



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

**SOLUCIONES EXACTAS DE LA ECUACIÓN
DE KORTEWEG-DE VRIES**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADA EN CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS

PRESENTA
CASANDRA HERREJÓN CALDERÓN

ASESOR
DR. ABDON EDDY CHOQUE RIVERO

MORELIA, MICH. SEPTIEMBRE DE 2020.



A mis padres con gratitud.

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas y cada una de las personas que con su apoyo han hecho posible la realización del presente trabajo. En particular, me gustaría agradecer a mi supervisor de tesis, Dr. Abdón E. Choque Rivero; por todo el apoyo, motivación y atenciones que recibí de su parte. Su dedicación y compromiso que mostro durante la elaboración de este proyecto fueron fundamentales para la terminación del mismo.

También extiendo mi gratitud y reconocimiento a mi familia, en especial a mis padres, por la confianza que me brindaron, por su apoyo incondicional e inquebrantable y por sus palabras de aliento y motivación en todo momento.

Por último, agradezco a mis sinodales: Dr. Homero G. Díaz Marín, Dr. Petr Zhevan-drov Bolshakova, Dr. Francisco J. Domínguez Mota y Dr. Joaquín Estévez Delgado, por el tiempo que dedicaron a la revisión de esta tesis.

Palabras clave: ecuación de Korteweg-de Vries, transformada de dispersión inversa, soluciones exactas a la ecuación KdV, método ABC.

Abstract

In this work we consider the Korteweg-de Vries equation (KdV) which represents a differential equation in partial derivatives of nonlinear third order. The KdV equation has several notable aspects, for example, it has traveling wave type solutions known as solitons. Despite being a non-linear equation, the KdV equation is equivalent to two linear equations, one of which is the stationary Schrödinger equation and the other is the evolution equation. For the solution of the KdV equation, two problems are solved: direct and inverse. The direct problem solution considers the search for certain asymptotic solutions called Jost solutions from the Schrödinger equation. The inverse problem considers the problem of finding a potential that depends on time as a parameter, which is obtained through the Marchenko equation.

Our work focuses on the exact solutions of the KdV equation (these solutions are obtained for the case when the reflection coefficient is zero) using the ABC method consisting of the use of three matrices through which the solution of the problem posed is found. In this work we will show some examples that allow us to see the effectiveness of the ABC method.

Keywords: Korteweg-de Vries equation, inverse scattering transform, exact solutions to the KdV equation, ABC method.

Resumen

En el presente trabajo consideramos la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) que representa una ecuación diferencial en derivadas parciales de tercer orden no lineal. La ecuación KdV tiene varios aspectos notables, por ejemplo, posee soluciones tipo onda viajera conocidos como solitones. A pesar de ser una ecuación no lineal, la ecuación KdV es equivalente a dos ecuaciones lineales, una de las cuales es la ecuación de Schrödinger estacionaria y la otra es la ecuación de evolución. Para la solución de la ecuación KdV se resuelven dos problemas: directo e inverso. La solución del problema directo considera la búsqueda de ciertas soluciones asintóticas llamadas soluciones de Jost de la ecuación de Schrödinger. El problema inverso considera el problema de hallar un potencial que depende del tiempo como parámetro, que se obtiene mediante la ecuación de Marchenko. Nuestro trabajo se enfoca en las soluciones exactas de la ecuación KdV (estas soluciones se obtienen para el caso cuando el coeficiente de reflexión es cero) utilizando el método ABC que consta de la utilización de tres matrices mediante las cuales se halla la solución del problema planteado. En este trabajo mostraremos algunos ejemplos que permitan ver la eficacia del método ABC.

Palabras clave: Ecuación de Korteweg-de Vries, transformación de dispersión inversa, soluciones exactas a la ecuación de KdV, método ABC.

Índice general

Agradecimientos	III
Abstract	IV
Resumen	V
Lista de figuras	VII
Introducción	1
1. La ecuación de Korteweg-de Vries o KdV	5
1.1. Solitones: Antecedentes históricos	5
1.1.1. Ecuación de Korteweg-de Vries	6
1.2. Ondas dispersivas	9
1.3. Balance entre la parte no linealidad y la parte dispersiva de la ecuación KdV	11
1.4. Solución onda viajera de la ecuación KdV	13
2. Ecuación de Schrödinger	16
2.1. Soluciones de Jost de la ecuación de Schrödinger	18

Índice general	VII
2.1.1. Coeficientes de dispersión	24
2.2. Problema inverso de la ecuación de Schrödinger	30
2.2.1. Ecuación de Marchenko	30
2.3. Ejemplos	33
3. La ecuación de KdV como problema inverso	36
3.1. Problema de valor inicial de la ecuación KdV	36
3.2. Método Lax y evolución de los datos de dispersión	38
4. Método ABC	45
4.1. Solución de la ecuación de Marchenko	47
4.2. Solución exacta de la ecuación KdV	49
4.3. Ejemplos	53
Apéndice A	59
Bibliografía	67

Índice de figuras

1.1. Onda solitaria.	6
1.2. Ilustración del método de la transformada de Fourier.	11
1.3. Equilibrio entre la no linealidad y la dispersión.	13
1.4. Solución onda viajera con $c = 1$, $x_0 = 0$ en $t = [0, 10]$	15
3.1. Diagrama del método TDI para la ecuación de KdV.	43
4.1. Solución solitón para $N=1$ con $\kappa_1 = 1$, $c_1 = 1$, $t \in [0, 1]$	54
4.2. Solución solitón $N = 2$ para $t \in [0, 1]$	55
4.3. Solución solitón $N = 3$ para $t = 1$ y $t = 2$	56
4.4. Solución solitón $N = 4$ para $t \in [0, 0.5]$	57
4.5. Solución solitón $N = 5$ para $t \in [0, 0.5]$	58

Introducción

Antecedentes

La ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) es una ecuación diferencial parcial no lineal que modela la propagación de ondas de agua en canales largos, estrechos y poco profundos, fue formulada en el año de 1895 por los científicos holandeses Diederik Johannes Korteweg y Gustav de Vries. La KdV generalmente se escribe en la forma

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

donde los subíndices denotan derivadas parciales. El término u_{xxx} causa dispersión, en general, dando como resultado la ampliación espacial de una onda inicial $u(x, 0)$ a medida que pasa el tiempo. Además de sus soluciones que muestran un comportamiento no lineal y dispersivo, la KdV también posee algunas soluciones especiales, conocidas como soluciones de ondas solitarias o solitones. Una solución de solitón conserva su forma en el tiempo y se mueve hacia la derecha.

El ingeniero escocés John Scott Russell (1808-1882) fue el primero en observar una onda de agua solitaria, que tuvo lugar en 1834 en el Canal de la Unión entre Edimburgo y Glasgow, unos 60 años antes de la formulación de la KdV. Desafortunadamente, la importancia de su descubrimiento no fue entendida por sus contemporáneos. La ecuación de KdV permaneció latente durante mucho tiempo hasta que Kruskal y Zabusky la redescubrieron en 1965 por el problema de Fermi-Pasta-Ulam sobre la conductividad térmica finita en sólidos. Kruskal y Zabusky realizaron experimentos numéricos y encontraron evidencia numérica de las ondas solitarias observadas por Scott Russell, que Kruskal y Zabusky denominaron “solitones”. El descubrimiento fundamental realizado por Gardner, Greene, Kruskal y Miura en 1967 es que si $u(x, t)$ es una solución a la ecuación de KdV, entonces el espectro de Schrödinger con potencial dependiente del tiempo $u(x, 0)$ es independiente del tiempo, y además, la evolución temporal de los datos de dispersión, es decir, el coeficiente de reflexión y transmisión, es una ecuación diferencial lineal simple. Esto dio paso a un método de solución, hoy en día llamado método de dispersión inversa, o método espectral inverso, para clases de ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

Objetivo de la tesis

El objetivo de la tesis es describir de manera entendible para estudiantes de licenciatura la solución de la ecuación KdV mediante el método de la transformación de dispersión inversa. Otro objetivo es formular un texto auto contenido apoyado por ejemplos desde el punto de vista matemático. El presente trabajo posee información primaria que puede ser utilizada en trabajos posteriores en el área de los problemas inversos de ecuaciones integrables.

Desde el punto de vista técnico esta tesis tiene el objetivo de difundir el método del ABC que consiste en la aplicación de tres matrices para la construcción de soluciones exactas de la ecuación KdV. Cabe mencionar que este método ha sido utilizado en otras ecuaciones integrables tales como la ecuación de Schrödinger no lineal, la ecuación de Dirac y ecuaciones integrables que dependen de un parámetro.

Planteamiento del problema

El problema que consideramos es el siguiente: Sea dada la ecuación de Korteweg-de Vries

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

con la condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

- a) Hallar la solución de la ecuación de KdV, $u(x, t)$ para $t > 0$. En particular, hallar soluciones exactas.
- b) Determinar una relación explícita entre el potencial de la ecuación de Schrödinger correspondiente y sus datos de dispersión.
- c) Caracterizar en términos de la triada de matrices (A, B, C) la solución exacta de la ecuación de KdV.
- d) Construir ejemplos de solitones o soluciones exactas para diferentes triadas (A, B, C) .

Metodología

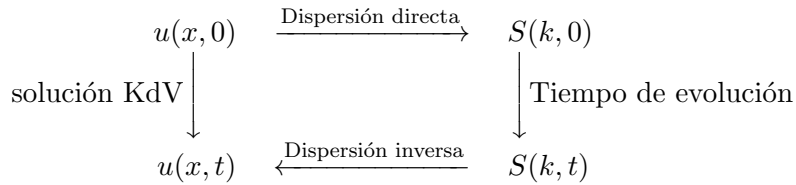
El método que vamos a utilizar se basa en la transformación de dispersión inversa. La idea es que cada ecuación diferencial parcial no lineal integrable está asociada a una ecuación diferencial lineal, donde la solución $u(x, t)$ de la ecuación diferencial parcial no

lineal aparece como un coeficiente en la ecuación diferencial lineal correspondiente. En el caso de la ecuación KdV, esta está relacionada con la ecuación diferencial lineal

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi(x, k) + u(x, t)\psi(x, k) = k^2\psi(x, k), \quad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

la cual es conocida como la ecuación de Schrödinger y $u(x, t)$ es usualmente llamado el potencial. Mediante un análisis espectral de la ecuación (1) se construyen los datos de dispersión $S(k, t)$. El problema de determinar $S(k, 0)$ a partir de $u(x, t)$ para todos los valores de x se conoce como problema de dispersión directa para la ecuación de Schrödinger. Por otro lado, el problema de determinar $u(x, t)$ a partir de $S(k, t)$ se conoce como el problema de dispersión inversa para la ecuación de Schrödinger.

El método de la transformación de dispersión inversa se muestra en el siguiente diagrama:

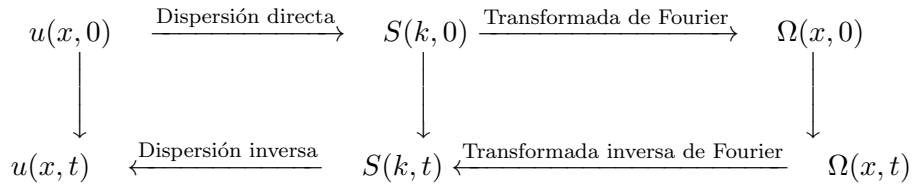


- (i) Resolver el problema de dispersión directa correspondiente para la ecuación de Schrödinger en $t = 0$, es decir, determinar los datos de dispersión iniciales $S(k, 0)$ a partir de la condición inicial $u(x, 0)$.
- (ii) Calcular el tiempo de evolución de los datos de dispersión $S(k, 0) \rightarrow S(k, t)$.
- (iii) Resolver el problema de dispersión inversa correspondiente para la ecuación de Schrödinger en t -fijo, es decir, determinar el potencial $u(x, t)$ a partir de los datos de dispersión $S(k, t)$.

Resolver el problema inverso utilizando la ecuación integral de Marchenko,

$$K(x, y, t) + \Omega(x + y, t) + \int_x^\infty dz K(x, z, t)\Omega(z + y, t) = 0, \quad x < y.$$

La ecuación integral de Marchenko es una ecuación integral lineal asociada con los datos de dispersión a través de una transformada de Fourier. Para encontrar una determinada solución, usamos la relación entre la evolución temporal del núcleo de Marchenko, $\Omega(x + y, t)$ y $u(x, t)$. La relación entre el núcleo de la ecuación de Marchenko y la transformación de dispersión inversa se puede visualizar en el siguiente diagrama:



Usando el núcleo de Marchenko en una forma separable, escrita en términos de una triada de matrices (A, B, C) , podemos encontrar una relación simple entre $K(x, x, t)$ y $u(x, t)$. A través de la relación entre $K(x, x, t)$ y $u(x, t)$ finalmente podemos obtener una fórmula de solución general para $u(x, t)$ en términos de la triada de matrices (A, B, C) . Con esta fórmula de solución, podemos elegir entre una gran clase de tripletes de matrices constantes (A, B, C) para producir una solución exacta de la ecuación KdV.

Contribuciones de la tesis

La contribución principal de esta tesis es dar una versión básica y clara con ejemplos de la solución de la ecuación de KdV mediante el método de la transformación de dispersión inversa. Cabe mencionar que para un buen entendimiento de la presente tesis es necesario aplicar conocimientos de las siguientes áreas: Variable compleja, ecuaciones diferenciales ordinarias, ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, teoría de matrices y principios de la teoría de dispersión. Finalmente hacemos notar que la presente tesis tiene varios ejemplos de soluciones exactas de la KdV (ver Capítulo 4).

Organización de la tesis

La presente tesis está organizada de la siguiente manera. El capítulo 1 es una introducción sobre el descubrimiento de la ecuación KdV y sus principales propiedades. En el capítulo 2 consideramos las soluciones de Jost y las soluciones de estado acotado de la ecuación de Schrödinger (2.9) e introducimos los coeficientes de dispersión y sus propiedades importantes. Así como también presentamos el método de Marchenko para resolver el problema de dispersión inverso para la ecuación de Schrödinger. En el capítulo 3 abordamos el problema del valor inicial de la ecuación KdV y vemos como este puede ser resuelto con ayuda de la transformación de dispersión inversa. Describimos el método Lax e ilustramos como se relaciona la ecuación KdV con la ecuación de Schrödinger. Finalmente, en el capítulo 4 introducimos la solución exacta de la ecuación KdV mediante el método ABC y presentamos algunos ejemplos que ilustran el método.

Capítulo 1

La ecuación de Korteweg-de Vries o KdV

1.1. Solitones: Antecedentes históricos

Las ondas solitarias o, como se conocen ahora, “solitones” fueron observadas por primera vez por J. Scott Russell en 1834 (Russell, 1844) mientras cabalgaba a caballo junto al estrecho Canal de la Unión cerca de Edimburgo, Escocia. Describió sus observaciones de la siguiente manera:

Estaba observando el movimiento de un bote que fue arrastrado rápidamente a lo largo de un estrecho canal por un par de caballos, cuando el bote se detuvo repentinamente, no así la masa de agua en el canal que había puesto en movimiento; se acumuló alrededor de la proa de la embarcación en un estado de violenta agitación, entonces de repente dejándolo atrás, avanzó a gran velocidad, asumiendo la forma de una gran elevación solitaria, un montón de agua redondeada, lisa y bien definida, que continuó su curso a lo largo del canal aparentemente sin cambio de forma o disminución de velocidad. Lo seguí a caballo y lo adelanté aún rodando a una velocidad de unas ocho o nueve millas por hora, conservando su figura original de unos treinta pies de largo y un pie a un pie y medio de altura. Su altura disminuyó gradualmente, y después de una persecución de una o dos millas, la perdí en los devanados del canal. Así, en el mes de agosto de 1834, fue mi primera entrevista casual con ese fenómeno raro y hermoso que he llamado la Onda de la Traslación...

Posteriormente, Russell llevó a cabo experimentos en un tanque de ondas de laboratorio para estudiar este fenómeno con más cuidado. Más tarde llamó a la onda solitaria “la gran onda primaria de traslación”. El trabajo de Russell sobre la onda de traslación

fue el primer estudio detallado de estas ondas localizadas. Entre los resultados de Russell se incluyen los siguientes:

- observó ondas solitarias, que son ondas largas y de aguas someras de forma permanente, por lo que dedujo que existen;
- la velocidad de propagación, c , de una onda solitaria en un canal de profundidad uniforme h viene dada por $c^2 = g(h + a)$, donde a es la amplitud máxima de la onda, h es el nivel medio por encima de un fondo rígido y g es la constante gravitacional.

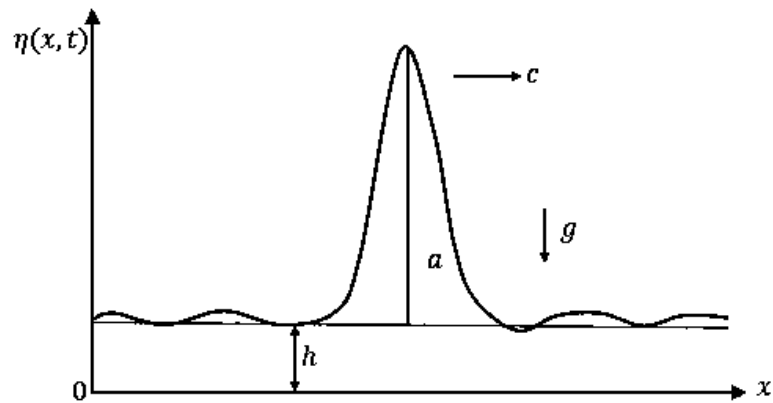


Figura 1.1: Onda solitaria.

Los resultados de Russell provocaron discusión y controversia. Airy, un conocido dinamista de fluidos, creía que la onda de traslación de Russell era un fenómeno lineal (Airy, 1845). Las investigaciones posteriores de Joseph Boussinesq (1871) y Lord Rayleigh (1876) confirmaron las predicciones de Russell. De las ecuaciones de movimiento de un fluido no viscoso, incompresible, con una superficie libre, se derivó el resultado $c^2 = g(h + a)$, y también se mostró que la onda solitaria tiene un perfil dado por

$$\eta(x, t) = a \operatorname{sech}^2[\beta(x - ct)], \quad \beta^{-2} = \frac{4h^2(h + a)}{3a},$$

donde η es la altura de la onda por encima del nivel medio h para cualquier $a > 0$.

1.1.1. Ecuación de Korteweg-de Vries

En 1895 los científicos holandeses Diedrik Korteweg y Gustav de Vries derivaron una ecuación de evolución no lineal que gobierna ondas superficiales largas, unidimensionales

y de pequeña amplitud que se propagan en aguas poco profundas. Esta ecuación explicó el fenómeno observado por J. S. Russell. En su forma original, la ecuación tiene la siguiente forma:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \eta^2 + \frac{3}{2} \alpha \eta + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right), \quad \sigma = \frac{1}{3} h^3 - \frac{Th}{\rho g}, \quad (1.1)$$

donde η es la elevación de la superficie de la onda por encima del nivel de equilibrio h , α es una pequeña constante arbitraria relacionada con el movimiento uniforme del líquido, g es la constante de aceleración de la gravedad, T la tensión superficial y ρ la densidad del agua.

La ecuación (1.1) puede ser escrita en una forma más simple usando la transformación

$$\eta = -\frac{2}{3} \alpha (6u + 1), \quad \tau = \sqrt{\frac{2\alpha^3 g}{\sigma h}} t, \quad \xi = -\sqrt{\frac{2\alpha}{\sigma}} x.$$

De donde obtenemos

$$\boxed{u_\tau - 6uu_\xi + u_{\xi\xi\xi} = 0}, \quad (1.2)$$

donde los subíndices denotan derivadas parciales. El factor 6 en el segundo término es elegido por conveniencia, y puede ser reescalado a través de la transformación $u \rightarrow \beta u$.

El término u_τ describe la evolución temporal de la onda que se propaga en una dirección. Por lo tanto, (1.2) es una ecuación de evolución. El término no lineal $6uu_\xi$ explica el empinamiento de la onda, y el término dispersivo lineal $u_{\xi\xi\xi}$ describe la propagación de dicha onda.

Casi 60 años después de los descubrimientos de Korteweg y de Vries, Enrico Fermi, John Pasta y Stan Ulam (FPU) estaban estudiando la conductividad térmica de los sólidos. Modelaron el sólido como una cadena unidimensional de masas conectadas por resortes débilmente no lineales. En el caso de resortes lineales, la energía en cada modo normal del sistema permanece constante. FPU esperaba que la introducción de la no linealidad condujera a una distribución uniforme de la energía entre los modos normales. Sin embargo, los resultados de los experimentos numéricos realizados por FPU contradecían esta hipótesis.

En 1965, Zabusky y Kruskal explicaron el rompecabezas de Fermi-Pasta-Ulam en términos de soluciones de ondas solitarias de la ecuación de KdV. En su análisis numérico observaron “pulsos de onda solitaria”, denominaron a esos pulsos “solitones” debido a su comportamiento similar a las partículas, y observaron que dichos pulsos interactúan entre sí de manera no lineal, pero que surgen de interacciones no afectadas en tamaño o forma, excepto por algunos cambios de fase. Tales interacciones inusuales entre solitones generaron mucha emoción, pero en ese momento nadie sabía cómo resolver el problema de valor inicial para la ecuación de KdV, excepto numéricamente.

Poco después de este descubrimiento, Gardner, Greene, Kruskal y Miura (1967), (1974) fueron pioneros en un nuevo método de la física matemática. Específicamente, dieron un método de solución para la ecuación de KdV haciendo uso de las ideas de dispersión directa e inversa. En 1968 Lax generalizó considerablemente estas ideas.



DIEDERIK JOHANNES KORTEWEG (1848-1941), hijo de un juez de la ciudad de Hertogenbosch en la parte sur de los Países Bajos comenzó su carrera en la Universidad Tecnológica de Delft. Preparó un doctorado bajo la supervisión de J. D. Van der Waals, quien más tarde obtuvo el Premio Nobel, y fue uno de los físicos más brillantes de este período holandés particularmente notable. Su trabajo de tesis se tituló “Sobre la propagación de ondas en tubos elásticos”. Fue el primer doctor de la Universidad de Amsterdam, a la que recientemente se le había otorgado la capacidad de otorgar este título. Tres años más tarde ganó la primera Cátedra de Matemáticas de esta Universidad, la que ocupó durante 40 años. Trabajó en problemas de termodinámica, mecánica de fluidos y mecánica clásica,

aún colaborando con J. D Van der Waals, pero también con J.K. Van't Hoff. También hizo notables contribuciones en matemáticas puras sobre ecuaciones algebraicas con coeficiente real y sobre las propiedades de superficies cerca de puntos singulares.



Junto con su estudiante de doctorado, GUSTAV DE VRIES (1866-1934), confirmó que las declaraciones de Airy y Stokes sobre la observación de Russell no eran correctas e introdujo la nueva ecuación que ahora lleva sus nombres. Sus soluciones periódicas derivaron utilizando funciones elípticas, pero también mostraron cómo los solitones podían obtenerse en el límite de longitud de onda larga. Aunque calificaron esta ecuación como “muy importante”, no publicaron nada sobre este tema. G. de Vries publicó dos artículos sobre ciclones. Luego se casó con una profesora de literatura y francés y se convirtió en profesor en una escuela secundaria de Haarlem.

Análisis preliminar de la ecuación KdV

En esta sección realizaremos un análisis preliminar de la ecuación de Korteweg-de Vries en términos de su parte no lineal y su parte dispersiva.

La parte dispersiva de la ecuación KdV, esta dada por la expresión

$$\boxed{u_\tau + u_{\xi\xi\xi} = 0}, \quad (1.3)$$

mientras que la parte no lineal esta dada por

$$\boxed{u_\tau - 6uu_\xi = 0}. \quad (1.4)$$

Más adelante demostraremos que existe un balance entre la parte dispersiva y la parte no lineal de la ecuación KdV. Para este análisis requerimos recordar algunas nociones básicas de la ecuación de onda y de la transformada de Fourier.

1.2. Ondas dispersivas

En esta sección recordaremos algunas propiedades básicas sobre ondas lineales, tales como dispersión, número de onda y frecuencia, para ello comencemos definiendo la ecuación de onda.

La ecuación de onda clásica que describe una onda que se propaga con velocidad constante, c , es dada por la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u, \quad (1.5)$$

donde $\Delta \equiv \nabla^2 = (\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2})$ es el operador laplaciano. En una dimensión, la ecuación (1.5) modela la altura de una cuerda pulsada en función del espacio y el tiempo. Más específicamente, la ecuación de onda unidimensional está dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.6)$$

Haciendo el cambio de variable $\eta = x - ct$ y $\xi = x + ct$ y sustituyendo en la ecuación (1.6), encontramos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

integrando dos veces esta igualdad, tenemos que la solución general de la ecuación (1.6) es de la forma

$$u = f(\eta) + g(\xi), \quad (1.7)$$

donde f y g son funciones arbitrarias. Físicamente, f y g representan ondas que se mueven con velocidad constante c y sin cambio de forma a lo largo del eje x .

La ecuación (1.7) se conoce como la solución de D'Alembert de la ecuación de onda en una dimensión. Si tomamos la ecuación (1.6) y factorizamos en consecuencia tenemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = 0.$$

La ecuación lineal de onda más simple es

$$u_t + cu_x = 0,$$

y su solución es $u(x, t) = f(\eta) = f(x - ct)$ que representa una onda que se mueve en la dirección del eje x positivo, con velocidad constante c y sin cambio de forma.

La onda lineal más elemental solución de la ecuación (1.6) es la onda plana o armónica, cuya forma es

$$u(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}, \quad (1.8)$$

donde A , k y ω son constantes, k es el número de onda y se relaciona con la longitud de onda λ , por $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$, ω es la frecuencia angular y A es la amplitud. La frecuencia angular y el número de onda tienen la relación de dispersión $\omega = ck$. En general, la relación de dispersión es una expresión de la forma $\omega = \omega(k)$.

En la propagación unidimensional de ondas, tenemos

$$e^{i(kx - \omega t)} = e^{ik(x - \frac{\omega}{k}t)},$$

que representa una onda viajera con velocidad de onda $c = \frac{\omega(k)}{k}$. Si la velocidad depende realmente del número de onda, entonces ondas con diferentes longitudes se mueven con distinta velocidad. Luego un problema de dispersión de ondas es dispersivo si la velocidad de onda depende del número de onda y, en particular, si la velocidad de onda no es constante. En consecuencia, un problema es no dispersivo, si $\frac{\omega(k)}{k} = cte$, o lo que es lo mismo, $\omega(k) = cte \times k$.

Otros términos importantes en esta teoría son los de velocidad de fase y velocidad de grupo, esto es, la velocidad de fase de una onda de la forma $u(x, t) = f(kx - \omega t)$, con k y ω constantes, se define por la constante

$$c_p := \frac{\omega}{k}$$

y la velocidad de grupo de un bloque o paquete de ondas se define por la relación

$$c_g := \frac{d\omega}{dk}.$$

Notemos que para el caso que estamos tratando, se tiene

$$c_p = \frac{\omega}{k} = \frac{ck}{k} = c = \frac{d\omega}{dk} = c_g,$$

es decir, tenemos una relación no dispersiva. Así, un problema unidimensional de onda es dispersivo si $\frac{d\omega}{dk} \neq cte$, véase [2], [16].

1.3. Balance entre la parte no linealidad y la parte dispersiva de la ecuación KdV

La existencia de una onda solitaria estable como solución de la ecuación de Korteweg-de Vries es una consecuencia de la cancelación de efectos causados por la no-linealidad y la dispersión. En lo que sigue, estudiaremos tales efectos. Para ello analizamos por separado lo que ocurre cuando eliminamos el término no lineal y el término dispersivo.

(i) La ecuación de Korteweg-de Vries linealizada está dada por

$$u_t + u_{xxx} = 0, \quad u(x, 0) = f(x) \in L^1(\mathbb{R}). \quad (1.9)$$

Sustituyendo $u(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$ en la primera ecuación de (1.9), obtenemos la relación de dispersión

$$\omega(k) = -k^3.$$

Notemos que la relación de dispersión es no lineal entre la frecuencia ω y el número de onda k . De las expresiones para las velocidades de fase y grupo tenemos

$$c_p = \frac{\omega}{k} = -k^2 \quad \text{y} \quad \frac{d\omega}{dk} = -3k^2 = c_g,$$

por lo tanto ω es real y $\frac{d\omega}{dk} = -3k^2 \neq cte$, lo cual significa que (1.9) es una ecuación dispersiva. Es decir, la onda cambia su forma a medida que se propaga. Observemos además que $c_g \leq c_p$.

Ahora, resolvemos la ecuación (1.9) mediante el método de la transformada de Fourier. El procedimiento se ilustra es el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} u(x, 0) & \xrightarrow{\text{Transformada de Fourier}} & \hat{u}(k, 0) \\ & & \downarrow \omega(k) \text{ Relación de dispersión} \\ u(x, t) & \xleftarrow{\text{Transformada inversa de Fourier}} & \hat{u}(k, t) \end{array}$$

Figura 1.2: Ilustración del método de la transformada de Fourier.

Recordemos que la transformada de Fourier para la función $u(x, t)$ (ver Apéndice) es definida como

$$\mathcal{F}[u(k, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx = \hat{u}(k, t). \quad (1.10)$$

Aplicando la transformada de Fourier a (1.9),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u_t(x, t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) e^{-ikx} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx = \hat{u}_t(k, t) \\ \mathcal{F}[u_{xxx}(x, t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} u_{xxx}(x, t) e^{-ikx} dx = (ik)^3 \hat{u}(k, t). \end{aligned}$$

Entonces la ecuación (1.9) toma la forma

$$\hat{u}_t(k, x) = ik^3 \hat{u}(k, x).$$

Por lo tanto,

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}(k, 0) e^{ik^3 t}, \quad (1.11)$$

donde

$$\hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Luego, aplicando la transformada inversa de Fourier a (1.11), obtenemos la siguiente solución

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{i(kx+k^3 t)} dk. \quad (1.12)$$

(ii) Consideremos ahora la ecuación no lineal

$$u_t + \varepsilon uu_x = 0, \quad \varepsilon \neq 0, \quad (1.13)$$

que puede ser resuelta por el método de las características. Buscamos curvas

$$x = x(s), \quad t = t(s); \quad (1.14)$$

tales que

$$u(s) = u(x(s), t(s))$$

sea constante a lo largo de tales curvas. Por lo tanto

$$0 = \frac{du}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_t \frac{dt}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} - \varepsilon uu_x \frac{dt}{ds} = u_x \frac{d(x - \varepsilon ut)}{ds}$$

lo que significa que las características son las rectas

$$x - \varepsilon ut = cte. \quad (1.15)$$

Por lo tanto la solución general se puede escribir en forma implícita como

$$u = f(x - \varepsilon ut), \quad (1.16)$$

donde f es una función arbitraria tal que

$$u(x, 0) = f(x).$$

Ello significa que cada punto de la curva $f(x)$ viaja con una velocidad igual a su altura. Los puntos más altos viajan a mayor velocidad que los más bajos. En consecuencia la curva se estrecha y distorsiona. Por lo tanto, podemos decir que la no linealidad de la ecuación conduce a un cambio en la forma de propagación de la onda y a una ruptura de la propia onda.

En el caso de la ecuación KdV, estos efectos se equilibran entre sí de forma que este equilibrio permite que las soluciones de onda se propaguen sin cambiar su forma. Este equilibrio es una propiedad fundamental de las soluciones del tipo solitón que admite ecuación KdV.

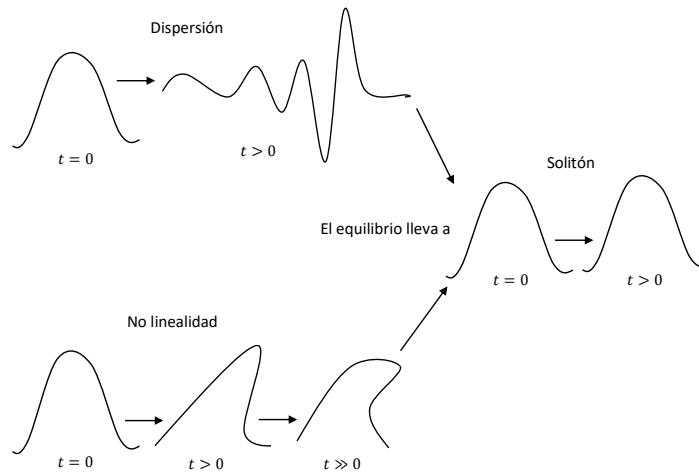


Figura 1.3: Equilibrio entre la no linealidad y la dispersión.

1.4. Solución onda viajera de la ecuación KdV

Estudiaremos ahora las soluciones onda viajera o solitón que admite la ecuación KdV

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad u = u(x, t). \quad (1.17)$$

Definición 1.1. Una onda viajera es una perturbación que se propaga con velocidad constante y con forma “fija” (no se deforma, el medio es no dispersivo).

Definición 1.2. [10] Una solución de onda solitaria de una ecuación diferencial parcial

$$\Delta u(x, u, t) = 0,$$

donde $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ son variables temporales y espaciales, y $u \in \mathbb{R}$ es la variable dependiente, es una solución de la forma

$$u(x, t) = v(x - ct) \equiv v(\xi). \quad (1.18)$$

cuya transición es de un estado asintótico constante como $\xi \rightarrow -\infty$ a (posiblemente) otro estado asintótico constante como $\xi \rightarrow +\infty$.

Para obtener soluciones de onda viajera asumimos que la solución de la ecuación (1.17) es una función de la forma (1.18). Sustituyendo la solución de prueba (1.18) en (1.17) nos lleva a la ecuación diferencial ordinaria

$$-c \frac{dv}{d\xi} - 6v \frac{dv}{d\xi} + \frac{d^3v}{d\xi^3} = 0, \quad (1.19)$$

o equivalentemente

$$\frac{d}{d\xi} \left(-cv - 3v^2 + \frac{d^2v}{d\xi^2} \right) = 0. \quad (1.20)$$

Integrando (1.20), obtenemos

$$-cv - 3v^2 + \frac{d^2v}{d\xi^2} = \alpha \quad (1.21)$$

donde α es la constante de integración. Multiplicando (1.21) por $\frac{dv}{d\xi}$ para obtener una ecuación de primer orden para v , es decir,

$$-cv \frac{dv}{d\xi} - 3v^2 \frac{dv}{d\xi} + \frac{d^2v}{d\xi^2} \frac{dv}{d\xi} = \alpha \frac{dv}{d\xi}.$$

De donde

$$-cv dv - 3v^2 dv + \frac{d^2v}{d\xi^2} dv = \alpha dv.$$

Integrando ambos lados, obtenemos

$$-\frac{c}{2}v^2 - v^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{d\xi} \right)^2 = \alpha v + \beta, \quad (1.22)$$

donde β es una segunda constante de integración. Ya que estamos interesados en soluciones solitón, que están localizadas, requerimos que $v, \frac{dv}{d\xi}, \frac{d^2v}{d\xi^2} \rightarrow 0$ cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$. Físicamente, esto es equivalente a considerar que en una zona muy alejada de la perturbación tanto la función como las derivadas de ésta se anulan. De esto se sigue que $\alpha = \beta = 0$, y por lo tanto (1.22) puede ser escrita como

$$\left(\frac{dv}{d\xi} \right)^2 = v^2(c + 2v). \quad (1.23)$$

Podemos ver que una solución real existe solo si $\left(\frac{dv}{d\xi} \right)^2 \geq 0$, es decir, si $c + 2v \geq 0$. Por separación de variables podemos escribir a (1.23) como sigue

$$\int \frac{dv}{v\sqrt{c+2v}} = \pm \int d\xi. \quad (1.24)$$

Realizando la sustitución

$$v = -\frac{c}{2 \cosh^2 \theta},$$

llegamos a la igualdad

$$-2 \int \frac{d\theta}{\sqrt{c}} = \pm \int d\xi. \quad (1.25)$$

De donde tenemos la solución

$$v(\xi) = -\frac{c}{2 \cosh^2 \frac{\sqrt{c}}{2}(\xi - x_0)},$$

aquí x_0 es una constante de integración. Recordando que $u(x, t) = v(x - ct)$, obtenemos la solución final

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{c}{2 \cosh^2 \frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct - x_0)} \\ &= -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct - x_0) \right]. \end{aligned} \quad (1.26)$$

La solución solitón (1.26) contiene dos constantes arbitrarias, c y x_0 . La constante x_0 determina la posición del solitón en $t = 0$. Además de ser la velocidad de propagación, c determina la amplitud del solitón, los solitones más altos son más estrechos y viajan más rápido. Aunque la solución (1.26) existe para todos $c \geq 0$, es solo hasta un cierto valor de c que la ecuación (1.26) es válido como una aproximación de una onda de agua. Representamos la solución en una gráfica (Fig 1.4), para valores de $c = 1$, $x_0 = 0$ y $t = [0, 10]$.

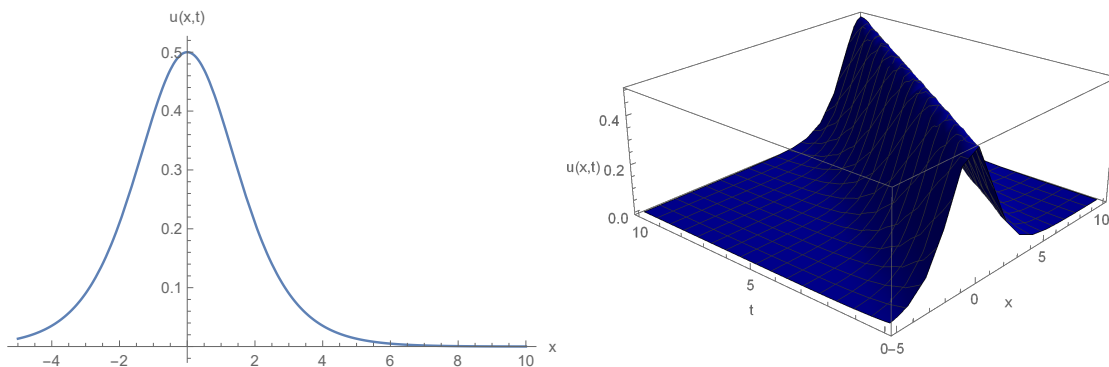


Figura 1.4: Solución onda viajera con $c = 1$, $x_0 = 0$ en $t = [0, 10]$.

Capítulo 2

Ecuación de Schrödinger

La ecuación de Schrödinger, desarrollada por el físico austriaco Erwin Schrödinger (1887-1961) en 1925, es de gran importancia en la teoría de la mecánica cuántica; donde desempeña un papel análogo a la segunda ley de Newton ($F = ma$) de la mecánica clásica. La ecuación de Schrödinger es una ecuación que describe la evolución temporal de una partícula subatómica de naturaleza no relativista en términos de la función de onda $\Psi(x, t)$.

La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para la función de onda $\Psi(x, t)$ tiene la forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) + V(x)\Psi(x, t). \quad (2.1)$$

Aquí $V(x)$ es la función potencial de interacción, \hbar es la constante de Planck reducida ($\hbar = h/2\pi$, $h \simeq 6.62 \times 10^{-34} J \times s$), y m es la masa de la partícula.

Físicamente, $|\Psi(x, t)|^2$, donde $\Psi(x, t)$ es la solución de la ecuación de Schrödinger, es interpretada como la densidad de probabilidad de encontrar una partícula en la posición x al tiempo t . Para establecer la unidad de probabilidad $\Psi(x, t)$ debe satisfacer la condición de normalización siguiente

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1.$$

Asumimos que el potencial $V(x)$ pertenece a $L_1^1(\mathbb{R})$. Donde, $L_1^1(\mathbb{R})$ denota la clase de potenciales medibles tales que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)|V(x)| < \infty. \quad (2.2)$$

Esta clase de potenciales se llama clase de Faddeev en honor al físico y matemático soviético Ludvig Faddeev (1934-2017).

Podemos observar que la ecuación de Schrödinger (2.1) es una ecuación diferencial lineal de primer orden en el tiempo. Por lo tanto, podemos resolver dicha ecuación mediante el método de separación de variables como vemos a continuación.

Sea

$$\Psi(x, t) = \psi(x)T(t). \quad (2.3)$$

Reemplazando (2.3) en (2.1), tenemos

$$i\hbar\psi(x)T'(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x)T(t) + V(x)\psi(x)T(t), \quad (2.4)$$

dividiendo (2.4) entre ψT , tenemos

$$i\hbar\frac{T'(t)}{T(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + V(x) \quad (2.5)$$

ya que la parte izquierda depende solamente de la variable t , y la parte derecha depende de x , entonces

$$i\hbar\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda, \quad (2.6)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + V(x) = \lambda. \quad (2.7)$$

La solución de (2.6) es $T(t) = e^{-i\lambda t/\hbar}$. Usualmente la última igualdad se escribe como

$$T(t) = e^{-i\omega t}$$

donde

$$\omega = \frac{\lambda}{\hbar}.$$

Por otro lado, la ecuación (2.7) reescrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V(x)\psi(x) = \lambda\psi(x) \quad (2.8)$$

se llama ecuación estacionaria de Schrödinger. Generalmente la ecuación estacionaria de Schrödinger se escribe como

$$\boxed{-\psi''(x) + V(x)\psi(x) = k^2\psi(x)}. \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) tiene dos tipos de soluciones; a saber, soluciones de dispersión y soluciones de estados acotados.

- (1) Las soluciones de dispersión son aquellas que consisten en combinaciones lineales de e^{ikx} y e^{-ikx} cuando $x \rightarrow \pm\infty$, y ocurren para $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, es decir, para valores de k reales distintos de cero. Estas soluciones son acotadas para $x \rightarrow \pm\infty$.

- (2) Las soluciones de estado acotado ocurren para $k = i\kappa$, $\kappa > 0$. En general existe una solución que decrece exponencialmente para $x \rightarrow \infty$ y crece exponencialmente para $x \rightarrow -\infty$ y otra que decrece para $x \rightarrow -\infty$ y crece para $x \rightarrow \infty$. Nos interesan soluciones que decrezcan para $x \rightarrow \pm\infty$. Tales soluciones se llaman estados ligados.

Si el potencial $V(x)$ es tal que

$$V(x) \rightarrow 0, \quad \text{para } x \rightarrow \pm\infty, \quad (2.10)$$

entonces para el análisis de las soluciones de (2.9) con potencial del tipo (2.10), se estudia la siguiente ecuación

$$-\psi''(x) = k^2\psi(x), \quad (2.11)$$

conocida como la ecuación no dependiente de Schrödinger. La solución general de la ecuación (2.11) tiene la forma

$$\psi(x) = c e^{ikx} + d e^{-ikx} \quad (2.12)$$

donde c y d son dos constantes arbitrarias.

Tomando en cuenta (2.10) las soluciones de (2.9) para $x \rightarrow \pm\infty$ tienen la siguiente forma

$$\psi(x) = \begin{cases} c_+ e^{ikx} + d_+ e^{-ikx} + o(1), & x \rightarrow +\infty \\ c_- e^{ikx} + d_- e^{-ikx} + o(1), & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (2.13)$$

donde (2.13) significa que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) - c_+ e^{ikx} - d_+ e^{-ikx} &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) - c_- e^{ikx} - d_- e^{-ikx} &= 0. \end{aligned}$$

2.1. Soluciones de Jost de la ecuación de Schrödinger

En esta sección definimos las soluciones de Jost o soluciones de dispersión de (2.9), es decir, las soluciones proporcionales a las funciones $e^{\pm ikx}$ cuando $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$.

Si en (2.13) $c_+ = 1$, $d_+ = 0$, $c_- = \frac{1}{T_l(k)}$, $d_- = \frac{L(k)}{T_l(k)}$ la solución de $\psi(x)$ de (2.13) se llama solución de Jost por la izquierda, se denota como $f_l(k, x)$:

$$f_l(k, x) := \begin{cases} e^{ikx}, & x \rightarrow +\infty \\ \frac{1}{T_l(k)} e^{ikx} + \frac{L(k)}{T_l(k)} e^{-ikx}, & x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (2.14)$$

De manera análoga, si en (2.13) $c_- = 0$, $d_- = 1$, $c_+ = \frac{R(k)}{T_r(k)}$, $d_+ = \frac{1}{T_r(k)}$ la función

$$f_r(k, x) := \begin{cases} \frac{R(k)}{T_r(k)} e^{ikx} + \frac{1}{T_r(k)} e^{-ikx}, & x \rightarrow +\infty \\ e^{-ikx}, & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (2.15)$$

se llama solución de Jost por la derecha.

En (2.14) y (2.15), $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $R(k)$ es el coeficiente de reflexión por la derecha mientras que $L(k)$ es el coeficiente de reflexión por la izquierda; $T_l(k)$ y $T_r(k)$ son los coeficientes de transmisión por la izquierda y por la derecha respectivamente.

La solución de Jost por la izquierda, $f_l(k, x)$, y la solución Jost por la derecha, $f_r(k, x)$, satisfacen las condiciones de contorno respectivas

$$\begin{aligned} e^{-ikx} f_l(k, x) &= 1 + o(1), \\ e^{-ikx} f_l'(k, x) &= ik + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} e^{ikx} f_r(k, x) &= 1 + o(1), \\ e^{ikx} f_r'(k, x) &= -ik + o(1), \quad x \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde la prima denota la derivada con respecto a la coordenada espacial x . Cuando $x \rightarrow \mp\infty$, respectivamente $f_l(k, x)$ y $f_r(k, x)$ son asintóticas a sumas de exponenciales

$$f_l(k, x) = \frac{1}{T_l(k)} e^{ikx} + \frac{L(k)}{T_l(k)} e^{-ikx} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (2.18)$$

$$f_r(k, x) = \frac{1}{T_r(k)} e^{-ikx} + \frac{R(k)}{T_r(k)} e^{ikx} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (2.19)$$

La interpretación física de $f_l(k, x)$ y $f_r(k, x)$ es la siguiente:

La solución $T_l(k)f_l(k, x)$ describe una onda plana e^{ikx} enviada desde $-\infty$, transmitiendo $T_l(k)e^{ikx}$ a $+\infty$ y reflejando $L(k)e^{-ikx}$ a $-\infty$. De manera similar, $T_r(k)f_r(k, x)$ describe la dispersión desde $+\infty$.

Para establecer las propiedades de las soluciones de Jost, es conveniente expresar las soluciones de (2.9) en forma de ecuaciones integrales

Lema 2.1. *La ecuación de Schrödinger (2.9) tiene soluciones únicas $\psi = f_r(k, x)$ y $\psi = f_l(k, x)$, que satisfacen las ecuaciones integrales*

$$f_r(k, x) = e^{ikx} - \int_x^\infty \frac{\sin(k(x-y))}{k} V(y) f_r(k, y) dy, \quad (2.20)$$

$$f_l(k, x) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x \frac{\sin(k(x-y))}{k} V(y) f_l(k, y) dy. \quad (2.21)$$

Demostración. Sea $\psi(k, x) = f(k, x)$, reescribimos la ecuación de Schrödinger (2.9) como

$$f''(k, x) + k^2 f(k, x) = g(k, x), \quad \text{con } g(k, x) = V(x)f(k, x). \quad (2.22)$$

Es decir, vemos a (2.9) como una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea. La solución homogénea $f_h(k, x)$ de (2.22) es de la forma

$$f_h(k, x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx}.$$

Basados en la variación de parámetros, buscamos la solución particular $f_p(k, x)$ de (2.22) en la forma

$$f_p(k, x) = c_1(x) e^{ikx} + c_2(x) e^{-ikx},$$

lo que lleva a

$$f_p'(k, x) = (c_1'(x) e^{ikx} + c_2'(x) e^{-ikx}) + (ikc_1(x) e^{ikx} - ikc_2(x) e^{-ikx}).$$

Ahora requerimos que

$$(c_1'(x) e^{ikx} + c_2'(x) e^{-ikx}) = 0, \quad (2.23)$$

consecuentemente

$$\begin{aligned} f_p''(k, x) &= (ikc_1(x) e^{ikx} - ikc_2(x) e^{-ikx})' = (ikc_1'(x) e^{ikx} - ikc_2'(x) e^{-ikx}) \\ &\quad - (k^2 c_1(x) e^{ikx} + k^2 c_2(x) e^{-ikx}). \end{aligned}$$

Entonces, podemos escribir

$$\begin{aligned} f_p''(k, x) + k^2 f_p(k, x) &= (ikc_1'(x) e^{ikx} - ikc_2'(x) e^{-ikx}) - (k^2 c_1(x) e^{ikx} + k^2 c_2(x) e^{-ikx}) \\ &\quad + k^2 (c_1(x) e^{ikx} + c_2(x) e^{-ikx}) = g(k, x). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$ikc_1'(x) e^{ikx} - ikc_2'(x) e^{-ikx} = g(k, x). \quad (2.24)$$

De (2.23) y (2.24) tenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e^{ikx} & e^{-ikx} \\ ik e^{ikx} & -ik e^{-ikx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} &= \frac{1}{-2ik} \begin{pmatrix} -ik e^{-ikx} & -e^{-ikx} \\ -ik e^{ikx} & e^{ikx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} = \frac{1}{-2ik} \begin{pmatrix} -e^{-ikx} g \\ e^{ikx} g \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned} f_p(k, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2ik} e^{ik(x-y)} g(k, y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{-2ik} e^{-ik(x-y)} g(k, y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k(x-y))}{k} g(k, y) dy. \end{aligned}$$

La solución general de la ecuación (2.22) es

$$f(k, x) = f_h(k, x) + f_p(k, x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k(x-y))}{k} g(k, y) dy.$$

Cuando $x \rightarrow \infty$, $c_2 = 0$ y tomando $c_1 = 1$, tenemos

$$f_r(k, x) = e^{ikx} - \int_x^{\infty} \frac{\sin(k(x-y))}{k} g(k, y) dy.$$

Similarmente, cuando $x \rightarrow -\infty$, $c_1 = 0$ y tomando $c_2 = 1$, obtenemos

$$f_l(k, x) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x \frac{\sin(k(x-y))}{k} g(k, y) dy.$$

□

Del siguiente teorema obtenemos una desigualdad importante.

Teorema 2.2. *Asumimos que el potencial V es una función integrable de valor real. Sea $k \in \mathbb{C}$, $\text{Im } k \geq 0$, $k \neq 0$. Entonces la ecuación integral de Schrödinger para $x \rightarrow \infty$ tiene una única solución $f_r(k, x)$ que es continuamente diferenciable y satisface las estimaciones*

$$\begin{aligned} \left| f_r(k, x) - e^{ikx} \right| &\leq e^{-x \text{Im } k} \left| \exp \left(\frac{1}{|k|} \int_x^{\infty} |V(y)| dy \right) - 1 \right| \\ \left| \frac{f_r(k, x)}{dx} - ik e^{ikx} \right| &\leq |k| e^{-x \text{Im } k} \left| \exp \left(\frac{1}{|k|} \int_x^{\infty} |V(y)| dy \right) - 1 \right|. \end{aligned}$$

Además, la ecuación integral de Schrödinger para $x \rightarrow -\infty$ tiene una única solución $f_l(k, x)$ que es continuamente diferenciable y satisface las estimaciones

$$\begin{aligned} \left| f_l(k, x) - e^{-ikx} \right| &\leq e^{x \text{Im } k} \left| \exp \left(\frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^x |V(y)| dy \right) - 1 \right| \\ \left| \frac{f_l(k, x)}{dx} + ik e^{-ikx} \right| &\leq |k| e^{x \text{Im } k} \left| \exp \left(\frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^x |V(y)| dy \right) - 1 \right|. \end{aligned}$$

Demostración. Las ecuaciones integrales de Schrödinger son ecuaciones integrales de tipo Volterra. Una forma estándar de encontrar una solución para ecuaciones integrales de este tipo es mediante iteraciones sucesivas. Sea $f_0(k, x) = e^{-ikx}$, y definimos

$$f_{n+1} = - \int_x^{\infty} \frac{\sin(k(x-y))}{k} V(y) f_n(k, y) dy, \quad n \geq 0.$$

Poniendo $m_n(k, x) := e^{-ikx} f_n(k, x)$, de manera que m_n es definida inductivamente por $m_0(k, x) = 1$ y

$$\begin{aligned} m_{n+1}(k, x) &= - \int_x^\infty \frac{\sin(k(x-y))}{k} e^{ik(y-x)} V(y) m_n(k, y) dy \\ &= - \int_x^\infty \frac{e^{ik(x-y)} - e^{-ik(x-y)}}{2ik} e^{ik(y-x)} V(y) m_n(k, y) dy \\ &= \int_x^\infty \frac{1}{2ik} (e^{2ik(y-x)} - 1) V(y) m_n(k, y) dy, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Ya que

$$|\sin(k(x-y)) e^{ik(y-x)}| = \left| \frac{1}{2i} (1 - e^{2ik(y-x)}) \right| = \frac{1}{2} |1 - e^{2ik(y-x)}|,$$

notamos que

$$|(1 - e^{2ik(y-x)})| \leq 1 + e^{-2(y-x) \operatorname{Im} k}.$$

Sea $k = k_R + ik_I$, entonces

$$\begin{aligned} |(1 - e^{2ik(y-x)})| &= |1 - e^{2i(k_R + ik_I)(y-x)}| \\ &= |1 - e^{2i(k_R(y-x) + ik_I(y-x))}| \\ &= |1 - e^{2ik_R(y-x) - 2k_I(y-x)}| \\ &\leq 1 + |1 - e^{2ik_R(y-x) - 2k_I(y-x)}| \\ &= 1 + e^{-2k_I(y-x)} \leq 1, \quad \text{para } y \geq x \text{ y } k_I \geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, suponiendo que $k_I \geq 0$ encontramos

$$\begin{aligned} |m_{n+1}(k, x)| &\leq \frac{1}{|k|} \int_x^\infty |\sin(k(x-y)) e^{ik(y-x)}| |V(y)| |m_n(k, y)| dy \\ &\leq \frac{1}{|k|} \int_x^\infty |V(y)| |m_n(k, y)| dy. \end{aligned}$$

$n = 0$

$$|m_1(k, x)| \leq \frac{1}{|k|} \int_x^\infty |V(y)| dy = \frac{R(x)}{|k|},$$

$n = 1$

$$|m_2(k, x)| \leq \frac{1}{|k|} \int_x^\infty |V(y)| |m_1(k, y)| dy = \frac{1}{|k|^2} \int_x^\infty |V(y)| R(y) dy,$$

y entonces tenemos por inducción en n la estimación $|m_n(k, x)| \leq \frac{(R(x))^n}{|k|^n n!}$, donde

$$R(x) = \int_x^\infty |V(y)| dy \leq \int_{\mathbb{R}} |V(y)| dy = \|V\|_1.$$

Notamos que R es una función acotada decreciente continua, que es casi en todas partes diferenciable por el teorema de diferenciación de Lebesgue [4, Teorema 6.1.4]. De hecho, para $n = 0$ esta desigualdad es válida ya que $m_0(x) = 1$, y

$$|m_{n+1}(k, x)| \leq \frac{1}{|k|} \int_x^\infty |V(y)| \frac{(R(y))^n}{|k|^n n!} dy = \frac{1}{|k|^{n+1} n!} \int_0^{R(x)} s^n ds = \frac{(R(x))^{n+1}}{|k|^{n+1} (n+1)!}$$

poniendo $s = R(y)$, entonces $ds = -|V(y)|dy$ y el intervalo $[0, \infty)$ es mapeado a $[0, R(x)]$, ya que R es decreciente.

Entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} m_n(k, x)$ converge uniformemente, y también lo hace la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(k, x)$, para $k_I \geq 0$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(k, x)$ da una solución a la ecuación de Schrödinger en ∞ , y esta solución la denotamos por $f_r(k, x)$. Entonces

$$|f_r(k, x) - e^{ikx}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(k, x)| \leq e^{-xk_I} \sum_{n=1}^{\infty} |m_n(k, x)| \leq e^{-xk_I} |\exp(R(x)/|k|) - 1| \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty$$

para $k \in \mathbb{C}$ fijo con $k \neq 0$, $k_I \geq 0$.

Notemos que $m_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ para toda $k \in \mathbb{C}$, y ya que las integrales que definen $m_n(x)$ en términos de m_{n-1} convergen absolutamente para $k_I \geq 0$ vemos que cada m_n está al menos en $C^1(\mathbb{R})$. Consecuentemente, $f_n \in C^1(\mathbb{R})$, y

$$\frac{df_{n+1}}{dx}(x) = - \int_x^\infty \cos(k(x-y))V(y)f_n(y) dy = - \int_x^\infty \cos(k(x-y))e^{iky}V(y)m_n(y) dy.$$

Ahora usando

$$|\cos(k(x-y))e^{iky}| = |e^{ikx}| \frac{1}{2} |1 + e^{2ik(y-x)}| \leq e^{-xk_I}$$

para $y \geq x$, $k_I \geq 0$, obtenemos

$$\left| \frac{df_{n+1}}{dx}(x) \right| = e^{-xk_I} \int_x^\infty |V(y)||m_n(y)| dy \leq e^{-xk_I} \int_x^\infty |V(y)| \frac{(R(y))^n}{|k|^{nn!}} dy = \frac{e^{-xk_I}(R(x))^{n+1}}{|k|^n(n+1)!}.$$

De esto se sigue que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{df_n}{dx}(x)$ converge uniformemente en un subconjunto compacto de \mathbb{R} , entonces es una función continua y $f_r(k, x) \in C^1(\mathbb{R})$. Encontramos para $k_I \geq 0$

$$\left| \frac{f_r(k, x)}{dx} - ik e^{ikx} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{df_n}{dx}(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-xk_I}(R(x))^n}{|k|^{n-1}n!} = |k| e^{-xk_I} (\exp(R(x)/|k|) - 1)$$

la cual tiende a cero cuando $x \rightarrow \infty$. □

Como las ecuaciones integrales (2.20), (2.21) son invariantes bajo el cambio $k \rightarrow -k$, tenemos, para cualquier k real o complejo

$$f_l(-k, x) = f_l(k, x), \quad f_r(-k, x) = f_r(k, x)$$

f_l y f_r son funciones pares de k .

Observación 2.1. Ya que $V(x)$ es real entonces, para $x \in \mathbb{R}$, $f_l(k, x)$ y $f_r(k, x)$ satisfacen las siguientes igualdades

$$f_l(-k^*, x) = f_l(k, x)^*, \quad f_r(-k^*, x) = f_r(k, x)^*,$$

donde el $*$ denota conjugación compleja.

Corolario 2.3. Para cada x fijo, las soluciones $f_l(k, x)$ y $f_r(k, x)$ tienen una extensión de $k \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{C}^+$ de tal manera que son analíticas en \mathbb{C}^+ y continuas en $\overline{\mathbb{C}^+}$.

Donde $\mathbb{C}^+ := \{k : \text{Im } k > 0\}$ y $\overline{\mathbb{C}^+} := \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$.

Las estimaciones del Teorema 2.2 pueden mejorarse si imponemos más condiciones sobre el potencial $V(x)$, como vemos en el siguiente teorema.

Teorema 2.4. (a) Asumimos que el potencial $V(x)$ es de valor real y que $\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)|V(x)|dx < \infty$, es decir, $V \in L^1_1(\mathbb{R})$. Entonces para $k \in \mathbb{C}$ con $\text{Im } k \geq 0$,

$$|f_r(k, x) - e^{ikx}| \leq C \frac{e^{-\text{Im } kx}}{1 + |k|} \int_x^\infty (1 + |t|)|V(t)|dt \quad (2.25)$$

$$|f_l(k, x) - e^{-ikx}| \leq C \frac{e^{\text{Im } kx}}{1 + |k|} \int_{-\infty}^x (1 + |t|)|V(t)|dt, \quad (2.26)$$

donde C es una constante que solo depende del Potencial $V(x)$.

(b) De estos últimos límites, vemos que el comportamiento asintótico de $f_l(k, x)$ y $f_r(k, x)$ está dado por

$$f_l(k, x) = e^{ikx} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right), \quad k \rightarrow +\infty \text{ en } \overline{\mathbb{C}^+}, \quad (2.27)$$

$$f_r(k, x) = e^{-ikx} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right), \quad k \rightarrow +\infty \text{ en } \overline{\mathbb{C}^+}. \quad (2.28)$$

La demostración de este teorema se puede ver en [4].

2.1.1. Coeficientes de dispersión

Sean $\psi(x)$, $\overline{\psi}(x)$ soluciones de la ecuación (2.9). Definimos el Wronskiano W de las funciones $\psi(x)$ y $\overline{\psi}(x)$ como

$$W[\psi(x), \overline{\psi}(x)] := \det \begin{pmatrix} \psi(x) & \overline{\psi}(x) \\ \psi'(x) & \overline{\psi}'(x) \end{pmatrix}.$$

El Wronskiano satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} W[\psi(x), \overline{\psi}(x)] &= -W[\overline{\psi}(x), \psi(x)], \\ W[c_1\psi(x), c_2\overline{\psi}(x)] &= c_1c_2W[\psi(x), \overline{\psi}(x)], \end{aligned}$$

con c_1, c_2 constantes arbitrarias.

Lema 2.5. *Las soluciones de Jost $f_l(k, x)$ y $f_r(k, x)$ de la ecuación de Schrödinger (2.9) son linealmente independientes para $k \neq 0$ real.*

Demostración. De la condición asintótica (2.16), obtenemos el Wronskiano

$$\begin{aligned} W[f_l(k, x), f_l(-k, x)] &= f_l(k, x)f_l'(-k, x) - f_l'(k, x)f_l(-k, x) \\ &= e^{ikx}(-ik e^{-ikx}) - (ik e^{ikx})e^{-ikx} \\ &= -2ik \end{aligned}$$

que es diferente de cero para $k \neq 0$. Del mismo modo, para $f_r(k, x)$ de (2.17) obtenemos

$$\begin{aligned} W[f_r(k, x), f_r(-k, x)] &= f_r(k, x)f_r'(-k, x) - f_r'(k, x)f_r(-k, x) \\ &= e^{-ikx}(ik e^{ikx}) - (-ik e^{-ikx})e^{ikx} \\ &= 2ik \neq 0. \end{aligned}$$

□

Puesto que $f_l(k, x)$ y $f_r(k, x)$ para cada $k \in \overline{\mathbb{C}^+} \setminus \{0\}$ fijo son linealmente independientes. Entonces, estas soluciones forman una base para la ecuación de Schrödinger. Así, cada solución de la ecuación de Schrödinger para cada $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fijo se puede expresar como una combinación lineal de $f_l(k, x)$ y $f_r(k, x)$ de la siguiente forma

$$f_l(-k, x) = c_1(k)f_r(k, x) + c_2(k)f_l(k, x), \quad (2.29)$$

$$f_r(-k, x) = c_3(k)f_r(k, x) + c_4(k)f_l(k, x). \quad (2.30)$$

Proposición 2.6. *Los coeficientes en (2.29)-(2.30) están relacionados con los coeficientes de dispersión de la siguiente manera*

$$c_1 = T_r(k), \quad c_2 = -R(k), \quad c_3 = -L(k), \quad c_4 = T_l(k).$$

Demostración. Cuando $x \rightarrow +\infty$, de (2.16) y (2.19) en (2.29), obtenemos

$$e^{-ikx}[1 + o(1)] = c_1(k) \left[\frac{1}{T_r(k)} e^{-ikx} + \frac{R(k)}{T_r(k)} e^{ikx} + o(1) \right] + c_2(k) e^{ikx}[1 + o(1)].$$

Comparando los coeficientes en ambos lados de la igualdad anterior, tenemos

$$c_1 \frac{1}{T_r(k)} = 1, \quad c_1 \frac{R(k)}{T_r(k)} + c_2 = 0.$$

por lo tanto,

$$c_1 = T_r(k) \quad y \quad c_2 = -c_1 \frac{R(k)}{T_r(k)} = -T_r(k) \frac{R(k)}{T_r(k)} = -R(k).$$

Similarmente cuando $x \rightarrow -\infty$, de (2.17) y (2.18) en (2.30), tenemos

$$e^{ikx}[1 + o(1)] = c_3(k) e^{-ikx}[1 + o(1)] + c_4(k) \left[\frac{1}{T_l(k)} e^{ikx} + \frac{L(k)}{T_l(k)} e^{-ikx} + o(1) \right],$$

y entonces

$$c_4 \frac{1}{T_l(k)} = 1, \quad c_3 + c_4 \frac{L(k)}{T_l(k)} = 0.$$

Por lo tanto,

$$c_4 = T_l(k) \quad y \quad c_3 = -c_4 \frac{L(k)}{T_l(k)} = -T_l(k) \frac{L(k)}{T_l(k)} = -L(k).$$

Así, (2.29) y (2.30) son dadas por

$$f_l(-k, x) = T_r(k) f_r(k, x) - R(k) f_l(k, x), \quad (2.31)$$

$$f_r(-k, x) = -L(k) f_r(k, x) + T_l(k) f_l(k, x). \quad (2.32)$$

□

Lema 2.7. Para $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, las siguientes relaciones se satisfacen

$$T_r(-k) = T_r(k)^*, \quad R(-k) = R(k)^*, \quad L(-k) = L(k)^*, \quad T_l(-k) = T_l(k)^*. \quad (2.33)$$

Además tenemos que

$$|T_l(k)|^2 + |L(k)|^2 = 1 = |T_r(k)|^2 + |R(k)|^2.$$

Demostración. Ya que $f_l(k, x)^* = f_l(-k, x)$ y $f_r(k, x)^* = f_r(-k, x)$, entonces (2.33) se sigue de (2.31) y (2.32).

Usando (2.31) calculamos

$$\begin{aligned} -2ik &= W[f_l(k, x), f_l(-k, x)] \\ &= W[T_r(-k) f_r(-k, x) - R(-k) f_l(-k, x), T_r(k) f_r(k, x) - R(k) f_l(k, x)] \\ &= T_r(-k) T_r(k) W[f_r(-k, x), f_r(k, x)] - R(-k) R(k) W[f_l(-k, x), f_l(k, x)] \\ &= -2ik(|T_r(k)|^2 + |R(k)|^2), \end{aligned}$$

por lo tanto, $1 = |T(k)|^2 + |R(k)|^2$. De manera similar se demuestra la otra relación usando (2.32). □

Tomando el wronskiano en (2.31)-(2.32) y usando el hecho de que $W[f, f] = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} W[f_l(-k, x), f_r(k, x)] &= W[T_r(k) f_r(k, x) - R(k) f_l(k, x), f_r(k, x)] \\ &= T_r(k) W[f_r(k, x), f_r(k, x)] - R(k) W[f_l(k, x), f_r(k, x)] \\ R(k) &= -\frac{W[f_l(-k, x), f_r(k, x)]}{W[f_l(k, x), f_r(k, x)]}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned}
2ik &= W[f_l(-k, x), f_l(k, x)] = W[T_r(k)f_r(k, x) - R(k)f_l(k, x), f_l(k, x)] \\
&= T_r(k)W[f_r(k, x), f_l(k, x)] - R(k)W[f_l(k, x), f_l(k, x)] \\
T_r(k) &= \frac{2ik}{W[f_r(k, x), f_l(k, x)]}. \tag{2.35}
\end{aligned}$$

Similarmente, encontramos

$$\begin{aligned}
-2ik &= W[f_r(-k, x), f_r(k, x)] = W[T_l(k)f_l(k, x) - L(k)f_r(k, x), f_r(k, x)] \\
&= T_l(k)W[f_l(k, x), f_r(k, x)] - L(k)W[f_r(k, x), f_r(k, x)] \\
T_l(k) &= \frac{-2ik}{W[f_l(k, x), f_r(k, x)]} = \frac{2ik}{W[f_r(k, x), f_l(k, x)]}, \tag{2.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W[f_r(-k, x), f_l(k, x)] &= W[T_l(k)f_l(k, x) - L(k)f_r(k, x), f_l(k, x)] \\
&= T_l(k)W[f_l(k, x), f_l(k, x)] - L(k)W[f_r(k, x), f_l(k, x)] \\
L(k) &= -\frac{W[f_r(-k, x), f_l(k, x)]}{W[f_r(k, x), f_l(k, x)]}. \tag{2.37}
\end{aligned}$$

Observación 2.2. De (2.35) y (2.36) tenemos que los coeficientes de transmisión por la derecha e izquierda son iguales, es decir,

$$T_r(k) = T_l(k).$$

Por lo tanto, en lo que sigue usaremos simplemente $T(k)$ para referirnos al coeficiente de transmisión.

Los coeficientes de transmisión y reflexión pueden escribirse como integrales que involucran la función potencial $V(x)$ y las soluciones de Jost.

Proposición 2.8. Asumimos que $V(x)$ es continuo y satisface las condiciones del Teorema 2.2, entonces para $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\frac{1}{T(k)} = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} V(x) f_r(k, x) dx, \tag{2.38}$$

$$\frac{R(k)}{T(k)} = \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} V(x) f_l(k, x) dx, \tag{2.39}$$

$$\frac{L(k)}{T(k)} = \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} V(x) f_r(k, x) dx. \tag{2.40}$$

Demostración. Para encontrar otra representación integral de los coeficientes de transmisión y reflexión, sea $m_r(k, x) = e^{-ikx} f_r(k, x)$, entonces

$$\begin{aligned} f_r(k, x) &= e^{ikx} - \int_x^\infty \frac{\sin(k(x-y))}{k} V(y) f_r(k, y) dy \\ m_r(k, x) &= e^{-ikx} \left(e^{ikx} - \int_x^\infty \frac{\sin(k(x-y))}{k} V(y) e^{iky} m_r(k, y) dy \right) \\ &= 1 - \int_x^\infty e^{ik(y-x)} \frac{e^{ik(x-y)} - e^{-ik(x-y)}}{2ik} V(y) m_r(k, y) dy \\ &= 1 + \int_x^\infty \frac{e^{2ik(y-x)} - 1}{2ik} V(y) m_r(k, y) dy. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} m_r(k, x) &= 1 + \int_x^\infty \frac{e^{2ik(y-x)} - 1}{2ik} V(y) m_r(k, y) dy \\ &= \frac{e^{-2ikx}}{2ik} \int_x^\infty e^{2iky} V(y) m_r(k, y) dy + \left(1 - \frac{1}{2ik} \int_x^\infty V(y) m_r(k, y) dy \right) \\ &= \frac{e^{-2ikx}}{2ik} \int_{\mathbb{R}} e^{2iky} V(y) m_r(k, y) dy + \left(1 - \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} V(y) m_r(k, y) dy \right) + o(1), \quad x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Notemos que los términos restantes

$$\int_{-\infty}^x e^{2iky} V(y) m_r(k, y) dy, \quad \int_{-\infty}^x V(y) m_r(k, y) dy$$

son $o(1)$ cuando $x \rightarrow -\infty$, ya que, por el Teorema 2.2, $m_r(k, x)$ es acotada para cada $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y $V(x)$ es integrable por suposición. Entonces

$$f_r(k, x) = \frac{e^{-ikx}}{2ik} \int_{\mathbb{R}} e^{iky} V(y) f_r(k, y) dy + e^{ikx} \left(1 - \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} e^{-iky} V(y) f_r(k, y) dy \right) + o(1), \quad x \rightarrow -\infty. \quad (2.41)$$

Por otro lado, de (2.31) tenemos que

$$f_r(k, x) = \frac{1}{T(k)} f_l(-k, x) + \frac{R(k)}{T(k)} f_l(k, x).$$

Sea $m_l(k, x) = e^{ikx} f_l(k, x)$, sustituyendo en la expresión anterior, tenemos

$$\begin{aligned} m_r(k, x) &= \frac{1}{T(k)} m_l(-k, x) + \frac{R(k)}{T(k)} e^{-2ikx} m_l(k, x) \\ &= \frac{1}{T(k)} + \frac{R(k)}{T(k)} e^{-2ikx} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

es decir,

$$f_r(k, x) = \frac{1}{T(k)} e^{ikx} + \frac{R(k)}{T(k)} e^{-ikx} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty. \quad (2.42)$$

Comparando los comportamientos asintóticos (2.41) y (2.42), tenemos que

$$\frac{1}{T(k)} = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} e^{-iky} V(y) f_r(k, y) dy$$

y

$$\frac{R(k)}{T(k)} = \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} e^{iky} V(y) f_r(k, y) dy.$$

□

Usando la Proposición 2.8 y su demostración podemos refinar el comportamiento asintótico de los coeficientes de transmisión y reflexión como se indica en el siguiente Corolario.

Corolario 2.9. *Con las suposiciones como en la Proposición 2.8, entonces*

$$\frac{1}{T(k)} = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} V(y) dy + O\left(\frac{1}{|k|^2}\right), \quad \text{Im } k \geq 0, \quad (2.43)$$

$$\frac{R(k)}{T(k)} = \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} e^{2iky} V(y) dy + O\left(\frac{1}{|k|^2}\right), \quad \text{Im } k = 0, \quad (2.44)$$

$$\frac{L(k)}{T(k)} = \frac{1}{2ik} \int_{\mathbb{R}} e^{-2iky} V(y) dy + O\left(\frac{1}{|k|^2}\right), \quad \text{Im } k = 0. \quad (2.45)$$

Estados acotados

Una solución de estado acotado de la ecuación de Schrödinger (2.9) es una solución que pertenece a $L^2(\mathbb{R})$ en la variable x . $L^2(\mathbb{R})$ denota el conjunto de funciones de valores complejos que son cuadrado integrables en \mathbb{R} . Los polos de $T(k)$ representan los estados acotados, estos corresponden a k -valores en \mathbb{C}^+ y se denotan como

$$k = i\kappa_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

Por lo tanto, si $T(k)$ tiene un polo en algún $i\kappa_j \in \mathbb{C}^+$, las soluciones de Jost $f_r(k, x)$ y $f_l(k, x)$ dependen linealmente de ese valor de $i\kappa_j$. Por lo tanto, existe γ_j tal que

$$f_r(i\kappa_j, x) = \gamma_j f_l(i\kappa_j, x), \quad (2.46)$$

γ_j es la constante de dependencia. Las constantes de norma de los estados acotados c_{lj} y c_{rj} son definidas como

$$c_{lj} := \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_l(i\kappa_j, x)^2 dx \right]^{-1/2}, \quad c_{rj} := \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_r(i\kappa_j, x)^2 dx \right]^{-1/2},$$

y están relacionados entre sí a través de los residuos de $T(k)$ [4, 11, 12] como

$$\text{Res}(T(k), i\kappa_j) = ic_{lj}^2 \gamma_j = i \frac{c_{rj}^2}{\gamma_j}. \quad (2.47)$$

Definición 2.1. Los datos $S(k) = \{R(k), \{\kappa_j\}, \{c_{rj}\}\}$ son llamados datos de dispersión por la derecha, y los datos $\tilde{S}(k) = \{L(k), \{\kappa_j\}, \{c_{lj}\}\}$ son llamados datos de dispersión por la izquierda. Donde $R(k)$ y $L(k)$ son el coeficiente de dispersión por la derecha y por la izquierda, respectivamente; κ_j son los estados acotados, c_{rj} y c_{lj} son las constantes de norma relacionadas con los estados acotados por la derecha e izquierda, respectivamente.

2.2. Problema inverso de la ecuación de Schrödinger

Se estableció en la década de 1950 que el potencial $V(x)$ de la ecuación de Schrödinger se puede reconstruir completamente a partir de los datos de dispersión $S(k) = \{R(k), \{\kappa_j\}, \{c_{rj}\}\}$ (o bien de $\tilde{S}(k) = \{L(k), \{\kappa_j\}, \{c_{lj}\}\}$). El mapeo correspondiente

$$S(k) \longmapsto V(x)$$

es llamado transformación de dispersión inversa y se logra a través de la ecuación integral de Marchenko, que a su vez se deriva de las relaciones (2.31) - (2.32) que satisfacen las soluciones de Jost.

2.2.1. Ecuación de Marchenko

La ecuación de Marchenko es una ecuación integral asociada con los datos de dispersión a través de una transformada de Fourier.

Teorema 2.10. La ecuación integral de Marchenko relacionada con los datos de dispersión por la derecha $S(k) = \{R(k), \{\kappa_j\}, \{c_{rj}\}\}$ es dada por

$$K(x, y) + \Omega(x + y) + \int_x^\infty \Omega(z + y)K(x, z) dz = 0, \quad y > x, \quad (2.48)$$

donde

$$\Omega(z) := \hat{R}(z) + \sum_{j=1}^N c_{rj}^2 e^{-\kappa_j z} \quad (2.49)$$

y

$$\hat{R}(z) := \int_{-\infty}^\infty R(k) e^{ikz} \frac{dk}{2\pi}. \quad (2.50)$$

Demostración. Partimos de (2.31)

$$f_l(-k, x) = T(k)f_r(k, x) - R(k)f_l(k, x). \quad (2.51)$$

Vamos a usar $\overline{\mathbb{C}^+} := \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$ y $\overline{\mathbb{C}^-} := \mathbb{C}^- \cup \mathbb{R}$. Sabemos que cuando $k \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} f_l(-k, x) &= e^{-ikx} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow \infty \text{ en } \overline{\mathbb{C}^-}, \\ f_l(k, x) &= e^{ikx} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow \infty \text{ en } \overline{\mathbb{C}^+}. \end{aligned}$$

Reescribimos (2.51) como

$$f_l(-k, x) - e^{-ikx} + e^{-ikx} = T(k)(f_r(k, x) - e^{-ikx} + e^{-ikx}) - R(k)(f_l(k, x) - e^{ikx} + e^{ikx}),$$

es decir,

$$(f_l(-k, x) - e^{-ikx}) = f_r(k, x) - e^{-ikx} + (T(k) - 1)f_r(k, x) - R(k)e^{ikx} - R(k)(f_l(k, x) - e^{ikx}).$$

Si aplicamos el operador integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} \frac{dk}{2\pi}$ para $y > x$ en la ecuación anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (f_l(-k, x) - e^{-ikx}) e^{iky} \frac{dk}{2\pi} &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_r(k, x) - e^{-ikx}) e^{iky} \frac{dk}{2\pi} \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} (T(k) - 1)f_r(k, x) e^{iky} \frac{dk}{2\pi} - \int_{-\infty}^{\infty} R(k) e^{ikx} e^{iky} \frac{dk}{2\pi} \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} R(k)(f_l(k, x) - e^{ikx}) e^{iky} \frac{dk}{2\pi}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Ahora consideramos cada término en (2.52) individualmente. Sabemos del Corolario 2.3 y del Teorema 2.4 que $(f_r(k, x) - e^{-ikx})$ es analítica en \mathbb{C}^+ con respecto a k , es continua en $\overline{\mathbb{C}^+}$ con respecto a k , y se comporta como $O(\frac{1}{k})$ cuando $k \rightarrow \infty$ en $\overline{\mathbb{C}^+}$. Por lo tanto, por el Lema de Jordan (ver en Apéndice), tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f_r(k, x) - e^{-ikx}) e^{iky} \frac{dk}{2\pi} = 0, \quad y > x.$$

Para el siguiente término consideremos el residuo de $T(k)$ en cada polo $i\kappa_j$ para $j = 1, 2, \dots, N$ ya que estos polos están en \mathbb{C}^+ el término de la integral puede ser escrito como

$$\int_{-\infty}^{\infty} (T(k) - 1)f_r(k, x) e^{iky} \frac{dk}{2\pi} = i \sum_{j=1}^N \text{Res}(T(k), i\kappa_j) f_r(i\kappa_j, x) e^{-\kappa_j y}.$$

Recordamos que $f_r(i\kappa_j, x) = \gamma_j f_l(i\kappa_j, x)$, donde γ_j es la constante de dependencia para κ_j . Entonces, el término integral correspondiente se puede escribir como

$$\int_{-\infty}^{\infty} (T(k) - 1)f_r(k, x) e^{iky} \frac{dk}{2\pi} = i \sum_{j=1}^N \text{Res}(T(k), i\kappa_j) \gamma_j f_l(i\kappa_j, x) e^{-\kappa_j y}. \quad (2.53)$$

Ahora definimos

$$\begin{aligned} K(x, y) &:= \int_{-\infty}^{\infty} (f_l(-k, x) - e^{-ikx}) e^{iky} \frac{dk}{2\pi} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_l(k, x) - e^{ikx}) e^{-iky} \frac{dk}{2\pi}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) e^{iky} dy + e^{ikx} = f_l(k, x). \quad (2.54)$$

Sustituyendo (2.54) en (2.53), encontramos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (T(k) - 1) f_r(k, x) e^{iky} \frac{dk}{2\pi} &= i \sum_{j=1}^N \gamma_j \text{Res}(T(k), i\kappa_j) e^{-\kappa_j(x+y)} \\ &\quad + i \sum_{j=1}^N \gamma_j \text{Res}(T(k), i\kappa_j) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, s) e^{-\kappa_j(s+y)} ds. \end{aligned}$$

Podemos reemplazar el primer término en el lado izquierdo de (2.52) por $\bar{K}(x, y)$, donde hemos definido

$$\bar{K}(x, y) := \int_{-\infty}^{\infty} (f_l(-k, x) - e^{-ikx}) e^{iky} \frac{dk}{2\pi}. \quad (2.55)$$

Similarmente podemos reemplazar el tercer término al lado derecho de (2.52) por $\hat{R}(x + y)$, donde hemos definido

$$\hat{R}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} R(k) e^{iky} \frac{dk}{2\pi}. \quad (2.56)$$

Para el quinto término de la parte derecha de (2.52), podemos considerar una reorganización de (2.56) junto con (2.55) para obtener

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(k) (f_l(k, x) - e^{ikx}) e^{iky} \frac{dk}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{R}(s + y) K(x, s) ds.$$

Por lo tanto, la transformada de Fourier de (2.51) para $y > x$ lleva a

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^N \gamma_j \text{Res}(T(k), i\kappa_j) e^{-\kappa_j(x+y)} + i \sum_{j=1}^N \gamma_j \text{Res}(T(k), i\kappa_j) \int_{-\infty}^{\infty} K(x, s) e^{-\kappa_j(s+y)} ds \\ &\quad - \bar{K}(x, y) - \hat{R}(x + y) - \int_{-\infty}^{\infty} \hat{R}(s + y) K(x, s) ds, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{K}(x, y) + \left(\hat{R}(x + y) - i \sum_{j=1}^N \gamma_j \text{Res}(T(k), i\kappa_j) e^{-\kappa_j(x+y)} \right) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} K(x, s) \left(\hat{R}(s + y) - i \sum_{j=1}^N \gamma_j \text{Res}(T(k), i\kappa_j) e^{-\kappa_j(s+y)} \right) ds. \end{aligned}$$

Definimos

$$\Omega(z) = \hat{R}(z) - i \sum_{j=1}^N \gamma_j \text{Res}(T(k), i\kappa_j) e^{-\kappa_j z}.$$

Por lo tanto, usando (2.47) vemos que el núcleo de la ecuación integral de Marchenko también puede ser expresado como

$$\Omega(z) = \hat{R}(z) + \sum_{j=1}^N c_{rj}^2 e^{-\kappa_j z}, \quad (2.57)$$

por lo tanto, la ecuación integral de Marchenko se puede escribir como

$$0 = \bar{K}(x, y) + \Omega(x + y) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x, s) \Omega(s + y) ds, \quad y > x.$$

□

Teorema 2.11. *La solución de la ecuación integral de Marchenko $K(x, x)$ esta relacionada con el potencial $V(x)$ mediante*

$$V(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x). \quad (2.58)$$

La demostración de este teorema se puede encontrar en [15].

Teorema 2.12. *La ecuación integral de Marchenko relacionada con los datos de dispersión por la izquierda $\tilde{S}(k) = \{L(k), \{\kappa_j\}, \{c_{lj}\}\}$ es dada por*

$$\tilde{K}(x, y) + \tilde{\Omega}(x + y) + \int_{-\infty}^x \tilde{\Omega}(z + y) \tilde{K}(x, z) dz = 0, \quad y < x, \quad (2.59)$$

donde

$$\tilde{\Omega}(y) := \hat{L}(y) + \sum_{j=1}^N c_{lj}^2 e^{-\kappa_j y},$$

y

$$\hat{L}(y) := \int_{-\infty}^{\infty} L(k) e^{-iky} \frac{dk}{2\pi}.$$

2.3. Ejemplos

Ejemplo 2.1. *El potencial Delta. Sea*

$$V(x) = -\alpha \delta(x), \quad \alpha > 0, \quad (2.60)$$

donde α es una constante, y $\delta(x)$ es la función delta de Dirac.

Las correspondientes soluciones de Jost por la derecha e izquierda para este potencial son de la forma siguiente,

$$f_r(k, x) = \begin{cases} e^{ikx}, & x > 0 \\ \frac{1}{T(k)} e^{ikx} + \frac{R(k)}{T(k)} e^{-ikx}, & x < 0. \end{cases} \quad (2.61)$$

$$f_l(k, x) = \begin{cases} e^{-ikx}, & x < 0 \\ \frac{1}{T(k)} e^{-ikx} + \frac{L(k)}{T(k)} e^{ikx}, & x > 0. \end{cases} \quad (2.62)$$

De (2.43), (2.44) y (2.45), obtenemos los coeficientes de dispersión

$$\begin{aligned} \frac{1}{T(k)} &= 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} -\alpha \delta(s) ds \\ &= 1 + \frac{\alpha}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s) ds = 1 - \frac{i\alpha}{2k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{R(k)}{T(k)} &= \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} -e^{2iks} \alpha \delta(s) ds \\ &= -\frac{\alpha}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2iks} \delta(s) ds = -\frac{\alpha}{2ik} e^{2iks} \Big|_{s=0} = \frac{i\alpha}{2k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{L(k)}{T(k)} &= \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-2iks} \alpha \delta(s) ds \\ &= -\frac{\alpha}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2iks} \delta(s) ds = \frac{i\alpha}{2k}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en las soluciones de Jost (2.61) y (2.62), tenemos

$$\begin{aligned} f_r(k, x) &= \begin{cases} e^{ikx}, & x > 0 \\ \left(1 - \frac{i\alpha}{2k}\right) e^{ikx} + \frac{i\alpha}{2k} e^{-ikx}, & x < 0. \end{cases} \\ f_l(k, x) &= \begin{cases} e^{-ikx}, & x < 0 \\ \left(1 - \frac{i\alpha}{2k}\right) e^{-ikx} + \frac{i\alpha}{2k} e^{ikx}, & x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$T(k) = \frac{2k}{2k - i\alpha}, \quad R(k) = \frac{i\alpha}{2k} T(k) = \frac{i\alpha}{2k} \frac{2k}{2k - i\alpha} = \frac{i\alpha}{2k - i\alpha}, \quad L(k) = \frac{i\alpha}{2k - i\alpha}.$$

$T(k)$ tiene un polo simple en $k = i\alpha/2$. La correspondiente eigenfunción es

$$f_r(i\alpha/2, x) = f_l(i\alpha/2, x) = \begin{cases} e^{-\alpha x/2}, & x > 0 \\ e^{\alpha x/2}, & x < 0 \end{cases}$$

$$c_{rj}^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_r^2(i\alpha/2, x) dx \right]^{-1} = \frac{\alpha}{2}.$$

En el siguiente ejemplo se ilustra como recuperar el potencial a partir de los datos de dispersión.

Ejemplo 2.2. Sean los datos de dispersión por la derecha

$$R(k) = \frac{i\alpha}{2k - i\alpha}, \quad i\kappa_j = i\frac{\alpha}{2}, \quad c_r^2 = \frac{\alpha}{2},$$

donde α es una constante positiva. Entonces, de (2.49) y (2.50) tenemos que

$$\Omega(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\alpha}{2k - i\alpha} e^{iky} dk + \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{\alpha}{2}y}.$$

Para evaluar la integral usamos el teorema del residuo y el teorema integral de Cauchy, obtenemos

$$\frac{i\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iky}}{2k - i\alpha} dk = \begin{cases} -\frac{\alpha}{2} e^{-\frac{\alpha}{2}y} & \text{si } y > 0, \\ 0 & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

Así, $\Omega(y)$ se convierte en

$$\Omega(y) = -\frac{\alpha}{2} e^{-\frac{\alpha}{2}y} H(y) + \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{\alpha}{2}y},$$

donde $H(y)$ es la función escalón de Heaviside

$$H(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0, \\ 1 & \text{si } y \geq 0. \end{cases}$$

Cuando $y > 0$, $\Omega(y) = 0$; por lo tanto, de la ecuación (2.48) vemos que $K(x, y) = 0$. Cuando $y < 0$, $\Omega(y) = \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{\alpha}{2}y}$. Entonces la ecuación de Marchenko es

$$K(x, y) + \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{\alpha}{2}(x+y)} + \int_x^{-y} K(x, z) \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{\alpha}{2}(z+y)} dz = 0,$$

integrando por partes esta ecuación, tenemos

$$K(x, y) + \frac{\alpha}{2} e^{-\frac{\alpha}{2}(x+y)} - K(x, -y) + K(x, x) e^{-\frac{\alpha}{2}(x+y)} + \int_x^{-y} K_z(x, z) e^{-\frac{\alpha}{2}(z+y)} dz = 0.$$

Como $e^{-\frac{\alpha}{2}(z+y)} = 0$ si $z + y > 0$, entonces vemos que $K(x, x) = -\frac{\alpha}{2}$. Por lo tanto

$$K(x, x) = -\frac{\alpha}{2} H(-x),$$

de (2.58) recobramos el potencial como

$$V(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x) = -2 \frac{d}{dx} \left(-\frac{\alpha}{2} H(-x) \right) = -\alpha \delta(x),$$

donde hemos usado el siguiente resultado

Lema 2.13. La derivada de la función escalón de Heaviside $H(x)$, es dada por

$$\frac{d}{dx} H(x) = \delta(x),$$

donde $\delta(x)$ es la función delta de Dirac.

Capítulo 3

La ecuación de KdV como problema inverso

En 1967 Gardner, Greene, Kruskal, y Miura formularon el método de la transformación de dispersión inversa para resolver el problema de Cauchy para la ecuación KdV. Este método se ha generalizado para resolver otras ecuaciones no lineales pero que son totalmente integrables. Este método consiste en encontrar un sistema de ecuaciones espectrales asociadas a la ecuación KdV. Hacer corresponder la solución inicial con ciertos datos de dispersión (estados ligados y coeficiente de reflexión) de una de las ecuaciones lineales asociada, hacer evolucionar en el tiempo dichos datos de acuerdo con la otra ecuación y finalmente reconstruir la función a t arbitrario a partir de dichos datos, utilizando la ecuación de Marchenko para el problema inverso de dispersión.

3.1. Problema de valor inicial de la ecuación KdV

El problema de valor inicial o problema de Cauchy para la KdV consiste en encontrar $u(x, t)$ cuando $u(x, 0)$ es conocido. Este problema puede ser resuelto utilizando la transformación de dispersión inversa.

Consideramos el problema de Cauchy para la ecuación de KdV en la recta real:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (3.2)$$

donde $u_0(x)$ es una función real que pertenece a $L^1_1(\mathbb{R})$, es decir, satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)|u_0(x)| dx < \infty. \quad (3.3)$$

Denotamos por Q_0 el conjunto de funciones reales $u(x, t)$, $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$, tal que para cada $T > 0$ fijo,

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|)|u(x, t)| dt < \infty.$$

Sea Q_1 el conjunto de funciones $u(x, t)$ tal que $u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx} \in Q_0$.

Teorema 3.1. *El problema de Cauchy (3.1)-(3.2) tiene a lo más una solución.*

Demostración. Sean $u, \tilde{u} \in Q_1$ dos soluciones del problema de Cauchy (3.1)-(3.2). Definimos $w := u - \tilde{u}$. Entonces $w \in Q_1$, $w|_{t=0} = 0$ y

$$w_t = 6(uw_x + w\tilde{u}_x) - w_{xxx}.$$

Multiplicando esta igualdad por w e integrando con respecto a x , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} w^2(x, t) dx &= 6 \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)w(x, t)w_x(x, t) dx \\ &+ 6 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_x(x, t)w^2(x, t) dx - \int_{-\infty}^{\infty} w(x, t)w_{xxx}(x, t) dx. \end{aligned}$$

Observemos que la última integral vale cero. En efecto, si integramos por partes la última integral tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} ww_{xxx} dx = ww_{xx}|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} w_x w_{xx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} w_x w_{xx} dx,$$

consecuentemente

$$\int_{-\infty}^{\infty} ww_{xxx} dx = 0.$$

Ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} ww w_x dx = \int_{-\infty}^{\infty} u \left(\frac{1}{2} w^2 \right)_x dx,$$

integrando por partes, tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} ww w_x dx = \int_{-\infty}^{\infty} u \left(\frac{1}{2} w^2 \right)_x dx = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x w^2 dx.$$

De esto se sigue que

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} w^2 dx = 12 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\tilde{u}_x - \frac{1}{2} u_x \right) w^2 dx,$$

luego si

$$\left| \tilde{u}_x - \frac{1}{2}u_x \right| \leq M \implies \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} w^2 dx \leq 12M \int_{-\infty}^{\infty} w^2 dx.$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} w^2(x, t) dx \leq e^{12Mt} \int_{-\infty}^{\infty} w^2(x, 0) dx = 0,$$

entonces $w(x, t) = 0$. □

3.2. Método Lax y evolución de los datos de dispersión

En 1968, Peter Lax propuso un formalismo para describir ecuaciones de evolución no lineal integrables que son susceptibles de solución exacta por el método de dispersión inversa. Presentó un principio general para asociar ecuaciones de evolución no lineal con operadores lineales para que los valores propios del operador lineal sean constantes del movimiento para la ecuación no lineal, como es el caso de la ecuación KdV y el operador Schrödinger.

Para formular el método Lax, consideremos dos operadores lineales L y A . La ecuación de valores propios relacionada con el operador L corresponde a la ecuación de Schrödinger para la ecuación de KdV. La forma general de esta ecuación de valores propios es

$$L\psi := -\psi'' + u(x, t)\psi = \lambda\psi, \quad (3.4)$$

donde ψ es la función propia y λ es el correspondiente valor propio. El operador A describe el cambio de los valores propios con el parámetro t , que generalmente representa el tiempo en una ecuación de evolución no lineal. La forma general de esta ecuación de evolución es

$$\psi_t = A\psi. \quad (3.5)$$

Derivando (3.4) con respecto a t , obtenemos

$$L_t\psi + L\psi_t = \lambda_t\psi + \lambda\psi_t. \quad (3.6)$$

Enseguida eliminamos ψ_t de (3.6) usando (3.5), obtenemos

$$L_t\psi + LA\psi = \lambda_t\psi + \lambda A\psi = \lambda_t\psi + A\lambda\psi = \lambda_t\psi + AL\psi,$$

o equivalentemente,

$$L_t\psi = \lambda_t\psi + (AL - LA)\psi.$$

Por lo tanto, los valores propios son constantes para las funciones propias distintas de cero si y sólo si

$$L_t = (AL - LA) = -[L, A], \quad (3.7)$$

donde $[L, A] = (LA - AL)$ es el conmutador de los operadores L y A , y la derivada en el lado izquierdo de (3.7) debe interpretarse como la derivada de tiempo del operador solo. La ecuación (3.7) se llama ecuación Lax y los operadores L y A se llaman par de Lax.

Definición 3.1. *Un par de operadores L y A , que dependen de x , se llama par de Lax (L, A) si satisfacen la ecuación de Lax (3.7).*

Proposición 3.2. *Supóngase que*

$$\begin{aligned} L &= -\partial_x^2 + u(x, t) \\ A &= -4\partial_x^3 + 6u(x, t)\partial_x + 3\partial_x u(x, t), \end{aligned}$$

entonces la ecuación de evolución asociada, $L_t = [A, L]$, es la ecuación de KdV (3.1).

Demostración. En efecto, ya que $[A, L] := AL - LA$, tenemos

$$\begin{aligned} AL &= (-4\partial_x^3 + 6u\partial_x + 3\partial_x u)(-\partial_x^2 + u) \\ &= 4\partial_x^5 - 4\partial_x^3[u] - 6u\partial_x^3 + 6u\partial_x[u] - 3\partial_x u\partial_x^2 + 3u\partial_x u \\ &= 4\partial_x^5 - 4(\partial_x^3 u + 3\partial_x^2 u\partial_x + 3\partial_x u\partial_x^2 + u\partial_x^3) - 6u\partial_x^3 + 6u(\partial_x u + u\partial_x u) \\ &\quad - 3\partial_x u\partial_x^2 + 3u\partial_x u \\ &= 4\partial_x^5 - 10u\partial_x^3 - 15\partial_x u\partial_x^2 - (12\partial_x^2 u - 6u^2)\partial_x - (4\partial_x^3 u - 9u\partial_x u) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} LA &= (-\partial_x^2 + u)(-4\partial_x^3 + 6u\partial_x + 3\partial_x u) \\ &= 4\partial_x^5 - 6\partial_x^2[u\partial_x] - 3\partial_x^2[\partial_x u] - 4u\partial_x^3 + 6u^2\partial_x + 3u\partial_x u \\ &= 4\partial_x^5 - 6(\partial_x^2 u\partial_x + 2\partial_x u\partial_x^2 + u\partial_x^3) - 3(\partial_x^2 u + 2\partial_x^2 u\partial_x + \partial_x u\partial_x^2) - 4u\partial_x^3 \\ &\quad + 6u^2\partial_x + 3u\partial_x u \\ &= 4\partial_x^5 - 10u\partial_x^3 - 15\partial_x u\partial_x^2 - (12\partial_x^2 u - 6u^2)\partial_x - (3\partial_x^3 u - 3u\partial_x u). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Así, $(AL - LA) = -(\partial_x^3 u - 6u\partial_x u)$, y entonces

$$L_t = \partial_t u = -(\partial_x^3 u - 6u\partial_x u).$$

□

La evolución temporal de los datos de dispersión se puede obtener analizando el comportamiento asintótico del operador de evolución temporal asociado (3.5), que para la ecuación de KdV es

$$\psi_t = A\psi = (-4\partial_x^3 + 6u(x, t)\partial_x + 3\partial_x u(x, t))\psi. \quad (3.10)$$

Lema 3.3. *Sea $u(x, t)$ una solución de (3.1), y sea $\psi = \psi(x, t)$ una solución de (3.4). Entonces $\psi_t - A\psi$ es una solución de (3.4), es decir,*

$$L(\psi_t - A\psi) = \lambda(\psi_t - A\psi).$$

Demostración. Derivando la ecuación (3.4) con respecto a t , obtenemos

$$L_t\psi + L\psi_t = \lambda\psi_t \implies L_t\psi + (L - \lambda)\psi_t = 0.$$

En vista de (3.7), $(L - \lambda)\psi_t = LA\psi - AL\psi = (L - \lambda)A\psi$. \square

Lo anterior es equivalente a decir que $\psi_t - A\psi$ puede ser escrita como una combinación lineal de las soluciones de Jost $f_l(k, x; t)$ y $f_r(k, x; t)$ de (3.4) como

$$\partial_t f_l(k, x; t) - A f_l(k, x; t) = c_1(k, t) f_l(k, x; t) + c_2(k, t) f_r(k, x; t), \quad (3.11)$$

o equivalentemente

$$\partial_t f_l(k, x; t) - (-4\partial_x^3 + 6u\partial_x + 3\partial_x u) f_l(k, x; t) = c_1(k, t) f_l(k, x; t) + c_2(k, t) f_r(k, x; t). \quad (3.12)$$

Para cada t fijo, asumimos que $u(x, t) = o(1)$ y $u_x(x, t) = o(1)$ cuando $x \rightarrow +\infty$. Usando el comportamiento asintótico de las soluciones de Jost que aparecen en (2.16) y (2.17), determinamos c_1 y c_2 . De (2.16)-(2.17) y (2.19) en (3.12), obtenemos

$$\partial_t e^{ikx} + 4\partial_x^3 e^{ikx} = c_1(k, t) e^{ikx} + c_2(k, t) \left[\frac{1}{T(k; t)} e^{-ikx} + \frac{R(k; t)}{T(k; t)} e^{ikx} \right]. \quad (3.13)$$

En (3.13), comparando los coeficientes de e^{ikx} y e^{-ikx} en ambos lados de la igualdad, tenemos

$$c_2(k, t) = 0, \quad \text{y} \quad c_1(k, t) = -4ik^3. \quad (3.14)$$

Por lo tanto, el tiempo de evolución de $f_l(k, x; t)$ es determinado por

$$\partial_t f_l(k, x; t) - A f_l(k, x; t) = -4ik^3 f_l(k, x; t). \quad (3.15)$$

Similarmente, cuando $x \rightarrow -\infty$ en (3.15), con ayuda de (2.18), tenemos

$$\partial_t \left[\frac{1}{T(k; t)} e^{ikx} + \frac{L(k; t)}{T(k; t)} e^{-ikx} \right] = (-4\partial_x^3 - 4ik^3) \left[\frac{1}{T(k; t)} e^{ikx} + \frac{L(k; t)}{T(k; t)} e^{-ikx} \right],$$

Comparando los coeficientes de e^{ikx} y e^{-ikx} en ambos lados de la expresión anterior, llegamos a

$$\partial_t \left(\frac{L(k; t)}{T(k; t)} \right) e^{-ikx} = -4ik^3 \frac{L(k; t)}{T(k; t)} e^{-ikx} - 4ik^3 \frac{L(k; t)}{T(k; t)} e^{-ikx}, \quad (3.16)$$

$$\partial_t \left(\frac{1}{T(k; t)} \right) e^{ikx} = 4ik^3 \frac{1}{T(k; t)} e^{ikx} - 4ik^3 \frac{1}{T(k; t)} e^{ikx}. \quad (3.17)$$

De (3.17), tenemos que

$$\partial_t \left(\frac{1}{T(k; t)} \right) = 0,$$

es decir,

$$\partial_t T(k; t) = 0.$$

De (3.16), obtenemos

$$\partial_t \left(\frac{L(k; t)}{T(k; t)} \right) = -8ik^3 \frac{L(k; t)}{T(k; t)}.$$

De donde

$$\partial_t L(k; t) = -8ik^3 L(k; t).$$

Por lo tanto, debido al hecho de que $\partial_t T(k; t) = 0$, tenemos que $L(k; t) = L(k, 0) e^{-8ik^3 t}$, y por lo tanto

$$T(k; t) = T(k, 0), \quad L(k; t) = L(k, 0) e^{-8ik^3 t}. \quad (3.18)$$

Procediendo de manera similar, obtenemos el tiempo de evolución de la solución de Jost $f_r(k, x; t)$. Nuevamente $\partial_t f_r(k, x; t) - A f_r(k, x; t)$ es una solución de (3.4) por el Lema 3.3. Por lo tanto, puede ser escrita como una combinación lineal de las soluciones de Jost $f_l(k, x; t)$ y $f_r(k, x; t)$ como

$$\partial_t f_r(k, x; t) - (-4\partial_x^3 + 6u\partial_x + 3\partial_x u) f_r(k, x; t) = c_3(k, t) f_l(k, x; t) + c_4(k, t) f_r(k, x; t). \quad (3.19)$$

Con ayuda de las asintóticas (2.16)-(2.17) y (2.18), cuando $x \rightarrow -\infty$ de (3.19), obtenemos

$$\partial_t e^{-ikx} + 4\partial_x^3 e^{-ikx} = c_3(k, t) \left[\frac{1}{T(k; t)} e^{ikx} + \frac{L(k; t)}{T(k; t)} e^{-ikx} \right] + c_4(k, t) e^{-ikx}, \quad (3.20)$$

lo cual implica que $c_3 = 0$ y $c_4 = 4ik^3$. Entonces tenemos la siguiente evolución de tiempo para la solución Jost $f_r(k, x; t)$

$$\partial_t f_r(k, x; t) - A f_r(k, x; t) = 4ik^3 f_r(k, x; t). \quad (3.21)$$

cuando $x \rightarrow +\infty$ en (3.21), con ayuda de (2.19), tenemos

$$\partial_t \left[\frac{1}{T(k; t)} e^{-ikx} + \frac{R(k; t)}{T(k; t)} e^{ikx} \right] = (-4\partial_x^3 + 4ik^3) \left[\frac{1}{T(k; t)} e^{-ikx} + \frac{R(k; t)}{T(k; t)} e^{ikx} \right],$$

la expresión anterior implica que

$$\partial_t \left(\frac{R(k; t)}{T(k; t)} \right) e^{ikx} = 4ik^3 \frac{R(k; t)}{T(k; t)} e^{ikx} + 4ik^3 \frac{R(k; t)}{T(k; t)} e^{ikx}, \quad (3.22)$$

$$\partial_t \left(\frac{1}{T(k; t)} \right) e^{-ikx} = -4ik^3 \frac{1}{T(k; t)} e^{-ikx} + 4ik^3 \frac{1}{T(k; t)} e^{-ikx}. \quad (3.23)$$

Luego de (3.22) y (3.23), tenemos

$$\partial_t \left(\frac{1}{T(k; t)} \right) = 0 \implies \partial_t T(k; t) = 0.$$

$$\partial_t \left(\frac{R(k; t)}{T(k; t)} \right) = 8ik^3 \frac{R(k; t)}{T(k; t)} \implies \partial_t R(k; t) = 8ik^3 R(k; t).$$

Por lo tanto,

$$R(k; t) = R(k, 0) e^{8ik^3 t}. \quad (3.24)$$

Corolario 3.4. *Los eigenvalores de la ecuación de Schrödinger no dependen del tiempo, es decir,*

$$\frac{d}{dt}(i\kappa_j(t)) = 0. \quad (3.25)$$

Demostración. Los eigenvalores $k = i\kappa_j$, $j = 1, \dots, N$ son los polos de la función $T(k, 0)$. Entonces, como $d_t T(k, 0) = 0$, se sigue que $d_t(i\kappa_j(t)) = 0$. Por lo tanto, $i\kappa_j(t) = i\kappa_j(0)$. \square

Teorema 3.5. *La evolución temporal de las constantes de dependencia γ_j , es*

$$\gamma_j(t) = \gamma_j(0) e^{8\kappa_j^3 t}. \quad (3.26)$$

Demostración. Consideremos la relación (2.46)

$$f_r(i\kappa_j, x) = \gamma_j f_l(i\kappa_j, x),$$

Derivando con respecto a t , tenemos

$$\partial_t f_r(i\kappa_j, x; t) = \partial_t(\gamma_j(t)) f_l(i\kappa_j, x; t) + \gamma_j(t) \partial_t f_l(i\kappa_j, x; t). \quad (3.27)$$

Usando (3.21) evaluado en $k = i\kappa_j$, podemos escribir a (3.27) como

$$A f_r(i\kappa_j, x; t) + 4\kappa_j^3 f_r(i\kappa_j, x; t) = \partial_t(\gamma_j(t)) f_l(i\kappa_j, x; t) + \gamma_j(t) \partial_t f_l(i\kappa_j, x; t). \quad (3.28)$$

Usando (3.15) escribimos a (3.28) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} A\gamma_j(t) f_l(i\kappa_j, x; t) + 4\kappa_j^3 \gamma_j(t) f_l(i\kappa_j, x; t) \\ = \partial_t(\gamma_j(t)) f_l(i\kappa_j, x; t) + \gamma_j(t) A f_l(i\kappa_j, x; t) - 4\kappa_j^3 \gamma_j(t) f_l(i\kappa_j, x; t). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Notemos que (3.29) implica que

$$\frac{d\gamma_j(t)}{dt} = 8\kappa_j^3 \gamma_j(t) \implies \gamma_j(t) = \gamma_j(0) e^{8\kappa_j^3 t}.$$

\square

Teorema 3.6. *El tiempo de evolución de las constantes de norma c_{lj} y c_{rj} es dado por*

$$c_{lj}(t) = c_{lj}(0) e^{-4\kappa_j^3 t}, \quad c_{rj}(t) = c_{rj}(0) e^{4\kappa_j^3 t}.$$

Demostración. De (2.47) sabemos que

$$\text{Res}(T(k), i\kappa_j) = ic_{lj}^2 \gamma_j = i \frac{c_{rj}^2}{\gamma_j}.$$

Entonces, derivando con respecto a t la expresión anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= i\partial_t(\gamma_j)c_{lj}^2 + 2i\gamma_j c_{lj}\partial_t(c_{lj}) \\ &= \partial_t(\gamma_j)c_{lj} + 2\gamma_j\partial_t(c_{lj}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Usando el resultado del Teorema 3.5 en (3.30), tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= 8\kappa_j^3 \gamma_j(0) e^{8\kappa_j^3 t} c_{lj} + 2\gamma_j(0) e^{8\kappa_j^3 t} \partial_t(c_{lj}) \\ &= 4\kappa_j^3 c_{lj} + \partial_t(c_{lj}). \\ \frac{dc_{lj}}{dt} &= -4\kappa_j^3 c_{lj} \implies c_{lj}(t) = c_{lj}(0) e^{-4\kappa_j^3 t}. \end{aligned}$$

De manera análoga, derivamos respecto a t el lado derecho de la ecuación (2.47), tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= i \left[\frac{2c_{rj}\partial_t(c_{rj})\gamma_j - c_{rj}^2\partial_t(\gamma_j)}{\gamma_j^2} \right] \\ &= 2\partial_t(c_{rj})\gamma_j - c_{rj}\partial_t(\gamma_j). \end{aligned} \quad (3.31)$$

De nuevo usamos el resultado del Teorema 3.5 en (3.31), obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= 2\gamma_j(0) e^{8\kappa_j^3 t} \partial_t(c_{rj}) - c_{rj} 8\kappa_j^3 \gamma_j(0) e^{8\kappa_j^3 t} \\ &= 2\partial_t(c_{rj}) - 8\kappa_j^3 c_{rj}. \\ \frac{dc_{rj}}{dt} &= 4\kappa_j^3 c_{rj} \implies c_{rj}(t) = c_{rj}(0) e^{4\kappa_j^3 t}. \end{aligned}$$

□

Resumiendo los resultados anteriores, tenemos

$$\boxed{\begin{aligned} R(k, t) &= R(k, 0) e^{8ik^3 t}, & L(k, t) &= L(k, 0) e^{-8ik^3 t}, & T(k, t) &= T(k, 0) = T(k), \\ i\kappa_j(t) &= i\kappa_j(0) = i\kappa_j, & c_{rj}(t) &= c_{rj}(0) e^{4\kappa_j^3 t}, & c_{lj}(t) &= c_{lj}(0) e^{-4\kappa_j^3 t}. \end{aligned}} \quad (3.32)$$

La solución al problema del valor inicial para la ecuación KdV es obtenida en tres etapas como se indica en el siguiente diagrama.

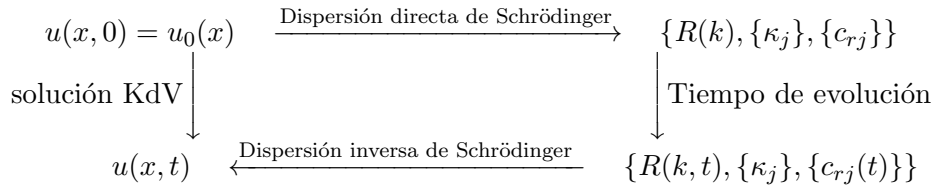


Figura 3.1: Diagrama del método TDI para la ecuación de KdV.

- (i) De $u(x, 0)$, obtener los correspondientes datos de dispersión $S(k, 0) = \{R(k), \{\kappa_j\}, \{c_{rj}\}\}$. El problema de dispersión directa $u_0(x) \mapsto S(k, 0)$ es equivalente a resolver (2.9) con $V(x) = u_0(x)$, y obtener las soluciones de Jost, de donde $S(k, 0)$ puede ser construida.
- (ii) Calcular la evolución de los datos de dispersión en el tiempo $\{R(k), \{\kappa_j\}, \{c_{rj}\}\} \mapsto \{R(k, t), \{\kappa_j\}, \{c_{rj}(t)\}\}$ de acuerdo a (3.32).
- (iii) Con $S(k, t)$ como entrada, resolver el problema de dispersión inverso $S(k, t) \mapsto u(x, t)$ de la ecuación de Schrödinger (2.9) con $V(x) = u(x, t)$, el cual se describió en la Sección 2.2.

Es decir, la solución del problema inverso es obtenida usando el método de Marchenko como sigue:

De los datos de dispersión $\{R(k, t), \{\kappa_j\}, \{c_{rj}(t)\}\}$ como en (3.32), rescribir el núcleo de Marchenko (2.49) como

$$\Omega(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(k) e^{8tk^3 + ikz} \frac{dk}{2\pi} + \sum_{j=1}^N c_{rj}^2 e^{8\kappa_j^3 t - \kappa_j z}.$$

Resolver la correspondiente ecuación de Marchenko

$$K(x, y, t) + \Omega(x + y, t) + \int_x^{\infty} \Omega(z + y, t) K(x, z, t) dz = 0, \quad y > x,$$

y obtener la solución $K(x, y, t)$.

Finalmente, recobrar $u(x, t)$ usando

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial K(x, x, t)}{\partial x}.$$

Obteniendo así la solución del problema de Cauchy (3.1)-(3.2).

Capítulo 4

Método ABC

En este capítulo consideramos el método ABC propuesto por el profesor Tuncay Aktosun y sus colaboradores en el año 2006 [5] para encontrar soluciones exactas para ecuaciones diferenciales parciales integrables no lineales. Este método consiste en el uso de tres matrices A, B, C relacionados con una condición de controlabilidad y observabilidad [20] que permite resolver la ecuación KdV en forma explícita. La fórmula de la solución para la ecuación KdV tiene como entrada un triplete de matrices constantes (A, B, C) y es independiente de la dimensión de las matrices del triplete, pero compatibles. Construimos soluciones que son combinaciones algebraicas de funciones elementales. Las matrices A, B, C pueden contener grandes cantidades de información, lo que le da a esta fórmula de solución una forma compacta que facilita los cálculos en demostraciones de los resultados planteados.

Utilizaremos en lo que sigue la constante de norma c_{rj} que corresponde a la constante de norma definida mediante la solución de Jost $f_r(k, x)$, es decir, la solución de Jost por la derecha. Denotamos

$$c_j := c_{rj}^2. \quad (4.1)$$

Recordemos que los datos de dispersión

$$\{R(k, t) = R(k) e^{8itk^3}, \kappa_j(t) = \kappa_j, c_{rj}(t) = c_j e^{8\kappa_j^3 t}\}$$

del método de la transformación de dispersión inversa tomando en cuenta la evolución temporal están dados en la forma

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(k) e^{8ik^3 t + ik y} dk + \sum_{j=1}^N c_j e^{8\kappa_j^3 t - \kappa_j y}. \quad (4.2)$$

Donde, $R(k)$ es el coeficiente de reflexión por la derecha, el conjunto de constantes κ_j reales positivos corresponden a los estados acotados asociados con el potencial $u(x, 0)$ y

el conjunto de constantes reales c_j tales que $\sum_{j=1}^N |c_j| \neq 0$ corresponden a las constantes de norma asociadas con los estados acotados.

Si los datos de dispersión $\{R(k, t), \{\kappa_j\}, \{c_{rj}(t)\}\}$ corresponden al caso cuando $R(k) \equiv 0$, es decir, los coeficientes de dispersión son cero, tenemos que (4.2) se escribe como

$$\sum_{j=1}^N c_j e^{8\kappa_j^3 t - \kappa_j y}. \quad (4.3)$$

Observación 4.1. La igualdad (4.3) se puede escribir como

$$\Omega(y; t) = C e^{8tA^3 - yA} B. \quad (4.4)$$

donde

$$A := \begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \kappa_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \kappa_N \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad B := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad C := [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_N]_{1 \times N}, \quad (4.5)$$

con κ_j y c_j números reales positivos. Notemos que A es una matriz cuadrada de $N \times N$, B es una matriz columna de dimensión $N \times 1$ y C es una matriz fila de $1 \times N$, además todas las entradas de las matrices A, B y C son constantes reales.

Demostración. Sustituyendo (4.5) en (4.4), tenemos

$$\begin{aligned} \Omega(y; t) &= [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_N] \begin{bmatrix} e^{8t\kappa_1^3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{8t\kappa_2^3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{8t\kappa_N^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-y\kappa_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-y\kappa_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{-y\kappa_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_N] \begin{bmatrix} e^{8t\kappa_1^3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{8t\kappa_2^3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{8t\kappa_N^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-y\kappa_1} \\ e^{-y\kappa_2} \\ \vdots \\ e^{-y\kappa_N} \end{bmatrix} \\ &= [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_N] \begin{bmatrix} e^{8t\kappa_1^3 - y\kappa_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{8t\kappa_2^3 - y\kappa_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{8t\kappa_N^3 - y\kappa_N} \end{bmatrix} \\ &= [c_1 e^{8t\kappa_1^3 - y\kappa_1} + c_2 e^{8t\kappa_2^3 - y\kappa_2} + \cdots + c_N e^{8t\kappa_N^3 - y\kappa_N}] = \sum_{j=1}^N c_j e^{8t\kappa_j^3 - y\kappa_j}. \end{aligned}$$

□

4.1. Solución de la ecuación de Marchenko

En esta sección construimos la solución de la ecuación de Marchenko en términos de la triada matrices (A, B, C) .

Recordemos que la ecuación integral de Marchenko asociada con la ecuación KdV tiene la forma

$$K(x, y, t) + \Omega(x + y, t) + \int_x^\infty K(x, z, t)\Omega(y + z, t) dz = 0, \quad y > x > 0, \quad (4.6)$$

donde

$$\Omega(y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty R(k) e^{8ik^3t + iky} dk + \sum_{j=1}^N c_j e^{8\kappa_j^3 t - \kappa_j y}. \quad (4.7)$$

Con $\Omega(y, t)$ como en (4.4), es decir, para $R(k) \equiv 0$ hallamos la solución de la ecuación de Marchenko (4.6).

Lema 4.1. Sean A, B, C matrices como en (4.5). Entonces, la solución $K(x, y, t)$ de la ecuación de Marchenko (4.6) es

$$K(x, y, t) = -C e^{8tA^3 - Ax} \Gamma(x, t)^{-1} e^{-yA} B, \quad (4.8)$$

donde $\Gamma(x, t)$ es una matriz de la forma

$$\Gamma(x, t) := I + \int_x^\infty e^{-zA} BC e^{-zA} e^{8tA^3} dz, \quad (4.9)$$

asumimos además que

$$\det \Gamma(x, t) \neq 0. \quad (4.10)$$

Demostración. Notemos que la integral de la parte derecha de (4.9) esta bien definida ya que los elementos de la matriz A son números positivos. Por otro lado, de (4.4) tenemos que

$$\Omega(x + y, t) = C e^{8tA^3 - (x+y)A} B. \quad (4.11)$$

Podemos escribir $\Omega(x + y, t)$ para t fijo como un producto de una matriz que no contiene a x y un otra matriz que no contiene a y . Esta separabilidad se ve fácilmente de (4.11) escribiendo

$$\Omega(x + y, t) = C e^{8tA^3 - xA} e^{-yA} B. \quad (4.12)$$

Mostraremos que la separabilidad de $\Omega(x + y, t)$ implica la separabilidad de $K(x, y, t)$. Sustituyendo (4.12) en (4.6), obtenemos

$$K(x, y, t) + C e^{8tA^3 - xA} e^{-yA} B + \int_x^\infty K(x, z, t) C e^{8tA^3 - zA} e^{-yA} B dz = 0. \quad (4.13)$$

Despejando $K(x, y, t)$ al lado izquierdo de la ecuación (4.13), tenemos

$$K(x, y, t) = \left[-C e^{8tA^3 - xA} - \int_x^\infty K(x, z, t) C e^{8tA^3 - zA} dz \right] e^{-yA} B.$$

Equivalentemente, podemos escribir a $K(x, y, t)$ como

$$K(x, y, t) = M(x, t) e^{-yA} B, \quad (4.14)$$

donde $M(x, t)$ es la matriz de $1 \times N$ definida por

$$M(x, t) := C e^{8tA^3 - xA} + \int_x^\infty K(x, z, t) C e^{8tA^3 - zA} dz.$$

De (4.14) podemos ver que $K(x, y, t)$ puede ser escrito como un producto de una matriz que no depende de y , $M(x, t)$, y otra matriz de que no depende de x , $e^{-yA} B$.

Buscamos soluciones a la ecuación integral de Marchenko en la forma de (4.14) sustituyendo (4.14) en (4.13), llegamos a

$$M(x, t) e^{-yA} B + C e^{8tA^3 - xA} e^{-yA} B + \int_x^\infty M(x, t) e^{-zA} B C e^{8tA^3 - zA} e^{-yA} B dz = 0.$$

Factorizando $e^{-yA} B$ en el lado derecho de la expresión anterior obtenemos

$$\left(M(x, t) + C e^{8tA^3 - xA} + \int_x^\infty M(x, t) e^{-zA} B C e^{8tA^3 - zA} dz \right) e^{-yA} B = 0,$$

que es equivalente a

$$M(x, t) + C e^{8tA^3 - xA} + \int_x^\infty M(x, t) e^{-zA} B C e^{8tA^3 - zA} dz = 0. \quad (4.15)$$

Factorizando $M(x, t)$ al lado izquierdo de (4.15), tenemos

$$M(x, t) \left[I + \int_x^\infty e^{-zA} B C e^{8tA^3 - zA} dz \right] = -C e^{8tA^3 - xA}, \quad (4.16)$$

donde I es la matriz identidad de dimensión $N \times N$. Para resolver $M(x, t)$ de (4.9), obtenemos

$$M(x, t) = -C e^{8tA^3 t} e^{-xA} \Gamma^{-1}(x, t), \quad (4.17)$$

donde $\Gamma(x, t)$ es la matriz dada en (4.9). Finalmente usando (4.17) en (4.14), obtenemos la solución $K(x, y, t)$ de (4.6) como

$$K(x, y, t) = -C e^{8tA^3} e^{-xA} \Gamma^{-1}(x, t) e^{-yA} B, \quad (4.18)$$

donde $\Gamma(x, t)$ es la matriz definida en (4.9). \square

Teorema 4.2. *La relación entre la solución $K(x, y, t)$ de la ecuación integral de Marchenko (4.6) con la solución $u(x, t)$ de la ecuación KdV (3.1) está dado por*

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x, t). \quad (4.19)$$

La demostración de este teorema se puede ver en [15].

4.2. Solución exacta de la ecuación KdV

En la sección anterior describimos como las matrices A, B, C están relacionadas con los datos de dispersión. En esta sección contruimos la solución explícita de la ecuación KdV en términos de las tres matrices A, B y C .

Comenzamos analizando la matrix auxiliar $\Gamma(x, t)$ definida en (4.9). Reescribimos $\Gamma(x, t)$ como

$$\Gamma(x, t) = I + N(x) e^{8tA^3}, \quad (4.20)$$

donde

$$N(x) := \int_x^\infty e^{-zA} BC e^{-zA} dz. \quad (4.21)$$

De (4.21) podemos ver que elecciones arbitrarias de la matriz A pueden no garantizar la convergencia de la integral. Por lo tanto, solamente para elecciones apropiadas de la matriz A podemos garantizar la convergencia de dicha integral, para $x \in \mathbb{R}$ y t fijo. La integral $N(x)$ existe cuando la matriz A tiene eigenvalores κ_j reales positivos.

Lema 4.3. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y asumimos que los eigenvalores de la matriz A son reales positivos. Entonces*

a) *La matriz*

$$P = \int_0^\infty e^{-Az} BC e^{-Az} dz \quad (4.22)$$

es solución de la ecuación de Lyapunov

$$AP + PA = BC. \quad (4.23)$$

b) *Si A es una matriz diagonal con elementos reales positivos, entonces*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{2\kappa_1} & \frac{c_2}{\kappa_2 + \kappa_1} & \cdots & \frac{c_N}{\kappa_N + \kappa_1} \\ \frac{c_1}{\kappa_1 + \kappa_2} & \frac{c_2}{2\kappa_2} & \cdots & \frac{c_N}{\kappa_N + \kappa_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{c_1}{\kappa_1 + \kappa_N} & \frac{c_2}{\kappa_2 + \kappa_N} & \cdots & \frac{c_N}{2\kappa_N} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Demostración. Sustituyendo (4.22) en (4.23), tenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty A e^{-Az} BC e^{-Az} dz + \int_0^\infty e^{-Az} BC e^{-Az} A dz \\ &= - \int_0^\infty \left(\frac{d}{dz} e^{-Az} BC e^{-Az} \right) dz = - e^{-Az} BC e^{-Az} \Big|_0^\infty \\ &= BC \end{aligned}$$

Par la otra parte de (4.24) en (4.23), obtenemos

$$\begin{aligned}
 AP + PA &= \begin{pmatrix} \frac{\kappa_1 c_1}{2\kappa_1} & \frac{\kappa_1 c_2}{\kappa_2 + \kappa_1} & \cdots & \frac{\kappa_1 c_N}{\kappa_N + \kappa_1} \\ \frac{\kappa_2 c_1}{\kappa_1 + \kappa_2} & \frac{\kappa_2 c_2}{2\kappa_2} & \cdots & \frac{\kappa_2 c_N}{\kappa_N + \kappa_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\kappa_N c_1}{\kappa_1 + \kappa_N} & \frac{\kappa_N c_2}{\kappa_2 + \kappa_N} & \cdots & \frac{\kappa_N c_N}{2\kappa_N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\kappa_1 c_1}{2\kappa_1} & \frac{\kappa_2 c_2}{\kappa_2 + \kappa_1} & \cdots & \frac{\kappa_N c_N}{\kappa_N + \kappa_1} \\ \frac{\kappa_1 c_1}{\kappa_1 + \kappa_2} & \frac{\kappa_2 c_2}{2\kappa_2} & \cdots & \frac{\kappa_N c_N}{\kappa_N + \kappa_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\kappa_1 c_1}{\kappa_1 + \kappa_N} & \frac{\kappa_2 c_2}{\kappa_2 + \kappa_N} & \cdots & \frac{\kappa_N c_N}{2\kappa_N} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_N \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_N) = BC
 \end{aligned}$$

□

Entonces $N(x)$ se puede escribir como

$$N(x) = e^{-Ax} P e^{-Ax},$$

donde P es la matriz dada en (4.24). Así, la matriz $\Gamma(x, t)$ de (4.20) se puede calcular como

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x, t) &= I + e^{-Ax} P e^{-Ax} e^{8tA^3} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{c_1}{2\kappa_1} e^{8t\kappa_1^3 - 2x\kappa_1} & \frac{c_2}{\kappa_2 + \kappa_1} e^{8t\kappa_2^3 - x(\kappa_2 + \kappa_1)} & \cdots & \frac{c_N}{\kappa_N + \kappa_1} e^{8t\kappa_N^3 - x(\kappa_N + \kappa_1)} \\ \frac{c_1}{\kappa_1 + \kappa_2} e^{8t\kappa_1^3 - x(\kappa_1 + \kappa_2)} & 1 + \frac{c_2}{2\kappa_2} e^{8t\kappa_2^3 - 2x\kappa_2} & \cdots & \frac{c_N}{\kappa_N + \kappa_2} e^{8t\kappa_N^3 - x(\kappa_N + \kappa_2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{c_1}{\kappa_1 + \kappa_N} e^{8t\kappa_1^3 - x(\kappa_1 + \kappa_N)} & \frac{c_2}{\kappa_2 + \kappa_N} e^{8t\kappa_2^3 - x(\kappa_2 + \kappa_N)} & \cdots & 1 + \frac{c_N}{2\kappa_N} e^{8t\kappa_N^3 - 2x\kappa_N} \end{pmatrix} \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

Lema 4.4. Sea G una matriz de $n \times n$ con elementos continuos en un intervalo $I : a \leq x \leq b$ y supongase que Φ es una matriz de funciones en I que satisface

$$\frac{d}{dx} \Phi(x) = G(x) \Phi(x). \quad (4.26)$$

Entonces $\det \Phi$ satisface en I la siguiente ecuación

$$\frac{d}{dx} \det \Phi(x) = (\operatorname{tr} G)(\det \Phi(x)). \quad (4.27)$$

Cuando $\Phi(x)$ es invertible podemos escribir a (4.26) como $G(x) = \Phi^{-1}(x) \frac{d}{dx} \Phi(x)$ y reorganizando para obtener el resultado

$$\operatorname{tr} \left[\Phi^{-1}(x) \frac{d}{dx} \Phi(x) \right] = \det \Phi^{-1}(x) \frac{d}{dx} \det \Phi(x)$$

Demostración. Sea ϕ_{ij} , a_{ij} los elementos en la i -ésima fila y la j -ésima columna de Φ y G , respectivamente. Entonces (4.26) dice

$$\frac{d}{dx}\phi_{ij}(x) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(x)\phi_{kj}(x), \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (4.28)$$

La derivada de Φ es la suma de n determinantes

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \det \Phi(x) = & \begin{vmatrix} \phi'_{11} & \phi'_{12} & \cdots & \phi'_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi'_{21} & \phi'_{22} & \cdots & \phi'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix} \\ & + \cdots + \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \phi'_{n1} & \phi'_{n2} & \cdots & \phi'_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Usando (4.28) en el primer determinante a la derecha, obtenemos

$$\begin{vmatrix} \sum_k a_{1k}\phi_{k1} & \sum_k a_{1k}\phi_{k2} & \cdots & \sum_k a_{1k}\phi_{kn} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix}$$

y este determinante no cambia si se resta de la primera fila a_{12} veces la segunda fila más a_{13} veces la tercera fila hasta a_{1n} veces la n -ésima fila. Esto da

$$\begin{vmatrix} a_{11}\phi_{11} & a_{11}\phi_{12} & \cdots & a_{11}\phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix},$$

que es solo $a_{11} \det \Phi$. Realizando un procedimiento similar con los determinantes restantes, se obtiene finalmente (4.27). \square

Teorema 4.5. Sean las matrices A, B, C como en (4.5) y la función $\Gamma(x, t)$ como en (4.9). Entonces, la solución de la ecuación KdV se puede expresar de manera equivalente como:

$$a) \quad u(x, t) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[C e^{8tA^3 - Ax} \Gamma(x, t)^{-1} e^{-xA} B \right]. \quad (4.29)$$

$$b) \quad u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{tr} \left[\Gamma(x, t)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(x, t) \right], \quad (4.30)$$

c)

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial x} \det \Gamma(x, t)}{\det \Gamma(x, t)} \right]. \quad (4.31)$$

Demostración. a) Tomando en cuenta (4.18) y el Teorema 4.2 la solución de la ecuación KdV $u(x, t)$ se escribe como (4.29).

b) La solución $u(x, t)$ de (4.29) es una cantidad escalar y como una cantidad escalar es igual a la traza de la cantidad al lado derecho de (4.29). Por lo tanto,

$$u(x, t) = \text{tr} \left(2 \frac{\partial}{\partial x} \left[C e^{8tA^3 - Ax} \Gamma(x, t)^{-1} e^{-xA} B \right] \right), \quad (4.32)$$

donde tr denota la traza de la matriz que por definición es la suma de las entradas de la diagonal principal.

Por otra parte, la traza de una matriz satisface las siguientes propiedades:

$$\text{tr} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\text{tr}(G)), \quad \text{tr}(G H) = \text{tr}(H G),$$

para G, H matrices. Así, usando estas propiedades en (4.32), obtenemos

$$u(x, t) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\text{tr} \left[\Gamma(x, t)^{-1} e^{-xA} B C e^{8tA^3 - Ax} \right] \right). \quad (4.33)$$

Luego de (4.9) tenemos que la derivada de $\Gamma(x, t)$ es

$$\frac{\partial}{\partial x} \Gamma(x, t) = -e^{-xA} B C e^{8tA^3 - Ax}.$$

De esto se sigue que (4.33) se puese escribir como

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} \text{tr} \left[\Gamma(x, t)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \Gamma(x, t) \right]. \quad (4.34)$$

c) Finalmente, usando el resultado del Lema 4.4 en (4.34), obtenemos

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial x} \det \Gamma(x, t)}{\det \Gamma(x, t)} \right].$$

□

Algoritmo de la solución $u(x, t)$ de la ecuación de KdV mediante el método ABC

- (i) Primero elegimos un triplete constante de matrices (A, B, C) de la forma (4.5), con A tal que $\text{Re}(\kappa_j) > 0$ y C tal que sus elementos sean positivos.
- (ii) Construir la matriz auxiliar P como (4.24).
- (iii) Usando el triplete de matrices (A, B, C) y la matriz auxiliar P construimos la función $\Gamma(x, t)$ de la forma (4.25).
- (iv) Finalmente obtenemos la solución $u(x, t)$ de la ecuación KdV (3.1) mediante (4.31).

4.3. Ejemplos

En esta sección ilustramos el método de construir soluciones exactas de la ecuación de KdV con algunos ejemplos concretos.

Ejemplo 4.1. *Consideremos el caso de un solo estado acotado, entonces sea*

$$A = (\kappa_1), \quad B = (1), \quad C = (c_1), \quad (4.35)$$

donde $\kappa_1, c_1 > 0$. Usando $\Gamma(x, t)$ de (4.25), obtenemos

$$\Gamma(x, t) = 1 + \frac{c_1}{2\kappa_1} e^{8t\kappa_1^3 - 2\kappa_1 x},$$

por lo tanto de (4.31) construimos la solución como

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{-c_1 e^{8t\kappa_1^3 - 2\kappa_1 x}}{1 + \frac{c_1}{2\kappa_1} e^{8t\kappa_1^3 - 2\kappa_1 x}} \right] = \frac{-16c_1\kappa_1^3 e^{8t\kappa_1^3 + 2\kappa_1 x}}{(c_1 e^{8t\kappa_1^3} + 2\kappa_1 e^{2\kappa_1 x})^2} \\ &= \frac{-4c_1\kappa_1 e^{8t\kappa_1^3 - 2\kappa_1 x}}{\left(1 + \frac{c_1}{2\kappa_1} e^{8t\kappa_1^3 - 2\kappa_1 x}\right)^2} \\ &= \frac{-8\kappa_1^2}{\left(\sqrt{\frac{2\kappa_1}{c_1}} e^{-4t\kappa_1^3 + \kappa_1 x} + \sqrt{\frac{c_1}{2\kappa_1}} e^{4t\kappa_1^3 - \kappa_1 x}\right)^2} \\ &= -2\kappa_1^2 \operatorname{sech}^2(\kappa_1 x - 4\kappa_1^3 t + \theta), \quad \text{donde } \theta = \log \sqrt{\frac{2\kappa_1}{c_1}}. \end{aligned}$$

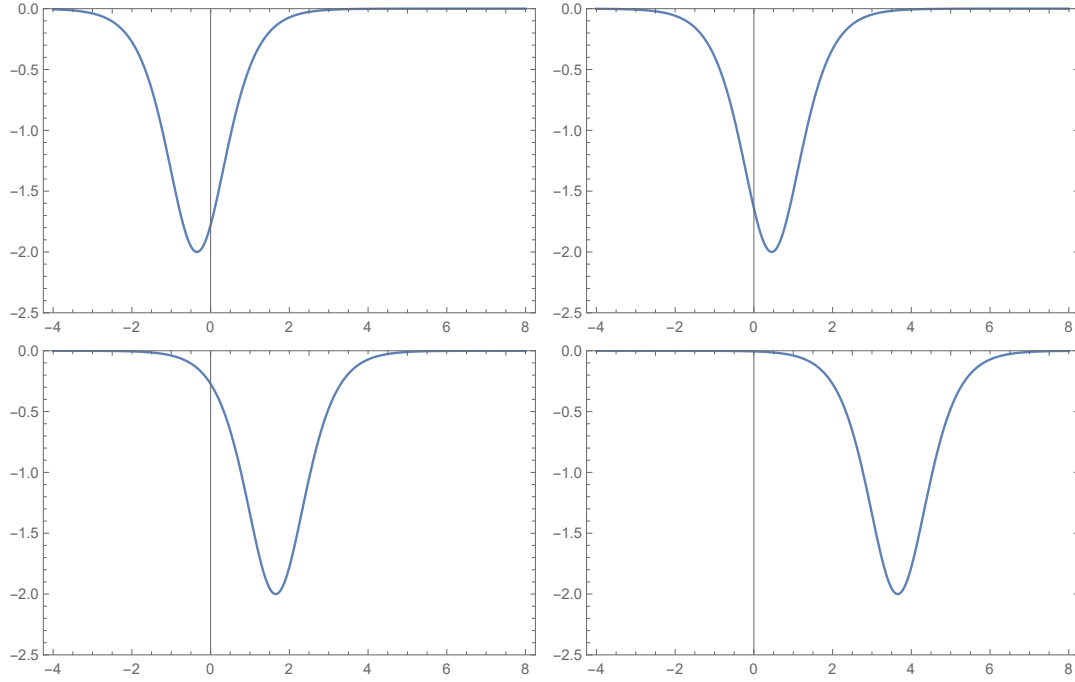


Figura 4.1: Solución solitón para $N=1$ con $\kappa_1 = 1$, $c_1 = 1$, $t \in [0, 1]$.

Ejemplo 4.2. Sea el triplete (A, B, C) con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (3 \ 1). \quad (4.36)$$

De (4.36) en $\Gamma(x, t)$ de (4.25), tenemos

$$\begin{aligned} \Gamma(x, t) &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{c_1}{2\kappa_1} e^{8t\kappa_1^3 - 2x\kappa_1} & \frac{c_2}{\kappa_2 + \kappa_1} e^{8t\kappa_2^3 - x(\kappa_2 + \kappa_1)} \\ \frac{c_1}{\kappa_1 + \kappa_2} e^{8t\kappa_1^3 - x(\kappa_1 + \kappa_2)} & 1 + \frac{c_2}{2\kappa_2} e^{8t\kappa_2^3 - 2x\kappa_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{2} e^{8t-2x} & \frac{1}{3} e^{64t-3x} \\ e^{8t-3x} & 1 + \frac{1}{4} e^{64t-4x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego de (4.31) encontramos la solución $u(x, t)$ de la ecuación KdV en la forma

$$u(x, t) = -\frac{48 e^{8t+2x} (e^{128t} + 144 e^{8x} + 24 e^{72t+2x} + 72 e^{64t+4x} + 96 e^{56t+6x})}{(e^{72t} + 24 e^{6x} + 6 e^{64t+2x} + 36 e^{8t+4x})^2}$$

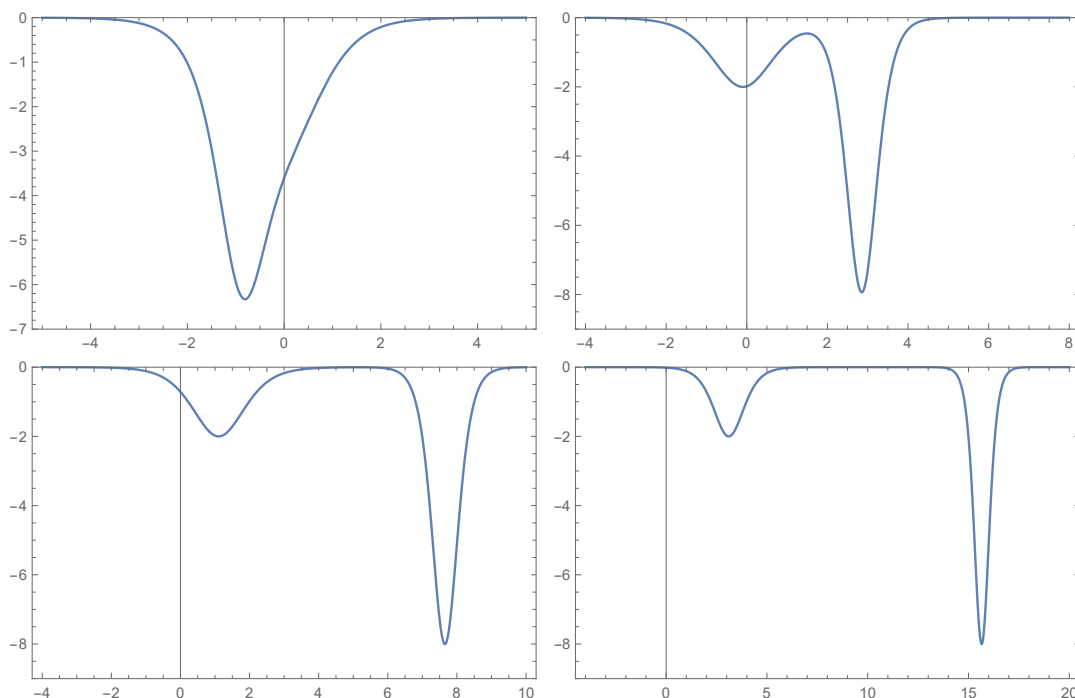


Figura 4.2: Solución solitón $N = 2$ para $t \in [0, 1]$.

Ejemplo 4.3. Sea el triplete (A, B, C) con

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \left(\frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \right). \quad (4.37)$$

De (4.25) construimos $\Gamma(x, t)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Gamma(x, t) &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{c_1}{2\kappa_1} e^{8t\kappa_1^3 - 2x\kappa_1} & \frac{c_2}{\kappa_2 + \kappa_1} e^{8t\kappa_2^3 - x(\kappa_2 + \kappa_1)} & \frac{c_3}{\kappa_3 + \kappa_1} e^{8t\kappa_3^3 - x(\kappa_3 + \kappa_1)} \\ \frac{c_1}{\kappa_1 + \kappa_2} e^{8t\kappa_1^3 - x(\kappa_1 + \kappa_2)} & 1 + \frac{c_2}{2\kappa_2} e^{8t\kappa_2^3 - 2x\kappa_2} & \frac{c_3}{\kappa_3 + \kappa_2} e^{8t\kappa_3^3 - x(\kappa_3 + \kappa_2)} \\ \frac{c_1}{\kappa_1 + \kappa_3} e^{8t\kappa_1^3 - x(\kappa_1 + \kappa_3)} & \frac{c_2}{\kappa_2 + \kappa_3} e^{8t\kappa_2^3 - x(\kappa_2 + \kappa_3)} & 1 + \frac{c_3}{2\kappa_3} e^{8t\kappa_3^3 - 2x\kappa_3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{e^{2\sqrt{2}(8t-x)}}{12\sqrt{2}} & \frac{e^{8t-(1+\sqrt{2})x}}{6(1+\sqrt{2})} & \frac{e^{2\sqrt{2}(8t-x)}}{6\sqrt{2}} \\ \frac{e^{16\sqrt{2}t-(\sqrt{2}+1)x}}{6(\sqrt{2}+1)} & 1 + \frac{e^{8t-2x}}{12} & \frac{e^{2\sqrt{2}(8t-x)}}{3(\sqrt{2}+1)} \\ \frac{e^{2\sqrt{2}(8t-x)}}{12\sqrt{2}} & \frac{e^{8t-(1+\sqrt{2})x}}{6(1+\sqrt{2})} & \frac{e^{2\sqrt{2}(8t-x)}}{6\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y por lo tanto de (4.31) obtenemos la siguiente solución

$$u(x, t) = -64 e^{2x} \left((-48 + 34\sqrt{2}) e^{2(1+\sqrt{2})(8t+x)} + (51 - 36\sqrt{2}) e^{4((2+8\sqrt{2})t+x)} \right. \\ \left. + 96 e^{4(2t+x+\sqrt{2}x)} + 24(-4 + 3\sqrt{2}) e^{8(1+2\sqrt{2})t+2(2+\sqrt{2})x} + 288\sqrt{2} e^{16\sqrt{2}t+2(3+\sqrt{2})x} \right) / \\ \left(96 e^{2(2+\sqrt{2})x} + 12\sqrt{2} e^{4(4\sqrt{2}t+x)} + (-24 + 17\sqrt{2}) e^{2((4+8\sqrt{2})t+x)} + 8 e^{2(4t+x+\sqrt{2}x)} \right)^2$$

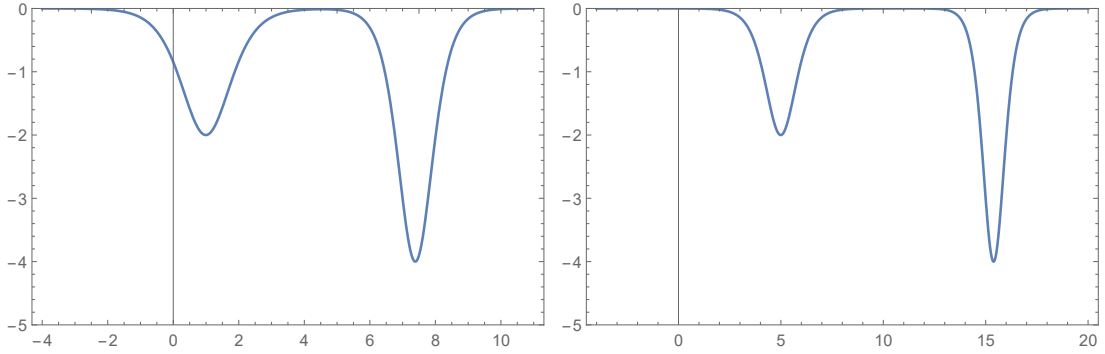


Figura 4.3: Solución solitón $N = 3$ para $t = 1$ y $t = 2$.

Ejemplo 4.4. Consideremos el triplete de matrices (A, B, C) con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 2 \quad 2 \quad 1). \quad (4.38)$$

Mediante (4.25), obtenemos

$$\Gamma(x, t) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{c_1 e^{8t\kappa_1^3 - 2x\kappa_1}}{2\kappa_1} & \frac{c_2 e^{8t\kappa_2^3 - x(\kappa_2 + \kappa_1)}}{\kappa_2 + \kappa_1} & \frac{c_3 e^{8t\kappa_3^3 - x(\kappa_3 + \kappa_1)}}{\kappa_3 + \kappa_1} & \frac{c_4 e^{8t\kappa_4^3 - x(\kappa_4 + \kappa_1)}}{\kappa_4 + \kappa_1} \\ \frac{c_1 e^{8t\kappa_1^3 - x(\kappa_1 + \kappa_2)}}{\kappa_1 + \kappa_2} & 1 + \frac{c_2 e^{8t\kappa_2^3 - 2\kappa_2 x}}{2\kappa_2} & \frac{c_3 e^{8t\kappa_3^3 - x(\kappa_3 + \kappa_2)}}{\kappa_3 + \kappa_2} & \frac{c_4 e^{8t\kappa_4^3 - x(\kappa_4 + \kappa_2)}}{\kappa_4 + \kappa_2} \\ \frac{c_1 e^{8t\kappa_1^3 - x(\kappa_1 + \kappa_3)}}{\kappa_1 + \kappa_3} & \frac{c_2 e^{8t\kappa_2^3 - x(\kappa_2 + \kappa_3)}}{\kappa_2 + \kappa_3} & 1 + \frac{c_3 e^{8t\kappa_3^3 - 2x\kappa_3}}{2\kappa_3} & \frac{c_4 e^{8t\kappa_4^3 - x(\kappa_4 + \kappa_3)}}{\kappa_4 + \kappa_3} \\ \frac{c_1 e^{8t\kappa_1^3 - x(\kappa_1 + \kappa_4)}}{\kappa_1 + \kappa_4} & \frac{c_2 e^{8t\kappa_2^3 - x(\kappa_2 + \kappa_4)}}{\kappa_2 + \kappa_4} & \frac{c_3 e^{8t\kappa_3^3 - x(\kappa_3 + \kappa_4)}}{\kappa_3 + \kappa_4} & 1 + \frac{c_4 e^{8t\kappa_4^3 - 2x\kappa_4}}{2\kappa_4} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{4} e^{64t-4x} & \frac{2}{3} e^{8t-3x} & \frac{2}{3} e^{8t-3x} & \frac{1}{5} e^{216t-5x} \\ \frac{1}{5} e^{64t-3x} & 1 + e^{8t-2x} & e^{8t-2x} & \frac{1}{4} e^{216t-4x} \\ \frac{1}{3} e^{64t-3x} & e^{8t-2x} & 1 + e^{8t-2x} & \frac{1}{4} e^{216t-4x} \\ \frac{1}{3} e^{64t-5x} & \frac{1}{2} e^{8t-4x} & \frac{1}{2} e^{8t-4x} & 1 + \frac{1}{6} e^{216t-6x} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, mediante (4.31) obtenemos la siguiente solución

$$u(x, t) = -144 e^{8t+2x} (e^{560t} + 12960000 e^{20x} + 200 e^{504t+2x} + 300 e^{352t+4x} + 1800 e^{496t+4x} + 4800 e^{344t+6x} + 7200 e^{488t+6x} + 60000 e^{288t+8x} + 24300 e^{336t+8x} + 90000 e^{432t+8x} + 907200 e^{280t+10x} + 90000 e^{128t+12x} + 9720000 e^{224t+12x} + 540000 e^{272t+12x} + 2880000 e^{72t+14x} + 17280000 e^{216t+14x} + 6480000 e^{64t+16x} + 9720000 e^{208t+16x} + 6480000 e^{56t+18x}) / (e^{288t} + 10800 e^{12x} + 18 e^{280t+2x} + 900 e^{224t+4x} + 600 e^{72t+6x} + 1800 e^{216t+6x} + 2700 e^{64t+8x} + 21600 e^{8t+10x})^2$$

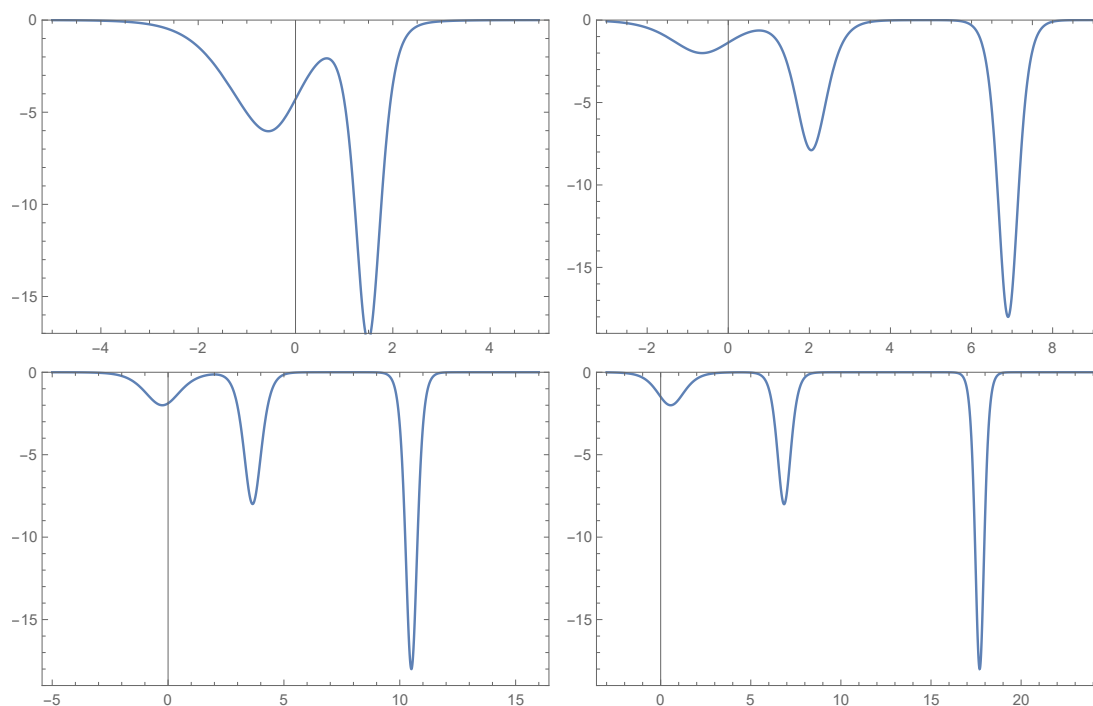


Figura 4.4: Solución solitón $N = 4$ para $t \in [0, 0.5]$.

Ejemplo 4.5. Consideremos el triplete de matrices (A, B, C) con

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \left(\frac{1}{4} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{2} \right). \quad (4.39)$$

De (4.39) en (4.25) construimos la matriz $\Gamma(x, t)$ como sigue

$$\Gamma(x, t) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{32} e^{\frac{8}{27}(64t-9x)} & \frac{2}{13} e^{216t-\frac{13}{3}x} & \frac{3}{14} e^{8t-\frac{7}{3}x} & \frac{3}{52} e^{216t-\frac{13}{3}x} & \frac{9}{16} e^{\frac{8}{27}(64t-9x)} \\ \frac{3}{52} e^{\frac{512}{27}t-\frac{13}{3}x} & 1 + \frac{1}{9} e^{216t-6x} & \frac{1}{8} e^{8t-4x} & \frac{1}{24} e^{216t-6x} & \frac{9}{26} e^{\frac{512}{27}t-\frac{13}{3}x} \\ \frac{3}{28} e^{\frac{512}{27}t-\frac{7}{3}x} & \frac{1}{6} e^{216t-4x} & 1 + \frac{1}{4} e^{8t-2x} & \frac{1}{16} e^{216t-4x} & \frac{9}{14} e^{\frac{512}{27}t-\frac{7}{3}x} \\ \frac{3}{52} e^{\frac{512}{27}t-\frac{13}{3}x} & \frac{1}{9} e^{216t-6x} & \frac{1}{8} e^{8t-4x} & 1 + \frac{1}{24} e^{216t-6x} & \frac{9}{26} e^{\frac{512}{27}t-\frac{13}{3}x} \\ \frac{3}{32} e^{\frac{8}{27}(64t-9x)} & \frac{2}{13} e^{216t-\frac{13}{3}x} & \frac{3}{14} e^{8t-\frac{7}{3}x} & \frac{3}{52} e^{216t-\frac{13}{3}x} & 1 + \frac{9}{16} e^{\frac{8}{27}(64t-9x)} \end{pmatrix}$$

De (4.31) tenemos que la solución de la ecuación KdV tiene la forma

$$\begin{aligned} u(x, t) = & -128 e^{8t+2x} \left(100051875 e^{\frac{12688}{27}t} + 114514400 e^{\frac{12392}{27}t+\frac{2}{3}x} + 89148837593088 e^{\frac{52}{3}x} + \right. \\ & 11222411200 e^{\frac{12176}{27}t+\frac{8}{3}x} + 203281650 e^{\frac{7072}{27}t+4x} + 1436468633600 e^{\frac{11960}{27}t+\frac{14}{3}x} + 520206855168 e^{432t+\frac{16}{3}x} \\ & + 141664723200 e^{\frac{6856}{27}t+6x} + 63336873600 e^{\frac{6560}{27}t+\frac{20}{3}x} + 31237071465600 e^{\frac{6640}{27}t+8x} + \\ & 30854067019776 e^{\frac{6344}{27}t+\frac{26}{3}x} + 7661228230656 e^{224t+\frac{28}{3}x} + 198624435609600 e^{\frac{6128}{27}t+\frac{32}{3}x} + \\ & 108959690391552 e^{216t+\frac{34}{3}x} + 783534705408 e^{\frac{1024}{27}t+12x} + 530647842816 e^{\frac{728}{27}t+\frac{38}{3}x} + \\ & \left. 490318606761984 e^{208t+\frac{40}{3}x} + 13000872148992 e^{\frac{512}{27}t+\frac{44}{3}x} + 416027908767744 e^{\frac{296}{27}t+\frac{50}{3}x} \right) / \\ & 3 \left(825 e^{\frac{6560}{27}t} + 43610112 e^{\frac{32}{3}x} + 646800 e^{\frac{6344}{27}t+2x} + 416416 e^{224t+\frac{8}{3}x} + 6662656 e^{216t+\frac{14}{3}x} \right. \\ & \left. + 146016 e^{\frac{728}{27}t+6x} + 28619136 e^{\frac{512}{27}t+8x} + 10902528 e^{8t+\frac{26}{3}x} \right)^2 \end{aligned}$$

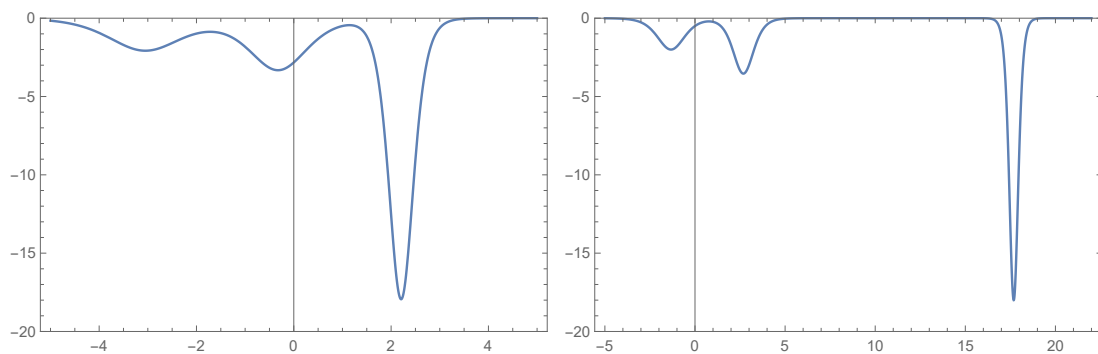


Figura 4.5: Solución solitón $N = 5$ para $t \in [0, 0.5]$.

Apéndice A

Definición 4.1. [18] La expresión $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow +\infty$ significa que existe $C > 0$ y $N > 0$ tal que $|f(x)| \leq C|g(x)|$ para toda $x > N$.

Definición 4.2. [18] La expresión $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow +\infty$ significa que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) > 0$ tal que $|f(x)| \leq \varepsilon \cdot |g(x)|$ para $x > N(\varepsilon)$.

Equivalentemente, la expresión $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow +\infty$ significa que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Definición 4.3. [17] Denotamos por $L^1(\mathbb{R})$ el espacio de funciones integrables (medibles) en \mathbb{R} . Para $f \in L^1(\mathbb{R})$ escribimos

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Definición 4.4. [17] Sea f una función integrable definida en \mathbb{R} , $f \in L^1(\mathbb{R})$. Su transformada de Fourier será la función definida también en \mathbb{R} , que representamos como \hat{f} , dada por

$$\mathcal{F}[f](k) := \hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx.$$

La transformada inversa de Fourier de la función f está definida por:

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) := f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk.$$

Definimos para $R > 0$ el semicírculo en el plano superior e inferior

$$C_R^+ = \{z | z = R e^{i\theta}, \theta \in [0, \pi]\}, \quad C_R^- = \{z | z = R e^{i\theta}, \theta \in [-\pi, 0]\}.$$

Teorema 4.6. Si f es una función analítica en el plano superior $\text{Im } z > 0$, excepto para puntos z_1, \dots, z_n , con $\text{Im } z_k > 0$, y

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \max_{z \in C_R^+} |f(z)| = 0,$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

Similarmente para f analítica en el plano inferior.

Si la integral es una integral de Fourier, podemos obtener un resultado más nítido. Consideramos la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx,$$

con f analítica en cualquier parte excepto para puntos $z_{-m}, \dots, z_{-1}, z_1, \dots, z_n$ con $\text{Im } z_k > 0$ si $k > 0$ ($\text{Im } z_k < 0$ si $k < 0$).

Lema 4.7. (Jordan) Si $\omega > 0$ y $\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{z \in C_R^+} |f(z)| = 0$, entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^+} f(z) dz = 0, \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z) e^{i\omega z}, z_k).$$

Si $\omega < 0$ y $\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{z \in C_R^-} |f(z)| = 0$, entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^-} f(z) dz = 0, \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx = -2\pi i \sum_{k=-1}^{-m} \text{Res}(f(z) e^{i\omega z}, z_k).$$

Teoría Espectral

En esta sección recordamos algunos resultados estándar del análisis funcional.

Definición 4.5. Una medida μ en un espacio de medida (M, \mathcal{F}) se llama **Borel** si \mathcal{F} es una σ algebra que contiene todos los conjuntos de Borel, o de manera equivalente si μ se define en todos los conjuntos abiertos de M , y por lo tanto todos los conjuntos de Borel. Una medida de Borel se llama **regular** si

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) | E \subset V, V : \text{abierto}\} = \sup\{\mu(K) | K \subset E, K : \text{compacto}\}.$$

Teorema 4.8. Sea M un espacio métrico localmente compacto, tal que cada conjunto abierto es una unión contable de conjuntos compactos. Si una medida de Borel μ en M es finita en un conjunto compacto, entonces μ es regular.

Definición 4.6. Sea D un subespacio lineal de \mathcal{H} . Un mapeo lineal $H : D \rightarrow \mathcal{H}$ es llamado un operador lineal del dominio D . El dominio D se denotará como $D(H)$. Decimos que H está **densamente definida** en H si $D(H)$ es denso en H .

Definición 4.7. Decimos que dos operadores H_1, H_2 en $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ son **unitariamente equivalentes** si existe una biyección $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ que satisface

1. $\langle U\phi, U\psi \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_1} \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}_1,$
2. $UD(H_1) = D(H_2),$
3. $UH_1U^{-1} = H_2.$

Definición 4.8. La **gráfica** de un operador lineal H en $D(H) \subset \mathcal{H}$ se define como

$$\Gamma(H) := \{ \langle \phi, H\psi \rangle \mid \phi \in D(H) \} \subset D(H) \times \text{Ran}(H) \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \quad (4.40)$$

donde $\text{Ran}(H)$ es el rango de H .

Note que para un espacio de Hilbert \mathcal{H} , $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ es también un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle (\phi_1, \psi_1), (\phi_2, \psi_2) \rangle = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle + \langle \psi_1, \psi_2 \rangle. \quad (4.41)$$

Definición 4.9. Un operador H es **cerrado**, si su gráfica es un subconjunto cerrado de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

Operadores adjuntos

Definición 4.10. Operadores Adjuntos Sea H un operador lineal densamente definido en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Sea $D(H^*)$ el conjunto de todos los $\phi \in \mathcal{H}$, para los cuales existe un $\eta \in \mathcal{H}$ tal que

$$\langle H\psi, \phi \rangle = \langle \psi, \eta \rangle \quad \text{para toda } \psi \in D(H). \quad (4.42)$$

Para tal $\phi \in D(H^*)$, sea

$$H^*\phi = \eta. \quad (4.43)$$

Llamamos a H^* definido en $D(H^*)$ el adjunto de H .

H es **auto-adjunto** si y sólo si $D(H^*) = D(H)$ y $H^*\phi = H\phi$ para toda $\phi \in D(H)$.

Definición 4.11. Un operador H densamente definido en \mathcal{H} es **simétrico** si H^* es una extensión de H ; esto es, si

$$\langle H\phi, \psi \rangle = \langle \phi, H\psi \rangle \quad \text{para toda } \phi, \psi \in D(H). \quad (4.44)$$

Una sutileza importante de esta definición es que, incluso si $D(H)$ es denso, $D(H^*)$ es no necesariamente denso (podría suceder que $D(H^*) = \{0\}$), y, por lo tanto, η no se pueda determinar de forma única. Sin embargo, si $D(H^*)$ es denso y existe η , entonces se determina de manera única. Del mismo modo, auto-adjunto es un fortalecimiento no trivial de lo simétrico, el teorema espectral es válido solo para los operadores auto-adjuntos, no para operadores simétricos en general.

Definición 4.12. Un operador simétrico H se dice que es **esencialmente auto-adjunto** si \bar{H} es auto-adjunto.

Teorema 4.9. [1, Teorema VIII.1] Sea H un operador densamente definido en \mathcal{H} . Entonces

1. H^* es cerrado.
2. H es cerrable si y sólo si $D(H^*)$ es denso; en este caso, $\bar{H} = (H^*)^* =: H^{**}$.
3. Si H es cerrable, entonces $(\bar{H})^* = H^*$.

Un Corolario obvio es que todos los operadores auto-adjuntos son cerrados.

Teorema 4.10. Criterio para Auto-Adjuntos [1, Teorema VIII.3] Si H es un operador simétrico en \mathcal{H} , entonces los siguientes son equivalentes:

1. H es auto-adjunto.
2. H es cerrado y $\ker(H^* \pm i) = \{0\}$.
3. $\text{Ran}(H \pm i) = \mathcal{H}$.

Clases de operadores

Definición 4.13. Decimos que un operador H en \mathcal{H} es **acotado** si $D(H) = \mathcal{H}$ y

$$\|H\| =: \sup_{\|\psi\|=1} \|H\psi\| < \infty.$$

Definición 4.14. Un operador acotado H en \mathcal{H} se dice que es auto-adjunto si

$$\langle \phi, H\psi \rangle = \langle H\phi, \psi \rangle \quad \forall \phi, \psi \in D(H) = \mathcal{H}.$$

Teorema 4.11. Hellinger-Toeplitz Sea H un operador en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , que satisface $\langle H\phi, \psi \rangle = \langle \phi, H\psi \rangle$ para todo $\psi, \phi \in \mathcal{H}$. Entonces H es acotado.

Definición 4.15. Definimos una **p -clase** \mathfrak{C}_p de un operador como aquellos operadores A definidos en todas partes en un espacio de Hilbert separable \mathcal{H} , tal que

$$(\|A\|_p)^p = \sum_j \langle e_j, (A^*A)^{\frac{p}{2}}, e_j \rangle < \infty.$$

Donde $\{e_j\}$ forman una base ortogonal de \mathcal{H} .

En particular, la **Clase Traza** son los operadores anteriores con $p = 1$, y **Hilbert-Schmidt** son aquellos con $p = 2$.

Teorema 4.12. *Sea H un operador Hilbert-Schmidt en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Entonces, existe una función $k : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $k \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, tal que*

$$(Hu)(x) = \int k(x, y)u(y)dy.$$

k es llamado el kernel de la integral de H .

Definición 4.16. *Un operador $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es **compacto** si, para cada secuencia acotada $\{h_n\} \subset \mathcal{H}$, $\{Kh_n\}$ tiene una subsecuencia convergente.*

El conjunto de todos los operadores compactos es la cerradura del conjunto de operadores de rango finito; Es decir, el conjunto de todos los operadores K cuyo rango es de dimensión finita. De esto queda claro que todos los operadores clase Traza y Hilbert-Schmidt son compactos.

Espectro y conjunto resolvente

Definición 4.17. *El conjunto **resolvente** $\rho(H)$, de un operador cerrado H en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , es definido como*

$$\rho(H) = \{z \in \mathbb{C} | (H - z1) \text{ es una biyección de } D(T) \text{ sobre } \mathcal{H} \text{ con inversa acotada } (H - z1)^{-1}\}.$$

Definición 4.18. *El **espectro** $\sigma(H)$, de un operador H en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , es definido como*

$$\sigma(H) := \mathbb{C} \setminus \rho(H) = \{z \in \mathbb{C} | z \notin \rho(H)\}.$$

Teorema 4.13. *Para un operador auto-adjunto H , el espectro $\sigma(H) \subset \mathbb{R}$.*

Definición 4.19. *Un operador H es llamado **positivo** si $\sigma(H) \subset [0, +\infty)$.*

Definición 4.20. $z \in \mathbb{C}$ es un **eigenvalor** de H si existe $\psi_z \in D(H) \subset \mathcal{H}$, $\psi_z \neq 0$, tal que $H\psi_z = z\psi_z$. Denotamos el **espectro de puntos puros** por

$$\sigma_{pp}(H) := \{z | z \text{ es un eigenvalor de } H\}.$$

Observación 4.2. *Puede existir ψ_z en \mathbb{R} tal que $H\psi_z = z\psi_z$, pero que no satisface el requisito $\psi_z \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$; en tales casos, $z \in \sigma(H)$.*

Proposición 4.14. *Para un operador cerrado densamente definido H en \mathcal{H} , y $z \in \rho(H)$:*

1. $\rho(H) \subset \mathbb{C}$ es abierto.

2. $(H - z)^{-1}$ es norma-analítica en z , i.e. el límite $\lim_{w \rightarrow z} \frac{(H - w)^{-1} - (H - z)^{-1}}{w - z}$ existe para toda $z \in \rho(K)$.
3. $\{(H - z)^{-1} | z \in \rho(H)\}$ es una familia conmutativa de operadores acotados.

Proposición 4.15. Identidad resolvente Sea H un operador cerrado densamente definido y $z, w \in \rho(H)$. Entonces

$$(H - z)^{-1} - (H - w)^{-1} = (z - w)(H - z)^{-1}(H - w)^{-1}. \quad (4.45)$$

Proposición 4.16. Sea H_1, H_2 dos operadores auto-adjuntos en espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, respectivamente. Entonces el operador $H := H_1 \oplus H_2$ con dominio $D(H) := D(H_1) \oplus D(H_2)$ es también auto-adjunto y, $\forall z \in \rho(H_1) \cap \rho(H_2) = \rho(H)$

$$(H - z)^{-1} = (H_1 - z)^{-1} \oplus (H_2 - z)^{-1}.$$

Construcción de medida espectral

Teorema 4.17. Teorema de Representación de Riesz Sea X un espacio métrico localmente compacto, y sea Λ un funcional lineal acotado positivo en $C_0(X)$. Entonces existe una σ -álgebra \mathcal{F} en X , que contiene todos los conjuntos de Borel en X , y una única medida positiva μ en \mathcal{F} tal que

$$\Lambda(f) = \int_X f d\mu$$

para toda $f \in C_0(X)$. Además, μ es regular, y $\mu(X_1) < \infty$ para cada compacto $X_1 \subset X$.

Teorema 4.18. Cálculo de Funcional Continuo para operadores Auto-Adjuntos [1, Teorema VII.1] Sea A un operador auto-adjunto en \mathcal{H} , y sea $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ un conjunto de operadores lineales acotados en \mathcal{H} . Entonces existe un único mapeo $\Phi : \mathcal{C}(\sigma(A)) \rightarrow \mathbb{C}$ con las siguientes propiedades:

1. Φ es un homomorfismo $*$ -algebraico i.e.

$$\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g), \quad \Phi(\lambda f) = \lambda\Phi(f), \quad \Phi(1) = 1, \quad \Phi(\bar{f}) = \Phi(f)^*.$$

2. Φ es una norma continua ($\|\Phi(h)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \|h\|_{\infty}$).
3. Si $f(x) = x$, entonces $\Phi(h) = A$.

Además Φ tiene las siguientes propiedades adicionales:

- Si $A\psi = \lambda\psi$, entonces $\Phi(h)\psi = h(\lambda)\psi$,
- $\sigma(\Phi(f)) = \{f(\lambda) | \lambda \in \sigma(A)\}$,
- Si $f \geq 0$, entonces $\Phi(f) \geq 0$.
- $\|\Phi(f)\| = \|f\|_\infty$.

Dado un vector $\phi \in \mathcal{H}$, definimos el funcional lineal $\Lambda_\phi(f) : \mathcal{C}(\sigma(A)) \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$\Lambda_\phi(f) := \langle \phi, f(H)\phi \rangle.$$

El teorema previo nos dice que Λ_ϕ es positiva y acotada. Entonces por el teorema de Riesz, existe una única medida $\mu_{\phi,A}$, tal que

$$\langle \phi, f(H)\phi \rangle = \int f(\lambda) d\mu_{\phi,A}. \quad (4.46)$$

Donde A es acotado, $\sigma(A)$ es compacto, y por lo tanto $\mu_{A,\phi}$ es finito. La medida $\mu_{A,\phi}$ es llamada **medida espectral** para A y ψ . La medida espectral nos permite definir $h(A)$ para cualquier función de Borel h de la siguiente manera. El valores de expectación $\langle \phi, h(A)\phi \rangle$ están determinados por la relación

$$\langle \phi, h(H)\phi \rangle = \int h(\lambda) d\mu_{\phi,A}. \quad (4.47)$$

La siguiente **Identidad de polarización**

$$4\langle \phi, A\eta \rangle = \langle (\phi + \eta), A(\phi + \eta) \rangle - \langle (\phi - \eta), A(\phi - \eta) \rangle + \\ + i \langle (\phi - i\eta), A(\phi - i\eta) \rangle - i \langle (\phi + \eta), A(\phi + \eta) \rangle$$

implica que también todos los valores del producto escalar de la forma $\langle \eta, h(H)\phi \rangle$ se determinan de forma única. Claramente, los valores de los productos escalares $\langle \eta, h(H)\phi \rangle$ determinan de manera única $h(A)$. Por lo tanto, el mapeo ϕ en el teorema 4.18 se puede extender a las funciones de Borel.

Teorema 4.19. Cálculo Funcional de Borel para operadores Auto-Adjuntos

[1, Teorema VIII.5] *Sea A un operador auto-adjunto acotado en \mathcal{H} , $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ el conjunto de operadores lineales acotados en \mathcal{H} y $h, \{h_n\} \in \mathcal{B}(\sigma(A))$. Existe un único mapeo $\hat{\Phi}$ que mapea funciones de Borel acotadas de \mathbb{R} en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ con las siguientes propiedades:*

1. $\hat{\Phi}$ es un homomorfismo $*$ -algebraico.
2. $\hat{\Phi}$ es una norma continua $\left(\|\hat{\Phi}(h)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \|h\|_\infty \right)$.

3. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = x$ para cada x y $|h_n(x)| \leq |x|$ para toda x y n , entonces para cualquier $\psi \in D(H)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\Phi}(h_n) = H\psi$.
4. Si $\|h_n(x)\|_\infty$ es una secuencia acotada y $h_n(x) \rightarrow h(x)$ puntualmente, entonces $\hat{\Phi}(h_n) \rightarrow \hat{\Phi}(h)$ fuertemente.
5. Si $H\psi = \lambda\psi$, $\hat{\Phi}(h)\psi = h(\lambda)\psi$.
6. Si $h \geq 0$, entonces $\hat{\Phi}(h) \geq 0$.

Definición 4.21. Decimos que ψ es cíclico para A si y sólo si $\text{Span}\{A^n | n \in \mathbb{N}\}$ es denso en \mathcal{H} .

Teorema 4.20. Sea A un operador auto-adjunto con un vector cíclico ϕ . Entonces hay un operador unitario $U : L^2(\sigma(A), d\mu_{A,\phi}) \rightarrow \mathcal{H}$, tal que

$$UAU^{-1}f(\lambda) = \lambda f(\lambda).$$

Observación 4.3. También es posible ver UAU^{-1} como un operador en $L^2(\mathbb{R}, d\mu_{A,\phi})$ con $\sigma(A) = \text{supp}(\mu_{A,\phi})$.

Teorema 4.21. Teorema de la Descomposición Para cada espacio separable de Hilbert \mathcal{H} y operador auto-adjunto A , existe una forma de descomponer \mathcal{H} y A en \mathcal{H}_n y A_n de tal manera que para toda n , existe ψ_n que es cíclica para A_n en \mathcal{H}_n y $A = \Sigma A_n$, $\mathcal{H} = \Sigma \mathcal{H}_n$.

Teorema 4.22. Multiplicación por f operador Sea μ una medida finita positiva en el espacio de medida (M, \mathcal{F}) y sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Definimos la multiplicación por el operador f

$$A_f \psi = f\psi \quad \text{en} \quad D(A_f) = \{\psi \in \mathcal{L}^2(M, d\mu) | f\psi \in \mathcal{L}^2(M, d\mu)\}.$$

A_f satisface las siguientes propiedades:

1. A_f es auto-adjunto,
2. A_f es acotado $\iff f \in \mathcal{L}^\infty(M, d\mu)$, en ese caso $\|A_f\| = \|f\|_\infty$,
3. El espectro $\sigma(A_f) = \{\lambda \in \mathbb{R} | \mu(f^{-1}(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)) > 0 \forall \epsilon > 0\}$, el rango esencial de f .

Bibliografía

- [1] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics I: Functional analysis*. Academic Press, Inc., 1972.
- [2] P.G. Drazin and R.S. Johnson. *Solitons: an introduction*. Cambridge University Press, 1989.
- [3] G. Freiling and V. Yurko. *Inverse Sturm-Liouville problems and their applications*. Nova Science, New York, 2001.
- [4] E. Koelink. *Scattering Theory*. Radboud Universiteit, Spring, 2008.
- [5] T. Aktosun and C. Van der Mee. *Explicit solutions to the Korteweg-de Vries equation on the half line*. *Inverse Problems.*, 22:2165-2174, 2006.
- [6] T. Aktosun. *Inverse scattering transform, KdV, and solitons*. *Current Trends in Operator Theory and its Applications*. *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser, Basel., 149:1-23, 2004.
- [7] T. Aktosun. *Inverse scattering transformation and the theory of solitons*. *Mathematics of Complexity and Dynamical Systems*. Springer, New York., pp:771-782. 2011.
- [8] T. Aktosun and M. Klaus. *Inverse theory: Problem on the line*. *Scattering*. Academic Press, London., pp:770-785, 2001.
- [9] M.J. Ablowitz. *Nonlinear Dispersive waves: Asymptotic analysis and solitons*. Cambridge University Press, 2011.
- [10] M.J. Ablowitz and P.A. Clarkson. *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*. Cambridge University Press, 1991.
- [11] K. Chadan and P.C. Sabatier. *Inverse problems in quantum scattering theory*, 2nd ed. Springer-Verlag, New York, 1988.

-
- [12] K. Chadan, D. Colton, L. Päivärinta, W. Rundell. *An introduction to inverse scattering and inverse spectral problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.
- [13] S. Tanaka. *On the N -tuple wave solutions of the Korteweg-de Vries equation*. Publ. RIMS, Kyoto Univ., 8:419-427, 1972.
- [14] Li Yishen. *Inverse scattering methods*. Soliton theory and its applications. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg., 69-121, 1995.
- [15] S. Novikov, S.V. Manakov, L.P. Pitaevskii, and V.E. Zakharov. *Theory of solitons: The inverse scattering method*. Consultants Bureau, New York, 1984.
- [16] Debnath, L. *Nonlinear Partial Differential Equations: for Scientists and Engineers*. Third Edition, Birkhäuser, Boston 2005.
- [17] Y. Katznelson. *An introduction to harmonic analysis*. CUP, 2004.
- [18] N.G. de Bruijn. *Asymptotic methods in analysis*. North Holland Publishing, 1961.
- [19] Earl A. Coddington and Norman Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. R.E. Krieger, 1984.
- [20] D.S. Bernstein. *Matrix mathematics: Theory, facts, and formulas*. Princeton University Press, 2009.