pi}(\gamma, \varphi)$ también es continua en todo Γ . Con estos resultados, usando Lema 8.2.1 para $\alpha = \pi$ tenemos

$$\left| \int_{\Gamma_+} \mathfrak{z}_{DN\pi}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0\rho \cos \gamma} d\gamma \right| \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty. \quad (10.2.35)$$

Y de manera similar usando Lema 8.2.2 para $\alpha = \pi$

$$\left| \int_{\Gamma_-} \mathfrak{z}_{DN\pi}(\gamma, \varphi) e^{-i\omega_0\rho \cos \gamma} d\gamma \right| \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow \infty. \quad (10.2.36)$$

De esta manera podemos concluir que efectivamente $A_{dDN\pi}$ satisface (2.0.14).

Capítulo 11

Conclusiones

En esta tesis analizamos la solución de Sommerfeld para la difracción estacionaria en un semiplano. Consideramos tres casos para las condiciones de frontera del tipo:

I. Dirichlet. Las soluciones para las condiciones de frontera del tipo DD, se expresan en (6.1.24), (6.1.26) y (6.1.28) correspondientes a la Zona I, Zona II y Zona III, respectivamente (véase Figura 2), en estas soluciones podemos apreciar que efectivamente se descomponen en la suma de la onda incidente, reflejada y difractada.

II. Neumann. Las soluciones para las condiciones de frontera del tipo NN, se expresan en (7.1.9), (7.1.11) y (7.1.13) correspondientes a la Zona I, Zona II y Zona III, respectivamente (véase Figura 2), en estas soluciones podemos apreciar que efectivamente, también en este caso, se descomponen en la suma de la onda incidente, reflejada y difractada.

III. Dirichlet-Neumann. Las soluciones para las condiciones de frontera del problema mixto DN, se expresan en (8.1.20), (8.1.22) y (8.1.24) correspondientes a la Zona I, Zona II y Zona III, respectivamente (véase Figura 2), en estas soluciones podemos apreciar que efectivamente, también en este caso, se descomponen en la suma de la onda incidente, reflejada y difractada.

IV. En las Secciones 9 y 10 de la tesis, incluimos la solución a los casos límites para la onda incidente, correspondiente a los valores $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$.

Apéndice A

A.1. Desigualdad de la integral de Sommerfeld

Lema A.1.1.

$$\forall n > 0 \quad y \quad c > 0 \quad \exists c_1 > 0, k > 0 \quad \text{tales que} \quad e^{nt} e^{-ce^t} \leq k e^{-c_1 e^t}, \quad t \geq 0. \quad (\text{A.1.1})$$

Demostración. Consideremos el cociente,

$$\frac{e^{nt} e^{-ce^t}}{k e^{-c_1 e^t}} = \frac{1}{k} e^{nt - ce^t + c_1 e^t}.$$

Notemos que, $\forall \alpha > 0, n > 0$

$$\frac{e^{e^{\alpha t}}}{e^{nt}} \longrightarrow \infty, \quad t \longrightarrow \infty.$$

En efecto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{e^{\alpha t}}}{e^{nt}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(e^{\alpha t} - nt)} = e^{\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{\alpha t} - nt)}, \longrightarrow \infty$$

dado que $e^{\alpha t - nt} \longrightarrow +\infty, \quad t \longrightarrow +\infty$. De aquí,

$$\frac{1}{k} e^{nt} e^{e^t(c_1 - c)} \longrightarrow 0 \quad \text{para} \quad c_1 < c, \quad t \longrightarrow \infty.$$

Por lo tanto, (A.1.1) se cumple para $c_1 < c$ y k suficientemente grande. ■

A.2. Demostración del Lema 3.0.6

Consideremos la expresión (3.0.15), donde $\gamma_2 \longrightarrow +\infty$, de la cual obtenemos,

$$B_n(\gamma) = \frac{e^{-\gamma_2/2}}{|e^{i\gamma/2} - e^{i\psi/2}|^n} = \frac{1}{e^{\gamma_2/2} |e^{i\gamma_1/2}/e^{\gamma_2} - e^{i\psi/2}|^n},$$

de aquí es claro que

$$B_n(\gamma) \longrightarrow 0, \gamma_2 \longrightarrow +\infty,$$

con lo que demostramos (3.0.16).

A.3. Cambio de contorno de integración

Supongamos que tenemos un contorno Γ y una función $f(\beta)$, que es analítica en una vecindad $\mathcal{V}_\epsilon$ de Γ , donde

$$\mathcal{V}_\epsilon := \{\beta \in \mathbb{C} \mid \text{dist}(\beta, \Gamma) < \epsilon\}. \quad (\text{A.3.2})$$

Además, supongamos que

$$\int_{\Gamma} f(\beta) d\beta, \quad (\text{A.3.3})$$

converge y también, $|f(\beta)| \leq Ce^{-R}$, $|\beta| \geq R$, $\beta \in \mathcal{V}_\epsilon$. Entonces por el Teorema de Cauchy

$$\int_{\Gamma} f(\beta) d\beta = \int_{\Gamma-\alpha} f(\beta) d\beta, \quad |\alpha| < \epsilon. \quad (\text{A.3.4})$$

A.4. Demostración del Teorema 4.0.1

La función (4.0.3) cumple la ecuación de Helmholtz dado que,

$$\begin{aligned} (\Delta + \omega_0^2)e^{-i\omega_0\rho \cos(\beta+\psi)} &= \frac{1}{\rho}\partial_\rho[\rho\partial_\rho e^{-i\omega_0\rho \cos(\beta+\psi)}] + \frac{1}{\rho^2}\partial_\psi^2 e^{-i\omega_0\rho \cos(\beta+\psi)} + \omega_0^2 e^{-i\omega_0\rho \cos(\beta+\psi)} \\ &= -e^{-i\omega_0\rho \cos(\beta+\psi)} \left[\frac{i\omega}{\rho} \cos(\beta + \psi) + \omega_0^2 \cos^2(\beta + \psi) \right] \\ &\quad + e^{-i\omega_0\rho \cos(\beta+\psi)} \left[\frac{i\omega}{\rho} \cos(\beta + \psi) - \omega_0^2 \sin^2(\beta + \psi) \right] \\ &\quad + \omega_0^2 e^{-i\omega_0\rho \cos(\beta+\psi)} \\ &= -\frac{i\omega}{\rho} e^{-i\omega_0\rho \cos(\beta+\psi)} \cos(\beta + \psi) + \frac{i\omega}{\rho} e^{-i\omega_0\rho \cos(\beta+\psi)} \cos(\beta + \psi) \\ &\quad - \omega_0^2 e^{-i\omega_0\rho \cos(\beta+\psi)} [\cos^2(\beta + \psi) + \sin^2(\beta + \psi)] \\ &\quad + \omega_0^2 e^{-i\omega_0\rho \cos(\beta+\psi)} = 0. \end{aligned}$$

A.5. Cálculo de $\partial_\varphi A_N$

Por Lema 5.1.1 podemos escribir:

$$A_N(\rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} [\coth((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4) + \coth((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)] e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma. \quad (\text{A.5.5})$$

Por lo tanto, la derivada parcial respecto de φ viene dada por

$$\begin{aligned} \partial_\varphi A_N(\rho, \varphi) = \\ \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} [\partial_\varphi (\coth((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)) + \partial_\varphi (\coth((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4))] e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.5.6})$$

Tenemos que

$$\partial_\varphi \coth((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4) = \frac{i}{4} [1 - \coth^2((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)] = -\frac{i}{4} \operatorname{csch}^2((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4). \quad (\text{A.5.7})$$

De la misma manera

$$\partial_\varphi \coth((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4) = \frac{i}{4} [1 - \coth^2((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)] = -\frac{i}{4} \operatorname{csch}^2((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4), \quad (\text{A.5.8})$$

esto implica

$$\begin{aligned} \partial_\varphi A_N(\rho, \varphi) = \\ -\frac{i}{16\pi} \int_{\mathcal{C}} [\operatorname{csch}^2((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4) + \operatorname{csch}^2((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)] e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.5.9})$$

Por lo tanto, para la primera condición de frontera en (5.3.28),

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow 0^-} \partial_\varphi A_N(\rho, \varphi) = \\ -\frac{i}{16\pi} \int_{\mathcal{C}} [\operatorname{csch}^2((-i\gamma + i\alpha)/4) + \operatorname{csch}^2((-i\gamma - i\alpha)/4)] e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.5.10})$$

Finalmente,

$$\partial_\varphi A_N(\rho, 0) = -\frac{i}{16\pi} \int_{\mathcal{C}} [\operatorname{csch}^2((-i\gamma + i\alpha)/4) + \operatorname{csch}^2((-i\gamma - i\alpha)/4)] e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma. \quad (\text{A.5.11})$$

Para la segunda condición:

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow 2\pi+0} \partial_\varphi A_N(\rho, \varphi) = \\ -\frac{i}{16\pi} \int_{\mathcal{C}} [\operatorname{csch}^2((-i\gamma + 2\pi i + i\alpha)/4) + \operatorname{csch}^2((-i\gamma + 2\pi i - i\alpha)/4)] e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.5.12})$$

De igual manera que en el caso anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} \partial_\varphi A_N(\rho, 2\pi) = \\ -\frac{i}{16\pi} \int_C \left[\operatorname{csch}^2((-i\gamma + 2\pi i + i\alpha)/4) + \operatorname{csch}^2((-i\gamma + 2\pi i - i\alpha)/4) \right] e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.5.13})$$

A.6. Funciones hiperbólicas

Lema A.6.1. *Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces se cumplen las identidades:*

$$\cosh(z + i\pi/2) = i \sinh(z), \quad (\text{A.6.14})$$

$$\sinh(z + i\pi/2) = i \cosh(z), \quad (\text{A.6.15})$$

$$\coth(z + i\pi/2) = \tanh(z). \quad (\text{A.6.16})$$

$$\operatorname{csch}(z + i\pi/2) = -i \operatorname{sech}(z). \quad (\text{A.6.17})$$

Demostración. Para la primera ecuación

$$\begin{aligned} \cosh(z + i\pi/2) &= \frac{e^{z+i\pi/2} + e^{-(z+i\pi/2)}}{2} = \frac{e^{i\pi/2}e^z + e^{-i\pi/2}e^{-z}}{2} \\ &= \frac{ie^z - ie^{-z}}{2} = i \sinh z. \end{aligned}$$

Para la segunda

$$\begin{aligned} \sinh(z + i\pi/2) &= \frac{e^{z+i\pi/2} - e^{-(z+i\pi/2)}}{2} = \frac{e^{i\pi/2}e^z - e^{-i\pi/2}e^{-z}}{2} \\ &= \frac{ie^z + ie^{-z}}{2} = i \cosh z. \end{aligned}$$

Usando los dos resultados anteriores

$$\coth(z + i\pi/2) = \frac{\cosh(z + i\pi/2)}{\sinh(z + i\pi/2)} = \frac{i \sinh z}{i \cosh z} = \tanh z. \quad (\text{A.6.18})$$

Finalmente, para la última expresión en Lema A.6 tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{csch}(z + i\pi/2) &= \frac{1}{\sinh(z + i\pi/2)} = \frac{2}{e^{z+i\pi/2} - e^{-(z+i\pi/2)}} \\ &= \frac{2}{e^{i\pi/2}e^z - e^{-i\pi/2}e^{-z}} = \frac{2}{ie^z + ie^{-z}} \\ &= \frac{-2i}{e^z + e^{-z}} = \frac{-i}{\cosh(z)} = -i \operatorname{sech}(z). \end{aligned}$$

A.7. Cálculo de $\partial_\varphi^2 A_{DN}$

Consideremos A_{DN} como en (5.2.20), entonces tenemos

$$\partial_\varphi^2 A_{DN}(\rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \partial_\varphi^2 [\mathfrak{z}_{DN}(\rho, \varphi)] e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \quad (\text{A.7.19})$$

donde

$$\partial_\varphi^2 [\mathfrak{z}_{DN}(\rho, \varphi)] = \frac{1}{2} \partial_\varphi^2 \left[\frac{1}{\sinh((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)} - \frac{1}{\sinh((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)} \right]. \quad (\text{A.7.20})$$

Considerando

$$\begin{aligned} \partial_\varphi \sinh^{-1}((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4) &= -i \sinh^{-2}((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4) \cosh((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4), \\ \partial_\varphi \sinh^{-1}((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4) &= -i \sinh^{-2}((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4) \cosh((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4), \end{aligned} \quad (\text{A.7.21})$$

obtenemos que el valor para la segunda derivada de $\sinh^{-1}((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)$ respecto a φ es

$$\begin{aligned} \partial_\varphi^2 \sinh^{-1}((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4) &= -2 \sinh^{-3}((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4) \cosh^2((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4) \\ &\quad - \sinh^{-1}((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4), \\ \partial_\varphi^2 \sinh^{-1}((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4) &= -2 \sinh^{-3}((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4) \cosh^2((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4) \\ &\quad - \sinh^{-1}((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4). \end{aligned}$$

Usando (A.7.21) tenemos

$$\partial_\varphi A_{DN}(\rho, \varphi) = -\frac{i}{8\pi} \int_{\mathcal{C}} \left[\frac{\cosh((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)}{\sinh^2((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)} - \frac{\cosh((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)}{\sinh^2((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)} \right] e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma, \quad (\text{A.7.22})$$

y finalmente, por (A.7.22) tenemos

$$\begin{aligned} \partial_\varphi^2 A_{DN}(\rho, \varphi) &= -\frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{C}} \left[\frac{2 \cosh^2((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)}{\sinh^3((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)} - \frac{2 \cosh^2((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)}{\sinh^3((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sinh((-i\gamma + i\varphi + i\alpha)/4)} - \frac{1}{\sinh((-i\gamma + i\varphi - i\alpha)/4)} \right] e^{-i\omega_0 \rho \cos \gamma} d\gamma. \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] Sommerfeld A. *Mathematische theorie der diffraction*. *Math Ann.* 1896; **47**:317–374.
- [2] A.I. KOMECH, A.E. MERZON, AND J.E. DE LA PAZ MÉNDEZ. *Time-dependent scattering of generalized plane waves by wedges*. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2015, Vol 38, issue 18, pp. 4774-4785.
- [3] KOMECH, ALEXANDER & MERZON, ANATOLI & ESQUIVEL NAVARRETE, A & E. DE LA PAZ MÉNDEZ, J & J. VILLALBA VEGA. *T. Sommerfelds solution as the limiting amplitude and asymptotics for narrow wedges*. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*.(2018) 10.1002/mma.5075