UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ

TITULO:
CONSTRUCCION DE APLICACIONES INFORMATICAS PARA EL TRATAMIENTO NUMERICO Y GRAFICO DE LA FUNCION DERIVADA Y LA FUNCION INTEGRAL.

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Presenta:

Genaro Salto Alegre.

Asesor: Dr. José Carlos Cortés Zavala

Morelia, Michoacán

Noviembre de 2020

Agradecimientos

En primer lugar, deseo expresar mi agradecimiento al director de esta tesis doctoral, Dr. José Carlos Cortés Zavala, por la dedicación la confianza y apoyo que ha brindado a este trabajo.

Doy gracias a mi familia, a mis padres, hermanos, hermanas por el apoyo incondicional que siempre me han brindado en todos los proyectos y demás metas que me he trazado en la vida

A mis amigos Luisei “El otaku”, Juan “El químico”, Oscar “Don guapo”, Cira “Don cira, Rodolfo (El inge), Karolyn, con quien eh compartido clases, proyectos e ilusiones durante este trayecto, gracias por su apoyo.

Pero, sobre todo, gracias a mi hermana Ma Cristina Salto Alegre por el gran apoyo moral que me ha dado ya que el mérito no solo es de uno, si no de las personas que lo hacen posible y gran parte de lo que soy es gracias ti, por eso y mucho más, gracias.

Tabla de contenido

Lista De Figuras

Lista De Tablas

Resumen

La presente tesis busca un acercamiento al concepto de Derivada e Integral por medio de forma intuitiva a través de representaciones gráficas y numéricas haciendo uso de recursos tecnológicos.

Se quiere enseñar el concepto de derivada mediante el análisis de la razón de cambio obtenida al tomar dos puntos de una función y el concepto de integral haciendo uso de sumas, a este tipo particular de sumas, las llamaremos acumulaciones o funciones de acumulación.

Se utilizará el potencial de GeoGebra como medio de enseñanza y todas las herramientas que ofrece esta como lo son la hoja de cálculo y la vista de CAS, para que se puedan realizar transferencias entre representaciones semióticas.

Palabras clave: Diferencias· Integral· Acumulación· GeoGebra· Semiosis.

Abstract

This thesis seeks an approach to the concept of Derivative and Integral through an intuitive way through graphic and numerical representations making use of technological resources.

We want to teach the concept of derivative by analyzing the rate of change obtained by taking two points of a function and the concept of integral making use of sums, we will call this particular type of sums accumulations or accumulation functions.

The potential of GeoGebra as a teaching medium and all the tools that it offers, such as the spreadsheet and the CAS view, will be used so that transfers between semiotic representations can be made.

Keywords: Differences · Integral · Accumulation · GeoGebra · Semiosis.

Capítulo 1

Introducción

Los cursos de Cálculo Diferencial e Integral que se imparte en los diferentes bachilleratos y escuelas de nivel medio superior se centra principalmente en el uso repetitivo de algoritmos que propician únicamente el desarrollo de habilidades mecánicas, siendo secuencias de pasos algebraicos necesaria para llegar al resultado deseado, es decir, existe una tendencia a privilegiar este aspecto y se da poca importancia a la comprensión de los conceptos fundamentales de estos cursos. Este tipo de esquema de enseñanza produce una tendencia al uso repetitivo de algoritmos por parte de los estudiantes dejando de lado la aprehensión de estos.

El programa de estos cursos menciona la importancia de introducir a un nivel intuitivo las definiciones y conceptos asociados a estos y en la práctica se parte de estas ideas para llegar a una manipulación algebraica, Por lo cual la enseñanza del Cálculo parte de una concepción estructural del mismo, menciona Duval (1993) que los aprendizajes de base en matemáticas no pueden solamente ser la automatización de ciertas técnicas operatorias (en estos casos el cálculo), sino que deben también ser la coordinación de los diferentes registros de representación que son ahí utilizados, donde el docente propone al estudiante representaciones semióticas de un objeto matemático con la intención que el estudiante lo construya cognitivamente; pero lo único que puede hacer es proponerles representaciones semióticas dado que no existe forma alguna de mostrar, indicar (en el sentido etimológico de la palabra), dicho objeto; el estudiante entra, por tanto, concretamente en contacto con representaciones, no con el objeto, aprende a hacer referencia a dichas representaciones, no al objeto, y a manipularlas. Parecería un itinerario destinado al fracaso cognitivo. Y, por el contrario, el estudiante, al final, aprende, construye, hace propio el objeto.

Las investigaciones educativas realizadas, ponen de manifiesto la dificultad de aprehensión, Por ejemplo, cómo podemos interpretar los trabajos de Masan y Selden (1989, 1994) en los cuales aseguran que sus alumnos de una escuela de ingeniería después de llevar un curso de cálculo, no pueden, aun siendo buenos alumnos, resolver problemas no-rutinarios. Ellos señalan: "Esto sugiere que los métodos tradicionales de enseñanza del cálculo son insuficientes en la preparación de buenos estudiantes para aplicar el cálculo creativamente ". El fracaso de estos estudiantes de ingeniería se debe a la carencia de articulación entre representaciones por parte del estudiante (ver Hitt, 1997), Hitt (1992) considera que "un conocimiento asociado a un concepto es estable en un alumno, si él puede reconocer esta noción en sus diferentes representaciones".

Es importante señalar que algunas de las causas de la ausencia de la utilización de diferentes registros de representación por los estudiantes en los cursos de Cálculo Integral, se pueden deber a:

1. Una pérdida de tiempo para usarlos: Por lo que es importante subrayar que con el advenimiento de las nuevas tecnologías, tales como calculadoras-graficas, computadoras e incluso el uso de celulares, se puede tener acceso a diferentes registros de representación con gasto reducido de tiempo.
2. Falta de interés por parte de los profesores ya que no consideran que es un proceso significativo por el que tienen que transitar los estudiantes y no encontrar el valor didáctico en su incorporación, dando como resultado que no sean parte esencial de su trabajo en el aula. Esta causa la podemos considerar como un problema de enseñanza.

3. La utilización de libros de texto que normalmente resaltan únicamente la utilización de técnicas de manipulación algebraicas.
4. La complejidad para los estudiantes en su utilización pues siempre que es posible los estudiantes parecen escoger una estructura simbólica para procesar información matemática más que visual, lo cual nos lleva a pensar que el uso de diferentes registros de representación puede ser un problema de aprendizaje.

En esencia la enseñanza del cálculo integral en el nivel medio superior es puramente algebraica, lo cual oculta información muy importante para el estudiante y su aprehensión.

En el año 2014 el Dr. José Carlos Cortés Zavala, Lourdes Guerrero Magaña, Christian Morales Ontiveros, Lourdes Pedroza Ceras (Aplicaciones Tecnológicas para el Aprendizaje de las Matemáticas) mostraron el uso de tecnología computacional para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas asi como el uso de software, el uso de diversas plataformas de Internet, la utilización de calculadoras y el desarrollo de SE para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. En cambio, en esta tesis, se pretende mostrar que la integral puede ser aproximada mediante simples sumas, que llamaremos acumulaciones y la enseñanza de la derivada puede darse a través de diferencias (restas) y cómo éstas podían aproximar a la derivada.

En el capítulo 1 “Introducción” se establecen los objetivos que se pretenden alcanzar con esta tesis. Y, sobre todo, se menciona el problema de investigación que esta tesis aborda.

En el capítulo 2 “Marco Teórico” se desarrolla la parte conceptual que sustenta esta tesis, la cual está apoyada en las teorías propuestas por José Carlos Cortés Zavala, Lourdes Guerrero Magaña, Christian Morales Ontiveros, Lourdes Pedroza Ceras en aplicaciones tecnológicas para el aprendizaje de las matemáticas asi como Raymond Duval sobre los registros de representación semiótica. Como se mencionó anteriormente, Fernando

Hitt(1992), en el cálculo integral, los conceptos pueden ser comprendidos mejor por el estudiante si éste es capaz de reconocerlo en sus diferentes representaciones, como lo pueden ser gráficas, algebraicas, etc. También se explica la importancia del uso de GeoGebra como medio de enseñanza, ya que promueve la visualización matemática de una forma más intuitiva, el cual es un concepto clave para que el aprendizaje de las matemáticas sea eficaz.

En el capítulo 3 "Exposición de la propuesta" se desarrolla el tema de las acumulaciones y diferencias; para una mejor comprensión, se calculan las diferencias y acumulaciones para diferentes tipos de funciones. En la mayoría de los casos se apoya con el uso de la tecnología, que permite una mejor comprensión de la aproximación a la integral mediante acumulaciones y las diferencias de una función.

En el capítulo 4 "Conclusiones" se dan respuestas a las preguntas de investigación que se plantearon en el capítulo y también se hace una reflexión final de la experimentación que el tesista realizó, en la cual se plasman ciertos detalles de interés que surgieron.

1.1 Problema De Investigación

Un problema de investigación que esta tesis tiene como propósito resolver es:

¿Cómo puede las diferencias ayudar a un estudiante a comprender mejor el cambio de variable?

¿Cómo pueden las acumulaciones ayudar a un estudiante a que comprenda mejor lo que es la integral?

1.2 Preguntas De Investigación

En este trabajo de tesis se pretende dar respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Qué tan pequeño o grande es el error de aproximación de las acumulaciones a la integral?

- ¿Se pueden obtener acumulaciones de cualquier función? ¿Estas deben ser funciones continuas?
- ¿Cómo GeoGebra, un software de geometría dinámica, puede ayudar al estudiante a entender mejor el concepto de acumulación y razón de cambio?
- ¿Se puede obtener una forma explícita para cualquier función de acumulación?
- ¿Por qué se debe dar un valor inicial en cada acumulación?

1.3 Objetivos

El presente trabajo tiene como objetivo que los estudiantes conozcan como es el cambio de variable a través de diferencias(restas) y las acumulaciones mucho antes de conocer la integral, porque con las acumulaciones, los estudiantes pueden llegar a profundizar el concepto de integral.

Por lo que se pretende:

- Que los estudiantes aprendan a usar GeoGebra para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Que los estudiantes aprendan a calcular los cambios de una variable.
- Que los estudiantes aprendan usar GeoGebra para hacer el ajuste de curvas a una lista de puntos.
- Que los estudiantes aprendan a calcular acumulaciones de cualquier función.
- Que los estudiantes dejen de ver a la integral definida como algo mecánico y rutinario.
- Que los estudiantes comprendan realmente lo que es la integral.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1 Registros de Representación Semiótica

En la actualidad se ha publicado una gran cantidad de investigaciones educativas acerca del diseño de propuestas metodológicas desde diversos paradigmas para la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial e integral tanto, pasando a proponer alternativas basadas en nuevas estrategias didácticas; el uso de nuevas herramientas tecnológicas para reforzar o descubrir ideas matemáticas; el desarrollo y empleo de distintos marcos teóricos; la realización de investigaciones cualitativas en pequeñas poblaciones, e incluso han formulado secuencias didácticas que afectan los currículos y son llevadas a cabo en grupos escolares completos, la introducción de la tecnología computacional en la enseñanza pudo ser vista al principio como un medio para resolver la problemática: los libros de texto tradicionales se acompañaban con mejores imágenes, mientras que en el aula se ocupaban calculadoras que graneaban para mostrar el mismo contenido; un diferente cómo para mostrar un mismo qué. La evolución de los recursos tecnológicos, de acuerdo con Moreno–Armella, Hegedus y Kaput (2008), ofrece una nueva perspectiva teórica para investigar el potencial didáctico de los ambientes tecnológicos dinámicos. En estas exploraciones se han señalado los problemas que enfrenta la enseñanza formal del cálculo, considerando que privilegia a una cantidad enorme de algoritmos carente de significados para su aplicación en otras disciplinas o profesiones.

Por otro lado, existen publicaciones que presentan resultados obtenidos, tanto en innovaciones que responden a las demandas institucionales de aplicar el conocimiento a problemas reales (Modelo educativo por competencias).

Respecto a las dificultades presentes en el aprendizaje del cálculo diferencial e integral, Dreyfus y Eisenberg (1990) afirman que el cálculo diferencial e integral es la rama de la matemática avanzada a la que se debe dedicar más tiempo en los estudios científico-técnicos, dado el número de problemas no triviales presentes en su proceso de aprendizaje. Existen "limitaciones tanto de las prácticas educativas tradicionales, como en las que favorecen los enfoques formales y teóricos" (Artigue, 1991). Los elevados niveles de fracaso escolar, de reprobación y deserción de estudiantes en cursos de cálculo revelan la complejidad existente en su estudio y la necesidad de desarrollar nuevas investigaciones en esta dirección (Artigue, 1991). Las metodologías tradicionales en la enseñanza del cálculo diferencial e integral a nivel medio superior como superior se centran fundamentalmente en aspectos algebraicos y algorítmicos. Se abordan los procesos rigurosos de demostración matemática y la evaluación consiste en presentar al estudiantado ejercicios similares a los desarrollados en clase, de manera que tengan correspondencia con la estructura expuesta por el personal docente de matemática (Moreno, 2005).

Esta metodología presenta una serie de dificultades. En efecto, es posible que el conocimiento adquirido por el estudiantado le permita resolver problemas y ejercicios denominados rutinarios, es decir, situaciones que sean muy similares a las presentadas por su docente en la clase. No obstante, cuando el estudiantado afronta situaciones que requieren un mayor manejo conceptual, la mayoría comete errores (Selden, Mason y Selden, 1994).

Muñoz (2000) afirmó que existe un desequilibrio entre lo conceptual y lo algorítmico, en esa misma dirección, se ha identificado que los problemas que los estudiantes deben resolver en los que se aplica la razón de cambio y la integral, están muy estereotipados, haciendo que la mecanización de técnicas sea el objetivo principal en el curso de cálculo diferencial e integral, con una excesiva orientación algebraica, en descuido de lo geométrico y del significado del proceso de integración (Artigue, 2002).

Una de las ideas teóricas en las que se basa esta tesis es explicada a través de la teoría de Registros semióticos de representación, la cual fue propuesta por Duval (1988, 2003, 2005). En la sistematización teórica de Duval, las representaciones semióticas de un objeto matemático deben ser interpretadas como una operación explícita de designación, distintas del objeto matemático (abstracto, ideal, que constituye un invariante de ellas) a la cual hacen referencia; del cual son, precisamente, representaciones. Si se le pregunta a un niño pequeño: ¿qué es "el número tres"?, él mostrará tres dedos, alzando la mano derecha. La pregunta tiene que ver con el objeto matemático "tres" pero tiene como respuesta una representación semiótica de dicho objeto, normalmente sólo una. Si se le plantea la misma pregunta a un niño que está terminando la escuela primaria, él seguramente escribirá con un lápiz
en una hoja de papel la cifra 3. Cambia la representación, pero el problema de la
diferencia entre objeto matemático y su representación permanece.

"Para las matemáticas las representaciones juegan un papel importante, ya que permiten transformar ideas tangibles en imágenes u objetos reales, que pueden ser apreciados por nuestros sentidos (vista, tacto, etc.) (Cortés, 2002). Conjuntamente, según lo expuesto por Duval (1993), éste menciona que "los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción o a una experiencia intuitiva inmediata y es necesario entonces poder proporcionar representaciones". Con base en esto, Ferrara, Pratt & Robutti (2006) citan que:

“Es importante construir un entendimiento de las funciones a través de representaciones múltiples y problemas contextuales antes de poner énfasis en las definiciones estáticas. Una aportación de la tecnología es el ofrecer el acceso a varios tipos de representaciones de función. Esta aportación ha sido importante en la investigación PME a lo largo de las tres décadas pasadas”.

Duval (1993) hace una diferenciación de la aprehensión de las representaciones semióticas y la aprehensión conceptual del objeto matemático, denominando semiosis a la primera y noesis a la segunda. Además, afirma que hay una necesidad de utilizar las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático en el aprendizaje ya que considera que toda representación es cognitivamente parcial en referencia a lo que ella representa y que de una representación a otra existen diferentes aspectos de contenido que son representados, y también alerta sobre la posibilidad de confundir los objetos matemáticos con alguna de sus representaciones y menciona que una de las posibilidades que existen para no hacerlo, es usar múltiples representación semiótica.

Una manera de ver las distintas representaciones semióticas de un mismo concepto, lo podemos analizar en el siguiente ejemplo.

Si se pregunta a un joven de quince años: ¿qué es una recta?, podemos tener como respuesta el dibujo de una mancha de grafito, derecha, más o menos larga y delgada; o una ecuación lineal del tipo $ax + by + c = 0$, escrita con un lápiz sobre una hoja de papel. En los dos casos se trata de representaciones semióticas del objeto matemático pedido, no es el objeto matemático al cual se hace referencia.

Si se pregunta a un estudiante de los últimos años de la secundaria: ¿qué es una derivada?, él escribirá $f\,'(x)$, ofreciéndonos una representación semiótica, cuando la pregunta hace referencia al objeto matemático “derivada”. Y esta historia prosigue en la universidad, sin muchos cambios. Sólo un experto intentaría dar una respuesta epistemológicamente significativa a la pregunta planteada sobre un objeto matemático, mostrando dos (o más) representaciones semióticas de este, reconociendo que una única representación semiótica del objeto matemático no permite agolpar todos los componentes conceptuales del objeto, o aquellos más idóneos a la situación. Por otro lado, demasiadas representaciones tienden a confundir al aprendiz, puede ser que no todas sean relevantes conceptualmente hablando y, por tanto, no favorecer la construcción cognitiva del objeto (D'Amore et al, 2013).

Es de relevante importancia mencionar que "la coordinación de varios registros de representación semiótica es fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos matemáticos" Duval (1993). Es decir, que para lograr la aprehensión del objeto matemático (noesis) debemos, entre otras cosas, lograr primero la aprehensión de los diferentes registros de representación (semiosis).

Basado en experimentaciones hechas con nueve profesores de enseñanza media, Hitt (2003) reporta que el utilizar diferentes representaciones permite a los investigadores abordar problemas de una manera eficaz. Aunque los estudiantes estén acostumbrado a manejar las representaciones algebraicas, si llegan a cometer un error, son incapaces de saber dónde lo cometieron. Y dado que su uso de representaciones gráficas es poco usual, no cuentan con las herramientas suficientes para tener seguridad al manejar sus procesos algebraicos o para saber encontrar el error.

De las investigaciones sobre el aprendizaje medido con el uso de la tecnología en la enseñanza del cálculo, se ha señalado que no es suficiente enfocar el significado geométrico del concepto razón de cambio e integral de una función. Por otra parte, Gordon & Gordon (2007), plantearon la idea de ajustes de funciones con datos numéricos y de un recurso computacional discreto para favorecer el descubrimiento del Teorema Fundamental de Cálculo por parte de los estudiantes, con el apoyo de recursos tecnológicos.

Yerushalmy & Swidan (2011) señalan que pocos estudios identificaron la acumulación como un elemento central en el entendimiento del concepto de integral, análogo a la centralidad del concepto de la pendiente para la función derivada y un concepto clave en el entendimiento del Teorema Fundamental del Cálculo. También menciona que entender la gráfica de acumulación requiere estar consciente de que cada valor específico asignado como un límite inferior determina una única función de acumulación en una familia de funciones de acumulación.

Por lo anterior, en este trabajo se pretende abordar el cálculo diferencial e integral a través de un acercamiento numérico y éstos serán tratados con diferentes registros de representación semiótica en GeoGebra.

2.2 Uso De Geogebra como Medio de Enseñanza

Nickerson (1995) analizó el impacto del uso de software en educación y expuso algunos motivos para el empleo de software:

1. Ver el aprendizaje como un proceso constructivo en el que la tarea es proporcionar una guía que facilite la exploración y el descubrimiento.
2. Utilizar simulaciones para llamar la atención de los estudiantes a los aspectos de una situación o problema que fácilmente pueden pasar desapercibidos o no observados en condiciones normales.
3. Proporcionar un ambiente de apoyo que es rico en recursos, ayudas a la exploración, crea

una atmósfera en la que las ideas se pueden expresar libremente, y proporciona un estímulo cuando los estudiantes hacen un esfuerzo por comprender. (Nickerson, 1995 citado en Delmas, Garfield y Chance, 1999).

En la misma obra Snir, Smith y Grosslight (1995) nos indican que "ello (el uso de software) permite a los estudiantes percibir fenómenos que no pueden ser observados bajos condiciones normales (e.g., conceptos teóricos y abstractos)" (Snir, Smith y Grosslight, 1995, citado por Delmas, Garfield y Chance, 1999)

Para Hitt (2003) es necesario que se promueva la visualización matemática, la cual se puede suscitar al utilizar diferentes representaciones, apoyándose también del uso de la tecnología que permita dar un significado clave a los conocimientos matemáticos. Por lo que, en este trabajo, se utilizará GeoGebra, un software de geometría libre que ayudará a los estudiantes obtener esa visualización matemática que Hitt menciona.

GeoGebra ofrece tres perspectivas diferentes de cada objeto matemático: una vista gráfica, una vista numérica, vista algebraica y, además, una vista de hoja de cálculo. Esta multiplicidad permite apreciar los objetos matemáticos en tres representaciones diferentes: gráfica (como en el caso de puntos, gráficos de funciones), algebraica (como coordenadas de puntos, ecuaciones), y en celdas de una hoja de cálculo.

Cada representación del mismo objeto se vincula dinámicamente a las demás en una adaptación automática y recíproca que asimila los cambios producidos en cualquiera de ellas, más allá de cuál fuera la que lo creara originalmente.

- Vista gráfica 2D: En esta vista se pueden realizar construcciones geométricas utilizando puntos, rectas, segmentos, polígonos, cónicas, etc. También se pueden realizar operaciones tales como intersección entre objetos, traslaciones, rotaciones, etc. Además, se pueden graficar funciones, curvas expresadas en forma implícita, regiones planas definidas mediante desigualdades, etc.

- Vista algebraica: Allí se muestran las representaciones algebraicas y numéricas de los objetos representados en las otras vistas del programa.
- Vista gráfica 3D: En esta vista se pueden representar, además de los objetos mencionados para la vista gráfica 2D, planos, esferas, conos, poliedros, funciones de dos variables.
- Vista CAS (Cálculo Simbólico): Permite realizar cálculos en forma simbólica (derivadas, integrales, sistemas de ecuaciones, cálculo matricial, etc.).
- Vista de Probabilidades y Estadística: Esta vista contiene representaciones de diversas funciones de distribución de probabilidad y permite calcular la probabilidad de las mismas en un determinado intervalo. También ofrece una calculadora que permite realizar test estadísticos.

GeoGebra tiene las mismas ventajas de cualquier software educativo, pero sobresalen las siguientes:

- Se propician varios tipos de aprendizaje que pueden ser individuales o grupales

Fomenta la creatividad: al retar el aprendizaje, a aplicar los conocimientos y habilidades que ya posibilita la búsqueda y/o descubrimiento de nuevos conocimientos.

- Facilita la construcción de conocimiento por parte del alumno.
- Favorece el aprendizaje autónomo y se ajusta al tiempo de que el aprendizaje puede disponer para esa actividad.

- Permite el acceso al conocimiento y a la participación de actividades.

  Incluyen elementos para captar la atención del alumno.

- Favorece el carácter interactivo del aprendizaje.
- Permite la utilización de principios heurísticos, que con otros medios resultan casi imposible de aplicar, como es el caso de la movilidad, la inducción, la generalización, entre otros.

GeoGebra, es un software de geometría dinámica que nos permite a los usuarios realizar diferentes construcciones geométricas como el trazo de puntos, segmentos, rectas, parábolas, hipérbolas (secciones cónicas), cualquier tipo de función, vectores, resolver sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, encontrar la derivada de una función, encontrar la integral de una función, así como poder visualizar el área bajo la curva, crear tablas de valores, listas, etc.

Arias & Leiva (2013), mencionan algunas ventajas del uso del software Geogebra:

- Es libre. Es decir, es un software que todos pueden descargar en su pc, iMac, iPad, iPhone, etc., de forma gratuita.
- Es multiplataforma. Puede ser descargado en Windows, Ubuntu, Mac y Android.
- Es multitarea. Se dice que es un software de geometría dinámica, pero también se puede usar para estudiar Álgebra básica, álgebra superior, cálculo diferencial e integral, probabilidad y estadística, trigonometría, etc.
- Es Visual. Permite al estudiante poder realizar demostraciones visuales y dinámicas, por medio de botones, tablas, deslizadores, etc.

En particular, en este trabajo, se hará uso de herramientas que GeoGebra ofrece como: la vista de Cálculo Simbólico (CAS) para encontrar la solución de sistemas de ecuaciones lineales mediante un simple comando; la vista de Hoja de Cálculo que servirá para crear tablas de valores de una función, obteniendo los valores de las diferencias y obtener funciones de acumulación para aquellas funciones complicadas de evaluar , se utilizará la vista gráfica para visualizar los diferentes tipos de funciones y sus diferencias así como las acumulaciones de una función.

GeoGebra es un software no muy utilizado para la enseñanza por lo cual en esta tesis se tratará de proveer también pequeños tutoriales para que los estudiantes y docentes o cualquiera que esté interesado en usar muchas de las herramientas matemáticas que ofrece, pueda aprender por su cuenta a utilizar el GeoGebra.

2.3 Ideas Conceptuales del Cálculo a través de los tiempos

El cálculo se fue gestando paulatinamente a través del tiempo y, los nombres en los que hoy se reconoce tal descubrimiento o invención tuvieron la capacidad de sintetizar muchos de los avances que ya había en ese momento. Se puede decir que el cálculo integral tiene sus raíces históricas con Arquímedes, en Siracusa alrededor del año 215 a. C. cuando inicia la búsqueda sobre la medida del círculo. Las tres proposiciones que dan inicio a su trabajo son:

- Todo círculo es equivalente a un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos es igual al radio y el otro al perímetro del círculo.
- El área del círculo es al cuadrado de su diámetro como 11 es a 14.
- El perímetro de todo círculo es igual al triple del diámetro aumentado en un segmento comprendido entre 10/71 y 1/7 de dicho diámetro.

Lo importante de este tratado es que Arquímedes encontró la expresión que hoy se usa para estimar el área del círculo, para ello necesitó la relación entre la circunferencia y por tanto, del número π (pi), de valor aproximado igual a: 3,14…, lo que le llevó a estimar dicha área por aproximación de polígonos regulares inscritos y circunscritos al círculo.

Eutocius de Ascalón (480-540 d.C.) citado por Torija (2007, p. 114), decía que si hubiese que ordenar los trabajos de Arquímedes por su importancia, ellos serían: “Sobre la esfera y el cilindro”, “Sobre la medida del círculo” y el último, “Sobre el equilibrio de los planos” Ello pone de manifiesto la importancia del segundo tratado escrito por Arquímedes. Es claro además que, el Cálculo Integral no es menos importante que el Cálculo Diferencial, ambos están estrechamente unidos, como ya se ha mencionado.

En lo que respecta al Cálculo Diferencial, y más precisamente al concepto de derivada y los problemas que ella resuelve, como es el caso de la pendiente de la recta tangente a una curva dada, se encuentra en las Cónicas de Apolonio de Pérgamo (262-190 a. C.), en su libro II, un estudio relativo a las tangentes de una cónica, como caso particular obviamente, y en el libro V un estudio sobre máximos y mínimos (Ortega y Sierra, 1998).

Foresta & Goldman (s.f.), mencionan que una de las primeras civilizaciones en sistematizar el estudio de áreas fueron los griegos. El primer griego en considerar el problema de las áreas fue Antifón (nacido cerca del 430 a. C.). Este matemático fue el primero en introducir el “método de exhaución”. En este método, polígonos simples eran usados para aproximar el área de curvas más complicadas. Desafortunadamente, no formuló el método rigurosamente, sin embargo, Eudoxo sí lo hizo.

Eudoxo (nació aproximadamente en el 400 a. de C), según Allen (s.f.) estableció métodos rigurosos para encontrar áreas y volúmenes de figuras curvilíneas como conos y esferas. Y creó la teoría de las proporciones, que le permitió estudiar los números irracionales, que en ese tiempo él los llamaba inconmensurables. Por otro lado, Euclides, como menciona Kallio (1961) introdujo el método de exhaución en su famoso libro llamado “Los Elementos”. Foresta & Goldman (s.f.) señalan que Euclides aplicó el Método a varias figuras geométricas, tales como conos, pirámides, cilindros y esferas. Arquímedes (287-212 a. de C), al suplementar el método de exhaución y crear el método heurístico, pudo anticipar muchos de los resultados del cálculo integral, menciona Kallio (1961).

Durante la Edad Media es poco el desarrollo Matemático en esta área, pero en él se preparan las condiciones para que su avance se haga patente en los matemáticos: Isaac Newton, quien vivió entre los años 1643 y 1727, y Gottfried Wilhelm Leibniz, quien vivió entre los años 1646 y 1716.

A fines del siglo XVII, Newton y Leibniz casi al mismo tiempo y de manera independiente inventaron el cálculo.

Grabiner (1983) menciona que este invento trajo consigo tres cosas. El primero es que inventaron los conceptos generales de cociente diferencial e integral, el nombre como tal de Cálculo Diferencial e Integral se debe a Leibniz ya que Newton los llamó “fluxion” y “fluent” que en español sería “fluxión” y “fluido”, respectivamente. Segundo, ambos crearon una notación para estos conceptos, los cuales hicieron del cálculo un algoritmo, porque no únicamente los métodos funcionaban, sino que eran muy fáciles de usar.

Un aspecto digno de destacar es la forma en que estos insignes personajes de la Matemática concebían las funciones, mientras para Newton era el resultado de una partícula que se movía a través del tiempo, para Leibniz una curva era el resultado de 103 pequeños segmentos de rectas unidos entre sí, con lo que una curva no es más que un polígono de un número suficientemente grande de lados, por no decir de infinitos lados.

A Leibniz le debemos la notación $\frac{dy}{dx}$ y $\int ydx$ a Newton $\dot{x}$. Y, por último, los dos se dieron cuenta que los procesos simples de encontrar tangentes y áreas, es decir, la diferenciación e integración, eran procesos mutuamente inversos, que es lo que ahora llamamos el Teorema Fundamental del Cálculo.

A pesar que desde Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz el Cálculo se dice que nació, lo cierto es que estos dos personajes sentaron las bases formales del cálculo.
Sin embargo, para otros el verdadero germen del cálculo diferencial se encuentra en los trabajos realizados por Fermat (1601-1665), él crea un método para resolver los problemas de máximos y mínimos. Este problema lo resuelve Fermat sin disponer del concepto de límite y menos del de Derivada. Los conceptos matemáticos de: "Límite y continuidad" son obras de Cauchy (1789-1857) y, posteriormente en un refinamiento, debido a Weierstrass (1815-1897), a quien se considera el verdadero padre del análisis matemático, una versión refinada del cáculo infinitesimal. Otros matemáticos destacados que también contribuyeron a su desarrollo fueron: Gauss, Riemann, Gibs y Skovalevsky, y Lebesgue (Boyer, 1999). Durante el siglo XX, sin entrar en los aspectos matemáticos propiamente tal del desarrollo del Cálculo, se ha querido resaltar esta importante obra matemática en sus personajes principales, quienes la gestaron y le dieron vida.
Es aquí donde Newton y Leibniz llegar a poner todo en todo, quizá no formalizado, pero es cuando se considera que el cálculo nace.

Capítulo 3

Exposición de la Propuesta

En el capítulo 3, se presenta la propuesta de dos archivos creados en GeoGebra.

3.1.- Razón de cambio:

Se tratará a grandes rasgos la razón de cambio de una función en las medidas en las cuales una variable se modifica con relación a otra e influir positivamente en el desarrollo del pensamiento y lenguaje matemático para que sean capaces de asignar un sentido más amplio a las nociones involucradas en específico al concepto de razón de cambio, se presentará cuatro casos de función de diferencias: primero de una función $f(x) = x^3 - 1$ en la que se expone de manera técnica el uso de las diferentes opciones que ofrece el software creado de diferencias. Después las funciones $f(x) = x^3 - 3$, $f(x) = 2x^2 - 2$, $f(x) = 3x + 2$ en la que se utiliza la ayuda de GeoGebra para expresar gráficamente las funciones.

3.2.- Tratamiento de la integral mediante sumas (acumulaciones):

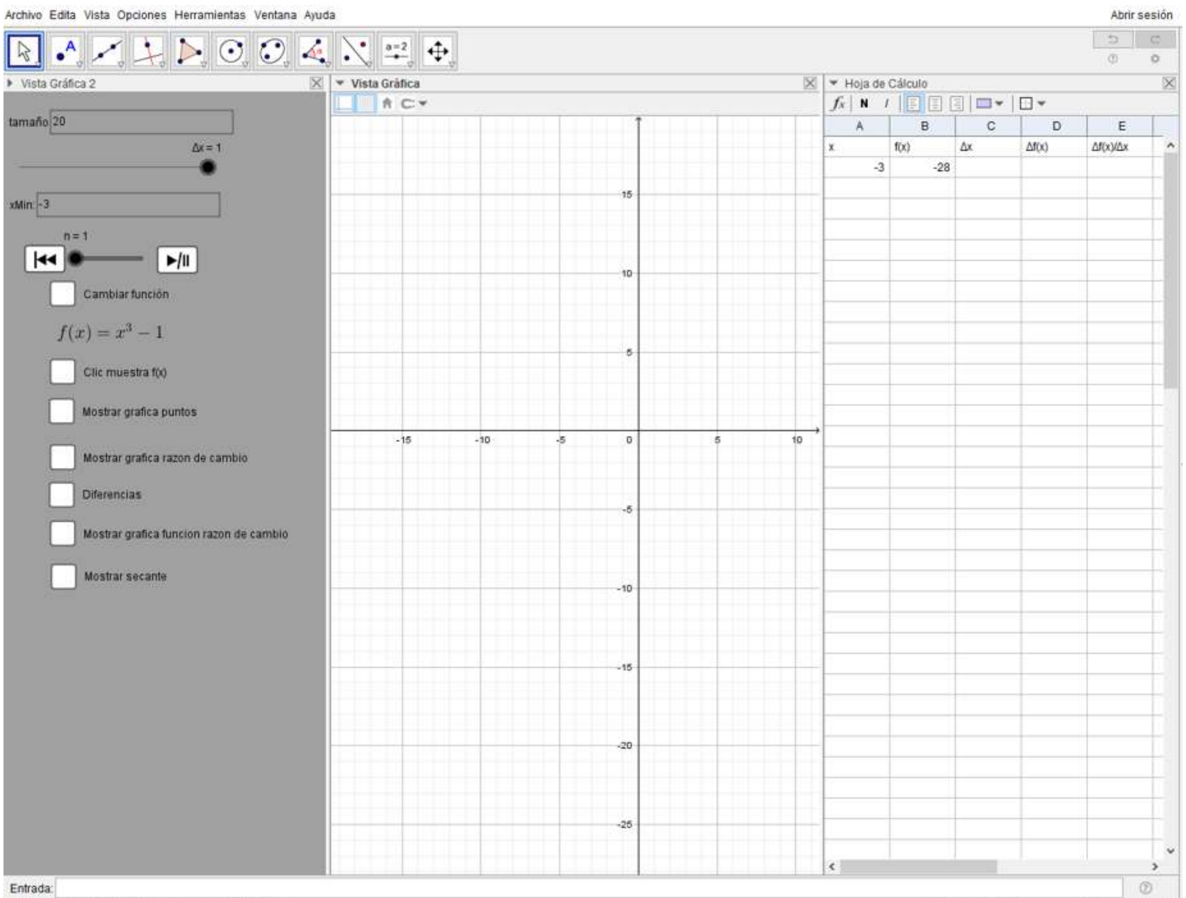
Tiene como objetivo el presentar acercamientos numéricos, mediante sumas(acumulaciones), que permitirá a los estudiantes realizar transferencias entre representaciones semióticas, para la aprehensión de los procesos matemáticos asociados al concepto de integral se presentan cuatro casos para la función de acumulación de $f(x) = 3, f(x) = 2, f(x) = 8$ en la que se utiliza la ayuda de Geogebra para expresar gráficamente las funciones de acumulación.

A grandes rasgos la exposición de la propuesta tiene como objetivo que los estudiantes aprendan de forma intuitiva a través de representaciones, haciendo uso de recursos tecnológicos para que puedan realizar transferencias entre representaciones semióticas.

3.1.1 Caso 1: Razón de cambio de una función polinomial (cuestión técnica) $f(x) = x^3 - 1$.

La interfaz de programa es la siguiente en la cual se tendrá una perspectiva global de las funciones que tendrá.

Figura 1:Vista general de software razon de cambio.

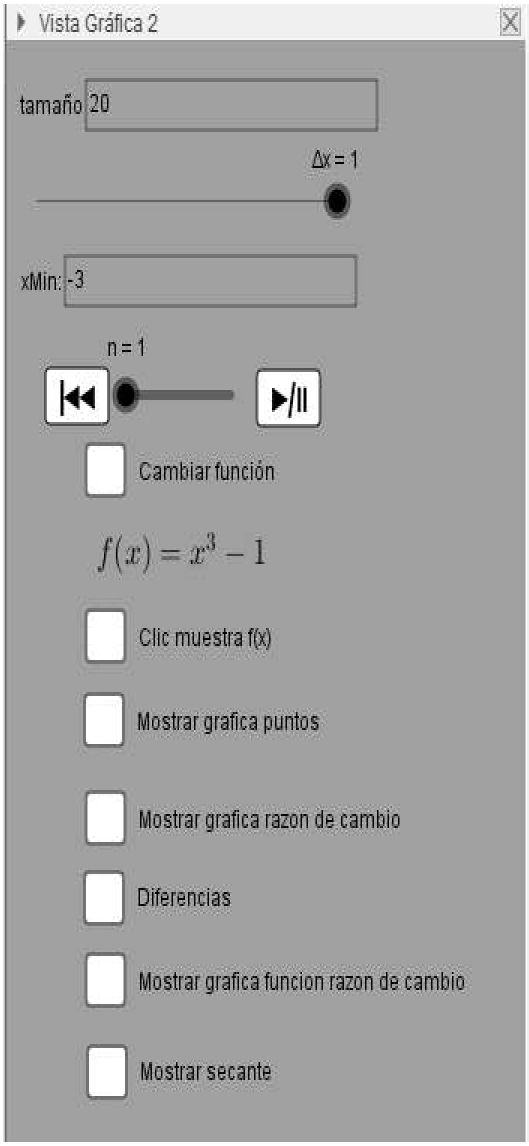


El archivo está dividido en tres secciones cada con un propósito en específico, la primera sección llamada Vista Grafica 2, tendrá los diferentes tipos de opciones que se puedes elegir. La segunda sección llamada Vista grafica está dedicada a la representación geográfica de datos numéricos.

La tercera sección llamada Hoja de Cálculo estará destinada a presentar los diferentes tipos de valores obtenidos de las diferentes operaciones que se hacen con los parámetros dados en la primera sección.

A continuación, tendremos el menú ofrecido en la primera sección (vista grafica 2)

Figura 2:Vista grafica 2



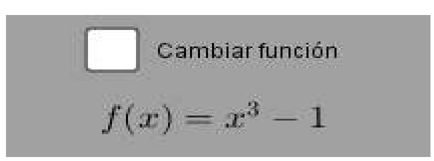
En el menú se encontrar las diversas formas en las que se podrá modificar la función deseada, así como las opciones que se podrán usar en la función dada.
Al inicio del menú se encontrar 3 opciones las cuales definirán algunos aspectos de la función como:

El tamaño es el numero valores que deseas tomar para formar la lista de valores así como:

El incremento para los valores de X,

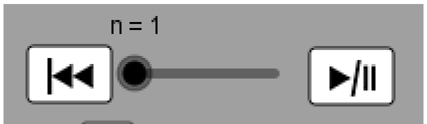
El xMin es para definir el valor donde deseas empezar a evaluar las X.
Más adelante se verá más a fondo estas opciones

Al elegir la siguiente opcion nos permite definir y modificar la funcion con la que se quiera trabajar



Tras seleccionar la casilla de cambiar función aparecerá un submenú en el cual ingresaremos la función con la que se trabajara y cuando terminemos de ingresarla se tendrá que hacer click en la misma casilla.

Al terminar de introducir estos parámetros y la función deseada se tendrá que usar la siguiente opción para inicializar los cálculos.



Esta opción es para que se pueda crear la lista de valores de X y $f(x)$ de tal manera que al presionar inicie y empiece a calcular los valores de X y $f(x)$.

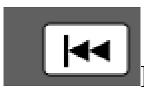
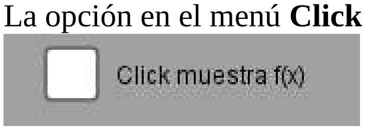
Para volver Actualizar la lista se tendrá que presionar y se reiniciara para que se pueda calcular de nuevo la lista de valores X y $f(x)$.

Tabla 1:Vista general de tablas

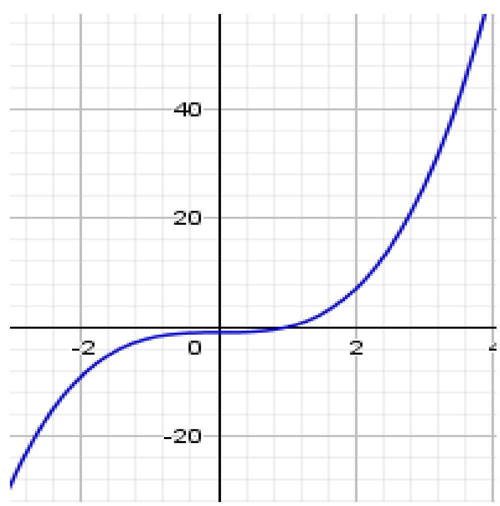
A	B	C	D	E
x	f(x)	Δx	Δf(x)	Δf(x)/Δx
-3	-28			

La opción en el menú **Click muestra f(x)**



Es para mostrar la gráfica de los valores
X y $f(x)$
De la tabla de valores la gráfica.

Figura 3:Grafica f(x)



Los valores obtenidos X y $f(X)$ son los cálculos hechos de la función.

Tabla 2: Tabla de valores x,

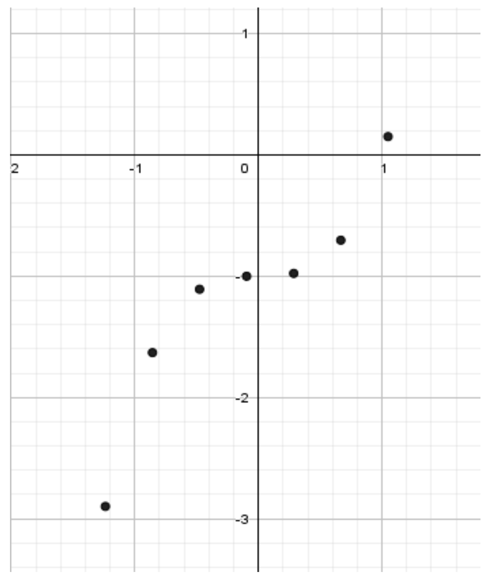
A	B
x	f(x)
-3	-28
-2	-9
-1	-2
0	-1
1	0
2	7
3	26
4	63
5	124
6	215
7	342
8	511

La opción **Mostrar grafica puntos,** mostrara los puntos de la

Función, estos serán los valores de coordenadas de X y $f(x)$ en la

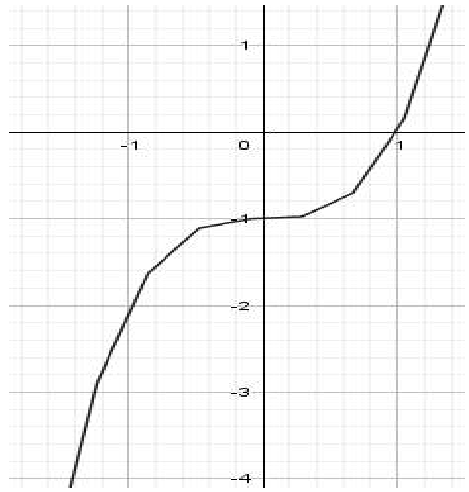
Hoja de cálculo, (columna A y columna B).

Figura 4: Grafica de puntos



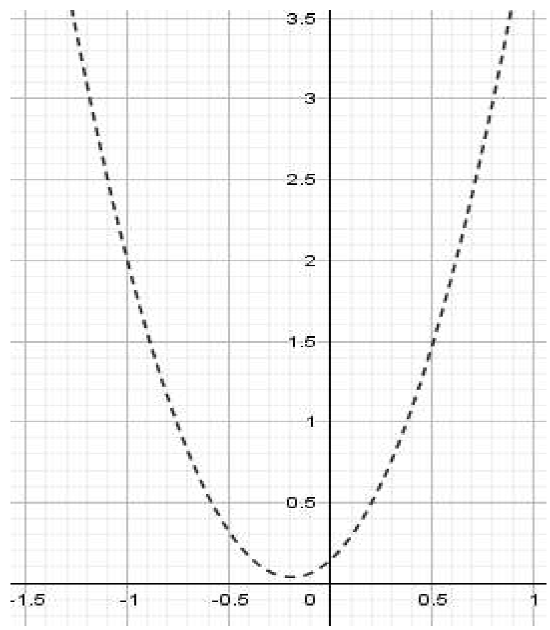
Esta opción mostrara la gráfica de la función respecto los puntos de la función evaluada.

Figura 6:Grafica razon de cambio



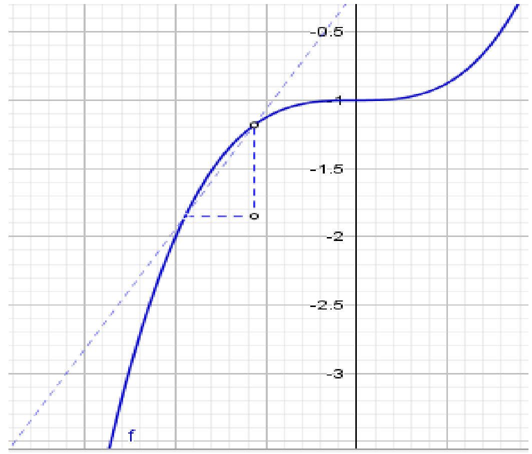
La opción **Mostrar grafica función de cambio** enseñara una gráfica la cual se refiere a la medida
en la cual una variable se modifica con relación a otra, en nuestro caso es respecto
a los valores de $\boldsymbol{X}\ y\ \Delta \boldsymbol{x}$ la cual es el incremento de X.
Se trata de la magnitud que compara dos variables
a partir de sus unidades de cambio.

Figura 5:Grafica funcion razon de cambio



Esta opción mostrara la gráfica secante de la función.

Figura 7:Grafica Secante



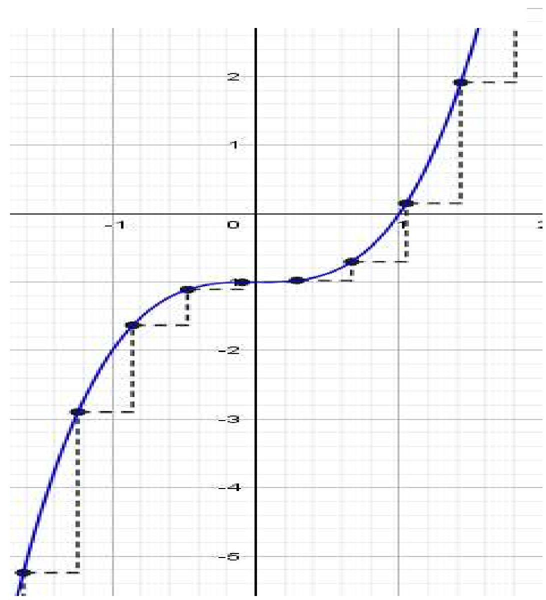
Mostrará las diferencias en $\boldsymbol{X}$ *y* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Estas diferencias son respecto a cada punto se pueden visualizar en la hoja de calculo

Donde estos serán $\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$ **y**

$\Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})_2 - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})_1$.

Figura 8:Grafica de diferencias



3.1.2 Caso 2: Razón de cambio de una función polinomial $\boldsymbol{f(x) = 3x + 2}$.

Apartado I: Incremento $\boldsymbol{Tama}$ñ$\boldsymbol{o = 20, \Delta x = 1, xMin = 1}$

Sea $f(x) = 3x + 2$, $Tamaño = 20, \Delta x = 1, xMin = 1$,los parámetros con los que trabajara, hay que generar la tabla $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$**.**

Los valores $f(x)$ se obtienen a través de los cálculos

$$f(1) = 3(1) + 2 = 5$$

$$f(2) = 3(2) + 2 = 8$$

$$f(3) = 3(3) + 2 = 11$$

$$f(4) = 3(4) + 2 = 14$$

Así sucesivamente por lo cual a través de los valores

$$x = 1,2,3,4,5,,,,(Tamaño)$$

Obteniendo una lista de puntos

$$x, f(x)$$

$$p_1 = (1,5)$$

$$p_2 = (2,8)$$

$$p_3 = (3,11)$$

$$p_4 = (4,14)$$

Así sucesivamente hasta obtener la lista de valores

Tabla 3: Tabla de valores de f(x)=3x+2

A	B
x	f(x)
1	5
2	8
3	11
4	14
5	17
6	20
7	23
8	26
9	29
10	32
11	35
12	38
13	41
14	44
15	47
16	50
17	53
18	56
19	59
20	62

Figura 9: Grafica de puntos de la funcion f(x)=3x+2

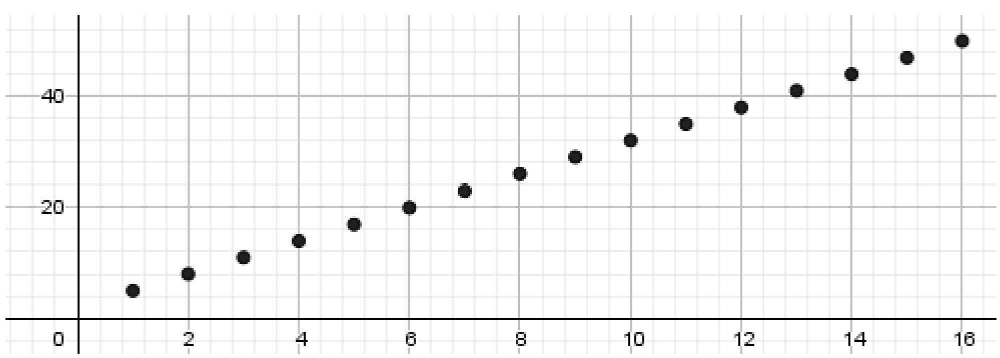


Figura 10: Grafica de la función f(x)=3x+2

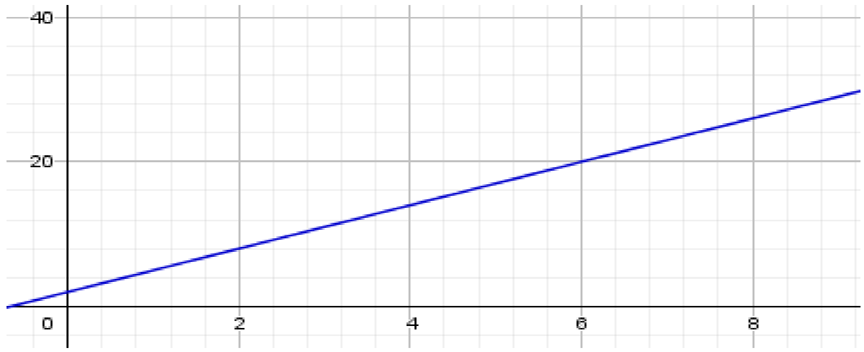
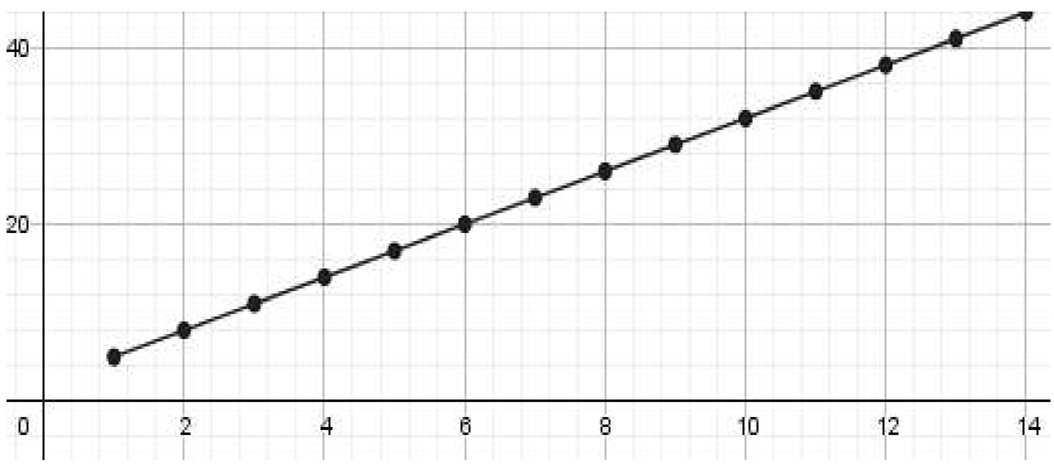


Figura 11:Grfica de la razón de cambión de f(x)=3x+2.



Para encontrar la razón de cambio entre cada punto se tiene que encontrar la diferencia entre los valores $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ entre cada punto de tal manera que tendríamos $RC = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

Dando los valores de los puntos $(x, f(x))$ se tendría Δx para:

$$\Delta x_1 = x_2 - x_1 = 2 - 1 = 1 \,,$$

$$\Delta x_2 = x_3 - x_2 = 3 - 2 = 1 \,,$$

$$\Delta x_3 = x_4 - x_3 = 4 - 3 = 1 \,,$$

A si sucesivamente y se obtendría la tabla de valores de Δx.

Tabla 4:Tabla de valores x,Δx de f(x)=3x+2.

A	C
x	Δx
1	
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1
11	1
12	1
13	1
14	1
15	1
16	1
17	1
18	1
19	1
20	1

Para hacer las diferencia $\Delta f(x)$ de $f(x)$se tiene que hacer la diferencia de los valores de $f(x)$ por lo cual dando los valores de los puntos $(x, f(x))$ se tendría $\Delta f(x)$ para:

$$\Delta f(x)_1 = f(x_2) - f(x_1) = 8 - 5 = 3$$

$$\Delta f(x)_2 = f(x_3) - f(x_2) = 11 - 8 = 3$$

$$\Delta f(x)_3 = f(x_4) - f(x_3) = 14 - 11 = 3$$

$$\Delta f(x)_4 = f(x_5) - f(x_4) = 17 - 14 = 3$$

A si sucesivamente y se obtendría la tabla de valores de Δf(x).

Tabla 5:Tabla de valores f(x),Δf(x) de f(x)=3x+2.

B	D
f(x)	Δf(x)
5	
8	3
11	3
14	3
17	3
20	3
23	3
26	3
29	3
32	3
35	3
38	3
41	3
44	3
47	3
50	3
53	3
56	3
59	3
62	3

Figura 12:Grafica de diferencias de f(x)=3x+2.

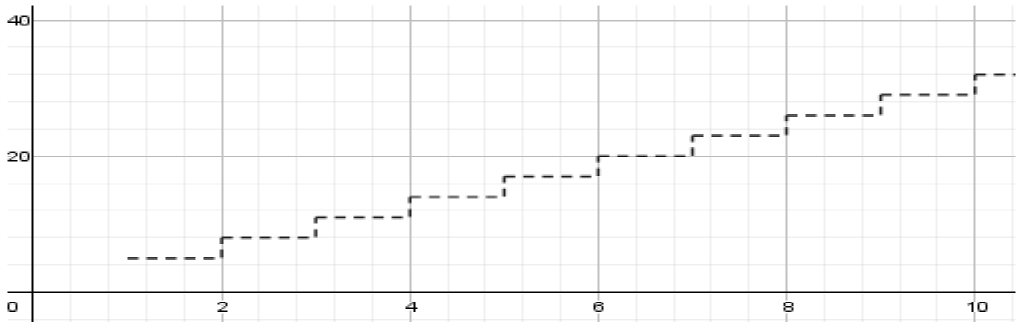
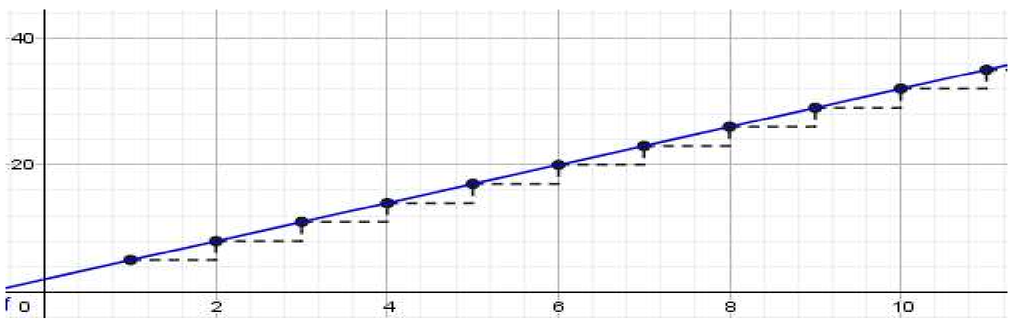


Figura 13:Grafica de Diferencias, razón de cambio, puntos de f(x)=3x+2.



Para calcular la razón de cambio se tendría:

$$RC = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

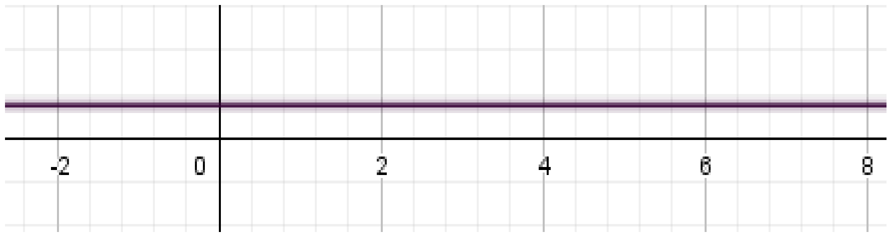
$$RC_1 = \frac{\Delta f(x)_1}{\Delta x_1} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{8-5}{2-1} = \frac{3}{1} = 3,$$
$$RC_2 = \frac{\Delta f(x)_2}{\Delta x_2} = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = \frac{11-8}{3-2} = \frac{3}{1} = 3,$$
$$RC_3 = \frac{\Delta f(x)_3}{\Delta x_3} = \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_3-x_2} = \frac{14-11}{4-3} = \frac{3}{1} = 3.$$

Obtenido una tabla con todos los valores.

Tabla 6: Tabla razon de cambio de f(x)=3x+2.

E
Δf(x)/Δx
3
3
3
3
3
3
3
3
3
3
3
3
3
3
3
3
3
3
3

Figura 14: Grafica de la función razón de cambio de f(x)=3x+2.



3.1.3 Caso 3: Razón de cambio de una función polinomial $f(x) = 2x^2 - 2$.

Apartado II: Incremento $Tamaño = 20, \Delta x = 1, xMin = 1$

Sea $f(x) = 2x^2 - 2$, $Tamaño = 20, \Delta x = 1, xMin = 1$, los parámetros con los que trabajara, hay que generar la tabla $\boldsymbol{x, f(x)}$.

Los valores $f(x)$ se obtienen a través de los cálculos

$$f(1) = 2(1)^2 - 2 = 0$$

$$f(2) = 2(2)^2 - 2 = 6$$

$$f(3) = 2(3)^2 - 2 = 16$$

$$f(4) = 2(4)^2 - 2 = 30$$

Así sucesivamente por lo cual a través de los valores

$$x = 1,2,3,4,5, , , , , (Tamaño)$$

Obteniendo una lista de puntos

$$x, f(x)$$

$$p_1 = (1,0)$$

$$p_2 = (2,6)$$

$$p_3 = (3,16)$$

$$p_4 = (4,30)$$

Así sucesivamente hasta obtener la lista de valores del tamaño deseado.

Tabla 7:Tabla de valores x,f(x) de

$f(x) = 2x^2 - 2$

A	B
x	f(x)
1	0
2	6
3	16
4	30
5	48
6	70
7	96
8	126
9	160
10	198
11	240
12	286
13	336
14	390
15	448
16	510
17	576
18	646
19	720
20	798

Figura 15:Grafica de putnos $f(x) = 2x^2 - 2$

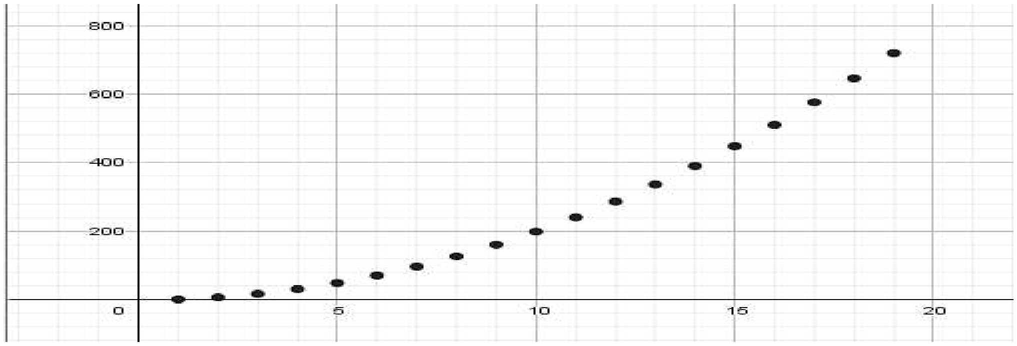


Figura 16:Grafica de la funcion $f(x) = 2x^2 - 2$

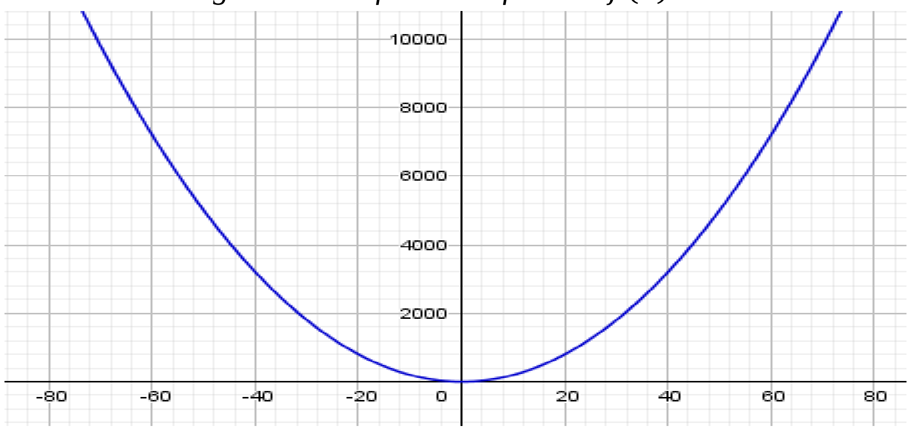
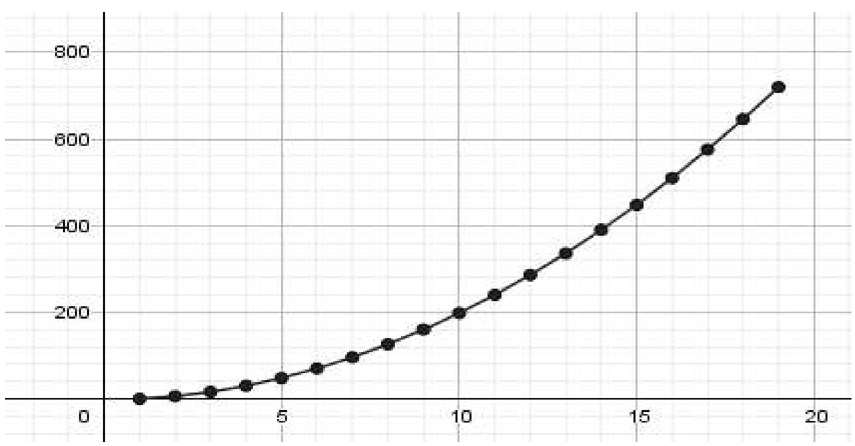


Figura 17:Grafica de razon de cambio de $f(x) = 2x^2 - 2$



Para encontrar la razón de cambio entre cada punto se tiene que encontrar la diferencia entre los valores $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ entre cada punto de tal manera que tendríamos $RC = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

Dando los valores de los puntos $(x, f(x))$ se tendría Δx para:

$$\Delta x_1 = x_2 - x_1 = 2 - 1 = 1\,,$$

$$\Delta x_2 = x_3 - x_2 = 3 - 2 = 1\,,$$

$$\Delta x_3 = x_4 - x_3 = 4 - 3 = 1\,,$$

A si sucesivamente y se obtendría la tabla de valores de Δx.

Tabla 8: Tabla de valores x,Δx de

$$f(x) = 2x^2 - 2$$

A	C
x	Δx
1	
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1
11	1
12	1
13	1
14	1
15	1
16	1
17	1
18	1
19	1
20	1

Para hacer las diferencia $\Delta f(x)$ de $f(x)$se tiene que hacer la diferencia de los valores de $f(x)$ por lo cual dando los valores de los puntos $(x, f(x))$ se tendría $\Delta f(x)$ para:

$$\Delta f(x)_1 = f(x_2) - f(x_1) = 6 - (0) = 6$$

$$\Delta f(x)_2 = f(x_3) - f(x_2) = 16 - 6 = 10$$

$$\Delta f(x)_3 = f(x_4) - f(x_3) = 30 - 16 = 14$$

$$\Delta f(x)_4 = f(x_5) - f(x_4) = 48 - 30 = 18$$

A si sucesivamente y se obtendría la tabla de valores de $\Delta f(x)$.

Tabla 9: Tabla de valores f(x),Δf(x)

$$f(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x}^2 - 2$$

B	D
f(x)	Δf(x)
0	
6	6
16	10
30	14
48	18
70	22
96	26
126	30
160	34
198	38
240	42
286	46
336	50
390	54
448	58
510	62
576	66
646	70
720	74
798	78

Figura 19:Grafica de diferencias de

$f(x) = 2x^2 - 2$

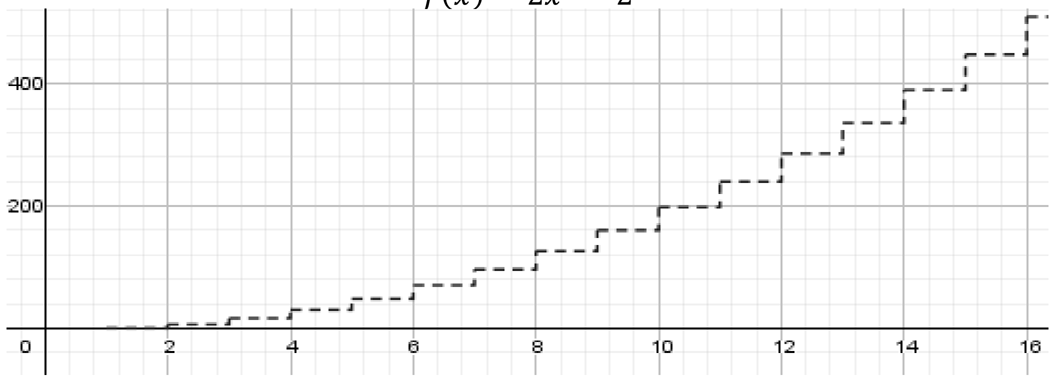
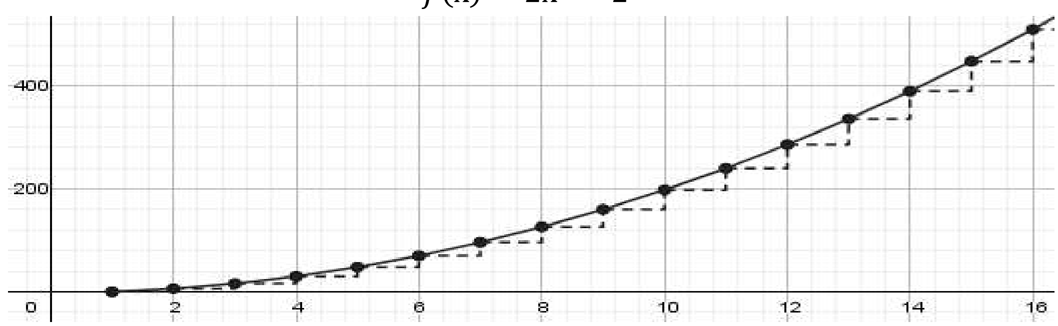


Figura 18:Grafica de diferencias, razón de cambio, puntos.

$f(\mathrm{x}) = 2\mathrm{x}^2 - 2$



Para calcular la razón de cambio se tendría:

$RC = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

$RC_1 = \frac{\Delta f(x)_1}{\Delta x_1} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{6-0}{2-1} = \frac{6}{1} = 6,$

$RC_2 = \frac{\Delta f(x)_2}{\Delta x_2} = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = \frac{16-6}{3-2} = \frac{10}{1} = 10,$

$RC_3 = \frac{\Delta f(x)_3}{\Delta x_3} = \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_3-x_2} = \frac{30-16}{4-3} = \frac{14}{1} = 14.$

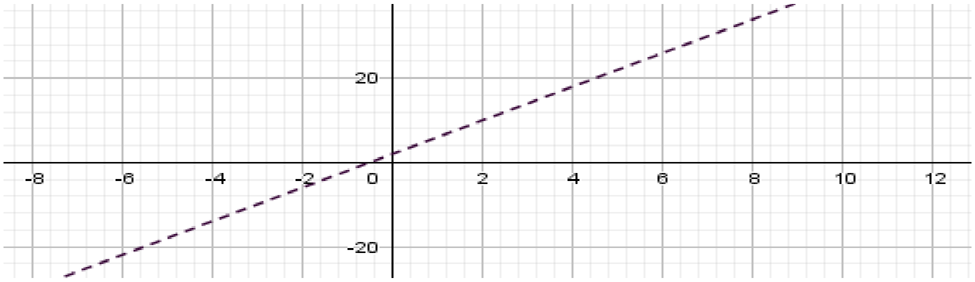
Obtenido una tabla con todos los valores.

Tabla 10:Tabla razon de cambio de

$f(x) = 2x^2 - 2$

E
Δf(x)/Δx
6
10
14
18
22
26
30
34
38
42
46
50
54
58
62
66
70
74
78

Figura 20:Grafica de la función razón de cambio



3.1.4 Caso 4: Razón de cambio de una función polinomial $\mathbf{f(x) = x^3 - 3}$

Apartado III: Incremento $\boldsymbol{Tama}$ñ$\boldsymbol{o = 20, \Delta x = 1, xMin = -1}$

Sea $f(x) = x^3 - 3$, $Tamaño = 20, \Delta x = 1, xMin = -1$, los parámetros con los que trabajara, hay que generar la tabla $\boldsymbol{x, f(x)}$**.**

Los valores $f(x)$ se obtienen a través de los cálculos

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 = -4$$

$$f(0) = (0)^3 - 3 = -3$$

$$f(1) = (1)^3 - 3 = -2$$

$$f(2) = (2)^3 - 3 = 5$$

Así sucesivamente por lo cual a través de los valores

$$x = -1,0,1,2,3,4,5,,,,,(Tamaño)$$

Obteniendo una lista de puntos

$$x, f(x)$$

$$p_1 = (-1,4)$$

$$p_2 = (0,-3)$$

$$p_3 = (1,-2)$$

$$p_4 = (2,5)$$

Así sucesivamente hasta obtener la lista de valores del tamaño deseado.

Tabla 11:Tabla de valores x, f(x) de

$f(x) = x^3 - 3$

A	B
x	f(x)
-1	-4
0	-3
1	-2
2	5
3	24
4	61
5	122
6	213
7	340
8	509
9	726
10	997
11	1328
12	1725
13	2194
14	2741
15	3372
16	4093
17	4910
18	5829

Figura 22:Grafica de puntos de $f(x) = x^3 - 3$

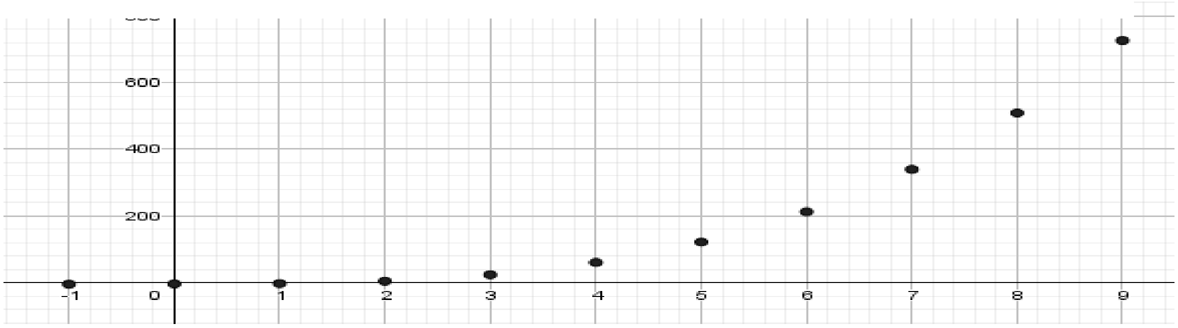


Figura 21:Grafica de la funcion $f(x) = x^3 - 3$

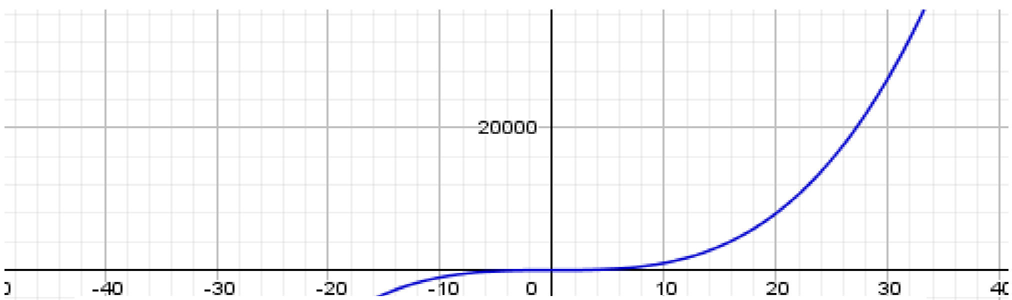
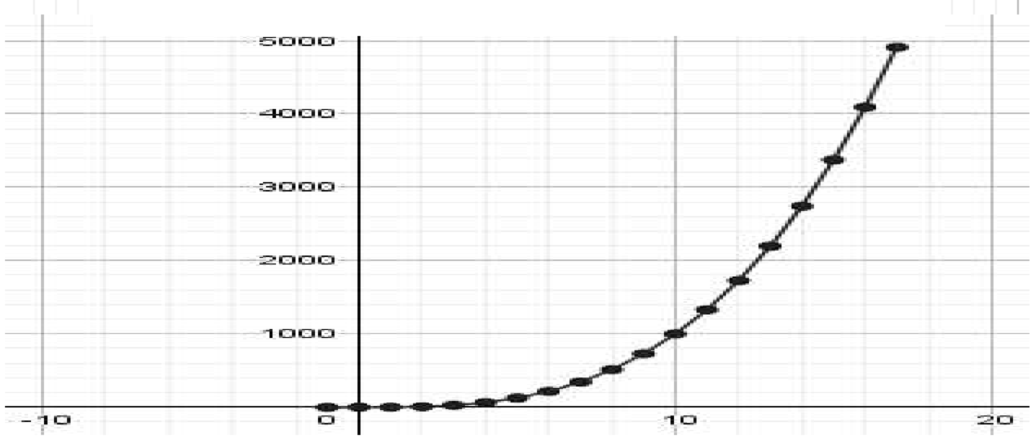


Figura 23 :Grafica de razon de cambi de $f(x) = x^3 - 3$



Para encontrar la razón de cambio entre cada punto se tiene que encontrar la diferencia entre los valores $x, f(x)$ entre cada punto de tal manera que tendríamos $RC = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Dando los valores de los puntos $(x, f(x))$ se tendría Δx para:

$$\Delta x_1 = x_2 - x_1 = 0 - (-1) = 1\ ,$$

$$\Delta x_2 = x_3 - x_2 = 1 - 0 = 1\ ,$$

$$\Delta x_3 = x_4 - x_3 = 2 - 1 = 1\ ,$$

A si sucesivamente y se obtendría la tabla de valores de Δx.

Tabla 13:Tabla de valores de x,Δx de $f(x) = x^3 - 3$

A	C
x	Δx
-1	
0	1
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	1
9	1
10	1
11	1
12	1
13	1
14	1
15	1
16	1
17	1
18	1

Para hacer las diferencia $\Delta f(x)$ de $f(x)$se tiene que hacer la diferencia de los valores de $f(x)$ por lo cual dando los valores de los puntos $(x, f(x))$ se tendría $\Delta f(x)$ para:

$$\Delta f(x)_1 = f(x_2) - f(x_1) = -3 - (-4) = 1$$

$$\Delta f(x)_2 = f(x_3) - f(x_2) = -2 - 3 = 1$$

$$\Delta f(x)_3 = f(x_4) - f(x_3) = 5 - (-2) = 7$$

$$\Delta f(x)_4 = f(x_5) - f(x_4) = 24 - 2 = 19$$

A si sucesivamente y se obtendría la tabla de valores de Δf(x).

Tabla 12:Tabla de valores f(x),Δf(x) de $f(x) = x^3 - 3$

B	D
f(x)	Δf(x)
-4	
-3	1
-2	1
5	7
24	19
61	37
122	61
213	91
340	127
509	169
726	217
997	271
1328	331
1725	397
2194	469
2741	547
3372	631
4093	721
4910	817
5829	919

Figura 24:Grafica de diferencias de $f(x) = x^3 - 3$

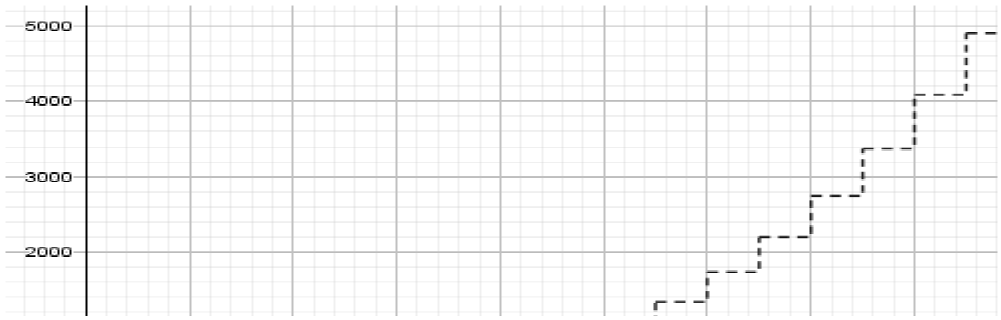


Figura 25:Grafica diferencias, razon de cambio y puntos de $f(x) = x^3 - 3$

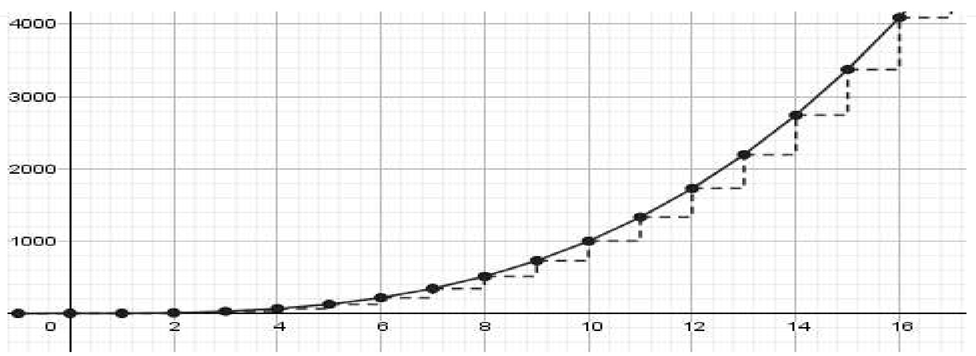


Tabla 14:Tabla de razon de cambio $f(x) = x^3 - 3$

E
Δf(x)/Δx
1
1
7
19
37
61
91
127
169
217
271
331
397
469
547
631
721
817
919

Para calcular la razón de cambio se tendría:

$$RC = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

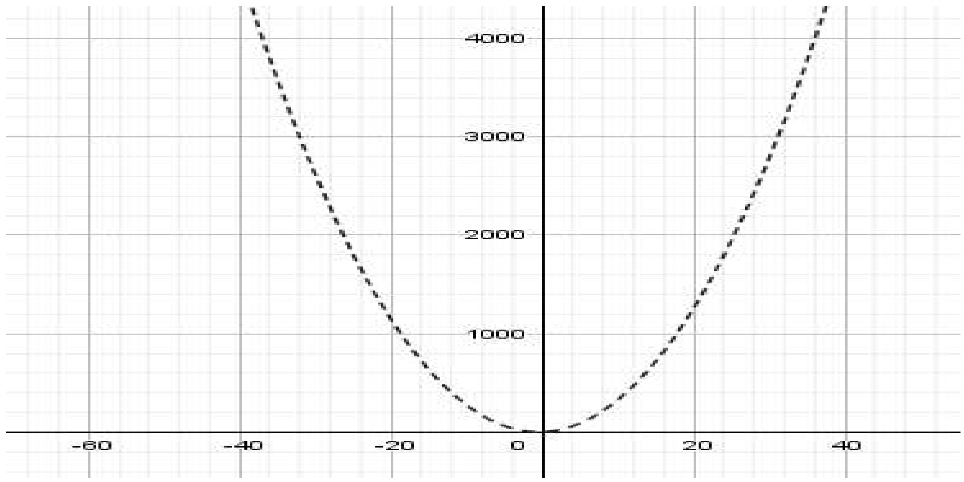
$$RC_1 = \frac{\Delta f(x)_1}{\Delta x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-3-(-4)}{0-(-1)} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$RC_2 = \frac{\Delta f(x)_2}{\Delta x_2} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{-2-(-3)}{1-0} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$RC_3 = \frac{\Delta f(x)_3}{\Delta x_3} = \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_3 - x_2} = \frac{5-(-2)}{2-1} = \frac{7}{1} = 7.$$

Obtenido una tabla con todos los valores.

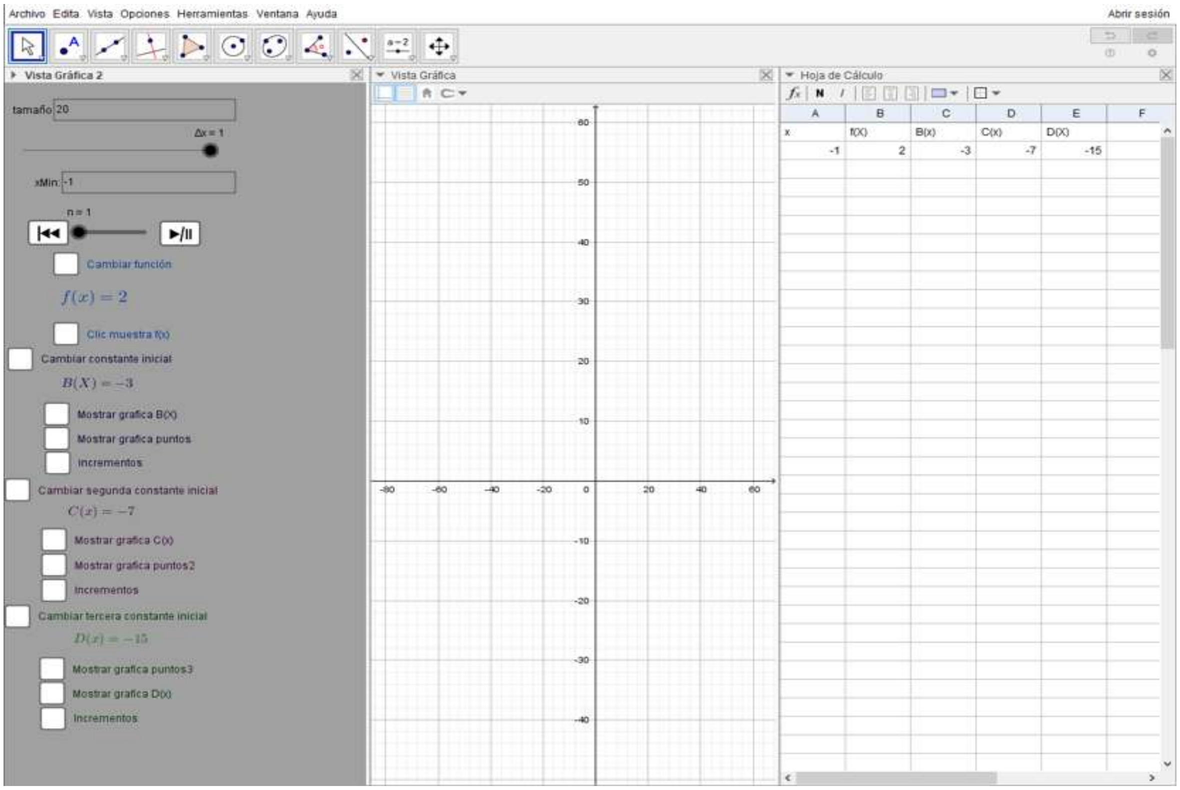
Figura 26:Grafica de la funcion razonde cambio de $f(x) = x^3 - 3$



3.2.1 Caso 1: Acumulaciones de una Función Polinomial (cuestión tecnica) $f(x) = 3.$

La interfaz de programa es la siguiente en la cual se tendrá una perspectiva global de las funciones que tendrá.

Figura 27:Vista general de el diseño de acumulaciones

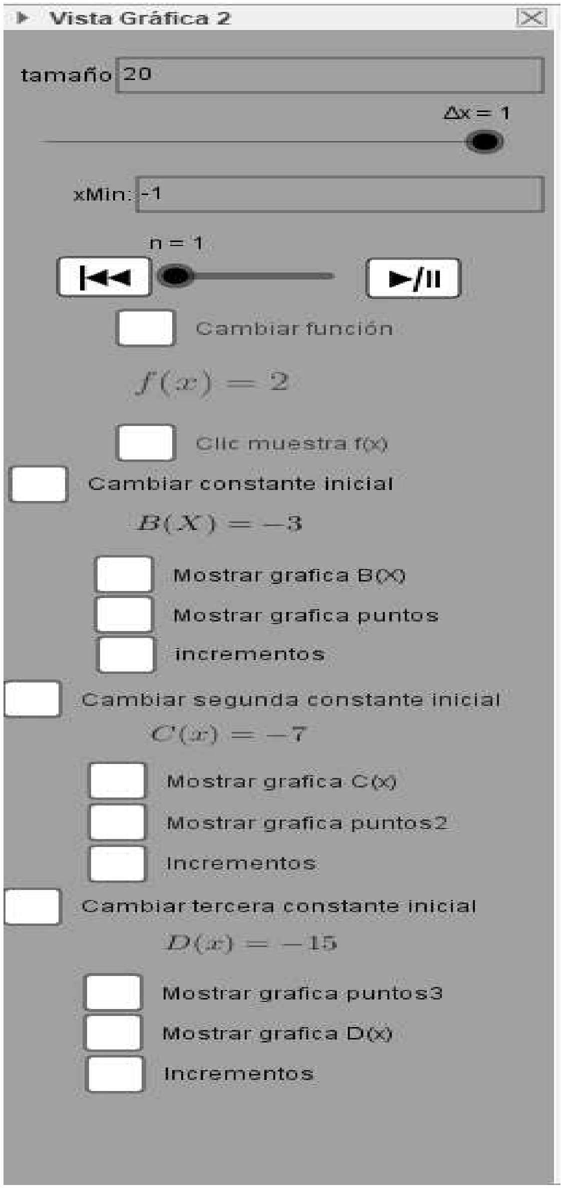


El archivo está dividido en tres secciones cada con un propósito en específico, la primera sección llamada Vista Grafica 2, tendrá los diferentes tipos de opciones que se puedes elegir. La segunda sección llamada Vista grafica está dedicada a la representación geográfica de datos numéricos.

La tercera sección llamada Hoja de Cálculo estará destinada a presentar los diferentes tipos de valores obtenidos de las diferentes operaciones que se hacen con los parámetros dados en la primera sección.

A continuación, tendremos el menú ofrecido en la primera sección (vista grafica 2)

Figura 28:Vista grafica 2 de acumulaciones



En el menú se encontrar las diversas formas en las que se podrá modificar la función deseada, así como las opciones que se podrán usar en la función dada. Al inicio del menú se encontrar 3 opciones las cuales definirán algunos aspectos de la función como:

El tamaño es el numero valores que deseas tomar para formar la lista de valores así como:

El Δx es el incremento para los valores de X

El xMin es para definir el valor donde deseas empezar a evaluar las X.
Más adelante se verá más a fondo estas opciones.

Al terminar de introducir estos parámetros y la función deseada se tendrá que usar la siguiente opción para inicializar los cálculos.

El siguiente botón es el que inicia los cálculos y crea la lista de valores en la hoja de cálculo.

De la lista x que es la posición inicial de la tabla el $f(x)$ que es la función, $B(x)$ la constante inicial para la primera acumulación,$C(x)$ la constante inicial para la segunda acumulación, $D(x)$ la constante inicial para la tercera acumulación.

Inicie y empiece a calcular los valores de $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{f(x)}$.

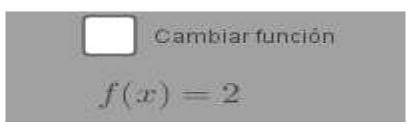
El siguiente boton sirve para borrar los valores de la tabla de valores. 

Para volver Actualizar la lista se tendrá que presionar

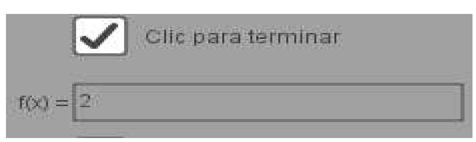
 y se actualizara la hoja de calculo.

A	B	C	D	E
x	f(X)	B(x)	C(x)	D(X)
-1	2	-3	-7	-15

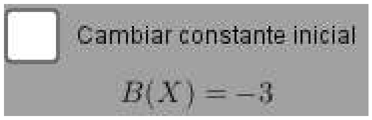
Al elegir la siguiente opcion nos permite definir y modificar la funcion con la que se quiera trabajar



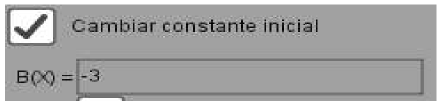
Tras seleccionar la casilla de cambiar función aparecerá un submenú en el cual ingresaremos la función con la que se trabajará y cuando terminemos de ingresarla se tendrá que hacer click en la misma casilla para terminar la modificación.



La opción Cambiar constante inicial



te permitirá ingresar la constante con la que deseas trabajar y al terminar volver a dar click.



C
B(x)
-3

Tabla 15: Cálculo de la 1ª acumulación (tecnica)

La opción

grafica los valores obtenidos en la tabla $B(x)$ respecto a $F(x)$ y la posición X

$$2 - 3 = -1$$

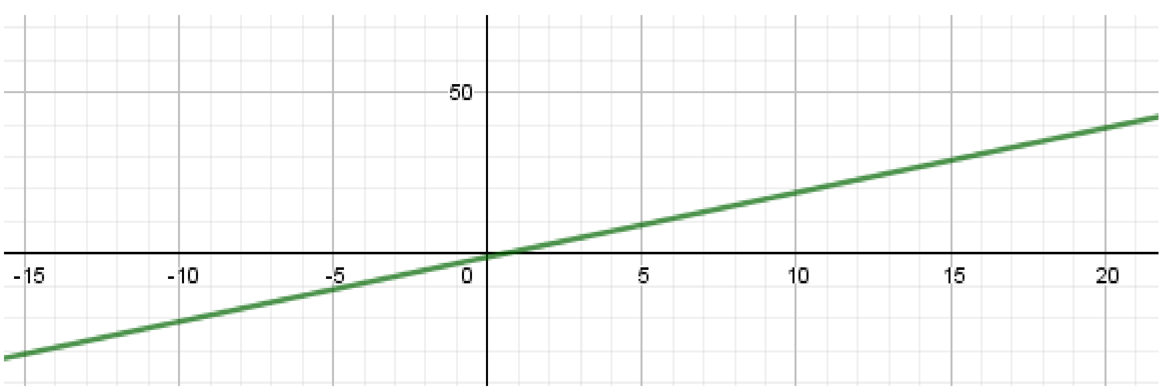
$$2 - 1 = 1$$

$$2 + 1 = 3$$

Así sucesivamente.

A	B	C
x	f(X)	B(x)
-1	2	-3
0	2	-1
1	2	1
2	2	3
3	2	5
4	2	7
5	2	9
6	2	11
7	2	13
8	2	15
9	2	17
10	2	19
11	2	21

Figura 29: Grafica de la función B(x) (técnica)



La opción

grafica la lista de valores obtenidos de $B(x)$ respecto a la posición X

$$p_1 = (-1, -3)$$

$$p_2 = (0, -1)$$

$$p_3 = (1,1)$$

Tabla 16:Grafica de puntos B(x) (tecnica)

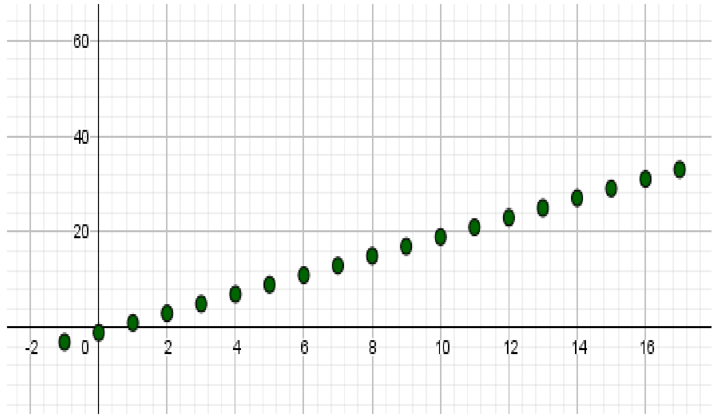
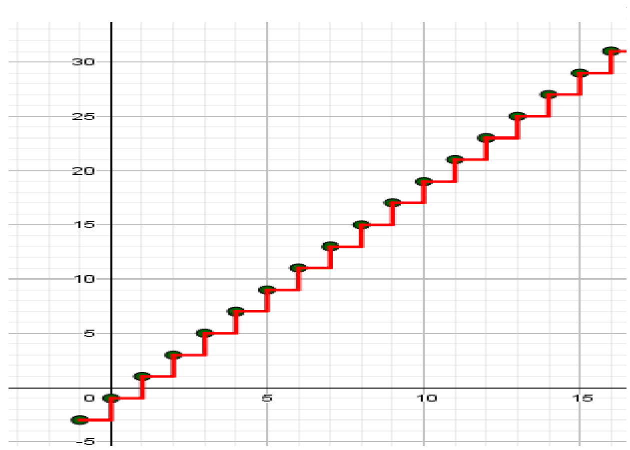


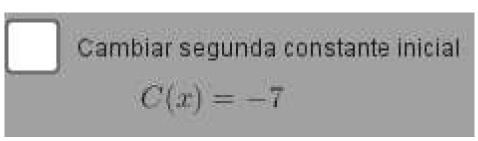
Tabla 17:Grafica de los incrementos de B(x)

La opción

Grafica los incrementos que sufre la tabla de valores $B(x)$.



La opción Cambiar segunda constante inicial



te permitirá ingresar la constante con la que deseas trabajar y al terminar volver a dar click.

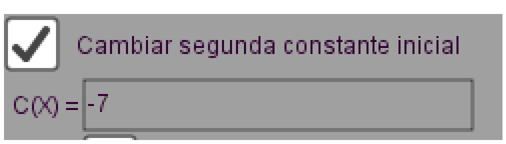


Tabla 18: Tabla C(x), constante inicial (tecnica)

D
C(x)
-7

La opción

grafica los valores obtenidos en la tabla $C(x)$ respecto a $B(x)$ y la posición X

$$-3 + (-7) = -10$$

$$-1 + (-10) = -11$$

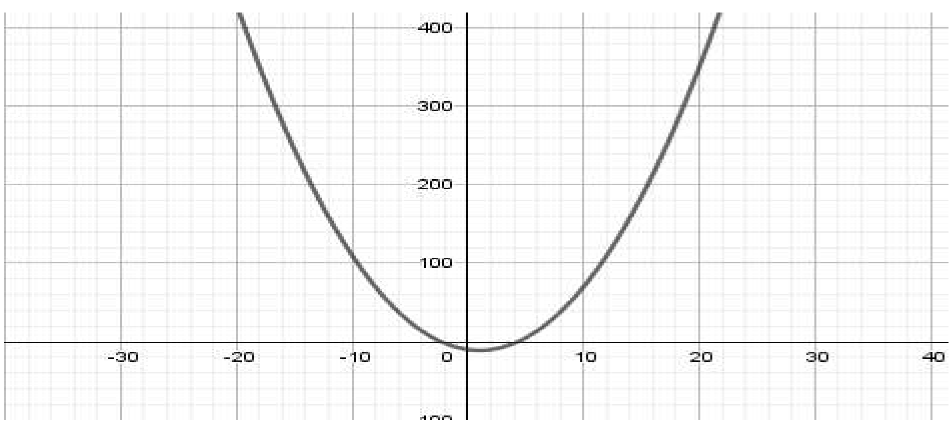
$$-11 + (1) = 10$$

Así sucesivamente hasta obtener la tabla completa.

Tabla 19: Cálculo de la 2ª acumulación (tecnica)

A	C	D
x	B(x)	C(x)
-1	-3	-7
0	-1	-10
1	1	-11
2	3	-10
3	5	-7
4	7	-2
5	9	5
6	11	14
7	13	25
8	15	38
9	17	53
10	19	70
11	21	89

Figura 30:Grafica C(x) (tecnica)



La opción

grafica la lista de valores obtenidos de $C(x)$ respecto a la posición X.

$$p_1 = (-1, -7)$$
$$p_2 = (0, -10)$$
$$p_3 = (1, -11)$$

Tabla 20:Grafica de puntos de C(x) (tecnica)

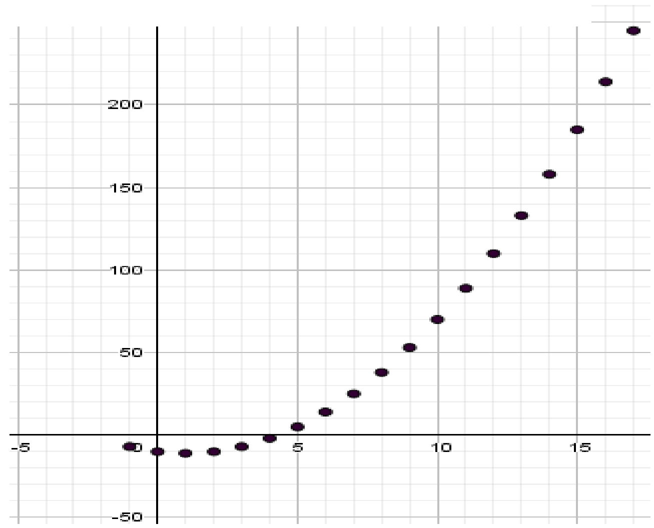
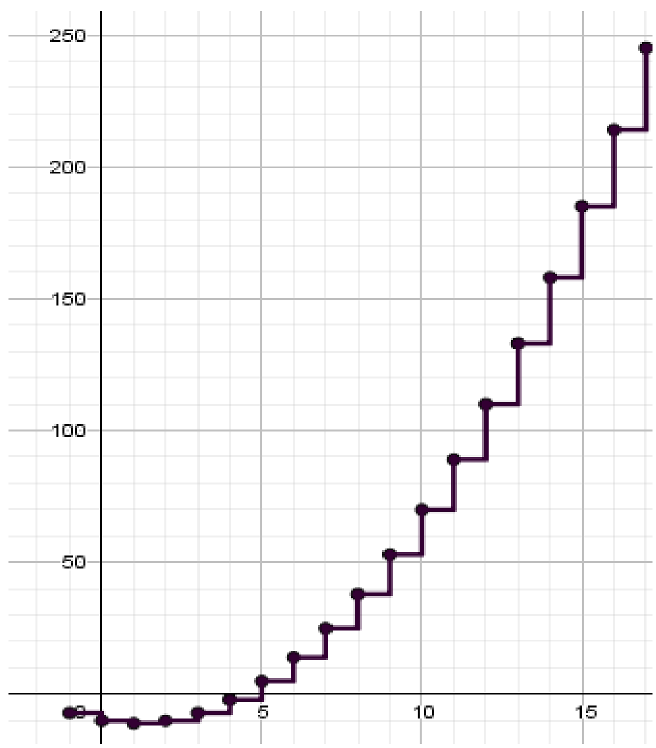


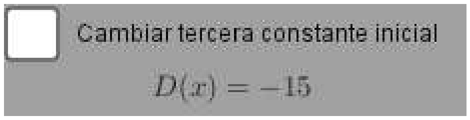
Tabla 21:Grafica de incrementos de C(x) (tecnica)



La opción

grafica los incrementos que sufre la tabla de valores $C(x)$.

La opción Cambiar tercera constante inicial



te permitirá ingresar la constante con la que deseas trabajar y al terminar volver a dar click.

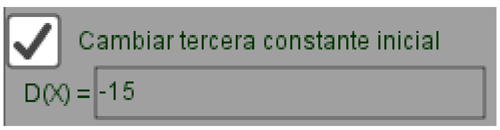


Tabla 22:Tabla D(x), primera constante inicial

E
D(X)
-15

La opción

grafica los valores obtenidos en la tabla $D(x)$ respecto a $C(x)$ y la posición X

$$-7 + (-15) = -22$$

$$-22 + (-10) = -32$$

$$-32 + (-11) = -43$$

Así sucesivamente hasta obtener la tabla completa.

Tabla 23: Cálculo de la 3ª acumulación (tecnica).

A	D	E
x	C(x)	D(X)
-1	-7	-15
0	-10	-22
1	-11	-32
2	-10	-43
3	-7	-53
4	-2	-60
5	5	-62
6	14	-57
7	25	-43
8	38	-18
9	53	20
10	70	73
11	89	143

Figura 31:Grafica de D(x) (tecnica)

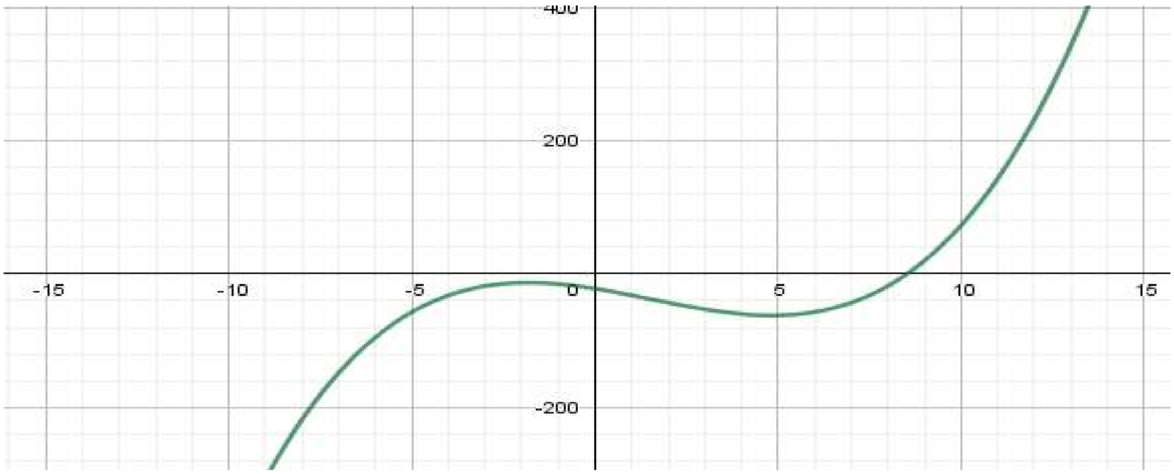


Figura 32:Grafica de puntos de D(x) (tecnica)

La opción

grafica la lista de valores obtenidos de $D(x)$ respecto a la posición X

$$p_1 = (-1, -7)$$

$$p_2 = (0, -10)$$

$$p_3 = (1, -11)$$

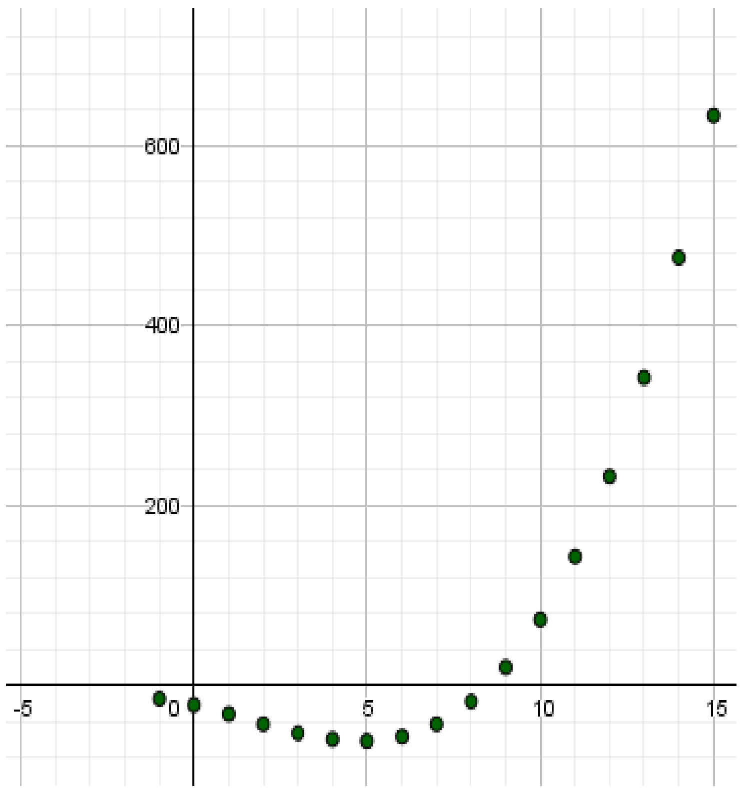
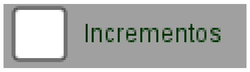
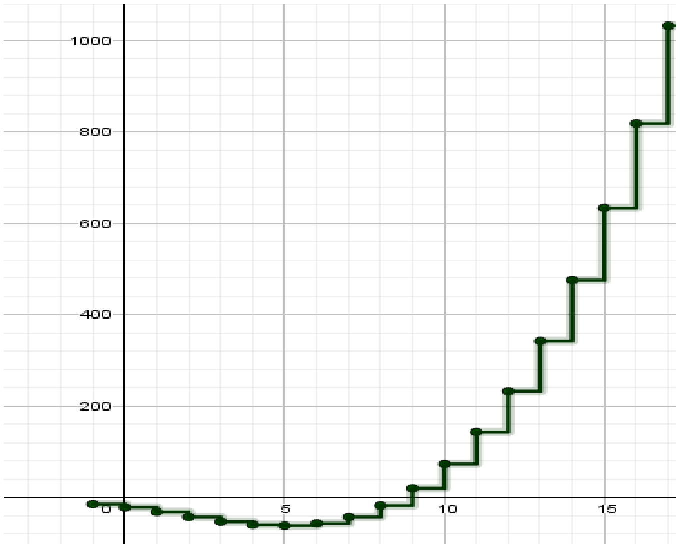


Figura 33:Grafica de incrementos de D(x) (tecncia)

La opción



grafica los incrementos que sufre la tabla de valores $D(x)$.

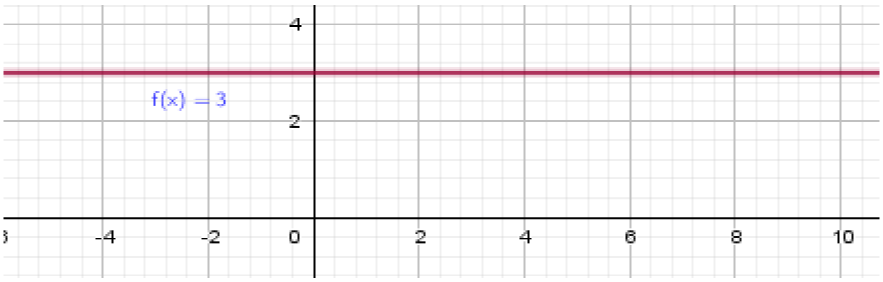


3.2.2 Caso 2: Acumulaciones de una Función Polinomial $\boldsymbol{f(x) = 3}$.

Apartado I: Incremento $\boldsymbol{Tamaño = 20, \Delta x = 1, xMin = 0}$

Sea la función $\boldsymbol{f(x) = 3}$, representemos gráficamente la primera, la segunda y la tercera acumulación, en este caso, cuando el incremento es $\Delta x = 1$.La función $\boldsymbol{f(x) = 3.}$

Figura 34:Grafica de la funcion f(x)= 3



1ª acumulación.

Para calcular la primera acumulación y obtener una aproximación de la primera integral de la función $\boldsymbol{f(x) = 3}$, llamaremos a esta nueva función B(x), necesitamos dar un valor inicial arbitrario $B(0) = -5$, y con la función $F(x)$, obtenemos la primera acumulación del siguiente modo:

Cuando $X = 0$ (valor inicial), $B(0) = -5$, después incrementando en una unidad a X, $X = 1$, $B(0)$ se incrementa en 3 unidades (porque $f(x) = 3$) siendo $F(x)$ un valor constante en este caso, obteniéndose que $B(1) = -5 + 3 = -2, B(2) = B(1) + 3 = -2 + 3 = 1,\ B(3) = B(2) + 3 = 1 + 3 = 4$ y asi sucesivamente obteniendo la tabla de valores de la primera acumulación B(x).

Tabla 24: Cálculo de la 1ª acumulación f(x)=3

A	B	E
x	B(x)	F(x)
0	-5	3
1	-2	3
2	1	3
3	4	3
4	7	3
5	10	3
6	13	3
7	16	3
8	19	3
9	22	3
10	25	3
11	28	3
12	31	3
13	34	3
14	37	3
15	40	3
16	43	3
17	46	3
18	49	3

Tomando 2 puntos, se encuentra que la función $f(x)$ representa a la recta $\boldsymbol{B(x) = 3x - 5}$.

El proceso que se realizó para obtener la primera acumulación, se puede representar gráficamente así.

$$x = 1,,2,3,4,5,,,,,(Tamaño)$$

Obteniendo una lista de puntos

$$x, B(x)$$

$$p_1 = (0, -5)$$

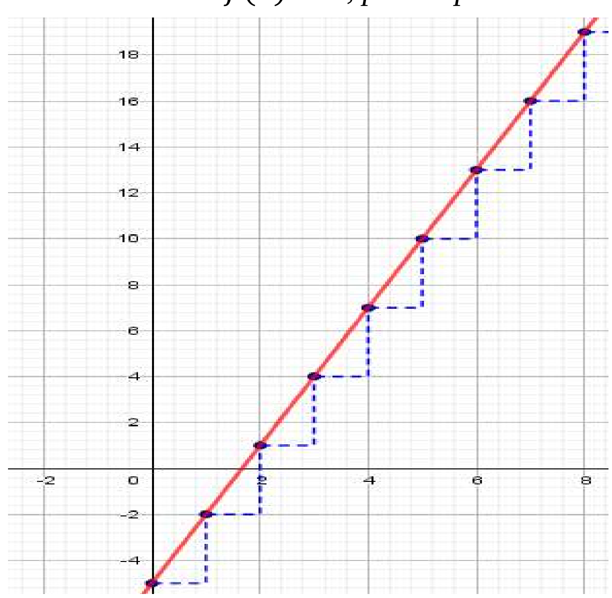
$$p_2 = (1, -2)$$

$$p_3 = (2, 1)$$

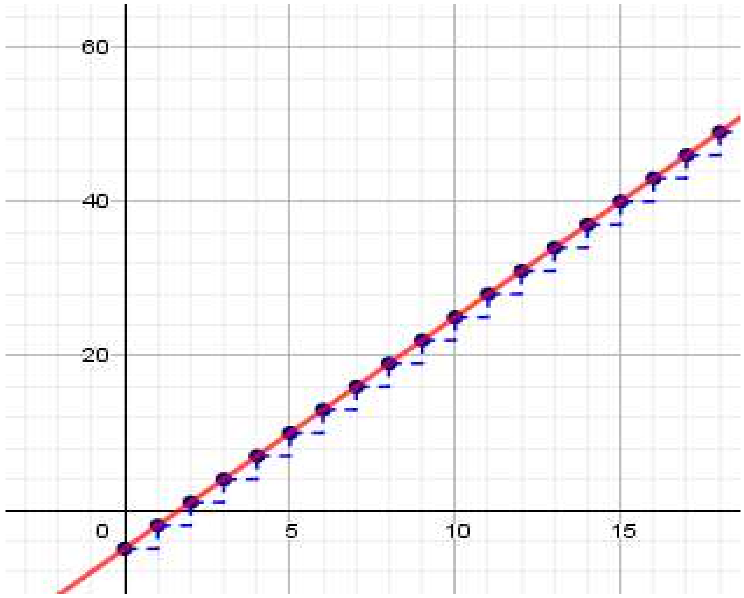
$$p_4 = (3,4)$$

Así sucesivamente hasta obtener la lista de valores del tamaño deseado.

Construcción y visualización de la 1ª acumulación de $f(x) = 3$, paso a paso



Para otros valores de X, la grafica muestra el comportamiento de la función lineal $B(x)$.



Zoom a la gráfica de la 1ª acumulación de f(x)=3

2ª acumulación.

Tomando los valores obtenidos de $B(x)$, se construirá la segunda acumulación, que llamaremos $C(x)$. Para esto, se necesita dar un valor inicial $C(0) = -3$. Y elaboremos la tabla del modo siguiente.

$$C_2 = -3 - 5 = -8$$

$$C_3 = -8 - 2 = -10$$

Así sucesivamente.

Obteniendo la tabla de valores de la segunda acumulación C(x).

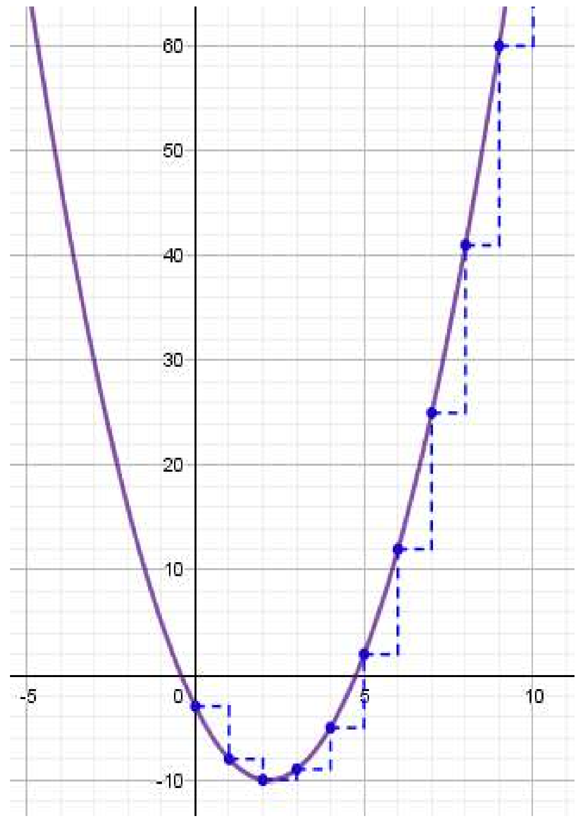
Tabla 25:Cálculo de la 2ª acumulación de f(x)=3

A	C	B
x	C(x)	B(x)
0	-3	-5
1	-8	-2
2	-10	1
3	-9	4
4	-5	7
5	2	10
6	12	13
7	25	16
8	41	19
9	60	22
10	82	25
11	107	28
12	135	31
13	166	34
14	200	37
15	237	40
16	277	43
17	320	46
18	366	49
19	415	52

Figura 35:Construcción y visualización de la 2ª acumulación de f(x)=3, paso a paso.

Con ayuda de la función de la forma $B(x) = a_1x + a_0$, se ha construido una función de segundo grado, de la forma $C(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Tomando tres puntos, se tiene que la ecuación de esta curva es $\boldsymbol{C(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{2}x - 3}$. Donde $a_2 = \frac{3}{2}, a_1 = -\frac{13}{2}$ y $a_0 = -3$.

El proceso que se realizó para obtener la segunda acumulación, se puede observar en la Figura:



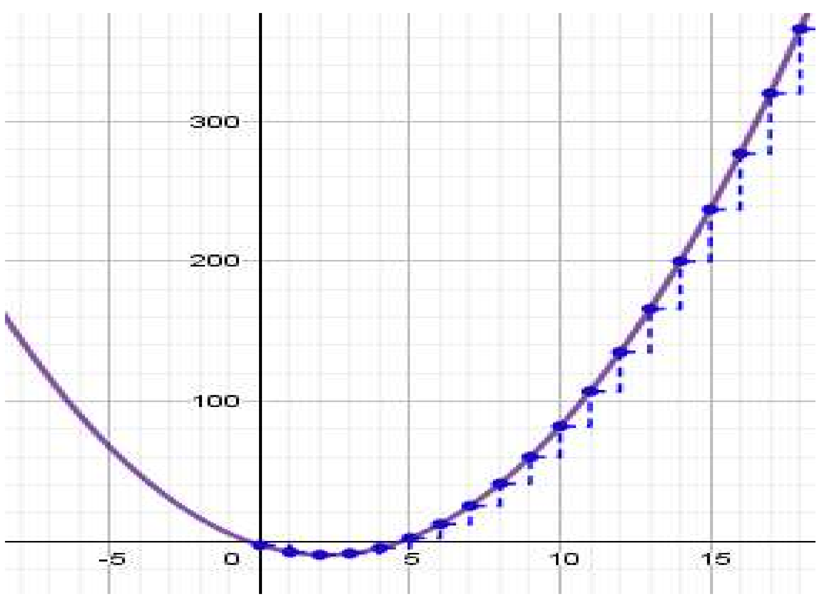


Figura 36:Zoom a la gráfica de la 2ª acumulación de f(x)=3

3ª acumulación.

Tomando los valores obtenidos de $C(x)$, construyamos la tercera acumulación, que llamaremos $D(x)$. Para esto, necesitamos un valor inicial $D(0) = -1$. Elaboremos su tabla:

Tabla 26: Cálculo de la 3ª acumulación f(x)=3

A	D	C
x	D(x)	C(x)
0	-1	-3
1	-4	-8
2	-12	-10
3	-22	-9
4	-31	-5
5	-36	2
6	-34	12
7	-22	25
8	3	41
9	44	60
10	104	82
11	186	107
12	293	135
13	428	166
14	594	200
15	794	237
16	1031	277
17	1308	320
18	1628	366
19	1994	415

Con la ayuda de la función cuadrática de la forma $C(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, se ha construido una función de tercer grado de la forma $D(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Tomando 4 puntos, se tiene que la ecuación de esta curva es:

$\boldsymbol{D(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{1}{2}x - 1}$, donde $a_3 = \frac{1}{2}, a_2 = -4, a_1 = \frac{1}{2}$ y $a_0 = -1$.

En la siguiente grafica se puede observar el procedimiento usado para obtener la tercera acumulación, partiendo de la segunda acumulación.

Figura 37: Construcción y visualización de la 3ª acumulación de $f(x) = 3$, paso a paso.

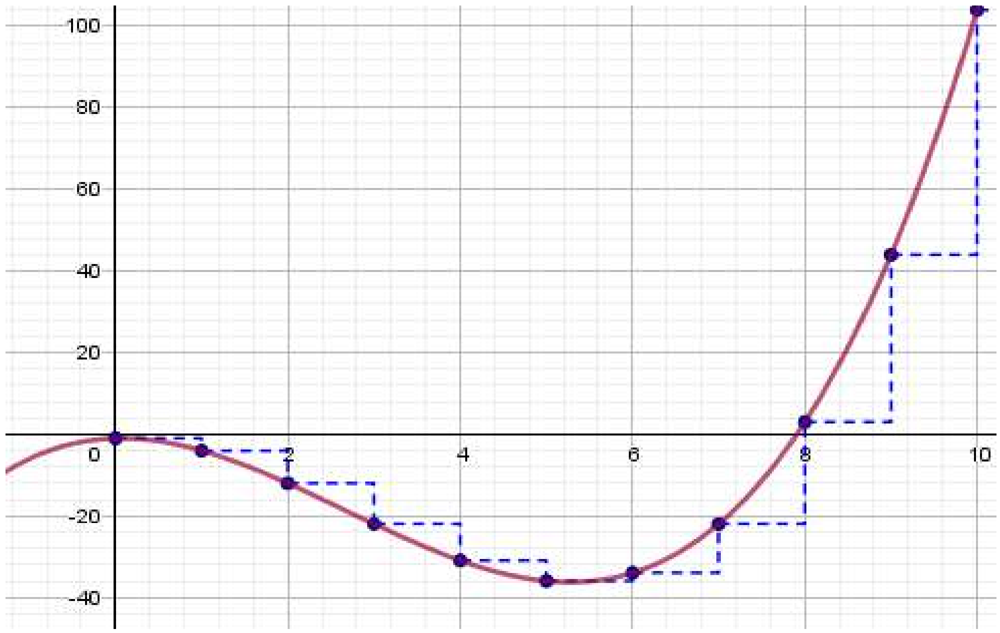
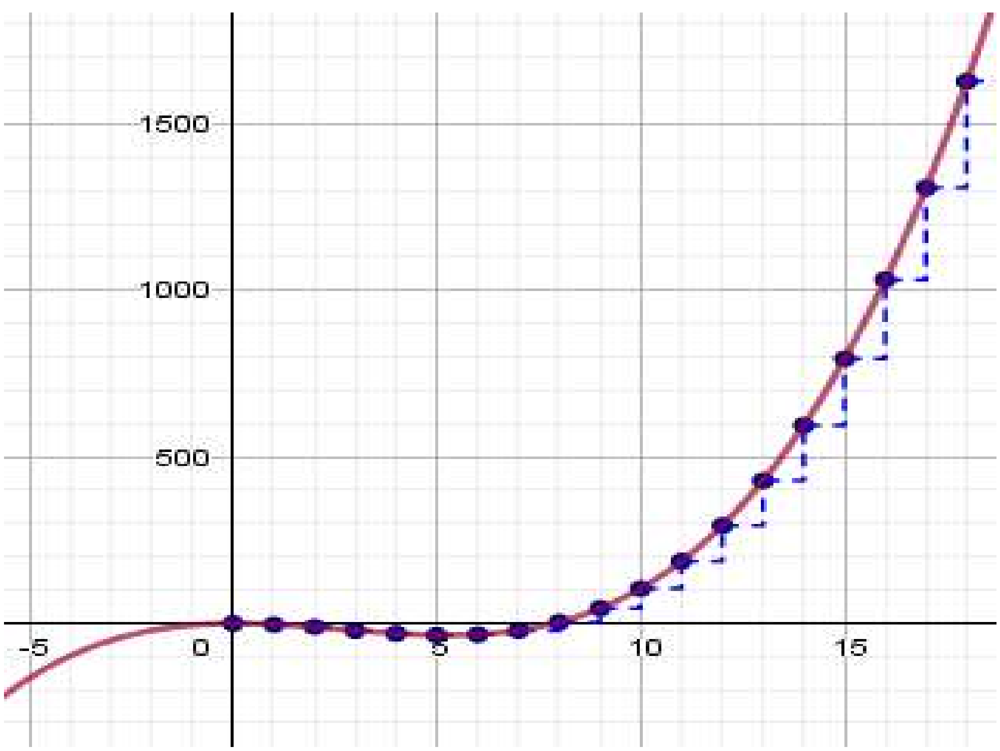


Figura 38:Zoom a la gráfica de la 3ª acumulación de f(x)=3.

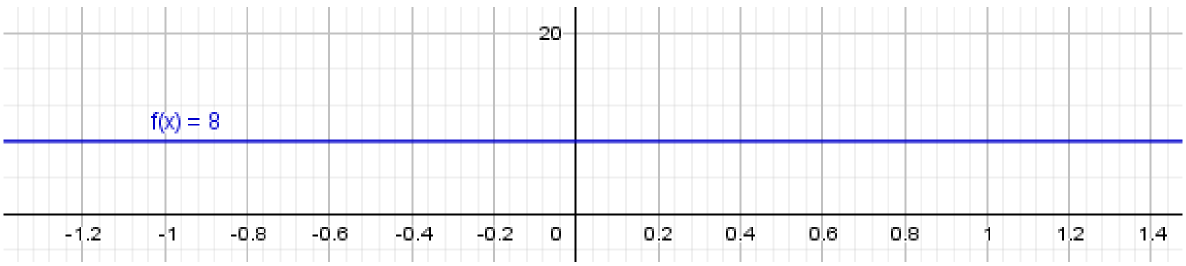


3.2.3 Caso 3: Acumulaciones de una Función Polinomial $\boldsymbol{f(x) = 8}$.

Apartado II: Incremento $\boldsymbol{Tama}$ño $\boldsymbol{= 20, \Delta x = 0.5, xMin = 0}$

Sea la función $\boldsymbol{f(x) = 8}$, representemos gráficamente la primera, la segunda y la tercera acumulación, en este caso, cuando el incremento es $\Delta x = 1$.La función $\boldsymbol{f(x) = 8}$.

Figura 39:Grafica de la funcion f(x)=8



1ª acumulación.

Para calcular la primera acumulación y obtener una aproximación de la primera integral de la función $\boldsymbol{f(x) = 8}$, llamaremos a esta nueva función $B(x)$, necesitamos dar un valor inicial arbitrario $B(0) = 2$, y con la función $F(x)$, obtenemos la primera acumulación del siguiente modo:

Cuando $X = 0$ (valor inicial), $B(0) = 2$, después incrementando 0.5 *en* X, $X = 0.5$, $B(0.5)$ se incrementa en 8 unidades (porque $F(x) = 8$ siendo $F(x)$ un valor constante en este caso, obteniéndose que

$$B(0.5) = 2 + 8 = 10,$$

$$B(1) = B(0.5) + 8 = 10 + 8 = 18,$$

$$B(1.5) = B(1) + 8 = 18 + 8 = 26$$

y asi sucesivamente.

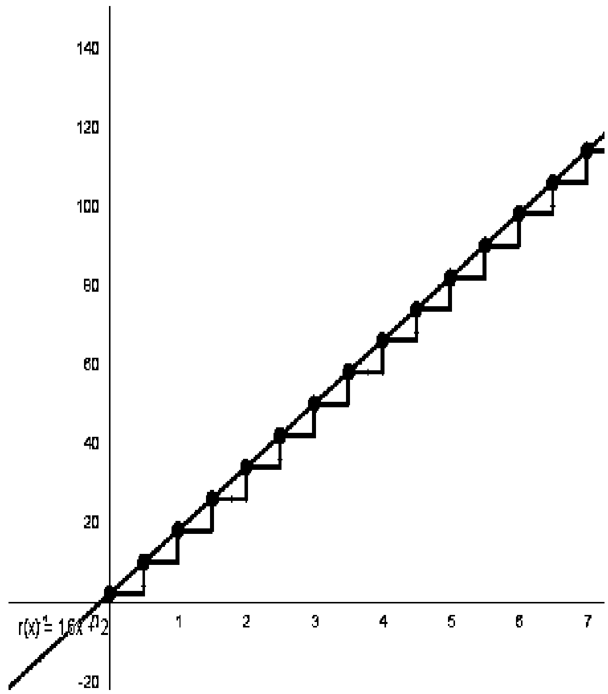
Tabla 27:Cálculo de la 1ª acumulación f(x)=8

A	B	C
x	f(X)	B(x)
0	8	2
0.5	8	10
1	8	18
1.5	8	26
2	8	34
2.5	8	42
3	8	50
3.5	8	58
4	8	66
4.5	8	74
5	8	82
5.5	8	90
6	8	98
6.5	8	106
7	8	114
7.5	8	122
8	8	130
8.5	8	138
9	8	146
9.5	8	154

Esto valores nos dan una función del tipo lineal, por lo cual tomamos 2 puntos para obtener la expresión algebraica. Tomemos $P1(0,2)\ y\ P2(0.5,10)$,$B(x) = mx + b$ donde $2 = b$, el intercepto en y. Sustituyendo valores $10 = m(0.5) + 2, 10 = 0.5(m + 4)\ por\ lo\ tanto\ m + 4 = \frac{10}{0.5} = 20, m = 20 - 4 = 16$ de donde, $\boldsymbol{B(x) = 16x + 2}$

Figura 40: Construcción y visualización de la 1ª acumulación de $f(x) = 8$, paso a paso

El proceso que se realizó para obtener la primera acumulación, se puede representar gráficamente así. $x = 0,0.5,1,1.5,2,,,,,(Tamaño)$ Obteniendo una lista de puntos $x, f(x)$ $p_1 = (0,2)$ $p_2 = (0.5, 10)$ $p_3 = (1, 18)$ $p_4 = (1.5,26)$ Así sucesivamente hasta obtener la lista de valores del tamaño deseado.



Para otros valores de X, la grafica muestra el comportamiento de la función lineal $B(x)$.

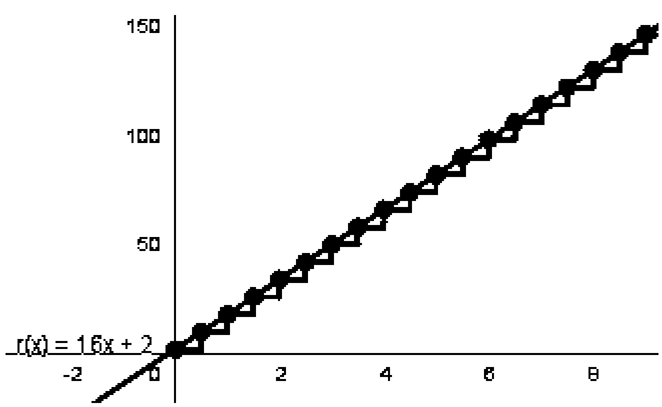


Figura 41:Zoom a la gráfica de la 1ª acumulación de f(x)=8

2ª acumulación.

Tomando los valores obtenidos de $B(x)$, se construirá la segunda acumulación, que llamaremos $C(x)$. Para esto, se necesita dar un valor inicial $C(0) = -3$. Y elaboremos la tabla del modo siguiente.

$$C_1 = -2 + 2 = 0$$

$$C_3 = C_1 + 2 = -10$$

Así sucesivamente.

Tabla 28:Cálculo de la 2ª acumulación

A	C	D
x	B(x)	C(x)
0	2	-2
0.5	10	0
1	18	10
1.5	26	28
2	34	54
2.5	42	88
3	50	130
3.5	58	180
4	66	238
4.5	74	304
5	82	378
5.5	90	460
6	98	550
6.5	106	648
7	114	754
7.5	122	868
8	130	990
8.5	138	1120
9	146	1258
9.5	154	1404

Figura 42:Construcción y visualización de la 2ª acumulación de f(x)=8, paso a paso.

Con ayuda de la función de la forma $B(x) = a_1x + a_0$, se ha construido una función de segundo grado, de la forma $C(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Tomando tres puntos se puede determinar su función algebraica $p_1 = (0, -2), p_2 = (0.5, 0), p_{3=} = (1, 10)$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales con 3 incógnitas, se encuentra que a$= 16, b = -4$ y $c = -2$, por lo tanto

$$\boldsymbol{C(x) = 16x^2 - 4x - 2}$$

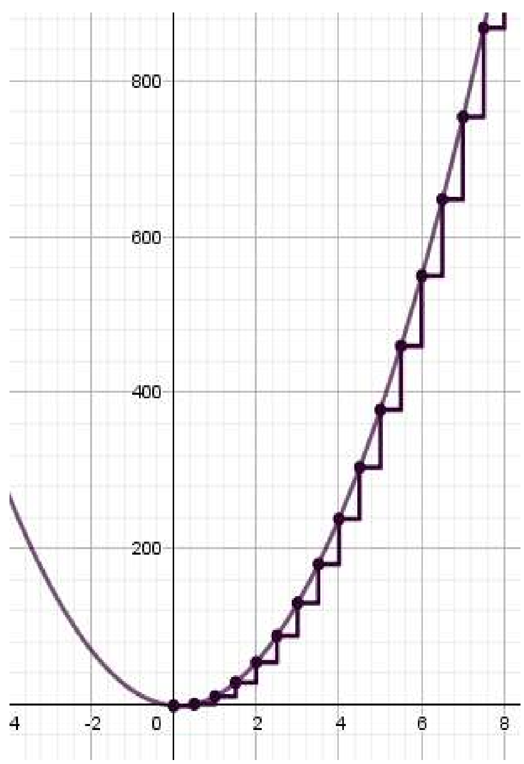
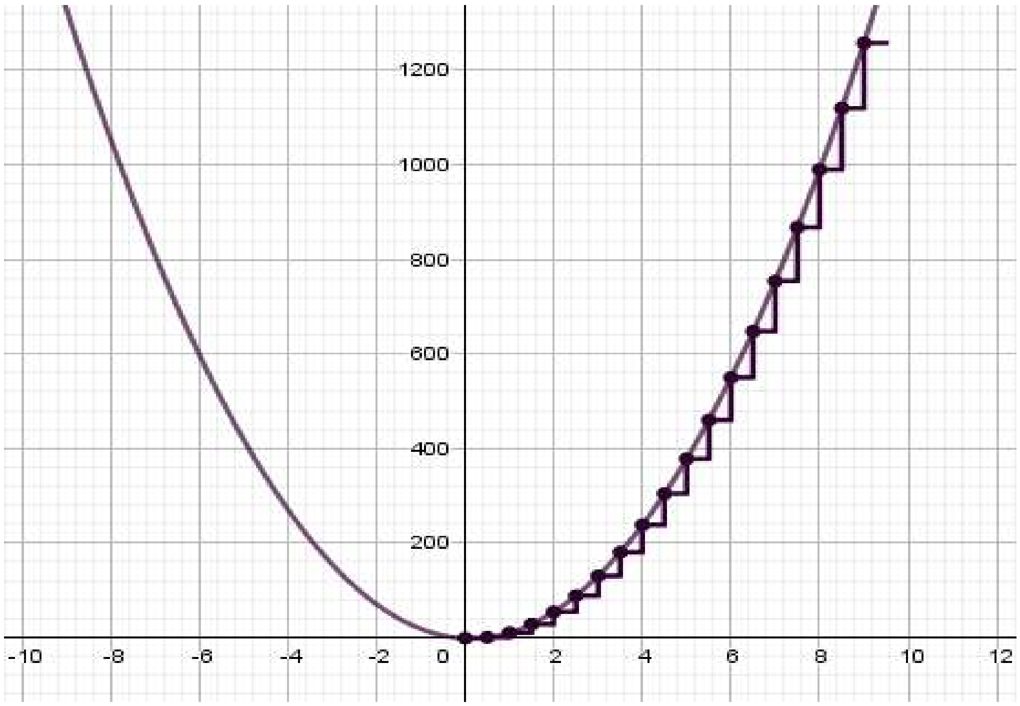


Figura 43: Zoom a la gráfica de la 2ª acumulación de f(x)=8.



3ª acumulación.

Tomando los valores obtenidos de $C(x)$, se construirá la segunda acumulación, que llamaremos $D(x)$. Para esto, se necesita dar un valor inicial $D(0) = 0$. Y elaboremos la tabla del modo siguiente.

$$D_1 = -2 + 0 = -2$$

$$D_2 = D_1 + 0 = -2 + 0 = -2$$

Así sucesivamente obteniendo la tercera acumulación D(x).

Tabla 29:Cálculo de la 3ª acumulación de f(x)=8

A	D	E
x	C(x)	D(X)
0	-2	1
0.5	0	-1
1	10	-1
1.5	28	9
2	54	37
2.5	88	91
3	130	179
3.5	180	309
4	238	489
4.5	304	727
5	378	1031
5.5	460	1409
6	550	1869
6.5	648	2419
7	754	3067
7.5	868	3821
8	990	4689
8.5	1120	5679
9	1258	6799
9.5	1404	8057

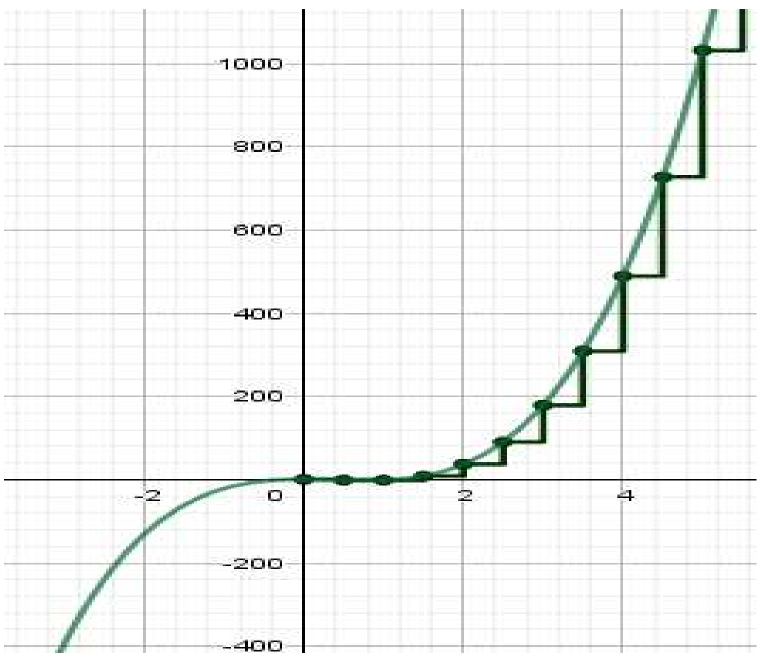
Con la ayuda de la función cuadrática de la forma $C(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, se ha construido una función de tercer grado de la forma $D(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Tomando 4 puntos, $P_1 = (0,1), P_2 = (0.5,-1), P_3 = (1,-1), P_4 = (1.5,9)$ se tiene que la ecuación de esta curva es:

$\boldsymbol{D(x) = 10.67x^3 - 12x^2 + 0.67x + 1}$, donde $a_3 = 10.67, a_2 = -12, a_1 = 0.67\ y\ a_0 = 1$.

En la siguiente grafica se puede observar el procedimiento usado para obtener la tercera acumulación, partiendo de la segunda acumulación.

Figura 44;Construcción y visualización de la 3ª acumulación de f(x)=8, paso a paso

.



Ahora, haremos un zoom a la gráfica de la curva $D(x)$ para ver cómo se comportar la función.

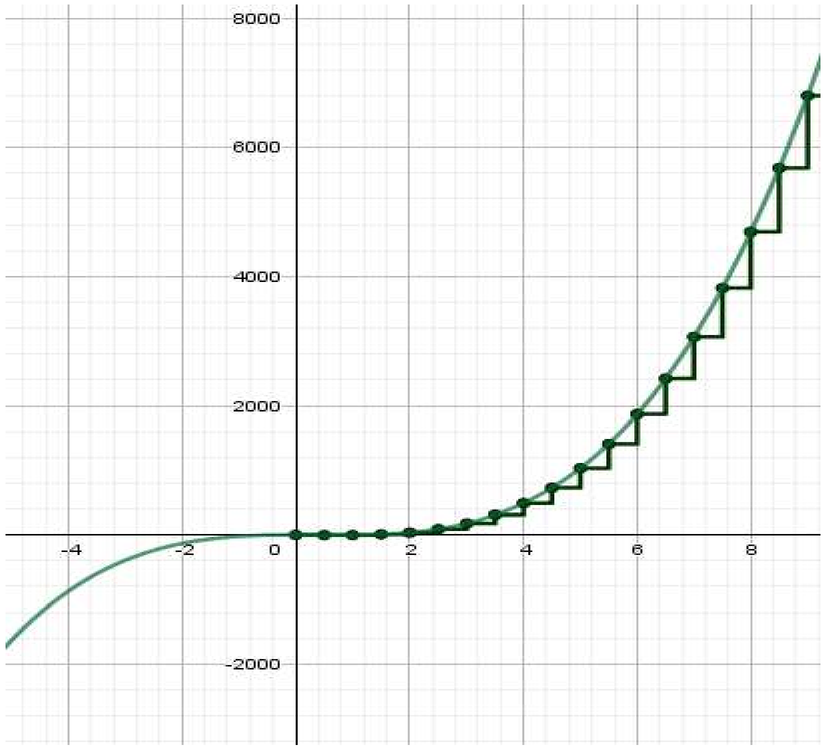


Figura 45:Zoom a la gráfica de la 3ª acumulación de f(x)=8.

3.2.4 Caso 3: Acumulaciones de una Función Polinomial $\boldsymbol{f(x) = 5}$.

Apartado III: Incremento $\boldsymbol{Tama\tilde{n}o = 20, \Delta x = 1, xMin = -1}$

Sea la función $\boldsymbol{f(x) = 5}$, representemos gráficamente la primera, la segunda y la tercera acumulación, en este caso, cuando el incremento es $\Delta x = -1$.La función $\boldsymbol{f(x) = 5}$.

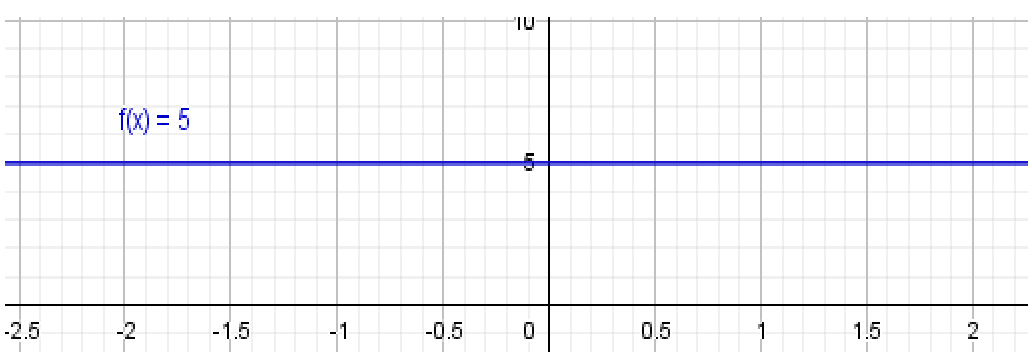


Figura 46:Grafica de la funcion f(x)=5.

1ª acumulación.

Para calcular la primera acumulación y obtener una aproximación de la primera integral de la función $\boldsymbol{f(x) = 5}$, llamaremos a esta nueva función B(x), necesitamos dar un valor inicial arbitrario B(-1)=-1, y con la función F(x), obtenemos la primera acumulación del siguiente modo:

Cuando $x = -1$(valor inicial), $B(-1) = -1$, después incrementado en una unidad las x, x=0 por lo que B(0) se incrementa en el valor de f(0), es decir, nuestro siguiente punto B(0) es igual a $B(0) = B(-1) - 2 = -1 - 3 = -3$; Incrementando a x en una unidad, $x = 1$, por lo que $B(1)$ en este caso es igual a $B(1) = B(0) + 0 = -3 + 0 = -3$, es decir, los demás términos siguen la siguiente fórmula general:

$B(x_n) = B(x_n - \Delta x) + f(x_n - \Delta x), n = 1,2, \dots n$

y asi sucesivamente.

Tabla 30: Cálculo de la 1ª acumulación de f(x)=5.

A	B	C
x	f(X)	B(x)
-1	5	-1
0	5	4
1	5	9
2	5	14
3	5	19
4	5	24
5	5	29
6	5	34
7	5	39
8	5	44
9	5	49
10	5	54
11	5	59
12	5	64
13	5	69
14	5	74
15	5	79
16	5	84
17	5	89
18	5	94

:

Tomando 2 puntos para obtener la expresión algebraica. Tomemos $P_1(-1,-1)$ y $P_2(0,4)$ y obtenemos un sistema de ecuaciones de la forma $B(x) = mx + b$ donde $-1 = b$, el intercepto en y. Sustituyendo valores $4 = m(1) - 1, 4 = m - 1\ por\ lo\ tanto\ m = 4 + 1 = 5$, de donde, $\boldsymbol{B(x) = 5x - 1}$

Tabla 31:Construcción y visualización de la 1ª acumulación de f(x)=5, paso a paso

El proceso que se realizó para obtener la primera acumulación, se puede representar gráficamente así.

$$x = 1,,2,3,4,5,,,,,(Tamaño)$$

Obteniendo una lista de puntos

$$x, B(x)$$

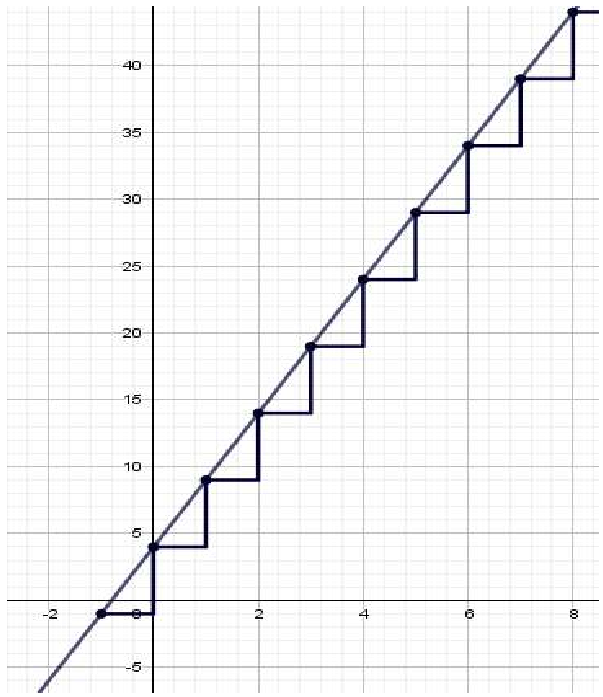
$$p_1 = (-1,-1)$$

$$p_2 = (0,4)$$

$$p_3 = (1,9)$$

$$p_4 = (2{,}14)$$

Así sucesivamente hasta obtener la lista de valores del tamaño deseado.



Para otros valores de X, la gráfica muestra el comportamiento de la función lineal $B(x)$.

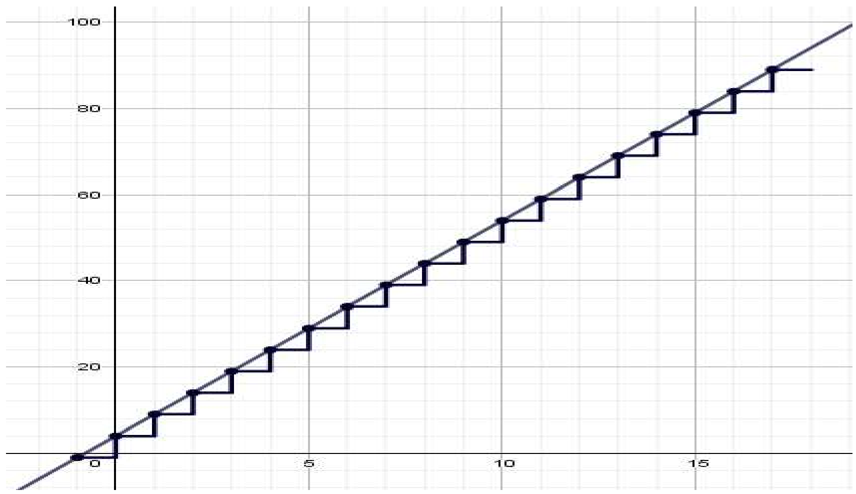


Figura 47:Zoom a la gráfica de la 1ª acumulación de f(x)=5.

2ª acumulación.

Tomando los valores obtenidos de $B(x)$, se construirá la segunda acumulación, que llamaremos C(x). Para esto, se necesita dar un valor inicial C(-1)=1. Y elaboremos la tabla del modo siguiente.

$$C_{-1} = -1 + 1 = 0$$

$$C_0 = C_{-1} + 4 = 0 + 4 = 4$$

Así sucesivamente.

Figura 48:Cálculo de la 2ª acumulación de f(x)=8

A	C	D
x	B(x)	C(x)
-1	-1	1
0	4	0
1	9	4
2	14	13
3	19	27
4	24	46
5	29	70
6	34	99
7	39	133
8	44	172
9	49	216
10	54	265
11	59	319
12	64	378
13	69	442
14	74	511
15	79	585
16	84	664
17	89	748
18	94	837

Figura 49: *Construcción y visualización de la 2ª acumulación de f(x)=5, paso a paso*

Con ayuda de la función de la forma $B(x) = mx + b$, se ha construido una función de grado dos, de la forma $C(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Tomando tres puntos se puede determinar su función algebraica $p_1 = (-1,1), p_2 = (0,0), p_3 = (1,-3)$.
Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales con 3 incógnitas, se encuentra que $a_2 = \frac{5}{2}, a_1 = \frac{3}{2}, a_0 = 0$, por lo tanto

$$C(x) = \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 0$$

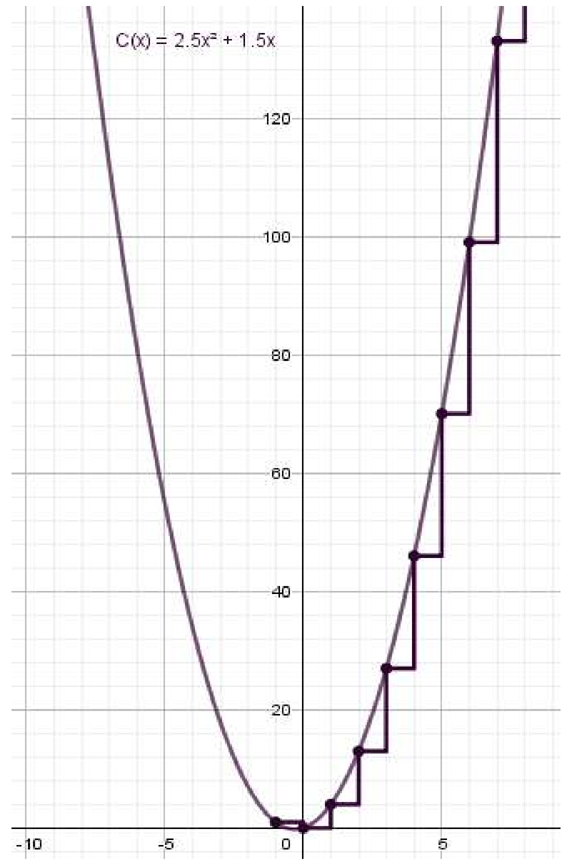
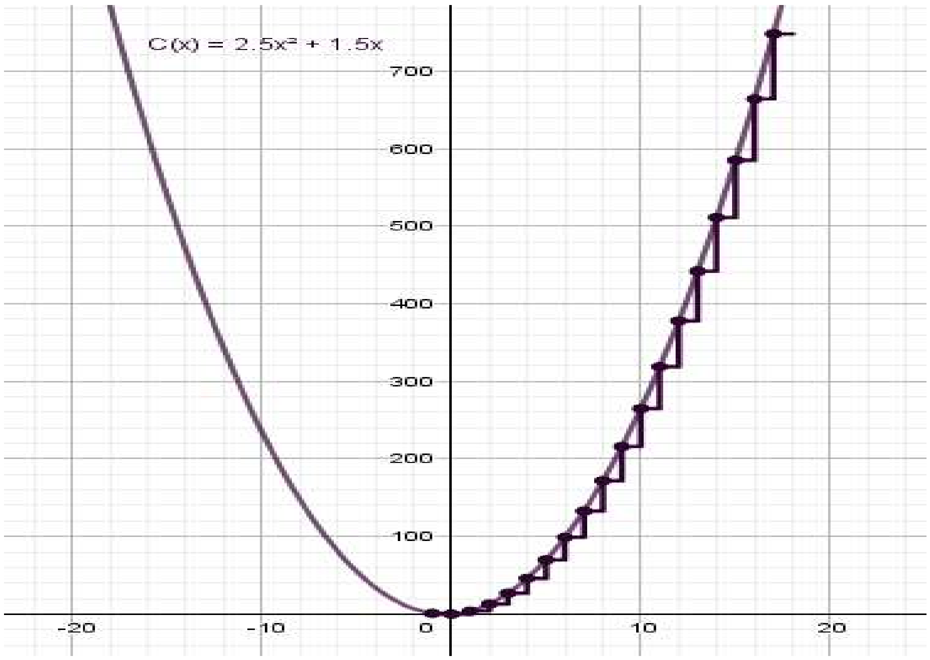


Figura 50:Zoom a la gráfica de la 2ª acumulación de f(x)=5.



3ª acumulación.

Tomando los valores obtenidos de $C(x)$, se construirá la segunda acumulación, que llamaremos $D(x)$. Para esto, se necesita dar un valor inicial $D(-1) = 2$. Y elaboremos la tabla del modo siguiente.

$$D_{-1} = 1 + 2 = 3$$

$$D_2 = D_1 + 0 = 3 + 0 = 3$$

Así sucesivamente obteniendo los valores de la tercera acumulación D(x).

Tabla 32:Cálculo de la 3ª acumulación

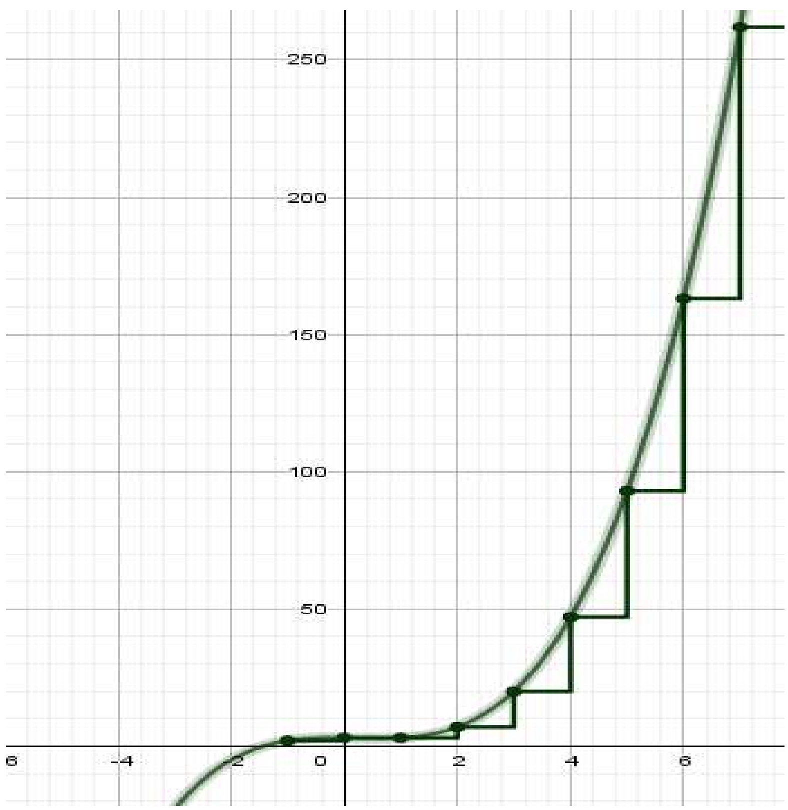
A	D	E
x	C(x)	D(X)
-1	1	2
0	0	3
1	4	3
2	13	7
3	27	20
4	46	47
5	70	93
6	99	163
7	133	262
8	172	395
9	216	567
10	265	783
11	319	1048
12	378	1367
13	442	1745
14	511	2187
15	585	2698
16	664	3283
17	748	3947
18	837	4695

Con la ayuda de la función cuadrática de la forma $C(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, se ha construido una función de tercer grado de la forma $D(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Tomando 4 puntos, $P_1 = (-1, 2), P_2 = (0,3), P_3 = (1,3), P_4 = (2, 7)$ se tiene que la ecuación de esta curva es:

$\boldsymbol{D(x) = \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{8}{3}x + 3}$, donde $a_3 = \frac{5}{6}$, $a_2 = -\frac{1}{2}, a_1 = -\frac{8}{3}$ y $a_0 = 3$.

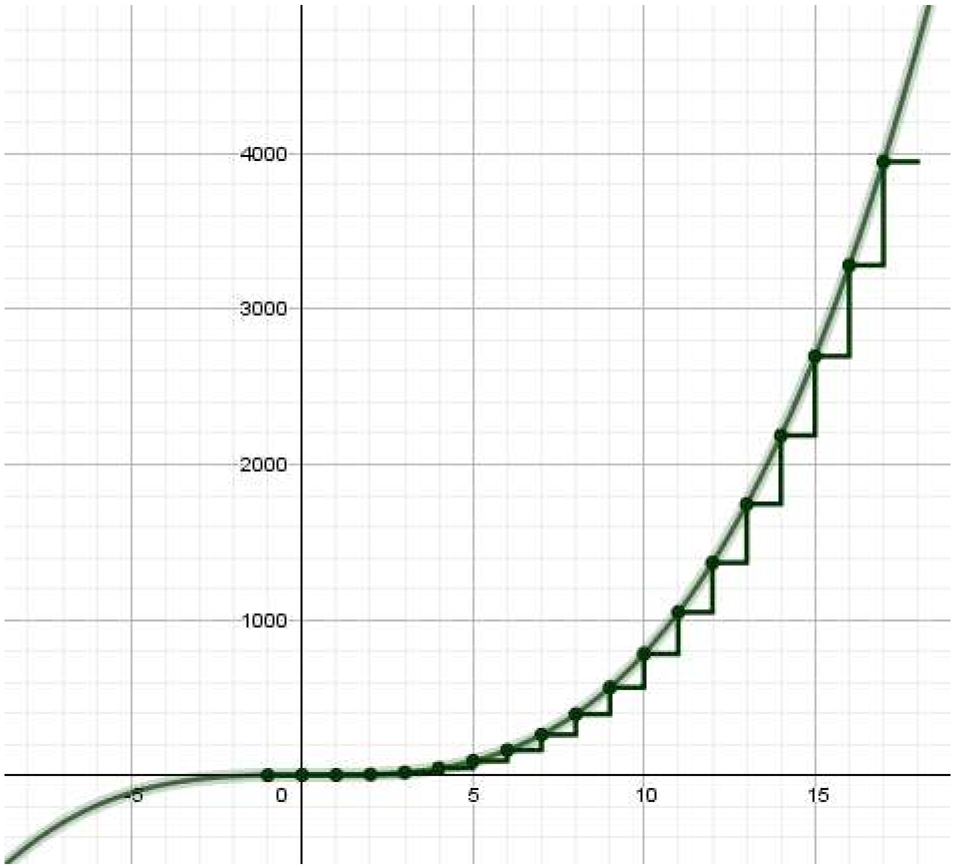
En la siguiente grafica se puede observar el procedimiento usado para obtener la tercera acumulación, partiendo de la segunda acumulación.

Figura 51:Construcción y visualización de la 3ª acumulación de f(x)=5, paso a paso



Ahora, haremos un zoom a la gráfica de la curva $D(x)$ para ver cómo se comportar la función.

Figura 52: Zoom a la gráfica de la 3ª acumulación de f(x)=5.



Análisis de las Acumulaciones Vs Sumas de Riemann para $f(x) = 3$

Como se ha observado, cuando estamos calculando las acumulaciones de la función, estamos sumando cantidades a partir de otras anteriores, por ejemplo, cuando calculamos la 1ª acumulación, tomando el incremento $\Delta x = 1$, decimos que primero, damos un valor inicial $B(0) = c$.

Posteriormente, para $B(1) = B(0) + f(0)$.

Para $B(2) = B(1) + f(1)$.

Para $B(3) = B(2) + f(2)$.

Y así sucesivamente hasta llegar a $B(n) = B(n-1) + f(n-1)$.

Ahora, si trabajamos “al revés” o recursivamente, decimos que, por ejemplo:

$B(2) = B(1) + f(1)$. Entonces sabemos que $B(1) = B(0) + f(0) = c + f(0)$. Sustituyendo en $B(2)$, se tiene que $B(2) = B(1) + f(1) = B(0) + f(0) + f(1) = c + f(0) + f(1)$. Entonces si partimos desde $B(n)$ tenemos:

$B(n) = c + f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n-1)$.

Esto a su vez, puede representarse como una sumatoria.

$$B(n) = \sum_{i=0}^{n-1} c + f(i)$$

Donde c es el valor inicial y f la función.

Para el caso cuando $\Delta x \neq 1$, es importante señalar que la acumulación resultante estará acompañada del incremento, es decir, en la sumatoria anterior, no fue necesario multiplicar por el incremento $\Delta x = 1$, ya que no altera en nada la ecuación, pero si $\Delta x \neq 1$ sí la afectará. Por lo tanto, la ecuación se convierte en:.

$$B(n)\Delta x = \left(\sum_{i=0}^{n-1} c + f(i) \right) \Delta x$$

Si recordamos un poco de nuestros cursos de cálculo, si nuestro incremento Δx tiende a cero (en símbolos si $\Delta x \to 0$) entonces el

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\sum_{i=0}^{n-1} c + f(i) \right) \Delta x$ es una aproximación a la definición de integral definida que expone James Stewart en su libro Cálculo de una Variable:

La **integral definida** de f, de a a b es

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{//P// \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

si existe este límite.

Por lo que mientras más pequeño sea nuestro incremento, nuestra 1ª acumulación se acercará más a la integral definida de f.

Capítulo 4

Conclusiones

5.1 Respuestas a las preguntas de Investigación

En el capítulo 1 se formularon 5 preguntas, las cuales servirían como pilar principal para iniciar la investigación. Una vez que el tema de tesis se desarrolló, que se propuso un marco teórico que sustentara las bases teóricas de las aproximaciones a la integral por medio de acumulaciones y la visualización de razón de cambio haciendo uso de diferencias, lamentablemente por las condiciones no se pudo llevar a cabo una experimentación con estudiantes.

¿Qué tan pequeño o grande es el error de aproximación de las acumulaciones a la integral?

El error de aproximación cuando se calculan las integrales depende de dos factores importantes: el número de dígitos usados para sumar, es decir si se redondea o se trunca y el incremento utilizado. Para incrementos más pequeños, como pudimos observar en los ejemplos mostrados, se obtiene una función de acumulación que es una buena aproximación a la integral de la función. Esto también depende, como se mencionó anteriormente, de que al momento de sumar y de multiplicar por el incremento Δx, las cifras del número se redondeen o se trunquen, según sea el caso que más convenga.

¿Se pueden obtener acumulaciones de cualquier función? ¿Estas deben ser funciones continuas?

La respuesta es sí podemos obtener funciones de acumulación para cualquier función y no necesariamente tienen que ser continuas. Se sabe que toda función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ es integrable en el mismo intervalo $[a, b]$. Además sabemos que toda función continua a trozos en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$.

Asimismo, sabemos que una función f es continua a trozos si tiene un número de puntos de discontinuidad finito y que existen los límites laterales y que también son finitos.

¿Cómo GeoGebra, un software de Geometría dinámica, puede ayudar al estudiante a entender mejor el concepto de acumulación y razón de cambio?

Acumulación:

El software GeoGebra, a lo largo de la tesis, nos ayuda en primer lugar a graficar la función a la cual se buscaba calcular sus acumulaciones; sirvió para encontrar la forma explícita de las acumulaciones y en los casos en que no podía encontrarse una forma explícita, con el ajuste de curvas se logró una aproximación a la forma explícita de la acumulación, lo cual sucedió en funciones no polinomiales. Además por medio de sus hojas de cálculo, se obtuvieron tablas de funciones de acumulación, en la que se ponía el incremento respectivo, los valores iniciales y los comandos necesarios y se obtenían tablas con las que era fácil encontrar la ecuación que seguía tal acumulación.

Por otro lado, cuando las funciones fueron polinomiales, usando ciertos puntos de las tablas de valores de las acumulaciones, era posible encontrar por medio de la solución de sistemas de ecuaciones lineales, las constantes que determinaban la ecuación algebraica de las acumulaciones. Porque si se hubiera utilizado la eliminación gaussiana para encontrar la solución de tales sistemas de ecuaciones lineales, habría sido un proceso eficaz también pero muy tedioso y cansado, porque en ocasiones se debieron encontrar soluciones a sistemas de ecuaciones con 5 ecuaciones y 5 incógnitas, que sería una matriz de 5x5, por lo que GeoGebra ayudó a aligerar un poco el trabajo.

Razón de cambio:

GeoGebra nos ayuda en primer lugar a graficar la función deseada y obtener una mejor visualización de esta; sirvió para encontrar la forma explícita de las razones de cambio y poder graficarlas. Además por medio de sus hojas de cálculo, se obtuvieron tablas de razón de cambio, las diferencias $\Delta x, \Delta f(x)$, la graficacion de puntos.

¿Se puede obtener una forma explícita para cualquier función de acumulación?

La respuesta es sí, si la función es una función polinomial como se mencionó en la respuesta de la pregunta 3, se puede utilizar el comando Resuelve que GeoGebra nos ofrece en su Vista de Cálculo Simbólico (CAS), para encontrar la solución de los sistemas de ecuaciones lineales que surjan al tomar algunos puntos y sustituirlos en la ecuación algebraica. Pero si la función no es polinomial, entonces se puede hacer uso del Ajuste de Curvas que GeoGebra ofrece también. Para usar el Ajuste de Curvas, se debe crear una lista de puntos y se obtiene una aproximación a la ecuación que sigue la acumulación respectiva.

¿Por qué se debe dar un valor inicial en cada acumulación?

La respuesta sería, que su valor indica el comienzo de la acumulación del área, es decir, que cada valor que se asigne como valor inicial, determinará una función de acumulación única dentro de una familia de funciones de acumulación.

Además, de acuerdo a estudios que Yerushalmy y Swidan realizaron, cuando pusieron en práctica su software CUL, la gráfica de la función de acumulación se transforma verticalmente de acuerdo con los cambios que se le hagan al valor inicial. Todo esto es una interpretación que relaciona la parametrización del valor inicial o límite inferior de la acumulación con el signo c, la cual representa la integral indefinida como una familia de funciones que difieren por una constante c, o simbólicamente como $\int f(x)dx = h(x) + c$. Donde $h(x)$ es la antiderivada de la función $f(x)$.

¿Se puede implementar este software a nivel secundaria?

Si se puede, aunque no hay trabajos a nivel secundaria algunos autores de las diferentes investigaciones mencionadas marcan que es posible aplicarlo, dando un enfoque diferente para tratar el problema a nivel secundaria.

Bibliografía

Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*(52), 215-241.

Arias, R., & Leiva, L. (2013). Construcciones dinámicas con GeoGebra para el aprendizaje-enseñanza de la matemática. *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*.

Artigue, M. (2002). Analysis. En D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (págs. 167-198). Nueva York: Kluwer Academic Publishers.

Barahona, F., Barrera, O., Vaca, B., & Hidalgo, B. (Diciembre de 2015). GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. *Revista Tecnológica ESPOL, 28*(5), 121-132.

Camacho, M., Socas, M., & Depool, R. (2005). La integral definida. Una propuesta de enseñanza utilizando derive. En J. C. Cortés, & F. Hitt (Edits.), *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza.* México: Morevallado Editores.

Cortés J. C., L. G. (2014). Aplicaciones Tecnológicas para el Aprendizaje de las Matemáticas. *revista libero ameraicana de educacion matematica*, 142.

Cortés, J. C. (2002). *Desarrollo de software para la enseñanza del cálculo diferencial.* México: Cinvestav-IPN.

Cortés, J. C. (2011). Diferencias y acumulaciones vs Derivada e Integral.

Cortés, J. C. (Marzo de 2012). Construyendo funciones derivadas. *Revista UNION*(29), 23-34.

Cortés, J. C., López, L., & Ruiz, C. H. (2016). Acumulaciones vs Integral. *Revista Pädi. Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería*(1).

Currie, S. (2007). *Science Lives*. Recuperado el Febrero de 2017, de Johannes Kepler: "Mathematician of the Sky" : http://www.sciencelives.com/kepler.html

Dupuis, C. (1997). Recuperado el Enero de 2017, de Uso de la computadora para modificar la aprehensión de figuras geométricas : http://fractus.uson.mx/Papers/revista/Dupuis/Dupuis.html

Duval, R. (1988). Graphiques et equations: L'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*(1), 235-253.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales dide Didactique et de Sciences Cognitives*(5), 37-65.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (1ª edición ed.). (M. V. Restrepo, Trad.) Colombia: Artes Gráficas Univalle.

Duval, R. (2003). Voir en mathématiques. En E. Filloy, *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual* (págs. 41-76). México: Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN.

Duval, R. (s.f.). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*(10), 5-53.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1986). On visual versus analytical thinking in mathematics. *Proceedings of the Tenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 153-158.

Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti, O. (2006). The role and uses of technology for the teaching of algebra and calculus. (A. Gutierrez, & P. Boero, Edits.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, 237-273.

Foresta, S., & Goldman, L. (s.f.). *Principia Mathematica Historallis Integratus.* Recuperado el Febrero de 2017, de http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download;jsessionid=F686F1617DC7E4B57F51919618B6C619?doi=10.1.1.127.5435&rep=rep1&type=pdf

Franco, Á. (s.f.). *Curso Interactivo de Física en Internet*. Recuperado el Febrero de 2017, de Cinemática. Estudio de los movimientos: http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica_/cinematica/rectilineo/rectilineo/rectilineo.html

Gordon, S., & Gordon, F. (2007). Discovering the fundamental theorem of calculus. *Mathematics Teacher, 100*(9), 597-604.

Grabiner, J. (Marzo de 1983). Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus . *The American Mathematical Monthly , 90*(3), 185-194.

Hitt. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Dpto. de Matemática Educativa, Cinvestav, CONACyT.*, 29.

Hitt, F. (1992). Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. *Memorias del IV Simposio sobre Investigación en Matemática Educativa*.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En J. C. Cortés, & F. Hitt (Edits.), *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza.* México: Morevallado Editores.

International Geogebra Institute. (s.f.). *GeoGebra*. Recuperado el Agosto de 2016, de Comandos de la vista CAS: https://wiki.geogebra.org/es/Categor%C3%ADa:Comandos_CAS

Kallio, B. (1961). A History of the Definite Integral. British Columbia, Canada: University of British Columbia.

Muñoz Ortega, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral . *Revista Oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. , 3*(2).

Oviedo, L., Kanashiro, A., Bnzaquen, M., & Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria*(13), 29-36.

Pluvinage, F. (1998). Los objetos matemáticos en la adquisición del razonamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (págs. 1-15). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rodríguez, G. (2014). Implementación de Software en el aula de clases (Uso de GeoGebra como herramienta de aprendizaje). Morelia, Michoacán, México: UMSNH.

Roger (Ed.). (s.f.). El GeoGebra como medio articulador del conocimiento matemático. *XVII Concurso Universitario Feria de las Ciencias*.

Stewart, J. (1998). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas* (3ª ed.). International Thomson Editores .

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2007). The concept of accumulation in calculus. En M. P. Carlson, & C. Rasummsen (Edits.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (págs. 117-131). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Torres, S., González, A., & Vavilova, I. (2013). *La Cita y Referencia Bibliográfica: Guía basada en las normas APA* (3ª edición ed.). Buenos Aires: Biblioteca Central UCES.

Unit 11 Applications of Integrals and the Integral as an Accumulation Function. (s.f.). Recuperado el Enero de 2017, de Casio Education: http://www.casioeducation.com/resource/pdfs/unit11.pdf

Yerushalmy, M., & Swidan, O. (10 de Noviembre de 2011). Signifying the accumulation graph in a dynamic and multi-representation environment. *Educ Stud Math*(80), 287-306.