



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS
DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA
DE BORSUK-ULAM PARA
VARIETADES TRIANGULABLES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
**Licenciado en Ciencias Físico
Matemáticas**

PRESENTA:

Juan Salvador Alvarado Calderón

DIRECTOR DEL TRABAJO:

Dr. Edgardo Roldán Pensado

Morelia, Michoacán, Febrero del 2020



Índice general

Agradecimientos	v
Resumen	vii
Abstract	ix
1. Preliminares y definiciones previas	1
1.1. Topología	1
1.2. Homotopía	4
1.3. Complejos Simpliciales	5
1.4. Acciones de Grupos	13
2. Generalización para variedades triangulables	17
2.1. Borsuk-Ulam para variedades triangulables	17
2.2. Corolarios	20
3. Generalización para variedades triangulables	29
3.1. Borsuk-Ulam para variedades triangulables	29
3.2. Corolarios	32
Conclusiones	41
Índice alfabético	42
Bibliografía	44

Agradecimientos

A cada una de las personas que formó parte en este proceso.
A la vida, a la naturaleza y al amor.

Resumen

En este trabajo inspeccionaremos un poco más a detalle el teorema de Borsuk-Ulam y daremos una generalización para variedades triangulables. Se utilizarán herramientas básicas de distintas áreas de matemáticas; todas ellas deberían ser familiares para un estudiante de licenciatura en sus últimos semestres de estudio, por lo cuál puede ser comprendido por una gran cantidad de estudiantes.

Se tiene como objetivo reconocer los elementos abstractos que se presentan en una prueba específica del teorema de Borsuk-Ulam, y revisar hasta dónde pueden ser extendidos; específicamente respondemos a la preguntas ¿El teorema puede únicamente ser usado para Esferas? y ¿La función debe ser antipodal? Mostrando ejemplos de hasta dónde es posible usar el teorema en situaciones donde Borsuk-Ulam no puede ser utilizado.

Haciendo uso del concepto de variedades triangulables podemos tener acceso a herramientas de distinta áreas, dado que las triangulaciones son en realidad complejos simpliciales; los cuales, a su vez, pueden ser vistos como espacios topológicos, o como objetos combinatorios abstractos.

Palabras clave: Topología, álgebra, combinatoria, geometría, grupos.

Abstract

In this work we will analyze some consequences of the Borsuk-Ulam theorem, and we will give a generalization for triangulable manifolds.

Our objective is recognise the abstract elements in an specific probe of the Borsuk-Ulam theorem, and extend them as much as possible. We show some examples on how far we can use our generalization on situations where the Borsuk-Ulam theorem can not be used.

Capítulo 1

Preliminares y definiciones previas

En este capítulo se hablará de las herramientas matemáticas necesarias para poder desarrollar el problema central. Éstas son muy variadas pasando por la geometría analítica, el álgebra lineal, el análisis real, pero especialmente la combinatoria, la topología y la teoría de grupos.

1.1. Topología

En esta sección daremos los conceptos básicos de la topología, rama de las matemáticas que, intuitivamente, formaliza el estudio de las propiedades de los cuerpos, o espacios, bajo transformaciones continuas; esto es deformar el espacio preservando propiedades tales como la conectividad y compacidad, entre otros. Uno de los ejemplos más comunes de una deformación continua es el que lleva una taza a una dona. Este concepto de topología es muy limitado, dado que existen muchos ejemplos de topologías que no pueden ser representados de manera geométrica, aunque es una buena idea como introducción.

Definición 1.1 (Espacio Topológico). Un *espacio Topológico* es una pareja (X, \mathcal{O}) , donde X es un conjunto y $\mathcal{O} \subseteq 2^X$ es subconjunto de los conjuntos de X , cuyos elementos son llamados *conjuntos abiertos*, tales que $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$. Con la propiedad de que la intersección de una cantidad finita de conjuntos abiertos es también un conjunto abierto, de igual manera lo es la unión de una colección arbitraria de conjuntos abiertos.

Por ejemplo, en la topología estándar de la línea real \mathbb{R} , un subconjunto $U \subset \mathbb{R}$ será un abierto si para cada punto en $x \in U$ existe un $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ está contenido en U .

Definición 1.2 (Espacio métrico). Un espacio métrico es un conjunto X con una función distancia asociada (o métrica) $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$. Para toda $x, y, z \in M$ la métrica debe satisfacer que:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Para un espacio métrico, una topología puede ser definida igual que en el ejemplo anterior, un subconjunto $U \subset X$ será un abierto si para cada punto en $x \in U$ existe un $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$ está contenido en U .

Para esta tesis nos enfocaremos en subespacios topológicos de algún \mathbb{R}^d , y por consecuente usaremos topologías definidas por su métrica usual, la cuál está definida como:

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Sea (X, O) un espacio topológico. Cada subconjunto $Y \subset X$ define un subespacio topológico con el par $(Y, U \cap Y : U \in O)$. De ahora en adelante nos restringiremos a espacios topológicos que cumplan ser *Hausdorff*, esto es, para cuales quiera dos puntos $x, y \in X$ en el espacio topológico, existen conjuntos abiertos disjuntos U, V tal que $x \in U$ y $y \in V$.

Definición 1.3 (Función continua). Sean (X_1, O_1) y (X_2, O_2) espacios topológicos, una función $f : X_1 \rightarrow X_2$ es llamada *continua* si las preimágenes de conjuntos abiertos son abiertos. También son llamados *mapeos*.

Como el ejemplo más común, tenemos los mapeos de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuos del estilo “epsilon-delta”: Para cada $x \in \mathbb{R}$ y cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que todos los elementos de una δ -vecindad de x , son mapeados a una ϵ -vecindad de $f(x)$. De aquí cada abierto en la imagen tiene como preimagen un abierto, lo cuál es la definición de ser un mapeo continuo.

Definición 1.4 (Homeomorfismo). Un *homeomorfismo* de espacios topológicos (X, O_1) y (X_2, O_2) es una biyección $\phi : X_1 \rightarrow X_2$ tal que para cada $U \subset X_1$, $\phi(U) \in O_2$ si y sólo si $U \in O_1$. Es decir, ϕ una biyección, es un homeomorfismo si y sólo si, ϕ y ϕ^{-1} son continuas. Si existe un homeomorfismo entre dos espacios, X y Y , escribimos $X \cong Y$.

Esta es la herramienta topológica que describe la noción de “ser lo mismo”, es decir, dada la estructura de espacio topológico, esta se preserva por medio de la biyección.

Definición 1.5 (Cerradura, frontera e interior). Un conjunto F en un espacio topológico X se dice *cerrado* si y sólo si $X \setminus F$ es abierto. La *cerradura* de un conjunto $Y \subset X$ en X , denotado por $\text{cl}_X Y$, es la intersección de todos los conjuntos cerrados en X que contienen a Y (el subíndice X se omite si es de antemano entendido). Para $Y \subset \mathbb{R}^d$, tenemos que $\text{cl} Y = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{dist}(x, Y) = 0\}$, donde $\text{dist}(x, Y) := \inf \|x - y\| : y \in Y$. La *frontera* de Y es $\partial Y := \text{cl}(Y) \cap \text{cl}(X \setminus Y)$ y el *interior* es $\text{int}(Y) := Y \setminus \partial Y$.

Un ejemplo pequeño de esto se obtiene al considerar el conjunto $(0, 1)$, entonces $\text{cl}_{\mathbb{R}}(0, 1) = [0, 1]$, $\partial(0, 1) = \{0, 1\}$, y $\text{int}(0, 1) = (0, 1)$

Definición 1.6 (Compacidad). Un conjunto P en un espacio topológico X es compacto si para cada colección \mathcal{U} de conjuntos abiertos con $\bigcup \mathcal{U} = P$, existe una colección finita $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ tal que $\bigcup \mathcal{U}_0 = P$.

Un espacio $X \subset \mathbb{R}^d$ es compacto si y sólo si X es cerrado y acotado. En un espacio métrico compacto, cada sucesión infinita tiene una subsucesión finita convergente.

Definición 1.7 (Función uniformemente continua). Sean (X, d_1) , (Y, d_2) dos espacios métricos, y $f : X \rightarrow Y$ una función. Si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que si $|x - y| < \delta$, con $x, y \in X$, entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Una función continua en un espacio métrico compacto es *Uniformemente continua*. Si X es un espacio compacto y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces f alcanza su mínimo; esto es, existe un $x \in X$ con $f(x) \leq f(y)$ para toda $y \in X$.

También es importante mencionar que si $f : M \rightarrow N$ es una función continua entre dos espacios métricos y M es compacto, entonces f es uniformemente continua. (Heine-Cantor)

Todos las definiciones mencionadas en esta sección se pueden verificar en [RS80].

1.2. Homotopía

Las homotopías son, de manera no formal, un método de clasificar regiones por medio del estudio de los diferentes tipos de caminos que pueden ser dibujados en cada región. Estas pequeñas definiciones fueron tomadas de [HP02, Capítulo 0].

Definición 1.8 (Retracto por deformación). Sí X es un espacio y $Y \subset X$ es un subespacio, una *Retracción* de X en Y es una familia $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$ de mapeos continuos $f_t : X \rightarrow Y$ tales que:

- f_0 es el mapeo identidad en X
- $f_t(y) = y$ para toda $y \in Y$ y toda $t \in [0,1]$ (el conjunto Y se mantiene estático.)
- $f_1(X) = Y$

Si se define el mapeo $F : X \times [0,1] \rightarrow X$ como $F(x,t) = f_t(x)$, y éste es continuo, llamamos a tal F un *Retracto por deformación*. Ver 1.1.

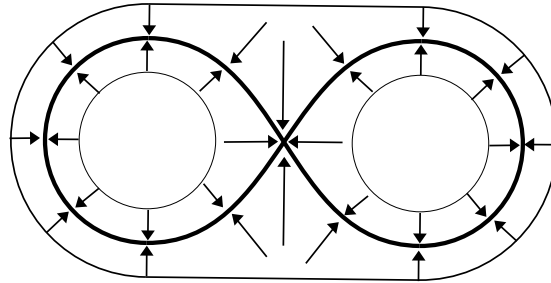


Figura 1.1: Retracto por deformación de la figura de 8.

La intuición detrás de una retracción por deformación es que X puede ser encogido de manera continua a Y . Uno puede pensar en una copia “vieja” de X , la cuál es sólida y permanece sin movimiento, y una “nueva” copia elástica de X , que se encoge dentro la copia vieja.

Definición 1.9 (Homotopía). Dos mapeos continuos $f, g : X \rightarrow Y$ son *homotópicos* (escrito como $f \sim g$) si hay una “interpolación continua” entre ellos; es decir, una familia $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$ de mapeos, $f_t : X \rightarrow Y$ que dependen continuamente de t tal que $f_0 = f$ y $f_1 = g$.

Definición 1.10 (Equivalencia de homotopía). Dos espacios X, Y son equivalentes homotópicamente (o tienen el mismo tipo de homotopía) si hay mapeos continuos $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tales que la composición $f \circ g : Y \rightarrow Y$ es homotópica al mapeo id_Y y $g \circ f \sim id_X$. Ver 1.2.

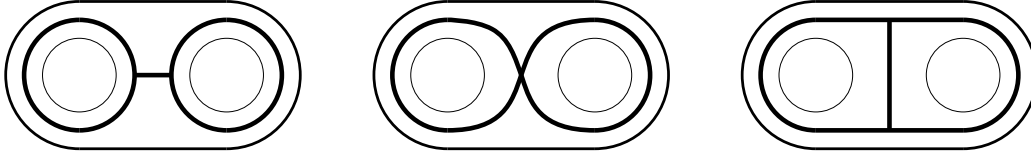


Figura 1.2: Tres figuras equivalentes por homotopía.

1.3. Complejos Simpliciales

Los complejos simpliciales son la herramienta matemáticas central en este trabajo. Dado que pueden ser estudiados tanto como una estructura topológica, geométrica o combinatoria. Lo que nos permite hacer uso indistinto de las herramientas ya disponibles en cualquiera de estos campos.

Definición 1.11 (Simplejo). Un simplejo σ es el casco convexo de un conjunto finito afinmente independiente $A \in \mathbb{R}^d$. Los puntos de A son llamados *Vértices* de σ . Y la *dimensión* de σ es $\dim \sigma := |A| - 1$.

Observación 1.1. La máxima dimensión de un simplejo en R^d es d .

Definición 1.12 (Cara). El *Casco convexo* de un subconjunto arbitrario de vértices de un simplejo σ es una *Cara* de σ . Esto también quiere decir que cada cara es un simplejo.

Para ejemplificar observemos las caras del triángulo: Él mismo, 3 aristas, 3 vértices y el conjunto vacío; juntado todas tenemos un total de 8. Todo simplejo es una unión disjunta del interior relativo de sus caras. Así, para obtener el triángulo (cerrado), debemos considerar la unión de su interior relativo (i.e. un triángulo abierto), 3 segmentos de línea abiertos (las aristas sin puntos en las orillas), y 3 vértices. Véase figura 1.3.

Definición 1.13 (Complejo simplicial). Una familia no vacía Δ de simplejos, es un *complejo simplicial* si se cumplen las siguientes dos condiciones:

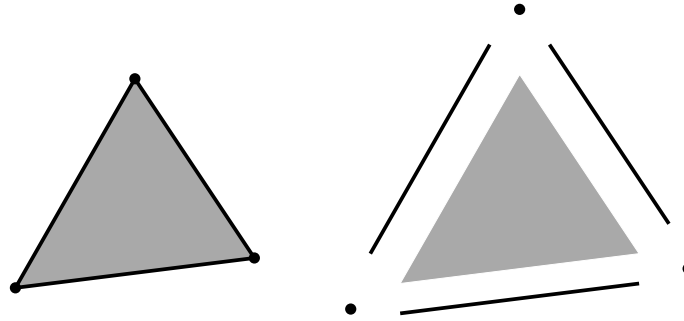


Figura 1.3: Simplejo de dimensión 2.

- Cada cara de cualquier simplejo $\sigma \in \Delta$ es también un simplejo en Δ .
- La intersección $\sigma_1 \cap \sigma_2$ de cuales quiera dos simplejos $\sigma_1, \sigma_2 \in \Delta$ es una cara de ambos σ_1 y σ_2 .

Ver figura 1.4.

La unión de todos los simplejos de un complejo simplicial Δ es el *poliedro* de Δ y se denota como $\|\Delta\|$. La *dimensión* de un complejo simplicial es la mayor de las dimensiones de sus simplejos, es decir, $\dim \Delta := \max\{\dim \sigma : \sigma \in \Delta\}$. El *conjunto de vértices* de Δ , denotado como $V(\Delta)$, es la unión del conjunto de vértices de todos los simplejos de Δ . Cada complejo simplicial contiene el conjunto vacío como una cara.

Los complejos simpliciales que consisten sólo del simplejo vacío se dicen de dimensión -1 . Los complejos simpliciales cero-dimensionales son simplemente configuraciones de puntos, mientras que los complejos simpliciales 1-dimensionales corresponden a gráficas (cuya representación geométrica contiene aristas rectas que no se cruzan). Consideraremos sólo complejos simpliciales finitos, es decir, con una cantidad finita de simplejos.

Definición 1.14 (Soporte). Como en el caso del simplejo de la figura 1.3, los interiores relativos de todos los simplejos de un complejo simplicial Δ forman una partición del poliedro $\|\Delta\|$: Por cada punto $x \in \|\Delta\|$, existe exactamente un simplejo $\sigma \in \Delta$ que contiene x en su interior relativo. Este simplejo es denotado por $\text{supp}(x)$ y es llamado el *soporte* del punto x

Notemos que cada cara Δ_1 de un simplejo Δ es, por si misma, un complejo simplicial. De no serlo alguno de sus elementos fallaría en la propiedad de la contención, lo cuál haría que Δ no fuera un simplejo desde un inicio.

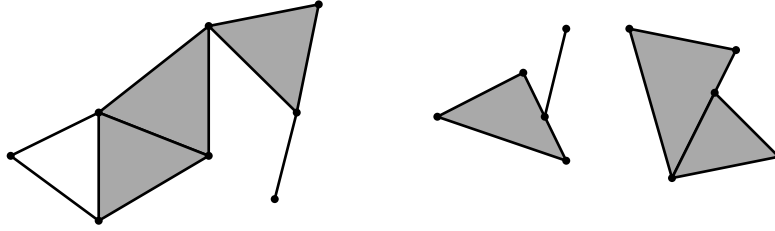


Figura 1.4: A la izquierda una configuración que sí es simplejo. A la derecha dos que no.

Definición 1.15 (Triangulación). Sea X un espacio topológico. Si existe un complejo simplicial Δ tal que $X \cong \|\Delta\|$, entonces se dice que Δ es una *triangulación* de X .

Antes de proseguir hagamos énfasis en que no todas las variedades son triangulables. Esto se detalla adecuadamente en [SS95].

Definición 1.16 (Complejo simplicial abstracto). Un *complejo simplicial abstracto* es un par (V, K) , donde V es un conjunto, y $K \subset 2^V$ es un sistema hereditario de subconjuntos de V ; es decir, se pide que si tenemos $F \in K$ y $G \subset F$, implique que $G \in K$. Los conjuntos en K son llamados simplejos (abstractos). Aquí la *dimensión* se define como $\dim(K) := \max\{\|F\| - 1 : F \in K\}$.

Asumiremos de manera constante que $V = \bigcup K$. De aquí también se entenderá que, cuando hablemos de K , en realidad hablamos de la pareja (V, K) . Cada complejo simplicial geométrico Δ determina un complejo simplicial abstracto K . Los puntos del complejo simplicial abstracto corresponderán a todos los vértices de Δ , es decir, $V := V(\Delta)$, y los conjuntos en el complejo simplicial abstracto son los conjuntos de vértices de los simplejos de Δ . El sistema de conjuntos (V, K) obtenido de esta manera es claramente un complejo simplicial abstracto. Por ejemplo para el complejo simplicial geométrico de la figura 1.5 tenemos el complejo simplicial abstracto de $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Llamaremos a Δ una realización geométrica de K , y al poliedro de Δ será también referido como el poliedro de K .

Definición 1.17 (Politopo Cruz). El politopo cruz d -dimensional, es el casco convexo de los vectores de la base ortonormal estándar y sus negativos.

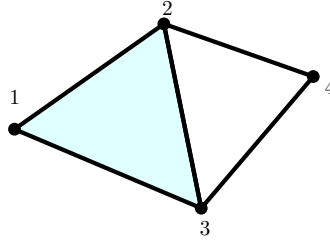
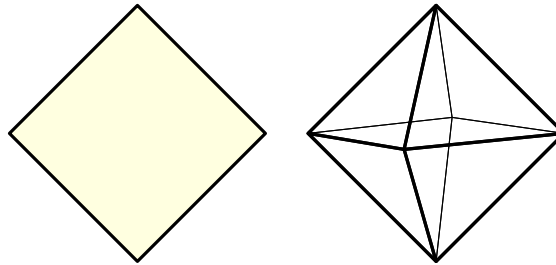


Figura 1.5: Simplejo abstracto.

Es decir, $\text{conv}\{e_1, -e_1, \dots, e_d, -e_d\}$. De manera alternativa, se puede definir como es la bola unitaria de la norma ℓ_1 : $\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_1 \leq 1\}$. Ver 1.6.

También es posible obtener triangulaciones de la esfera por medio de politopos convexos. Un politopo convexo es llamado “simplicial” si todas sus caras propias, es decir todas las caras de dimensión menor a él, son simplejos. Para los politopos convexos 3-dimensionales esto significaría que todas las caras 2-dimensionales son triángulos, como lo son el octaedro regular y el tetraedro. El politopo cruz siempre es simplicial, por lo tanto induce una triangulación para cada n -esfera.

Figura 1.6: Politopo Cruz en \mathbb{R}^2 y en \mathbb{R}^3 .

Ahora introduciremos un algoritmo importante para una *triangulación de un prisma simplicial*. Sea σ un simplejo con vértices v_0, v_1, \dots, v_d , y sea $P = \sigma \times [0, 1]$ el prisma $(d + 1)$ -dimensional con caras σ . Para P denotemos sus vértices como $v'_0, v'_1, \dots, v'_d, v''_0, v''_1, \dots, v''_d$, donde cada v'_i es un vértice del fondo, y cada v''_i es el vértice del tope correspondiente. Véase 1.7. Ahora, para $i = 0, 1, 2, \dots, d$ sea σ_i el simplejo $\text{conv}\{v'_0, v'_1, \dots, v'_i, v''_i, v''_{i+1}, \dots, v''_d\}$ 1.8. (Es decir tomaremos los primeros $i + 1$ vértices del fondo, y los $d + 1 - i$ vértices del tope).

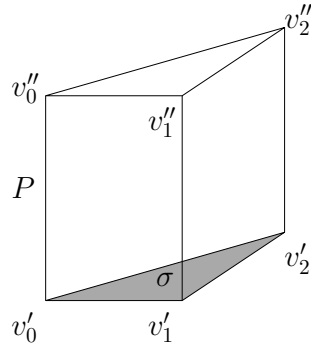


Figura 1.7: Prisma con caras σ .

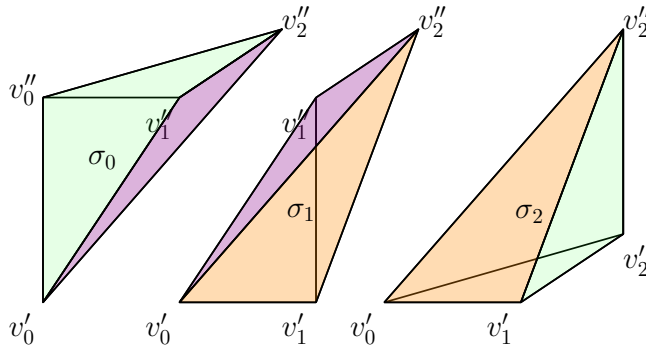


Figura 1.8: Simplejos σ_i que triangulan al prisma formado por el simplejo de dimensión 2.

Procedamos a comprobar que $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_d$ son simplejos $(d + 1)$ -dimensionales, los v\u00e9rtices v' son afinmente independientes pues ya lo eran en σ , de igual manera lo son los v\u00e9rtices v'' . Y v' y v'' tambi\u00e9n lo son entre s\u00ed, entonces cada σ_d es la envolvente convexa de $d + 1$ puntos afinmente independientes. Adem\u00e1s cubren completamente a P y tienen interiores disjuntos. N\u00f3tese que este m\u00e9todo, aplicado de manera reiterada, puede triangular cualquier cilindro que tenga como base un complejo simplicial.

Definici\u00f3n 1.18 (Mapeo simplicial). Sean K y L dos complejos simpliciales abstractos. Un *mapeo simplicial* de K en L es un mapeo $f : V(K) \rightarrow V(L)$ que mapea simplejos en simplejos, es decir, pasa que $f(F) \in L$ para todo $F \in K$.

Un mapeo simplicial biyectivo tal que su inverso tambi\u00e9n es simplicial,

es llamado *isomorfismo* de complejos simpliciales abstractos. Y se denotará como $K \cong L$. Cada complejo simplicial Δ determina un complejo simplicial abstracto. Los puntos del complejo simplicial abstracto corresponden a todos los vértices de los simplejos de Δ , así que tomamos $V := V(\Delta)$ y los conjuntos en el complejo simplicial abstracto son los conjuntos de vértices de los simplejos de Δ .

Cada sistema hereditario de conjuntos finitos puede ser considerado como un complejo simplicial abstracto y define un espacio topológico (el poliedro de la realización geométrica) hasta isomorfismo. Los mapeos simpliciales de complejos simpliciales definen mapeos continuos de los espacios topológicos correspondientes. De manera inversa, si un espacio topológico admite una triangulación, puede ser descrito de manera puramente combinatoria mediante un complejo simplicial abstracto, aunque esta descripción no es única.

Definición 1.19 (Extensión afín de un mapeo simplicial). Sean Δ_1 y Δ_2 complejos simpliciales geométricos, sean K_1 y K_2 sus complejos simpliciales abstractos asociados, y sea $f : V(K_1) \rightarrow V(K_2)$ un mapeo simplicial de K_1 en K_2 . Definimos el mapeo

$$\|f\| : \|\Delta_1\| \rightarrow \|\Delta_2\|,$$

como la *extensión afín* de f , dada por extender afinmente f a los interiores relativos de los simplejos de Δ_1 de la siguiente manera: Si $\sigma = \text{supp}(x) \in \Delta_1$ es el soporte de x , los vértices de σ son v_0, \dots, v_k , y $x = \sum_{i=0}^k \alpha_i v_i$ con $\alpha_0, \dots, \alpha_k \geq 0$ y $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$, entonces definimos

$$\|f\|(x) := \sum_{i=0}^k \alpha_i f(v_i).$$

Primero notemos que el mapeo $\|f\|$ está bien definido, esto debido a que el conjunto $f(v_0), \dots, f(v_k)$ es siempre el conjunto de vértices de un simplejo de Δ_2 . También hereda propiedades de f tales como inyectividad o biyectividad.

Definición 1.20 (Mapeo simplicial con soporte de dimensión n sobre x). Sea $f : V(K) \rightarrow V(L)$ un mapeo simplicial, y sea $f' : \|K\| \rightarrow \|L\|$ el mapeo continuo entre sus poliedros definido por f . Sea $x \in \|L\|$, si

$$\text{mín}\{\dim\{\text{supp}(f'^{-1}(x))\}\} = n,$$

diremos que f es un mapeo simplicial con soporte de dimensión n sobre x . Es decir, cada elemento $y \in f'^{-1}(x)$ está contenido en el interior de un simplejo de dimensión n .

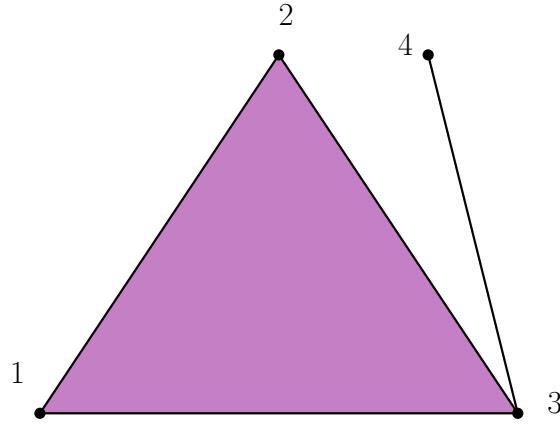


Figura 1.9: Complejo simplicial 2 dimensional.

Teorema 1.2. *Todo complejo simplicial finito K tiene una realización geométrica en algún \mathbb{R}^n*

Si K es un complejo simplicial y $f : V(K) \rightarrow \mathbb{R}^d$ es un mapeo inyectivo tal que $f(F \cup G)$ es afínmente independiente para todo $F, G \in K$, entonces la asignación $F \mapsto \sigma_F := \text{conv}(f(F))$ permite una realización geométrica de K en \mathbb{R}^d . Si escogemos un conjunto afínmente independiente en $\mathbb{R}^{|V(K)|}$ asignando uno a uno cada elemento de $V(K)$, la realización estará garantizada.

Definición 1.21 (Complejo ordenado). El complejo ordenado de un conjunto parcialmente ordenado P , es el complejo simplicial $\Delta(P)$, cuyos vértices son los elementos de P , y sus simplejos son cadenas, es decir, subconjuntos linealmente ordenados, de la forma $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}, x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_k$ en P . Como en la figura 1.10.

La *cara parcialmente ordenada* de un complejo simplicial K es el conjunto parcialmente ordenado $P(K)$, el cual contiene a todos los simplejos no vacíos de K ordenados por la inclusión. Por ejemplo, el complejo simplicial de 1.9 tiene como Cara parcialmente ordenada a 1.10.

Definición 1.22 (División Baricéntrica). Para un complejo simplicial K , el complejo simplicial $\text{sd}(K) := \Delta(P(K))$ es llamado la (primera) división baricéntrica de K .

Más explícitamente, los vértices de $\text{sd}(K)$ son los simplejos no vacíos de K , y los simplejos de $\text{sd}(K)$ son las cadenas de simplejos de K ordenadas

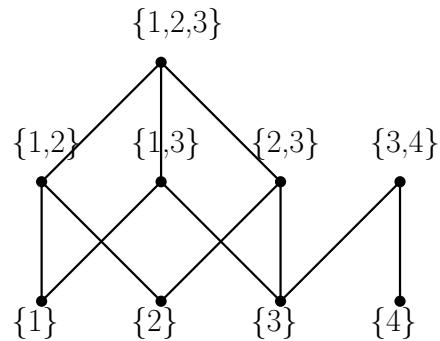


Figura 1.10: Diagrama de Hasse del complejo parcialmente ordenado de 1.9.

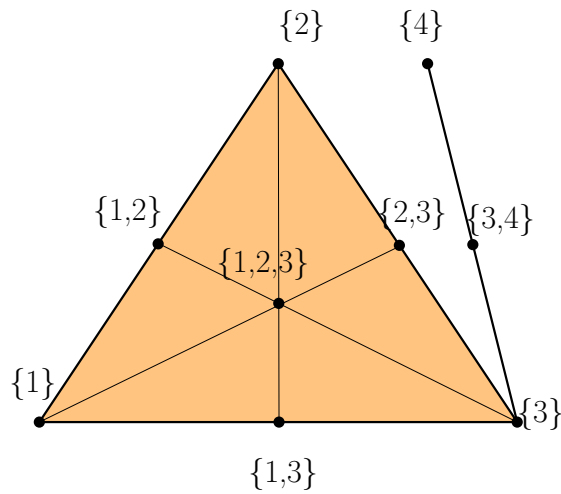


Figura 1.11: División baricéntrica.

por la contención. Dada una realización geométrica de K , podemos poner los vértices de $sd(K)$ correspondiente al simplejo γ en el baricentro (o centro de gravedad) de σ , como se hizo en la imagen 1.11, y como es de esperarse, $\|sd(K)\|$ siempre es homeomorfo a $\|K\|$.

Los conceptos definidos en esta sección se basaron en [Mau96, Capítulo 1] y [Mat03, capítulo 1].

1.4. Acciones de Grupos

Definición 1.23 (Grupo). Un conjunto no vacío de elementos G se dice que forma un *grupo* si en él está definida una operación binaria, a la cual llamamos producto, denotada por $*$ tal que:

- $a, b \in G$ implica que $a * b \in G$.
- $a, b, c \in G$ implica que $a * (b * c) = (a * b) * c$.
- Existe un elemento $1 \in G$ (llamado elemento neutro) tal que para todo $a \in G$ tenemos que $a * 1 = 1 * a = a$, Para todo $a \in G$.
- Para todo $a \in G$ existe un elemento $a^{-1} \in G$ llamado *inverso* de a , tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$.

Por practicidad se denota únicamente G para referirnos a $(G, *)$ y ab en lugar de $a * b$.

Definición 1.24 (Orden). Al número de elementos de un grupo G lo llamamos el orden y se denota por $|G|$. Si $|G| < \infty$ decimos que es un grupo finito.

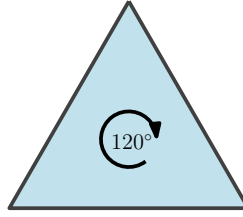
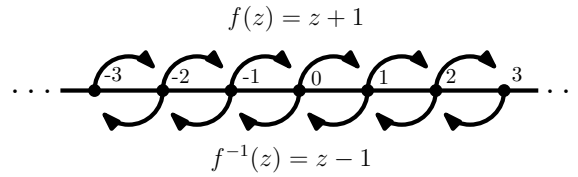
De aquí en adelante asumiremos que cada grupo es de orden finito. A un grupo de orden finito también se le llama grupo finito.

Definición 1.25 (Acción de grupo). Una acción de un grupo G sobre un conjunto X es una función $\phi : G \times X \rightarrow X$, para la cual usamos la notación gx , que satisface lo siguiente:

- Para todo $x \in X$ se tiene que $1x = x$, donde 1 es la identidad de G .
- Para todo $g, h \in G$ y para todo $x \in X$, se tiene que $(gh)x = g(hx)$.

Si existe una acción de un grupo G sobre un conjunto X , a X se le denomina G -conjunto. Para ejemplificar consideremos el triángulo equilátero y un giro de 120° en el centro. Ver figura 1.12.

Definición 1.26 (Acción Libre). Sea X un G -conjunto, si para toda $x \in X$ se cumple que $gx = x$ implica que $g = 1$, decimos que G tiene una *acción libre* sobre X , equivalentemente podemos decir que G actúa libremente, o que es libre.

Figura 1.12: Acción de C_3 en el triángulo.Figura 1.13: Acción libre en \mathbb{Z} .

Un buen ejemplo sería en los números enteros \mathbb{Z} , al utilizar la función $f(z) = z + 1$ y su inverso $f^{-1}(z) = z - 1$.

Definición 1.27 (Órbita). Sea X un G -conjunto. Llamaremos *Órbita* de un elemento $x \in X$ al conjunto $\{gx \in X | g \in G\}$. Es decir, el conjunto de todas las imágenes posibles de algún elemento dada la acción del grupo G . Se denota como $\text{Orb}_G(x)$, aunque por comodidad se suele omitir el subíndice es claro cuál es el grupo.

Es importante remarcar que si un elemento x forma parte de la órbita de otro y , sus órbitas serán el mismo conjunto. Es decir si $y \in \text{Orb}(x)$, entonces $\text{Orb}(y) = \text{Orb}(x)$. La órbita de un conjunto X se define como el conjunto de órbitas de cada elemento $x \in X$. Por ejemplo, para la acción de C_3 en el Triángulo, la órbita de la línea blanca será la terna de líneas blancas (ver figura 1.14).

Definición 1.28 (Función equivariante). Sean X, Y G -conjuntos, una función $f : X \rightarrow Y$ se dice *equivariante* si $f(gx) = gf(x)$ para todo $g \in G$ y toda $x \in X$ (ver figura 1.15).

Si además es continuo, le diremos *mapeo G -equivariante*

Lo conceptos de esta sección se pueden verificar en [AA13].

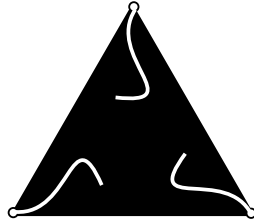


Figura 1.14: Órbita de un subconjunto dado en el triángulo bajo el grupo C_3 .

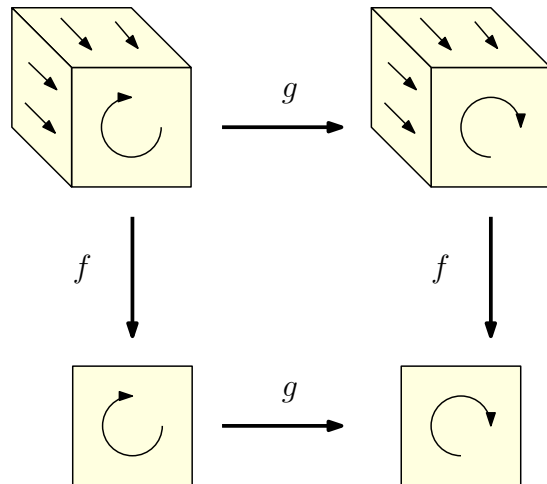


Figura 1.15: Función equivariante, donde conmutan la acción del grupo C_4 y la Proyección a la cara Frontal f .

Capítulo 2

Generalización para variedades triangulables

2.1. Borsuk-Ulam para variedades triangulables

A continuación enunciaremos el resultado central a tratar en esta tesis, una generalización del teorema de Borsuk-Ulam. Este teorema es un caso particular del teorema principal de [Mus12], el no enunciarlo en toda su generalidad nos permitirá dar una demostración mucho más elemental. Ésta se basa en la demostración del Capítulo ??, con sus respectivos ajustes.

Teorema 2.1 (Borsuk-Ulam para variedades triangulables). *Sea M una variedad triangulable de dimensión n . Sea G un grupo que actúa libremente en M y actúa linealmente en \mathbb{R}^n . Si existe $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ un mapeo G -equivariante con soporte de dimensión n sobre 0 , entonces para cada mapeo G -equivariante $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, existe $x \in M$ que satisface que $f(x) = 0$.*

Como en la prueba anterior empecemos construyendo el prisma simplicial de nuestra variedad, el espacio $X := M \times [0, 1]$ será tal prisma. También haremos las dos distinciones importantes de dicho prisma, $M \times \{0\}$ será la *variedad del fondo* (análogo a la esfera del fondo), y a $M \times \{1\}$ la *variedad del tope* en X (análogo a la esfera del tope).

Escogeremos una triangulación finita suficientemente fina T de X que respete la simetría de X dada por μ , en este caso nuestra simetría no será antipodal, estará dada por nuestro grupo G en el siguiente sentido: Para cada

$g \in G$, cada simplejo $\sigma \in T$ es mapeado de manera biyectiva en su simplejo “ g -distante” $\mu(\sigma) \in T$, y además $\sigma \cap \mu(\sigma) = \emptyset$.

Aquí procederemos por contradicción y supondremos que $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ no tiene ceros. Por compacidad, hay un $\epsilon > 0$ tal que $\|f(x)\| \geq \epsilon$ para todo $x \in M$. Definamos ahora $F(x, t) := (1 - t)\nu(x) + tf(x)$, y sea T una triangulación fina de X como la anterior, sea $\bar{F} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ el mapeo que concuerda con F en el conjunto de vértices de T , y es afín a cada simplejo de T , como en la definición de una extensión de mapa simplicial. Dado que F es uniformemente continua, podemos asumir que $\|F(y) - \bar{F}(y)\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ para toda $y \in X$, ya que T es suficientemente fina. Esto quiere decir que con tal \bar{F} podremos trabajar con pedazos de segmentos definidos para el interior de cada simplejo, y estos simplejos estarán tan próximos a la función como nosotros decidamos, es decir, podemos pensar que \bar{F} , que es lineal, es tan F como lo queramos. Así:

$$\bar{F} \text{ no tiene ceros en la variedad del tope.} \quad (2.1)$$

Como nuestra ν ya es afín, \bar{F} coincide con ν en el fondo de la variedad, es por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} \bar{F} \text{ tiene exactamente } |G| \text{ ceros en la variedad del fondo, localizados} \\ \text{en el interior de un simplejos } n\text{-dimensionales de } T_b. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Sea \hat{F} un mapeo surgiendo por una perturbación G -simétrica suficientemente pequeña de \bar{F} . A saber, escogemos el mapa $P_0 : V(T) \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface que $P_0(\mu(v)) = gP_0(v)$ para cada $v \in V(T)$. Después, como en la demostración anterior, extendemos P_0 afínmente en cada simplejo de T , obteniendo el mapeo $P : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, y fijamos $\hat{F} = \bar{F} + P$. Notemos que si todos los valores de P_0 están suficientemente próximos a 0, entonces el mapeo perturbado \bar{F} tiene las propiedades 3.1 y 3.2. De hecho, si \bar{F} no tiene ceros en algún simplejo de $T_t \cap T_b$, entonces, \hat{F} tampoco tiene ceros ahí si la perturbación es suficientemente pequeña. Más aún, si σ es un simplejo de T_b que contiene uno de los dos ceros de \bar{F} en la variedad del fondo, entonces \bar{F} restringida a σ mapea σ de manera biyectiva a algún simplejo n -dimensional τ en \mathbb{R}^n conteniendo el origen en su interior, y de nuevo, una perturbación pequeña en el mapeo (que puede ser imaginada como con pequeño movimiento de los vértices de τ) no cambia esta situación. Esto es por fin construir un F con dos propiedades importantes, que el conjunto de vértices sea simétrico bajo G y que sea una extensión afín de estos.

Ahora sea σ un simplejo $(n+1)$ -dimensional, y h un mapeo afín $\sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$. Recordemos que h es *genérico* si $h^{-1}(0)$ no intersecta a σ en ninguna cara de dimensión más pequeña a n , y que en tal caso, $h^{-1}(0)$, o es vacío, o es un segmento en el interior de σ con puntos finales dentro de el interior de dos n -caras (distintas) de σ como en la figura.

Si representamos un mapeo afín $h : \sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ por la $(n+2)$ -tupla de valores en los vértices de σ , todo esos mapeos constituirán un espacio vectorial real de dimensión $n(n+2)$, donde el conjunto de mapeos que son *no genéricos* tiene medida cero.

A continuación llamemos un mapeo perturbado $\widehat{F} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ *genérico* si es genérico en cada complejo de dimensión completa en T . Si T tiene $2N$ vértices, entonces el espacio de todas los posibles mapeos perturbados g -distantes P_0 en $V(T)$ tiene dimensión nN (el valor puede ser escogido de manera libre en un conjunto de N vértices que contienen dos vértices no g -distantes). Los mapeos P_0 que llevan a distintas \widehat{F} que son no genéricos en un simplejo de dimensión completa particular $\sigma \in T$ tienen medida cero en este espacio (aquí necesitamos que v y $\mu(v)$ nunca estén en el mismo simplejo de T). Por lo tanto, perturbaciones arbitrariamente pequeñas P_0 existen tal que \widehat{F} es genérico.

Asumiendo que \widehat{F} es genérico y que sus ceros satisfacen 3.1 y 3.2, se sigue que $\widehat{F}^{-1}(0)$ es un camino localmente poligonal (consistente de segmentos, sin ramas). Esto es porque cada n -simplejo $\tau \in T$ es una cara de exactamente dos $(n+1)$ -simplejos $\sigma, \sigma' \in T$, a menos que $\tau \in T_b \cup T_t$, en tal caso es una cara de exactamente un $(n+1)$ -simplejo $\sigma \in T$. Por consiguiente los componentes de $\widehat{F}^{-1}(0)$ son cero o mas ciclos poligonales cerrados (que no intersectan en las variedades tope o fondo) y $|G|/2$ caminos poligonales γ_g . Tal γ_g consiste en una cantidad finita de segmentos, y conecta \widehat{n} con \widehat{s} (estos son dos ceros de \widehat{F} en la variedad del fondo que tal que $g(\widehat{n}) = \widehat{s}$).

Escogemos la longitud de tal manera que γ_g posee longitud 1, $\gamma_g(z)$ denota el punto de γ_g a distancia z de \widehat{n} (medido sobre γ_g ; $z \in [0, 1]$).

Dado que γ_g es simétrico en μ , tenemos que $\mu(\gamma_g(z)) = \gamma_g(1-z)$, y en particular, $\mu(\gamma_g(\frac{1}{2})) = \gamma_g(\frac{1}{2})$. Esto es imposible, ya que μ no tiene puntos fijos. \square

2.2. Corolarios

En esta sección se dará una breve lista de proposiciones donde se puede utilizar el Teorema de Borsuk-Ulam para variedades triangulables.

Empezaremos verificando que en realidad es una generalización del teorema de Borsuk-Ulam.

Primero hagamos énfasis en que toda asignación antipodal en S^n es una acción libre del grupo C_2 . De la misma forma C_2 actúa linealmente en \mathbb{R}^n relacionando cada vector con su vector inverso, es decir, la acción de todo elemento no neutro será $gx = -x$. Con esto establecido, podremos comprobar el siguiente corolario.

Corolario 2.2 (Borsuk-Ulam). Para cada mapeo C_2 -equivariante $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = 0$.

Vamos a considerar a S^n como su encaje unitario en \mathbb{R}^{n+1} , esto es el conjunto de puntos con distancia unitaria del 0. El siguiente paso es verificar que existe una triangulación que hace que nuestro mapeo C_2 -equivariante propuesto $\nu : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, dado por $\nu(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$ (ver la figura 3.1) tenga soporte sobre 0, para ello ocupamos una base ortonormal de \mathbb{R}^{n+1} , tomemos entonces:

$$v_i = \frac{\sum_0^i -e_j + \sum_i^n e_j}{\|\sum_0^i -e_j + \sum_i^n e_j\|}.$$

donde cada e_i es un elemento positivo de la base canónica.

El convexo de $\{v_1, \dots, v_n, -v_1, \dots, -v_n\}$ es justamente el politopo cruz, el cuál define una triangulación de S^n , y contiene tanto a e_{n+1} como $-e_{n+1}$ en el centro de un simplejo de dimensión n como en la figura 3.2. Y es claro que $\nu(\pm e_{n+1}) = 0$.

Existe $\nu : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un mapeo C_2 -equivariante con soporte de dimensión n sobre 0 \implies para cada mapeo C_2 -equivariante $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, existe $x \in S^2$ que satisface que $f(x) = 0$. \square

Ahora mostraremos que nuestro teorema tiene aplicaciones en otras variedades distintas a S^n , para ello utilizaremos al Toro de dimensión 2, \mathbb{T}^2 .

Primero describiremos una acción de $C_2 \times C_2$ libre en \mathbb{T}^2 . Usaremos la representación de \mathbb{T}^2 como el cociente resultante de \mathbb{R}^2 con la relación de equivalencia $\vec{v} \sim \vec{v} + \vec{v}_1 \sim \vec{v} + \vec{v}_2$, donde $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ son cualquier par de elementos no nulos linealmente independientes. La acción estará definida por

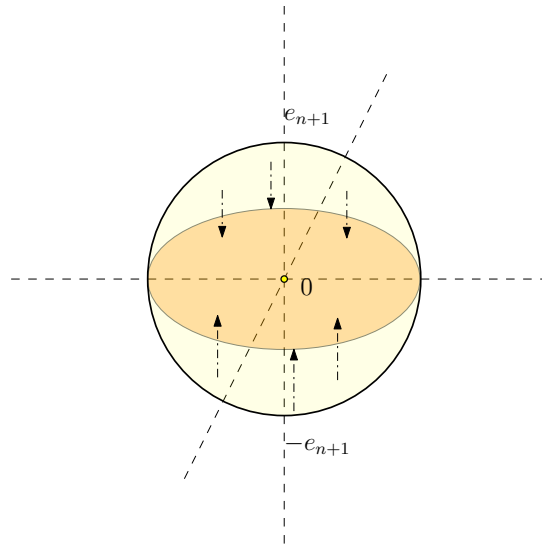


Figura 2.1: Proyección ortogonal ν de una esfera en \mathbb{R}^3 .

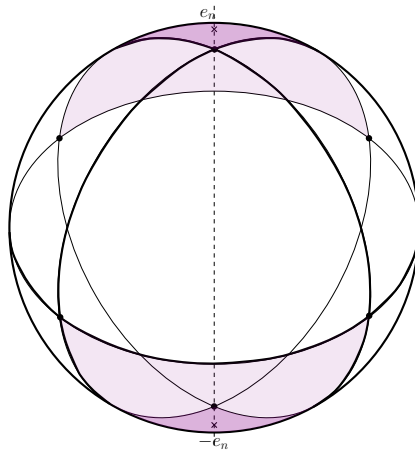


Figura 2.2: Triangulación de S^2 en \mathbb{R}^3 .

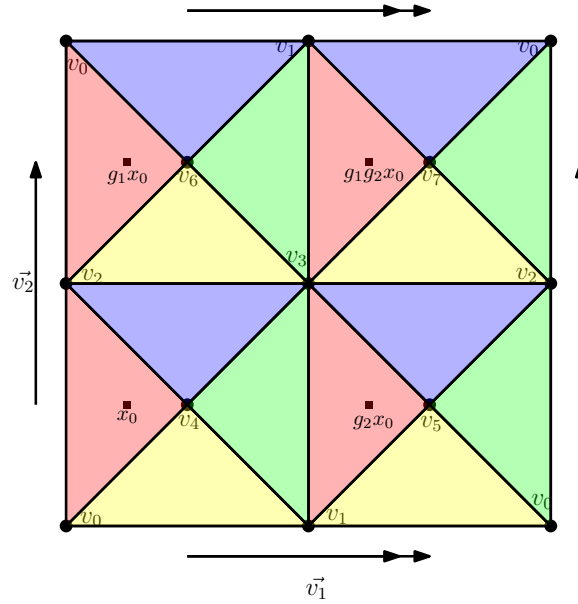


Figura 2.3: Triangulación propuesta de \mathbb{T}^2 para construir ν .

$g_1(x) = x + \frac{\vec{v}_1}{2}$, y $g_2(x) = x + \frac{\vec{v}_2}{2}$. Así $\langle g_1, g_2 \rangle \cong (C_2 \times C_2)$ actúa libremente en \mathbb{T}^2 .

Ahora mostremos una acción de G lineal en \mathbb{R}^2 . Para $\vec{v} = (x, y)$, tomemos $g_1(\vec{v}) = (-x, y)$ la reflexión en el eje horizontal, $g_2(\vec{v}) = (x, -y)$ la reflexión en el eje vertical, así $\langle g_1, g_2 \rangle \cong (C_2 \times C_2)$ define una acción lineal sobre \mathbb{R}^2 .

Corolario 2.3. Para cada mapeo $(C_2 \times C_2)$ -equivariante $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, respecto a las acciones de grupo descritas anteriormente, existe $x \in \mathbb{T}^2$ tal que $f(x) = 0$.

Construyamos ahora ν con soporte de dimensión 2 sobre 0. Primero construyamos una triangulación de \mathbb{T}^2 como se muestra en la figura 3.3.

Como ν debe ser equivariante, sólo hace falta definir $\nu(v_0)$ y $\nu(v_4)$, y verificar que su extensión afín realmente tenga soporte sobre 0; en la figura 3.4 se muestra una selección que cumple con tales propiedades, notemos que el mapeo es en realidad la sobreposición de las cuatro imágenes.

Así, existe $\nu : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un mapeo $(C_2 \times C_2)$ -equivariante con soporte de dimensión 2 sobre 0 \implies para cada mapeo $(C_2 \times C_2)$ -equivariante $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, existe $x \in \mathbb{T}^2$ que satisface que $f(x) = 0$. \square

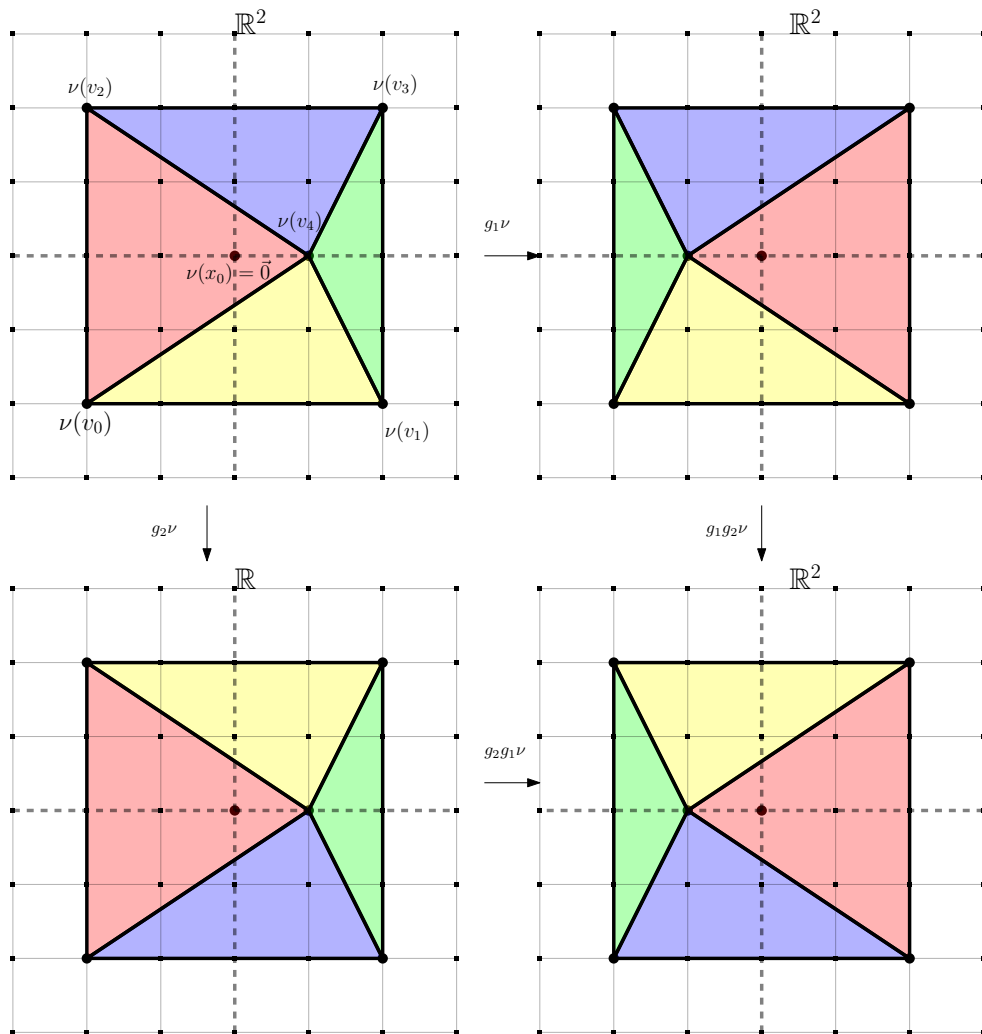


Figura 2.4: ν para \mathbb{T}^2 .

Antes de continuar introduciremos un concepto útil, el *cubo n -dimensional* en \mathbb{R}^n , denotado como \square^n , es la envolvente convexa del conjunto dado por las permutaciones en el signo de $(\pm\alpha, \pm\alpha, \dots, \pm\alpha)$. Ahora llamaremos *bandera* a una cadena de incidencia maximal, es decir, $\mathcal{F}_0 \prec \mathcal{F}_1 \prec \dots \prec \mathcal{F}_n$ donde cada \mathcal{F}_i es una faceta i -dimensional, en el caso de \square^n , $\mathcal{F}_i \cong \square^i$. Si elegimos el centro geométrico de cada \mathcal{F}_i , cada bandera tendrá un conjunto con $n + 1$ elementos asociados, nombrados como $v_{\mathcal{F}_i}$. De aquí es claro que $\text{conv}\{v_{\mathcal{F}_0}, v_{\mathcal{F}_1}, \dots, v_{\mathcal{F}_n}\}$ es un simplejo n -dimensional, al cuál simplemente llamaremos *bandera geométrica*. Es fácil convencerse de que para \square^n existe una triangulación por banderas. Más detalles de esto pueden verse en [Dav12, Capítulo 5].

Usaremos la representación de \mathbb{T}^n como el cociente resultante de \mathbb{R}^n con la relación de equivalencia $\vec{v} \sim \vec{v} + \vec{v}_1 \sim \dots \sim \vec{v} + \vec{v}_n$, donde $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ son cualquier conjunto de n de elementos no nulos linealmente independientes. Vamos a considerar en este caso, como en el anterior, la acción libre del grupo viene dada por $g_i = \frac{\vec{v}_i}{2}$ para \mathbb{T}^n , pero haremos un pequeño cambio, esta vez \mathbb{T}^n tendrá su punto de origen en $\sum_1^n -\frac{\vec{v}_i}{2}$, con este ajuste, el $\vec{0}$ está justo en el centro geométrico de \mathbb{T}^n , y \mathbb{T}^n se puede describir como un \square^n . Además nos apoyaremos de la acción lineal en \mathbb{R}^n como reflexiones a los hiperplanos perpendiculares a los vectores de la base canónica, descritos como $g_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n)$.

Corolario 2.4. Para cada mapeo $(\prod_1^n C_2)$ -equivariante $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, respecto a las acciones de grupo descritas anteriormente, existe $x \in \mathbb{T}^n$ tal que $f(x) = 0$.

Ahora hay que dar una triangulación junto con una ν con soporte n sobre 0. Dado que nuestro toro tiene centro en 0, podemos agregar los vértices como conjunto dado por las permutaciones de ϕ en $(\phi \frac{\vec{v}_1}{2}, \phi \frac{\vec{v}_2}{2}, \dots, \phi \frac{\vec{v}_n}{2})$, donde $\phi \in \{-1, 0, 1\}$.

A continuación, agregaremos al conjunto de vértices el punto

$$\left(-\frac{\vec{v}_1}{4}, -\frac{\vec{v}_2}{4}, \dots, -\frac{\vec{v}_n}{4}\right)$$

y notemos que al permutar los signos en

$$\left(-\frac{\vec{v}_1}{4} \pm \frac{\vec{v}_1}{4}, -\frac{\vec{v}_2}{4} \pm \frac{\vec{v}_2}{4}, \dots, -\frac{\vec{v}_n}{4} \pm \frac{\vec{v}_n}{4}\right)$$

tendremos la definición de un \square^n con centro en

$$\left(-\frac{\vec{v}_1}{4}, -\frac{\vec{v}_2}{4}, \dots, -\frac{\vec{v}_n}{4}\right).$$

Lo mismo pasará con cada elemento de

$$\left(-\frac{\vec{v}_1}{4} \pm \frac{\vec{v}_1}{2}, -\frac{\vec{v}_2}{4} \pm \frac{\vec{v}_2}{2}, \dots, -\frac{\vec{v}_n}{4} \pm \frac{\vec{v}_n}{2}\right).$$

Con esto hemos dicho que \mathbb{T}^n se puede dividir en 2^n cubos de dimensión n .

Enseguida aplicamos la triangulación por banderas a cada cubo, después escogeremos la imagen de ν de los vértices de una bandera, como un simplejo en \mathbb{R}^n que contiene al 0 en su interior. La extensión afín sera así una $\nu : (\prod^n C_2)$ -equivariante $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con soporte de dimensión n sobre 0 \implies Para cada mapeo $(\prod^n C_2)$ -equivariante $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, existe $x \in \mathbb{T}^n$ tal que $f(x) = 0$. \square

Una de las hipótesis más importantes es que ν tenga soporte sobre 0, en el siguiente ejemplo mostraremos por qué es necesaria tal hipótesis.

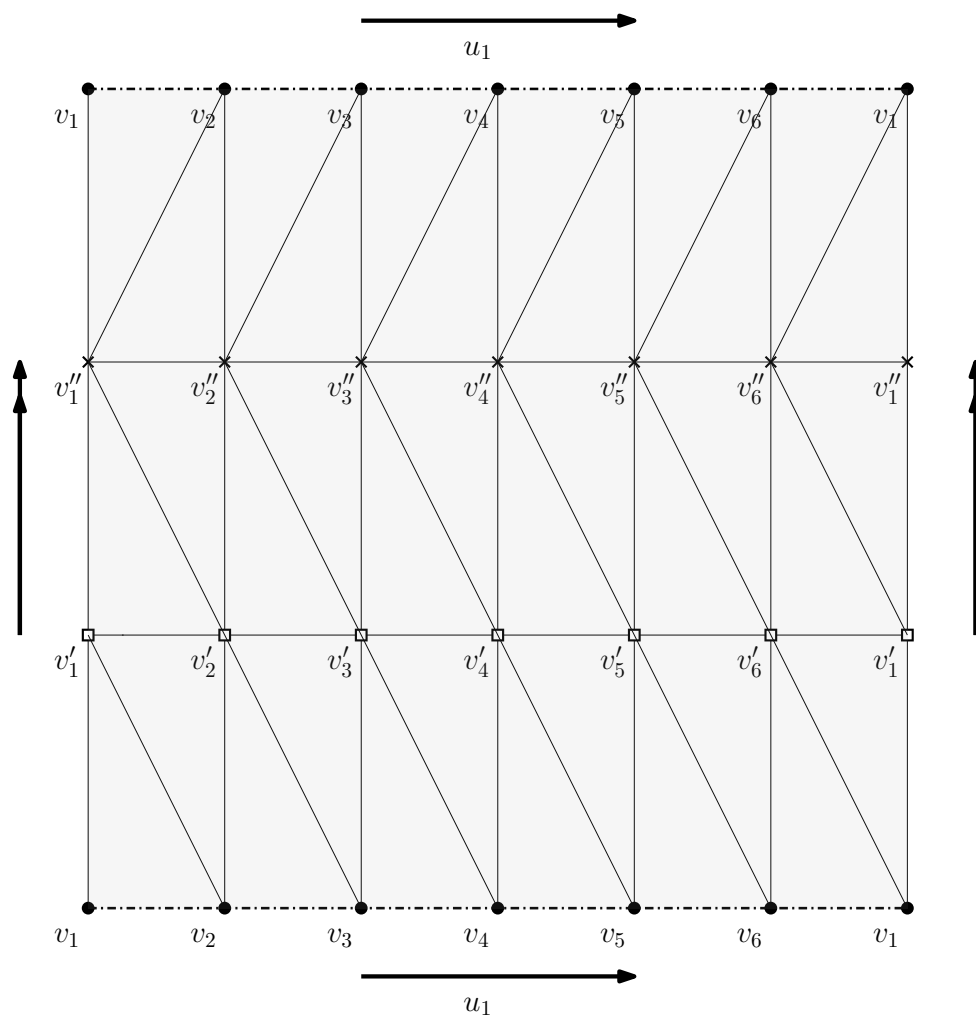
Ejemplo 2.1. *Supongamos que ν no tiene soporte sobre 0.*

Primero tomaremos $G = C_2$. La traslación por $\frac{u_1}{2}$ será nuestra acción en \mathbb{T}^2 , y en \mathbb{R}^2 sera media rotación con centro en 0. Aquí daremos una triangulación de \mathbb{T}^2 , como en la figura 3.5.

Y nuestra ν sera la extensión afín de asignar los vértices como se muestra en la figura 3.6.

Lo siguiente es mostrar que existe f que no tiene 0, tal función sera la extensión afín de asignar los valores de $v_i = v'_i = v''_i \neq 0$ como en la figura 3.7.

De aquí que sea necesario que ν tenga soporte sobre 0.

Figura 2.5: Triangulación de \mathbb{T}^2 .

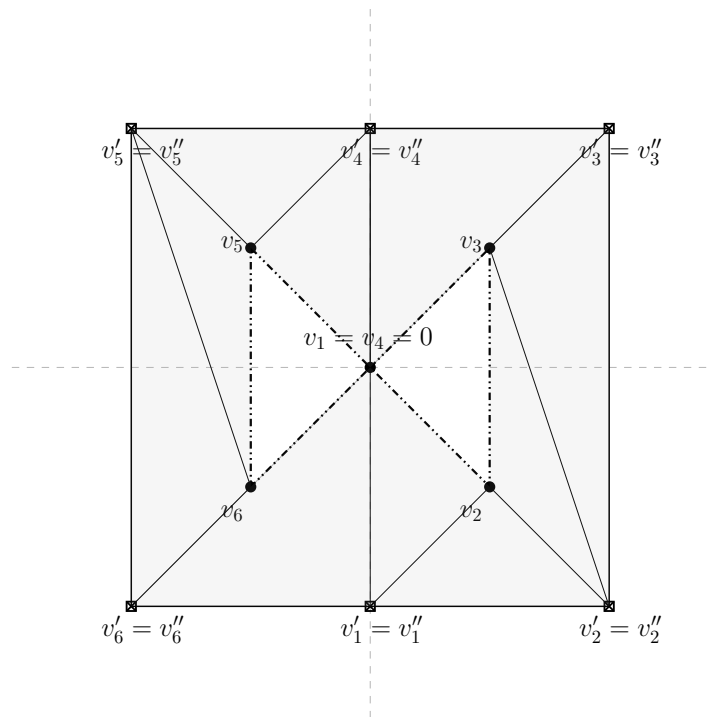


Figura 2.6: Mapeo $\nu: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sin soporte sobre 0.

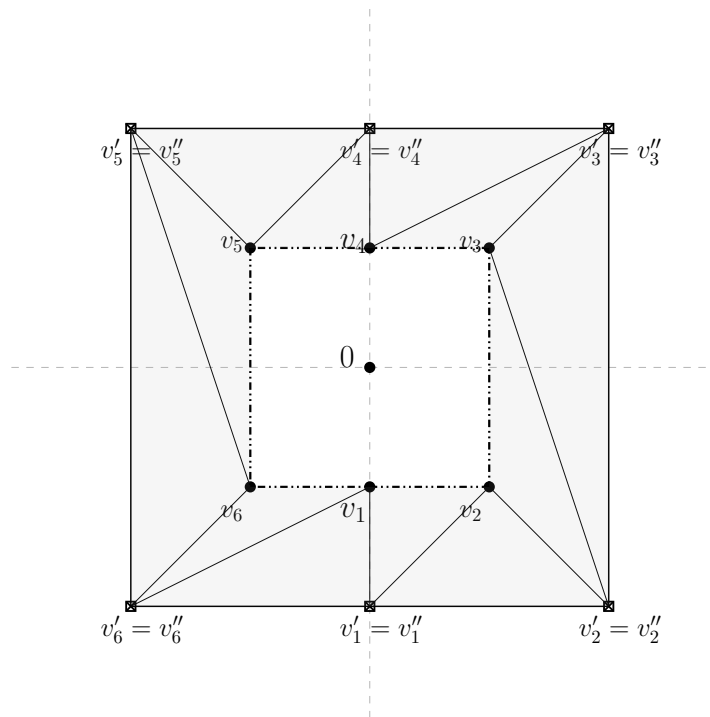


Figura 2.7: Mapeo $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ sin } 0$.

Capítulo 3

Generalización para variedades triangulables

3.1. Borsuk-Ulam para variedades triangulables

A continuación enunciaremos el resultado central a tratar en esta tesis, una generalización del teorema de Borsuk-Ulam. Este teorema es un caso particular del teorema principal de [Mus12], el no enunciarlo en toda su generalidad nos permitirá dar una demostración mucho más elemental. Ésta se basa en la demostración del Capítulo ??, con sus respectivos ajustes.

Teorema 3.1 (Borsuk-Ulam para variedades triangulables). *Sea M una variedad triangulable de dimensión n . Sea G un grupo que actúa libremente en M y actúa linealmente en \mathbb{R}^n . Si existe $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ un mapeo G -equivariante con soporte de dimensión n sobre 0 , entonces para cada mapeo G -equivariante $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, existe $x \in M$ que satisface que $f(x) = 0$.*

Como en la prueba anterior empecemos construyendo el prisma simplicial de nuestra variedad, el espacio $X := M \times [0, 1]$ será tal prisma. También haremos las dos distinciones importantes de dicho prisma, $M \times \{0\}$ será la *variedad del fondo* (análogo a la esfera del fondo), y a $M \times \{1\}$ la *variedad del tope* en X (análogo a la esfera del tope).

Escogeremos una triangulación finita suficientemente fina T de X que respete la simetría de X dada por μ , en este caso nuestra simetría no será antipodal, estará dada por nuestro grupo G en el siguiente sentido: Para cada

$g \in G$, cada simplejo $\sigma \in T$ es mapeado de manera biyectiva en su simplejo “ g -distante” $\mu(\sigma) \in T$, y además $\sigma \cap \mu(\sigma) = \emptyset$.

Aquí procederemos por contradicción y supondremos que $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ no tiene ceros. Por compacidad, hay un $\epsilon > 0$ tal que $\|f(x)\| \geq \epsilon$ para todo $x \in M$. Definamos ahora $F(x, t) := (1 - t)\nu(x) + tf(x)$, y sea T una triangulación fina de X como la anterior, sea $\bar{F} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ el mapeo que concuerda con F en el conjunto de vértices de T , y es afín a cada simplejo de T , como en la definición de una extensión de mapa simplicial. Dado que F es uniformemente continua, podemos asumir que $\|F(y) - \bar{F}(y)\| \leq \frac{\epsilon}{2}$ para toda $y \in X$, ya que T es suficientemente fina. Esto quiere decir que con tal \bar{F} podremos trabajar con pedazos de segmentos definidos para el interior de cada simplejo, y estos simplejos estarán tan próximos a la función como nosotros decidamos, es decir, podemos pensar que \bar{F} , que es lineal, es tan F como lo queramos. Así:

$$\bar{F} \text{ no tiene ceros en la variedad del tope.} \quad (3.1)$$

Como nuestra ν ya es afín, \bar{F} coincide con ν en el fondo de la variedad, es por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} \bar{F} \text{ tiene exactamente } |G| \text{ ceros en la variedad del fondo, localizados} \\ \text{en el interior de un simplejos } n\text{-dimensionales de } T_b. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Sea \hat{F} un mapeo surgiendo por una perturbación G -simétrica suficientemente pequeña de \bar{F} . A saber, escogemos el mapa $P_0 : V(T) \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface que $P_0(\mu(v)) = gP_0(v)$ para cada $v \in V(T)$. Después, como en la demostración anterior, extendemos P_0 afínmente en cada simplejo de T , obteniendo el mapeo $P : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, y fijamos $\hat{F} = \bar{F} + P$. Notemos que si todos los valores de P_0 están suficientemente próximos a 0, entonces el mapeo perturbado \hat{F} tiene las propiedades 3.1 y 3.2. De hecho, si \bar{F} no tiene ceros en algún simplejo de $T_t \cap T_b$, entonces, \hat{F} tampoco tiene ceros ahí si la perturbación es suficientemente pequeña. Más aún, si σ es un simplejo de T_b que contiene uno de los dos ceros de \bar{F} en la variedad del fondo, entonces \bar{F} restringida a σ mapea σ de manera biyectiva a algún simplejo n -dimensional τ en \mathbb{R}^n conteniendo el origen en su interior, y de nuevo, una perturbación pequeña en el mapeo (que puede ser imaginada como con pequeño movimiento de los vértices de τ) no cambia esta situación. Esto es por fin construir un F con dos propiedades importantes, que el conjunto de vértices sea simétrico bajo G y que sea una extensión afín de estos.

Ahora sea σ un simplejo $(n+1)$ -dimensional, y h un mapeo afín $\sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$. Recordemos que h es *genérico* si $h^{-1}(0)$ no interseca a σ en ninguna cara de dimensión más pequeña a n , y que en tal caso, $h^{-1}(0)$, o es vacío, o es un segmento en el interior de σ con puntos finales dentro de el interior de dos n -caras (distintas) de σ como en la figura.

Si representamos un mapeo afín $h : \sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ por la $(n+2)$ -tupla de valores en los vértices de σ , todo esos mapeos constituirán un espacio vectorial real de dimensión $n(n+2)$, donde el conjunto de mapeos que son *no genéricos* tiene medida cero.

A continuación llamemos un mapeo perturbado $\widehat{F} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ *genérico* si es genérico en cada complejo de dimensión completa en T . Si T tiene $2N$ vértices, entonces el espacio de todas los posibles mapeos perturbados g -distantes P_0 en $V(T)$ tiene dimensión nN (el valor puede ser escogido de manera libre en un conjunto de N vértices que contienen dos vértices no g -distantes). Los mapeos P_0 que llevan a distintas \widehat{F} que son no genéricos en un simplejo de dimensión completa particular $\sigma \in T$ tienen medida cero en este espacio (aquí necesitamos que v y $\mu(v)$ nunca estén en el mismo simplejo de T). Por lo tanto, perturbaciones arbitrariamente pequeñas P_0 existen tal que \widehat{F} es genérico.

Asumiendo que \widehat{F} es genérico y que sus ceros satisfacen 3.1 y 3.2, se sigue que $\widehat{F}^{-1}(0)$ es un camino localmente poligonal (consistente de segmentos, sin ramas). Esto es porque cada n -simplejo $\tau \in T$ es una cara de exactamente dos $(n+1)$ -simplejos $\sigma, \sigma' \in T$, a menos que $\tau \in T_b \cup T_t$, en tal caso es una cara de exactamente un $(n+1)$ -simplejo $\sigma \in T$. Por consiguiente los componentes de $\widehat{F}^{-1}(0)$ son cero o mas ciclos poligonales cerrados (que no intersecan en las variedades tope o fondo) y $|G|/2$ caminos poligonales γ_g . Tal γ_g consiste en una cantidad finita de segmentos, y conecta \widehat{n} con \widehat{s} (estos son dos ceros de \widehat{F} en la variedad del fondo que tal que $g(\widehat{n}) = \widehat{s}$).

Escogemos la longitud de tal manera que γ_g posee longitud 1, $\gamma_g(z)$ denota el punto de γ_g a distancia z de \widehat{n} (medido sobre γ_g ; $z \in [0, 1]$).

Dado que γ_g es simétrico en μ , tenemos que $\mu(\gamma_g(z)) = \gamma_g(1-z)$, y en particular, $\mu(\gamma_g(\frac{1}{2})) = \gamma_g(\frac{1}{2})$. Esto es imposible, ya que μ no tiene puntos fijos. \square

3.2. Corolarios

En esta sección se dará una breve lista de proposiciones donde se puede utilizar el Teorema de Borsuk-Ulam para variedades triangulables.

Empezaremos verificando que en realidad es una generalización del teorema de Borsuk-Ulam.

Primero hagamos énfasis en que toda asignación antipodal en S^n es una acción libre del grupo C_2 . De la misma forma C_2 actúa linealmente en \mathbb{R}^n relacionando cada vector con su vector inverso, es decir, la acción de todo elemento no neutro será $gx = -x$. Con esto establecido, podremos comprobar el siguiente corolario.

Corolario 3.2 (Borsuk-Ulam). Para cada mapeo C_2 -equivariante $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = 0$.

Vamos a considerar a S^n como su encaje unitario en \mathbb{R}^{n+1} , esto es el conjunto de puntos con distancia unitaria del 0. El siguiente paso es verificar que existe una triangulación que hace que nuestro mapeo C_2 -equivariante propuesto $\nu : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, dado por $\nu(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$ (ver la figura 3.1) tenga soporte sobre 0, para ello ocupamos una base ortonormal de \mathbb{R}^{n+1} , tomemos entonces:

$$v_i = \frac{\sum_0^i -e_j + \sum_i^n e_j}{\|\sum_0^i -e_j + \sum_i^n e_j\|}.$$

donde cada e_i es un elemento positivo de la base canónica.

El convexo de $\{v_1, \dots, v_n, -v_1, \dots, -v_n\}$ es justamente el politopo cruz, el cuál define una triangulación de S^n , y contiene tanto a e_{n+1} como $-e_{n+1}$ en el centro de un simplejo de dimensión n como en la figura 3.2. Y es claro que $\nu(\pm e_{n+1}) = 0$.

Existe $\nu : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un mapeo C_2 -equivariante con soporte de dimensión n sobre 0 \implies para cada mapeo C_2 -equivariante $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, existe $x \in S^2$ que satisface que $f(x) = 0$. \square

Ahora mostraremos que nuestro teorema tiene aplicaciones en otras variedades distintas a S^n , para ello utilizaremos al Toro de dimensión 2, \mathbb{T}^2 .

Primero describiremos una acción de $C_2 \times C_2$ libre en \mathbb{T}^2 . Usaremos la representación de \mathbb{T}^2 como el cociente resultante de \mathbb{R}^2 con la relación de equivalencia $\vec{v} \sim \vec{v} + \vec{v}_1 \sim \vec{v} + \vec{v}_2$, donde $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ son cualquier par de elementos no nulos linealmente independientes. La acción estará definida por

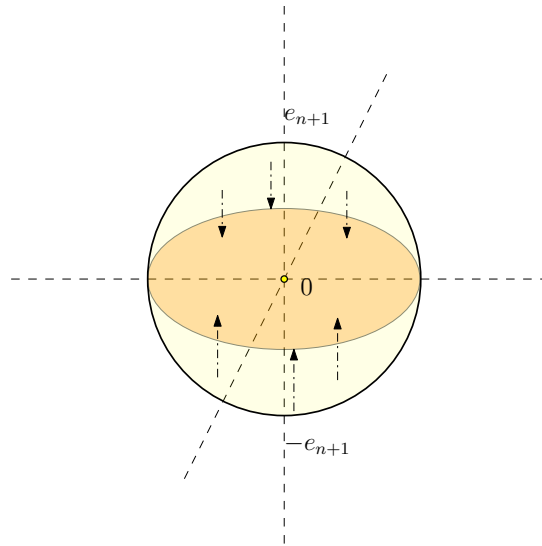


Figura 3.1: Proyección ortogonal ν de una esfera en \mathbb{R}^3 .

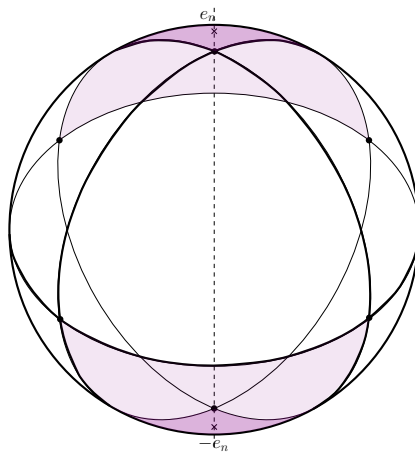


Figura 3.2: Triangulación de S^2 en \mathbb{R}^3 .

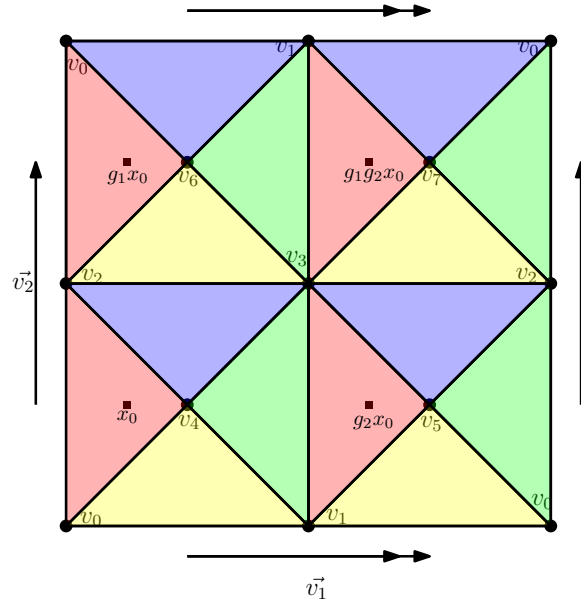


Figura 3.3: Triangulación propuesta de \mathbb{T}^2 para construir ν .

$g_1(x) = x + \frac{\vec{v}_1}{2}$, y $g_2(x) = x + \frac{\vec{v}_2}{2}$. Así $\langle g_1, g_2 \rangle \cong (C_2 \times C_2)$ actúa libremente en \mathbb{T}^2 .

Ahora mostremos una acción de G lineal en \mathbb{R}^2 . Para $\vec{v} = (x, y)$, tomemos $g_1(\vec{v}) = (-x, y)$ la reflexión en el eje horizontal, $g_2(\vec{v}) = (x, -y)$ la reflexión en el eje vertical, así $\langle g_1, g_2 \rangle \cong (C_2 \times C_2)$ define una acción lineal sobre \mathbb{R}^2 .

Corolario 3.3. Para cada mapeo $(C_2 \times C_2)$ -equivariante $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, respecto a las acciones de grupo descritas anteriormente, existe $x \in \mathbb{T}^2$ tal que $f(x) = 0$.

Construyamos ahora ν con soporte de dimensión 2 sobre 0. Primero construyamos una triangulación de \mathbb{T}^2 como se muestra en la figura 3.3.

Como ν debe ser equivariante, sólo hace falta definir $\nu(v_0)$ y $\nu(v_4)$, y verificar que su extensión afín realmente tenga soporte sobre 0; en la figura 3.4 se muestra una selección que cumple con tales propiedades, notemos que el mapeo es en realidad la sobreposición de las cuatro imágenes.

Así, existe $\nu : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un mapeo $(C_2 \times C_2)$ -equivariante con soporte de dimensión 2 sobre 0 \implies para cada mapeo $(C_2 \times C_2)$ -equivariante $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, existe $x \in \mathbb{T}^2$ que satisface que $f(x) = 0$. \square

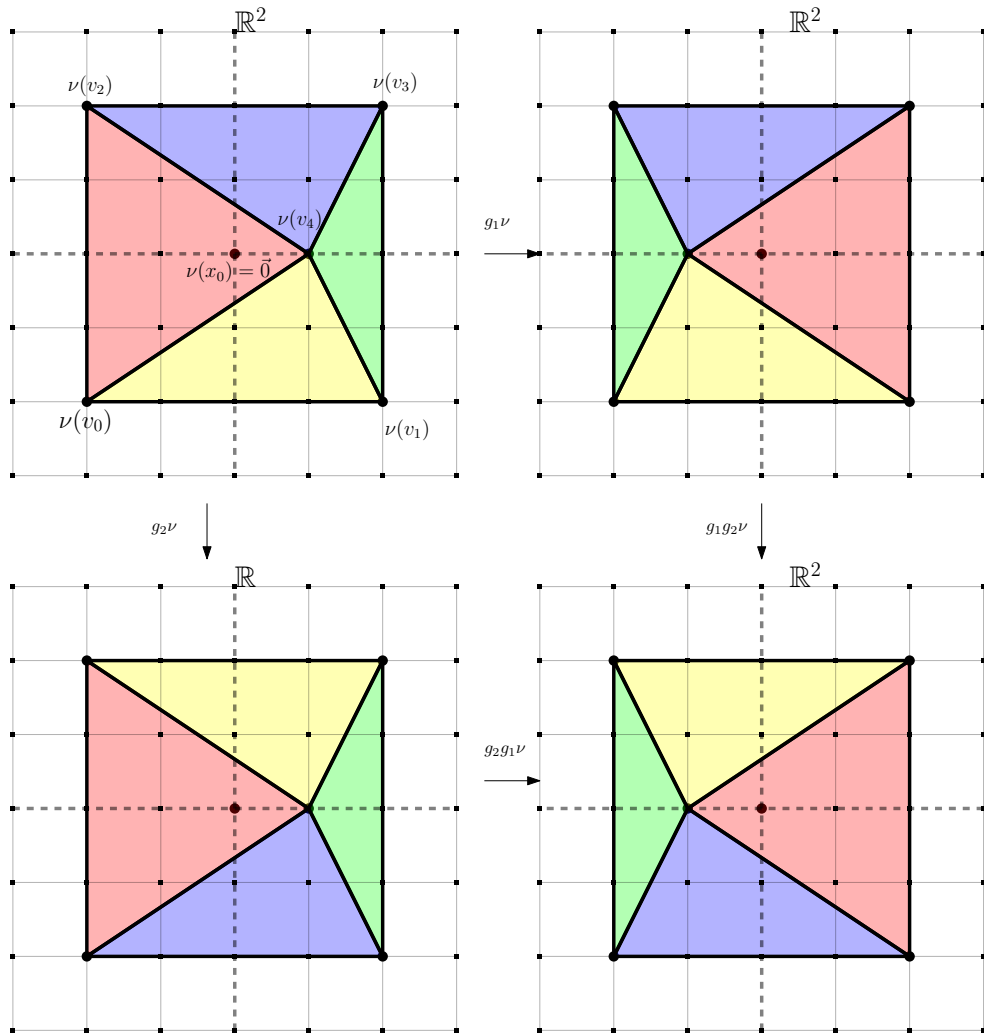


Figura 3.4: ν para \mathbb{T}^2 .

Antes de continuar introduciremos un concepto útil, el *cubo n -dimensional* en \mathbb{R}^n , denotado como \square^n , es la envolvente convexa del conjunto dado por las permutaciones en el signo de $(\pm\alpha, \pm\alpha, \dots, \pm\alpha)$. Ahora llamaremos *bandera* a una cadena de incidencia maximal, es decir, $\mathcal{F}_0 \prec \mathcal{F}_1 \prec \dots \prec \mathcal{F}_n$ donde cada \mathcal{F}_i es una faceta i -dimensional, en el caso de \square^n , $\mathcal{F}_i \cong \square^i$. Si elegimos el centro geométrico de cada \mathcal{F}_i , cada bandera tendrá un conjunto con $n + 1$ elementos asociados, nombrados como $v_{\mathcal{F}_i}$. De aquí es claro que $\text{conv}\{v_{\mathcal{F}_0}, v_{\mathcal{F}_1}, \dots, v_{\mathcal{F}_n}\}$ es un simplejo n -dimensional, al cuál simplemente llamaremos *bandera geométrica*. Es fácil convencerse de que para \square^n existe una triangulación por banderas. Más detalles de esto pueden verse en [Dav12, Capítulo 5].

Usaremos la representación de \mathbb{T}^n como el cociente resultante de \mathbb{R}^n con la relación de equivalencia $\vec{v} \sim \vec{v} + \vec{v}_1 \sim \dots \sim \vec{v} + \vec{v}_n$, donde $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ son cualquier conjunto de n de elementos no nulos linealmente independientes. Vamos a considerar en este caso, como en el anterior, la acción libre del grupo viene dada por $g_i = \frac{\vec{v}_i}{2}$ para \mathbb{T}^n , pero haremos un pequeño cambio, esta vez \mathbb{T}^n tendrá su punto de origen en $\sum_1^n -\frac{\vec{v}_i}{2}$, con este ajuste, el $\vec{0}$ está justo en el centro geométrico de \mathbb{T}^n , y \mathbb{T}^n se puede describir como un \square^n . Además nos apoyaremos de la acción lineal en \mathbb{R}^n como reflexiones a los hiperplanos perpendiculares a los vectores de la base canónica, descritos como $g_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n)$.

Corolario 3.4. Para cada mapeo $(\prod_1^n C_2)$ -equivariante $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, respecto a las acciones de grupo descritas anteriormente, existe $x \in \mathbb{T}^n$ tal que $f(x) = 0$.

Ahora hay que dar una triangulación junto con una ν con soporte n sobre 0. Dado que nuestro toro tiene centro en 0, podemos agregar los vértices como conjunto dado por las permutaciones de ϕ en $(\phi \frac{\vec{v}_1}{2}, \phi \frac{\vec{v}_2}{2}, \dots, \phi \frac{\vec{v}_n}{2})$, donde $\phi \in \{-1, 0, 1\}$.

A continuación, agregaremos al conjunto de vértices el punto

$$\left(-\frac{\vec{v}_1}{4}, -\frac{\vec{v}_2}{4}, \dots, -\frac{\vec{v}_n}{4}\right)$$

y notemos que al permutar los signos en

$$\left(-\frac{\vec{v}_1}{4} \pm \frac{\vec{v}_1}{4}, -\frac{\vec{v}_2}{4} \pm \frac{\vec{v}_2}{4}, \dots, -\frac{\vec{v}_n}{4} \pm \frac{\vec{v}_n}{4}\right)$$

tendremos la definición de un \square^n con centro en

$$\left(-\frac{\vec{v}_1}{4}, -\frac{\vec{v}_2}{4}, \dots, -\frac{\vec{v}_n}{4}\right).$$

Lo mismo pasará con cada elemento de

$$\left(-\frac{\vec{v}_1}{4} \pm \frac{\vec{v}_1}{2}, -\frac{\vec{v}_2}{4} \pm \frac{\vec{v}_2}{2}, \dots, -\frac{\vec{v}_n}{4} \pm \frac{\vec{v}_n}{2}\right).$$

Con esto hemos dicho que \mathbb{T}^n se puede dividir en 2^n cubos de dimensión n .

Enseguida aplicamos la triangulación por banderas a cada cubo, después escogeremos la imagen de ν de los vértices de una bandera, como un simplejo en \mathbb{R}^n que contiene al 0 en su interior. La extensión afín sera así una $\nu : (\prod^n C_2)$ -equivariante $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con soporte de dimensión n sobre 0 \implies Para cada mapeo $(\prod^n C_2)$ -equivariante $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, existe $x \in \mathbb{T}^n$ tal que $f(x) = 0$. \square

Una de las hipótesis más importantes es que ν tenga soporte sobre 0, en el siguiente ejemplo mostraremos por qué es necesaria tal hipótesis.

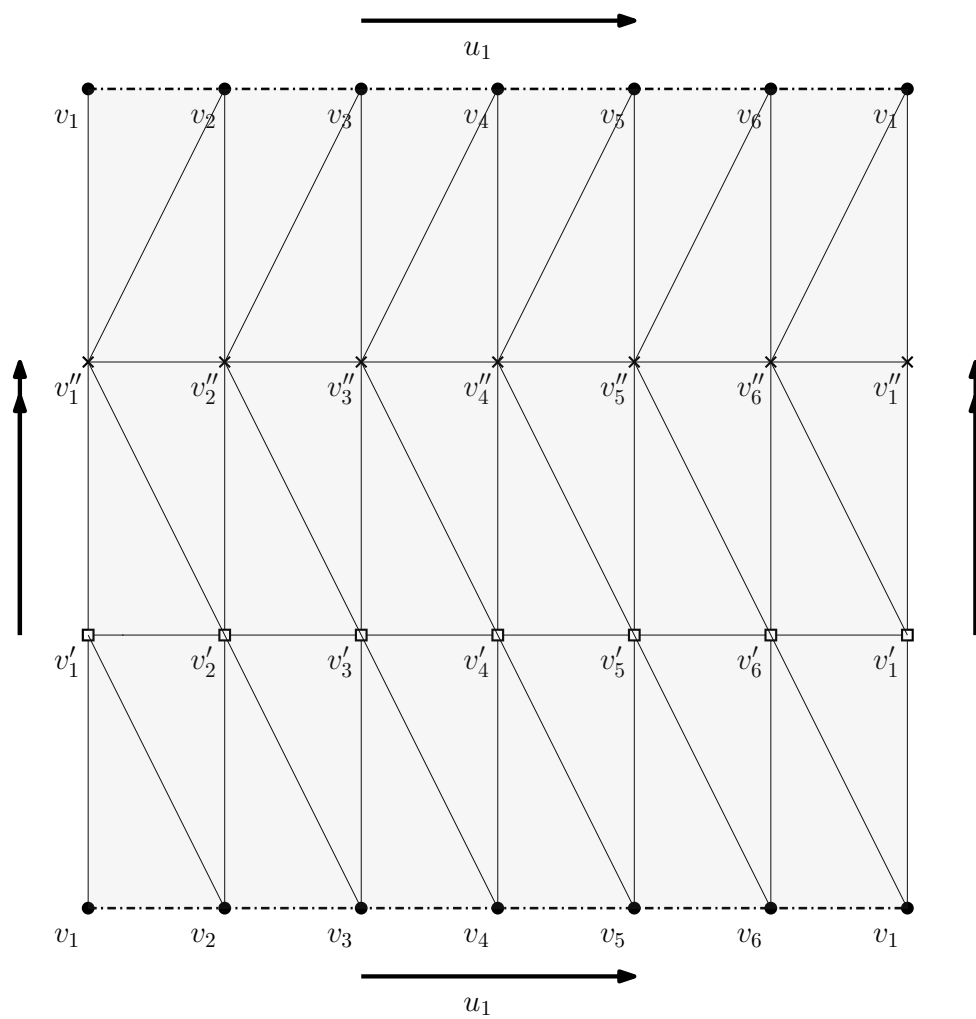
Ejemplo 3.1. *Supongamos que ν no tiene soporte sobre 0.*

Primero tomaremos $G = C_2$. La traslación por $\frac{u_1}{2}$ será nuestra acción en \mathbb{T}^2 , y en \mathbb{R}^2 sera media rotación con centro en 0. Aquí daremos una triangulación de \mathbb{T}^2 , como en la figura 3.5.

Y nuestra ν sera la extensión afín de asignar los vértices como se muestra en la figura 3.6.

Lo siguiente es mostrar que existe f que no tiene 0, tal función sera la extensión afín de asignar los valores de $v_i = v'_i = v''_i \neq 0$ como en la figura 3.7.

De aquí que sea necesario que ν tenga soporte sobre 0.

Figura 3.5: Triangulación de \mathbb{T}^2 .

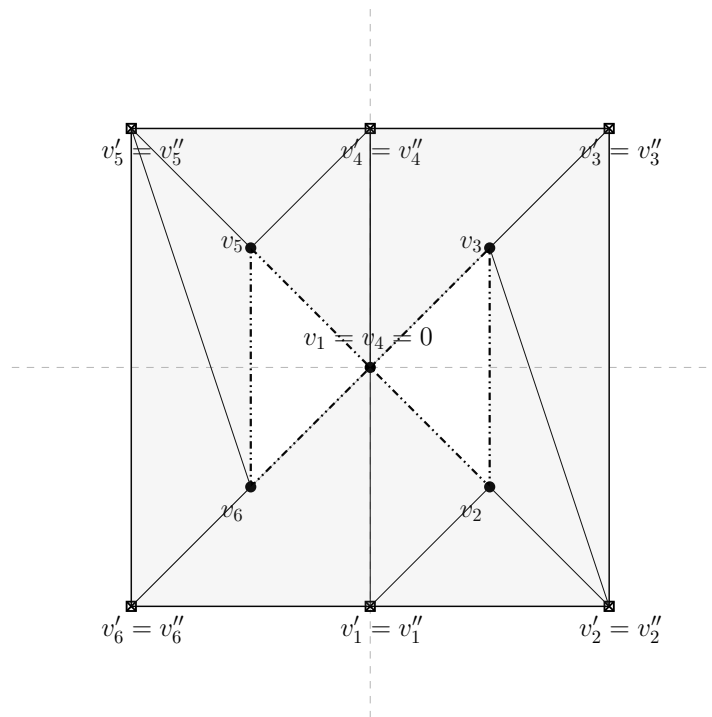


Figura 3.6: Mapeo $\nu: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sin soporte sobre 0.

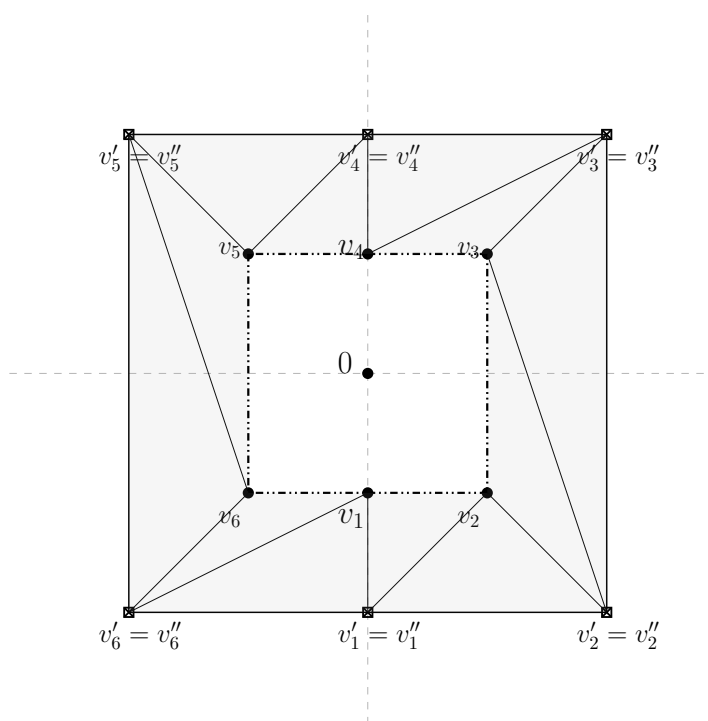


Figura 3.7: Mapeo $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ sin } 0$.

Conclusiones

En mi opinión, uno de los aspectos más llamativo de este trabajo es que, con las mismas ideas con las que se demuestra el teorema de Borsuk-Ulam, se puede demostrar el Teorema de Borsuk-Ulam para variedades triangulables (teorema 3.1) sin tener que recurrir a teoremas más sofisticados de la topología algebraica.

Además, el Teorema de Borsuk-Ulam para variedades triangulables tiene varias aplicaciones que no se siguen de forma sencilla del teorema de Borsuk-Ulam.

El resultado principal de [RS14] y el teorema 2 de [FHM⁺19] se pueden demostrar haciendo uso del Teorema de Borsuk-Ulam para variedades triangulables. En el primer artículo utiliza el teorema en el espacio $SO(d)$ con el grupo $(Z_2)^d$ y para el segundo hay que trabajar en $SO(3)$ con una acción del grupo diédrico de 8 elementos D_4 .

En [BB07] se describen técnicas similares, pero más sofisticadas, del teorema aquí probado. Algunos casos particulares de los teoremas que demuestran siguen directamente del Teorema de Borsuk-Ulam para variedades triangulables.

Quedan por escribir las equivalencias análogas a las que tiene el teorema de Borsuk-Ulam, y revisar si se puede extender el resultado para grupos de orden infinito.

Por otro lado indagar si se podría extender el codominio del mapeo equivariante, y en tal caso explorar qué propiedades topológicas debe tener.

También sería interesante caracterizar las propiedades que deba tener el mapeo equivariante, en particular, si existe alguna relación entre las acciones grupo y sus correspondientes grupos fundamentales y grupos de homotopía, y en el caso del codominio, su relación con el grupo general lineal.

Índice alfabético

- n -cubo, 24, 36
- órbita, 14
- abierto, 2
- acción de grupo, 13
- acción libre, 13
- bandera, 24, 36
- bandera geométrica, 24, 36
- cara, 5
- cara parcialmente ordenada, 11
- casco convexo, 5
- cerrado, 3
- cerradura, 3
- compacidad, 3
- complejo ordenado, 11
- complejo simplicial, 5
- complejo simplicial abstracto, 7
- complejos simpliciales, 5
- conjuntos abiertos, 1
- cubo n -dimensional, 24, 36
- cubo de dimensión n , 24, 36
- dimensión (complejo simplicial), 7
- dimensión (complejos simplicial), 6
- dimensión (simplejo), 5
- división baricéntrica, 11
- equivalencia de homotopía, 5
- espacio métrico, 2
- espacio topológico, 1
- extensión afín, 10
- faceta, 5
- frontera, 3
- función continua, 2
- función equivariante, 14
- función uniformemente continua, 3
- genérico, 19, 31
- grupo, 13
- Hausdorff, 2
- Heine-Cantor, 3
- homeomorfismo, 3
- homotopía, 4
- interior, 3
- isomorfismo de complejos simpliciales
 - abstractos, 9
- métrica, 2
- mapeo, 2
- mapeo equivariante, 14
- mapeo simplicial, 9
- no genéricos, 19, 31
- orden, 13
- poliedro, 6
- politopo cruz, 7
- realización geométrica, 11

-
- retracción, 4
 - retracto por deformación, 4

 - simplejo, 5
 - soporte, 6
 - soporte dimensional sobre x , 10

 - toro dimensión dos, 20, 32
 - triangulación, 7
 - triangulación de un prisma simplicial,
8

 - vértices, 5, 6
 - variedad del fondo, 17, 29
 - variedad del tope, 17, 29

Bibliografía

- [AA13] Adhikari, Mahima Ranjan y Avishek Adhikari: *Basic Modern Algebra with Applications*. Springer India, 2013, ISBN 9788132215998.
- [BB07] Blagojević, Pavle V.M. y Aleksandra S. Dimitrijević Blagojević: *Using equivariant obstruction theory in combinatorial geometry*. *Topology and its Applications*, 154(14):2635 – 2655, 2007, ISSN 0166-8641.
- [Dav12] Davis, M.: *The Geometry and Topology of Coxeter Groups. (LMS-32)*. London Mathematical Society Monographs. Princeton University Press, 2012, ISBN 9781400845941.
- [FHM⁺19] Fradelizi, Matthieu, Alfredo Hubard, Mathieu Meyer, Edgardo Roldán-Pensado y Artem Zvavitch: *Equipartitions and Mahler volumes of symmetric convex bodies*. arXiv preprint arXiv:1904.10765, 2019.
- [HP02] Hatcher, A. y Cambridge University Press: *Algebraic Topology*. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002, ISBN 9780521795401.
- [Mat03] Matoušek, Jiří: *Using the Borsuk-Ulam theorem*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2003, ISBN 3-540-00362-2. Lectures on topological methods in combinatorics and geometry, Written in cooperation with Anders Björner and Günter M. Ziegler.
- [Mau96] Maunder, C.R.F.: *Algebraic Topology*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications, 1996, ISBN 9780486691312.

-
- [Mus12] Musin, Oleg R.: *Borsuk-Ulam type theorems for manifolds*. Proc. Amer. Math. Soc., 140(7):2551–2560, 2012, ISSN 0002-9939. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-2011-11094-3>.
- [RS80] Rudin, W. y M.I.A. Sanchez: *Principios de análisis matemático*. McGraw-Hill Interamericana, 1980, ISBN 9789686046823.
- [RS14] Roldán-Pensado, Edgardo y Pablo Soberón: *An extension of a theorem of Yao and Yao*. Discrete Comput. Geom., 51(2):285–299, 2014, ISSN 0179-5376. <https://doi.org/10.1007/s00454-014-9568-7>.
- [SS95] Steen, Lynn Arthur y J. Arthur Seebach, Jr.: *Counterexamples in topology*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1995, ISBN 0-486-68735-X. Reprint of the second (1978) edition.