Universidad Nacional Autónoma de México

y

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas

UNAM-UMSNH

Sucesiones Convergentes en Grupos Topológicos.

TESIS

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta:

Oscar Trejo Espinosa

-

Director: Doctor en Matemáticas Salvador García Ferreira.

Morelia, Michoacán - julio del 2015.

Índice general

Resumen

En este trabajo estudiaremos la siguiente pregunta: Dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un grupo abeliano, ¿existe alguna topología τ tal que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al neutro de (G,τ)? Para el grupo de los números enteros este problema se ha estudiado por D. Dikranjan en [1] y [2]. También presentamos las nociones básicas de grupos topológicos, así como los teoremas que vamos a necesitar dentro de este trabajo como son el Teorema de Metrización para grupos topológicos de G. Birkhoff- S. Kakutani y el Teorema de Dualidad de L. Pontrjagin.

Dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$, caracterizaremos la topología más fina para la cual $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, mediante el comportamiento de las radios a_{n+1}/a_n. Si $(a_{n+1}/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, entonces la topología más fina para la cual $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 debe ser metrizable. Por otro lado si $(a_{n+1}/a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$, entonces la topología más fina para la cual $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, tiene peso $\mathfrak{c}$. Como $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$, veremos que la topología más fina donde una sucesión converge, coincide con la topología inducida por algun subgrupo del toro $\mathbb{T}$.

Palabras clave: sucesión, convergencia, grupo, topología y totalmente acotada.

Abstract

In this paper we study the following question: Given a sequence $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in a topological abelian group, is there any topology τ such that $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges to the neutral element of (G,τ)? For the group of integer numbers, this problem has been studied by D. Dikranjan in [1] and [2]. We also present the basic notions of topological groups, and theorems that we will need in this work such as parameterization theorem for topological groups given by G. Birkhoff-S. kakutani and Duality Theorem given by L. Pontrjagin.

Given a sequence $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$, we characterize the finest topology for which $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges to 0, by the behavior of the radios a_{n+1}/a_n. If $(a_{n+1}/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is a bounded sequence, hence the finest topology for which $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges to 0 must be metrizable. Secondly if $(a_{n+1}/a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$, hence the finest topology for which $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges must have weight $\mathfrak{c}$. Like $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$, we will see that the finest topology for which a sequence converges will match whit the topolgy induced by some subgroup of the torus $\mathbb{T}$.

Introducción

En esta tesina trataremos de estudiar la siguiente pregunta: Dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un grupo abeliano, ¿existe alguna topología τ tal que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al neutro de (G,τ)? En general para grupos este problema ha sido tratado en [11] en el cual se intruduce la siguiente noción. Decimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una T-sucesión si τ es de Hausdorff y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al neutro en (G,τ). Si τ es totalmente acotada y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al neutro en (G,τ), decimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una TB-sucesión. Denotamos por σ_a a la topología de grupo más fina para la cual $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una TB-sucesión.
Para el grupo de los números enteros este tema se ha estudiado por D. Dikranjan en [1] y [2]. En el primer capítulo presentamos las nociones básicas de grupos topológicos, así como los teoremas que vamos a necesitar dentro de este trabajo como son el Teorema de Metrización de G. Birkhoff-S. Kakutani y el Teorema de Dualidad de L. Pontrjagin. También veremos algunos ejemplos interesantes como el Ejemplo de R. C. Hooper donde el grupo dual no separa puntos.
En el capítulo 2 trabajaremos sobre topologías totalmente acotadas, presentaremos algunos teoremas como por ejemplo que el grupo de homomorfismos de un grupo abeliano G separa puntos. También se daran algunos ejemplos de topologías inducidas por funciones casi periódicas y hablaremos un poco de grupos linealmente ordenados.
En el último capítulo nos enfocaremos en la pregunta principal, se darán algunos ejemplos de T-sucesiones y trabajaremos sobre TB-sucesiones. Dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$, caracterizaremos la topología σ_a mediante el comportamiento de las radios a_{n+1}/a_n. Si $(a_{n+1}/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, entonces la topología σ_a debe ser metrizable. Por otro lado si $(a_{n+1}/a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$ entonces la topología σ_a tiene peso $\mathfrak{c}$. Como $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$, veremos que σ_a coincide con la topología inducida por algun subgrupo de $\mathbb{T}$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentaremos las nociones básicas de grupos topológicos, que vamos a necesitar a lo largo de esta tesina. Trabajaremos sobre características de familias de homomorfismos. Daremos un ejemplo de R. C. Hooper donde los homomorfismos continuos de un grupo no separan puntos. También veremos un ejemplos donde se muestra la importancia de considerar grupos abelianos para que la familia de homomorfismos separe puntos.

1.1. Notación y preliminares

Denotaremos por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}(n)$ el conjunto de números naturales, el grupo de los enteros, el conjunto de números primos, el grupo de racionales, el grupo de reales, el grupo del círculo (mejor conocido como toro, identificado como el cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ bajo el mapeo $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$, dado por $exp(2\pi ix) = (cos(x), sen(x))$), el grupo de los complejos y el grupo cíclico $n\mathbb{Z}$, respectivamente. Para denotar el neutro de un grupo usaremos e, para el toro $\mathbb{T}$ el neutro será denotado por 1 y en los enteros $\mathbb{Z}$ por 0. Para un grupo topológico (G, τ), denotamos por $w(G)$ el *peso* de G, el cual es la mínima cardinalidad de una base para τ. Si H es un subgrupo de G lo denotaremos por $H < G$. Dado X cualquier conjunto denotaremos por $\mathcal{P}(X)$ a la familia de todos los subconjuntos de X.

Definición 1.1. Sea X un conjunto. Una familia $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$, se llama *base de filtro* si:

1. $\emptyset \notin \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \neq \emptyset$;
2. Para cualesquiera $U, V \in \mathcal{U}$, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subset U \cap V$.

1.2. Grupos topológicos

Comencemos definiendo los objetos sobre los cuales vamos a trabajar.

Definición 1.2. Un *grupo topológico* es una pareja (G, τ), formada por un grupo G y una topología τ para G, la cual cumple que las operaciones de producto e inverso en G sean continuas.

El siguiente es un teorema básico en la teoría de grupos topológicos y su demostración no es complicada.

Teorema 1.3. *Sea G un grupo topológico, entonces G es Hausdorff si y solo si G es T_0.*

Una equivalencia útil para definir la topología en un grupo a partir de una base de filtro, la tenemos en el siguiente teorema, de igual manera nos ayuda a saber cuales son las propiedades de una base de vecindades en el neutro e, para que G sea un grupo topológico.

Teorema 1.4. *Sea G un grupo topológico y sea $\mathcal{U}$ una base de filtro formada por vecindades (no necesariamente abiertas) del neutro e de G. Entonces se tienen las siguientes afirmaciones.*

1. *Para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subset U$;*

2. *Para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^{-1} \subset U$;*

3. *Para cada $U \in \mathcal{U}$ y cada $x \in G$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $xVx^{-1} \subset U$.*

Por otro lado si G es un grupo y $\mathcal{U}$ es una base de filtro en G que satisface las condiciones anteriores, entonces existe una topología τ, tal que $\mathcal{U}$ es una base local en el neutro e y además (G, τ) es un grupo topológico.

Nótese que gracias al Teorema (1.3), un grupo topológico (G, τ) es Hausdorff si y solo si $\cap\mathcal{U} = \{e\}$. Observamos que si agregamos la condición

4. Para cada $U \in \mathcal{U}$ y cada $x \in U$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $xV \subset U$,

entonces los elementos de la base que se obtienen son abiertos.

Una propiedad importante de los grupos topológicos (que son T_0) es que son regulares. Para esto necesitamos el siguiente teorema.

Teorema 1.5. *Sea G un grupo topológico y $A \subset G$,*

$$\overline{A} = \cap\{VA : V \in \mathcal{U}\} = \cap\{AV : V \in \mathcal{U}\}.$$

Corolario 1.6. *Todo grupo topológico es regular.*

Ahora veamos un teorema clásico de metrización para grupos topológicos dado por G. Birkhoff y S. Kakutani.

Teorema 1.7. *Un grupo topológico G (que sea T_0) es metrizable si y solo si es primero numerable.*

1.3. Caracteres en un grupo

En esta sección hablaremos de los homomorfismos de un grupo (G, τ) al toro $\mathbb{T}$, ya que considerando subgrupos de homomorfismos del grupo al toro $\mathbb{T}$, podemos definir topologías para G con propiedades muy interesantes.

Definición 1.8. Si (G, τ) es un grupo topológico, llamaremos *caracter* a todo homomorfismo $\chi : G \to \mathbb{T}$. Denotamos por $Hom(G, \mathbb{T})$ al conjunto de caracteres de G.

Definamos una condición necesaria para generar topologías de Hausdorff a partir de familias de caracteres.

Definición 1.9. Si H es un subgrupo de $Hom(G, \mathbb{T})$, decimos que H *separa los puntos* de G si para todo $x \in G \setminus \{e\}$ existe $\chi \in H$ tal que $\chi(x) \neq 1$.

Definición 1.10. Decimos que un grupo G es *divisible* si para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $G^n = G$, es decir, dados $n \in \mathbb{N}$ y $x \in G$, existe $y \in G$ tal que $y^n = x$.

Dado un homomorfismo $\chi : H \to D$, con $H < G$ y D un grupo divisible, el siguiente teorema nos presenta una técnica para extender χ a un homomorfismo $\overline{\chi} : G \to D$.

Teorema 1.11. *Sea G un grupo abeliano y H un subgrupo de G. Supongamos que $\chi : H \to D$ es un homomorfismo, con D un grupo divisible. Entonces existe un homomorfismo $\overline{\chi} : G \to D$ que extiende a χ.*

Demostración. Sea $x \in G \setminus H$. Denotemos $H^* =< H \cup \{x\} >= \{g + nx : g \in H, n \in \mathbb{Z}\}$, *Caso 1.* Supongamos que $kx \notin H$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Cada $z \in H^*$ tiene la forma $z = kx + b$, con $b \in H$ y $k \in \mathbb{Z}$. Definimos $\overline{\chi} : H^* \to D$ dada por $\overline{\chi}(kx + a) = k\overline{\chi}(x) + \chi(a)$ y definimos $\overline{\chi}(x) = d$, $d \in D \setminus \{e\}$. Claramente $\overline{\chi}$ cumple lo que necesitamos.

Caso 2. Supongamos ahora que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $mx \in H$. Consideremos m_0 mínimo tal que $m_0 x \in H$, como $\chi(m_0 x) = m_0\chi(x) \in D$, definimos entonces $\overline{\chi}(x) = \chi(x)$, así $\overline{\chi}(m_0 x + g) = \chi(g) + m_0\chi(x)$. Veamos que $\overline{\chi}$ esta bien definida. Sean $kx + a = lx + b$ entonces $(k - l)x = b - a \in H$, entonces m_0 divide a $k - l$ pues $mx \in H$, digamos $k - l = m_0 p$ para algún $p \in \mathbb{Z}$, por lo tanto

$$\begin{gathered}\overline{\chi}(kx + a) - \overline{\chi}(lx + b) = k\chi(x) + \chi(a) - (l\chi(x) + \chi(b)) = \\ (k - l)\chi(x) - \chi(b - a) = m_0 p\chi(x) - \chi(m_0 px) = e;\end{gathered}$$

es decir, $\overline{\chi}(kx + a) = \overline{\chi}(lx + b)$. Claramente $\overline{\chi}$ es un homomorfismo que extiende a χ.

Ahora definamos $\mathcal{B}$ la familia de todas las parejas de la forma (K, f) con $K < G$ y $f : K \to D$ un homomorfismo que extiende a χ. Podemos definir un orden en $\mathcal{B}$ dado por $(K, f) < (K', f')$ si y solo si $K \subset K'$ y f' extiende a f. Claramente toda cadena en $\mathcal{B}$ es acotada, por lo que la familia $\mathcal{B}$ tiene un elemento maximal, digamos $(K, \overline{\chi})$. Afirmamos que $K = G$, de lo contrario, sea $x \in G \setminus K$. Por los casos anteriores podemos extender $\overline{\chi}$ a el subgrupo $< K \cup \{x\} >$, lo cual contradice la maximalidad de $(K, \overline{\chi})$ en $\mathcal{B}$. Por lo tanto $\overline{\chi} : G \to D$. ❑

Como resultado del Teorema (1.11), considerando el subgrupo $H =< \{x\} >< G$, podemos concluir el siguiente resultado.

Teorema 1.12. *Si (G, τ) es un grupo abeliano, entonces $Hom(G, \mathbb{T})$ separa puntos de G.*

Por lo dicho anteriormente, para poder separar puntos de un grupo G, necesitamos la existencia de muchos caracteres en un grupo abeliano. El siguiente teorema nos garantiza esto.

Teorema 1.13 (S. Kakutani)**.** *Sea G un grupo abeliano infinito, entonces $|Hom(G, \mathbb{T})| = 2^{|G|}$.*

Demostración. Sea $\alpha = |G|$ y sea $\{g_\xi : \xi < \alpha\}$ enumeración de G, con $g_0 = e$. Para cada $\theta < \alpha$, definamos $H_\theta :=< \{g_\xi \in G : \xi < \theta\} >$ y sea $A = \{g_\xi \in G : g_\xi \notin H_\xi\}$.

Afirmamos que $< A >= G$, por lo que $|A| = \alpha$. Para esto supongamos que $< A >\neq G$. Sea $\theta_0 < \alpha$ mínimo tal que $g_{\theta_0} \notin A$, entonces $g_{\theta_0} \in H_{\theta_0} =< \{g_\xi \in G : \xi < \theta_0\} >$, por lo que g_{θ_0} tiene la forma $g_{\theta_0} = \sum_{\xi_i<\theta_0} g_{\xi_i}^{m_i}$, ahora como θ_0 es mínimo cada $g_{\xi_i} \in A$, por lo que $g_{\theta_0} \in A$, lo cual es una contradicción.

Para concluir, dado $g_\xi \in G$ y dado un caracter $\chi : H_\xi \to \mathbb{T}$, por el Teorema (1.11) podemos extender χ a un caracter $\chi' :< H_\xi \cup \{g_\xi\} >\to \mathbb{T}$ y tenemos al menos dos opciones para definir $\chi'(g_\xi)$. ❑

El siguiente ejemplo nos muestra la importancia de ser abeliano para que el grupo de homomorfismos separe puntos. Una prueba de este resultado se puede encontrar en [9, 1231]

Ejemplo 1.14. *Recordemos que el grupo especial lineal es*

$$SL(n,\mathbb{C}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) : det(A) = 1\}.$$

Si K es un grupo compacto, entonces $|Hom(SL(2,\mathbb{C}),K)| = 1$. Por ende $Hom(SL(2,\mathbb{C}),K)$ no separa puntos.

Ahora veamos un ejemplo de un grupo (G,τ) donde la familia de caracteres τ-continuos no separa puntos de G.

Ejemplo 1.15 (Hooper, 1968)**.** *Existe un grupo topológico abeliano (G,τ), tal que la familia de caracteres τ-continuos no separa puntos de G.*

Demostración. Denotamos por $C_0 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : f(n) \to 0\}$. Dado $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_0$, definimos $||a||_\infty = max\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$. No es difícil demostrar que $(C_0, ||\cdot||_\infty)$ es un espacio de Banach y además es un grupo topológico con la operación coordenada a coordenada.
Sea H el siguiente subconjunto de C_0.

$$H = \{a \in C_0 : a_n \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\} = \oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}.$$

Por otro lado sea K de la siguiente manera.

$$K = \{a \in H : \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ es par}\}.$$

Definamos $G = C_0/K$, afirmamos que la familia de caracteres continuos de G no separa puntos. Para esto definimos $e_n = (0,...,0,1,0,0,...)$, donde el 1 aparece en la n-ésima entrada del vector, nótese que $e_n \in H \setminus K$. Veamos que $\chi(e_n + K) = 1$, para todo homomorfismo continuo χ.

Supongamos que existe χ homomorfismo continuo tal que $\chi(e_n + K) \neq 1$. Como $e_n + e_n \in K$ y χ es un homomorfismo, tenemos $\chi(e_n + K)\chi(e_n + K) = 1$ por lo que $\chi(e_n + K) = -1$. Sea $\varphi : C_0 \to G$ el homomorfismo canónico. Dado $m \in \mathbb{N}$, sea $t = \chi(\varphi(\frac{1}{m}e_n))$, nótese que $t^m = -1$, entonces $t = exp(\frac{(2l+1)\pi i}{m})$.

Definamos $\sigma : \left[0, \frac{1}{n}\right] \to \mathbb{T}$, dada por $\sigma(r) = \chi(\varphi(re_n))$. Nótese que σ es una función continua (pues es composición de funciones continuas), además $\sigma(0) = 1$ y $\sigma(\frac{1}{n}) = t$, entonces σ manda el intervalo $[0, \frac{1}{n}]$ en el arco comprendido entre 1 y t. Así existe $r_{n,m} \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ tal que $\sigma(r_{n,m}) = exp(\frac{\pi i}{m})$, esto lo podemos hacer para n suficientemente grande. Ahora para cada natural $n > 0$, definimos $c(n) \in C_0$ dado por $c(n) = \sum_{m \leq n} r_{n,m} e_m$. Afirmamos que $\chi(\varphi(c(n))) = -1$, veamoslo.

$$\chi(\varphi(c(n))) = \chi(\varphi(\sum_{m \leq n} r_{n,m} e_m)) = \prod_{m \leq n} \chi(\varphi(r_{n,m} e_m)) = (exp\,(\pi i/m))^m = -1.$$

Por otro lado, nótese que $\|c(n)\|_\infty \leq \frac{1}{n}$, es decir $c(n) \to 0$ en C_0, por lo que $\chi(\varphi(c(n))) \to 1$ en $\mathbb{T}$, lo cual es una contradicción. ❏

1.4. Dualidad

Uno de los subgrupos de caracteres mas impotantes es el formado por los caracteres continuos, el cual esta definido como sigue.

Definición 1.16. Sea (G, τ) un grupo topológico. El conjunto de caracteres τ-continuos es un subgrupo de $Hom(G, \mathbb{T})$ y lo denotaremos por $\widehat{G}$. A este grupo con la operación puntual compleja lo llamaremos el *grupo dual* de G.

La propiedad de que la familia de homomorfismos continuos $\widehat{G}$ separe puntos de un grupo G se cumple cuando G es un grupo abeliano localmente compacto, este hecho fue probado por I. M. Gel'fan y D. Raĭkov [8] y lo enunciamos en el siguiente teorema.

Teorema 1.17. *Sea G un grupo abeliano localmente compacto y sea $x \in G \setminus \{e\}$. Entonces existe un caracter continuo $\chi \in \widehat{G}$ tal que $\chi(x) \neq 1$.*

Ahora dotemos al grupo $\widehat{G}$ con una topología que lo vuelva grupo topológico.

Definición 1.18. Sea G un grupo topológico abeliano localmente compacto. Dados $F \subset G$ compacto y $\epsilon > 0$ definimos

$$U(F, \epsilon) = \{\chi \in \widehat{G} : |\chi(x) - 1| < \epsilon \text{ para todo } x \in F\}.$$

Entonces la familia

$$\mathcal{B} = \{U(F, \epsilon) : F \subset G \text{ compacto }, \epsilon > 0\},$$

forma una base de filtro y además cumple las condiciones del Teorema (1.4), por lo que $\mathcal{B}$ genera una topología de grupo topológico τ para G. Esta topología es conocida como la *topología compacto abierta*.

En [8, §22] se demuestra que si G el localmente compacto, entonces $\widehat{G}$ es localmente compacto, y tomando el dual de $\widehat{G}$, tenemos que $\widehat{\widehat{G}}$ también es localmente compacto, para esto se usa el siguiente teorema el cual es conocido como el teorema de dualidad de Pontrjagin.

Teorema 1.19. *Sea G un grupo topológico abeliano localmente compacto y definamos el homomorfismo $\nu : G \to \widehat{\widehat{G}}$ dada por*

$$\nu(x)(\chi) = \chi(x), \ \textit{con } x \in G, \chi \in \widehat{G}.$$

Entonces ν es un isomorfismo topológico de G sobre $\widehat{\widehat{G}}$.

Capítulo 2

Grupos Totalmente Acotados

En este capítulo hablaremos de grupos topológicos totalmente acotados y daremos algunos ejemplos importantes en el grupo de los enteros $\mathbb{Z}$. Hablaremos un poco de funciones acotadas y de una topología que inducen este tipo de funciones llamada τ_f. Además daremos una caracterización para que la topología τ_f sea totalmente acotada y esta la haremos mediante funciones casi periódicas. También trabajaremos en las topologías inducidas por subgrupos de caracteres y caracterizamos cuando dichas topologías son totalmente acotadas. En la última sección hablaremos de grupos linealmente ordenados.

2.1. Definiciones y propiedades básicas

Comenzaremos este capítulo definiendo qué es un grupo topológico totalmente acotado. Esta propiedad de los grupos topológicos nos ayudara a caracterizar la topología del grupo mediante familias de homomorfismos.

Definición 2.1. Un grupo topológico (G, τ) se llama *totalmente acotado* si para cada abierto no vacío $U \subset G$, existe $F \subset G$ finito tal que $G = FU$. Cuando digamos que una topología τ es totalmente acotada, nos referimos a que el grupo (G, τ) es totalmente acotado.

Para familiarizarnos un poco más con la definición anterior veamos algunos ejemplos. Evidentemente todo grupo compacto es totalmente acotado. A continuación damos un ejemplo de un grupo totalmente acotado que no es compacto.

Ejemplo 2.2. *Dado $p \in \mathbb{P}$, consideremos la familia $\mathcal{B}_p = \{\mathbb{Z}(p^n) : n \in \mathbb{N}\}$. Claramente $\mathcal{B}_p$ forma una base de filtro, además gracias al Teorema (1.4), $\mathcal{B}_p$ genera una topología de grupo topológico para $\mathbb{Z}$ la cual denotaremos τ_p. Más aún $(\mathbb{Z}, \tau_p)$ es metrizable no discreto y totalmente acotado.*

Demostración. Nótese que si $\mathbb{Z}(p^n), \mathbb{Z}(p^m) \in \mathcal{B}_p$, entonces $\mathbb{Z}(p^{nm}) \subset \mathbb{Z}(p^n) \cap \mathbb{Z}(p^m)$, es decir, $\mathcal{B}_p$ es base de filtro. Las afirmaciones del Teorema (1.4) se cumplen trivialmente. Además $\cap\mathcal{B}_p = \{0\}$, lo cual implica que τ_p es Hausdorff. Por el Teorema (1.7), $(\mathbb{Z}, \tau_p)$ es metrizable, además es no discreto y es un espacio cero-dimensional, pues todo espacio Tychonoff numerable lo es. Ahora, sea $z \in \mathbb{Z}$ y sea $\mathbb{Z}(n)$ abierto. Nótese que z tiene la forma $z = ln + i$, con $1 \leq i < n$, por lo que $z \in \mathbb{Z}(n) + i$. Entonces $\mathbb{Z} \subset \cup_{i<n}(\mathbb{Z}(n) + i)$, es decir, $(\mathbb{Z}, \tau_p)$ es totalmente acotado.

Tratando un poco lo que veremos en el Capítulo 3, nótese que si una sucesión de enteros $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en τ_p, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $z_i \in \mathbb{Z}(p^n)$ para cada $i \geq k$. Por definición p^n divide a z_i para $i \geq k$, además si p y q son primos distintos, en $(\mathbb{Z}, \tau_p)$ se cumple que $(p^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, sin embargo $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a 0.

De acuerdo al Teorema de Sierpinski (ver [7]), el cual dice que todo espacio numerable y metrizable sin puntos aislados es homeomorfo a $\mathbb{Q}$, el espacio $(\mathbb{Z}, \tau_p)$ es homeomorfo a $\mathbb{Q}$, sin embargo $\mathbb{Q}$ no es un grupo totalmente acotado con la topología que hereda de los números reales. ❑

El siguiente teorema nos da una caracterización muy importante de los grupos totalmente acotados. Una prueba de él la podemos encontrar en [3], donde se expone una demostración dada por el profesor W. W. Comfort, la cual solamente utiliza argumentos topológicos.

Teorema 2.3. *(A. Weil) Sea G un grupo topológico. G es totalmente acotado si y solo si existe H grupo topológico compacto, tal que G es un subgrupo denso de H.*

Corolario 2.4. *Los grupos totalmente acotados son los subgrupos de los grupos compactos.*

Teniendo en cuenta los dos resultados anteriores, podemos construir muchos ejemplos de grupos totalmente acotados.

Ejemplo 2.5. *Para cada $p \in \mathbb{P}$, definimos $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \{exp(\frac{2\pi n}{p^m}) : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$. Del Teorema de Weil (2.3) tenemos que este subgrupo denso de $\mathbb{T}$ es totalmente acotado.*

En uno de los ejemplos que vamos a dar, necesitaremos saber que ocurre si un grupo no es totalmente acotado, para esto tenemos el siguiente lema.

Lema 2.6. *Sea G un grupo topológico tal que G no es totalmente acotado. Entonces existe U vecindad del neutro y existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$, tal que $x_nU \cap x_mU = \emptyset$, para $n \neq m$.*

Demostración. Como G no es totalmente acotado, existe V vecindad del neutro tal que para cada $F \subset G$ finito, se tiene que $VF \neq G$. Construyamos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ tal que $x_n \notin \cup_{i=1}^{n} x_iV$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora sea U vecindad del neutro tal que $U \subset V$, $U^2 \subset V$ y $U^{-1} = U$, afirmamos que los elementos de la familia $\{x_nU : n \in \mathbb{N}\}$, son ajenos dos a dos.

Para esto, supongamos que no es cierta la afirmación, sean $x_i, x_j \in \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ que cumplen $x_iU \cap x_jU \neq \emptyset$, sea $z \in x_iU \cap x_jU$, entonces z tiene la forma $z = x_iv = x_jw$, con $v, w \in U$, así $x_i = zv^{-1} \in zU$, y como $z \in x_jU$, tenemos $x_i \in x_jU^2 \subset x_jV$, lo cual es una contradicción a la construcción de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ❑

Ahora comenzaremos a trabajar en la topología inducida por una función acotada, veremos que la topología inducida por f será totalmente acotada si y solo si f tiene la propiedad de ser casi periódica. Con esta construcción podemos inducir muchas topologías totalmente acotadas en un grupo abeliano infinito a partir de funciones acotadas.

Definición 2.7. Sea G un grupo y $a \in G$. Definamos $B(G) := \{f : G \to \mathbb{C} : f$ es acotada $\}$. Dada $f \in B(G)$ denotaremos a la función $f(x + a)$ por f_a. Como f es acotada podemos definir

$$\|f\| = sup\{f(x) : x \in G\}.$$

Observación 2.8. *Fácilmente se puede ver que $B(G)$ forma una $\mathbb{C}$-álgebra, además $\|\cdot\|$ es una norma en $B(G)$ la cual es completa, por lo que $(B(G), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.*

Otra observación rápida es que si (G, τ) es un grupo topológico entonces $\widehat{G} \subset B(G)$. Además si G es un grupo compacto, entonces las funciones continuas son acotadas (es decir, $C(G, \mathbb{C}) \subset B(G)$).

Definición 2.9. Sea G un grupo infinito. Una función $f \in B(G)$ se llama *casi periódica*, si dada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$, la sucesión $(f_{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente con respecto a la norma $\|\cdot\|$ en $B(G)$. Definimos

$$A(G) := \{f \in B(G) : f \text{ es casi periódica}\}.$$

Sea G es un grupo abeliano y $f \in B(G)$. Un elemento $a \in G$ se llama *ϵ-casi periódico a f* si $\|f - f_a\| < \epsilon$. Denotaremos por $T(f, \epsilon)$ a el conjunto $\{a \in G : a \text{ es } \epsilon- \text{ casi periódico a } f\}$.

Observación 2.10. *Sea $f \in B(G)$. La familia $\{T(f, \epsilon) : \epsilon > 0\}$ forma una base de filtro, además cumple las propiedades del Teorema (1.4), por lo que genera una topología de grupo topológico*

para G, la cual denotaremos por τ_f.
Una condición necesaria para que τ_f sea una topología de Hausdorff, es que para cada $a \in G \setminus \{e\}$, existe $b \in G$ tal que $f(a) \neq f(a+b)$.

El siguiente teorema nos da una condición necesaria y suficiente para que la topología τ_f sea totalmente acotada.

Teorema 2.11. *Sean G grupo abeliano y $f : G \to \mathbb{C}$ una función. Son equivalentes:*

1. *$f \in A(G)$;*

2. *(G, τ_f) es un grupo topológico totalmente acotado.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que G no es totalmente acotado. Entonces existe $\epsilon > 0$ de modo que para cada $F \subset G$ finito, se tiene que $F + T(f, \epsilon) \neq G$. Por el Lema (2.6) Podemos construir una sucesión $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset G$ tal que los elementos de la familia $\{x_m + T(f, \epsilon) : m \in \mathbb{N}\}$ son ajenos dos a dos. Como f es casi periódica, la sucesión $(f_{x_m})_{m\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión de Cauchy, digamos $(f_{x_{m_k}})_{k\in\mathbb{N}}$. Por definición existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_{x_{m_i}} - f x_{m_j}\| < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $i, j \geq l$. Nótese que

$$\|f_{x_{m_i}} - f x_{m_j}\| = sup\{|f(g + x_{m_j}) - f(g + x_{m_i})| : g \in G\}.$$

Considerando $h = g + x_{m_j}$, tenemos

$$sup\{|f(g + x_{m_j}) - f(g + x_{m_i})| : g \in G\} =$$

$$sup\{|f(h) - f(h - x_{m_i} + x_{m_j})| : h \in G\} = \|f - f_{x_{m_i} - x_{m_j}}\|.$$

Por lo tanto

$$\|f_{x_{m_i}} - f x_{m_j}\| = \|f - f_{x_{m_i} - x_{m_j}}\|.$$

Así $\|f - f_{x_{m_i} - x_{m_j}}\| < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces

$$x_{m_i} - x_{m_j} \in T(f, \frac{\epsilon}{2}) \subset T(f, \epsilon), \text{ por lo que } x_{m_i} \in x_{m_j} + T(f, \epsilon)$$

lo cual es una contradicción, pues $(x_{m_i} + T(f, \epsilon)) \cap (x_{m_j} + T(f, \epsilon)) = \emptyset$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Como $B(G)$ es un espacio de Banach, basta ver que cada sucesión $(f_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión de Cauchy. Supongamos que esto no pasa. Sea $(f_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ que no tiene subsucesión de Cauchy, en especial ella misma no es sucesión de Cauchy. Sea $\epsilon > 0$ tal que $\|f_{x_m} - f_{x_k}\| \geq \epsilon$ para todo $m, k \in \mathbb{N}$. Podemos formar una subsucesión $(f_{x_{n_k}})_{k\in\mathbb{N}}$, de modo que n_k sea una sucesión

estrictamente creciente y tal que $\|f_{x_{n_{k+1}}} - f_{x_{n_k}}\| \geq \epsilon$. Ahora como τ_f es totalmente acotada, existen $\{b_i : 1 \leq i \leq l\}$ tal que $g = \cup_{i=1}^{l} b_i + T(f, \frac{\epsilon}{2})$, entonces existe $i_0 \leq l$ tal que $x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}} \in b_{i_0} + T(f, \frac{\epsilon}{2})$, así

$$x_{n_{k_1}} - x_{n_{k_1}} \in T(f, \epsilon/2) - T(f, \epsilon/2) = T(f, \epsilon/2) + T(f, \epsilon/2) \subset T(f, \epsilon).$$

Por lo que $\|f_{x_{n_{k_1}} - x_{n_{k_2}}} - f\| = \|f_{x_{n_{k_1}}} - f_{x_{n_{k_2}}}\| < \epsilon$, lo cual es una contradicción. ❑

Pensando un poco en el problema principal de este trabajo, dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un grupo G y dada $f : G \to \mathbb{C}$ una función acotada, la siguiente observación nos ayuda a caracterizar cuando la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al neutro de G en la topología τ_f.

Proposición 2.12. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ una sucesión en G, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al neutro en (G, τ_f) si y solo si para cada $x \in G$ se cumple que $f(x + a_n)$ converge a $f(x)$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, nótese que e es un elemento de cada básico $T(f, \epsilon)$ de la topología τ_f. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al neutro en la topología τ_f, por definición tenemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq k$ se tiene $a_n \in T(f, \epsilon)$, es decir, $sup\{|f(x) - f(x + a_n)| : x \in G\} < \epsilon$, por lo que $f(x + a_n)$ converge a $f(x)$. La otra parte de la demostración se obtiene de la misma manera. ❑

2.2. Topologías totalmente acotadas en grupos abelianos

En esta sección trabajaremos sobre subgrupos de caracteres de un grupo topológico (G, τ). Veremos cuales son las condiciones para que estos subgrupos induzcan en G topologías totalmente acotadas.

Veamos como construir topologías totalmente acotadas en un grupo G a partir de subgrupos de caracteres.

Definición 2.13. Sea G grupo topológico abeliano. Para H subgrupo de $Hom(G, \mathbb{T})$ denotaremos por τ_H a la topología más débil que hace continuos a todos los caracteres de H, es decir, la topología generada por la subbase $\{h^{-1}(U) : U \text{ es un subconjunto abierto de } \mathbb{T} \text{ y } h \in H\}$. Nótese que los básicos para τ_H tiene la forma $U(\chi_1, ..., \chi_m; \epsilon) = \{x \in G : |\chi_i(x) - 1| < \epsilon, 1 \leq i \leq m\}$.

Teorema 2.14. *τ_H es una topología de grupo topológico para G. Además esta topología es de Hausdorff si y solo si H separa puntos de G.*

Demostración. Veamos que la familia $\{U(\chi; \epsilon) : \epsilon > 0, \chi \in H\}$ cumple las condiciones del Teorema (1.4).

1. $U(\chi;\epsilon)^{-1} = U(\chi^{-1};\epsilon)$.- Tenemos $g \in U(\chi;\epsilon)^{-1} \Leftrightarrow$

$$g^{-1} \in U(\chi;\epsilon) \Leftrightarrow |\chi(g^{-1}) - 1| < \epsilon \Leftrightarrow |\chi(g)^{-1} - 1| < \epsilon \Leftrightarrow g \in U(\chi^{-1};\epsilon).$$

2. $U(\chi;\frac{\epsilon}{2})U(\chi;\frac{\epsilon}{2}) \subset U(\chi;\epsilon)$.- Sean $g,h \in U(\chi;\frac{\epsilon}{2})$.

   Tenemos que

$$|\chi(gh) - 1| = |\chi(g)\chi(h) - 1| = |\chi(g)\chi(h) - \chi(h) + \chi(h) - 1|$$

$$\leq |\chi(h)(\chi(g) - 1)| + |\chi(h) - 1| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

   Por lo tanto $gh \in U(\chi,\epsilon)$.

Demostremos la segunda parte del teorema. Supongamos que τ_H es una topología de Hausdorff y sea $x \in G \setminus \{e\}$. Por hipótesis existe $U \in \tau_H$ tal que $x \in U$, pero $e \notin U$. Por definición existe $\chi \in H$ y $V \subset \mathbb{T}$ abierto tal que $x \in \chi^{-1}(V) \subset U$, es decir $\chi(x) \neq 1$. Por lo tanto H separa los puntos de G. Ahora supongamos que H separa puntos de G, sea $x \in G\setminus\{e\}$ y sea $\chi \in H$ tal que $\chi(x) \neq 1$. Como el toro $\mathbb{T}$ si es de Hausdorff, existe $U \subset \mathbb{T}$ abierto tal que $\chi(x) \in U$ y $1 \notin U$, entonces $x \in \chi^{-1}(U) \in \tau_H$ y $e \notin \chi^{-1}(U)$. ❑

Para demostrar que la topología τ_H es totalmente acotada, necesitaremos el siguiente lema, el cual es común dentro de la teoría de grupos topológicos.

Lema 2.15. *Sean G y H grupos topológicos y sea $\chi : G \to H$ un homomorfismo continuo en algún punto $x \in G$, entonces χ es uniformemente continuo en G.*

Teorema 2.16. *Sea G un grupo (abeliano) y sea H un subgrupo de $Hom(G,\mathbb{T})$ que separa puntos de G. Entonces (G,τ_H) es un grupo topológico totalmente acotado, además $(\widehat{G,\tau_H}) = H$.*

Demostración. Definamos la función $i : G \to \mathbb{T}^H$ dado por $i(x)(\chi) = \chi(x)$. Como H separa puntos de G , i es inyectiva . fácilmente se ve que la topología τ_H hace a i un homeomorfismos de G a su imagen $i[G]$. Gracias al Ejemplo (2.4) y a que $\mathbb{T}^H$ es compacto, tenemos que $i[G]$ es totalmente acotado. Ahora pensando a (G,τ_H) como un subgrupo de $\mathbb{T}^H$, denotamos por $\overline{G}$ la cerradura de G en $\mathbb{T}^H$. $\overline{G}$ es conocida como la completación de Weil.

Veamos la segunda afirmación. Claramente $H \subset (\widehat{G,\tau_H})$. Para la otra contención sea $\chi \in (\widehat{G,\tau_H})$. Por el Lema (2.15), χ es uniformemente continua y entonces existe $\chi' : \overline{G} \to \mathbb{T}$ tal que $\chi'|_G = \chi$. Como $\overline{G}$ es cerrado en $\mathbb{T}^H$, existe $f \in \widehat{\mathbb{T}^H}$ tal que $f|_{\overline{G}} = \chi'$. Esto se prueba en [8, 24.12]. Como $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}$ y $\widehat{\mathbb{T}^H} = \oplus_H\mathbb{T}$, existen $\chi_1, ...\chi_n \in H$ y $m_1, ..., m_n \in \mathbb{Z}$ tales que f se ve de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} f \ : \ \mathbb{T}^H & \rightarrow & \mathbb{T} \\ < t_\chi : \chi \in H > & \mapsto & \prod_{k=1}^{n} (t_{\chi_k})^{m_k}. \end{array}$$

Si $x =< x_\chi : \chi \in H >\in G$, tenemos $\chi'(x) = f(x) = \prod_{k=1}^{n} \chi_k(x)^{m_k}$, así $\chi' = \prod_{k=1}^{n} \chi_k^{m_k} \in H$. ❑

Corolario 2.17. *Sea (G, τ) un grupo topológico totalmente acotado y sea $H = \widehat{(G, \tau)}$. Entonces*

1. *$\tau = \tau_H$;*
2. *Si K es un subgrupo de $Hom(G, \mathbb{T})$ que separa puntos y tal que $\tau = \tau_K$, entonces $K = H$.*

Demostración. Nótese que cada elemento de $\widehat{(G, \tau)}$ es uniformemente continuo en G, por lo que lo podemos extender continuamente a la completación de Weil $\overline{G}$. Por la dualidad de Pontrjagin (Teorema 1.19), tenemos que la topología de $\overline{G}$ es la misma que la topología inducida por $\widehat{\widehat{G}}$, entonces la topología τ es la misma que la inducida por la familia $\{\chi|_G : \chi \in \widehat{\widehat{G}}\}$, es decir, la topología inducida por H.

Ahora como $\tau = \tau_H$ y $\tau = \tau_K$, tenemos $H = \widehat{(G, \tau_H)} = \widehat{(G, \tau)} = \widehat{(G, \tau_K)} = K$, por lo que $H = K$. ❑

Concluimos con la siguiente afirmación que se obtiene a partir del Teorema (2.16).

Corolario 2.18. *Un grupo topológico (G, τ) es totalmente acotado si y solo si existe H subgrupo de $Hom(G, \mathbb{T})$ tal que $\tau = \tau_H$.*

Asignar a cada subgrupo de caracteres $H < Hom(G, \mathbb{T})$ la topología inducida en G es una asignación que preserva el orden, lo enunciaremos en el siguiente teorema.

Teorema 2.19. *Sea G un grupo y sean $H_0, H_1 < Hom(G, \mathbb{T})$, entonces $H_0 \subset H_1 \Leftrightarrow \tau_{H_0} \subset \tau_{H_1}$.*

Demostración. Por el Teorema (2.16) tenemos $H_0 = \widehat{(G, \tau_{H_0})} \subset \widehat{(G, \tau_{H_1})} = H_1$. ❑

Así $\tau_{Hom(G,\mathbb{T})}$ es la topología de grupo totalmente acotada más fina con la cual podemos dotar a G, es decir, si τ es una topología totalmente acotada para G, entonces $\tau \subseteq \tau_{Hom(G,\mathbb{T})}$.

A partir de los Teoremas (1.13) y (2.19) , podemos concluir el siguiente resultado.

Gracias al Teorema (1.12) la topología $\tau^\# := \tau_{Hom(G,\mathbb{T})}$ es Hausdorff y totalmente acotada, pues $Hom(G, \mathbb{T})$ separa puntos. La topología $\tau^\#$ es conocida como la *topología de Bohr* en G. Pero al considerar el grupo de caracteres continuos $\widehat{G}$, la topología $\tau_{\widehat{G}}$ no siempre es Hausdorff; sin embargo gracias al Teorema de Dualidad (1.19), $\widehat{G}$ separa puntos de G, siempre que G sea un grupo abeliano localmente compacto.

Corolario 2.20. *Sea G un grupo abeliano infinito. Entonces G acepta $2^{2^{|G|}}$ topologías totalmente acotadas distintas.*

Restringiendo los teoremas anteriores al caso del grupo de los números enteros tenemos lo siguiente.

Corolario 2.21. *Como los únicos subgrupos densos en el círculo son infinitos, el teorema anterior muestra que existe una correspondecia uno a uno entre los subgrupos infinitos de $\mathbb{T}$ y las topologías de grupo totalmente acotadas en $\mathbb{Z}$.*

2.3. Grupos topológicos totalmente acotados y linealmente ordenados

Esta sección esta basada en el trabajo de P. J. Nyikos [10], ahi se pueden ver a detalle las demostraciones de los siguientes teoremas. Esta sección nos ayudara a caracterizar cuando un grupo topológico tiene una base local en el neutro que consiste de subconjuntos abiertos y cerrados a la vez.

Definición 2.22. Un espacio topológico (X, τ) es *linealmente ordenado* si existe un orden lineal $\leq$ en X tal que $\leq$ induce la topología τ. Es decir, los conjuntos $(a, \infty) = \{x \in X : a \leq x\}$ y $(-\infty, a) = \{x \in X : x \leq a\}$ foman una subbase para τ. Diremos que un grupo topológico es *lineal* si es un espacio topológico linealmente ordenado.

Teorema 2.23. *Un espacio métrico X es cero dimensional si y solo si existe una familia $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_\alpha : \alpha \in I\}$, donde $\mathcal{B}_\alpha$ es una partición de X en subconjuntos clopen (abierto y cerrado), y $\mathcal{B}$ esta totalmente ordenada por refinamiento, tal que $\cup\mathcal{B}_\alpha$ forma una base para X.*

Definición 2.24. Sea $(x, \leq)$ un conjunto linealmente ordenado. Un punto $x \in X$ es *aislado por abajo* si x no es el supremo de los puntos estrictamente abajo de él. Si x no es aislado por abajo, diremos que x tiene *cofinalidad α por abajo*, si x es el supremo de un conjunto de tamaño α, formado por puntos estrictamente abajo de él y α es el mínimo cardinal con esta propiedad.
Aislado por arriba y *cofinalidad α por arriba* se definen de la misma manera.

El siguiente lema nos ayuda a caracterizar qué sucede si un punto no es aislado ni por arriba ni por abajo.

Lema 2.25. *Sea (G, τ) un grupo topológico ordenado. Si el elemento identidad $e \in G$ no es aislado ni por arriba ni por abajo, entonces su cofinalidad por arriba coincide con su cofinalidad por abajo.*

Teorema 2.26. *Sea (G, τ) un grupo topológico ordenado. Existe una base totalmente ordenada para las vecindades de la identidad $e \in G$.*

Teorema 2.27. *Sea (G, τ) un grupo topológico tal que la identidad tiene una base local totalmente ordenada. Entonces ocurre alguna de las siguientes afirmaciones.*

1. *G es metrizable o*

2. *G tiene una base local en la identidad totalmente ordenada que consiste de subgrupos abiertos.*

Teorema 2.28. *Una topología de grupo τ en un grupo abeliano G es lineal, si y solo si (G, τ) tiene una base local en el neutro e, que consiste de subgrupos abiertos de G.*

Observación 2.29. *Una topología de grupo lineal τ en G es totalmente acotada si y solo si todo subgrupo abierto de G tiene índice finito.*

Demostración. Supongamos que todo subgrupo abierto de G tiene índice finito. Sea $U \subset G$ abierto, sin perdida de generalidad U es vecindad del neutro e. Como τ es lineal, existe H subgrupo de G abierto tal que $H \subset U$, por hipótesis H tiene índice finito, es decir, $G = FH$ con $F \subset G$ finito, pero $FH \subset FU$. ❏

Entonces en el grupo de enteros $\mathbb{Z}$, toda topología no discreta y lineal es totalmente acotada.

En este teorema veremos una condición para que la topología τ_H sea lineal, también veremos una caracterización del tamaño del grupo H.

Teorema 2.30. *Sea (G, τ_H) un grupo topológico con $H < Hom(G, \mathbb{T})$. Ocurren las siguientes propiedades.*

1. *τ_H es lineal si y solo si H es un subgrupo de torsión de $Hom(G, \mathbb{T})$;*

2. *$w(G, \tau_H) = |H|$.*

Demostración. Supongamos que $H < Hom(G, \mathbb{T})$ es de torsión. Por definición, para cada $\chi \in H$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\chi^n = 1$, es decir, para cada $x \in G$, tenemos $\chi^n(x) = 1$, Entonces $\chi[G] \subset \mathbb{T}$ es un subgrupo finito. Sea $\epsilon > 0$ tal que $|\chi[G] \cap (-\epsilon, \epsilon)| = 1$, entonces $\chi^{-1}(-\epsilon, \epsilon) = ker(\chi)$, el cual es un subgrupo abierto de G. Haciendo esto para cada $\chi \in H$ tenemos una base local para el neutro de G.

Ahora supongamos que τ_H es lineal y supongamos que H no es de torsión, es decir, existe $\chi \in H$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos hallar $x_n \in G$ tal que $\chi(x_n) \neq 1$. Nótese que $\chi[G] < \mathbb{T}$ es un subgrupo infinito pues de lo cotrario ya terminariamos. También para cada $n \in \mathbb{N}, \chi^n[G]$ es infinito, así podemos formar la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de manera que $\chi(x_n) \neq \chi(x_m)$ si $m \neq n$.
Sea $\epsilon > 0$, como τ_H es lineal, consideremos $K < G$ tal que $\chi[K] \subset (-\epsilon, \epsilon)$. Nótese que $ker(\chi) < G$ es cerrado y abierto al mismo tiempo y como τ_H es totalmente acotada, existe $\{bi, 1 \leq i \leq l\}$ tal que $G = \cup_{i=1}^{l} b_i + ker(\chi)$. Entonces existe $i \leq l$ y existen $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n, x_m \in b_i + ker(\chi)$. Así $x_n = b_i + y_n$ y $x_m = b_i + y_m$ por lo que $x_n - x_m = y_n - y_m \in ker(\chi)$ por lo que $\chi(x_n) = \chi(x_m)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto H es de torsión.

La última parte la obtenemos por la definición de la topología τ_H y porque $\mathbb{T}$ es primero numerable.

❏

Capítulo 3

Topologías Totalmente Acotadas en $\mathbb{Z}$

3.1. T-sucesiones

Comezaremos esta sección con una de las definiciones principales.

Definición 3.1. Dada una sucesión $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en un grupo topológico G, decimos que a es una *T-sucesión* si existe una topología Hausdorff τ para G, tal que a converge al neutro en (G, τ).

Ejemplo 3.2. *Dado un primo $p \in \mathbb{P}$, gracias al Ejemplo (2.2), la topología τ_p es Hausdorff. Nótese que la sucesión $(p^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en $(\mathbb{Z}, \tau_p)$, por lo que $(p^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una T-sucesión.*

El siguiente ejemplo dado por Y. Hattory es una respuesta previa a nuestro problema en el grupo de los números reales, también nos muestra como podemos extender la convergencia en este grupo topológico. La prueba se puede consultar en ([3], 34-38).

Ejemplo 3.3 (Y. Hattory)**.** *Existe una topología τ en $\mathbb{R}$ más débil que la topología euclideana τ_E tal que* $(\mathbb{R}, +, \tau)$ *es un grupo topológico metrizable y la sucesión* $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* 0.

3.2. TB-sucesiones

En esta sección extenderemos el concepto de una T-sucesión. Dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$, analizaremos el siguiente problema ¿Existe una topología τ, totalmente acotada para G, tal que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al neutro e en (G, τ)? En esta sección daremos algunos de los principales resultados conocidos en el tema. Para esto tenemos la siguiente definición.

Definición 3.4. Decimos que $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ es una TB-sucesión si existe una topología τ totalmente acotada para G tal que a converge al neutro de (G, τ).

Ejemplo 3.5. *En el Ejemplo (2.2), se demostró que la topología τ_p es totalmente acotada, por lo que la sucesión $(p^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una TB-sucesión.*

Ejemplo 3.6. *De acuerdo al Teorema (2.11), si $f : G \to \mathbb{C}$ es casi periódica, la topología τ_f inducida por f es totalmente acotada. Nótese que si f es continua, por la Proposición (2.12) cualquier sucesión converge. Entonces en τ_f garantizamos la existencia de muchas TB-sucesiones.*

El problema planteado al inicio de esta sección el se ha estudiado mucho en el caso de los enteros $\mathbb{Z}$, por ejemplo por el profesor D. Dikranjan en [1] y [2]. Algunas topologías totalmente acotadas son las inducidas por familias de caracteres (2.13), como $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$ nos interesa estudiar subgrupos de $\mathbb{T}$, para esto definamos el siguiente grupo.

Definición 3.7. Dada una sucesión $z =(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$, definimos $t_z(\mathbb{T}) := \{x \in \mathbb{T} : z_n x \to 1 \text{ en } \mathbb{T}\} \subseteq \mathbb{T}$, llamado los elementos *topológicamente de z-torsión* del círculo.

Si G es un grupo y $H < Hom(G, \mathbb{T})$, nótese que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset G$ converge a 0 en (G, τ_H) si y solo si para cada $\chi \in H$, $\chi(a_n) \to 1$ en $\mathbb{T}$. Tomando esto en cuenta para el caso de los enteros tenemos lo siguiente.

Proposición 3.8. *Sea H un subgrupo de $\mathbb{T}$ y $a =(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$. Entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en $(\mathbb{Z}, \tau_H)$ si y solo si $H \leq t_a(\mathbb{T})$.*

Definición 3.9. Para $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$, llamaremos σ_a a la topología totalmente acotada más fina para la cual a converge a 0 en $(\mathbb{Z}, \sigma_a)$.

Corolario 3.10. *Para una sucesión $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ se tiene $\sigma_a = \tau_{t_a(\mathbb{T})}$.*

Demostración. por el teorema (2.16) cualquier topología de grupo totalmente acotada para $\mathbb{Z}$ es igual a τ_H para algún subgrupo $H < \mathbb{T}$ y por la Proposición (3.8) se tiene el resultado. ❑

Teorema 3.11. *Sea a=$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$\subset \mathbb{Z}$, entonces ocurren las siguientes afirmaciones:*

1. $w(\mathbb{Z}, \sigma) = |t_a(\mathbb{T})|$;

2. *σ_a es Hausdorff si y solo si $t_a(\mathbb{T})$ es infinito;*

3. *σ_a es metrizable si y solo si $|t_a(\mathbb{T})| = \aleph_0$;*

4. *σ_a es lineal si y solo si el subgrupo $t_a(\mathbb{T})$ es de torsión.*

Demostración. Las afirmaciones 1 y 4 se obtienen a partir del Teorema (2.30). La afirmación 2 se da gracias al Teorema (2.14) y la afirmación 3 se tiene por el Teorema de metrización (1.7). ❑

Proposición 3.12. *Sean* $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dos sucesiones en* $\mathbb{Z}$ *sin subsucesiones constantes.*

1. *Sean* $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *y* $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$*. Si* $|A \setminus B| < \aleph_0$ *y* $|B \setminus A| < \aleph_0$*, entonces* $t_a(\mathbb{T}) = t_b(\mathbb{T})$*. En particular esto es cierto cuando* $A = B$*.*

2. *Para una sucesión* $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $\mathbb{Z}$*, denotamos por* $|a|$*, la sucesión* $(|a|_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Entonces* $t_a(\mathbb{T}) = t_{|a|}(\mathbb{T})$*.*

3. *Si* $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión en* $\mathbb{Z}$ *sin subsucesiones constantes, existe* $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sucesión estrictamente creciente en* $\mathbb{N}$ *tal que* $t_a(\mathbb{T}) = t_b(\mathbb{T})$*.*

Demostración. 1. Por hipótesis para cada $k \in \mathbb{N}$, existen $l, m \in \mathbb{N}$ tales que $\{a_i : i \geq l\} \subset \{b_i : i \geq k\}$ y por otro lado $\{b_i : i \geq m\} \subset \{a_i : i \geq k\}$, entonces $a_n x \to 1$ si y solo si $b_n x \to 1$, esto para cada $x \in \mathbb{T}$, con lo cual queda demostrado $t_a(\mathbb{T}) = t_b(\mathbb{T})$.
2. No es díficil ver que $1 \in \mathbb{T}$ tiene una base de vecindades simétricas, es decir, U vecindad del neutro tal que $U^{-1} = U$. Así se tiene $a_n x \to 1$ si y solo si $|a|_n x \to 1$.
3. Considerando $\{b_n : n \in N\} = \{|a|_n : n \in \mathbb{N}\}$, por la demostración anterior $t_a(\mathbb{T}) = t_b(\mathbb{T})$. ❑

Algunas veces es más conveniente trabajar con números reales en lugar de elementos del toro $\mathbb{T}$. Para esto consideraremos el grupo definido de la siguiente manera.

Definición 3.13. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ el homomorfismo canónico, definamos $t_a(\mathbb{R}) := \varphi^{-1}(t_a(\mathbb{T}))$, donde $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$. Nótese que $\mathbb{Z} \subset t_a(\mathbb{R})$ y que $\varphi(t_a(\mathbb{R})) = t_a(\mathbb{T})$. Además si $t_a(\mathbb{T})$ es infinito, entonces $|t_a(\mathbb{R})| = |t_a(\mathbb{T})|$. Otra manera de definir el grupo $t_a(\mathbb{R})$ es $t_a(\mathbb{R}) := \{x \in \mathbb{R} : \|a_n x\| \to 0\}$; donde $\|x\| := d(x, \mathbb{Z})$ y d es la distancia euclidiana en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 3.14. *Sea a sucesión de números enteros,* $t_a(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ *si y solo si a es eventualmente cero.*

Demostración. Si a es eventualmente cero, es trivial que $t_a(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Supongamos que $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es eventualmente nula, si a tiene una subsucesión constante, claramente $t_a(\mathbb{R})$ es a lo más numerable. Si a no tiene subsucesión constante, entonces tenemos $|a| \to \infty$, por la proposición (3.12) podemos pensar que $a_n \to \infty$. Definamos ahora la siguiente sucesión de intervalos I_n y una sucesión estrictamente creciente de números naturales k_n.

Sea $I_0 = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ y sea $k_0 = 1$. Ahora si tenemos definidos I_{n-1} y k_{n-1}, escojamos k_n tal que $k_n > k_{n-1}$ y además que $diam(a_{k_n} I_{n-1}) > 2$, esto lo podemos hacer pues a es una sucesión ceciente. Entonces para algún $m \in \mathbb{Z}$, $m + I_0 \subset a_{k_n} I_{n-1}$, así definimos $I_n := a_{k_n}^{-1}(m + I_0) \subset I_{n-1}$. Nótese que esto nos da una sucesión decreciente de intervalos. Sea $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Por cosntrucción $a_{k_n}x \in I_0 + \mathbb{Z}$, así $\|a_{k_n}x\| \geq \frac{1}{4}$, por lo que $x \notin t_a(\mathbb{R})$. ❏

Teorema 3.15. **[2]** *Si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumple que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \infty$, entonces el subgrupo $t_a(\mathbb{R})$ de $\mathbb{T}$ tiene tamaño $\mathfrak{c}$.*

Demostración. Gracias al Teorema (3.12), podemos suponer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{N}$. Como $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge, digamos a r. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $R_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$. Como $\frac{a_n}{a_{n+1}} \to 0$, para $0 < \epsilon < 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a_k}{a_{k+1}} \leq \epsilon/2$, para todo $k \geq n_0$. Nótese que para $k \geq n_0$ tenemos $\frac{a_k}{a_{k+t}} \leq (\epsilon/2)^t \leq \epsilon/2^t$, pues $\frac{a_k}{a_{k+t}} = \frac{a_k}{a_{k+1}} \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}} \cdots \frac{a_{k+t-1}}{a_{k+t}}$. Entonces si $k \geq n_0$, $a_k R_k = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{a_k}{a_{k+t}} \leq \sum_{t=1}^{\infty} \epsilon/2^t = \epsilon$.

Sea $\theta = \max\{2, r\}$ y sea $\epsilon_k = a_k R_k \theta$, nótese que $\epsilon_k \to 0$. Gracias a la Proposición (3.12, 1.) podemos suponer que $\epsilon_k < 1$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Ahora dado $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ definamos las siguientes sucesiones de intervalos.

1. $I_k(\xi) = [p_k(\xi), p_k(\xi) + \epsilon_k]$ con $p_1(\xi) = 0$,
2. $J_k(\xi) = 1/a_k I_k(\xi) = [p_k(\xi)/a_k, p_k(\xi)/a_k + \epsilon_k/a_k]$,
3. $p_{k+1}(\xi) =]p_k(\xi)a_{k+1}/a_k[+ \xi_k$, donde $\xi_k = \xi(k)$ y $]y[$ denota el menor entero más grande o igual que y.

Nótese que si $\xi \neq \xi'$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $I_k(\xi)$ y $I_k(\xi')$ son ajenos, esto por la definición de $p_{k+1}(\xi)$.

Ahora si fijamos $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, los intervalos $\{J_k(\xi)\}_{k\in\mathbb{N}}$ forman una cadena decreciente, es decir,

$$J_1(\xi) \supset J_2(\xi) \supset \cdots \supset J_k(\xi) \supset \cdots .$$

Afirmamos que los puntos de los extremos derechos de los intervalos $\{J_k(\xi)\}_{k\in\mathbb{N}}$ forman una sucesión decreciente. Para esto por la definición (3) de $p_{k+1}(\xi)$, tenemos $p_{k+1}(\xi) \leq p_k(\xi)(a_{k+1}/a_k) + 2$, así obtenemos

$$\frac{p_{k+1}(\xi)}{a_{k+1}} - \frac{p_k(\xi)}{a_k} \leq \frac{2}{a_{k+1}} \leq \frac{\theta}{a_{k+1}}.$$

Esto se tiene pues por definición

$$\frac{\epsilon_k}{a_k} - \frac{\epsilon_{k+1}}{a_{k+1}} = \theta(R_k - R_{k+1}) = \frac{\theta}{a_{k+1}}$$

Asi obtenemos

$$\frac{p_k(\xi)}{a_k} + \frac{\epsilon_k}{a_k} \geq \frac{p_{k+1}(\xi)}{a_{k+1}} + \frac{\epsilon_{k+1}}{a_{k+1}}.$$

Con esto hemos probado la afirmación.

Ahora para cada $\xi \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ se tiene que $\lim_{k\to\infty} J_k(\xi) = 0$, entonces existe un único punto $y_\xi \in \bigcap_{k=1}^{\infty} J_k(\xi)$. Con esto como $y_\xi J_k(\xi)$, tenemos $a_k y_\xi \in I_k(\xi)$, es decir, $p_k(\xi) \leq a_k y_\xi \leq p_k(\xi) + \epsilon_k$ y como $p_k(\xi) \in \mathbb{Z}$, entonces $\|a_k y_\xi\| \to 0$ en $\mathbb{R}$ cuando $\epsilon_k \to 0$. Entonces $y_\xi \in t_a(\mathbb{R})$ para cada $\xi \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, además si $\xi \neq \xi'$, se tiene $y_\xi \neq y_{\xi'}$, concluimos que $|t_a(\mathbb{R})| = \mathfrak{c}$ ❑

Teorema 3.16. [2] *Si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumple que $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ es acotado para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces el subgrupo $t_a(\mathbb{R})$ de $\mathbb{T}$ tiene tamaño numerable.*

Demostración. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsecesión constante entonces $t_a(\mathbb{R})$ es finito. Por otro lado gracias a la Proposición (3.12), podemos suponer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{N}$.

Dados $\epsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$I(\epsilon,k) := \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \left[\frac{j-\epsilon}{k}, \frac{j+\epsilon}{k}\right] \text{ y } A_n(\epsilon) := \bigcap_{i\geq n} I(\epsilon, a_i).$$

Nótese que $I(\epsilon,k) = \{x \in \mathbb{R} : \|kx\| \leq \epsilon\}$, con esto tenemos

$$t_a(\mathbb{R}) = \bigcap_{\epsilon>0}\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{i\geq n} I(\epsilon,a_i) = \bigcap_{\epsilon>0}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n(\epsilon)$$

Así, para demostrar que $t_a(\mathbb{R})$ es numerable basta demostrar que existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $A_n(\epsilon)$ es numerable. Por hipótesis sabemos que la sucesión $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ es acotada digamos $\frac{a_{n+1}}{a_n} < M$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $\frac{1-2\epsilon}{2\epsilon} > M$, así $\frac{1-2\epsilon}{a_{k+1}} > \frac{2\epsilon}{a_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Probaremos por inducción que para cada $k \geq n$ existen intervalos disjuntos $J_l^k, l \in \mathbb{Z}$, que cumplen con lo siguiente

$$\bigcap_{i=n}^{k} I(\epsilon,a_i) = \bigcup_{l\in\mathbb{Z}} J_l^k, \ \ \operatorname{diam}(J_l^k) \leq \frac{2\epsilon}{a_k} \text{ para cada } l \in \mathbb{Z} \text{ y si}$$

$$k > n \text{ se cumpla } J_l^k \subset J_l^{k-1} \text{ para cada } l \in \mathbb{Z}. \tag{3.2.1}$$

Para $k = n$ esta constucción es obvia considerando $J_l^k = \left[\frac{l-\epsilon}{k}, \frac{l+\epsilon}{k}\right]$. Supongamos ahora $k \geq n$ y que se cumple (3.2.1) para k y los intervalos disjuntos J_l^k ($l \in \mathbb{Z}$). Nótese que para $l \in \mathbb{Z}$ fijo tenemos

$\operatorname{diam}(I(\epsilon, a_{k+1})) = \frac{2\epsilon}{a_{k+1}}$ y $\operatorname{diam}(J_l^k) \leq \frac{2\epsilon}{a_k}$, por lo que la distancia entre estos intervalos es al menos $\frac{1-2\epsilon}{a_{k+1}}$, que es más grande que la longitud de J_s^k. Así podemos definir $J_l^{k+1} = J_l^k \cap I(\epsilon, a_{k+1})$. Nótese que J_l^{k+1} es un intervalo de longitud a lo más $\frac{2\epsilon}{a_{k+1}}$ y $J_l^{k+1} \subset J_l^k$. Esto demuestra la afirmación (3.2.1) para cada $k \in \mathbb{N}$.

Como los intervalos J_l^k se van conteniendo para $k \in \mathbb{Z}$, tenemos $A_n(\epsilon) = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} \bigcap_{k=n}^{\infty} J_l^k$. Ahora como $\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam} J_l^k = 0$, cada intersección $\bigcap_{k=n}^{\infty} J_l^k$ contiene a lo más a un punto. Esto termina la demostración. ❑

Corolario 3.17. *Para cada sucesión* $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ *que cumpla que* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *sea acotado. Entonces toda topología de grupo totalmente acotada en* $\mathbb{Z}$ *en la cual* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$*, debe ser metrizable.*

Una consecuencia fácil que se obtiene a partir del Corolario anterior es que si $a_n = p^n$, donde p es un número primo, entonces toda topología de grupo totalmente acotada para $\mathbb{Z}$, en la cual la sucesión p^n converge a 0, debe ser metrizable.

Bibliografía

[1] G. Barbieri; D. Dikranjan; C. Milan; H. Weber. *Answer to Raczkowki's quest on convergent sequences*. Top. Appl, 132(1), 89-101, 2003.

[2] G. Barbieri; D. Dikranjan; C. Milan; H. Weber. *Convergent sequences in precompact groups topologies*. Top. Appl, Vol. 6, #2, 149-169, 2005.

[3] B. Zamora; *Un enfoque moderno a los grupo topológicos*. Tesis de licenciatura.

[4] W. W. Comfort; K. A. Ross. *Topologies induced by groups of characters*. Fund. Math. 55 283-291, 1964.

[5] D. Dikranjan. *Topologically tosion elements of topological groups*. Top. Proc, Vol. 26 505-532, 2001-2002.

[6] D. Dikranjan; I. Prodanov; L. Stojanov. *Topological groups(characters, dualities and minimal group topologies)*. Marcel Dekker, New York, 1990.

[7] R. Engelking. *General topology* . PWN & North-Hollan, Warszawa, 1997.

[8] E. Hewitt; K. A. Ross *Abstract Harmonic Analysis. Vol. I*. Grundlehren der math. Wissenschaften, Spinger-Verlag, Berlin, 1963.

[9] K. Kunen; J.E. Vaughan. *Handbook of set-theoretic topology*. North-Holland, 1984.

[10] P. J. Nyikos; H. C Reichel. *Topology orderable groups*. Top. Appl, Vol. 5, #3, 195-204, 1975.

[11] I. Protasov; E. Zelenyuk. *Topologies on groups determined by sequences*. Math. Studies. Monograph Series, VNTL, 1999.