



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE
HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS MAT. LUIS
MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ

**Acreción de un fluido perfecto en un
agujero negro de Schwarzschild**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas

PRESENTA:

Alejandro Romero Amezcua

TUTOR:

Dr. Francisco Siddartha Guzmán Murillo



Morelia, Michoacán, México.
Febrero 2021

Para mi mamá y papá, quienes me han apoyado siempre de manera incondicional. Su apoyo ha sido fundamental para lograr llegar hasta este punto; su cariño y amor, fortaleza absoluta para mí.

Resumen.

En este trabajo se presenta la evolución de un fluido perfecto alrededor de un hoyo negro de Schwarzschild. La evolución se presenta para dos casos. En el primero se considera el espacio-tiempo fijo, tomando a su vez dos escenarios, la acreción de polvo y la acreción de Michel; por su parte, el segundo caso considera el espacio-tiempo dinámico, permitiendo que el hoyo negro crezca conforme acreta materia. Este crecimiento se ve reflejado en el crecimiento del horizonte de eventos y el horizonte aparente. En ambos casos se hace uso de la separación 3+1 del espacio-tiempo, así como de las ecuaciones de Euler relativistas desarrolladas bajo este enfoque. Para llevar a cabo la evolución numérica de la geometría y el fluido, se recurre a métodos de solución de ecuaciones diferenciales. Para la evolución del espacio-tiempo se usa el método de diferencias finitas y para la evolución de las ecuaciones del fluido el método de volúmenes finitos, debido a la formación de discontinuidades en estas ecuaciones a pesar de contar con condiciones iniciales suaves. En el caso del fluido de prueba se encuentra que las soluciones exactas para el flujo estacionario de polvo y de Michel se comportan como atractores en el tiempo. En el caso de la acreción con la geometría dinámica se presenta un conjunto de elementos de diagnóstico de la solución numérica que permiten caracterizar el proceso de acreción.

Abstract.

In this thesis is presented the evolution of a perfect fluid onto a Schwarzschild black hole. Two possible scenarios are carried out. The first one considers a fixed space-time with two possible cases in turn, dust and Michel accretion; the second scenario considers a dynamic space-time, which allows the black hole to grow as the materia is accreted. This growth can be seen through the event and the aparent horizon. In both scenarios the 3+1 separation of the space-time is used and the relativistic Euler equations under this approach. For carrying out the numerical evolution of this equations it is necessary to make use of numerical methods for solvinf differential equations. For the space-time, the method of finite differences is used and for the fluid equations it is necessary to use the method of finite volumes, due to the discontinuities formation on this equations despite of having smoth initial conditions. In the scenario of the test fluid, it is found that exact solutions for flux in the cases of dust and Michel, are behaved as attractors in time. In the scenario with the dynamic geometry, it is presented a set of diagnostic elements of the numerical solution that allows to characterice the accretion process.

Palabras clave: Relatividad numérica, agujero negro, Schwarzschild, acreción, fluido perfecto.

CONTENIDO

1. Introducción	1
1.1. Enfoques y sistemas de referencia	2
1.2. Tensores	4
2. Ecuaciones de la geometría del espacio-tiempo	13
2.1. Ecuaciones de campo Einstein	13
2.2. Ecuaciones ADM en general	17
2.3. Ecuaciones ADM para un espacio-tiempo con simetría esférica	29
2.3.1. Caso de un fluido perfecto	35
2.4. Agujeros negros	38
2.4.1. Solución de Schwarzschild	38
2.4.2. Horizonte de eventos	43
2.4.3. Horizonte aparente	45
3. Ecuaciones de Euler relativistas	50
3.1. Ecuaciones para el espacio-tiempo de Minkowski	50
3.2. Ecuaciones de Euler usando el enfoque 3+1 con simetría esférica	54

3.3. Discontinuidades en las ecuaciones Euler relativistas	60
4. Métodos numéricos	65
4.1. Diferencias finitas	65
4.1.1. Método de líneas	70
4.2. Volúmenes finitos	71
4.3. Error y convergencia	76
5. Acreción con el espacio-tiempo fijo	79
5.1. Ecuaciones y condiciones	79
5.2. Acreción de Bondi	86
5.3. Acreción de Michel	94
6. Acreción en un agujero negro dinámico	102
6.1. Ecuaciones y condiciones	102
6.2. Resultados de la evolución	110
7. Conclusiones y comentarios finales	121
8. Apéndice	123
8.1. Unidades geométricas	123
REFERENCIAS	127

Capítulo 1

Introducción

La Física, permite describir el universo por medio de leyes y teorías que dictan la manera en que todo interactúa, desde algo tan simple como una manzana cayendo de un árbol, hasta el por qué de las órbitas de los planetas alrededor del Sol. Es por medio de estas leyes y teorías que se estudian toda clase de fenómenos. La evolución de un fluido siendo acreetado por una agujero negro, necesita hacer uso de la Relatividad General y la mecánica de fluidos, además de necesitar métodos numéricos apropiados que permitan simular la evolución.

La Relatividad General es una teoría formulada por Albert Einstein, en la cual se introducen nuevas ideas que cambiaron drásticamente la manera de ver el espacio y el tiempo. Un concepto de gran importancia introducido por esta teoría es el de *espacio-tiempo*, el cual considera el espacio y el tiempo de manera conjunta, siendo esta unión de 4 dimensiones, donde un punto (t_1, x_1, y_1, z_1) representa un evento. Junto con este nuevo concepto se introduce un cambio muy importante en la manera de ver la gravedad, pasando de ser una fuerza a un efecto meramente geométrico debido a la curvatura del espacio-tiempo provocada por los objetos masivos que están presentes en él. Traduciendo las palabras físico teórico John Wheeler:

“El espacio-tiempo le dice a la materia como moverse y la materia le dice al espacio-tiempo como curvarse”

Es gracias a la teoría de la Relatividad General, que es posible percatarse de la existencia de los agujeros negros. Al principio, se tenían dudas sobre si objetos tan exóticos realmente podían existir en la naturaleza, pero es por medio de observaciones que la

evidencia de su presencia en el universo es cada vez más segura. La observación más importantes es sin lugar a dudas la realizada por el *Event Horizon Telescope (EHT)*, una colaboración de talla internacional sin precedentes. Esta observación consiste en la fotografía de la sombra del agujero negro en el centro de la galaxia Messier 87 [EHT I 2019], presentada en el año 2019. Para llevar a cabo este hito histórico fue necesario un arduo trabajo en diferentes tareas con la misma importancia, la observación y coordinación entre los diferentes telescopios milimétricos [EHT II 2019], el procesamiento de los datos [EHT III 2019] y la construcción de modelos numéricos [EHT IV 2019], [EHT V 2019], [EHT VI 2019] con los cuales comparar las observaciones y así poder obtener conclusiones sobre las características del agujero negro observado. Es gracias a proyectos como este que, ahora más que nunca, el estudio de los agujeros negros tiene una gran relevancia, la cual es la principal motivación del presente trabajo. Por su parte, la mecánica de fluidos es el área de la física que se encarga del estudio de la dinámica de los fluidos. Esta tiene un gran abanico de aplicaciones, desde meteorología hasta física teórica pasando por aeronáutica entre otras. Para lograr adaptarse a las diferentes áreas, la mecánica de fluidos cuenta con diferentes enfoques y sistemas de referencia que permiten seleccionar la perspectiva que mejor se adapte a cada problema, además de la amplia variedad de ecuaciones que permiten describir diferentes fenómenos. Particularmente, las ecuaciones de Euler permiten escribir la evolución de un fluido por medio de la evolución de sus propiedades tales como densidad, velocidad, presión, etc., y son las indicadas para modelar la evolución del fluido que es acretaado.

A lo largo de este capítulo se desarrollan algunas de las herramientas matemáticas que son necesarias en los subsecuentes capítulos para llevar a cabo la evolución del fluido siendo acretaado por un agujero negro, así como la propia evolución del espacio-tiempo.

SECCIÓN 1.1

Enfoques y sistemas de referencia

En la física de fluidos existen 2 grandes enfoques para tratar la materia:

- Enfoque estadístico/microscópico: En este se consideran las interacciones entre las partículas del fluido analizado. Se trabaja con los promedios de la masa, energía y momento de cada partícula y se tendrá una sola función, llamada de distribución, que dominará este enfoque con la cual se reconstruirán las variables macroscópicas.
- Enfoque macroscópico: Se considera el fluido como la conjunción de elementos diferenciales de volumen. Es necesario que ΔV sea microscópicamente grande pero macroscópicamente pequeño. A diferencia del enfoque anterior las variables

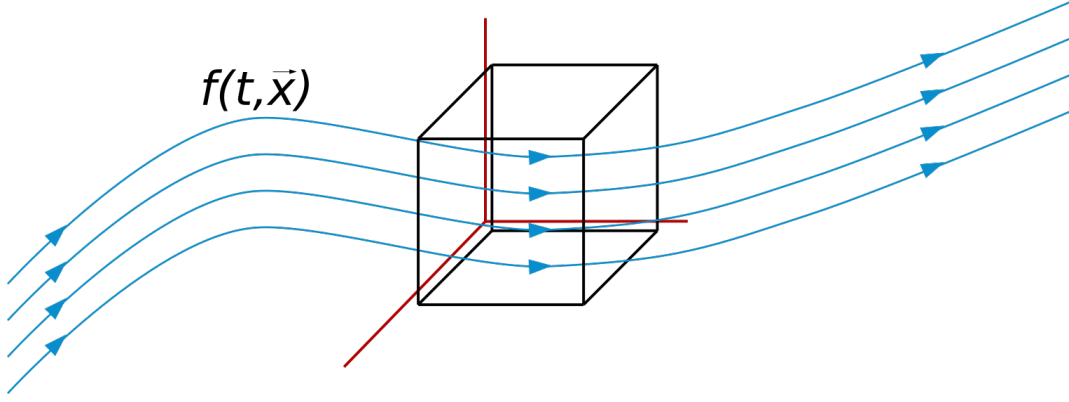


Figura 1.1: Representación del enfoque Euleriano, donde el volumen de control está fijo y el fluido pasa a través de este.

que describen el fluido son: la densidad, el campo de velocidades, la presión y la temperatura; teniendo que las variables anteriores dependen en general de la posición y el tiempo.

$$\rho = \rho(t, \vec{x}) \quad p = p(t, \vec{x}) \quad \vec{v} = \vec{v}(t, \vec{x}) \quad T = T(t, \vec{x}) \quad (1.1)$$

Además de los enfoques se tiene que es posible analizar la materia desde dos sistemas de referencia distintos:

■ Euleriano

- En este sistema de referencia los elementos de volumen se ven desde una posición fija, mientras estos se desplazan de manera relativa a esta posición. Esto se representa en la Figura 1.1.
- Las variables dependen de $t, \vec{x}$.
- En este sistema, el fluido pasa a través de un elemento de volumen en el espacio, llamado de control.
- El sistema de laboratorio sería el análogo a este caso.

■ Lagrangiano

- En este sistema, se analiza todo desde sistema comóvil con los elementos de volumen, tal como se ejemplifica en la Figura 1.2. El elemento de volumen se mueve y junto con él el sistema de referencia.
- Las variables se miden desde un sistema comóvil con los elementos de volumen.

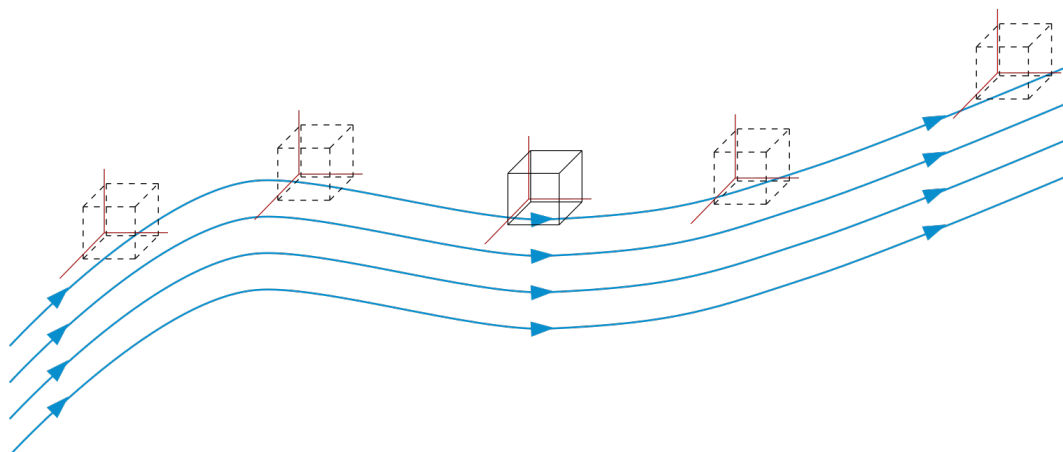


Figura 1.2: Representación del enfoque Lagrangiano, donde se ve como el sistema de referencia es comóvil respecto a un elemento de volumen.

- Un ejemplo sencillo de este caso es la manera en que se estudia el universo desde la Tierra, esta sería el sistema comóvil mientras se desplaza por el universo.

A lo largo de este trabajo se utiliza un enfoque macroscópico y un sistema de referencia Euleriano.

SECCIÓN 1.2

Tensores

La teoría de la Relatividad General esta escrita en una manera elegante, resumiendo un conjunto de ecuaciones donde intervienen conceptos geométricos de alto nivel, en una ecuación tensorial que a primera vista puede parecer simple, a pesar de no serlo. Esto se debe al uso de *tensores*, una poderosa herramienta matemática sobre la cual se sustenta esta teoría, por lo que se debe de profundizar más en ella para lograr entender la teoría.

Primero lo básico. Tomando como base la experiencia cotidiana, es fácil pensar en el espacio como $\mathbb{R}^3$, del mismo modo, se podría pensar que el espacio-tiempo de 4 dimensiones es como $\mathbb{R}^4$, sin embargo, ambas afirmaciones son erróneas y el error radica en generalizar la caracterización local que se puede hacer con $\mathbb{R}^n$. Esto es muy fácil de ver tomando como ejemplo la Tierra. Dado que es posible en una cierta vecindad localizar

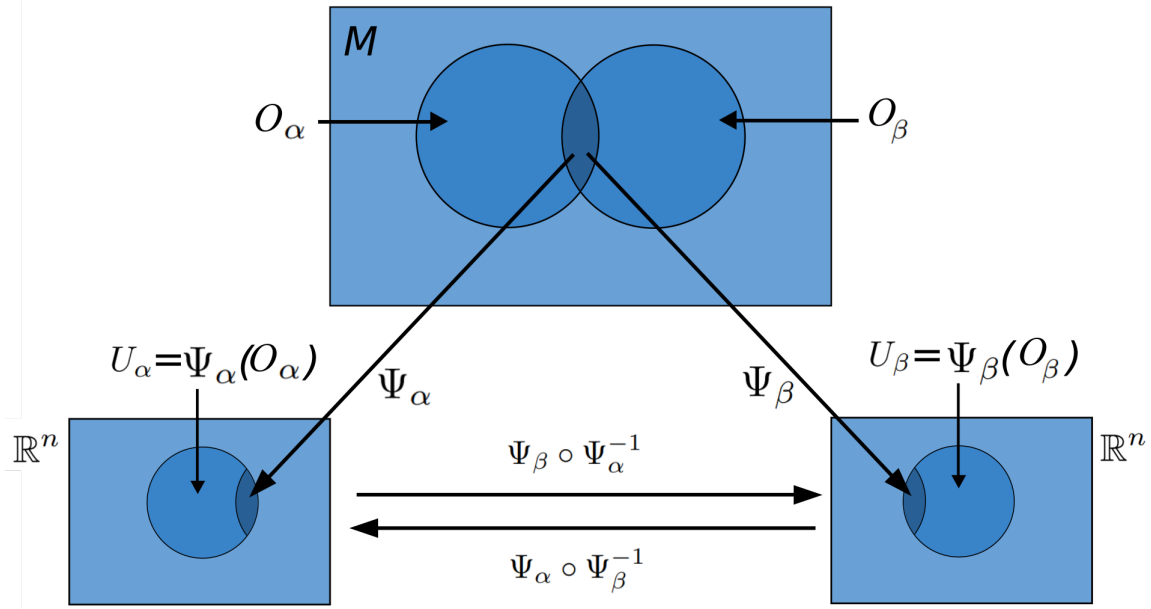


Figura 1.3: Representación de la aplicación de cartas Ψ_α, Ψ_β en la variedad diferenciable $\mathbf{M}$. El área sombreada en $\mathbf{M}$ que comparten los círculos de O_α, O_β representa $O_\alpha \cap O_\beta$, a la cual al aplicarle las cartas conduce a una región específica en $U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ y $U_\beta \subseteq \mathbb{R}^n$ respectivamente. La composición de funciones $\Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1}$ y $\Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1}$ permiten crear una función que va de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$, evitando usar los elementos de la variedad $\mathbf{M}$.

dos puntos cualesquiera sobre la superficie terrestre usando dos números, se afirma que la colección de todos estos puntos forman una relación uno a uno con $\mathbb{R}^2$, lo que lleva a pensar que la superficie de la tierra es como $\mathbb{R}^2$, resultado erróneo. De la misma manera, es incorrecto suponer que el espacio-tiempo es globalmente como $\mathbb{R}^4$, lo que se puede cumplir solamente localmente. Para no caer en este error se usa una *variedad diferenciable* para representar el espacio-tiempo, que permitirá considerar que la vecindad de cada punto como $\mathbb{R}^4$, pero globalmente podrá tener diferentes propiedades.

De manera formal, una variedad diferenciable n -dimensional de clase C^∞ [Wald 1984] es un conjunto $\mathbf{M}$ junto con una colección de subconjuntos (O_α) que satisfacen las siguientes propiedades:

- $\cup_\alpha O_\alpha = M$.
- $\forall \alpha \exists \Psi_\alpha \mid \Psi_\alpha : O_\alpha \mapsto U_\alpha$, donde U_α es subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y la función Ψ_α es llamada *carta* o *sistema de coordenadas*, siendo biyectiva de clase C^∞ .
- Si dados dos subconjuntos O_α, O_β se tiene que $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$ entonces se puede considerar la composición $\Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1}$ tal que:

$$\Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1} : \Psi_\alpha[O_\alpha \cap O_\beta] \subseteq U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \Psi_\beta[O_\alpha \cap O_\beta] \subseteq U_\beta \subseteq \mathbb{R}^n$$

O la composición $\Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1}$:

$$\Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1} : \Psi_\beta[O_\alpha \cap O_\beta] \subseteq U_\beta \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \Psi_\alpha[O_\alpha \cap O_\beta] \subseteq U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$$

En la Figura 1.3 se puede observar una representación visual de la relación entre la variedad diferenciable $\mathbf{M}$ y $\mathbb{R}^n$, así como la aplicación de las composiciones mencionadas.

Además de estas 3 condiciones es necesario que se cumpla que para el conjunto (O_α, Ψ_α) sea maximal, i.e., todos los sistemas de coordenadas con las condiciones anteriores estén incluidos, esto para prevenir la definición de una variedad nueva al únicamente agregar un nuevo sistema de coordenadas.

La variedad diferencial permite caracterizar al espacio-tiempo de la manera deseada, usando las cartas Ψ_α de manera local en los subconjuntos O_α , viendo a $\mathbf{M}$ como $\mathbb{R}^n$ pero no globalmente. Se considera entonces que el espacio-tiempo es una variedad diferenciable de 4 dimensiones. Lo anterior elimina las suposiciones sobre la estructura del espacio-tiempo, por lo que no es posible usar vectores de la misma manera en que se usaban anteriormente, dado que se necesitaba suponer que la estructura cumplía con las propiedades de un espacio vectorial de 4 dimensiones, algo que ya no se puede asegurar. A pesar de esto, es posible recuperar la estructura de espacio vectorial por medio del *espacio tangente* definido sobre cada punto de la variedad $\mathbf{M}$. Un vector tangente v sobre en el punto $p \in \mathbf{M}$ es un mapa $v : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ que es lineal y cumple la regla de Leibnitz, donde $\mathcal{F} = \{f \mid f : \mathbf{M} \mapsto \mathbb{R}\}$. El conjunto de todos los vectores tangentes al punto p forma el espacio tangente V_p . La Figura 1.4 se presenta una forma más intuitiva para visualizar el espacio tangente a un punto p sobre la variedad diferenciable $\mathbf{M}$.

Dado que V_p es una espacio vectorial, todo vector $V \in V_p$ se puede expresar como la combinación lineal de alguna base dada $\{e_\alpha\}$, esto es:

$$v = v^\alpha e_\alpha. \quad (1.2)$$

Es importante señalar el hecho de que dados dos puntos diferentes $p, q \in M$ sus correspondientes espacios tangentes V_p, V_q no pueden ser comparados, al menos no aún, no hay forma de decir si dos vectores $v \in V_p, w \in V_q$ son o no el mismo.

Ahora, considérese el conjunto $V_p^* = \{f \mid f : V_p \mapsto \mathbb{R}\}$ que cumple las condiciones para ser un espacio vectorial y f es una aplicación lineal, este conjunto se llama *espacio tangente dual* o *espacio cotangente* y sus elementos son llamados vectores duales o *1-formas*. Una base $\{e^\alpha\}$ para V_p^* cumplirá que dada una base $\{e_\alpha\}$ para V_p se tendrá que:

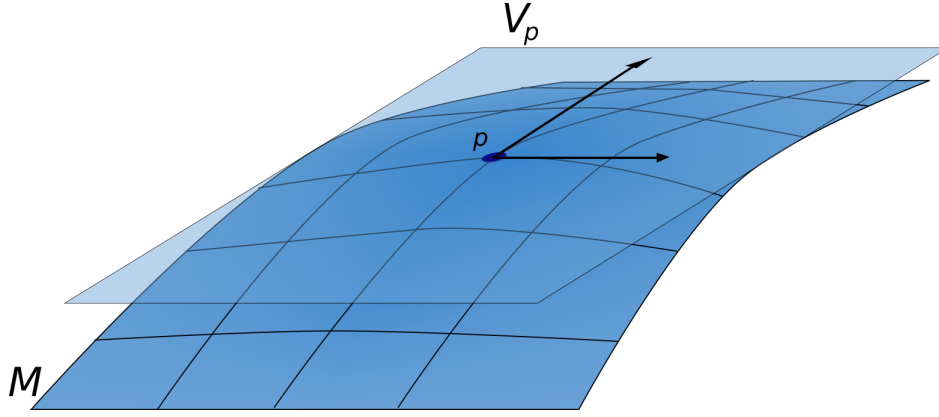


Figura 1.4: Representación del espacio tangente V_p a un punto p sobre la variedad $\mathbf{M}$. Aunque es útil y fácil imaginar de esta manera al espacio tangente, esta idea no es precisa, debido a que se basa en que $\mathbf{M}$ está dentro de un espacio ambiente $\mathbb{R}^n$, tal como una 2-esfera en $\mathbb{R}^3$, lo cual en general no se tiene.

$$e^\alpha e_\beta = \delta^\alpha_\beta, \quad (1.3)$$

teniendo que dado $w \in V_p^*$, este se escribe como:

$$w = w_\alpha e^\alpha. \quad (1.4)$$

De (1.2) y (1.4) se puede ver que las componentes de un vector tienen el índice arriba mientras que las componentes de una 1-forma lo tendrá abajo. Dado que se considera que el espacio-tiempo es de 4 dimensiones, los índices podrán tomar valores desde 0 a 3, siendo el índice 0 para componentes relacionadas con la dimensión temporal y los índices de 1 – 3 estarán relacionados con el espacio. Se establece que al usar letras del alfabeto griego como índices estas pueden tomar un valor desde 0 – 4, por otro lado si se usan letras del alfabeto latín, el índice solo tomará valores de 1 – 3.

Se puede tener el espacio doble dual V_p^{**} de V_p , donde los vectores de este espacio serán mapas lineales de V_p^* a $\mathbb{R}$, sin embargo, es posible hacer una correspondencia uno a uno entre estos dos espacios, entonces, el espacio doble dual se puede identificar con V_p por lo que basta con usar V_p en su lugar.

Si bien un vector es fácil de imaginar dada la familiaridad que se tiene con el concepto, surge la pregunta ¿Cómo se visualiza una 1-forma? Para esto se debe de dejar a un lado la idea de una flecha en el espacio que apunta en una dirección específica, como un vector, debido a que se estaría pensando justamente en vectores y un vector no puede transformar a otro vector en un número real sin la necesidad de definir el producto escalar. Las 1-formas se pueden visualizar como superficies, donde la distancia entre estas es un análogo a la magnitud, superficies muy pegadas indicarían una mayor magnitud

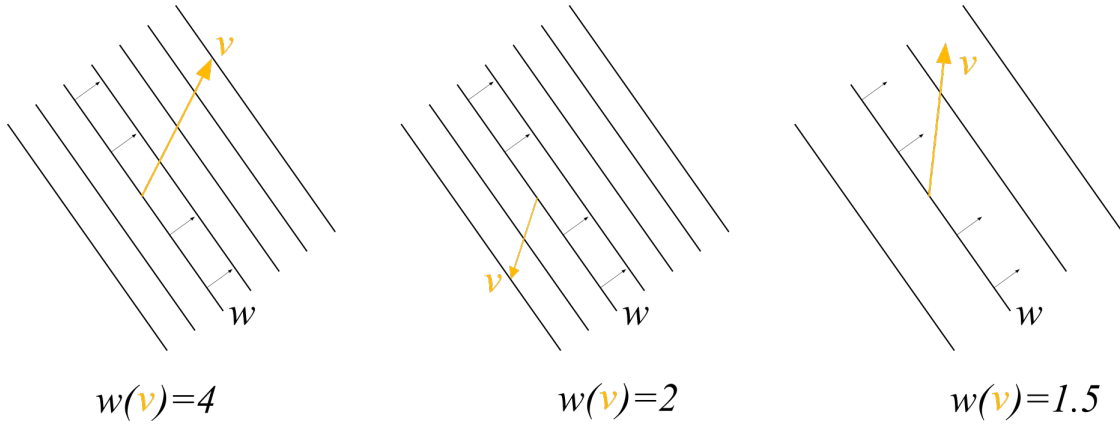


Figura 1.5: Representación de las 1-formas y la visualización de como actúan sobre los vectores. En la primer caso se tiene que el vector atraviesa 4 superficies en la dirección de crecimiento, a diferencia del segundo caso donde a pesar de tener la misma densidad de superficies, el vector va en el sentido contrario del crecimiento, lo que da un valor negativo; en el último caso la densidad de superficies es menor, por lo que el resultado de la acción de la 1-forma sobre el vector es mucho menor.

que superficies más separadas.

La operación de una 1-forma actuando sobre un vector indicaría el número de superficies que atraviesa el vector, pudiendo ser el valor negativo, esto debido a que así como en un mapa topográfico existen zonas en las que la altura aumenta o disminuye, igual se tendrá en las superficies de la 1-forma, según la dirección existirá un aumento o una disminución. Nótese que si la distancia entre las superficies es menor, i.e. la densidad de estas es mayor, se tendrá que un mismo vector atravesaría un mayor número que si la densidad fuera menor, es justo por esto que la “magnitud” es inversa a la separación de las superficies. Estas ideas se ejemplifican en la Figura 1.5. Ya que se tiene una idea más clara de qué es una 1-forma, es momento de generalizar estos conceptos a tensores.

Un tensor T de tipo (k, l) sobre V_p es una aplicación multilinear:

$$T : \underbrace{V_p^* \times \cdots \times V_p^*}_k \times \underbrace{V_p \times \cdots \times V_p}_l \mapsto \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

Esto significa que el tensor T “recibe” k vectores y l 1-formas y da como resultado un real y el hecho de ser multilinear significa que si se fijan todas las entradas menos una, el resultado será una aplicación lineal en esa entrada. El conjunto de todos los tensores de tipo (k, l) tiene la estructura de un espacio vectorial. Merece la pena profundizar discutir brevemente un ejemplo. Tómese el tensor de rango $(1, 0)$, este será por definición una aplicación lineal $T : V_p^* \mapsto \mathbb{R}$, un mapa de elementos de V_p^* en $\mathbb{R}$, por lo que $T \in V_p^{**}$ o lo que es lo mismo $T \in V_p$, i.e., T es un vector. Siguiendo este razonamiento,

un tensor $(0, 1)$ será una 1-forma pues así se cumplirá que $T : V_p \mapsto \mathbb{R}$. En general, un tensor de tipo (k, l) se compondrá de k vectores y l 1-formas.

Un tensor de gran importancia es el tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Este es simétrico y no degenerado, y será un tensor de tipo $(0, 2)$, i.e. al recibir dos vectores $\vec{v}, \vec{w}$ y regresará un número real. La métrica define el producto escalar entre dos vectores como sigue:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu, \quad (1.6)$$

si se tiene que $\vec{v} = \vec{w} = d\vec{x}$ se llega a:

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x} = ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.7)$$

que es la magnitud del vector al cuadrado. Es por esto que el tensor métrico será la “regla” con la que cual medir el espacio-tiempo.

Así como los vectores pueden ser vistos como una matriz columna, el tensor métrico puede ser visto como una matriz cuadrada de 4×4 y la matriz inversa correspondería a un tensor de tipo $(2, 0)$, el cual es $g^{\mu\nu}$, este en lugar de recibir dos vectores, necesita dos 1-formas para producir un número real.

El tensor métrico sirve también para relacionar vectores y 1-formas, $g_{\mu\nu}$ permite transformar las componentes de vectores en componentes de 1-formas, mientras que $g^{\mu\nu}$ permite hacer el proceso contrario, convertir las componentes de 1-formas a componentes de vectores. Tómese el primer caso. $g_{\mu\nu}$ es un tensor tipo $(0, 2)$ entonces debe recibir dos vectores para producir un número, por lo que el tensor esta compuesto de dos 1-formas. Si se fija una de las entradas del tensor con un vector v , i.e. $g(\cdot, v)$ o $g(v, \cdot)$, lo que se obtendrá es una 1-forma y resultará que gracias a las propiedades del tensor métrico se tendrá que $g(\cdot, v) \neq g(\cdot, w)$ si $v \neq w$. Análogamente se tendrá el proceso contrario para la inversa de la métrica, lo que significa que se tendrá un mapa uno a uno entre las componentes de vectores y las componentes de 1-formas. Retomando el vector v , se tendría que la equivalencia entre las componentes de este y las de su equivalente 1-forma por medio de la métrica sería:

$$\begin{aligned} v_\mu &= g_{\mu\nu} v^\nu, \\ v^\mu &= g^{\mu\nu} v_\nu. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Este proceso permitirá “subir” y “bajar” índices no solo para las componentes de 1-formas y vectores respectivamente, sino que será en general para tensores de cualquier tipo (n, m) .

Anteriormente se dijo que no había forma de comparar los espacio tangentes V_p, V_q en

dos puntos diferentes $p, q \in M$, sin embargo, esto fue antes de contar con la métrica, con la cual es posible cuantificar el cambio de la base de un espacio tangente sobre un punto $p \in M$ en una vecindad de este punto. A esta relación se le llama *conexión* y se ve expresada por medio de los *Símbolos de Christoffel*, los cuales se calculan de la siguiente manera:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{g^{\alpha\beta}}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \right), \quad (1.9)$$

donde se tendrá que $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}$.

A su vez los símbolos de Christoffel junto con la métrica permiten definir un operador para la derivada sobre la variedad M , o como es conocida comúnmente la *derivada covariante*. Este operador tomará campos tensoriales de tipo (k, l) y entrega otro campo tensorial de tipo $(k, l + 1)$. Para un tensor T^{μ} la derivada covariante se aplica como:

$$\nabla_{\mu} T^{\nu} = \frac{\partial T^{\nu}}{\partial x^{\mu}} + T^{\alpha} \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu}, \quad (1.10)$$

y se tiene que para su respectivo covector la derivada covariante es:

$$\nabla_{\mu} T_{\nu} = \frac{\partial T_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - T_{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}. \quad (1.11)$$

Y de manera general se tiene que para un tensor $T^{\nu_1 \dots \nu_k}_{\beta_1 \dots \beta_l}$ se tiene:

$$\nabla_{\mu} T^{\nu_1 \dots \nu_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} = \frac{\partial T^{\nu_1 \dots \nu_k}_{\beta_1 \dots \beta_l}}{\partial x^{\mu}} + \sum_i T^{\nu_1 \dots \alpha \dots \nu_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu_i} - \sum_i T^{\nu_1 \dots \nu_k}_{\beta_1 \dots \alpha \dots \beta_l} \Gamma_{\mu\beta_i}^{\alpha}. \quad (1.12)$$

La derivada contará cumplirá las siguientes propiedades [Wald 1984]:

- Linealidad.
- Regla de Leibnitz.
- Conmutabilidad con la contracción.
- Consistencia con la la idea de vector tangente.

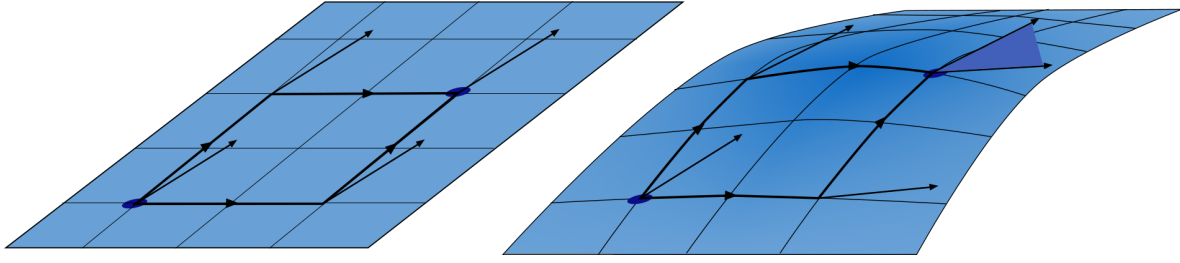


Figura 1.6: Representaciones del cambio de un vector al moverlo dentro dos diferentes variedades, una sin curvatura y otra con curvatura.

Cuando se ejecuta la derivada covariante de una función escalar se tiene que $\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi$. Otra forma de denotar la derivada covariante es como $\nabla_\mu T^\nu = T^\nu_{;\mu}$.

Una vez que se cuenta con el concepto de derivada, es posible usar esta herramienta para medir la curvatura de la variedad desde dentro de la misma, es decir la *curvatura intrínseca*. Esto se hace por medio del transporte paralelo de un vector a lo largo de diferentes trayectorias a un mismo punto, si el vector cambia según la trayectoria seguida, significa que existe una cierta curvatura, si el vector permanece igual, significa que se tiene una variedad plana. Esto se puede ver de una manera más clara en la Figura 1.6, donde se representa el transporte paralelo de un vector por diferentes trayectorias en dos variedades diferentes, una sin curvatura y otra con curvatura. Para capturar matemáticamente esta idea y tener una medida de esta curvatura en diferentes direcciones se usa el tensor de curvatura de Riemann $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$, un tensor de tipo $(1, 3)$ definido como [Misner, Thorne & Wheeler 1973]:

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\nu\beta}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\beta}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\beta}. \quad (1.13)$$

La contracción en el primer y tercer índice de este tensor da origen a otro tensor importante, el tensor de *curvatura de Ricci*:

$$R_{\beta\nu} = R^\alpha_{\beta\alpha\nu} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}. \quad (1.14)$$

Así mismo la contracción de este tensor conduce a un número importante el *escalar de Ricci*:

$$R = g^{\beta\nu} R_{\beta\nu}. \quad (1.15)$$

Los conceptos de cálculo tensorial desarrollados hasta este punto serán conceptos fundamentales en el desarrollo de los próximos capítulos.

Capítulo 2

Ecuaciones de la geometría del espacio-tiempo

Entre 1915 y 1916, Albert Einstein publicó su teoría general de la relatividad, esta generaliza la teoría especial de la relatividad, también publicada por Einstein en el año 1905. La teoría general de la relatividad introdujo nuevas ideas como el principio de equivalencia o el principio de covariancia, en particular introdujo el concepto de curvatura del espacio-tiempo, el cual cambiaría la forma en que se entendía la gravedad, ya que dicta que la geometría del espacio-tiempo se ve modificada por la materia-energía presente en él y es este cambio el que justamente se percibe como gravedad, teniendo que esta última no es una fuerza sino un efecto de la geometría. De manera mas general se puede decir que la materia define la geometría del espacio-tiempo y este define la manera en que la materia se moverá. Las ecuaciones que describen este fenómeno son las ecuaciones de campo de Einstein.

SECCIÓN 2.1

Ecuaciones de campo Einstein

Las ecuaciones de campo de Einstein relacionan la geometría del espacio-tiempo con la materia, como ya se mencionó anteriormente, esto por medio de la ecuación [Schutz 2009]:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

siendo $G_{\mu\nu}$ el tensor de curvatura de Einstein y $T_{\mu\nu}$ el tensor de energía-momento que describe el contenido del espacio-tiempo en la región estudiada, i.e. estas ecuaciones son de carácter local, no describen todo el espacio-tiempo. El primero de estos dos, el tensor de curvatura de Einstein, mide la curvatura del espacio-tiempo y está definido como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es el escalar de Ricci y $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico del espacio-tiempo. El tensor $G_{\mu\nu}$ tendrá 16 componentes, pero debido a que es un tensor simétrico se tienen únicamente 10 componentes independientes de las ecuaciones.

Es posible que surja la pregunta ¿Por qué $G_{\mu\nu}$ está definido de esa manera? Originalmente, Einstein había propuesto $R_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$, sin embargo se tenía un problema, la divergencia del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ no es cero, esto es $\nabla_\mu R_{\mu\nu} \neq 0$, lo que llevo a la necesidad de buscar un tensor diferente a $R_{\mu\nu}$. Para encontrar este nuevo tensor que cumpliera la condición de la divergencia nula se usan las identidades de Bianchi, las cuales son:

$$\nabla_\gamma R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_\beta R_{\mu\nu\gamma\alpha} + \nabla_\alpha R_{\mu\nu\beta\gamma} = 0, \quad (2.3)$$

donde contrayendo índices es posible llegar a:

$$\nabla_\mu (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) = 0. \quad (2.4)$$

Es justamente en base a esta identidad que se define el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ como en 2.2), por lo que se tiene que:

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0. \quad (2.5)$$

Por su parte, el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ representa la energía, momento y tensión mecánica de la materia, donde todas las fuentes no gravitacionales contribuyen al tensor. Este tensor es simétrico y es posible categorizar sus componentes de la siguiente manera [Schutz 2009]:

- T_{00} densidad de energía
- T_{0i} flujo de energía a través de una superficie perpendicular a e_i
- T_{i0} flujo de momento i
- T_{ij} flujo de momento i a través de una superficie perpendicular a e_j

Una propiedad importante de $T_{\mu\nu}$ será que:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.6)$$

La definición del tensor de energía-momento dependerá de la materia presente así como de sus propiedades. De manera particular resulta de mucha importancia para este trabajo el caso de un fluido perfecto, este es un fluido sin viscosidad ni transferencia de calor desde un sistema de referencia comóvil. El tensor de energía-momento para este caso será:

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 h u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

donde ρ_0 es la densidad de masa en reposo del fluido, p la presión, h la entalpía específica definida como $h = 1 + \varepsilon + p/\rho_0$, ε la energía interna y u^μ es la cuatriveLOCIDAD; estas son llamadas *variables primitivas*. Todas estas cantidades se definen sobre un elemento de fluido que es macroscópicamente pequeño pero microscópicamente grande.

Dado que es un concepto importante, cabe profundizar en la cuatriveLOCIDAD u^μ y la velocidad v^i , así como en la relación entre estas. La cuatriveLOCIDAD u^μ de un objeto que se mueve por el espacio-tiempo será el vector tangente a la línea de mundo del objeto [Schutz 2009], un análogo a la velocidad v^i comúnmente usada. Usando el tiempo propio τ como parámetro, lo anterior se expresa como:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{d\tau}. \quad (2.8)$$

Dado que el tiempo propio se mide con un reloj que se mueve con el sistema, se tendrá que $\vec{u} = (1, 0, 0, 0)$. ¿Qué pasa si se mide desde otro sistema de referencia donde el objeto está en movimiento? Gracias a la Relatividad Especial se sabe que el tiempo medido entre dos sucesos por dos observadores en sus propios marcos de referencia está relacionado por la expresión [Schutz 2009]:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Delta \tau,$$

siendo $\Delta \tau$ el tiempo medido por el observador donde los sucesos están en reposos y Δt el tiempo medido por el observador donde estos están en movimiento. El factor $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ se llama *factor de Lorentz*, se representará con la letra W y permitirá comparar el paso del tiempo en un sistema que se mueve relativo a otro. Por esto el factor W será la componente temporal de u^i , que usando la expresión anterior se expresa como:

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = W. \quad (2.9)$$

Usando regla de la cadena en la ecuación (2.8) y aplicando la relación anterior se sigue que:

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} = v^i u^0,$$

con lo que se llega a:

$$v^i = \frac{u^i}{u^0} = \frac{u^i}{W}, \quad (2.10)$$

llegando a obtener una relación entre la cuatriveLOCIDAD u^i y la velocidad v^i , la cual será de mucha utilidad más adelante.

SECCIÓN 2.2

Ecuaciones ADM en general

Las ecuaciones de Einstein describen la manera en que el espacio-tiempo cambia de acuerdo a su contenido de materia por medio de las ecuaciones (2.1), sin embargo, estas ecuaciones no separan el espacio y el tiempo, sino que tratan estos dos aspectos por igual desde un punto de vista meramente geométrico. Lo anterior no representa un problema para las soluciones analíticas, en cambio, las soluciones numéricas se benefician de una reescritura de las ecuaciones. La motivación de esta reescritura se debe a que la mayoría de los casos, no existe una solución analítica del problema, por lo que es necesario recurrir a un desarrollo numérico para encontrar la solución.

Una forma adecuada para reescribir las ecuaciones sería aquella donde fuera posible ver cómo el campo gravitacional evoluciona en el tiempo dadas ciertas condiciones iniciales, por ejemplo definir las componentes de $G_{\mu\nu}$ a un tiempo inicial t_0 y por medio de las ecuaciones (2.1) reescritas de manera adecuada, encontrar las nuevas componentes del tensor métrico en el tiempo $t_0 + \delta t$, que a su vez permitirían encontrar las componentes en el próximo paso de tiempo; repitiendo este proceso se tendría la evolución de $g_{\mu\nu}$ a través del tiempo. Esto es, expresar el problema como un problema de Cauchy o problema de valores iniciales.

Para lograr lo anterior, se sigue la descomposición 3+1 de la Relatividad General [Baumgarte & Shapiro 2010], en la cuál se separa la parte espacial y la temporal del espacio tiempo, teniendo 3 dimensiones espaciales y 1 temporal. Sin embargo, esta separación tiene un precio, ya que las ecuaciones de Einstein (2.1) pierden la propiedad de ser covariantes en el espacio-tiempo.

Considérese que el espacio-tiempo es una variedad M de dimensión 4, cuya métrica es $g_{\mu\nu}$. Tomando en cuenta lo anterior, se folia el espacio-tiempo con hipersuperficies Σ de tipo espacial, usando como parámetro el tiempo t para estas hipersuperficies, teniendo así, diferentes hipersuperficies Σ_t a cada momento.

Es importante aclarar que entre dos hipersuperficies Σ_t y $\Sigma_{t+\delta t}$, el lapso de tiempo medido por un observador que viaja en dirección normal a las hipersuperficies en su propio marco de referencia, es decir el tiempo propio τ , será:

$$d\tau = \alpha dt, \quad (2.11)$$

donde *el lapso* α es en general una función que depende de t y x^i .

Tomando en cuenta lo anterior, se puede definir una 1-forma n_μ que mida el tiempo de un observador desde su propio marco de referencia, donde el observador siempre es

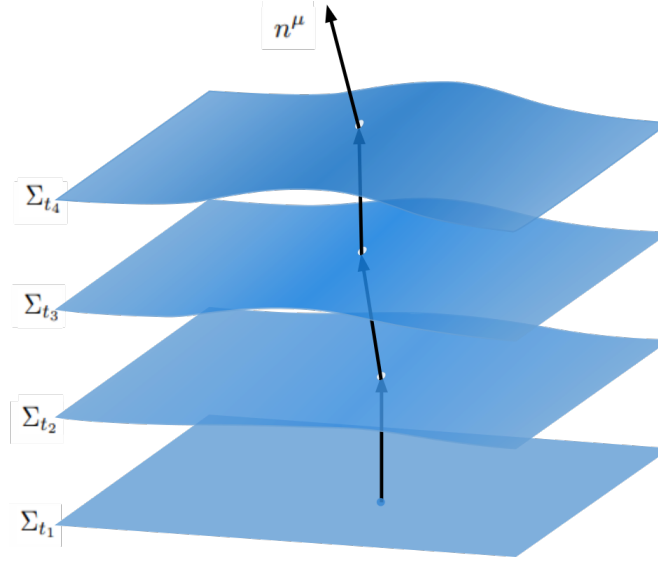


Figura 2.1: Hipersuperficies de 3 dimensiones espaciales etiquetadas según el parámetro t , donde el vector n^μ es perpendicular a estas hipersuperficies.

normal a las hipersuperficies Σ_t . Esta 1-forma será de tipo tiempo y estará normalizada, i.e. $n^\mu n_\mu = -1$, donde n^μ es el vector correspondiente a la 1-forma. Se tiene que para este caso n_μ, n^μ están definidos como:

$$\begin{aligned} n_\mu &= (-\alpha, 0), \\ n^\mu &= (\alpha^{-1}, -\alpha^{-1}\beta^i). \end{aligned} \tag{2.12}$$

La Figura 2.1 representa el vector normal n^μ a través de diferentes hipersuperficies Σ_t , haciendo hincapié en la propiedad de ser perpendicular localmente.

En la ecuación anterior se introduce el vector de corrimiento β^μ , el cual sirve para relacionar puntos x_i sobre diferentes hipersuperficies $\Sigma_t, \Sigma_{t+\delta t}$. Las componentes de este vector pueden depender de t y x^i y solo tendrán componentes espaciales β^i , esto es, $\beta^\mu = (0, \beta^i)$. Si alguna de las componentes β^i es diferente de 0 y se toma un punto en la hipersuperficie Σ_t , al seguir el vector n_μ hasta $\Sigma_{t+\delta t}$ el punto al que se llegaría en esta hipersuperficie no sería el mismo de donde se partió. El anterior se escribe de manera general con la transformación:

$$x_{t+\delta t}^i = x_t^i - \beta^i dt, \tag{2.13}$$

que relaciona la posición espacial de un punto x_i en la hipersuperficie Σ_t con la posición del mismo punto en la hipersuperficie $\Sigma_{t+\delta t}$. Esto se puede observar de mejor manera en

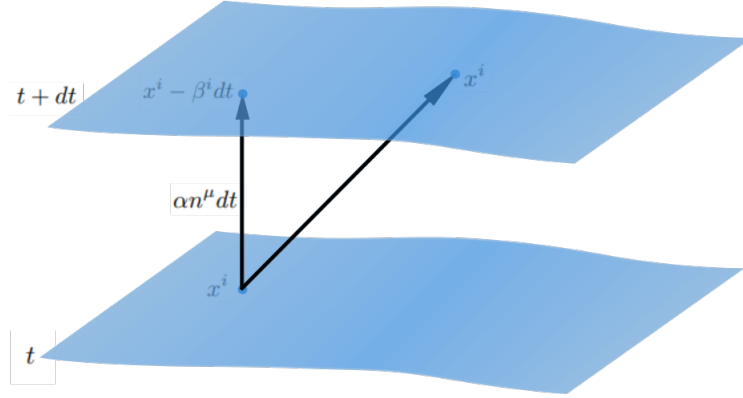


Figura 2.2: Movimiento de las coordenadas espaciales respecto al vector de normal n^μ entre dos hipersuperficies cercanas Σ_t y Σ_{t+dt} , lo cual es cuantificado por el vector de corrimiento β^μ .

la Figura 2.2, donde se representa el cambio de las coordenadas debido al movimiento entre estas.

Se tiene que la métrica $g_{\mu\nu}$ inducirá una métrica $\gamma_{\mu\nu}$ en las hipersuperficies Σ_t . Ésta métrica inducida será definida como:

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (2.14)$$

Es importante hacer notar que debido a que $\gamma_{\mu\nu}$ es puramente espacial, al contraerlo con la normal n^μ , el resultado será 0, i.e., $n^\mu \gamma_{\mu\nu} = 0$. La inversa de la métrica inducida se puede obtener de subir los índices por medio de la métrica $g^{\mu\nu}$ como:

$$\gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \gamma_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu. \quad (2.15)$$

Usando la definición (2.12) de la 1-forma n_μ , es fácil ver que:

$$\gamma_{ij} = g_{ij}. \quad (2.16)$$

Similarmente a la definición (2.14) de la métrica inducida, se define el operador de proyección, que será equivalente a $\gamma_{\mu\nu}$ con un índice arriba. Este operador permitirá proyectar tensores de 4 dimensiones en las hipersuperficies espaciales Σ . Este operador se define como:

$$P_\mu^\nu = \gamma_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu + n_\mu n^\nu. \quad (2.17)$$

Es posible despejar de la ecuación (2.14) una expresión de $g_{\mu\nu}$ en términos de $\gamma_{\mu\nu}$ que sería $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$, y usando (2.12) se pueden escribir las componentes de la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$ en forma matricial en términos de la 3-métrica γ_{ij} y las funciones de norma, la función de lapso α y el vector de corrimiento β^i :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta^i \beta_i & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

además, se pueden escribir de la misma forma las componentes de la métrica con los índices arriba $g^{\mu\nu}$, teniendo:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta_i/\alpha^2 \\ \beta_i/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j/\alpha^2 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Se tendrá que la expresión matricial de $g^{\mu\nu}$ será la inversa de la expresión matricial para $g_{\mu\nu}$.

En términos de la 3-métrica γ_{ij} , la función de lapso α y el vector de corrimiento β^i , se tiene que el elemento de línea para el espacio-tiempo es:

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.20)$$

Tomando en cuenta estas nuevas definiciones, las relaciones (2.9,2.10) de la cuadvirvelocidad u^μ y la velocidad v^i se ven modificadas, siendo estas ahora [Banyuls, Font, Ibáñez, Martí & Miralles 19

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\alpha \sqrt{1 - v^i v_i}} = \frac{W}{\alpha}, \\ v^i &= \frac{u^i}{\alpha u^0} + \frac{\beta^i}{\alpha} = \frac{u^i}{W} + \frac{\beta^i}{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Esta modificación se da debido a que ahora se considera el vector de corrimiento α^i y que el tiempo medido desde el sistema de referencia de la cuadvirvelocidad es α y no 1 como antes.

Curvatura extrínseca

Se introduce ahora el concepto de curvatura extrínseca, la cual permitirá cuantificar la deformación de las hipersuperficies de 3 dimensiones Σ_t vistas desde la variedad ambiente de 4 dimensiones. Lo anterior se logra por medio de medir el cambio del vector normal n_μ al hacer el transporte del mismo a lo largo las de diferentes direcciones sobre las hipersuperficies Σ_t ; dado que n_μ está normalizado, lo único que puede diferir entre estos transportes es la dirección en la cual el vector apunta, la curvatura extrínseca es lo que nos da, la información del cambio en las direcciones en las que apunta el vector al hacer el transporte. Considerando lo anterior, no es raro que la curvatura extrínseca se defina como la proyección del gradiente del vector normal, esto es:

$$K_{\mu\nu} = -P_\mu^\alpha \nabla_\alpha n_\nu, \quad (2.22)$$

que usando la definición del operador de proyección (2.17) se llega a:

$$K_{\mu\nu} = -\gamma_\mu^\alpha \nabla_\alpha n_\nu = -\nabla_\mu n_\nu - n_\mu n^\alpha \nabla_\alpha n_\nu.$$

Como se dijo anteriormente, la curvatura extrínseca mide el cambio de la normal en diferentes direcciones, por lo que el primer índice nos dirá la componente de la normal y el segundo la dirección en que se esta variando. Es importante mencionar que la curvatura extrínseca es por definición simétrica y puramente espacial.

Se pueden escribir las componentes de la curvatura extrínseca K_{ij} usando la definición de (2.12) para n_μ y limitándonos a las componentes espaciales, lo que nos lleva a:

$$K_{ij} = -\frac{1}{2\alpha} [\partial_t \gamma_{ij} - D_i \beta_j - D_j \beta_i], \quad (2.23)$$

donde D_i es la derivada covariante en las hipersuperficies Σ_t , o visto de otra manera, la derivada covariante asociada a la 3-métrica γ_{ij} . Es posible notar que en la expresión anterior hay una derivada temporal de la 3-métrica, dado que el objetivo es escribir nuestro problema como ecuaciones de evolución, es conveniente reescribir la expresión (2.23) como:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i, \quad (2.24)$$

esta es una ecuación de evolución para las componentes de la 3-métrica γ_{ij} . Nótese que solo intervienen en esta ecuación cantidades geométricas.

Constricciones

Se tiene una ecuación de evolución para la 3-métrica γ_{ij} , ahora se obtendrán constricciones derivadas de las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci usando además las ecuaciones de campo de Einstein (2.1), constricciones que deberán de ser cumplidas en todo momento y serán parte del conjunto de ecuaciones que conforman la separación 3+1 del espacio-tiempo.

La primera restricción que se debe cumplir surge de la ecuación de Gauss:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} + K_{\mu\alpha}K_{\nu\beta} - K_{\mu\beta}K_{\alpha\nu} = \gamma_{\mu}^{\gamma}\gamma_{\nu}^{\kappa}\gamma_{\alpha}^{\lambda}\gamma_{\beta}^{\delta}{}^{(4)}R_{\gamma\kappa\lambda\delta}, \quad (2.25)$$

donde ${}^{(4)}R_{\gamma\kappa\lambda\delta}$ es el tensor de Riemann del espacio-tiempo y $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ es el tensor de Riemann de la hipersuperficie Σ_t . Ahora, se contraen los cuatro índices μ, ν, α, β con lo que llega a:

$$R + K^2 - K^{\mu\nu}K_{\mu\nu} = \gamma^{\gamma\lambda}\gamma^{\kappa\delta}{}^{(4)}R_{\gamma\kappa\lambda\delta}, \quad (2.26)$$

siendo K la traza de la curvatura extrínseca $K = K_{\mu}^{\mu}$. Se desarrolla el término de la derecha usando la definición (2.15):

$$\begin{aligned} \gamma^{\gamma\lambda}\gamma^{\kappa\delta}{}^{(4)}R_{\gamma\kappa\lambda\delta} &= (g^{\gamma\lambda} + n^{\gamma}n^{\lambda})(g^{\kappa\delta} + n^{\kappa}n^{\delta}){}^{(4)}R_{\gamma\kappa\lambda\delta} \\ &= (g^{\gamma\lambda}g^{\kappa\delta} + g^{\gamma\lambda}n^{\kappa}n^{\delta} + g^{\kappa\delta}n^{\gamma}n^{\lambda} + n^{\gamma}n^{\lambda}n^{\kappa}n^{\delta}){}^{(4)}R_{\gamma\kappa\lambda\delta} \\ &= {}^{(4)}R + 2n^{\gamma}n^{\lambda}{}^{(4)}R_{\gamma\lambda} + \cancel{n^{\gamma}n^{\lambda}n^{\kappa}n^{\delta}{}^{(4)}R_{\gamma\kappa\lambda\delta}} \xrightarrow{0} \\ &= {}^{(4)}R + 2n^{\gamma}n^{\lambda}{}^{(4)}R_{\gamma\lambda}, \end{aligned}$$

el término eliminado se debe a la simetría del tensor de Riemann $R_{\gamma\kappa\lambda\delta}$; ahora, dado que $n^{\gamma}\gamma_{\gamma\lambda} = 0 \Rightarrow 2n^{\gamma}n^{\lambda}\gamma_{\gamma\lambda}{}^{(4)}R = 0$, entonces restaremos 0 a la expresión anterior, además factorizaremos el término $2n^{\gamma}n^{\lambda}$, todo esto como sigue:

$$\begin{aligned}
&= {}^{(4)}R + 2n^\gamma n^\lambda {}^{(4)}R_{\gamma\lambda} - n^\gamma n^\lambda \gamma_{\gamma\lambda} {}^{(4)}R \\
&= 2n^\gamma n^\lambda \left({}^{(4)}R_{\gamma\lambda} - \frac{1}{2} \gamma_{\gamma\lambda} {}^{(4)}R + \frac{1}{2} n_\gamma n_\lambda {}^{(4)}R \right) \\
&= 2n^\gamma n^\lambda \left({}^{(4)}R_{\gamma\lambda} - \frac{1}{2} (\gamma_{\gamma\lambda} - n_\gamma n_\lambda) {}^{(4)}R \right) \\
&= 2n^\gamma n^\lambda \left({}^{(4)}R_{\gamma\lambda} - \frac{1}{2} {}^{(4)}R g_{\gamma\lambda} \right) \\
\gamma^{\gamma\lambda} \gamma^{\kappa\delta} {}^{(4)}R_{\gamma\kappa\lambda\delta} &= 2n^\gamma n^\lambda G_{\gamma\lambda}.
\end{aligned}$$

Usando las ecuaciones de campo de Einstein (2.1) y tomando unidades geométricas, se tiene:

$$\gamma^{\gamma\lambda} \gamma^{\kappa\delta} {}^{(4)}R_{\gamma\kappa\lambda\delta} = 16\pi n^\gamma n^\lambda T_{\gamma\lambda},$$

más aún, se define la densidad de energía ρ_{ADM} como:

$$\rho_{ADM} = n^\gamma n^\lambda T_{\gamma\lambda}, \quad (2.27)$$

que será la densidad total de energía medida por un observador normal con cuadrivelocidad n^μ . Teniendo en cuenta los resultados anteriores y considerando que $K_{\mu\nu}$ es puramente espacial, podemos sustituir en la contracción de la ecuación de Gauss, con lo que se obtiene la primera ecuación:

$$R + K^2 - K^{ij} K_{ij} = 16\pi \rho_{ADM}, \quad (2.28)$$

llamada constricción Hamiltoniana.

Para la siguiente constricción usaremos la ecuación de Codazzi:

$$D_\nu K_{\mu\alpha} - D_\mu K_{\nu\alpha} = \gamma_\mu^\gamma \gamma_\nu^\kappa \gamma_\alpha^\lambda n^{\delta(4)} R_{\gamma\kappa\lambda\delta}. \quad (2.29)$$

Contrayendo los índices ν, α se tiene:

$$D_\nu K_\mu^\nu - D_\mu K = \gamma_\mu^\gamma \gamma^\kappa \gamma^\lambda n^{\delta(4)} R_{\gamma\kappa\lambda\delta},$$

desarrollando el lado derecho de la ecuación:

$$\begin{aligned}
 \gamma_\mu^\gamma \gamma^{\kappa\lambda} n^{\delta(4)} R_{\gamma\kappa\lambda\delta} &= -\gamma_\mu^\gamma (g^{\kappa\lambda} + n^\kappa n^\lambda) n^{\delta(4)} R_{\gamma\kappa\lambda\delta} \\
 &= -\gamma_\mu^\gamma g^{\kappa\lambda} n^{\delta(4)} R_{\gamma\kappa\lambda\delta} - \gamma_\mu^\gamma n^\kappa n^\lambda n^{\delta(4)} R_{\gamma\kappa\lambda\delta} \xrightarrow{0} \\
 &= -\gamma_\mu^\gamma n^{\delta(4)} R_{\gamma\delta},
 \end{aligned}$$

de manera análoga al desarrollo de la constricción Hamiltoniana, el término que se cancela en la penúltima línea se debe a la simetría del tensor de Riemann $R_{\gamma\kappa\lambda\delta}$; así mismo, se usa nuevamente que $n^\delta \gamma_{\mu\delta} = n^\delta \gamma_\mu^\gamma g_{\gamma\delta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} n^\delta \gamma_\mu^\gamma g_{\gamma\delta}^{(4)} R = 0$ sumando 0 al resultado anterior y factorizando:

$$\begin{aligned}
 &= -\gamma_\mu^\gamma n^{\delta(4)} R_{\gamma\delta} + \frac{1}{2} \gamma_\mu^\gamma n^\delta g_{\gamma\delta}^{(4)} R \\
 &= -\gamma_\mu^\gamma n^{\delta(4)} R_{\gamma\delta} - \frac{1}{2} {}^{(4)}R g_{\gamma\delta} \\
 &= -\gamma_\mu^\gamma n^\delta G_{\gamma\delta} \\
 \gamma_\mu^\gamma \gamma^{\kappa\lambda} n^{\delta(4)} R_{\gamma\kappa\lambda\delta} &= -8\pi \gamma_\mu^\gamma n^\delta T_{\gamma\delta}.
 \end{aligned}$$

Para este caso se define la densidad de momento S_μ como:

$$S_\mu = -\gamma_\mu^\gamma n^\delta T_{\gamma\delta}, \quad (2.30)$$

nuevamente medida por un observador normal n^μ . Sustituyendo en la contracción de la ecuación de Codazzi y considerando que $K_{\mu\nu}$ es puramente espacial obtenemos:

$$D_k K_i^k - D_i K = 8\pi S_i. \quad (2.31)$$

Esta es la constricción de momento. Es posible reescribir esta ecuación multiplicando por la 3-métrica γ^{ij} , obteniendo:

$$D_j (K^{ij} - \gamma^{ij} K) = 8\pi S^i. \quad (2.32)$$

Las constricciones (2.28,2.32) deben de satisfacerse para que la hipersuperficie Σ_t con 3-métrica γ_{ij} y curvatura extrínseca K_{ij} pueda estar en el espacio-tiempo con métrica $g_{\mu\nu}$.

Ecuación de evolución de $K_{\mu\nu}$

Ya se tiene una ecuación de evolución para $\gamma_{\mu\nu}$ y dos constricciones, ahora, es necesario obtener una ecuación de evolución para $K_{\mu\nu}$. Para obtener esta ecuación de evolución será necesario usar la ecuación de Ricci:

$$\mathcal{L}_n K_{\mu\nu} = n^\alpha n^\gamma \gamma_\mu^\kappa \gamma_\nu^\beta R_{\alpha\beta\gamma\kappa} - \frac{1}{\alpha} D_\mu D_\nu \alpha - K_\nu^\alpha K_{\alpha\mu}. \quad (2.33)$$

Aunque esta ecuación no nos dará directamente la ecuación que estamos buscando pero será necesaria en el proceso de obtención. Primero, usando la ecuación (2.15) despejamos $n^\alpha n^\gamma$ y sustituimos en la proyección del tensor de Riemann presente en el lado derecho de la ecuación:

$$n^\alpha n^\gamma \gamma_\mu^\kappa \gamma_\nu^\beta R_{\alpha\beta\gamma\kappa} = (\gamma^{\alpha\gamma} - g^{\alpha\gamma}) \gamma_\mu^\kappa \gamma_\nu^\beta R_{\alpha\beta\gamma\kappa} = \gamma^{\alpha\gamma} \gamma_\mu^\kappa \gamma_\nu^\beta R_{\alpha\beta\gamma\kappa} - \gamma_\mu^\kappa \gamma_\nu^\beta R_{\beta\kappa}.$$

el primer término resultante es la ecuación de Gauss (2.25) con dos índices contraídos, en cuanto al segundo término, aunque es posible expresar el tensor de Ricci en términos del tensor de energía-momento usando las ecuaciones de campo de Einstein (2.1) por medio de un simple despeje al usar la definición del tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$. Aún restaría el escalar de Ricci, para solucionar esto se hace una contracción de las ecuaciones de Einstein como sigue:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} &= 8\pi g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \\ g^{\mu\nu} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) &= 8\pi g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \\ R - 2R &= 8\pi T \\ R &= -4\pi T, \end{aligned}$$

entonces usando la ecuación (2.1) y usando este resultado, se tiene que:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu} - 4\pi g_{\mu\nu} T = 8\pi (T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} T),$$

reescribiendo la proyección del tensor de Riemann:

$$n^\alpha n^\gamma \gamma_\mu^\kappa \gamma_\nu^{\beta(4)} R_{\alpha\beta\gamma\kappa} = R_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - K_{\mu\alpha} K_\nu^\alpha - 8\pi \gamma_\mu^\kappa \gamma_\nu^\beta (T_{\kappa\beta} - \frac{1}{2} g_{\kappa\beta} T),$$

expandiendo el último término y expresando la métrica $g_{\mu\nu}$ en términos de la 3-métrica $\gamma_{\mu\nu}$:

$$\gamma_\mu^\kappa \gamma_\nu^\beta g_{\kappa\beta} T = \gamma_\mu^\kappa \gamma_\nu^\beta g_{\kappa\beta} g^{\alpha\delta} T_{\alpha\delta} = \gamma_{\mu\nu} (\gamma^{\alpha\delta} - n^\alpha n^\delta) T_{\alpha\delta}.$$

Se define ahora la tensión espacial y su traza:

$$S_{\mu\nu} = \gamma_\mu^\alpha \gamma_\nu^\beta T_{\alpha\beta}, \quad S = S_\alpha^\alpha, \quad (2.34)$$

usando esta nueva definición, la definición de densidad de energía (2.27) y los resultados anteriores, reescribimos la ecuación de Ricci como:

$$\mathcal{L}_n K_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - 2K_{\mu\alpha} K_\nu^\alpha - 8\pi (S_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} (S - \rho_{adm})) - \frac{1}{\alpha} D_\mu D_\nu \alpha. \quad (2.35)$$

Antes de seguir es necesario considerar que $t^\mu \neq n^\nu$, pues como se dijo anteriormente, se está considerando un vector de corrimiento, por lo que n^μ conecta diferentes puntos de las superficies Σ_t y $\Sigma_{t+\delta t}$ y se quiere que t^μ conecte los mismos puntos, por lo que se establece:

$$t^\mu = \alpha n^\mu + \beta^\mu. \quad (2.36)$$

De esta manera se tiene que t^μ conectará los mismos puntos con las mismas coordenadas espaciales.

Teniendo en cuenta lo anterior, se busca obtener la ecuación de evolución de la curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$ para lo cual se hace su derivada de Lie a lo largo de t como sigue:

$$\mathcal{L}_t K_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\alpha n + \beta} K_{\mu\nu} = \alpha \mathcal{L}_n K_{\mu\nu} + \mathcal{L}_\beta K_{\mu\nu}.$$

El segundo término es exactamente el lado izquierdo de la ecuación de Ricci (2.35) por lo que con el desarrollo realizado anteriormente, sustituyendo se llega a:

$$\mathcal{L}_t K_{\mu\nu} = \alpha(R_{\mu\nu} + K K_{\mu\nu} - 2K_{\mu\alpha} K_{\nu}^{\alpha}) - 8\pi\alpha(S_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}(S - \rho_{adm})) - D_{\mu}D_{\nu}\alpha + \mathcal{L}_{\beta}K_{\mu\nu}.$$

Desarrollando la expresión $\mathcal{L}_t K_{\mu\nu}$ se tiene:

$$\mathcal{L}_t K_{\mu\nu} = t^{\alpha} \nabla_{\alpha} K_{\mu\nu} + k_{\mu\alpha} \nabla_{\nu} t^{\alpha} + k_{\alpha\nu} \nabla_{\mu} t^{\alpha},$$

usando la ecuación (2.36), la definición (2.12) de n^{μ} es fácil y el hecho de que $\beta^{\mu} = (0, \beta^i)$ es fácil ver que:

$$t^{\mu} = (1, 0, 0, 0). \quad (2.37)$$

Dado esto se tendrá que las dos derivadas covariantes $\nabla_{\nu} t^{\alpha}, \nabla_{\mu} t^{\alpha}$ serán 0 en la última expresión para $\mathcal{L}_t K_{\mu\nu}$; en cuanto al primer término, si se desarrolla la sumatoria, el único término que no se anula es el correspondiente al subíndice $\alpha = 0$ por lo que se obtiene:

$$\mathcal{L}_t K_{\mu\nu} = \partial_t K_{\mu\nu}.$$

Usando este resultado, expandiendo la derivada de Lie $\mathcal{L}_{\beta} K_{\mu\nu}$ y recordando que $K_{\mu\nu}$ es puramente espacial, podemos reescribir:

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} = & \alpha(R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k) - D_i D_j \alpha - 8\pi\alpha(S_{ij} - \frac{1}{2}\gamma_{ij}(S - \rho_{adm})) \\ & + \beta^k D_k K_{ij} + k_{ik} D_j \beta^k + k_{kj} D_i \beta^k, \end{aligned} \quad (2.38)$$

esta es la ecuación de evolución para las componentes de la curvatura extrínseca K_{ij} .

Las ecuaciones ADM

Se ha desarrollado todo lo necesario para expresar las ecuaciones de campo de Einstein en un conjunto de ecuaciones que describan el espacio-tiempo en 3 dimensiones espaciales y 1 temporal separadamente, de tal manera que se tengan ecuaciones de evolución

adecuadas para formular un problema de Cauchy. Este conjunto son las *ecuaciones ADM* (*Arnowitt-Deser-Misner*) y está conformado por [Baumgarte & Shapiro 2010]:

- La constricción de momento:

$$D_j (K^{ij} - \gamma^{ij} K) = 8\pi S^i.$$

- La constricción de Hamiltoniana:

$$R + K^2 - K^{ij} K_{ij} = 16\pi \rho_{ADM}.$$

- La ecuación de evolución para la 3-métrica γ_{ij} inducida sobre las hipersuperficies Σ :

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i.$$

- Y la ecuación de evolución para la curvatura extrínseca K_{ij} :

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} = & \alpha (R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k) - D_i D_j \alpha - 8\pi \alpha (S_{ij} - \frac{1}{2} \gamma_{ij} (S - \rho_{adm})) \\ & + \beta^k D_k K_{ij} + k_{ik} D_j \beta^k + k_{kj} D_i \beta^k. \end{aligned}$$

donde las variables asociadas a la materia anteriormente definidas son:

$$\rho_{adm} = n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}, \quad S^i = -\gamma^{ij} n^\alpha T_{\alpha j}, \quad S_{ij} = \gamma_i^\alpha \gamma_j^\beta T_{\alpha\beta}, \quad S = \gamma^{ij} S_{ij}.$$

Es con este conjunto de ecuaciones que se pueden escribir las ecuaciones de Einstein como un problema de Cauchy donde las condiciones iniciales serán componentes de la 3-métrica γ_{ij} y componentes de la curvatura extrínseca K_{ij} , que deben de ser consistentes con las 4 constricciones que contienen la información de los campos de materia-energía en el espacio-tiempo. Como se mencionó anteriormente, las ecuaciones de campo de Einstein (2.1) son un total de 10 ecuaciones independientes, sin embargo, estas ecuaciones contienen términos de segundo orden por lo que al escribirlas como ecuaciones de primer orden serían un total de 20 ecuaciones, las cuales están reflejadas en las ecuaciones ADM: 6 ecuaciones para la evolución de las componentes de γ_{ij} , 6 ecuaciones para la evolución de las componentes de K_{ij} , 3 ecuaciones en la constricción de momento, 1 en la constricción Hamiltoniana y 4 ecuaciones que fijan la norma, conformadas por 1 ecuación para la función de lapso α y las 3 componentes del vector de corrimiento β^i .

SECCIÓN 2.3**Ecuaciones ADM para un espacio-tiempo con simetría esférica**

En la sección anterior se obtuvieron las ecuaciones ADM para un espacio-tiempo en general sin simetrías y en coordenadas arbitrarias, las cuales permiten separar el espacio tiempo en 3 dimensiones espaciales y 1 temporal, además de ver las ecuaciones de Einstein como un problema de Cauchy, esta sección se centrará en expresar las mismas ecuaciones para el caso de un espacio-tiempo con simetría esférica y descrito en coordenadas esféricas.

Primero que nada, es importante señalar que debido a la simetría que se esta considerando, esférica, se tendrá que la única componente espacial diferente de 0 del vector de corrimiento es la componente radial r , i.e., el vector sería:

$$\beta^i = (\beta^r, 0, 0), \quad (2.39)$$

y la correspondiente componente β_r se obtiene usando la 3-métrica como sigue:

$$\begin{aligned} \beta_r &= \gamma_{ri}\beta^i = \gamma_{ri}\beta^i\delta_{ir} = \gamma_{rr}\beta^r \\ \Rightarrow \beta_r &= \gamma_{rr}\beta^r. \end{aligned}$$

Asimismo, se tendrá que la velocidad tendrá únicamente la componente radial, i.e. $v^i = (v^r, 0, 0)$. La 3-métrica en coordenadas esféricas más general es de la forma $\gamma_{ij} = \text{diag}(\gamma_{rr}, \gamma_{\theta\theta}, \gamma_{\phi\phi})$, teniendo que $\gamma_{\phi\phi} = \gamma_{\theta\theta} \sin^2 \theta$, además es posible expresar la inversa γ^{ij} en términos de las componentes de γ_{ij} como $\gamma^{ij} = \text{diag}(1/\gamma_{rr}, 1/\gamma_{\theta\theta}, 1/\gamma_{\phi\phi})$. Con todo esto en mente y usando (2.18) el tensor métrico del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$ se puede expresar como:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_r\beta^r & \beta_r & 0 & 0 \\ \beta_r & \gamma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{\phi\phi} \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

y usando (2.19) se puede escribir la inversa de la 4-métrica del espacio-tiempo como:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha & \beta^r/\alpha^2 & 0 & 0 \\ \beta^r/\alpha^2 & \gamma^{rr} - (\beta^r)^2/\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\alpha & \beta^r/\alpha^2 & 0 & 0 \\ \beta^r/\alpha^2 & 1/\gamma_{rr} - (\beta^r)^2/\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\gamma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\gamma_{\phi\phi} \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Debido a la simetría esférica, las componentes de la 3-métrica, el vector de corrimiento y la función de lapso solo dependerán de las variables t, r , por lo que se tendrá $\beta_r = \beta_r(t, r)$, $\alpha = \alpha(t, r)$, $\gamma_{rr} = \gamma_{rr}(t, r)$, $\gamma_{\theta\theta} = \gamma_{\theta\theta}(t, r)$ y $\gamma_{\phi\phi} = \sin^2 \gamma_{\theta\theta}(t, r)$. Considerando lo anterior, el elemento de línea para este caso se escribe como:

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_r \beta^r) dt^2 + 2\beta_r dt dr + \gamma_{rr} dr^2 + \gamma_{\theta\theta} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.42)$$

En cuanto a las componentes de la 3-métrica, estas están dadas como $\alpha_{ij} = g_{ij}$.

Es necesario calcular las componentes de la curvatura extrínseca K_{ij} , para esto se reescribe la expresión (2.23) desarrollando las derivadas covariantes y los símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned} K_{ij} &= -\frac{1}{2\alpha} [\partial_t \gamma_{ij} - (\partial_i \beta_j - \Gamma_{ij}^k \beta_k) - (\partial_j \beta_i - \Gamma_{ji}^k \beta_k)] \\ &= \frac{1}{2\alpha} [-\partial_t \gamma_{ij} + (\partial_i (\gamma_{jk} \beta^k) + \partial_j (\gamma_{ik} \beta^k) - 2\Gamma_{ij}^k \gamma_{kl} \beta^l \delta_{lr}) \delta_{kr}] \\ &= \frac{1}{2\alpha} [-\partial_t \gamma_{ij} + \gamma_{jr} \partial_i \beta^r + \gamma_{ir} \partial_j \beta^r + \beta^r (\partial_i \gamma_{jr} + \partial_j \gamma_{ir}) - 2\Gamma_{ij}^r \gamma_{rr} \beta^r]. \end{aligned}$$

Serán necesarios los símbolos de Christoffel definidos como en la ecuación (1.9), sin embargo, en lugar de usar la métrica $g_{\mu\nu}$ es necesario usar la 3-métrica γ_{ij} ya que los símbolos que se necesitan son debido a la derivada covariante sobre la hipersuperficie. A continuación se presentan aquellos símbolos de Christoffel distintos de 0 asociados a la 3-métrica γ_{ij} (2.40):

$$\begin{aligned}
\Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} \frac{\partial_r \gamma_{rr}}{\gamma_{rr}}, \\
\Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{1}{2} \frac{\partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}}, \\
\Gamma_{\phi\phi}^r &= -\frac{1}{2} \frac{\sin^2 \theta \partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}}, \\
\Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{2} \frac{\partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}}, \\
\Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, \\
\Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{2} \frac{\partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}}, \\
\Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \cot \theta.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Tomando en cuenta estos símbolos se tiene que las componentes no nulas de la curvatura extrínsecas son:

$$\begin{aligned}
K_{rr} &= \frac{1}{\alpha} \left[-\frac{\partial_t \gamma_{rr}}{2} + \partial_r (\gamma_{rr} \beta^r) - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial_r \gamma_{rr}}{\gamma_{rr}} \right) \gamma_{rr} \beta^r \right] \\
&= \frac{1}{\alpha} \left[-\frac{\dot{\gamma}_{rr}}{2} + (\gamma_{rr} \beta^r)' - \frac{1}{2} \beta^r \gamma_{rr}' \right], \\
K_{\theta\theta} &= \frac{1}{\alpha} \left[-\frac{\partial_t \gamma_{\theta\theta}}{2} - \left(-\frac{\partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}} \right) \gamma_{rr} \beta^r \right] \\
&= \frac{1}{\alpha} \left[-\frac{\dot{\gamma}_{\theta\theta}}{2} + \frac{1}{2} \beta^r \gamma_{\theta\theta}' \right], \\
K_{\phi\phi} &= \frac{1}{\alpha} \left[-\frac{\partial_t (\sin^2 \theta \gamma_{\theta\theta})}{2} - \left(-\frac{1}{2} \frac{\sin^2 \theta \partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}} \right) \gamma_{rr} \beta^r \right] \\
&= \frac{\sin^2 \theta}{\alpha} \left[-\frac{\dot{\gamma}_{\theta\theta}}{2} + \frac{1}{2} \beta^r \gamma_{\theta\theta}' \right] \\
&= \sin^2 \theta K_{\theta\theta},
\end{aligned}$$

donde el punto simboliza la derivada temporal y los primados una derivada respecto a r . No es necesario escribir las ecuaciones para $\gamma_{\phi\phi}$ o $K_{\phi\phi}$ pues estas se pueden obtener a partir de las relaciones $\gamma_{\phi\phi} = \sin^2 \theta \gamma_{\theta\theta}$ y $K_{\phi\phi} = \sin^2 \theta K_{\theta\theta}$. Para obtener las componentes K^{ij} se usa la 3-métrica como $K^{ij} = \gamma^{ik} \gamma^{jl} K_{kl}$, lo que lleva a $K^{ij} = \text{diag}(K_{rr}/\gamma_{rr}^2, K_{\theta\theta}/\gamma_{\theta\theta}^2, K^{\theta\theta} \sin^4(\theta))$. Ahora que se conocen las componentes de la curvatura extrínseca es posible expresar en términos de estas componentes las ecuaciones ADM.

Además de lo anterior, en las constricciones hay términos que contienen la traza o combinaciones cuadráticas de la curvatura extrínseca que se necesitan en los desarrollos que siguen; tales expresiones son $K, K_{ij}K^{ij}$ y se tiene que estas son:

$$\begin{aligned} K &= \gamma^{ij}K_{ij} = \frac{K_{rr}}{\gamma_{rr}} + 2\frac{K_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}}, \\ K_{ij}K^{ij} &= K_{ij}\gamma^{ik}\gamma^{jl}K_{kl} = \frac{K_{rr}^2}{\gamma_{rr}^2} + 2\frac{K_{\theta\theta}^2}{\gamma_{\theta\theta}^2}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Primero se desarrollará la restricción de momento (2.32), esta consiste de una ecuación a cumplir para cada una de las 3 componentes de S^i , sin embargo, nótese que debido a que únicamente $\beta^r \neq 0$ en base a la definición (2.12) se tiene $n^\mu = (\alpha^{-1}, -\alpha^{-1}\beta^r, 0, 0)$ y usando la definición (2.30) se puede escribir $S^i = -\gamma^{ij}(n^0T_{0j} + n^rT_{rj})$, además si se considera que $v^i = (v^r, 0, 0)$, es decir flujo radial, entonces solo existirá flujo de energía y de momento en esta componente por lo que $S^i = -\gamma^{ir}(n^0T_{0r} + n^rT_{rr})$ de donde se es posible ver que la única componente distinta de cero será S^r .

Se sigue con la derivada covariante en la restricción como $D_j(K^{rj} - \gamma^{rj}K) = D_jK^{rj} - D_j(\gamma^{rj}K)$ y desarrollando cada uno de los términos se tiene:

$$\begin{aligned} D_jK^{rj} &= D_rK^{rr} + D_\theta K^{r\theta} + D_\phi K^{r\phi} \\ &= \partial_r \left(\frac{K_{rr}}{\gamma_{rr}^2} \right) + 2\frac{K_{rr}}{\gamma_{rr}^2}\Gamma_{rr}^r + \frac{K_{rr}}{\gamma_{rr}^2}(\Gamma_{r\theta}^\theta + \Gamma_{r\phi}^\phi) + \frac{K_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}^2}\Gamma_{\theta\theta}^r + \frac{K_{\phi\phi}}{\gamma_{\phi\phi}^2}\Gamma_{\phi\phi}^r \\ &= \frac{\partial_r K_{rr}}{\gamma_{rr}^2} - \frac{K_{rr}\partial_r \gamma_{rr}}{\gamma_{rr}^3} + \frac{K_{rr}\partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}^2\gamma_{\theta\theta}} - \frac{K_{\theta\theta}\partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}^2\gamma_{rr}}, \\ D_j(\gamma^{rj}K) &= \gamma^{rj}D_jK = \frac{\partial_r(\gamma^{ij}K_{ij})}{\gamma_{rr}} \\ &= \frac{\partial_r K_{rr}}{\gamma_{rr}^2} - \frac{K_{rr}\partial_r \gamma_{rr}}{\gamma_{rr}^3} + 2\frac{\partial_r K_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta}} - 2\frac{K_{\theta\theta}\partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta}^2}. \end{aligned}$$

Usando los resultados anteriores y despejando el lado derecho de la restricción, esta se escribe como:

$$\mathcal{M}^r := -2\frac{K'_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta}} + \frac{K_{\theta\theta}\gamma'_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta}^2} + \frac{K_{rr}\gamma'_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}^2\gamma_{\theta\theta}} - 8\pi S^r = 0. \quad (2.45)$$

Ahora se sigue con la restricción Hamiltoniana (2.28), para la cual será necesario R en términos de la curvatura extrínseca y de la 3-métrica. Para lo anterior, será necesario

usar el tensor de Ricci R_{ij} definido como (1.14), con la diferencia de que será definido sobre la hipersuperficie; se tendrá que el tensor cumple $R_{ij} = \text{diag}(R_{rr}, R_{\theta\theta}, \sin^2 \theta R_{\theta\theta})$ cuyas componentes son:

$$\begin{aligned} R_{rr} &= -\frac{\partial_{rr}\gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} + \frac{1}{2} \frac{(\partial_r\gamma_{\theta\theta})^2}{\gamma_{\theta\theta}^2} + \frac{1}{2} \frac{(\partial_r\gamma_{rr})(\partial_r\gamma_{\theta\theta})}{\gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta}}, \\ R_{\theta\theta} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial_{rr}\gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}} + 1 + \frac{1}{4} \frac{\partial_r\gamma_{rr}\partial_r\gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}^2}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

con estas componentes es posible calcular la traza del tensor, obteniendo:

$$R = \gamma^{ij} R_{ij} = -2 \frac{\partial_{rr}\gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta}} + \frac{1}{2} \frac{(\partial_r\gamma_{\theta\theta})^2}{\gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta}^2} + \frac{\partial_r\gamma_{rr}\partial_r\gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}^2\gamma_{\theta\theta}} + \frac{2}{\gamma_{\theta\theta}}. \quad (2.47)$$

Usando este resultado junto con la ecuación (2.44) y despejando el lado derecho de la expresión original, es posible expresar la constricción Hamiltoniana como:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} := & 2 \left(\frac{K_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} \right)^2 + 4 \frac{K_{rr}K_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta}} + \frac{\gamma'_{rr}\gamma'_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}^2\gamma_{\theta\theta}} + \frac{2}{\gamma_{\theta\theta}} \\ & + \frac{\gamma_{\theta\theta}^{\prime 2}}{2\gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta}^2} - 2 \frac{\gamma_{\theta\theta}''}{\gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta}} - 16\pi\rho_{ADM} = 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Ahora se sigue con las ecuaciones de evolución para las componentes de γ_{ij} y K_{ij} . Se tiene que la ecuación de evolución para la 3-métrica está dada por la ecuación (2.24), donde, expresando en términos de β^r y al desarrollar las derivadas covariantes se reescribir como:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + \partial_i(\gamma_{jr}\beta^r) + \partial_j(\gamma_{ir}\beta^r) - 2\Gamma_{ij}^r \gamma_{rr}\beta^r,$$

que desarrollando para las componentes permite calcular las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\partial_t \gamma_{rr} &= -2\alpha K_{rr} + 2\partial_r(\gamma_{rr}\beta^r) - 2\left(\frac{1}{2}\frac{\partial_r \gamma_{rr}}{\gamma_{rr}}\right) \gamma_{rr}\beta^r \\
&= -2\alpha K_{rr} + 2\partial_r(\gamma_{rr}\beta^r) - \beta^r \partial_r \gamma_{rr} \\
&= -2\alpha K_{rr} + 2\gamma_{rr}\partial_r \beta^r + \beta^r \partial_r \gamma_{rr}, \\
\partial_t \gamma_{\theta\theta} &= -2\alpha K_{\theta\theta} + 2\partial_\theta(\gamma_{\theta\theta}\beta^\theta) - 2\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}}\right) \gamma_{rr}\beta^r \\
&= -2\alpha K_{\theta\theta} + \beta^r \partial_r \gamma_{\theta\theta}.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Finalmente, se expresará la ecuación de evolución para la curvatura extrínseca (2.38) para el caso con simetría esférica. Para construir esta expresión, primero nótese el término $D_i D_j \alpha$, este es la doble derivada covariante de α sobre la hipersuperficie, esto es:

$$\begin{aligned}
D_i D_j \alpha &= D_i(\partial_j \alpha) = \partial_i \partial_j \alpha - \Gamma_{ij}^k \partial_k \alpha \delta_k r \\
&= \partial_i \partial_j \alpha - \Gamma_{ij}^r \partial_r \alpha,
\end{aligned}$$

en el caso de las ecuaciones de evolución de $K_{rr}, K_{\theta\theta}$, considerando los símbolos de Christoffel (2.43), se tiene que la doble derivada covariante queda como:

$$\begin{aligned}
D_r D_r \alpha &= \partial_{rr} \alpha - \Gamma_{rr}^r \partial_r \alpha = \partial_{rr} \alpha - \frac{1}{2} \frac{\partial_r \gamma_{rr}}{\gamma_{rr}} \partial_r \alpha, \\
D_\theta D_\theta \alpha &= -\Gamma_{\theta\theta}^r \partial_r \alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}} \partial_r \alpha.
\end{aligned}$$

Ahora se desarrollarán los últimos tres términos de la expresión (2.38) como sigue:

$$\begin{aligned}
\beta^k D_k K_{ij} &= \beta^r D_r K_{ij} = \beta^r \partial_r K_{ij} - \beta^r \Gamma_{ri}^k K_{kj} \delta_{kj} - \beta^r \Gamma_{rj}^k K_{ik} \delta_{ki} \\
&= \beta^r \partial_r K_{ij} - \beta^r \Gamma_{ri}^j K_{jj} - \beta^r \Gamma_{rj}^i K_{ii}, \\
K_{ik} D_j \beta^k &= K_{ir} D_j \beta^r + K_{i\theta} D_j \beta^\theta + K_{i\phi} D_j \beta^\phi \\
&= K_{ir}(\partial_j \beta^r + \Gamma_{jk}^r \beta^k \delta_{kr}) + K_{i\theta}(\partial_j \beta^\theta + \Gamma_{jk}^\theta \beta^k \delta_{kr}) + K_{i\phi}(\partial_j \beta^\phi + \Gamma_{jk}^\phi \beta^k \delta_{kr}) \\
&= K_{ir}(\partial_j \beta^r + \Gamma_{jr}^r \beta^r) + K_{i\theta} \Gamma_{jr}^\theta \beta^r + K_{i\phi} \Gamma_{jr}^\phi \beta^r, \\
K_{jk} D_i \beta^k &= K_{jr}(\partial_i \beta^r + \Gamma_{ir}^r \beta^r) + K_{j\theta} \Gamma_{ir}^\theta \beta^r + K_{j\phi} \Gamma_{ir}^\phi \beta^r,
\end{aligned}$$

conspirando nuevamente los casos que se presentan en las ecuaciones de evolución y sumando los tres resultados en cada uno de los casos se obtiene:

$$\begin{aligned}\beta^k D_k K_{rr} + K_{rk} D_r \beta^k + K_{rk} D_r \beta^k &= \beta^r \partial_r K_{rr} + 2K_{rr} \partial_r \beta^r, \\ \beta^k D_k K_{\theta\theta} + K_{\theta k} D_\theta \beta^k + K_{\theta k} D_\theta \beta^k &= \beta^r \partial_r K_{\theta\theta}.\end{aligned}$$

Usando entonces estos resultados, las componentes del tensor de Ricci (2.46) y el hecho de que $K_{ik} K_j^k = K_{ik} \gamma^{kl} K_{lj} \delta_{ik} \delta_{lj} = K_{ii} \gamma^{ij} K_{jj}$, se tiene que las ecuaciones de evolución para las componentes K_{rr} y $K_{\theta\theta}$ son:

$$\begin{aligned}\partial_t K_{rr} &= \alpha(R_{rr} - 2K_{rk} K_r^k + K K_{rr}) - D_r D_r \alpha + \beta^k \partial_k K_{rr} + K_{rk} \partial_r \beta^k + K_{kr} \partial_r \beta^k \\ &\quad - 8\pi\alpha(S_{rr} - \frac{1}{2}\gamma_{rr}(S - \rho_{ADM})) \\ &= \alpha \left(-\frac{\partial_{rr}\gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} + \frac{1}{2} \frac{(\partial_r \gamma_{\theta\theta})^2}{\gamma_{\theta\theta}^2} + \frac{1}{2} \frac{(\partial_r \gamma_{rr})(\partial_r \gamma_{\theta\theta})}{\gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta}} - \frac{K_{rr}^2}{\gamma_{rr}} + 2 \frac{K_{rr} K_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} \right) \\ &\quad - \partial_{rr}\alpha + \frac{1}{2} \partial_r \alpha \frac{\partial_r \gamma_{rr}}{\gamma_{rr}} + \beta^r \partial_r K_{rr} + 2K_{rr} \partial_r \beta^r - 8\pi\alpha \left(S_{rr} - \frac{1}{2}\gamma_{rr}(S - \rho_{ADM}) \right), \\ \partial_t K_{\theta\theta} &= \alpha(R_{\theta\theta} - 2K_{\theta k} K_\theta^k + K K_{\theta\theta}) - D_\theta D_\theta \alpha + \beta^k \partial_k K_{\theta\theta} \\ &\quad - 8\pi\alpha \left(S_{\theta\theta} - \frac{1}{2}\gamma_{\theta\theta}(S - \rho_{ADM}) \right) \\ &= \alpha \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial_{rr}\gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}} + 1 + \frac{1}{4} \frac{(\partial_r \gamma_{rr})(\partial_r \gamma_{\theta\theta})}{\gamma_{rr}^2} + \frac{K_{rr} K_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}} \partial_r \alpha + \beta^r \partial_r K_{\theta\theta} - 8\pi\alpha \left(S_{\theta\theta} - \frac{1}{2}\gamma_{\theta\theta}(S - \rho_{ADM}) \right).\end{aligned}\tag{2.50}$$

El conjunto de las ecuaciones (2.45,2.48,2.49,2.50) son las ecuaciones ADM para el caso de un espacio-tiempo esféricamente simétrico en coordenadas esféricas, mismos resultados que en [Guzmán, Alvarez-Ríos, Romero & González 2020].

2.3.1 Caso de un fluido perfecto

Las ecuaciones anteriores están escritas en términos de las componentes de la 3-métrica, la curvatura extrínseca, el vector de corrimiento y la función de lapso, además están presentes la densidad de energía ρ_{ADM} , la densidad de momento S^i y la tensión espacial

S_{ij} , cuyas definiciones dependen del tensor de energía-momento que describa la materia presente la región del espacio-tiempo considerada. Se desarrollará ahora el caso en que la materia sea un fluido perfecto, esto significa que el tensor de energía-momento estará definido como en la ecuación (2.7).

Para poder expresar las variables ρ_{ADM}, S^i, S_{ij} explícitamente es necesario primero obtener las componentes del tensor $T^{\mu\nu}$, para lo cual se usa la definición (2.7) del mismo tensor para un fluido perfecto, tomando también la definición (2.12) de n_μ y (2.41) la métrica del espacio-tiempo para el caso de la simetría esférica. Nótese que en la definición (2.7) aparecen cuadrivelocidades u^μ , éstas serán expresadas en términos de la velocidad v^i usando las relaciones (2.21). Considerado todo lo anterior se realiza el proceso de calcular las componentes del tensor de energía-momento distintas de 0 y se obtienen las siguientes:

$$\begin{aligned}
 T^{00} &= \frac{1}{\alpha^2}(\rho_0 h W^2 - p), \\
 T^{r0} &= \frac{\rho_0 h W^2}{\alpha} \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) + \frac{\beta^r}{\alpha^2} p, \\
 T^{rr} &= \rho_0 h W^2 \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{1}{\gamma_{rr}} - \frac{\beta^r \beta^r}{\alpha^2} \right) p, \\
 T^{\theta\theta} &= \frac{p}{\gamma_{\theta\theta}}, \\
 T^{\phi\phi} &= \frac{p}{\gamma_{\phi\phi}} = \frac{T^{\theta\theta}}{\sin^2 \theta}.
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

La primera de las variables es ρ_{ADM} , esta se hace presente en la constricción Hamiltoniana y las ecuaciones de evolución para las componentes de la curvatura extrínseca y se calculará como sigue:

$$\begin{aligned}
 \rho_{ADM} &= n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} = n^\mu n^\nu g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} T^{\alpha\beta} \\
 &= n_\alpha n_\beta T^{\alpha\beta} \delta_{\alpha 0} \delta_{\beta 0} = n_0^2 T^{00} \\
 &= \rho_0 h W^2 - p.
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

La segunda variable es la densidad de momento S^i , precisamente la componente S^r para la cual se tiene:

$$\begin{aligned}
S^r &= -\gamma^{rj} n^\alpha T_{\alpha j} = -\gamma^{rj} n_\mu g_{j\nu} T^{\mu\nu} \delta_{jr} \\
&= -\gamma^{rr} n_\mu g_{r\nu} T^{\mu\nu} (\delta_{\nu 0} + \delta_{\nu r}) = -\gamma^{rr} n_\mu (g_{r0} T^{\mu 0} + g_{rr} T^{\mu r}) (\delta_{\mu 0}) \\
&= -\gamma^{rr} n_0 (g_{r0} T^{00} + g_{rr} T^{0r}) \\
&= \gamma^{rr} \alpha \left[\beta^r \frac{1}{\alpha^2} (\rho_0 h W^2 - p) + \gamma_{rr} \left(\frac{\rho_0 h W^2}{\alpha} \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) + \frac{\beta^r}{\alpha^2} p \right) \right] \\
&= \rho_0 h W^2 v^r.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

En cuanto a la tensión espacial S_{ij} esta se puede expresar como $S_{ij} = \gamma_i^\alpha \gamma_j^\beta g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} T^{\mu\nu} = \gamma_{\mu i} \gamma_{\nu j} T^{\mu\nu}$, lo que permite calcular las tres componentes como sigue:

$$\begin{aligned}
S_{rr} &= \gamma_{\mu r} \gamma_{\nu r} T^{\mu\nu} (\delta_{\mu 0} + \delta_{\mu r}) (\delta_{\nu 0} + \delta_{\nu r}) = \gamma_{r0}^2 T^{00} + 2\gamma_{r0} \gamma_{rr} T^{0r} + \gamma_{rr}^2 T^{rr} \\
&= \frac{\beta_r^2}{\alpha^2} (\rho_0 h W^2 - p) + 2\beta_r \gamma_{rr} \left[\frac{\rho_0 h W^2}{\alpha} \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) + \frac{\beta^r}{\alpha^2} p \right] \\
&\quad + \gamma_{rr}^2 \left[\rho_0 h W^2 \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{1}{\gamma_{rr}} - \frac{\beta^r \beta^r}{\alpha^2} \right) p \right] \\
&= \rho_0 h W^2 v_r v_r + \gamma_{rr} p, \\
S_{\theta\theta} &= \gamma_{\mu\theta} \gamma_{\nu\theta} T^{\mu\nu} \delta_{\mu\theta} \delta_{\nu\theta} = \gamma_{\theta\theta}^2 T^{\theta\theta}, \\
&= \gamma_{\theta\theta}^2 \frac{\gamma_{\theta\theta}}{p} = \gamma_{\theta\theta} p \\
S_{\phi\phi} &= \gamma_{\mu\phi} \gamma_{\nu\phi} T^{\mu\nu} \delta_{\mu\phi} \delta_{\nu\phi} = \gamma_{\phi\phi}^2 T^{\phi\phi} \\
&= \sin^4 \theta \gamma_{\theta\theta}^2 \frac{T^{\theta\theta}}{\sin^2 \theta} = \sin^2 \theta S_{\theta\theta}.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

teniendo las tres componentes se calcula la traza del tensor S_{ij} , que también aparece en las ecuaciones ADM, obteniendo:

$$S = \rho_0 h W^2 v^r v_r + 3p. \tag{2.55}$$

Si se usan los resultados en la ecuaciones (2.52,2.53,2.54,2.55) dentro de las ecuaciones (2.45,2.48,2.49,2.50) se tendrá el caso de las ecuaciones ADM en un espacio-tiempo con simetría esférica en el que la materia considerada es un fluido perfecto, donde las contricciones y ecuaciones de evolución están escritas en términos de las componentes de la 3-métrica, la curvatura extrínseca y las variables primitivas.

SECCIÓN 2.4

Agujeros negros

Un agujero negro es una región del espacio-tiempo de la cual ninguna geodésica nula puede escapar debido a su intenso campo gravitacional, el cual es generado por una gran cantidad de materia confinada en una región pequeña del espacio, y dado que la luz se mueve siguiendo geodésicas nulas, se tiene que ni siquiera la luz es capaz de escapar de estos objetos. El interior de un agujero negro está causalmente desconectado del resto del universo, separado del exterior por una superficie de 3 dimensiones llamada *horizonte de eventos*, la cual definirá la superficie a partir de la cual es imposible escapar. Los agujeros negros son una predicción de la teoría general de la relatividad de Einstein, una solución a las ecuaciones de campo (2.1).

2.4.1 Solución de Schwarzschild

El primero en encontrar una solución exacta a estas ecuaciones fue Karl Schwarzschild en el año de 1916 [Schwarzschild 1916], tan solo algunos meses después de que Einstein publicara sus ecuaciones de campo. La solución de Schwarzschild describe el espacio-tiempo vacío, $T_{\mu\nu} = 0$, fuera de un objeto esférico sin carga ni momento angular, además considera que el espacio-tiempo cumple las siguientes propiedades:

- Esféricamente simétrico
- Estacionario¹: Las componentes de la métrica no tienen dependencia temporal.

En coordenadas de Schwarzschild la métrica de la solución de Schwarzschild, llamada únicamente métrica de Schwarzschild, es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

¹No es lo mismo a ser estático, que se refiere a que las derivadas temporales sean 0, por esto se cumple que un espacio-tiempo estático es también estacionario pero lo contrario no.

Se puede notar que todas la componentes de la métrica dependen únicamente de r . Usando unidades geométricas, $G = C = 1$, se escribe el elemento de línea como:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.57)$$

Una propiedad importante de la solución de Schwarzschild es que a grandes distancias de la fuente se tendrá la solución para un espacio-tiempo plano, es decir, con la métrica de Minkowski; esto es fácilmente comprobable, basta con tomar $M \ll r$ tal que $\frac{2M}{r} = 0$ por lo que el elemento de línea (2.57) quedaría como:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.58)$$

que sería el elemento de línea correspondiente a la métrica de Minkowski en coordenadas esféricas.

La solución de Schwarzschild (2.57) tiene dos puntos singulares, el primero es $r = 2M$ que corresponde al *radio de Schwarzschild*, escrito como r_s , que sería el radio del horizonte de eventos del agujero negro, el otro punto singular es $r = 0$. En $r = 2M$ se tiene que $\lim_{r \rightarrow 2M} g_{00} = 0$ y $\lim_{r \rightarrow 2M} g_{rr} = \infty$, para $r = 0$ pasa lo contrario pues $\lim_{r \rightarrow 2M} g_{00} = \infty$ y $\lim_{r \rightarrow 2M} g_{rr} = 0$, con lo que se puede ver que ambos puntos son singulares, sin embargo, la singularidad $r = 2M$ es una singularidad de las coordenadas mientras que aquella en $r = 0$ es una singularidad de la geometría. Que la singularidad en $r = 2M$ sea debida a las coordenadas significa que con un cambio de coordenadas adecuado la singularidad desaparece. El problema de la singularidad en $r = 2M$, aparte de la divergencia de g_{rr} , es que no se puede penetrar el horizonte del agujero negro, para hacer mas ilustrativo este problema veamos la trayectoria de la luz al acercarse a $r = 2M$, para lo cual es necesario encontrar las geodésicas nulas donde se cumple $ds^2 = 0$, en donde se elige valores constantes de θ, ϕ por lo que $d\theta = d\phi = 0$, teniendo la ecuación:

$$\begin{aligned} 0 &= - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \\ \frac{dt^2}{dr^2} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \\ \frac{dt}{dr} &= \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \end{aligned}$$

integrando se obtiene:

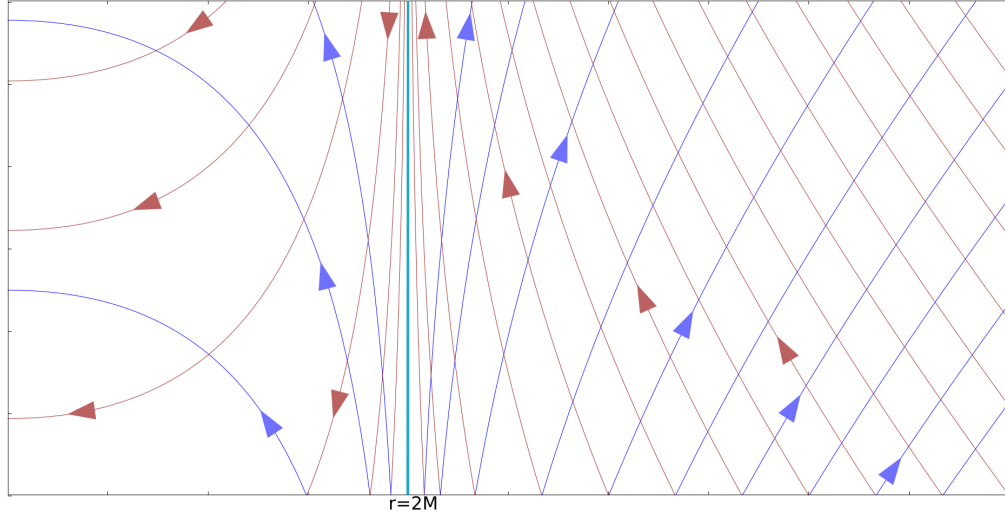


Figura 2.3: Trayectorias de las geodésicas nulas para la solución de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild, considerando las componentes θ y ϕ con un valor fijo. Las líneas azules representan las trayectorias salientes y las rojas las entrantes. Como se puede apreciar, ninguna de estas trayectorias puede penetrar el horizonte del agujero.

$$t_1 = r + 2M \ln \left| 1 - \frac{r}{2M} \right| + C, \quad (2.59)$$

$$t_2 = -r - 2M \ln \left| 1 - \frac{r}{2M} \right| + C, \quad (2.60)$$

cada uno de estos resultados corresponde a la luz viajando en dirección (t_1) al horizonte o alejándose (t_2) de él.

Como se puede ver la Figura 2.3, al acercarse al punto $r = 2M$ las trayectorias empiezan a tener pendientes cada vez mas grandes hasta que el valor de estas pendientes tiende a infinito, lo que hace que las trayectorias tengan un comportamiento asintótico que sigue la vertical $r = 2M$, por lo tanto estas trayectorias jamás cruzan el horizonte.

Las coordenadas de Schwarzschild presentan el inconveniente de diverger en $r = 2M$, sin embargo, la curvatura extrínseca no lo hace, en su lugar, si se calculan las componentes de esta usando (2.23) se llega a que $K_{ij} = 0$ y el hecho de que las coordenadas diverjan en $r = 2M$ pero la curvatura no, es un problema.

Coordenadas de Eddington-Finkelstein

A continuación se presentan las coordenadas de *Eddington-Finkelstein* que mostraran ventajas notables sobre las de Schwarzschild como se verá a continuación.

Las coordenadas de Eddington-Finkelstein se obtienen de hacer el cambio de coordenadas:

$$t = t' - 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|,$$

con lo que el diferencial dt queda como:

$$dt = dt' - \frac{dr}{\frac{r}{2M} - 1},$$

el cual se sustituye en (2.57) y se obtiene:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{4M}{r} dt dr + \left(1 + \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.61)$$

Este es el elemento de línea para la solución de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein. Estas nuevas coordenadas mantienen la singularidad en $r = 0$ debido a que esta es una singularidad de la geometría, pero a diferencia de las coordenadas de Schwarzschild, ya no tienen la singularidad en $r = 2M$.

Para ver la ventaja de estas coordenadas sobre las coordenadas de Schwarzschild, será necesario construir una vez más la estructura de conos de luz a partir de la condición $ds^2 = 0$:

$$0 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt^2}{dr^2} + \frac{4M}{r} \frac{dt}{dr} + \left(1 + \frac{2M}{r} \right)^{-1},$$

y usando la formula general para ecuaciones de segundo grado se obtiene:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{2M \mp r}{r - 2M},$$

$$\frac{dt}{dr} = -1, \quad \frac{dt}{dr} = \frac{2M + r}{r - 2M}.$$

Integrando se obtienen las trayectorias nulas expresadas a través de las formulas:

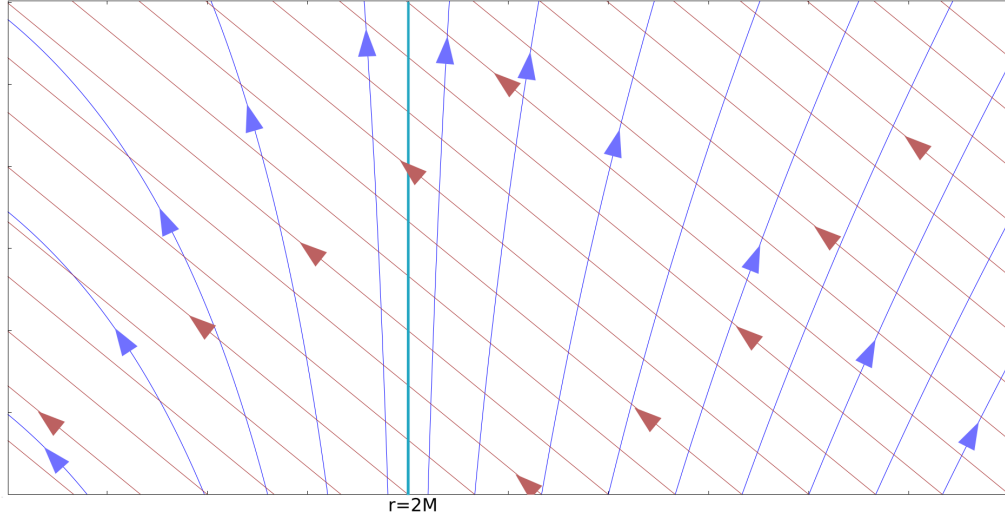


Figura 2.4: Trayectorias de las geodésicas nulas para la solución de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein, considerando las componentes θ y ϕ como constantes. Las líneas azules representan las trayectorias salientes y las rojas las entrantes, las cuales pueden penetrar el horizonte.

$$t_1 = -r + C, \quad (2.62)$$

$$t_2 = r + 4M \ln |r - 2M| + C. \quad (2.63)$$

Al igual que en el caso anterior cada uno de estos resultados corresponde a rayos de luz viajando en diferentes direcciones respecto del horizonte. Las curvas t_1 son trayectorias de pendiente constante -1 por lo que estas trayectorias se mueven hacia el horizonte y logra atravesarlo, a diferencia del caso anterior; las curvas t_2 son trayectorias que se alejan del horizonte, estas tienen un comportamiento similar al de las curvas t_1 para el caso anterior, pues también divergen en $r = 2M$. El comportamiento de ambas curvas generará que los conos de luz no se cierran en $r = 2M$, que es la principal diferencia entre las coordenadas de Schwarzschild y las de Eddington-Finkelstein.

Como se observa en las Figura 2.4 conforme las trayectorias se acercan a $r = 2M$ los conos de luz permanecen abiertos y aún cerca del horizonte la luz sería capaz de escapar, sin embargo, una vez que se atraviesa el horizonte, ni siquiera la luz es capaz de salir del agujero negro. Ahora, comparando el elemento de línea anterior (2.61) con el elemento de línea general para el caso de un espacio-tiempo esférico en la descomposición 3+1 (2.42) es posible obtener para este caso que:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2M}{r}}}, \\
\beta_r &= \frac{2M}{r}, \\
\beta^r &= \frac{2M}{r} \frac{1}{1 + \frac{2M}{r}}, \\
\gamma_{rr} &= 1 + \frac{2M}{r}, \\
\gamma_{\theta\theta} &= r^2, \\
\gamma_{\phi\phi} &= r^2 \sin^2 \theta,
\end{aligned} \tag{2.64}$$

con lo que es posible calcular las componentes de la curvatura extrínseca usando (2.23) llegando a obtener las componentes distintas de 0 de K_{ij} :

$$\begin{aligned}
K_{rr} &= -\frac{2M}{r^2} \frac{1 + \frac{M}{r}}{\sqrt{1 + \frac{2M}{r}}}, \\
K_{\theta\theta} &= \frac{2M}{\sqrt{1 + \frac{2M}{r}}}, \\
K_{\phi\phi} &= K_{\theta\theta} \sin^2 \theta.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Esta es otra diferencia importante con las coordenadas de Schwarzschild, para las cuales presentan todas las componentes de la curvatura extrínseca son 0, i.e. $K_{ij} = 0$.

2.4.2 Horizonte de eventos

El horizonte de eventos es la superficie de un agujero negro, es la frontera del espacio-tiempo que separa a los eventos que pueden emitir rayos de luz que se propagan hacia el infinito y aquellos que no, es la frontera del pasado causal del infinito nulo. Para una definición formal consultar [Misner, Thorne & Wheeler 1973], [Baumgarte & Shapiro 2010], [Alcubierre 2008]. Dicha superficie es realmente una hipersuperficie nula de 2 dimensiones espaciales y 1 dimensión temporal (2+1 dimensiones), un total de 3 dimensiones.

La localización numérica del horizonte de eventos es complicada. Si se tratara de localizar por medio de la evolución de geodésicas nulas hacia el futuro, se tendría un

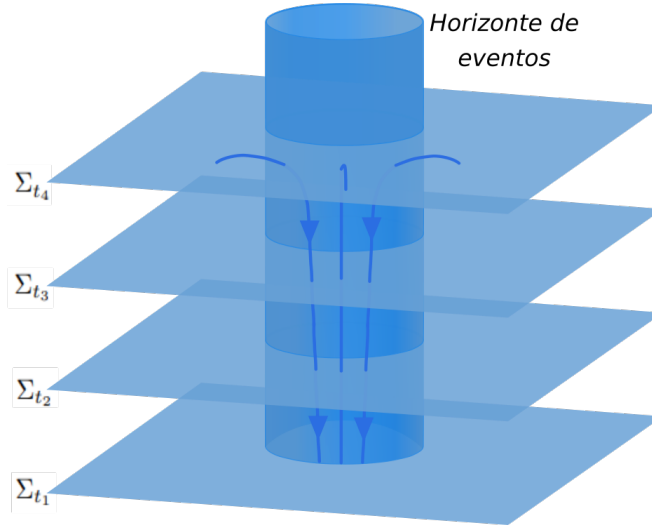


Figura 2.5: Representación del horizonte de eventos como una superficie de 3 dimensiones en un espacio-tiempo ambiente separado con el formalismo 3+1. Las líneas representan geodésicas trazadas desde el futuro hacia el pasado para encontrar el horizonte.

problema, debido a que se encontraría que las geodésicas nulas divergen del horizonte, no pudiendo asegurar si estas escapan hacia el infinito o no, hasta después de terminar la evolución. Es por lo anterior que una mejor manera de localizar el horizonte de eventos es trazar las geodésicas nulas hacia atrás en el tiempo, i.e. desde el futuro hacia el pasado, de esta manera las trayectorias convergen en el horizonte. En la Figura 2.5 se ve representado este proceso desde la separación 3+1 del espacio-tiempo. Este método resulta muy eficiente si se tiene alguna región aproximada de la ubicación del horizonte, lo que permite delimitar la zona desde la cual será necesario trazar estas geodésicas [Diener 2003]. Debido a lo anterior se entiende que es necesario tener conocimiento completo sobre el futuro del espacio-tiempo para poder encontrar de manera adecuada la localización del horizonte de eventos, lo que significa que esto solo se puede ejecutar una vez que se ha concluido la evolución del espacio-tiempo, por medio de las ecuaciones ADM por ejemplo. Es importante señalar que la localización del horizonte de eventos es independiente la elección de las funciones de norma.

El no poder localizar el horizonte de eventos al mismo tiempo que se lleva a cabo la evolución del sistema es un problema debido a que no se tiene información sobre la localización del agujero negro, lo que a su vez significa que no se conoce la ubicación de la singularidad dentro de este, que de considerarse dentro del dominio numérico podría estropear los cálculos. Para aproximar la ubicación del horizonte de eventos, se cuenta con el concepto de *horizonte aparente*, una superficie de 2 dimensiones definida sobre cada hipersuperficie Σ_t dependiente de la norma.

2.4.3 Horizonte aparente

Antes de poder definir el horizonte aparente, considérese una hipersuperficie S de 2 dimensiones, suave y cerrada dentro de Σ , cuya normal saliente dentro de Σ será s^μ , que cumplirá por definición $s^\mu s_\mu = 1$ y $s^\mu n_\mu = 0$ debido a que está dentro de las hipersuperficies Σ . De manera análoga a como la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$ induce una métrica espacial $\gamma_{\mu\nu}$ en Σ , la métrica espacial inducirá una métrica $m_{\mu\nu}$ sobre la superficie S que se define como:

$$m_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - s_\mu s_\nu = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu - s_\mu s_\nu.$$

Usando que n^μ es de tipo tiempo y que es ortogonal a las hipersuperficies Σ , además de que s^μ es de tipo espacio y es ortogonal a la superficie S es posible construir tangentes a un par de geodésicas nulas en dirección hacia el futuro cuya proyección sobre Σ es ortogonal a S , estas tangentes serán:

$$k^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(n^\mu + s^\mu) \quad y \quad l^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(n^\mu - s^\mu),$$

donde el factor $1/\sqrt{2}$ asegura que $k^\mu l_\mu = -1$, además se cumplirá por construcción que $k^\mu k_\mu = l^\mu l_\mu = 0$ y $m_{\mu\nu} k^\mu = m_{\mu\nu} l^\mu = 0$. Se tiene que K^μ será la geodésica nula saliente y l^μ la entrante.

Es posible expresar la 2-métrica en términos de estas tangentes notando primero que:

$$\begin{aligned} k_\mu l_\nu &= \frac{1}{2}(n_\mu n_\nu - n_\mu s_\nu + s_\mu n_\nu - s_\mu s_\nu), \\ l_\mu k_\nu &= \frac{1}{2}(n_\mu n_\nu + n_\mu s_\nu - s_\mu n_\nu - s_\mu s_\nu), \\ \Rightarrow k_\mu l_\nu + l_\mu k_\nu &= n_\mu n_\nu - s_\mu s_\nu, \end{aligned}$$

lo que substituyendo en la 2-métrica lleva a expresar la misma como:

$$m_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + k_\mu l_\nu + l_\mu k_\nu.$$

Se tiene que la expansión de las geodésicas nulas salientes ortogonales a S , i.e. K_μ , se escribe como:

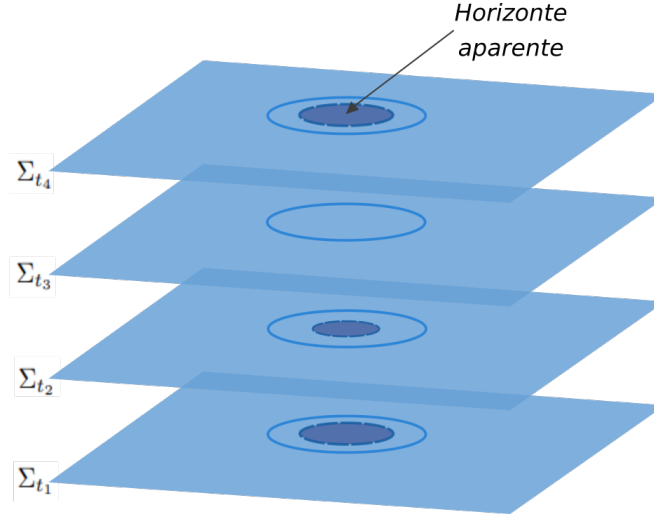


Figura 2.6: Representación del horizonte aparente. Los círculos más grandes representan el horizonte de eventos en un tiempo específico sobre las hipersuperficies, como una foto instantánea. Se exagera la definición local del horizonte aparente, el cual siempre está en el interior del horizonte de eventos, incluso teniéndose la posibilidad de que no exista para algún tiempo, lo que no implica que no haya agujero negro.

$$\Theta = m^{\mu\nu} \nabla_\mu k_\nu, \quad (2.66)$$

debido a que se encuentra $m^{\mu\nu}$ en la expresión, se asegura que solo derivadas tangentes a S se desarrollen. En base al valor de Θ se tendrán diferentes conceptos:

- *Superficie exterior atrapada*: Superficie de 2 dimensiones que se encuentra dentro de Σ donde se cumple que $\Theta < 0$ para todo punto.
- *Región atrapada*: Cualquier región de Σ que contenga superficies exteriores atrapadas.
- *Superficie exterior marginalmente atrapada*: Es la frontera externa de cualquier región atrapada conectada, ésta será nuevamente una superficie de 2 dimensiones que se encuentra dentro de Σ pero que cumple $\Theta = 0$.

El *horizonte aparente* es la superficie exterior marginalmente atrapada, por lo que es una superficie de 2 dimensiones definida en las hipersuperficies Σ , formada por las geodésicas nulas salientes futuras cuya expansión es 0 en cualquier punto [Baumgarte & Shapiro 2010]. Por lo anterior, se tiene que el horizonte aparente está definido localmente en una hipersuperficie particular Σ_t , además, este dependerá de la elección de las funciones de

norma, el vector de corrimiento β^μ y la función de lapso α , por lo que bajo ciertas condiciones es posible que no exista horizonte aparente, aunque esto no significaría que no haya un agujero negro. Una propiedad importante es que el horizonte aparente siempre está dentro del horizonte de eventos. Estas propiedades se ven representadas en la Figura 2.6, donde el horizonte aparente está definido sobre cada hipersuperficie Σ_t .

Es posible expresar la expansión Θ en términos de componentes espaciales únicamente. Primero, usando la definición de k_μ se obtiene:

$$m^{\mu\nu} \nabla_\mu k_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} m^{\mu\nu} \nabla_\mu (n_\nu + s_\nu).$$

Ahora, multiplicando por $\sqrt{2}$ y usando la definición (2.22) se llega a:

$$\sqrt{2} m^{\mu\nu} \nabla_\mu k_\nu = m^{ij} (D_i s_j - k_{ij}),$$

pero $m^{\mu\nu} \nabla_\mu k_\nu$ es la definición de la expansión que vale 0 por ser el horizonte aparente, por lo que:

$$0 = \sqrt{2} \Theta = m^{ij} (D_i s_j - k_{ij}), \quad (2.67)$$

entonces, los valores de las componentes, del sistema coordenado usado, que cumplan esta ecuación darán la ubicación del horizonte aparente. Mas allá de lo anterior, se puede pensar en el horizonte aparente como una superficie de nivel de una función escalar:

$$\tau(x^i) = 0,$$

por lo que la normal sería:

$$s_i = \lambda D_i \tau = \lambda \partial_i \tau,$$

siendo λ el factor de normalización definido como:

$$\lambda = (\gamma^{ij} D_i \tau D_j \tau)^{-1/2}.$$

Usando la igualdad anterior para s_i en el primer término de (2.67) y expandiendo se tiene:

$$m^{ij}D_i(\lambda D_j\tau) = m^{ij}\lambda D_i D_j\tau + m^{ij}(D_i\lambda)(D_j\tau),$$

pero $D_j\tau = \frac{s_j}{\lambda}$ por lo que se tendría una una contracción el último término entre m^{ij} y s_j lo que es 0, por lo que este término es también 0; en cuanto al primer término, se tiene una doble derivada covariante de τ que queda como:

$$\begin{aligned} D_i D_j\tau &= D_i(\partial_j\tau) = \partial_i\partial_j\tau - \Gamma_{ij}^k\partial_k\tau \\ &= \partial_i\partial_j\tau - \Gamma_{ij}^k\frac{s_k}{\lambda}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados en (2.67) se tiene:

$$0 = m^{ij}(\lambda\partial_i\partial_j\tau - \Gamma_{ij}^k s_k - k_{ij}).$$

Una forma útil de expresar τ es:

$$\tau(x^i) = r_C(x^i) - h(\theta, \phi),$$

donde r_C será la separación entre x^i y un punto de referencia C^i dentro de la superficie $\tau = 0$ donde estarán centradas las componentes θ, ϕ , en este caso $C^i = 0$. Por su parte, $h(\theta, \phi)$ mide la distancia del origen hasta la superficie en las direcciones θ, ϕ . Si se usan coordenadas polares se tiene que $r_C = r$, por lo que se tiene que la expansión expresada en estas mismas coordenadas es:

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{2}}m^{ij}(\lambda\partial_i\partial_j h - \Gamma_{ij}^k s_k - K_{ij}).$$

Si además se considera simetría esférica, la función h será una constante que no depende de θ ni ϕ , por lo que la segunda derivada de h se anula teniendo:

$$\Theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}m^{ij}(\Gamma_{ij}^k s_k + k_{ij}).$$

Usando la métrica (2.40) se tiene que la expansión es:

$$\Theta = \frac{\partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\sqrt{\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}}} - 2 \frac{K_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}}. \quad (2.68)$$

Encontrar el horizonte aparente se reduciría a encontrar el valor de r tal que la ecuación anterior sea 0.

Capítulo 3

Ecuaciones de Euler relativistas

Las ecuaciones de Euler son aquellas que describen el movimiento de un fluido. Estas ecuaciones pueden ser relativistas o no relativistas dependiendo de las condiciones del problema que se esté tratando. Es debido a las condiciones que se consideran en este trabajo que será necesario hacer uso de las ecuaciones relativistas, por esta razón a continuación se desarrolla la obtención de las mismas, además se profundiza en el caso de un espacio-tiempo con simetría esférica.

SECCIÓN 3.1

Ecuaciones para el espacio-tiempo de Minkowski

Las ecuaciones de Euler relativistas para un fluido perfecto en un espacio tiempo de Minkowski son [Guzmán 2020]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial(Dv^i)}{\partial x^i} &= 0, \\
\frac{\partial J^j}{\partial t} + \frac{\partial(J^j v^i + p\delta^{ij})}{\partial x^i} &= 0, \\
\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial(J^i - Dv^i)}{\partial x^i} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

donde

$$\begin{aligned}
D &= \rho_0 W, \\
J^j &= \rho_0 h W^2 v^j, \\
\tau &= \rho_0 h W^2 - p - D,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

con ρ_0 la densidad de masa en reposo, p la presión, h la entalpía específica definida como $h = 1 + \varepsilon + p/\rho_0$, ε la energía interna, v^j la j -ésima componente de la velocidad y W el factor de Lorentz; donde todas las cantidades son para un elemento de fluido. Las 6 variables $\rho, p, \varepsilon, v^j$ son llamadas *variables primitivas*. Las ecuaciones (3.1) surgen de la conservación de la masa y de la divergencia nula del tensor de energía-momento, lo que se expresa como:

$$\nabla_\mu(\rho_0 u^\mu) = 0, \tag{3.3}$$

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \tag{3.4}$$

donde para reproducir las ecuaciones (3.1) se debe de tomar la definición del tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$ para el caso de un fluido perfecto, i.e. según la definición (2.51) donde la métrica $g_{\mu\nu}$ se tomará como la del espacio-tiempo de Minkowski, que expresada en coordenadas cartesianas es:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

y cuyo elemento de línea es:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (3.6)$$

Para lograr derivar estas ecuaciones es necesario usar la identidad :

$$\nabla_\mu \xi^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \xi^\mu), \quad (3.7)$$

donde el término g dentro de la raíz cuadrada es el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$, para la métrica (3.5) se tiene que $g = -1$, por lo que para este caso:

$$\nabla_\mu \xi^\mu = \partial_\mu \xi^\mu.$$

Es posible usar directamente esta identidad en la ecuación (3.3) ya que ya tiene esta forma, sin embargo para la ecuación (3.4) este no es el caso, por esto, para la divergencia nula del tensor de energía-momento es necesario fijar el índice libre a un valor específico.

Teniendo en cuenta lo anterior, es posible obtener la primera de las ecuaciones de Euler relativistas usando la ecuación de la conservación de la masa (3.3) como sigue:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (\rho_0 u^\mu) &= \partial_\mu (\rho_0 u^\mu) \\ &= \partial_0 (\rho_0 u^0) + \partial_i (\rho_0 u^i) \\ &= \partial_0 (\rho_0 W) + \partial_i (\rho_0 W v^i) \\ &= \partial_0 (D) + \partial_i (D v^i) = 0. \end{aligned}$$

Las dos ecuaciones restantes se obtienen de la divergencia nula del tensor de energía-momento (3.4) tomando el índice ν primero como 0 y después como i . Para la segunda ecuación se toma $\nu = j$ y se sigue un proceso análogo al anterior:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu j} &= \partial_\mu T^{\mu j} \\ &= \partial_0 T^{0j} + \partial_i T^{ij} \\ &= \partial_0 (p_0 h W^2 v^j) + \partial_i (p_0 h W^2 v^j v^i + p \delta^{ij}) \\ &= \partial_0 (J^j) + \partial_i (J^j v^i + p \delta^{ij}) = 0. \end{aligned}$$

Para finalizar, la tercera ecuación se obtiene de tomar $\nu = 0$ pero a diferencia del proceso de obtención de las dos ecuaciones anteriores es necesario un paso extra. Después de

hacer el proceso análogo al anterior se resta la primera ecuación de las ecuaciones de Euler. El procedimiento es como sigue:

$$\begin{aligned}
 \nabla_\mu T^{\mu 0} &= \partial_\mu T^{\mu 0} \\
 &= \partial_0 T^{0j} + \partial_i T^{ij} \\
 &= \partial_0(p_0 h W^2 - p) + \partial_i(p_0 h W^2 v^i) - (\partial_0(D) + \partial_i(Dv^i)) \\
 &= \partial_0(p_0 h W^2 - p - D) + \partial_i(p_0 h W^2 v^i - Dv^i) \\
 &= \partial_0(\tau) + \partial_i(J^i - Dv^i) = 0.
 \end{aligned}$$

Es posible escribir las tres ecuaciones como un conjunto de ecuaciones de balance de flujos en base a la formulación de Valencia [Font, Ibañez, Marquina & Martí 1994], [Banyuls, Font, Ibáñez, Martí & Miralles 1996]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^i(\mathbf{u})}{\partial x^i} = \mathbf{S}(\mathbf{u}), \quad (3.8)$$

siendo el vector de estado $\mathbf{u}$, el vector de flujos $\mathbf{F}$ y el vector de las fuentes $\mathbf{S}$ definidos de la siguiente manera:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} D \\ J^j \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ J^1 \\ J^2 \\ J^3 \\ \tau \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} Dv^i \\ J^j v^i + p\delta^{ij} \\ J^i - Dv^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Dv^i \\ J^1 v^i + p\delta^{i1} \\ J^2 v^i + p\delta^{i2} \\ J^3 v^i + p\delta^{i3} \\ J^i - Dv^i \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Estas ecuaciones sirven para ejemplificar la manera como se obtienen las ecuaciones de Euler relativistas para el caso de un fluido perfecto, sin embargo, se consideró un espacio-tiempo específico, el de Minkowski, que es un espacio asintóticamente plano.

SECCIÓN 3.2**Ecuaciones de Euler usando el enfoque 3+1 con simetría esférica**

Para adaptar las ecuaciones de Euler al problema tratado, es generalizar el espacio-tiempo asumiendo únicamente simetría esférica, además de usar el enfoque de la separación 3+1 del espacio-tiempo en el caso de esta misma simetría desarrollado en la sección 2.3.

Primero, considérese un espacio-tiempo desde el enfoque 3+1 de la sección 2.2, la métrica sería escrita como la igualdad (2.18) y elemento de línea estaría dado como en la ecuación (2.20), estos son:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta^i \beta_i & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix},$$

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j.$$

Nuevamente se usan las identidades (3.3, 3.4) para la obtención de las ecuaciones relativistas de la hidrodinámica, sin embargo, debido a que usa el enfoque 3+1 será necesario proyectar el tensor de energía-momento sobre las hipersuperficies Σ_t y la normal n_ν , para esto se usa una base local del espacio-tiempo $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_i$ donde $\mathbf{e}_0 = n_\mu$ y $\mathbf{e}_i = (\beta_i, \gamma_{ij})$. Usando esta base se proyecta el tensor de energía-momento y se calcula la divergencia de la siguiente manera:

- $\nabla_\mu T^{\mu\nu} e_{i\nu}$ será la divergencia de la proyección sobre la hipersuperficie y se tendrán 3 ecuaciones, una para cada uno de los valores de i .
- $\nabla_\mu T^{\mu\nu} e_{0\nu}$ será la divergencia de la proyección sobre la normal n_ν , que corresponde a la ecuación de conservación de energía.

Nuevamente se usa la identidad (3.7) donde el determinante del tensor métrico g para este caso es:

$$g = -\alpha^2 \gamma, \tag{3.12}$$

donde a su vez γ es el determinante de la matriz formada por las componentes de la métrica espacial γ_{ij} , i.e. $\gamma = \det(\gamma_{ij})$.

Usando la información anterior se derivan las ecuaciones de Euler relativistas para un fluido perfecto y se reescriben nuevamente como un conjunto de ecuaciones de balance como (3.8) donde ahora se tendrá que $\mathbf{u}, \mathbf{F}, \mathbf{S}$ son los vectores:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} D \\ J^j \\ \tau \end{pmatrix}, \\ \mathbf{F}(\mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} \alpha \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) D \\ \alpha \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) J_j + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta_j^i \\ \alpha \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) \tau + \alpha \sqrt{\gamma} p v^i \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S}(\mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \sqrt{\gamma} T^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu j}^\sigma \\ \alpha \sqrt{\gamma} (T^{\mu 0} \partial_\mu \alpha - \alpha T^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^0) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

además las variables conservativas (3.2) tendrán una definición ligeramente diferente comparadas con sus definiciones para el espacio-tiempo de Minkowski; la definición de estas variables es:

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{\gamma} \rho_0 W, \\ J^j &= \sqrt{\gamma} \rho_0 h W^2 v^j, \\ \tau &= \sqrt{\gamma} (\rho_0 h W^2 - p - \rho_0 W), \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde el factor $\sqrt{\gamma}$ lleva consigo la información de la geometría curva, a diferencia del espacio-tiempo de Minkowski. Nótese que el sistema consiste de 5 ecuaciones y son 6 las variables primitivas lo que significa que es un sistema subdeterminado. Para solucionar esto se supone que el fluido sigue una ecuación de estado que permitirá cerrar el sistema. Un ejemplo es suponer que el fluido obedece la ecuación de un gas ideal:

$$p = \rho_0 \varepsilon (\Gamma - 1), \quad (3.15)$$

donde Γ es el índice adiabático del gas, el cual dependerá del material que se esté tratando, por ejemplo, para un gas relativista se tiene que $\Gamma = 4/3$. Ahora, se tomará como base este caso y se le añadirá la propiedad de simetría esférica mencionada anteriormente, al igual que se hizo en la en la sección 2.3. Se usarán coordenadas esféricas

debido a que se ajustan a la simetría considerada. Debido a la simetría y la elección de las coordenadas, se tendrá que:

$$\beta^i = (\beta^r, 0, 0).$$

Se considera que solo hay movimiento de manera radial, por lo que se tiene que $v^i = (v^r, 0, 0)$. Se tiene nuevamente $\gamma_{ij} = \text{diag}(\gamma_{rr}, \gamma_{\theta\theta}, \gamma_{\theta\theta} \sin^2 \theta)$ y $\gamma^{ij} = \text{diag}(1/\gamma_{rr}, 1/\gamma_{\theta\theta}, 1/\gamma_{\theta\theta} \sin^2 \theta)$, por lo que $\sqrt{\gamma} = \sqrt{\gamma_{rr}} \gamma_{\theta\theta} \sin^2 \theta$. La métrica será igual que (2.40) y el elemento de línea como (2.42), esto es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_r \beta^r & \beta_r & 0 & 0 \\ \beta_r & \gamma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{\phi\phi} \end{pmatrix},$$

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_r \beta^r) dt^2 + 2\beta_r dt dr + \gamma_{rr} dr^2 + \gamma_{\theta\theta} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Usando (3.13,3.14) se pueden derivar las ecuaciones de Euler relativistas para un fluido perfecto en este nuevo escenario, un espacio-tiempo esféricamente simétrico con el enfoque de la separación 3+1. Nótese que en la forma de balance de flujos (3.8) existe una sumatoria sobre el índice i , por lo que esta sumatoria en el sistema en que se está trabajando es:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^r(\mathbf{u})}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{F}^\theta(\mathbf{u})}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{F}^\phi(\mathbf{u})}{\partial \phi} = \mathbf{S}(\mathbf{u}), \quad (3.16)$$

donde, para este caso el vector de estado $\mathbf{u}$, de flujos $\mathbf{F}^r, \mathbf{F}^\theta, \mathbf{F}^\phi$ y de fuentes $\mathbf{S}$ son:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} D \\ J_r \\ J_\theta \\ J_\phi \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ J_r \\ 0 \\ 0 \\ \tau \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^r(\mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} \alpha \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) D \\ \alpha \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) J_r + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta_r^r \\ \alpha \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) J_\theta + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta_\theta^r \\ \alpha \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) J_\phi + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta_\phi^r \\ \alpha \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) \tau + \alpha \sqrt{\gamma} p v^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) D \\ \alpha \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) J_r + \alpha \sqrt{\gamma} p \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) \tau + \alpha \sqrt{\gamma} p v^r \end{pmatrix}, \\
\mathbf{F}^\theta(\mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} \alpha \left(v^\theta - \frac{\beta^\theta}{\alpha} \right) D \\ \alpha \left(v^\theta - \frac{\beta^\theta}{\alpha} \right) J_r + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta_r^\theta \\ \alpha \left(v^\theta - \frac{\beta^\theta}{\alpha} \right) J_\theta + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta_\theta^\theta \\ \alpha \left(v^\theta - \frac{\beta^\theta}{\alpha} \right) J_\phi + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta_\phi^\theta \\ \alpha \left(v^\theta - \frac{\beta^\theta}{\alpha} \right) \tau + \alpha \sqrt{\gamma} p v^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \sqrt{\gamma} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{F}^\phi(\mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} \alpha \left(v^\phi - \frac{\beta^\phi}{\alpha} \right) D \\ \alpha \left(v^\phi - \frac{\beta^\phi}{\alpha} \right) J_r + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta_r^\phi \\ \alpha \left(v^\phi - \frac{\beta^\phi}{\alpha} \right) J_\theta + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta_\theta^\phi \\ \alpha \left(v^\phi - \frac{\beta^\phi}{\alpha} \right) J_\phi + \alpha \sqrt{\gamma} p \delta_\phi^\phi \\ \alpha \left(v^\phi - \frac{\beta^\phi}{\alpha} \right) \tau + \alpha \sqrt{\gamma} p v^\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \sqrt{\gamma} p \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \sqrt{\gamma} T^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu r}^\sigma \\ \alpha \sqrt{\gamma} T^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu \theta}^\sigma \\ \alpha \sqrt{\gamma} T^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu \phi}^\sigma \\ \alpha \sqrt{\gamma} (T^{\mu 0} \partial_\mu \alpha - \alpha T^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^0) \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Las componentes del vector de fuentes $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ contienen sumatorias sobre los índices de la métrica del espacio-tiempo, el tensor de energía-momento y los símbolos de Christoffel; estos últimos dependen directamente de la métrica y dado que $g_{\mu\nu}$ es (2.40), es posible calcular los símbolos, considerando además que las variables dentro de $g_{\mu\nu}$ solo dependen de t, r . Los símbolos de Christoffel distintos de 0 en este caso son:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{tt}^t &= \frac{(\dot{\gamma}_{rr} - 2\gamma_{rr}\beta^{r'} - \beta^r \gamma'_{rr})(\beta^r)^2 + 2\alpha(\dot{\alpha} + \alpha'\beta^r)}{2\alpha^2}, \\
\Gamma_{tr}^t &= \frac{2\alpha\alpha' + \beta^r(\dot{\gamma}_{rr} - 2\gamma_{rr}\beta^{r'} - \beta^r \gamma'_{rr})}{2\alpha^2}, \\
\Gamma_{rr}^t &= \frac{\dot{\gamma}_{rr} - 2\gamma_{rr}\beta^{r'} - \beta^r \gamma'_{rr}}{2\alpha^2}, \\
\Gamma_{\theta\theta}^t &= \frac{\dot{\gamma}_{\theta\theta} - \beta^r \gamma'_{\theta\theta}}{2\alpha^2}, \\
\Gamma_{\phi\phi}^t &= \sin^2 \theta \Gamma_{\theta\theta}^t, \\
\Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2} \left[\frac{\beta^r \left(\dot{\gamma}_{rr} \beta^r + 2\gamma_{rr} \dot{\beta}^r + 2\dot{\gamma}_{rr} \beta^r \right) - 2\alpha\dot{\alpha}}{\alpha^2} \right. \\
&\quad + \left(\frac{1}{\gamma_{rr}} - \frac{(\beta^r)^2}{\alpha^2} \right) (-\gamma'_{rr} (\beta^r)^2 + 2(\dot{\gamma}_{rr} - \gamma_{rr}\beta^{r'}) \beta^r \\
&\quad \left. + 2\alpha\alpha' + 2\gamma_{rr}\dot{\beta}^r \right], \\
\Gamma_{tr}^r &= \frac{1}{2} \left(\frac{(-\dot{\gamma}_{rr} + 2\gamma_{rr}\beta^{r'} + \beta^r \gamma'_{rr})(\beta^r)^2}{\alpha^2} - \frac{2\alpha'\beta^r}{\alpha} + \frac{\dot{\gamma}_{rr}}{\gamma_{rr}} \right), \\
\Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma'_{rr}}{\gamma_{rr}} + \frac{\beta^r(-\dot{\gamma}_{rr} + 2\gamma_{rr}\beta^{r'} + \beta^r \gamma'_{rr})}{\alpha^2} \right), \\
\Gamma_{\theta\theta}^r &= \frac{1}{2} \left(\frac{\beta^r(\beta^r \gamma'_{\theta\theta} - \dot{\gamma}_{\theta\theta})}{\alpha^2} - \frac{\gamma'_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}} \right), \\
\Gamma_{\phi\phi}^r &= \sin^2 \theta \Gamma_{\theta\theta}^r, \\
\Gamma_{t\theta}^\theta &= \frac{\dot{\gamma}_{\theta\theta}}{2\gamma_{\theta\theta}}, \\
\Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{\gamma'_{\theta\theta}}{2\gamma_{\theta\theta}}, \\
\Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\cos \theta \sin \theta, \\
\Gamma_{t\phi}^\phi &= \frac{\dot{\gamma}_{\theta\theta}}{2\gamma_{\theta\theta}}, \\
\Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{\gamma'_{\theta\theta}}{2\gamma_{\theta\theta}}, \\
\Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \cot \theta.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

En cuanto al tensor de energía-momento, para la obtención de las expresiones (3.13,3.14) se consideró la definición del mismo tensor como la de un fluido perfecto (2.51) pero no se calcularon sus componentes explícitamente. Ahora para desarrollar completa-

mente las componentes del vector $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ en la expresión (3.19) será necesario conocer las componentes, las cuales se calcularon anteriormente para el mismo espacio-tiempo considerado en esta sección, por lo que las componentes distintas de 0 del tensor de energía-momento estarán dadas por las expresiones (2.51).

Con todo lo anterior es posible calcular explícitamente las componentes del vector de las fuentes $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ llegando a obtener:

$$\begin{aligned}
\alpha\sqrt{\gamma}T^{\mu\nu}g_{\nu\sigma}\Gamma_{\mu r}^{\sigma} &= \alpha\sqrt{\gamma}(T^{00}[(-\alpha^2 + \gamma_{rr}(\beta^r)^2)\Gamma_{0r}^0 + \gamma_{rr}\beta^r\Gamma_{0r}^r] \\
&\quad + T^{r0}[(-\alpha^2 + \gamma_{rr}(\beta^r)^2)\Gamma_{rr}^0 + \gamma_{rr}\Gamma_{0r}^r + \gamma_{rr}\beta^r(\Gamma_{rr}^r + \Gamma_{0r}^0)] \\
&\quad + T^{rr}[\gamma_{rr}\Gamma_{rr}^r + \gamma_{rr}\beta^r\Gamma_{rr}^0] \\
&\quad + T^{\theta\theta}\gamma_{\theta\theta}\Gamma_{\theta r}^{\theta} + T^{\phi\phi}\gamma_{\phi\phi}\Gamma_{\phi r}^{\phi}), \\
\alpha\sqrt{\gamma}T^{\mu\nu}g_{\nu\sigma}\Gamma_{\mu\theta}^{\sigma} &= \alpha\sqrt{\gamma}p\cot\theta, \\
\alpha\sqrt{\gamma}T^{\mu\nu}g_{\nu\sigma}\Gamma_{\mu\phi}^{\sigma} &= 0, \\
\alpha\sqrt{\gamma}(T^{\mu 0}\partial_{\mu}\alpha - \alpha T^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^0) &= \alpha\sqrt{\gamma}(T^{00}(\partial_0\alpha - \alpha\Gamma_{00}^0) + T^{r0}(\partial_r\alpha - 2\alpha\Gamma_{r0}^0) \\
&\quad - \alpha(T^{rr}\Gamma_{rr}^0 + T^{\theta\theta}\Gamma_{\theta\theta}^0 + T^{\phi\phi}\Gamma_{\phi\phi}^0)).
\end{aligned}$$

Usando este resultado y las ecuaciones (3.17, 3.18) se tiene que las ecuaciones obtenidas del balance de flujos (3.16) son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial\left(\alpha\left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha}\right)\right)D}{\partial r} &= 0, \\
\frac{\partial S_r}{\partial t} + \frac{\partial\left(\alpha\left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha}\right)J_r + \alpha\sqrt{\gamma}p\delta_r^r\right)}{\partial r} &= S_1, \\
\frac{\partial\left(\alpha\sqrt{\gamma}p\right)}{\partial\theta} &= \alpha\sqrt{\gamma}p\cot\theta, \\
0 &= 0, \\
\frac{\partial\tau}{\partial t} + \frac{\partial\left(\alpha\left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha}\right)\tau + \alpha\sqrt{\gamma}pv^r\right)}{\partial r} &= S_4,
\end{aligned}$$

donde se usó S_1 y S_4 para evitar escribir todos los términos de estas componentes. La tercera ecuación es una identidad, aunque no lo parezca, para ver esto se desarrolla como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (\alpha \sqrt{\gamma} p)}{\partial \theta} &= \frac{\partial (\alpha \sqrt{\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}} \sin \theta p)}{\partial \theta} \\
&= \alpha \sqrt{\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}} p \frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} \\
&= \alpha \sqrt{\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}} p \cos \theta \\
\alpha \sqrt{\gamma} p \cot \theta &= \alpha \sqrt{\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}} p \sin \theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\
&= \alpha \sqrt{\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}} p \cos \theta \\
\Rightarrow \frac{\partial (\alpha \sqrt{\gamma} p)}{\partial \theta} &= \alpha \sqrt{\gamma} p \cot \theta \\
\alpha \sqrt{\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}} p \cos \theta &= \alpha \sqrt{\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}} p \cos \theta \\
1 &= 1
\end{aligned}$$

Entonces se tiene que las ecuaciones de Euler relativistas para un fluido perfecto en el caso de un espacio-tiempo esféricamente simétrico usando el enfoque 3+1 son [Guzmán, Alvarez-Ríos, Romero & González 2020]:

$$\begin{aligned}
\partial_t D + \partial_r \left(\alpha \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) D \right) &= 0, \\
\partial_t S_r + \partial_r \left(\alpha \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) J_r + \alpha \sqrt{\gamma} p \right) &= S_1, \\
\partial_t \tau + \partial_r \left(\alpha \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) \tau + \alpha \sqrt{\gamma} p v^r \right) &= S_4.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Estas ecuaciones permitirán llevar a cabo la evolución de un fluido perfecto alrededor de un agujero negro considerando la separación 3+1 del espacio-tiempo.

SECCIÓN 3.3

Discontinuidades en las ecuaciones Euler relativistas

Las ecuaciones de Euler pueden desarrollar discontinuidades a pesar de tener condiciones iniciales suaves, lo cual es importante si se quieren usar estas mismas ecuaciones

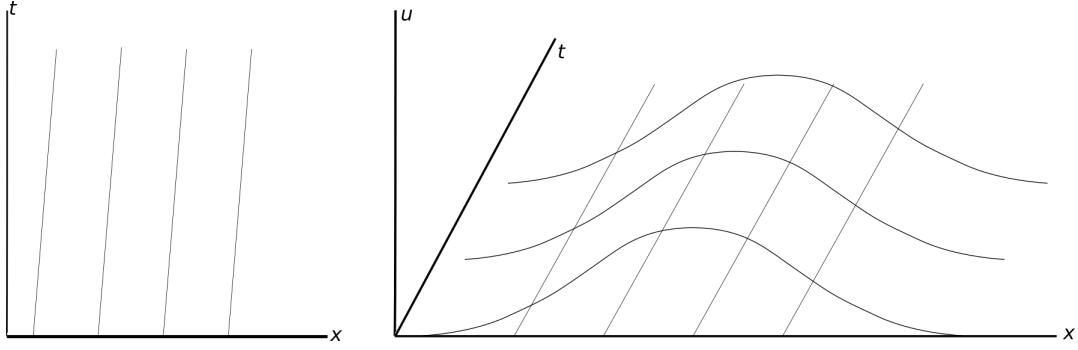


Figura 3.1: Representación de cómo la condición inicial u_0 en la ecuación de advección se propaga en el tiempo a lo largo de las rectas $x = x_0 + at$. En la imagen derecha se representan las mismas rectas pero en función de x , i.e. $t = t(x)$, por lo que la pendiente se comporta de manera contraria a la velocidad, a mayor pendiente en esta representación menor velocidad y viceversa; en la representación la pendiente es grande por lo que la velocidad es pequeña, lo que lleva a tener poco movimiento, como se aprecia en la imagen derecha.

para analizar la evolución de un fluido. Esta propiedad de formar discontinuidades se debe a que son ecuaciones cuasilineales, i.e. hay funciones de las variables conservativas u multiplicando a la derivada espacial de primer orden con potencia igual a uno. Lo anterior es más claro si se ve el caso de ecuaciones más simples.

Considérese la ecuación de advección:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.22)$$

donde se tiene que a es una constante, $u = u(x, t)$ y la condición inicial es $u(x, 0) = u_0(x)$. Ahora, considérese la derivada temporal total de u , la cual usando la regla de la cadena será:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt},$$

es fácil notar que si $\frac{du}{dt} = 0$ y $\frac{dx}{dt} = a$ se tiene la ecuación de advección (3.22), además al comparar ambas ecuaciones se puede notar que a representa una velocidad, en particular, será la velocidad de propagación de uno de los modos de la ecuación de onda, pues la ecuación de advección es la raíz cuadrada de la ecuación de onda. Que se considere $\frac{dx}{dt} = a$, siendo a una constante, es un hecho importante, ya que dicha condición lleva a que $x = x_0 + at$. Debido a esto se tendrá que la solución u en el punto x_0 permanecerá igual a lo largo de toda la recta $x = x_0 + at$, de manera particular, la condición inicial

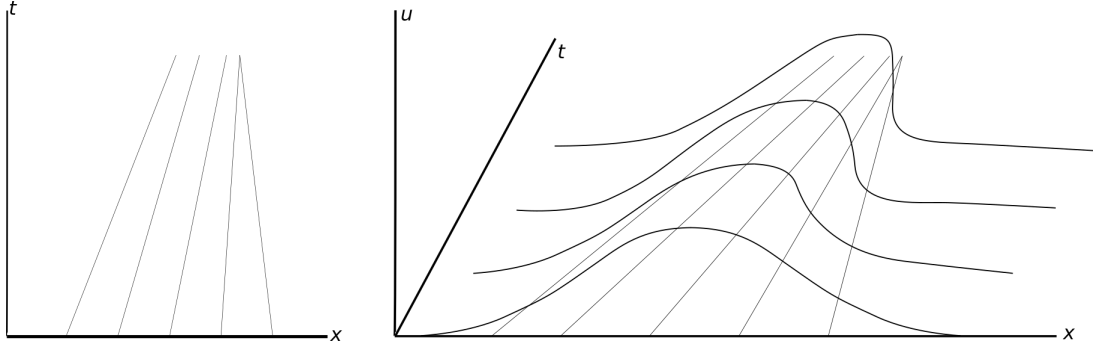


Figura 3.2: Representación de cómo la dependencia de las líneas características en el valor de la condición inicial u_0 conduce a discontinuidades.

en dicho punto se propagará por todo el dominio a lo largo de dicha recta. Es por esto que la solución estará en términos de la condición inicial u_0 para cada punto x_0 en el tiempo inicial. Las líneas por las que se propaga la condición inicial se llaman *líneas características*. En la Figura 3.1 se puede observar una representación de las líneas características para el caso de la ecuación de advección.

Para contrastar considérese la ecuación de Burgers:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.23)$$

así como en la ecuación de advección, se tendrá que las condiciones iniciales se propagarán por las líneas características, sin embargo, esta vez el término que acompaña a la primera derivada espacial es la función u , en lugar de un término constante, por lo que el valor de la velocidad de propagación dependerá del valor de u_0 en cada punto x , lo que da lugar a que las líneas características puedan tener pendientes que las lleven a cruzarse, produciendo de esta forma discontinuidades aun cuando las condiciones iniciales u_0 sean suaves. La Figura 3.2 muestra como se cruzan las líneas características para el caso de la ecuación de Burgers.

En general, cuando una ecuación es de la forma $\partial_t u + f(u) \partial_x u = 0$, i.e. una función de u multiplicando a la derivada de primer orden de u respecto de x con potencia igual a uno, se dice que la ecuación es cuasilineal; la ecuación de Burgers es de este tipo.

Ahora considérese un sistema de ecuaciones escrito como sigue:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{b}, \quad (3.24)$$

donde

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Se tendrán diferentes escenarios dependiendo de si las componentes de A y b son constantes o son variables, estos serán como sigue:

- Componentes de A, b constantes: El sistema será lineal con coeficientes constantes.
- Componentes de A, b variables con dependencia de t, x : El sistema será lineal con coeficientes variables.
- Componentes de A dependen de u : El sistema sería cuasilineal debido a que se tendría productos de funciones u con la derivada espacial de primer orden.

Además se tiene que la estructura característica de la matriz A será de gran importancia, ya que el grado de hiperbolicidad del sistema dependerá de esta. El sistema será hiperbólico si A tiene n eigenvalores reales $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ y un conjunto lealmente independiente de eigenvectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ si además se cumple que los todos los eigenvalores son diferentes, el sistema será estrictamente hiperbólico.

La ecuación (3.24) abarca los dos casos anteriores vistos, la ecuación de advección y la de Burgers. Por ejemplo, si el vector $b = 0$, la matriz A tiene valores constantes y se diagonaliza, en caso de no estar ya en una forma diagonal, se tendrá un sistema de n ecuaciones de advección donde los eigenvalores de la matriz A serán las velocidades de propagación; si en cambio la matriz A tiene componentes que dependen de u se tendrá un sistema de n ecuaciones de Burgers. El sistema de las ecuaciones de Euler que se vió anteriormente tiene también la misma forma, tomando la ecuación de balance de flujos:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{u}),$$

y aplicando la regla de la cadena se sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} &= \mathbf{S}(\mathbf{u}), \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} &= \mathbf{S}(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Esta última forma es claramente igual que la de la ecuación (3.24) y dado que los elementos de la matriz A dependen de u se tendrá que el sistema de ecuaciones será cuasilineal, i.e., las ecuaciones de Euler son un sistema cuasilineal, lo que significa que aún con condiciones iniciales suaves podrá desarrollar discontinuidades.

Capítulo 4

Métodos numéricos

Hasta el momento solo se ha hablado de la evolución del espacio-tiempo y un fluido, sin embargo nada se ha mencionado sobre los métodos numéricos necesarios para llevar a cabo estos procesos. Para la evolución del espacio-tiempo se resuelven las ecuaciones ADM usando el método de *diferencias finitas* dadas condiciones iniciales consistentes con las constricciones Hamiltoniana y de momento; para la evolución del fluido, las ecuaciones de Euler relativistas, además será necesario otro método debido a que estas ecuaciones pueden conducir a discontinuidades, para lo cual se usará el método de *volúmenes finitos* que permite la evolución de dichas discontinuidades.

SECCIÓN 4.1

Diferencias finitas

El método de diferencias finitas es un método que permite la resolución numérica de ecuaciones diferenciales por medio de la discretización del dominio y de las ecuaciones diferenciales. Al ser un método numérico solo proporciona una aproximación a la solución exacta del problema y dependerá de algunos factores clave qué tan buena sea esta aproximación.

Para entender cómo es que este método funciona, considérese una EDP (ecuación diferencial parcial) que contiene una combinación de primeras y segundas derivadas espa-

ciales y temporales de una función $f = f(x, t)$:

$$\left(f, \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Se busca resolver como un problema de valores iniciales (PVI) en el dominio D , definido como:

$$D = [x_{min}, x_{max}] \times [0, t_f],$$

considerando condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= f_0(x), \\ \dot{f}(x, 0) &= \dot{f}_0(x), \end{aligned}$$

y condiciones de frontera:

$$f(x_{min}, t), f(x_{max}, t).$$

Este problema abarca una cantidad suficientemente general de ecuaciones diferenciales parciales para explicar el método de diferencias finitas.

Discretización del dominio

La versión discretizada del dominio D_d consiste en un subconjunto de puntos del dominio original D , para lo cual, se toma un número finito de puntos de este último conjunto. Estos puntos del dominio discreto D_d se escriben como:

$$x_i = x_{min} + i\Delta x \quad t^n = n\Delta t \quad (4.1)$$

donde $i = 0, 1, 2, \dots, N_x$ y $n = 0, 1, 2, \dots, N_t$. N_x es el número de puntos tomados para el espacio y N_t el número de puntos para el tiempo. El factor Δx se define como $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/N_x$ y es llamado *resolución espacial*; por su parte, Δt es llamada

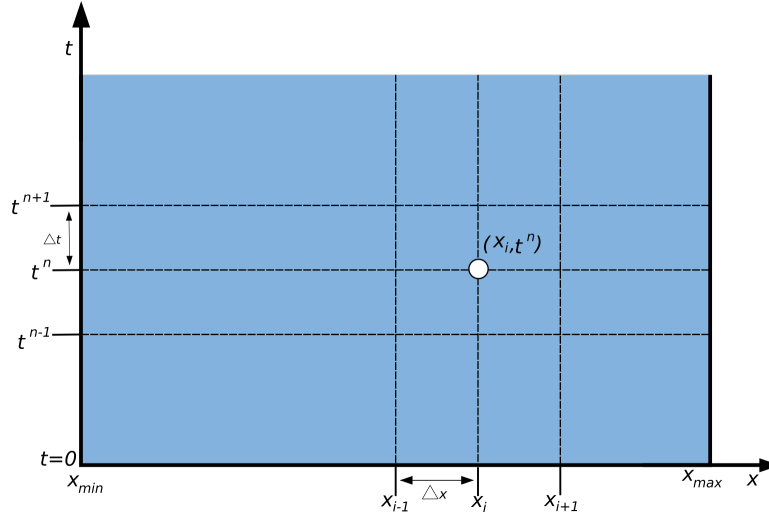


Figura 4.1: Representación del dominio discreto bidimensional $D_d = (x_i, t^n)$. Cada *celda* tiene dimensiones de $\Delta x \Delta t$.

resolución temporal y se define como $\Delta t = t_f/N_t$. El dominio discreto es entonces el conjunto de puntos $D_d = (x_i, t^n)$ y solo dentro de este estarán definidas las variables y funciones involucradas en la ecuación. Esto se puede ver de una manera gráfica en la Figura 4.1. Para denotar facilitar la escritura, el valor de la función f en el punto (x_i, t^n) se denotará como $f(x_i, t^n) = f_i^n$.

La resolución temporal y la espacial estarán relacionadas por medio del factor de Courant–Friedrichs–Lewy o factor CFL que se define como:

$$CFL = \frac{\Delta t}{\Delta x}. \quad (4.2)$$

En la práctica se escoge la resolución espacial Δx y después con el factor CFL se calcula la resolución temporal Δt como $\Delta t = (CFL)\Delta x$. El factor CFL juega un rol clave para la estabilidad del método, en base a este se calcula la resolución temporal, la cual de no ser adecuada para el problema tratado puede no conducir a inestabilidad. Lo anterior se puede presentar fácilmente, por ejemplo, al llevar a cabo la evolución de una variable u que está en movimiento. Para calcular el valor de esta variable en el punto (x_i, t^{n+1}) es necesario usar la información de los puntos (x_{i-1}, t^n) y (x_{i+1}, t^n) , los cuales serán las fronteras espaciales dentro de las cuales se podrá comunicar información para computar el cálculo, sin embargo, u está en movimiento y si Δt no es lo suficientemente pequeño se necesitará información más allá de estas fronteras, lo que conducirá a inestabilidades por falta de información. Para más detalle consultar [Diener 2003].

Discretización de la EDP

Ahora que se tiene discretizado el dominio es necesario construir la versión discreta de la ecuación. Dado que la ecuación tiene derivadas tanto espaciales como temporales, será necesario construir una versión discreta de las derivadas. Para lograr lo anterior se supondrá que en puntos vecinos a (x_i, t^n) , f puede ser expresada como una serie de Taylor y se sigue:

1. Se obtiene la serie de Taylor de f en el punto donde se quiere conocer el valor de la derivada así como en puntos cercanos al mismo. Para este caso se evalúa en los puntos x_{i-1}, x_i, x_{i+1} :

$$\begin{aligned} f_{i-1}^n &= f_i^n - \Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_i, t^n)} + \frac{\Delta x^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(x_i, t^n)} - \frac{\Delta x^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_{(x_i, t^n)} + \mathcal{O}(\Delta x^4), \\ f_i^n &= f_i^n, \\ f_{i+1}^n &= f_i^n + \Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_i, t^n)} + \frac{\Delta x^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(x_i, t^n)} + \frac{\Delta x^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_{(x_i, t^n)} + \mathcal{O}(\Delta x^4), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{O}(\Delta x^4)$ indica el orden del error que se tiene si no se continúa la serie; los términos Δx se obtienen al evaluar la expresión $(x - x_i)$ en los puntos x_{i-1}, x_{i+1} debido a que $x_{i-1} = x_i - \Delta x$ y $x_{i+1} = x_i + \Delta x$.

2. Se pueden operar las series obtenidas para la función f evaluada en los puntos mencionados anteriormente, de tal forma que se anulen todos los términos menos la derivada buscada, pudiendo despejarla. Si se busca la derivada de primer orden se puede obtener de las siguientes tres maneras:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_i, t^n)} &= \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x), \\ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_i, t^n)} &= \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x), \\ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_i, t^n)} &= \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \end{aligned} \tag{4.3}$$

o si se busca la derivada de segundo orden:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(x_i, t^n)} = \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{2\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

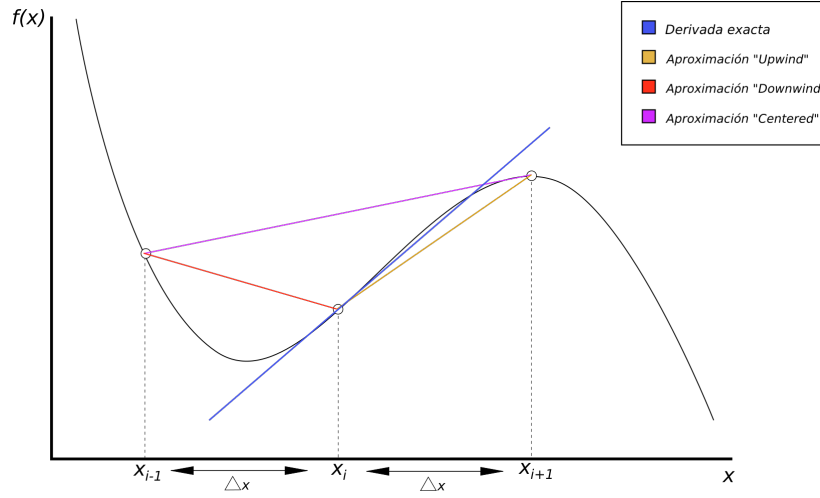


Figura 4.2: Representación de las diferentes aproximaciones.

Nuevamente los términos $O(\Delta x)$ y $O(\Delta x^2)$ indican el orden del error en el valor aproximado de la derivada. La diferencia entre las diferentes formas de calcular la derivada en las expresiones (4.3) es que usan diferentes puntos para hacerlo y que la última de estas formas tiene un error mas pequeño que las demás. Las expresiones (4.3) son llamadas *upwind*, *downwind*, *centered* respectivamente. Estos diferentes casos se representan en la Figura 4.2, donde se tienen diferentes pendientes según los puntos considerados.

Para el caso de las derivadas temporales se sigue un proceso análogo, haciendo la expansión en serie de Taylor. Las aproximaciones upwind, downwind, centered para la derivada temporal en el punto (x_i, t^n) son:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{(x_i, t^n)} &= \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t), \\
 \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{(x_i, t^n)} &= \frac{f_i^n - f_i^{n-1}}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t), \\
 \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{(x_i, t^n)} &= \frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2),
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

y la derivada temporal de segundo orden:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_{(x_i, t^n)} = \frac{f_i^{n+1} - 2f_i^n + f_i^{n-1}}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2).$$

Ahora que se tiene la forma de calcular las derivadas espaciales y temporales de manera discreta, es posible discretizar la EDP sin problema alguno. Como ejemplo de la discretización de una EDP se tomará la ecuación de onda, que cumple con las consideraciones iniciales que se hicieron sobre la EDP al iniciar la sección. La ecuación de onda es:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,$$

sustituyendo las derivadas de segundo orden escritas anteriormente se tiene:

$$\frac{f_i^{n+1} - 2f_i^n + f_i^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{2\Delta x} = \mathcal{O}(\Delta x^2, \Delta t^2).$$

Despejando el término f_i^{n+1} se obtiene:

$$f_i^{n+1} = \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) (f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n) + 2f_i^n - f_i^{n-1},$$

haciendo caso omiso del error. Esta ecuación permite obtener el valor de la función f en el punto (x_i, t^{n+1}) en base a sus valores en tiempos anteriores, entonces aplicando esto para todo punto x_i se puede obtener la solución al tiempo t^{n+1} lo que a su vez permite encontrar la solución para el siguiente tiempo y así sucesivamente hasta $t = t_f$.

4.1.1 Método de líneas

El método de líneas es un enfoque dentro del método de diferencias finitas que permite ver al problema de valores iniciales de una EDP como un conjunto de $N_x + 1$ ecuaciones diferenciales ordinarias en el tiempo a lo largo de líneas de posición constante. Para ver esto, considérese un problema de valores iniciales como el planteado en la sección anterior, agregando la condición de que la derivada temporal pueda ser separada del resto de la ecuación de tal manera que la ecuación pueda ser reescrita como:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right),$$

donde el lado derecho de la ecuación será una combinación de la función f y su primera y segunda derivada espacial, como se escribe en la ecuación anterior. Ahora, para calcular la solución numérica de la EDP por medio del método de líneas es necesario expresar en forma discreta el lado derecho de la ecuación pero dejando la derivada temporal intacta. Con esto será posible tener para para todo punto dentro del dominio discreto D_d una ecuación del tipo:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{(x_i, t^n)} = \left(f \Big|_{(x_i, t^n)}, \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_i, t^n)}, \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(x_i, t^n)} \right),$$

esta es llamada la versión *semidiscreta* de la EDP. Dado que es posible obtener el valor de las versiones discretas de las derivadas espaciales, el lado derecho de la ecuación tendrá un valor específico, i.e., la ecuación será una EDO para f de t^n a $t^{n+1} \forall x_i$; además al considerar las condiciones iniciales de la EDP original, se puede tomar el problema como un problema de valores iniciales en el tiempo a lo largo de x_i , considerando todos los puntos se tiene entonces un conjunto de $N_x + 1$ ecuaciones diferenciales ordinarias en el tiempo a lo largo de líneas de posición constante. Para resolver estas ecuaciones diferenciales ordinarias se usa un integrador, en este caso, se usará el método Runge-Kutta de orden tres.

SECCIÓN 4.2

Volúmenes finitos

El método de diferencias finitas recurre a la discretización de la EDP para así solucionar una versión aproximada de la ecuación original, sin embargo, para lograr esto es necesario considerar que las funciones de las cuales se necesita conocer la derivada son suaves para así poder hacer una expansión en serie de Taylor, esto supone un gran problema a la hora de trabajar con funciones que pueden no ser suaves pues conducirá a un fallo inminente del método. Es por lo anterior que el método de diferencias finitas no puede ser usado con las ecuaciones de Euler (3.21) pues las ecuaciones de Euler pueden producir discontinuidades de las variables aún cuando las condiciones iniciales son suaves. Para la solución de dichas ecuaciones se usará el método de *volúmenes finitos*. Este nuevo método tiene dos diferencias claves en comparación con el método de diferencias finitas:

- Se discretizará de una manera distinta al dominio D . En este caso la atención se

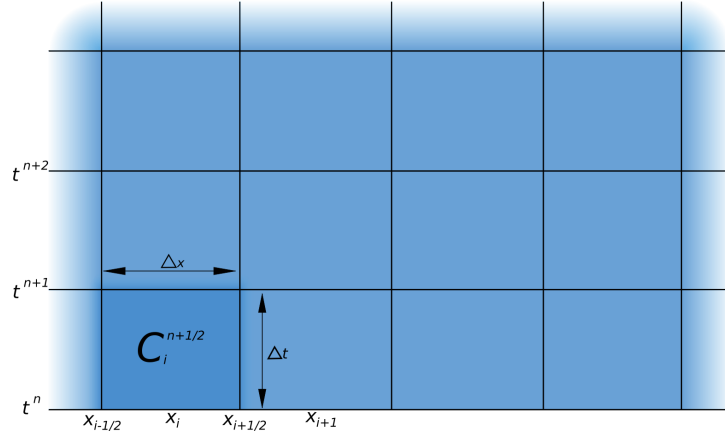


Figura 4.3: Representación del dominio discreto para el caso del método de volúmenes finitos. La celda sombreada tiene centro en $x_i, t^{n+1/2}$ razón por la cual esta marcada de esa manera; al igual que en el caso de diferencias finitas, el volumen de cada celda es de $\Delta x \Delta t$.

centra sobre las celdas que forma la malla de puntos y no en los puntos en sí, para lo cual el tiempo nuevamente tendrá valores $t^n = n\Delta t$ y el espacio consistirá de celdas centradas en $x_i = i\Delta x$. Lo que se observa en la Figura 4.3.

- La discretización será también diferente pues esta se hará sobre la forma integral del problema.

Para ejemplificar el uso de la discretización en este método qué mejor que un sistema que se adecue a la forma en que se escriben las ecuaciones de Euler, i.e., un sistema de balance de flujos. Tómese entonces el sistema (3.8) y considérese que el problema es únicamente en una dimensión espacial, esto es:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial x} = \mathbf{S}.$$

Ahora, se toma el promedio de la ecuación anterior sobre la celda $C_i^{n+1/2}$, lo que se escribe como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \partial_t \mathbf{u} dt dx + \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{u}) dt dx \\ = \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{S} dt dx. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Nótese que el primer término, el promedio para las variables conservativas, se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \partial_t \mathbf{u} dt dx &= \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (\mathbf{u}(x, t^{n+1}) - \mathbf{u}(x, t^n)) dx \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{u}(x, t^{n+1}) dx - \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{u}(x, t^n) dx \right], \end{aligned}$$

donde los dos términos dentro de las llaves son los promedios espaciales de las variables conservativas para la celda centrada en x_i para los tiempos t^n y t^{n+1} ; esto se denotará como:

$$\bar{\mathbf{u}}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{u}(x, t^n) dx, \quad \bar{\mathbf{u}}_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{u}(x, t^{n+1}) dx.$$

Para el promedio de las fuentes se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{u}) dt dx &= \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\mathbf{F}(x_{i+1/2}, t) - \mathbf{F}(x_{i-1/2}, t)) dt \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(x_{i+1/2}, t) dt - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(x_{i-1/2}, t) dt \right], \end{aligned}$$

en este caso los términos dentro de las llaves son los promedios temporales de los flujos y se denotarán como:

$$\bar{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(x_{i+1/2}, t) dt, \quad \bar{\mathbf{F}}_{i-1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(x_{i-1/2}, t) dt.$$

La última integral en (4.5) no se puede simplificar más, es en sí el promedio espacial y temporal de las fuentes y se denotará como:

$$\bar{\mathbf{S}}_i^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta x \Delta t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{S}(x, t) dt dx.$$

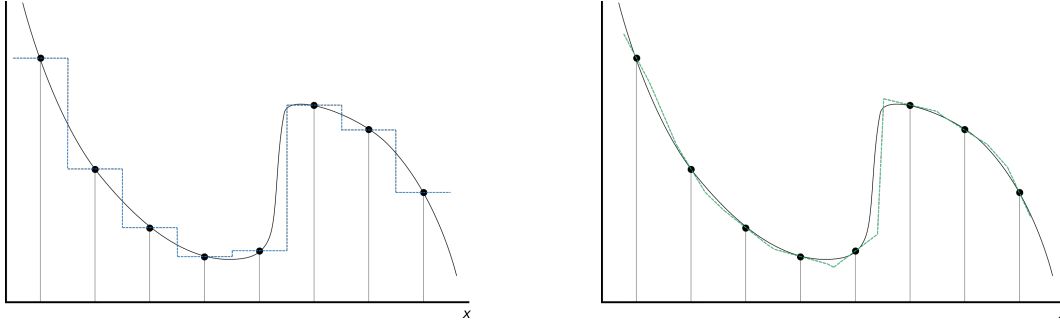


Figura 4.4: Representación de un reconstructor constante a trozos, como el reconstructor Godunov (izquierda) y un reconstructor lineal a trozos, como el reconstructor limitador de pendiente minmod (derecha); considerar la variable como lineal a trozos permite una reconstrucción mas precisa.

Tomando todo esto en cuenta se puede obtener la versión discretizada del sistema, la cual sería:

$$\bar{\mathbf{u}}_i^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\bar{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{n+1/2} - \bar{\mathbf{F}}_{i-1/2}^{n+1/2} \right) + \bar{\mathbf{S}}_i^{n+1/2} \Delta t, \quad (4.6)$$

donde es necesario encontrar el valor de $\bar{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{n+1/2}$, $\bar{\mathbf{F}}_{i-1/2}^{n+1/2}$, para esto se considera un problema de Riemann en la frontera entre las celdas, lo que requerirá aproximar el promedio espacial de las variables $\bar{\mathbf{u}}$ en cada celda con variables definidas a trozos $\tilde{\mathbf{u}}$. Es necesario entonces reconstruir estas variables $\tilde{\mathbf{u}}$, la manera más sencilla de hacerlo es considerando las variables como constantes a trozos, este es el procedimiento que sigue un reconstructor Godunov; si se consideran las variables como lineales a trozos, las variables $\tilde{\mathbf{u}}$ se reconstruyen con un limitador de pendiente minmod, este aproxima las variables por la derecha y la izquierda de las fronteras entre las celdas, limitando la pendiente de la función lineal en cada celda. Se tiene que la aproximación de cada lado de la frontera entre las celdas es:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_{i+1/2}^L &= \bar{\mathbf{u}}_i + \sigma_i(x_{i+1/2} - x_i), \\ \tilde{\mathbf{u}}_{i+1/2}^R &= \bar{\mathbf{u}}_{i+1} + \sigma_{i+1}(x_{i+1/2} - x_{i+1}), \end{aligned}$$

donde σ_i se define como:

$$\sigma_i = \text{minmod}(m_{i-1/2}, m_{i+1/2}),$$

siendo los argumentos $m_{i-1/2}, m_{i+1/2}$ las derivadas de las variables conservativas $\bar{\mathbf{u}}$ centradas en la frontera entre las celdas, lo que se puede calcular como:

$$m_{i-1/2} = \frac{\bar{\mathbf{u}}_i - \bar{\mathbf{u}}_{i-1}}{\Delta x},$$

y el limitador de pendiente minmod se define como:

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } |a| < |b| \text{ y } ab > 0, \\ b & \text{si } |a| > |b| \text{ y } ab > 0, \\ 0 & \text{si } ab < 0. \end{cases}$$

La diferencia entre los dos reconstructores, se ejemplifica en la Figura 4.4.

Usando las variables $\tilde{\mathbf{u}}$ junto con un solucionador de Riemann aproximado es posible encontrar los valores de los promedios temporales de los flujos $\bar{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{n+1/2}, \bar{\mathbf{F}}_{i-1/2}^{n+1/2}$. De manera particular el solucionador HLLE, dado por [Toro 1999], [Harten, Lax, & van Leer 1983], [Harten, Lax, & van Leer 1983], es cómodo ya que solo requiere los eigenvalores λ_i de la matriz Jacobiana $\partial \mathbf{F}(\mathbf{u}) / \partial \mathbf{u}$, los cuales son las velocidades características, como se vio en la sección 3.3. La fórmula HLLE para calcular los flujos aproximados es:

$$\bar{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{HLLE} = \frac{\lambda^+ \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}_{i+1/2}^L) + \lambda^- \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}_{i+1/2}^R) + \lambda^+ \lambda^- (\tilde{\mathbf{u}}_{i+1/2}^R - \tilde{\mathbf{u}}_{i+1/2}^L)}{\lambda^+ - \lambda^-}, \quad (4.7)$$

teniendo que:

$$\begin{aligned} \lambda^+ &= \max(0, \lambda_1^R, \lambda_2^R, \lambda_3^R, \lambda_1^L, \lambda_2^L, \lambda_3^L), \\ \lambda^- &= \min(0, \lambda_1^R, \lambda_2^R, \lambda_3^R, \lambda_1^L, \lambda_2^L, \lambda_3^L). \end{aligned}$$

Dadas estas definiciones, se tiene que λ^+ será la velocidad característica de las componentes del vector $\mathbf{u}$, de mayor propagación hacia la izquierda o derecha; de manera análoga, λ^- será la velocidad característica las componentes del vector $\mathbf{u}$, de menor propagación hacia la izquierda o derecha.

Una vez que se obtienen los valores de $\bar{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{n+1/2}, \bar{\mathbf{F}}_{i-1/2}^{n+1/2}$ usando la formula (4.7) es posible usar esos valores y la ecuación (4.6) para evolucionar las variables conservativas desde el tiempo inicial hasta el tiempo final usando el método de líneas, sobre la ecuación:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} = \frac{(\bar{\mathbf{F}}_{i+1/2}^{\text{HLL E}} - \bar{\mathbf{F}}_{i-1/2}^{\text{HLL E}})}{\Delta x} + \bar{\mathbf{S}}_i^{n+1/2},$$

pudiendo encontrar así la solución del sistema de ecuaciones.

Es importante señalar que al usar este método en las ecuaciones de Euler es importante cuidar que el valor de la densidad ρ_0 sea finito mayor que 0, de lo contrario este podría llevar a divergencias de cantidades físicas y numéricas. Un ejemplo simple de esto se encuentra en la definición de la entalpía específica, la cual diverge si no se cumple la condición anterior. Para solucionar esto se asigna un valor mínimo a la densidad ρ_0 llamado atmósfera ρ_{atm} .

SECCIÓN 4.3

Error y convergencia

Dado que las soluciones son numéricas, siempre existirá un error al comparar estas con la solución exacta, si es que esta existe. Este error se puede expresar de la siguiente forma:

$$e_i^n = f_i^n - f_i^{en}, \quad (4.8)$$

siendo f_i^n la solución numérica y f_i^{en} la solución exacta, ambas en el punto (x_i, t^n) . El hecho de que la definición del error sea en cada punto es algo no muy conveniente, pues revisar el error para cada tiempo y punto en el dominio no es algo cómodo. Es por esto que se usa la convergencia de una norma y se usa el teorema de Lax [Thomas 1995], que garantiza que si alguna norma del error converge a 0, entonces también lo hace en cada punto del dominio. Considérense las normas L_1 y L_2 , las cuales dada una función f a lo largo del eje x son:

$$L_1(f) = \int_{x_{min}}^{x_{max}} |f| dx, \quad (4.9)$$

$$L_2(f) = \sqrt{\int_{x_{min}}^{x_{max}} f^2 dx}, \quad (4.10)$$

donde la integral de una función f en el dominio discreto se calcula usando la regla del trapecio:

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} f dx = \sum_{i=1}^{N_x} \frac{(f_{i-1} + f_i)}{2} \Delta x + O(\Delta x^2)$$

esta es la suma del área de los rectángulos cuya altura es el promedio del valor entre los puntos f_{i-1} , f_i y cuya base es Δx . Aplicando esto en las ecuaciones (4.9) y tomando la función f como el error, integrando sobre le dominio espacial, se obtiene:

$$L_1(e^n) = \sum_{i=1}^{N_x} \frac{1}{2} (|e_{i-1}^n| + |e_i^n|) \Delta x, \quad (4.11)$$

$$L_2(e^n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_x} \frac{1}{2} ((e_{i-1}^n)^2 + (e_i^n)^2) \Delta x}. \quad (4.12)$$

$$(4.13)$$

Ambas serán normas del error al tiempo t^n y permitirán revisar que tan acertada es la solución numérica respecto a la solución exacta.

Ahora, considérense tres soluciones numéricas f_i^{n1} , f_i^{n2} , f_i^{n3} , obtenidas con resoluciones de $\Delta x_1 = \Delta x$, $\Delta x_2 = \Delta x/2$ y $\Delta x_3 = \Delta x/4$, respectivamente, además, considérese que el error para todos lo métodos usados es de orden n . Tomando todo esto en consideración y reescribiendo la solución numérica en términos de la exacta y el error, se tiene:

$$\begin{aligned} f_i^{n1} &= f_i^{en} + E (\Delta x)^n, \\ f_i^{n2} &= f_i^{en} + E \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^n, \\ f_i^{n3} &= f_i^{en} + E \left(\frac{\Delta x}{4} \right)^n. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Si se conoce la solución exacta f_i^{en} , se podrá obtener el *factor de convergencia* como:

$$\frac{f_i^{n1} - f_i^{en}}{f_i^{n2} - f_i^{en}} \simeq \left(\frac{\Delta x}{\frac{\Delta x}{2}} \right)^2 = 2^2, \quad (4.15)$$

al tiempo t^n . Análogamente se tendrá lo mismo si se usa f_i^{n2} y f_i^{n3} . Dado que no siempre se tendrá una solución analítica con la cuál comparar los resultados, se tiene el *factor de autoconvergencia*:

$$\frac{f_1^{n1} - f_1^{n2}}{f_1^{n2} - f_1^{n3}} \simeq \frac{\Delta x^n - (\frac{\Delta x}{2})^n}{(\frac{\Delta x}{2})^n - (\frac{\Delta x}{4})^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}} = 2^n. \quad (4.16)$$

Este factor, ayudará a verificar si la solución numérica converge, para lo cual debe de cumplirse esta relación.

Capítulo 5

Acreción con el espacio-tiempo fijo

En los capítulos anteriores se ha desarrollado de manera general la teoría sobre las ecuaciones de campo de Einstein, las ecuaciones ADM, agujeros negros, las ecuaciones de Euler relativistas, el método de líneas y el método de volúmenes finitos. Usando estos temas desarrollados es posible llevar a cabo la evolución de un fluido perfecto alrededor de un agujero negro donde el espacio-tiempo esté fijo o donde este también evolucione. En este capítulo se tratará el caso del espacio-tiempo fijo para dos escenarios distintos: el caso de un fluido perfecto sin presión, para el cual existe solución estacionaria y exacta que servirá para comprobar la validez del método, la acreción de Bondi; además se presentará la evolución para un fluido perfecto con presión bajo el mismo escenario, la acreción de Michel, que también tiene solución estacionaria. Para las soluciones de ambos casos se usan los resultados de [Papadopoulos & Font 1998].

SECCIÓN 5.1

Ecuaciones y condiciones

Antes de proceder a resolver el caso de la acreción de un fluido perfecto con el espacio-tiempo fijo es necesario fijar las condiciones sobre las que se desarrollarán los casos mencionados.

Espacio-tiempo

Como ya se mencionó, el espacio-tiempo será fijo, i.e., no evolucionará conforme pase el tiempo. Se usará el espacio-tiempo de la solución de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein, las cuales fueron descritas en la sección 2.4.1. El elemento de línea será el de la ecuación (2.61), i.e.:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{4M}{r} dt dr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Reescribiendo el lapso, la componente distinta de 0 del vector de corrimiento y las componentes del tensor métrico para este espacio-tiempo como en la ecuación (2.64) se tiene:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2M}{r}}}, \\ \beta_r &= \frac{2M}{r}, \\ \beta^r &= \frac{2M}{r} \frac{1}{1 + \frac{2M}{r}}, \\ \gamma_{rr} &= 1 + \frac{2M}{r}, \\ \gamma_{\theta\theta} &= r^2, \\ \gamma_{\phi\phi} &= r^2 \sin^2 \theta.\end{aligned}$$

Teniendo explícitamente estas componentes es posible calcular los símbolos de Christoffel para este espacio-tiempo, los cuales serán necesarios para calcular las componentes del vector de fuentes $\mathbf{S}(\mathbf{u})$. Estos símbolos son:

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \frac{2M^2}{r^3}, & \Gamma^0_{0r} &= \frac{M}{r^2} \left(1 + \frac{2M}{r}\right), \\
\Gamma^r_{0r} &= -\frac{2M^2}{r^3}, & \Gamma^0_{rr} &= \frac{2M}{r^2} \left(1 + \frac{M}{r}\right), \\
\Gamma^r_{rr} &= -\frac{M}{r^2} \left(1 + \frac{2M}{r}\right), & \Gamma^\theta_{r\theta} &= \frac{1}{r}, \\
\Gamma^\phi_{r\phi} &= \frac{1}{r}, & \Gamma^0_{\theta\theta} &= -2M, \\
\Gamma^0_{\phi\phi} &= -2M \sin^2 \theta, & \Gamma^r_{00} &= \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \\
\Gamma^r_{\theta\theta} &= 2M - r, & \Gamma^r_{\phi\phi} &= (2M - r) \sin^2 \theta, \\
\Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma^\phi_{\theta\phi} &= \cot \theta.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Estas son las condiciones para estos dos casos en la evolución del espacio-tiempo.

Hidrodinámica

Se considerará para todos los casos de aquí en adelante que el flujo es esféricamente simétrico por lo que se busca solucionar las ecuaciones (3.21), las ecuaciones de Euler relativistas:

$$\begin{aligned}
\partial_t D + \partial_r \left(\alpha \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) D \right) &= 0, \\
\partial_t S_r + \partial_r \left(\alpha \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) J_r + \alpha \sqrt{\gamma} p \right) &= S_1, \\
\partial_t \tau + \partial_r \left(\alpha \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) \tau + \alpha \sqrt{\gamma} p v^r \right) &= S_4,
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \alpha\sqrt{\gamma} (T^{00} [(-\alpha^2 + \gamma_{rr}(\beta^r)^2)\Gamma_{0r}^0 + \gamma_{rr}\beta^r\Gamma_{0r}^r] \\
&\quad + T^{r0} [(-\alpha^2 + \gamma_{rr}(\beta^r)^2)\Gamma_{rr}^0 + \gamma_{rr}\Gamma_{0r}^r + \gamma_{rr}\beta^r(\Gamma_{rr}^r + \Gamma_{0r}^0)] \\
&\quad + T^{rr} [\gamma_{rr}\Gamma_{rr}^r + \gamma_{rr}\beta^r\Gamma_{rr}^0] \\
&\quad + T^{\theta\theta} \gamma_{\theta\theta} \Gamma_{\theta r}^\theta + T^{\phi\phi} \gamma_{\phi\phi} \Gamma_{\phi r}^\phi), \\
S_4 &= \alpha\sqrt{\gamma} (T^{00} (\partial_0 \alpha - \alpha \Gamma_{00}^0) + T^{r0} (\partial_r \alpha - 2\alpha \Gamma_{r0}^0) \\
&\quad - \alpha (T^{rr} \Gamma_{rr}^0 + T^{\theta\theta} \Gamma_{\theta\theta}^0 + T^{\phi\phi} \Gamma_{\phi\phi}^0)).
\end{aligned}$$

Para cerrar el sistema se considerará que el fluido obedece la ecuación de estado para un gas ideal, es decir:

$$p = \rho_0 e (\Gamma - 1),$$

dónde se usará $\Gamma = 4/3$ dado que se trabaja con un fluido relativista.

La fórmula HLLC para aproximar los flujos necesita los valores característicos de la matriz Jacobiana $\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})/\partial \mathbf{u}$, tomando estos de [Guzmán & Lora-Clavijo 2012] se tiene que los eigenvalores son:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \alpha v^r - \beta^r, \\
\lambda_2 &= \frac{\alpha}{1 - v_r v^r c_s^2} \left[v^r (1 - c_s^2) + c_s \sqrt{(1 - v_r v^r) [\gamma^{rr} (1 - v_r v^r c_s^2) - v^r v^r (1 - c_s^2)]} \right] - \beta^r, \\
\lambda_3 &= \frac{\alpha}{1 - v_r v^r c_s^2} \left[v^r (1 - c_s^2) - c_s \sqrt{(1 - v_r v^r) [\gamma^{rr} (1 - v_r v^r c_s^2) - v^r v^r (1 - c_s^2)]} \right] - \beta^r,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

donde c_s es la velocidad del sonido, la cual se define como:

$$h c_s^2 = \chi + \left(\frac{p}{\rho_0^2} \right) \kappa \tag{5.3}$$

donde:

$$\chi = \frac{\partial p}{\partial \rho_0}, \quad \kappa = \frac{\partial p}{\partial e},$$

usando la ecuación de estado se tiene:

$$\chi = e(\Gamma - 1) = \frac{p}{\rho_0},$$

$$\kappa = \rho_0(\Gamma - 1).$$

La entalpía $h = 1 + e + p/\rho_0$, despejando e de la ecuación de estado se puede reescribir como $h = 1 + \frac{p}{\rho_0} \frac{\Gamma}{\Gamma - 1}$. Usando estos resultados y despejando de la ecuación (5.3) se tiene que la velocidad del sonido está dada por:

$$c_s^2 = \frac{\chi + \kappa \frac{p}{\rho_0^2}}{h} = \frac{p(\Gamma - 1)\Gamma}{\rho_0(\Gamma - 1) + p\Gamma}. \quad (5.4)$$

Es necesario expresar las variables primitivas en función de las variables conservativas para poder recalcular las primeras una vez que estas últimas tengan nuevos valores, ya que los flujos están escritos en términos de ambas variables. Las variables conservativas se definieron como:

$$D = \sqrt{\gamma} \rho_0 W,$$

$$J_r = \sqrt{\gamma} \rho_0 h W^2 v^r \gamma_{rr},$$

$$\tau = \sqrt{\gamma} (\rho_0 h W^2 - p - \rho_0 W).$$

De estas definiciones se pueden obtener las expresiones para algunas variables primitivas de una manera relativamente simple. De manera particular se expresan v^r y ρ_0 como:

$$v^r = \frac{J_r}{\sqrt{\gamma} \rho_0 h W^2 \gamma_{rr}} = \frac{J_r}{(\tau + \sqrt{\gamma} p + D) \gamma_{rr}},$$

$$\rho_0 = \frac{D}{W \sqrt{\gamma}} = \frac{D}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{1 - \gamma_{rr} (v^r)^2}. \quad (5.5)$$

En caso de que la presión sea diferente de 0, se parte de la ecuación de estado y se sigue:

$$\begin{aligned}
p &= \rho_0 e(\Gamma - 1) \\
&= (\Gamma - 1)(\rho_0 h - \rho_0 - p) \\
&= (\Gamma - 1) \left(\frac{1}{W^2} \left(\frac{\tau}{\sqrt{\gamma}} + p + \frac{D}{\sqrt{\gamma}} \right) - \rho_0 - p \right) \\
&= \rho_0(\Gamma - 1) \left(\frac{\tau + p\sqrt{\gamma} + D - \rho_0\sqrt{\gamma}W^2 - p\sqrt{\gamma}W^2}{\rho_0\sqrt{\gamma}W^2} \right) \\
&= \rho_0(\Gamma - 1) \left[\frac{\tau + D(1 - W) + p\sqrt{\gamma}(1 - W^2)}{DW} \right]. \tag{5.6}
\end{aligned}$$

Como se puede observar el factor de Lorentz está presente en la expresión anterior:

$$W \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma_{rr}(v^r)^2}},$$

pero substituyendo la expresión (5.5) para la velocidad, se tiene:

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{J_r^2}{\gamma_{rr}(\tau + \sqrt{\gamma}p + D)^2}}} \\
&= \frac{\sqrt{\gamma_{rr}}(\tau + \sqrt{\gamma}p + D)}{\sqrt{\gamma_{rr}(\tau + \sqrt{\gamma}p + D)^2 - J_r^2}}. \tag{5.7}
\end{aligned}$$

Esta expresión para W debe ser substituida en (5.6). Para encontrar la presión p usando la expresión (5.6) se considera la función:

$$f = p - \rho_0(\Gamma - 1) \left[\frac{\tau + D(1 - W) + p\sqrt{\gamma}(1 - W^2)}{DW} \right],$$

donde aún se debe substituir W por (5.7); al encontrar los ceros de esta función se encuentra el valor de p , para lo cual se usa el método de Newton-Raphson.

Tasa de acreción

La tasa de acreción de masa mide el flujo que está siendo acretado y es importante porque se relaciona con la luminosidad que a su vez se relaciona con mediciones

[Szuszkiewicz, Malkan & Abramowicz 1995], lo que permite comparar las simulaciones con datos reales. Para calcular esta cantidad se debe de hacer la integral de $\mathbf{F}_1^r$ sobre una superficie esférica de radio r_d , esto es:

$$\begin{aligned}
 \dot{M}_{acc}(r_d) &= \int_{S^2(r_d)} \alpha \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) DdS \Big|_{r_d} \\
 &= \int_{S^2(r_d)} \alpha \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) \rho_0 W \sqrt{\gamma} d\theta d\phi \Big|_{r_d} \\
 &= 4\pi \alpha \left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha} \right) \rho_0 W \sqrt{\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}} \Big|_{r_d}, \tag{5.8}
 \end{aligned}$$

donde $\gamma_{rr}, \gamma_{\theta\theta}$ son las componentes de la 3-métrica para el espacio-tiempo que se esté usando, en este caso el de Eddington-Finkelstein. Esta cantidad se evalúa para diferentes valores de r_d , que sería como tener detectores de flujo situados a diferentes distancias del hoyo negro.

Condiciones numéricas

Por último, es necesario especificar los parámetros numéricos que se usarán. Todos los valores usados para la simulación están en unidades geométricas.

Dominio numérico

La evolución será en un espacio-tiempo descrito con una dimensión espacial y la temporal, debido a la simetría esférica considerada. El dominio numérico espacial comprenderá $r \in [r_{min}, r_{max}]$ con $r_{min} = 1$ y $r_{max} = 51$, evitando así la singularidad geométrica en $r = 0$. Se tomará $N_r = 1000$ para la acreción de Bondi y $N_r = 2000$ para la acreción de Michel, por lo que la resolución espacial base es $\Delta r = 0.05$ y $\Delta r = 0.025$ respectivamente; el factor de Courant será $CFL = 0.25$, esto es $\Delta t = 0.0125$ y $\Delta t = 0.00625$. Para medir la tasa de acreción se usarán tres detectores situados en $r_d = 2M, 7M, 11M$.

Condiciones iniciales

Como condiciones iniciales se toma una densidad constante ρ_{ini} y una velocidad en dirección al agujero negro igualmente constante v_{ini}^r . Adicionalmente, el valor de la

atmósfera ρ_{atm} será de de 10^{-10} .

Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera serán diferentes en la frontera esférica interna $r = r_{min}$ y la frontera esférica externa $r = r_{max}$ debido a que se requiere que el fluido tenga diferentes comportamientos en cada frontera.

- Frontera interior

En el caso de $r = r_{min}$ el fluido debe de salir a través de esta frontera dirigiéndose hacia $r < r_{min}$ y dado que r_{min} está dentro del horizonte del agujero negro, no hay forma de que el flujo pueda apuntar hacia afuera; para lograr este efecto basta con hacer una extrapolación de los valores de las variables conservativas, para lo cual se usará la formula de interpolación de Lagrange con tres puntos, que aplicando a r_{min} lleva a:

$$\begin{aligned} D_0 &= 3D_1 - 3D_2 + D_3 \\ J_0 &= 3J_1 - 3J_2 + J_3 \\ \tau_0 &= 3\tau_1 - 3\tau_2 + \tau_3 \end{aligned} \tag{5.9}$$

- Frontera exterior

En el caso de la frontera esférica con radio r_{max} se busca que se mantenga el flujo entrante, esto se logra igualando a cero el lado derecho de las ecuaciones (3.21) para D, J_r, τ en $r = r_{min}$ durante la evolución.

SECCIÓN 5.2

Acreción de Bondi

La acreción de Bondi corresponde a la acreción esféricamente simétrica de un fluido perfecto sin presión en un agujero negro. Esta acreción tiene solución exacta, particularmente en [Papadopoulos & Font 1998] se presenta la solución para la densidad y velocidad en coordenadas de Eddington-Finkelstein, que se obtienen de integrar las ecuaciones de la hidrodinámica para el estado estacionario considerando un fluido perfecto, estas son:

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\rho_0 u^r &= C_1, \\ \sqrt{-g}\rho_0 h u^r u_t &= C_2,\end{aligned}\tag{5.10}$$

siendo C_1 y C_2 constantes de integración. Las soluciones obtenidas a partir de estas ecuaciones para ρ y v^r son:

$$\begin{aligned}\rho_{Bondi}(r) &= \frac{-C_1}{r^2 \sqrt{\frac{2M}{r}}} \\ v_{Bondi}^r(r) &= -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r}{2M}} \left(1 + \sqrt{\frac{2M}{r}} + \frac{2M}{r}\right)}\end{aligned}\tag{5.11}$$

donde la constante de integración C_1 tomará dos valores diferentes: $C_1 = -0.195$ siguiendo el desarrollo de [Papadopoulos & Font 1998] y $C_1 = -0.1$. Para los valores constantes iniciales ρ_{ini}, v_{ini}^r se tomará el valor de las soluciones (5.11) evaluadas en $r = r_{max}$, i.e. $\rho_{ini} = \rho_{Bondi}(r_{max})$ y $v_{ini}^r = v_{Bondi}^r(r_{max})$, el propósito de estas condiciones iniciales es averiguar qué ocurre con el flujo durante la evolución.

Que el fluido perfecto no tenga presión implica que cada vez que las variables primitivas tengan que ser recalculadas en base a las variables conservativas no será necesario hacerlo para la presión, bastará con asignar $p = 0$, lo que evita la necesidad de usar las ecuaciones (5.6) y (5.7); además la energía interna también será 0, siempre y cuando $\rho_0 > 0$, condición que se cumple dada la atmósfera ρ_{atm} .

Resultados

En las figuras 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4 se muestran los resultados numéricos obtenidos para la densidad ρ_0 , la velocidad radial v^r , la tasa de acreción $\dot{M}_{acc}$ y la norma L_2 del error para la densidad ρ_0 , todo esto para los casos $C_1 = -0.195$, y $C_1 = -0.1$. En todos los casos se muestra la solución exacta de Bondi. Se considera un hoyo negro de masa $M = \mathcal{X}M_\odot$, por lo cual se usa la Tabla 8.2 de factores de conversión de unidades geométricas a unidades físicas:

Variable	SI	Unidades geométricas (UG)	UG $\rightarrow$ SI
Masa	kg	$\mathcal{X}M_{\odot}$	$(1.98 \times 10^{30})\mathcal{X}$
Tiempo	s	$\mathcal{X}M_{\odot}$	$(4.916 \times 10^{-6})\mathcal{X}$
Longitud	m	$\mathcal{X}M_{\odot}$	$1474.954\mathcal{X}$
Energía	J	$\mathcal{X}M_{\odot}$	$(1.79 \times 10^{47})\mathcal{X}$
Densidad	Kg/m^3	$1/(\mathcal{X}M_{\odot})^2$	$(6.198 \times 10^{20})\mathcal{X}^{-2}$
Presión	Pa	$1/(\mathcal{X}M_{\odot})^2$	$(5.578 \times 10^{37})\mathcal{X}^{-2}$
Velocidad	m/s	1	c

Cuadro 5.1: Factores de conversión de unidades geométricas al SI en base a las masas solares $\mathcal{X}M_{\odot}$.

En la Figura 5.1 se muestran los resultados obtenidos de la evolución para ρ_0 para diferentes tiempos a todo lo largo del dominio espacial. Para ambos casos del valor de C_1 se observa que conforme pasa el tiempo el perfil se aproxima más a la solución de Bondi, iniciando este proceso desde r_{max} y moviéndose hacia la frontera izquierda hasta que para el tiempo $t \approx 300M$, unidades geométricas, la solución numérica coincide con la solución exacta, alcanzando un flujo estacionario que dura hasta el final de la evolución. Se observa que los perfiles obtenidos para $C_1 = -0.195$ y $C_1 = -0.1$ son iguales en forma pero diferentes en los valores que tienen a lo largo del dominio por un factor de 1.95, el mismo factor de diferencia entre los valores asignados a C_1 , lo que significa que se podrá obtener el perfil de cualquier otro valor de C_1 en base a otro ya existente simplemente multiplicando por el factor de diferencia entre los valores de C_1 ; esto se puede ver en la dependencia de la solución de Bondi (5.11) en el factor C_1 .

En el caso de v^r , la Figura 5.2 muestra los resultados para esta variable en diferentes tiempos. Se tiene que para los dos casos del valor de C_1 , v_r presenta un comportamiento análogo a ρ_0 , el perfil de la velocidad radial se acerca al perfil de la solución exacta de Bondi conforme pasa el tiempo. En base a estos resultados se puede decir que la solución de Bondi es un atractor en el tiempo para la densidad ρ_0 y la velocidad radial v^r , esto es, conforme el tiempo pase el perfil de ambas variables se acercará al perfil de la solución exacta. Los resultados para $C_1 = -0.195$ y $C_1 = -0.1$ en el caso de la velocidad radial v_r son los mismos, lo que será así para cualquier valor de C_1 ya que la solución para v_r no depende de esta constante, como se puede ver en (5.11). Para ambas variables, ρ_0 y v^r , la línea $t = 0$ corresponde al valor inicial constante de ambas variables, $\rho_{ini} = \rho_{bondi}(r_{max})$ y $v_{ini}^r = v_{bondi}^r(r_{max})$.

En la Figura 5.3 se muestran los resultados obtenidos para la tasa de acreción. Para los dos casos del valor de C_1 se presenta el mismo comportamiento, la tasa de acreción aumenta conforme se lleva a cabo la evolución hasta alcanzar un máximo poco antes de $t = 200$, siendo ligeramente diferentes los valores hasta este máximo entre los tres detectores; después de lo anterior, la tasa de acreción disminuye hasta alcanzar un valor constante, igual para los tres detectores, donde se mantiene hasta el final de la

evolución. Nuevamente la diferencia entre las tasas de acreción obtenidas para $C_1 = -0.195$ y $C_1 = -0.1$ se diferencian en un factor de 1.95, por lo que es posible obtener la tasa de acreción para cualquier valor de C_1 en base a otro previamente calculado. Es importante recordar que se tiene una densidad atmosférica ρ_{atm} que evita divergencias en las ecuaciones de Euler, esta densidad atmosférica contribuye durante toda la evolución a la acreción, por lo que se le llama acreción parásita.

Para finalizar con el caso de la acreción de Bondi, aprovechando que se conoce la solución exacta se calcula la norma L_2 del error de la densidad ρ_0 . En la Figura 5.4 se muestran los resultados obtenidos para L_2 para 3 diferentes resoluciones espaciales $\Delta r = 0.05, 0.025, 0.0125$. El comportamiento es análogo entre los dos casos del valor de C_1 , inicialmente el valor del error es grande para las tres resoluciones, pero conforme ρ_0 se acerca a la solución exacta el error va disminuyendo hasta que se estabiliza en $t \approx 200$, manteniendo un valor constante hasta el fin de la evolución. Se tiene que si se multiplica por un factor ≈ 3 , el error para las resoluciones $\Delta r = 0.05, 0.025$ y $\Delta r = 0.025, 0.0125$ se iguala, cumpliendo el factor de convergencia (4.15) dados los ordenes de precisión de los diferentes métodos usados, esto para ambos casos de C_1 . Comparando los errores para los casos de C_1 se tiene que para las 3 resoluciones usadas, los errores se igualan usando un factor ≈ 1.95 .

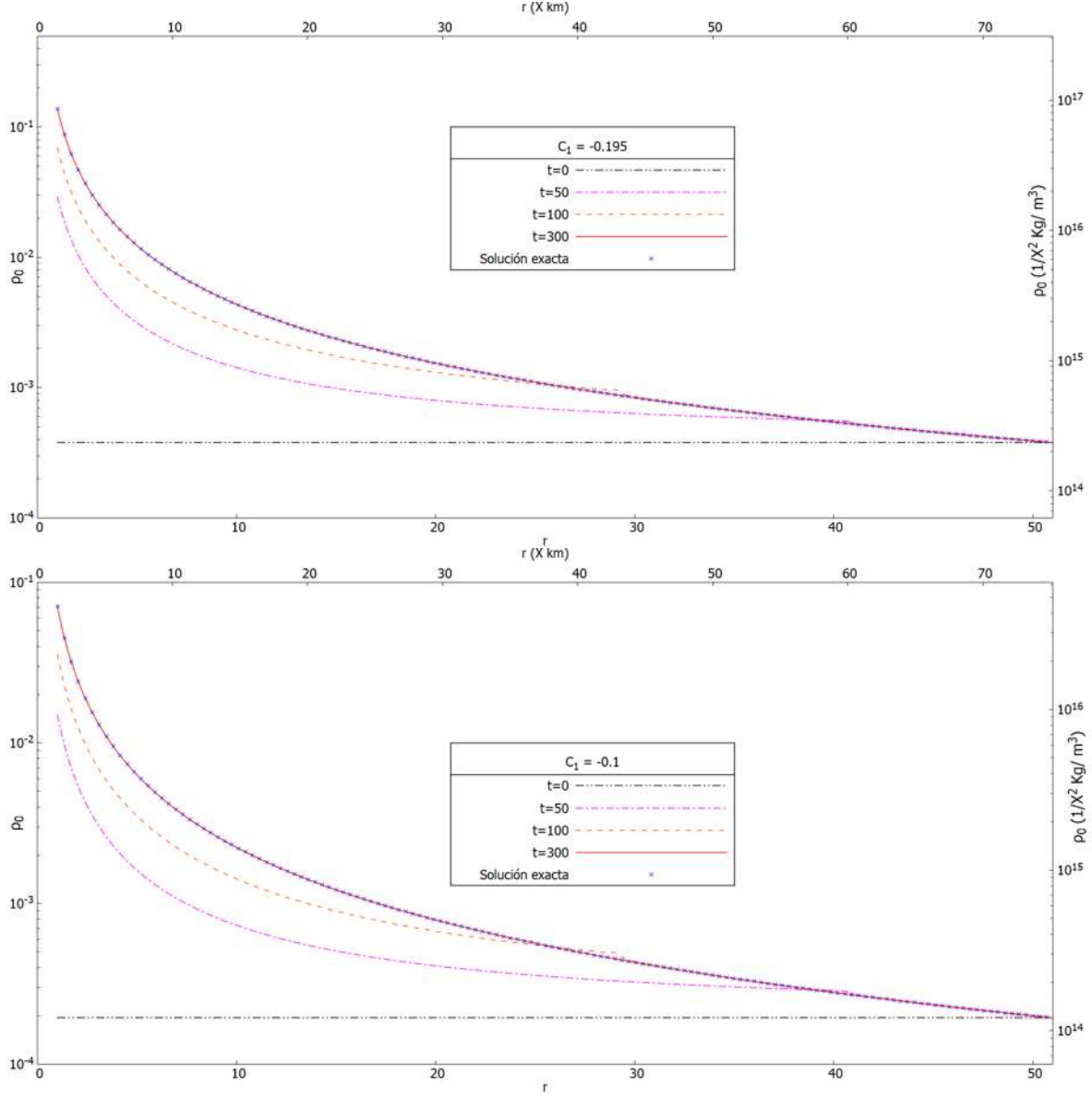


Figura 5.1: Resultado obtenido de la evolución numérica para la densidad ρ_0 en diferentes tiempos para el caso de la acreción de Bondi. Se presenta el caso análogo a [Papadopoulos & Font 1998] (superior) donde $C_1 = -0.195$ y el caso de prueba (inferior) siendo $C_1 = -0.1$; para ambos casos se presenta la solución exacta. Los ejes izquierdo e inferior se presentan en unidades geométricas, mientras que los ejes derecho y superior se muestran en unidades físicas. El factor de conversión está en función del número de masas solares $\mathcal{X}$ que se quiera considerar, i.e. se considera que $M = \mathcal{X}M_\odot$; en la tabla 8.2 se pueden encontrar todos los factores para este caso.

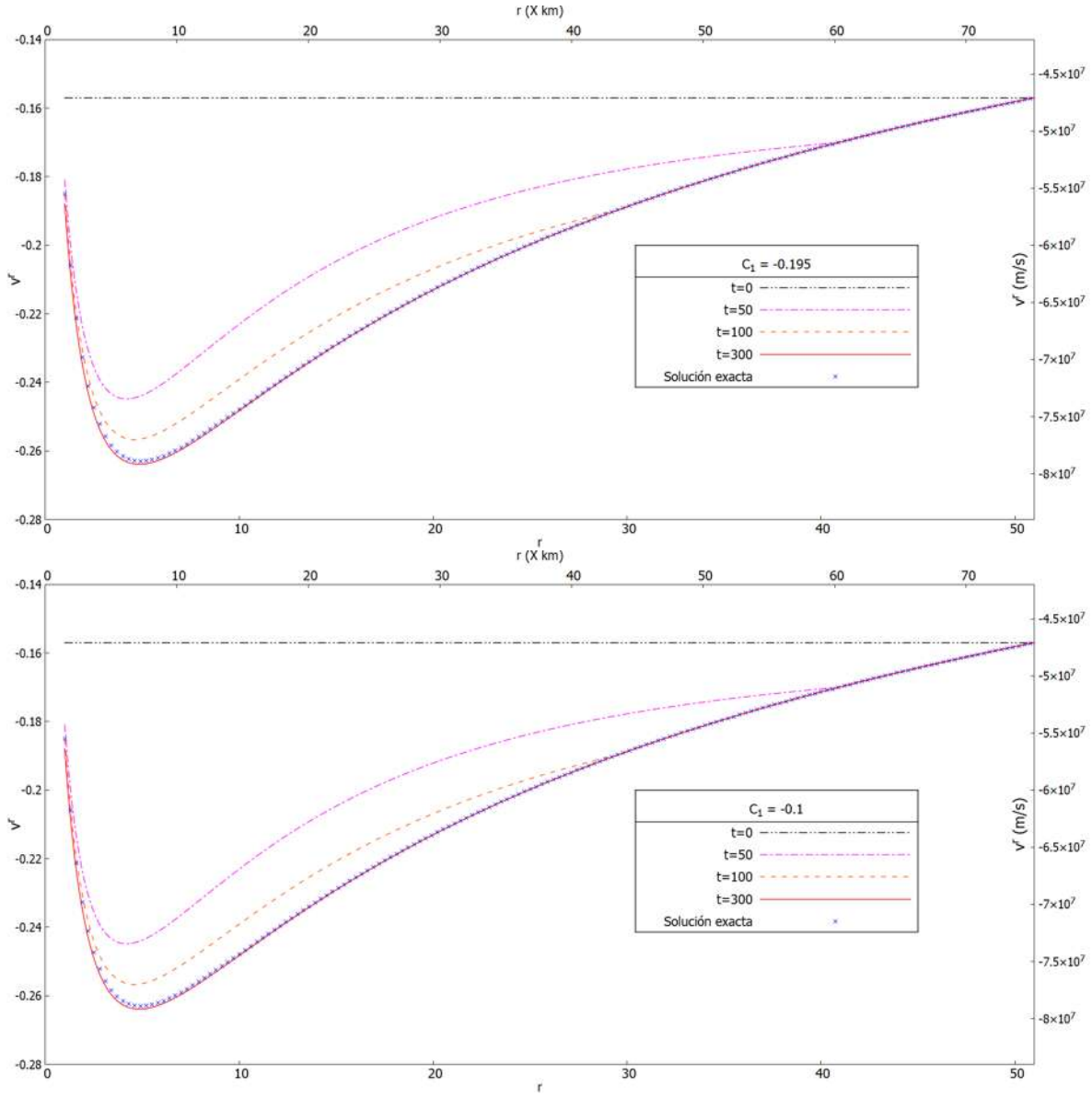


Figura 5.2: Resultado obtenido de la evolución numérica para la velocidad radial v^r en diferentes tiempos para el caso de la acreción de Bondi. Se presenta el caso análogo a [Papadopoulos & Font 1998] (superior) donde $C_1 = -0.195$ y el caso de prueba (inferior) siendo $C_1 = -0.1$; para ambos casos se presenta la solución exacta. Los ejes izquierdo e inferior se presentan en unidades geométricas, mientras que los ejes derecho y superior se muestran en unidades físicas. El factor de conversión considera que $M = \mathcal{X} M_\odot$; en la tabla 8.2 se pueden encontrar todos los factores para este caso.

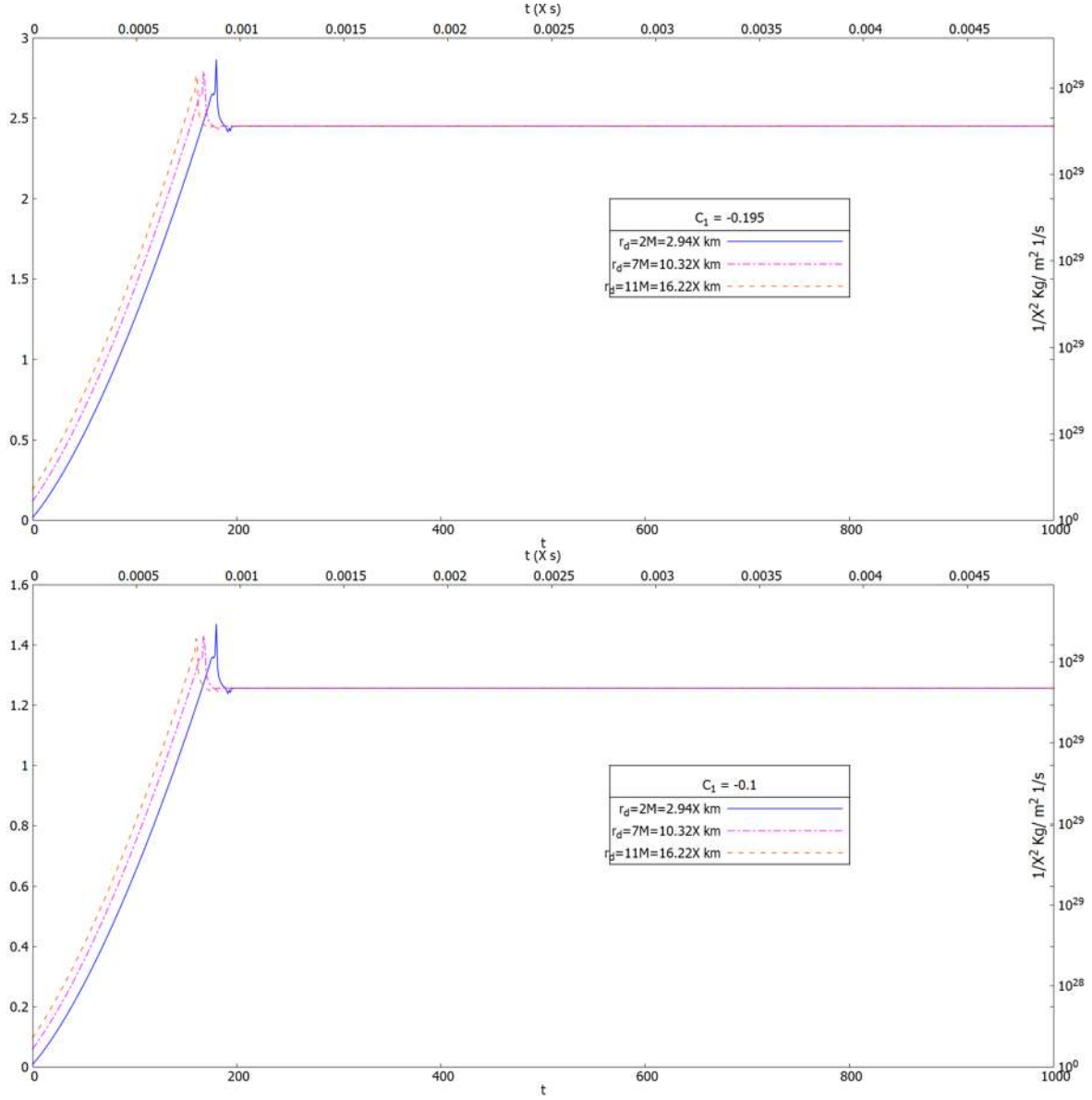


Figura 5.3: Resultado obtenido de la evolución numérica para la tasa de acreción $\dot{M}$ para 3 diferentes detectores, para el caso de la acreción de Bondi. Se presenta el caso análogo a [Papadopoulos & Font 1998] (superior) donde $C_1 = -0.195$ y el caso de prueba (inferior) siendo $C_1 = -0.1$. El eje inferior se presenta en unidades geométricas, mientras que el eje superior se muestran en unidades físicas. El factor de conversión para la tasa de acreción es $1.85 \times 10^{29} \text{ 1/X}^2 \text{ Kg/m}^2 \text{ 1/s}$, esto considera que $M = \mathcal{X} M_\odot$. Los detectores se encuentran posicionados en $r = 2M, 7M, 11M$, lo que en unidades físicas equivale a $r = 2.94\mathcal{X} \text{ km}, 10.32\mathcal{X} \text{ km}, 16.22\mathcal{X} \text{ km}$.

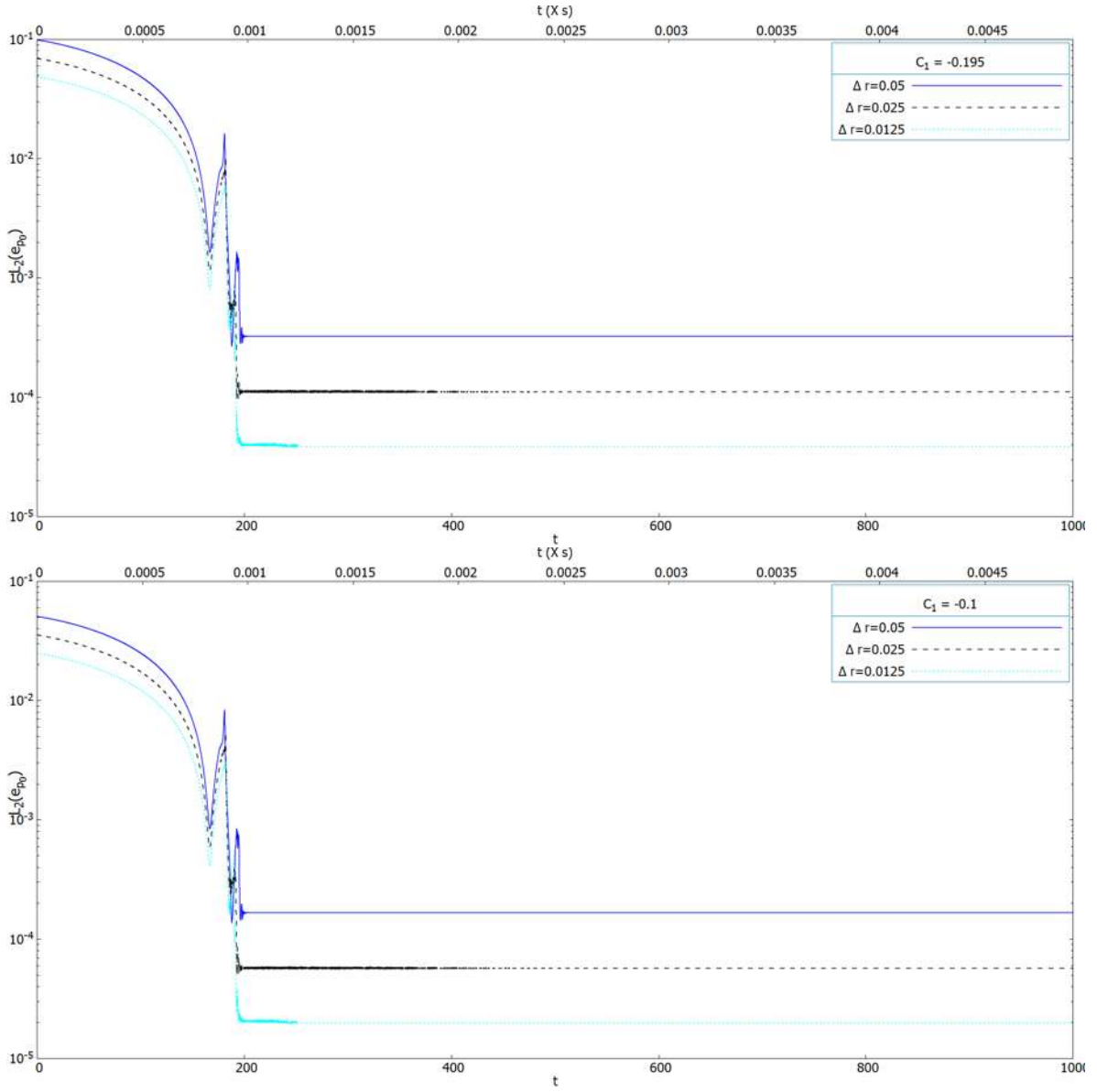


Figura 5.4: Resultado obtenido de la evolución numérica para la norma L_2 del error para la densidad ρ_0 para 3 diferentes resoluciones espaciales, $\Delta r = 0.5, 0.25, 0.0125$, para la acreción de Bondi. Se presenta el caso análogo a [Papadopoulos & Font 1998] (superior) donde $C_1 = -0.195$ y el caso de prueba (inferior) siendo $C_1 = -0.1$. El eje inferior se presenta en unidades geométricas, mientras que el eje superior se muestran en unidades físicas. El factor de conversión considera que $M = \mathcal{X} M_\odot$; en la tabla 8.2 se pueden encontrar todos los factores para este caso.

SECCIÓN 5.3

Acreción de Michel

A diferencia de la acreción de Bondi, la acreción de Michel es aquella acreción esféricamente simétrica que considera un fluido perfecto con presión. Este escenario tiene solución estacionaria, sin embargo, no se tiene una formula explícita para v^r y ρ_0 . Para obtener la solución se sigue [Papadopoulos & Font 1998] al igual que en el caso anterior; se hace la diferenciación de las ecuaciones (5.10) respecto de r, ρ_0 y p , después se elimina el diferencial $d\rho_0$ y se obtiene:

$$\frac{du^r}{u^r} \left[V^2 - \frac{(u^r)^2}{u_t^2} \right] + \frac{dr}{r} \left[2V^2 - \frac{M}{ru_t^2} \right] = 0, \quad (5.12)$$

siendo

$$V^2 = \frac{d\ln(\rho_0 h)}{d\ln(\rho_0)} - 1, \quad (5.13)$$

$$u_t^2 = (u^r)^2 - g_{tt}. \quad (5.14)$$

La ecuación (5.12) es llamada *ecuación de viento* y el fluido perfecto en estado estacionario siendo acretado por el agujero negro debe de pasar por los puntos críticos de dicha ecuación [Lora-Clavijo 2013]. Gracias a esta condición, una vez escogido el radio crítico r_c se puede obtener u_c^r por medio de la expresión $(u_c^r)^2 = M/2r_c^r$ y usando la ecuación (5.14) se obtiene $(u_t)_c$, a su vez, encontrar estos dos valores posibilitan encontrar V_c^2 usando la relación $V_c^2 = (u_c^r/u_t)_c^2$. Por último, se considera una ecuación de estado politrópica $p = \kappa \rho_0^\Gamma$, con la cual una vez elegido el índice adiabático Γ y la densidad crítica ρ_{0c} , es posible obtener el valor de la constante politrópica κ usando el valor anteriormente obtenido para V_c^2 . Una vez determinadas todas las condiciones del fluido en el punto crítico, se fijan las variables de integración C_1, C_2 usando las ecuaciones (5.10). Con estas constantes determinadas se busca la solución al problema de la acreción de Michel por medio del sistema de ecuaciones (5.10), para lo cual se usa el método de Newton-Raphson.

La solución para las variables ρ_0, v^r y p se calculará antes de empezar la evolución para tomar el valor de estas en la frontera derecha como valor inicial de las variables, esto es, se tendrá que $\rho_{ini} = \rho_{Michel}(r_{max})$, $v_{ini}^r = v_{Michel}^r(r_{max})$ y $p_{ini} = p_{Michel}(r_{Nx})$; además se elige $\rho_c = 0.1$ y dos casos para r_c , $r_c = 400$ al igual que en [Papadopoulos & Font 1998]

y $r_c = 150$, un nuevo caso. A diferencia del caso anterior, dado que ahora se considera la presión diferente de 0 será necesario resolver la ecuación trascendental (5.6) con el método de Newton-Raphson.

Resultados

En las figuras 5.5, 5.6, 5.7, 5.8 y 5.9 se muestran los resultados numéricos obtenidos para la densidad ρ_0 , la velocidad radial v^r , la presión p , la tasa de acreción $\dot{M}_{acc}$ y la norma L_2 del error para la densidad ρ_0 , todo esto para el caso análogo a [Papadopoulos & Font 1998], i.e. $r_c = 400$, y el caso de experimentación $r_c = 150$. En todos los casos se muestra la solución estacionaria de Michel. Al igual que en el caso de la acreción de Bondi, se considera un hoyo negro de masa $M = \mathcal{X}M_\odot$, por lo cual se usan los mismos factores de conversión.

En la Figura 5.5 se muestran los resultados obtenidos de la evolución para la densidad ρ_0 para diferentes tiempos a todo lo largo del dominio espacial. Para ambos casos del valor de r_c se observa que conforme pasa el tiempo el perfil se aproxima más a la solución de Michel, iniciando este proceso desde r_{max} , teniendo que para el tiempo $t \approx 500$, unidades geométricas, la variable tiene prácticamente los mismos valores que la solución estacionaria de Michel. Se observa que los perfiles obtenidos para $r_c = 400$ y $r_c = 150$ son similares pero no iguales, por lo que no es posible obtener uno a partir del otro por medio de algún factor.

La Figura 5.2 muestra los resultados para la velocidad radial v^r en diferentes tiempos. Se tiene que para los dos casos del valor de r_c v_r presenta un comportamiento análogo a ρ_0 , el perfil de la velocidad radial se acerca al perfil de la solución estacionaria de Michel conforme pasa el tiempo. Comparando los resultados para $r_c = 400$ y $r_c = 150$ se observa nuevamente que los perfiles de ambos casos son diferentes, no pudiendo obtener uno a partir del otro; los valores para $r_c = 150$ son menores, con una diferencia menor entre los perfiles de velocidad para estos casos en $r < 2$.

Los resultados obtenidos para la presión p se muestran en la Figura 5.7. Se tiene nuevamente un comportamiento análogo entre los dos casos para el valor de r_c , el perfil obtenido por la evolución se acerca con el paso del tiempo a la solución estacionaria de Michel, teniendo que para $t \approx 500$ los valores de obtenidos son los de la solución estacionaria. Este comportamiento en las 3 variables sugiere que la solución estacionaria de Michel es un atractor, al igual que la solución de Bondi en el caso anterior. Los perfiles de los casos $r_c = 400$ y $r_c = 150$ son similares pero no puede obtenerse uno a partir de otro; los valores en el perfil para $r_c = 150$ son menores. Para las tres variables, ρ_0 , v^r y p se tiene que la línea $t = 0$ corresponde al valor inicial constante, el cual se toma como el valor de la solución estacionaria de Michel en el punto $r = r_{max}$.

En la Figura 5.8 se muestran los resultados obtenidos para la tasa de acreción. Para los dos casos del valor de r_c se presenta el mismo comportamiento. La tasa de acreción

comienza siendo ligeramente diferente entre las tres resoluciones, aumentando conforme se lleva a cabo la evolución hasta que en $t \approx 400$ se alcanza un valor que se mantendrá constante hasta el final de la evolución. Aunque parecidos, los perfiles para la acreción entre los casos $r_c = 150$ y $r_c = 400$ no son equivalentes, y se tiene nuevamente que el perfil de la tasa de acreción correspondiente a $r_c = 150$ es menor. La atmósfera ρ_{atm} contribuye nuevamente a la acreción parásita.

Usando la solución estacionaria de Michel para la densidad ρ_0 se calcula la norma L_2 del error de la misma ρ_0 . En la Figura 5.9 se muestran los resultados obtenidos para L_2 usando 3 diferentes resoluciones espaciales $\Delta r = 0.05, 0.025, 0.0125$, siendo siempre diferente el valor de la norma para estas tres resoluciones. Para ambos casos de r_c se tiene que mientras ρ_0 es diferente de la solución de Michel, el error es grande, sin embargo, una vez que esta solución es alcanzada, el error se reduce considerablemente y se estabiliza; para $r_c = 400$ este punto es poco después de $t \approx 300$ y para $r_c = 150$ esto es en $t \approx 400$. La relación entre la norma para las diferentes resoluciones es igual en los dos casos $r_c = 400$ y $r_c = 150$; se tiene que si se multiplica por un factor ≈ 3 , el error para las resoluciones $\Delta r = 0.05, 0.025$ y $\Delta r = 0.025, 0.0125$ se iguala, cumpliendo el factor de convergencia (4.15) dados los ordenes de precisión de los diferentes métodos usados. Este comportamiento evidencia la convergencia hacia el error 0 por medio de la resolución espacial.

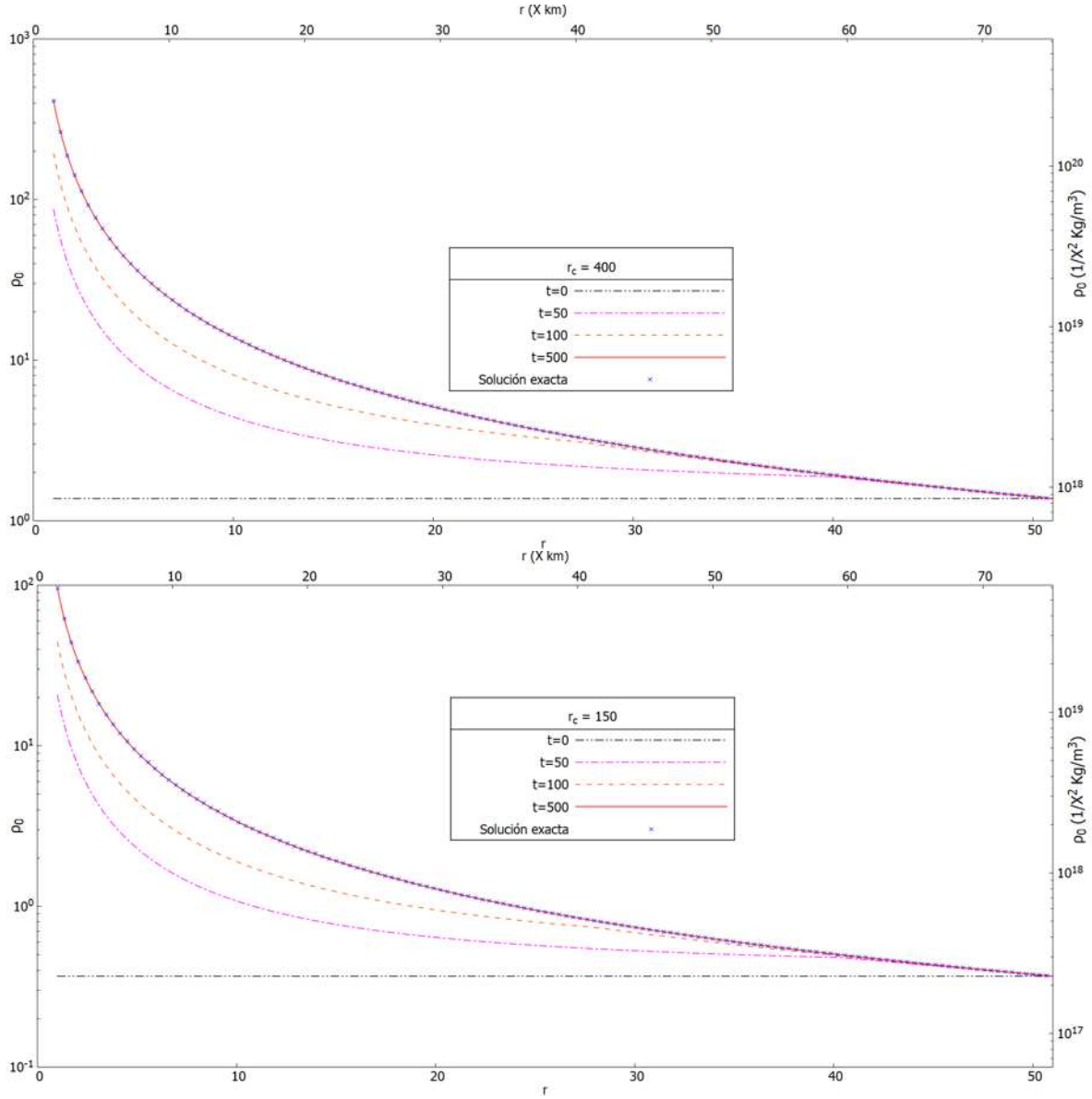


Figura 5.5: Resultado obtenido de la evolución numérica para la densidad ρ_0 en diferentes tiempos para el caso de la acreción de Michel. Se presenta el caso análogo a [Papadopoulos & Font 1998] (superior) donde $\rho_c = 10^{-2}$, $r_c = 400$ y el caso de prueba (inferior) donde se utilizó $\rho_c = 10^{-2}$, $r_c = 150$; para ambos casos se presenta la solución exacta. Los ejes izquierdo e inferior se presentan en unidades geométricas, mientras que los ejes derecho y superior se muestran en unidades físicas. El factor de conversión está en función del número de masas solares $\mathcal{X}$ que se quiera considerar, i.e. se considera que $M = \mathcal{X}M_\odot$; en la tabla 8.2 se pueden encontrar todos los factores para este caso.

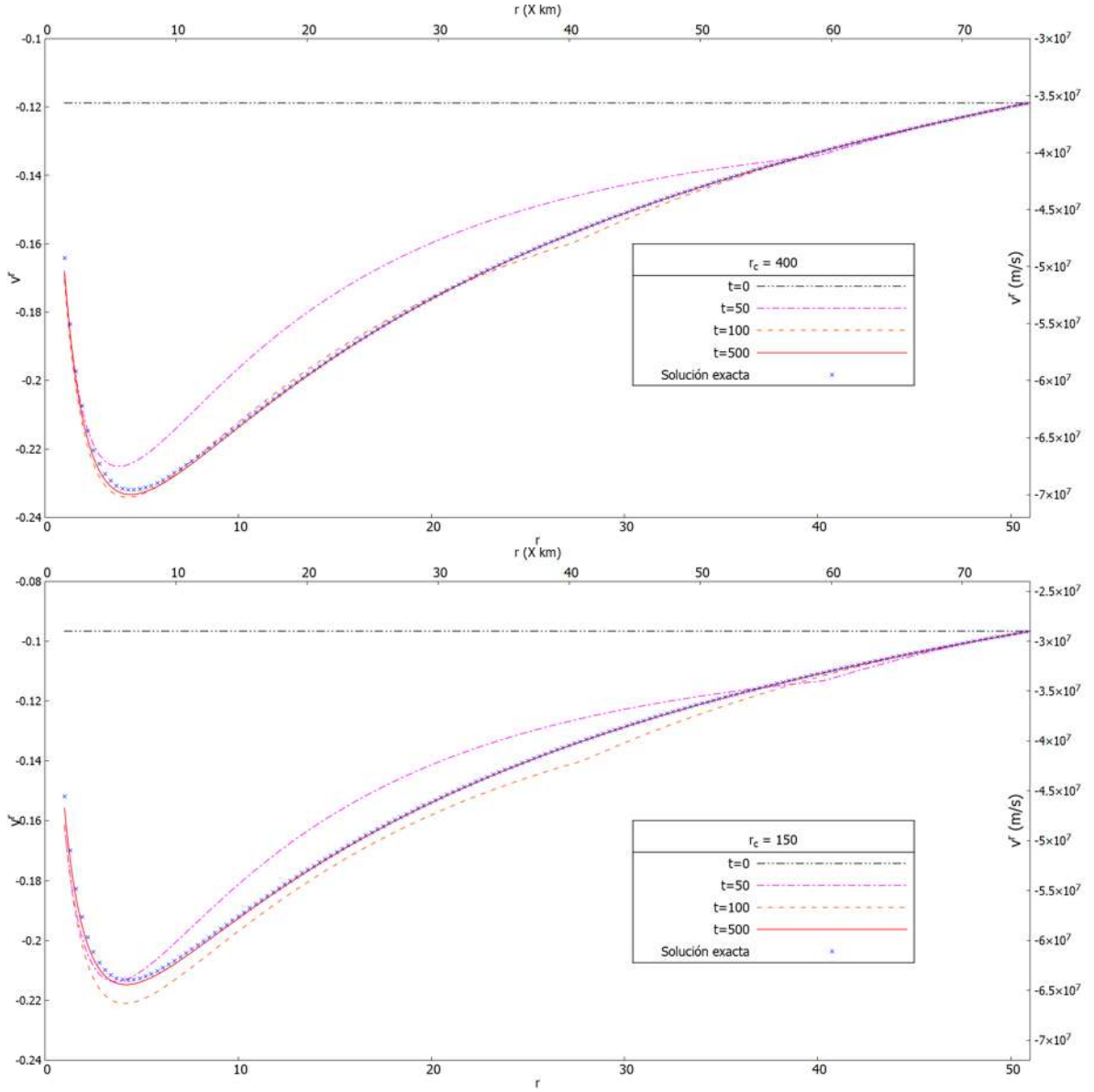


Figura 5.6: Resultado obtenido de la evolución numérica para la velocidad radial v^r en diferentes tiempos para el caso de la acreción de Michel. Se presenta el caso análogo a [Papadopoulos & Font 1998] (superior) donde $\rho_c = 10^{-2}$, $r_c = 400$ y el caso de prueba (inferior) donde se utilizó $\rho_c = 10^{-2}$, $r_c = 150$; para ambos casos se presenta la solución exacta. Los ejes izquierdo e inferior se presentan en unidades geométricas, mientras que los ejes derecho y superior se muestran en unidades físicas. El factor de conversión considera que $M = \mathcal{X}M_\odot$; en la tabla 8.2 se pueden encontrar todos los factores para este caso.

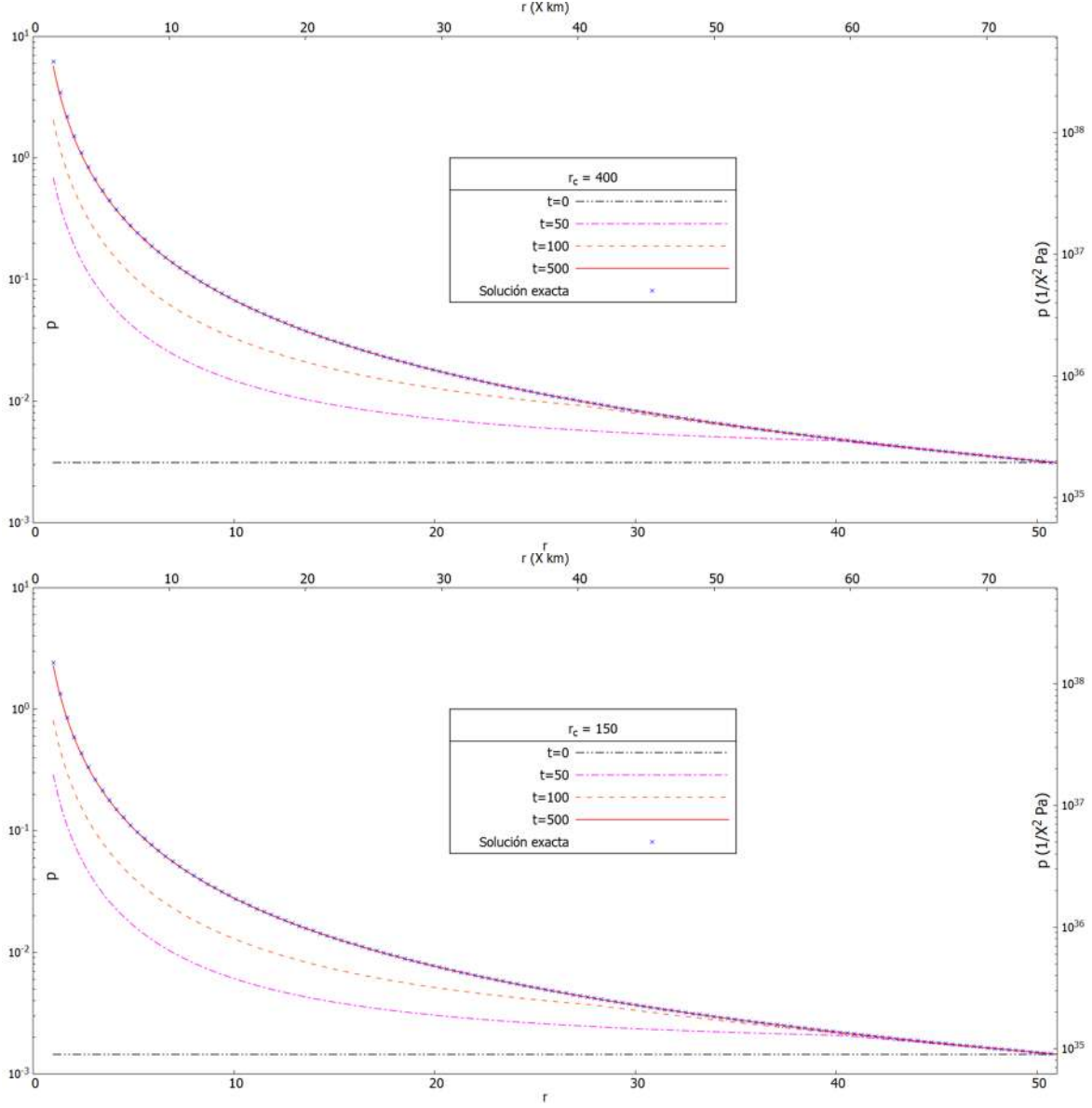


Figura 5.7: Resultado obtenido de la evolución numérica para la densidad p en diferentes tiempos para el caso de la acreción de Michel. Se presenta el caso análogo a [Papadopoulos & Font 1998] (superior) donde $\rho_c = 10^{-2}$, $r_c = 400$ y el caso de prueba (inferior) donde se utilizó $\rho_c = 10^{-2}$, $r_c = 150$; para ambos casos se presenta la solución exacta. Los ejes izquierdo e inferior se presentan en unidades geométricas, mientras que los ejes derecho y superior se muestran en unidades físicas. El factor de conversión considera que $M = \mathcal{X}M_\odot$; en la tabla 8.2 se pueden encontrar todos los factores para este caso.

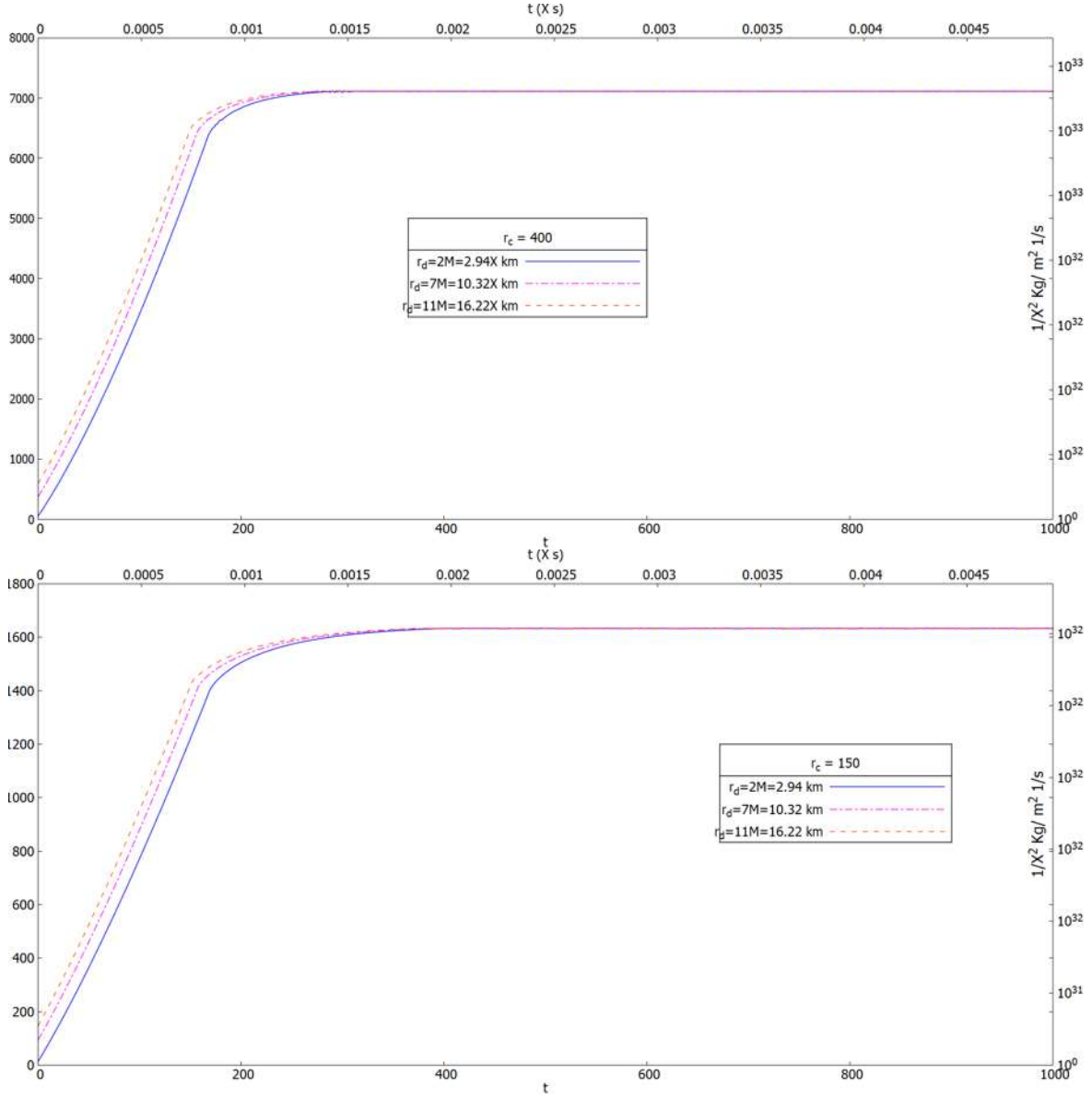


Figura 5.8: Resultado obtenido de la evolución numérica para la tasa de acreción $\dot{M}$ para 3 diferentes detectores, para el caso de la acreción de Michel. Se presenta el caso análogo a [Papadopoulos & Font 1998] (superior) donde $\rho_c = 10^{-2}$, $r_c = 400$ y el caso de prueba (inferior) donde se utilizó $\rho_c = 10^{-2}$, $r_c = 150$. El eje inferior se presenta en unidades geométricas, mientras que el eje superior se muestran en unidades físicas. El factor de conversión para la tasa de acreción es $1.85 \times 10^{29} \text{ 1/X}^2 \text{ Kg/m}^2 \text{ 1/s}$, esto considera que $M = \mathcal{X} M_\odot$. Los detectores se encuentran posicionados en $r = 2M, 7M, 11M$, lo que en unidades físicas equivale a $r = 2.94\mathcal{X} \text{ km}, 10.32\mathcal{X} \text{ km}, 16.22\mathcal{X} \text{ km}$.

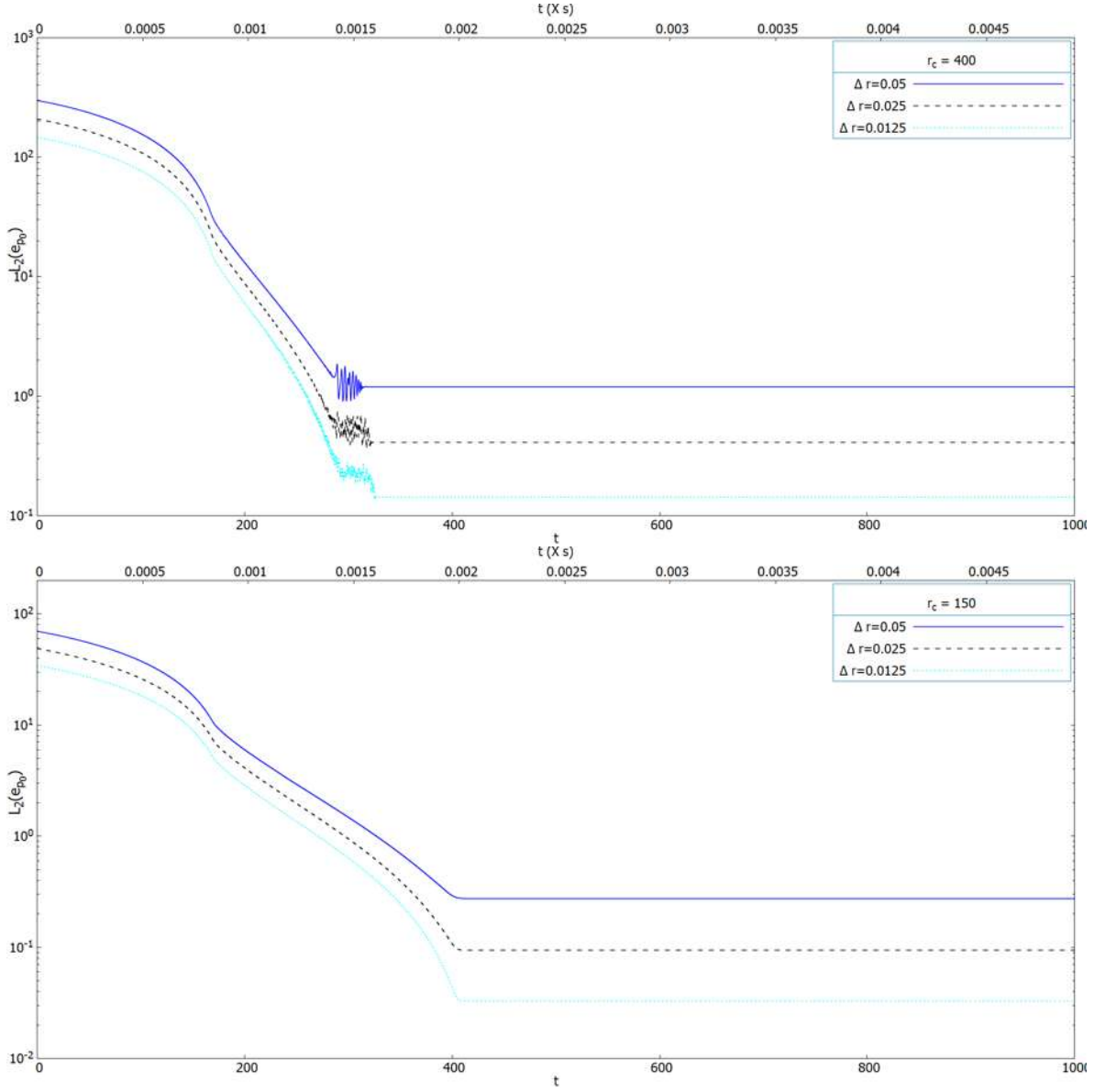


Figura 5.9: Resultado obtenido de la evolución numérica para la norma L_2 del error para la densidad ρ_0 para 3 diferentes resoluciones espaciales, $\Delta r = 0.5, 0.25, 0.0125$, para la acreción de Michel. Se presenta el caso análogo a [Papadopoulos & Font 1998] (superior) donde $\rho_c = 10^{-2}, r_c = 400$ y el caso de prueba (inferior) donde se utilizó $\rho_c = 10^{-2}, r_c = 150$. El eje inferior se presenta en unidades geométricas, mientras que el eje superior se muestran en unidades físicas. El factor de conversión considera que $M = \mathcal{X} M_\odot$; en la tabla 8.2 se pueden encontrar todos los factores para este caso.

Capítulo 6

Acreción en un agujero negro dinámico

SECCIÓN 6.1

Ecuaciones y condiciones

En el capítulo anterior se realizó la evolución de un fluido perfecto, con y sin presión, siendo acretado por un agujero negro mientras se mantenía el espacio-tiempo fijo sin que este evolucionara. En este capítulo se resolverán las ecuaciones para un flujo radial alrededor de un agujero negro, pero esta vez el espacio-tiempo también evolucionará, lo que significa que será necesario resolver las ecuaciones de evolución para el fluido a la par que las ecuaciones de evolución para el espacio-tiempo. Para llevar a cabo esta evolución será necesario usar los temas desarrollados en las secciones 2.3, 2.4.3, 3.2, 5.1 y los métodos del capítulo 4; además será necesario establecer algunas condiciones nuevas.

Espacio-tiempo

En la sección 2.3 se desarrollaron las ecuaciones ADM para un espacio-tiempo con simetría esférica, las cuales son un conjunto de 2 constricciones y ecuaciones de evolución para la 3-métrica γ_{ij} y para la curvatura extrínseca K_{ij} . Estas ecuaciones permiten

resolver las ecuaciones de campo de Einstein (2.1) como un problema de valores iniciales que evoluciona en el tiempo y serán las ecuaciones que se usarán para resolver el problema de la evolución del espacio-tiempo.

En las ecuaciones ADM se definieron cantidades asociadas a la materia, para el caso de simetría esférica para un fluido perfecto estas son:

$$\begin{aligned}\rho_{ADM} &= \rho_0 h W^2 - p, \\ S^r &= \rho_0 h W^2 v^r, \\ S_{rr} &= \rho_0 h W^2 v_r v_r + \gamma_{rr} p, \\ S_{\theta\theta} &= \gamma_{\theta\theta} p, \\ S_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta S_{\theta\theta}, \\ S &= \rho_0 h W^2 v^r v_r + 3p.\end{aligned}$$

La constricción Hamiltoniana $\mathcal{H}$ y la constricción de momento $\mathcal{M}^r$ están dadas por:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= 2 \left(\frac{K_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} \right)^2 + 4 \frac{K_{rr} K_{\theta\theta}}{\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}} + \frac{\gamma'_{rr} \gamma'_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}^2 \gamma_{\theta\theta}} + \frac{2}{\gamma_{\theta\theta}} \\ &\quad + \frac{\gamma_{\theta\theta}^2}{2 \gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}^2} - 2 \frac{\gamma_{\theta\theta}''}{\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}} - 16 \pi \rho_{ADM} = 0, \\ \mathcal{M}^r &= -2 \frac{K'_{\theta\theta}}{\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}} + \frac{K_{\theta\theta} \gamma'_{\theta\theta}}{\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}^2} + \frac{K_{rr} \gamma'_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}^2 \gamma_{\theta\theta}} - 8 \pi S^r = 0.\end{aligned}$$

En cuanto a las ecuaciones de evolución para las componentes de la 3-métrica γ_{ij} y de la curvatura extrínseca K_{ij} , estas son:

$$\begin{aligned}\partial_t \gamma_{rr} &= -2\alpha K_{rr} + 2\gamma_{rr} \partial_r \beta^r + \beta^r \partial_r \gamma_{rr}, \\ \partial_t \gamma_{\theta\theta} &= -2\alpha K_{\theta\theta} + \beta^r \partial_r \gamma_{\theta\theta}, \\ \partial_t K_{rr} &= \alpha \left(-\frac{\partial_{rr} \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} + \frac{1}{2} \frac{(\partial_r \gamma_{\theta\theta})^2}{\gamma_{\theta\theta}^2} + \frac{1}{2} \frac{(\partial_r \gamma_{rr})(\partial_r \gamma_{\theta\theta})}{\gamma_{rr} \gamma_{\theta\theta}} - \frac{K_{rr}^2}{\gamma_{rr}} + 2 \frac{K_{rr} K_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} \right) \\ &\quad - \partial_{rr} \alpha + \frac{1}{2} \partial_r \alpha \frac{\partial_r \gamma_{rr}}{\gamma_{rr}} + \beta^r \partial_r K_{rr} + 2K_{rr} \partial_r \beta^r - 8\pi \alpha \left(S_{rr} - \frac{1}{2} \gamma_{rr} (S - \rho_{ADM}) \right), \\ \partial_t K_{\theta\theta} &= \alpha \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial_{rr} \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}} + 1 + \frac{1}{4} \frac{(\partial_r \gamma_{rr})(\partial_r \gamma_{\theta\theta})}{\gamma_{rr}^2} + \frac{K_{rr} K_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{rr}} \partial_r \alpha + \beta^r \partial_r K_{\theta\theta} - 8\pi \alpha \left(S_{\theta\theta} - \frac{1}{2} \gamma_{\theta\theta} (S - \rho_{ADM}) \right).\end{aligned}$$

Además de estas ecuaciones será necesario imponer algunas condiciones sobre las funciones de norma, i.e. el vector de corrimiento β^r y la función de lapso α , esto para que no se produzcan singularidades. Para esto se introducen dos condiciones:

■ Condición 1

Usar el enfoque 3+1 implica foliar el espacio-tiempo con hipersuperficies Σ_t como se describe en la sección 2.2, a su vez estas hipersuperficies son foliadas con superficies determinadas por el sistema coordenado usado; en este caso las hipersuperficies de 3 dimensiones espaciales son foliadas con esferas, las cuales tienen un área $4\pi\gamma_{\theta\theta}$ y líneas θ, ϕ constantes. Si se toma $\gamma_{\theta\theta} = r^2$ al inicio de la evolución se tendría que el área de estas esferas al inicio es $4\pi r^2$. Por simplicidad es conveniente que esta área se mantenga igual durante la evolución, para esto es necesario que no haya cambio en $\gamma_{\theta\theta}$, esto es $\partial\gamma_{\theta\theta}=0$, para lograr esto se debe cumplir que el lado derecho de la ecuación de evolución para $\gamma_{\theta\theta}$ sea 0, lo que significa que α debe de cumplir que:

$$-2\alpha K_{\theta\theta} + \beta^r \partial_r \gamma_{\theta\theta} = 0. \quad (6.1)$$

■ Condición 2

Se busca que la pendiente de las trayectorias nulas en dirección hacia el agujero negro con pendiente -1 se mantengan a lo largo de la evolución. Para lograr esto, primero tómese el elemento de línea para una trayectoria nula en un espacio-tiempo esféricamente simétrico según el enfoque 3+1 (2.42) pero manteniendo constante (θ, ϕ) , esto es:

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_r \beta^r) dt^2 + 2\beta_r dt dr + \gamma_{rr} dr^2 = 0, \quad (6.2)$$

que se puede reescribir como:

$$(-\alpha^2 + \gamma_{rr}(\beta^r)^2) \frac{dt^2}{dr^2} + 2\gamma_{rr}\beta^r \frac{dt}{dr} + \gamma_{rr} = 0,$$

tomando $dt/dr = -1$ la ecuación queda como:

$$\gamma_{rr}(\beta^r)^2 - 2\gamma_{rr}\beta^r + \gamma_{rr} - \alpha^2 = 0,$$

y resolviendo para β^r se obtiene:

$$\beta^r = 1 \pm \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_{rr}}}.$$

De esta relación se puede obtener una expresión para α en términos de β^r , y usando esta expresión en la condición 1 se puede obtener a su vez una expresión para β^r . Estas dos expresiones son:

$$\beta^r = \frac{2\sqrt{\gamma_{rr}}K_{\theta\theta}}{2\sqrt{\gamma_{rr}}K_{\theta\theta}-\gamma'_{\theta\theta}}, \quad (6.3)$$

$$\alpha = \sqrt{\gamma_{rr}}(1 - \beta^r). \quad (6.4)$$

Estas dos ecuaciones son las condiciones que se deben de cumplir en todo tiempo para β^r y α .

Dado que el agujero negro es dinámico, este podrá crecer, lo que hará que la posición de los horizontes, tanto el aparente como el de eventos, cambien su posición conforme pasa el tiempo. Primero véase el horizonte aparente. Se tiene que para encontrarlo es necesario encontrar el valor de r para el cual la expansión (2.68) es 0, es decir:

$$\frac{\partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\sqrt{\gamma_{rr}}\gamma_{\theta\theta}} - 2\frac{K_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} = 0,$$

lo que se hará para cada tiempo t^n . Es importante recordar que la definición del horizonte aparente es local en cada hipersuperficie Σ_t , pudiendo no existir en alguna de estas.

En cuanto al horizonte de eventos, en la sección 2.4.2 se describió como encontrarlo, sin embargo, aquí se seguirá un enfoque diferente. Se calcularán varias geodésicas nulas partiendo de diferentes posiciones, algunas de estas escapan al infinito, otras viajan hacia el interior del agujero negro, aquella línea que se genere como separación entre estas geodésicas será el horizonte de eventos. Para lograr esto se usa el elemento de línea para una geodésica radial (6.2), que se puede expresar como:

$$\gamma_{rr} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + 2\gamma_{rr}\beta^r \frac{dr}{dt} + (-\alpha^2 + \gamma_{rr}\beta^r\beta^r) = 0,$$

y resolviendo para dr/dt se obtiene que:

$$\frac{dr}{dt} = -\beta^r \pm \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_{rr}}}. \quad (6.5)$$

Esta será la ecuación que permitirá calcular las geodésicas nulas que parten de distintas superficies de radio r , con las cuales se localizará el horizonte de eventos.

Hidrodinámica

Con excepción de la ecuación trascendental para la presión, que será diferente para este caso, todo el desarrollo del capítulo anterior para la hidrodinámica será igual, en esencia se deben solucionar nuevamente las ecuaciones de Euler relativistas para el caso de un flujo esférico (3.21). Es importante recordar que existen términos geométricos en estas ecuaciones, tanto en los flujos como en las fuentes, estos se ven afectados por la evolución del espacio-tiempo y por lo tanto necesario calcularlos de nuevo en cada iteración.

Condiciones numéricas

Dadas las diferencias con el proceso del capítulo anterior, será necesario introducir algunos cambios para lograr llevar a cabo la evolución del espacio-tiempo a la par que la del fluido. Estos cambios se presentan en las condiciones iniciales y en las condiciones de frontera. Para la evolución del espacio-tiempo se usará el método de líneas, mientras que para la del fluido, el método volúmenes finitos es el indicado, al igual que en el capítulo pasado. Esta diferencia entre los métodos es importante ya que el método de líneas se centra en los puntos (t_i, t^n) , en cambio el método de volúmenes finitos considera este punto como le vértice entre las celdas $(r_{i-1/2}, t^{n+1/2})$ y $(r_{i+1/2}, t^{n+1/2})$.

Existe una consideración importante que debe hacerse para las ecuaciones de evolución para el espacio-tiempo. En estas ecuaciones aparecen términos del tipo $\beta^r \partial_r V$, donde la derivada $\partial_r V$ se calcula por medio de la tercera formula en (4.3) que usa puntos a la derecha (r_{i+1}, t^{n-1}) e izquierda (r_{i-1}, t^{n-1}) del punto donde se quiere obtener su valor, dígase (r_i, t^n) , sin embargo, si β^r es muy grande y positivo se podría tener que los puntos (r_{i-1}, t^{n-1}) y (r_i, t^n) estén casualmente desconectados, caso contrario, si β^r tiene un valor muy grande y negativo se tendrá que los puntos (r_{i+1}, t^{n-1}) y (r_i, t^n) pueden estar desconectados. Para resolver esto basta con usar expresiones para la derivada que solo usen puntos a la derecha o a la izquierda del punto (r_i, t^n) , según sea el valor de β^r . Estas diferentes expresiones para la derivada son:

$$\begin{aligned} \beta^r \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{(x_i, t^n)} &= \frac{-3V_i^n + 4V_{i+1}^n - V_{i+2}^n}{2\Delta x} \beta^r \Big|_{(x_i, t^n)}, \quad \beta^r > 0, \\ \beta^r \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{(x_i, t^n)} &= \frac{V_{i+1}^n - V_{i-1}^n}{2\Delta x} \beta^r \Big|_{(x_i, t^n)}, \quad \beta^r = 0, \\ \beta^r \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{(x_i, t^n)} &= \frac{3V_i^n - 4V_{i-1}^n + V_{i-2}^n}{2\Delta x} \beta^r \Big|_{(x_i, t^n)}, \quad \beta^r < 0. \end{aligned}$$

Dominio numérico

La evolución será llevada a cabo nuevamente en un espacio-tiempo descrito con una dimensión espacial y la temporal. El dominio numérico espacial será $r \in [r_{min}, r_{max}]$ con $r_{min} = 1$ y $r_{max} = 51$, se tomará $N_r = 2000$, lo que significa que la resolución espacial base será $\Delta = 0.025$; el factor de Courant será $CFL = 0.25$, por lo que la resolución temporal es $\Delta t = 0.00625$. La evolución se llevará a cabo hasta $t_f = 300$.

Condiciones iniciales

Para que la solución sea consistente con las ecuaciones de campo de Einstein (2.1) se debe tener condiciones iniciales para γ_{rr} , $\gamma_{\theta\theta}$, K_{rr} y $K_{\theta\theta}$ que satisfagan las constricciones $\mathcal{H}$ y $\mathcal{M}^r$ para una distribución de materia dada por las variables ρ_0 , v^r , p y e al tiempo inicial. El anterior es un sistema de 2 ecuaciones para 4 incógnitas, lo que significa que es un sistema indeterminado. Para solucionar este problema se suponen las soluciones para 2 de las variables y en base a estas se buscan las soluciones para las dos restantes. Para este caso se escogen γ_{rr} y K_{rr} para el caso de Eddington-Finkelstein, esto es:

$$\begin{aligned}\gamma_{\theta\theta} &= r^2, \\ K_{rr} &= -\frac{2M}{r^2} \frac{1 + \frac{M}{r}}{\sqrt{1 + \frac{2M}{r}}}.\end{aligned}\tag{6.6}$$

Suponiendo que $\gamma_{\theta\theta}$ y $K_{\theta\theta}$ solo dependen de r y tomando en cuenta lo anterior, se tiene que las constricciones $\mathcal{H}$ y $\mathcal{M}^r$ se convierten en:

$$\begin{aligned}\gamma'_{rr} &= (1 - \gamma_{rr}) \frac{\gamma_{rr}}{r} - \frac{K_{\theta\theta}^2}{r^3} \gamma_{rr}^2 - 2\gamma_{rr} \frac{K_{rr} K_{\theta\theta}}{r} + 8\pi r \gamma_{rr}^2 \rho_{ADM}, \\ K'_{\theta\theta} &= \frac{r}{\gamma_{rr}} K_{rr} + \frac{K_{\theta\theta}}{r} - 4\pi r^2 \gamma_{rr} S^r.\end{aligned}\tag{6.7}$$

Para resolver estas ecuaciones se usa un integrador Runge-Kutta de orden 4, donde se usan los valores de γ_{rr} y $K_{\theta\theta}$ para Eddington-Finkelstein evaluadas en r_{min} como condiciones iniciales.

En este caso no se toma un valor constante a lo largo de todo el dominio espacial para las ρ_0 y v^r , en cambio se tendrá un cascarón de perfil Gaussiano:

$$\rho_0 = Ae^{-(r-r_0)^2/\sigma^2},$$

$$v^r = \begin{cases} v_0 & \text{si } \rho_0 > 10^{-8}, \\ 0 & \text{si } \rho_0 < 10^{-8}, \end{cases} \quad (6.8)$$

donde se tomarán los valores $A = 10^{-4}$, $r_0 = 20$, $\sigma = 0.5$, la atmósfera será $\rho_{atm} = 10^{-8}$ y se tendrán dos casos para la velocidad inicial $v_0 = -0.1$ y $v_0 = 0.1$. La velocidad se toma de esa forma dado que no se quiere que la atmósfera sea acretada al tiempo inicial. En cuanto a las variables e y p , dado que se vuelve a usar la ecuación de estado $p = \rho_0 e(\Gamma - 1)$, solo es necesario elegir unas de las dos, para lo cual se toma:

$$e = e_0, \quad (6.9)$$

el valor elegido es $e_0 = 0.01$ y para el índice adiabático se tiene $\Gamma = 4/3$ ya que se considera un gas relativista. Las variables h, W pueden ser calculadas una vez que se tienen estos valores definidos.

Condiciones de frontera

Nuevamente es necesario aplicar diferentes condiciones de frontera en r_{min} y r_{max} .

■ Frontera interior

Al igual que en el caso de la acreción de Bondi y Michel, la información solo puede viajar hacia el interior del agujero negro sin tener oportunidad de escapar, por lo que se usará nuevamente la formula de interpolación de Lagrange con 3 puntos (5.9) tanto para las variables de la materia D, J_r, τ como para las variables geométricas $\gamma_{rr}, \gamma_{\theta\theta}, K_{rr}, K_{\theta\theta}$.

■ Frontera exterior

En este caso se tendrán diferentes condiciones para la materia y la geometría.

- La materia tendrá la misma condición que en el capítulo anterior, el lado derecho de las ecuaciones (3.21) para D, J_r, τ se iguala a 0 para mantener constantes estas variables.
- En cuanto a las variables geométricas, se considerará que lejos del horizonte del agujero negro donde existe un campo gravitacional fuerte, estas se comportan como ondas que se mueven a la velocidad de la luz, las cuales viajarán hacia afuera del dominio. Para esto primero considérese la función

$\psi = \psi(r, t)$, donde esta obedece la ecuación de onda, por lo que se tiene $\square\psi = 0$. En base a que se está considerando una región lejana a la zona con un campo gravitacional fuerte, es posible tomar el operador D'Álembertiano para el espacio-tiempo de Minkowski; expresando este en coordenadas esféricas y factorizando se tiene:

$$\begin{aligned}\square\psi &= \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right), \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t} + c_- \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\right] \left[\frac{\partial}{\partial t} - c_- \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\right] \psi = 0.\end{aligned}$$

Cada uno de estos factores describen el modo moviéndose en una dirección diferente: el primero corresponde al modo viajando en dirección al origen de coordenadas y el segundo al modo alejándose del origen de coordenadas. Dado que se quiere que el modo viaje hacia fuera de la frontera exterior, el primer factor se debe anular, lo que lleva a la condición:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + c_- \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\right] \psi = 0. \quad (6.10)$$

El término c_- surge de resolver (dr/dt) para el elemento de línea (6.2), que representa una geodésica radial nula, trayectorias que sigue la luz; esto ya se hizo anteriormente y reescribiendo el resultado (6.5) para este caso se tiene:

$$c_{\pm} = \left(\frac{dr}{dt}\right)\bigg|_{r_{max}} = \left(-\beta^r \pm \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma_{rr}}}\right)\bigg|_{r_{max}} \quad (6.11)$$

siendo $c_{\pm}$ la velocidad de la luz escrita en coordenadas del espacio-tiempo en $r = r_{max}$.

De la ecuación (6.12) se obtiene la condición de frontera. Por último, siguiendo [Thornburg 1999] se considera que la diferencia entre $\gamma_{rr}, \gamma_{\theta\theta}, K_{rr}, K_{\theta\theta}$ y un espacio-tiempo de fondo serán ondas que definirán la evolución de estas variables, lo que tomando en cuenta la ecuación (6.10) se escribe como:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -c_- \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) \tilde{\psi} \quad (6.12)$$

siendo ψ las variables $\gamma_{rr}, \gamma_{\theta\theta}, K_{rr}, K_{\theta\theta}$ y $\tilde{\psi} = \psi - \psi_{bg}$, donde a su vez ψ_{bg} representa las variables $\gamma_{rr}, \gamma_{\theta\theta}, K_{rr}, K_{\theta\theta}$ del espacio-tiempo de fondo, el cual se tomará como el de Eddington-Finkelstein dado su parecido con el espacio-tiempo que se tiene en la evolución.

SECCIÓN 6.2

Resultados de la evolución

En las Figuras 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.6, 6.5, 6.7 y 6.8 se presentan los resultados numéricos obtenidos para la densidad ρ_0 , la componente γ_{rr} de la 3-métrica γ_{ij} , las componentes $K_{rr}, K_{\theta\theta}$ de la curvatura extrínseca K_{ij} , el horizonte aparente r_{HA} , el error para la restricción Hamiltoniana, el factor de autoconvergencia para el horizonte aparente y el horizonte de eventos; todo esto para el caso de $v_0 = -0.1$ y el de $v_0 = 0.1$. Se considera un hoyo negro de masa $M = \mathcal{X}M_\odot$, por lo cual se usa la Tabla 8.2 de factores de conversión de unidades geométricas a unidades físicas:

Variable	SI	Unidades geométricas (UG)	UG $\rightarrow$ SI
Masa	kg	$\mathcal{X}M_\odot$	$(1.98 \times 10^{30})\mathcal{X}$
Tiempo	s	$\mathcal{X}M_\odot$	$(4.916 \times 10^{-6})\mathcal{X}$
Longitud	m	$\mathcal{X}M_\odot$	$1474.954\mathcal{X}$
Energía	J	$\mathcal{X}M_\odot$	$(1.79 \times 10^{47})\mathcal{X}$
Densidad	Kg/m^3	$1/(\mathcal{X}M_\odot)^2$	$(6.198 \times 10^{20})\mathcal{X}^{-2}$
Presión	Pa	$1/(\mathcal{X}M_\odot)^2$	$(5.578 \times 10^{37})\mathcal{X}^{-2}$
Velocidad	m/s	1	c

Cuadro 6.1: Factores de conversión de unidades geométricas al SI en base a las masas solares $\mathcal{X}M_\odot$.

En la Figura 6.1 se presenta el resultado de la evolución para la densidad ρ_0 en diferentes tiempos para $v_0 = -0.1$ (superior) y $v_0 = 0.1$ (inferior). El perfil inicial de la densidad ρ_0 para ambos casos es una función Gaussiana con su máximo en $r = 20$, por lo que se tiene un cascarón de alta densidad. Conforme pasa el tiempo el perfil de alta densidad para $v_0 = -0.1$ se rarifica al moverse hacia el hoyo negro debido a la velocidad inicial negativa y la gravedad del mismo, siendo absorbido hasta que se alcanza el flujo estacionario en $t \approx 425$, el cual es generado por la acreción parásita de la atmósfera. En comparación, se tiene el caso para $v_0 = 0.1$, donde una parte del perfil de alta densidad se aleja del hoyo negro debido a la velocidad positiva, mientras que otra se mueve hacia el debido a la intensa fuerza de gravedad del mismo; a la par de este proceso el hoyo negro absorbe el material, rarificando cada vez más el gas, hasta que para $t \approx 537$ se alcanza un flujo estacionario de la densidad atmósfera. Para ambos casos el perfil del flujo estacionario al que se llega es el mismo, por lo que se concluye que se tiene un perfil atractor.

Para la componente γ_{rr} se presentan los resultados en la Figura 6.2. Esta variable pre-

senta una ligera curvatura en el perfil inicial en la posición $r = 20$, justo en la zona de alta densidad, la cual se propaga en dirección del agujero negro a la par con el perfil de densidad inicial para ambos casos $v_0 = -0.1$ (superior) y $v_0 = 0.1$ (inferior). Al igual que ρ_0 , γ_{rr} alcanza un perfil estacionario que es igual para los dos casos de v_0 , siendo este alcanzado primero por la evolución para $v_0 = -0.1$.

En la Figura 6.3 se tienen los resultados para la componente K_{rr} de la curvatura extrínseca, la cual no presentan perturbación alguna en $r = 20$ para $v_0 = -0.1$ (superior) y $v_0 = 0.1$ (inferior), pero igual se presenta un perfil atractor que se alcanza con el tiempo donde la evolución se vuelve estacionaria, el cual es igual para ambos casos de v_0 , pero siendo alcanzado primero alcanzado por el caso de $v_0 = -0.1$. Para la componente $K_{\theta\theta}$ de la curvatura extrínseca, los resultados se encuentran en la Figura 6.4. Se tiene que el perfil inicial para esta variable entre $r = 0$ y $r \approx 19$ es igual para $v_0 = -0.1$ y $v_0 = 0.1$, sin embargo, en $r \approx 19$ los perfiles de ambos casos se bifurcan, teniendo que el correspondiente a $v_0 = -0.1$ se mueve hacia una región superior que aquel para $v_0 = 0.1$. Esto tiene un impacto directo en el perfil atractor que es alcanzado en el tiempo, pues aunque de forma similar, aquel para $v_0 = -0.1$ tendrá valores ligeramente superiores que el de $v_0 = 0.1$.

Dado que la constricción Hamiltoniana se satisface en el continuo, es decir $\mathcal{H} = 0$, lo que se mide es la violación de la constricción como función del tiempo. Esto se presenta para $v_0 = -0.1$ (superior) y $v_0 = 0.1$ (inferior) en la Figura 6.5 para tres resoluciones temporales diferentes, $\Delta r = 0.025, 0.0125, 0.00625$. Se observa que la norma L_2 de la violación de la constricción para $t = 0$ es 0 para ambos casos, lo que concuerda con el hecho de que las condiciones iniciales deben ser consistentes con las ecuaciones de campo de Einstein (2.1). Pocos pasos de tiempo después de $t = 0$, la norma L_2 crece hasta mantenerse oscilando, donde se tiene que para ambos casos de v_0 si se multiplica por un factor de ≈ 4 , el error para las resoluciones $\Delta r = 0.025, 0.0125$ y $\Delta r = 0.0125, 0.00225$ se iguala, cumpliendo el factor de convergencia (4.15) dados los ordenes de precisión de los diferentes métodos usados. Este comportamiento evidencia la convergencia hacia el error 0 por medio de la resolución espacial.

En la Figura 6.6 se tiene la posición del horizonte aparente como función del tiempo para tres resoluciones espaciales diferentes, $\Delta r = 0.025, 0.0125, 0.00625$, para los casos de $v_0 = -0.1$ (superior) y $v_0 = 0.1$ (inferior). Se observa como el horizonte aparente crece con el tiempo gracias a la acreción de materia. El ritmo de crecimiento varía según la resolución usada; para ambos casos de v_0 , se tiene que con la resolución $\Delta r = 0.025$ el horizonte aparente continua creciendo hasta el final de la evolución a un ritmo mayor a las otras resoluciones, mientras que con $\Delta r = 0.0125$ el crecimiento tiene un ritmo bajo a partir de $t \approx 100$ para $v_0 = -0.1$ y $t \approx 250$ para $v_0 = 0.1$, por su parte el crecimiento con $\Delta r = 0.00625$ es prácticamente nulo a partir de los mismos puntos para ambos casos. De aquí se observa cómo el horizonte aparente tiene una fuerte dependencia en la resolución espacial, presentando un cambio importante entre los resultados obtenidos con las resoluciones $\Delta r = 0.025$ y $\Delta r = 0.0125$, en cambio la diferencia entre los resultados de esta última resolución y $\Delta r = 0.00625$ no es tan grande en comparación. Para analizar la precisión del resultado de la posición del horizonte aparente se usa el factor

de autoconvergencia (4.16) de la sección 4.3, cuyos resultados se tienen en la Figura 6.6 para $v_0 = -0.1$ (superior) y $v_0 = 0.1$ (inferior). Para el caso de $v_0 = -0.1$ se observan dos puntos donde existe un pico en el valor del factor de convergencia, estos puntos corresponden a los momentos en el tiempo donde hay un aumento en el crecimiento del horizonte aparente. Los valores alrededor de los cuales el factor de convergencia se estabiliza son entre $3.0 - 3.1$ para $v_0 = -0.1$ y $3.4 - 3.6$ para $v_0 = 0.1$, lo que significa que la precisión del método está entre $n = 1$ y $n = 2$, lo cual concuerda con la precisión usada.

En la Figura 6.8 se presenta para $v_0 = -0.1$ (superior) y $v_0 = 0.1$ (inferior) la posición del horizonte de eventos usando un conjunto de geodésicas nulas. Comparando ambos casos, para $v_0 = -0.1$ el crecimiento se presenta primero y por un periodo de tiempo corto, en cambio, el horizonte de eventos para $v_0 = 0.1$ presenta un ritmo de crecimiento menor pero durante un mayor tiempo. En ambos casos se observa que el horizonte de eventos está siempre en un radio mayor que el horizonte aparente, por lo que se tiene un comportamiento similar entre ambos horizontes para cada caso respectivamente.

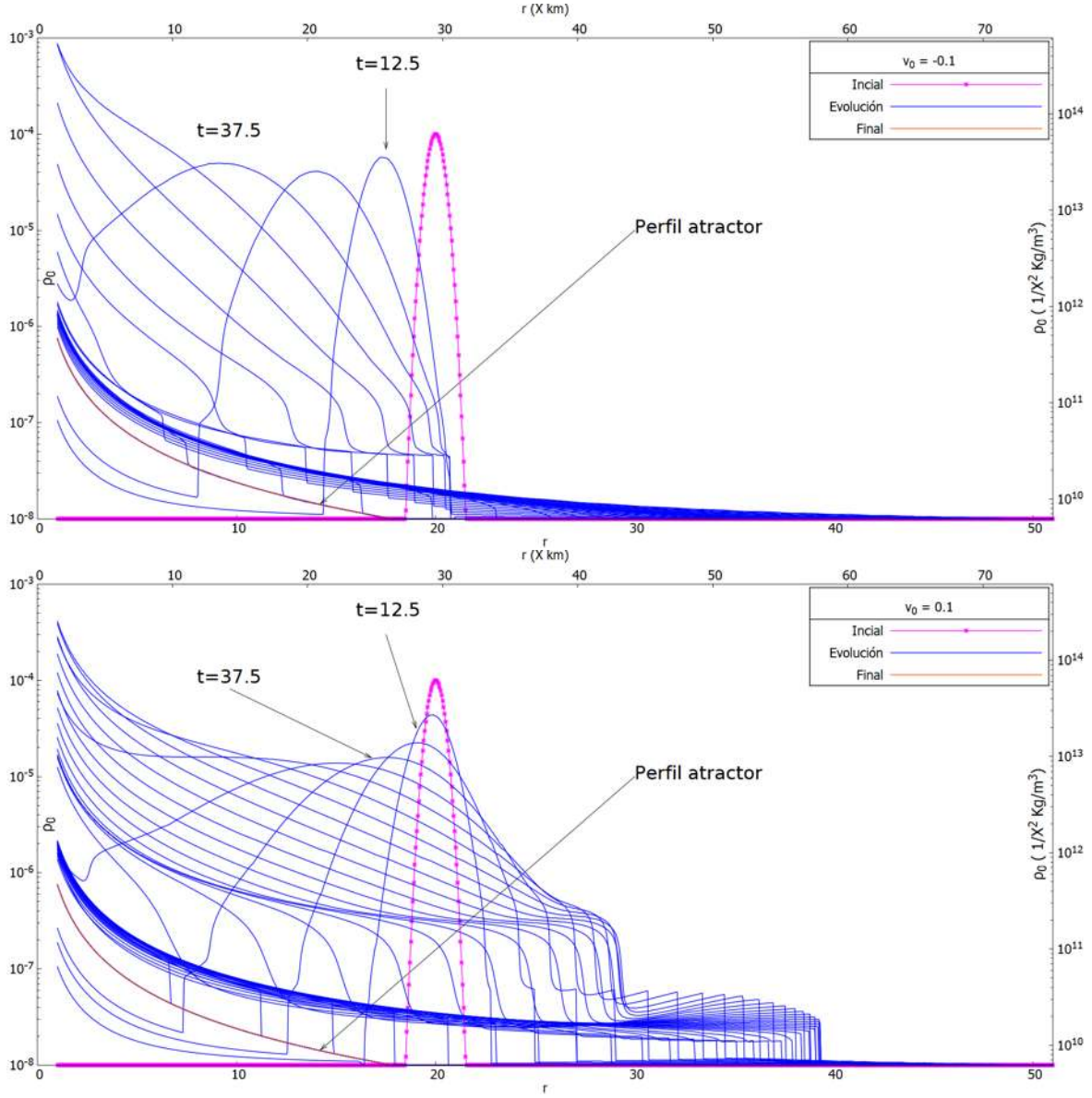


Figura 6.1: Resultado obtenido de la evolución numérica para la densidad ρ_0 en diferentes tiempos para la acreción no lineal. Se presentan los casos $v_0 = -0.1$ (superior) y $v_0 = 0.1$ (inferior), ambos casos con un perfil Gaussiano inicial de alta densidad situado en $r = 20$, unidades geométricas. Los ejes izquierdo e inferior se presentan en unidades geométricas, mientras que los ejes derecho y superior se muestran en unidades físicas. Los factores de conversión están en función del número de masas solares $\mathcal{X}$ que se quiera considerar, i.e. se considera que $M = \mathcal{X}M_\odot$; en la tabla 8.2 se pueden encontrar todos los factores para este caso. Se resaltan con diferentes colores el valor inicial, el valor final, y los valores intermedios entre estos dos. Los valores usados para esta gráfica son los obtenidos con la mayor resolución espacial usada $\Delta r = 0.00625$.

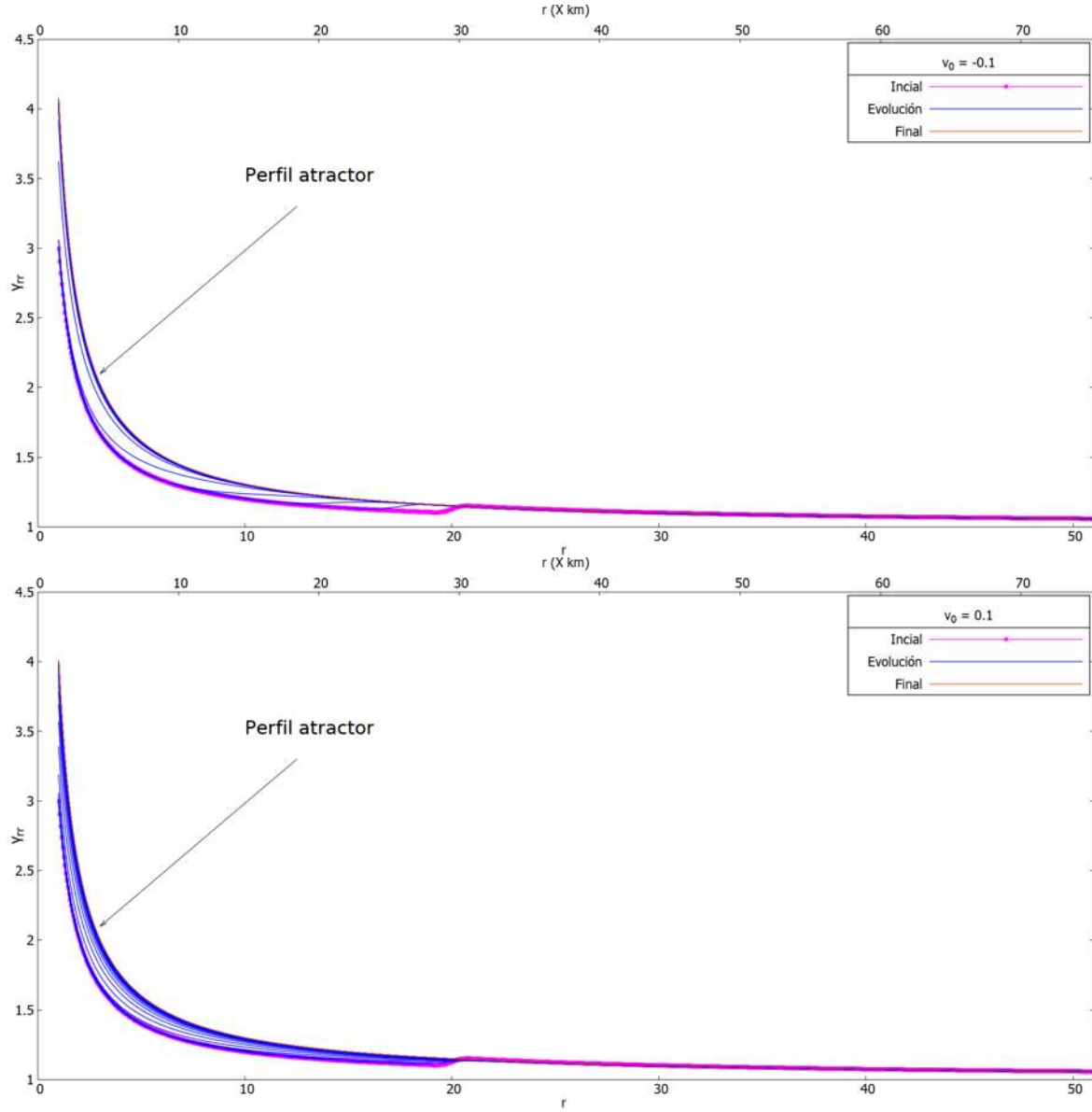


Figura 6.2: Resultado obtenido de la evolución numérica para la componente γ_{rr} de la 3-métrica γ_{ij} , esto en diferentes tiempos para la acreción no lineal. Se presentan los casos $v_0 = -0.1$ (superior) y $v_0 = 0.1$ (inferior). Los ejes izquierdo e inferior se presentan en unidades geométricas, mientras que el eje superior se muestra en unidades físicas. El factor de conversión considera que $M = \mathcal{X}M_{\odot}$; en la tabla 8.2 se pueden encontrar todos los factores para este caso. Se resaltan con diferentes colores el valor inicial, el valor final, y los valores intermedios entre estos dos. Los valores usados para esta gráfica son los obtenidos con la mayor resolución espacial usada $\Delta r = 0.00625$.

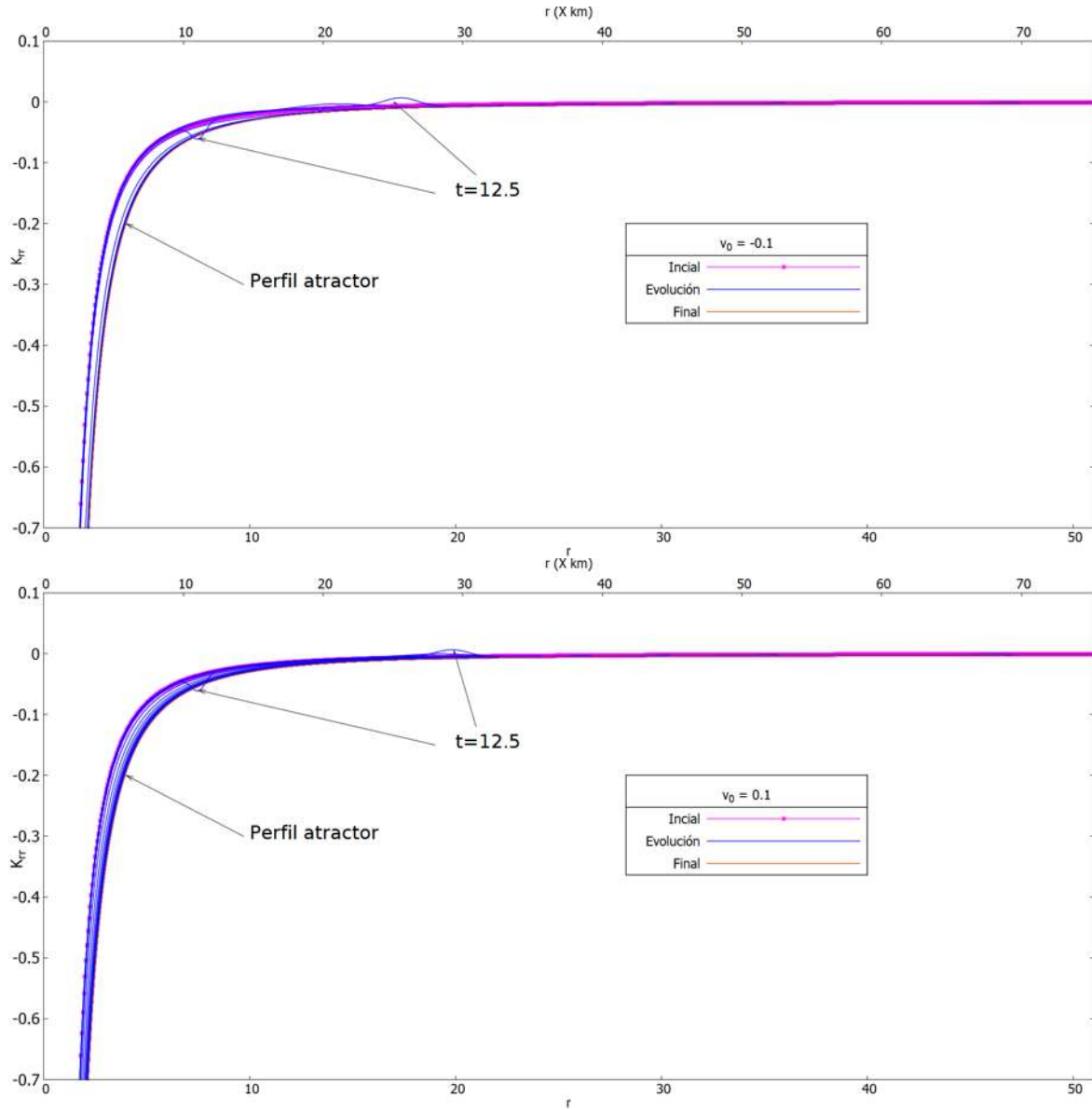


Figura 6.3: Resultado obtenido de la evolución numérica para la componente K_{rr} de la curvatura extrínseca K_{ij} , esto en diferentes tiempos para la acreción no lineal. Se presentan los casos $v_0 = -0.1$ (superior) y $v_0 = 0.1$ (inferior). Los ejes izquierdo e inferior se presentan en unidades geométricas, mientras que el eje superior se muestra en unidades físicas. El factor de conversión considera que $M = \mathcal{X}M_\odot$; en la tabla 8.2 se pueden encontrar todos los factores para este caso. Se resaltan con diferentes colores el valor inicial, el valor final, y los valores intermedios entre estos dos. Los valores usados para esta gráfica son los obtenidos con la mayor resolución espacial usada $\Delta r = 0.00625$.

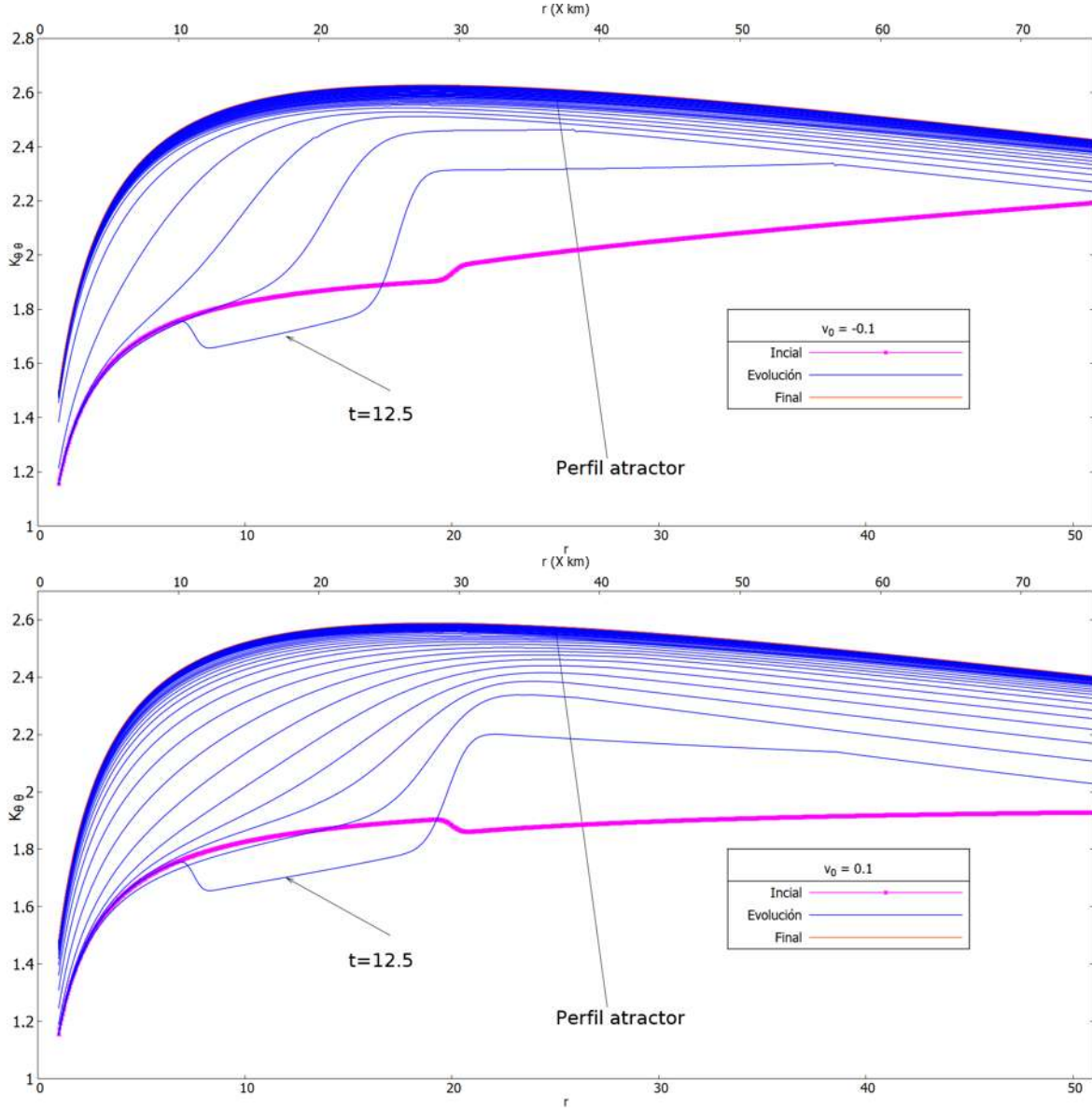


Figura 6.4: Resultado obtenido de la evolución numérica para la componente K_{rr} de la curvatura extrínseca K_{ij} , esto en diferentes tiempos para la acreción no lineal. Se presentan los casos $v_0 = -0.1$ (superior) y $v_0 = 0.1$ (inferior). Los ejes izquierdo e inferior se presentan en unidades geométricas, mientras que el eje superior se muestra en unidades físicas. El factor de conversión considera que $M = \mathcal{X}M_\odot$; en la tabla 8.2 se pueden encontrar todos los factores para este caso. Se resaltan con diferentes colores el valor inicial, el valor final, y los valores intermedios entre estos dos. Los valores usados para esta gráfica son los obtenidos con la mayor resolución espacial usada $\Delta r = 0.00625$.

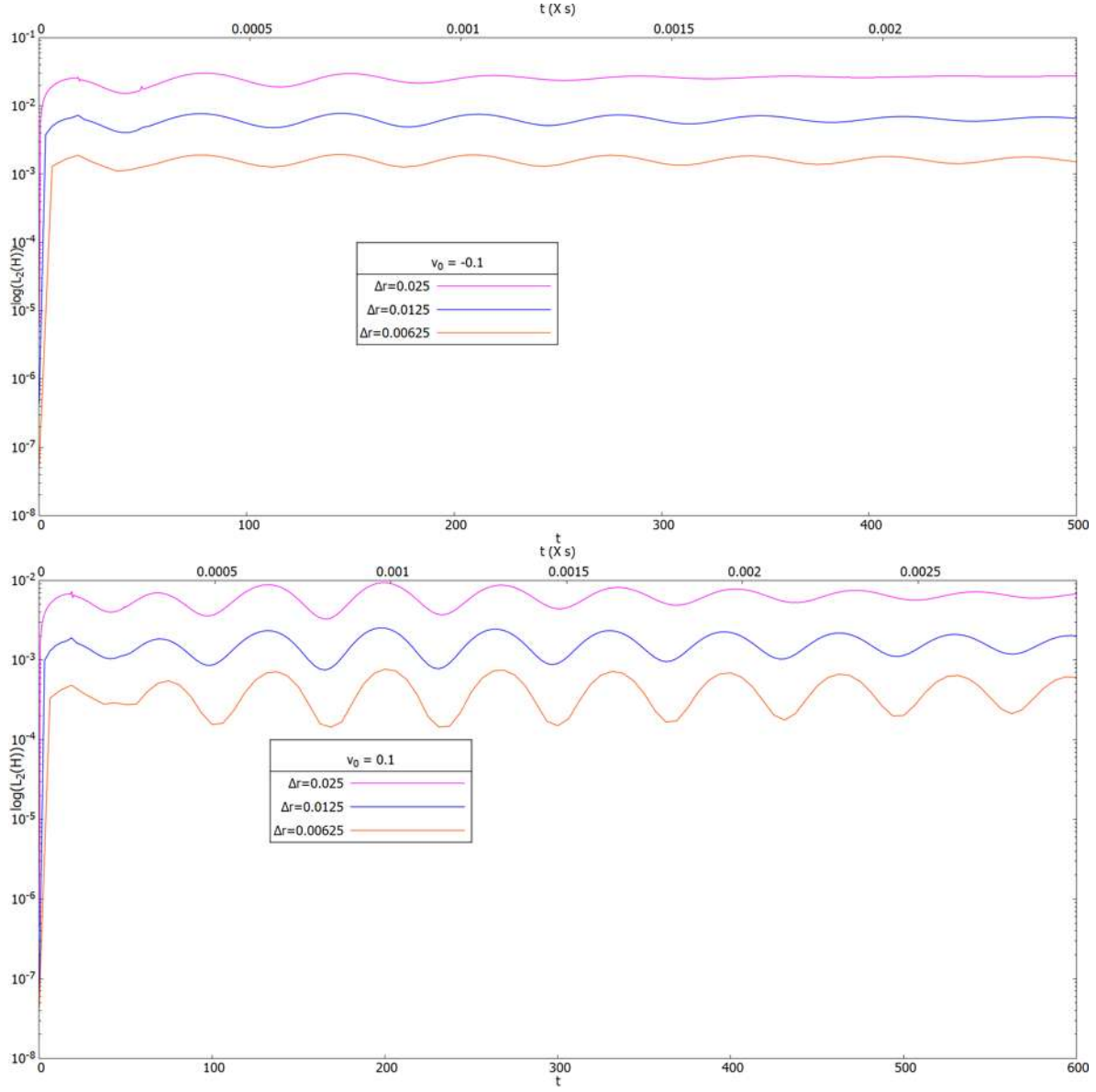


Figura 6.5: Resultado obtenido para la norma L_2 de la violación de la constricción Hamiltoniana como función del tiempo. Se presentan los casos $v_0 = -0.1$ (superior) y $v_0 = 0.1$ (inferior). Se presenta el tiempo en unidades geométricas, eje inferior y en unidades físicas, eje superior. El factor de conversión considera que $M = \mathcal{X}M_\odot$; en la tabla 8.2 se pueden encontrar todos los factores para este caso. Se muestran tres resoluciones diferentes $\Delta r = 0.025, 0.0125, 0.00625$.

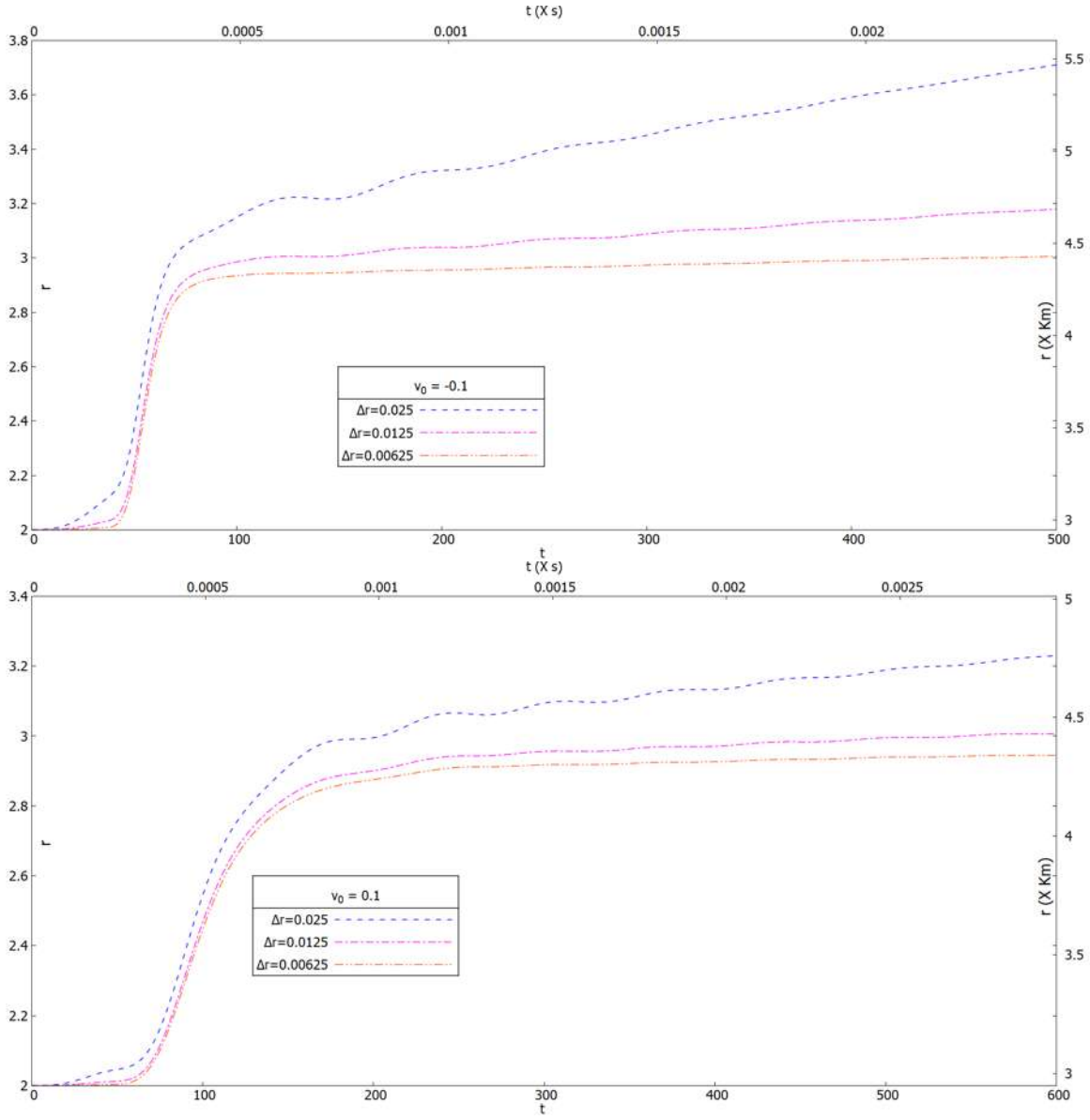


Figura 6.6: Resultados obtenidos para la posición de horizonte aparente como función del tiempo para el caso de $v_0 = -0.1$ (superior) y $v_0 = 0.1$ (inferior). Se presenta el tiempo en unidades geométricas, eje inferior y en unidades físicas, eje superior. Los ejes izquierdo e inferior se presentan en unidades geométricas, mientras que los ejes derecho y superior se muestran en unidades físicas. Los factores de conversión consideran que $M = \mathcal{X}M_\odot$; en la tabla 8.2 se pueden encontrar todos los factores para este caso. Se muestran tres resoluciones diferentes $\Delta r = 0.025, 0.0125, 0.00625$.

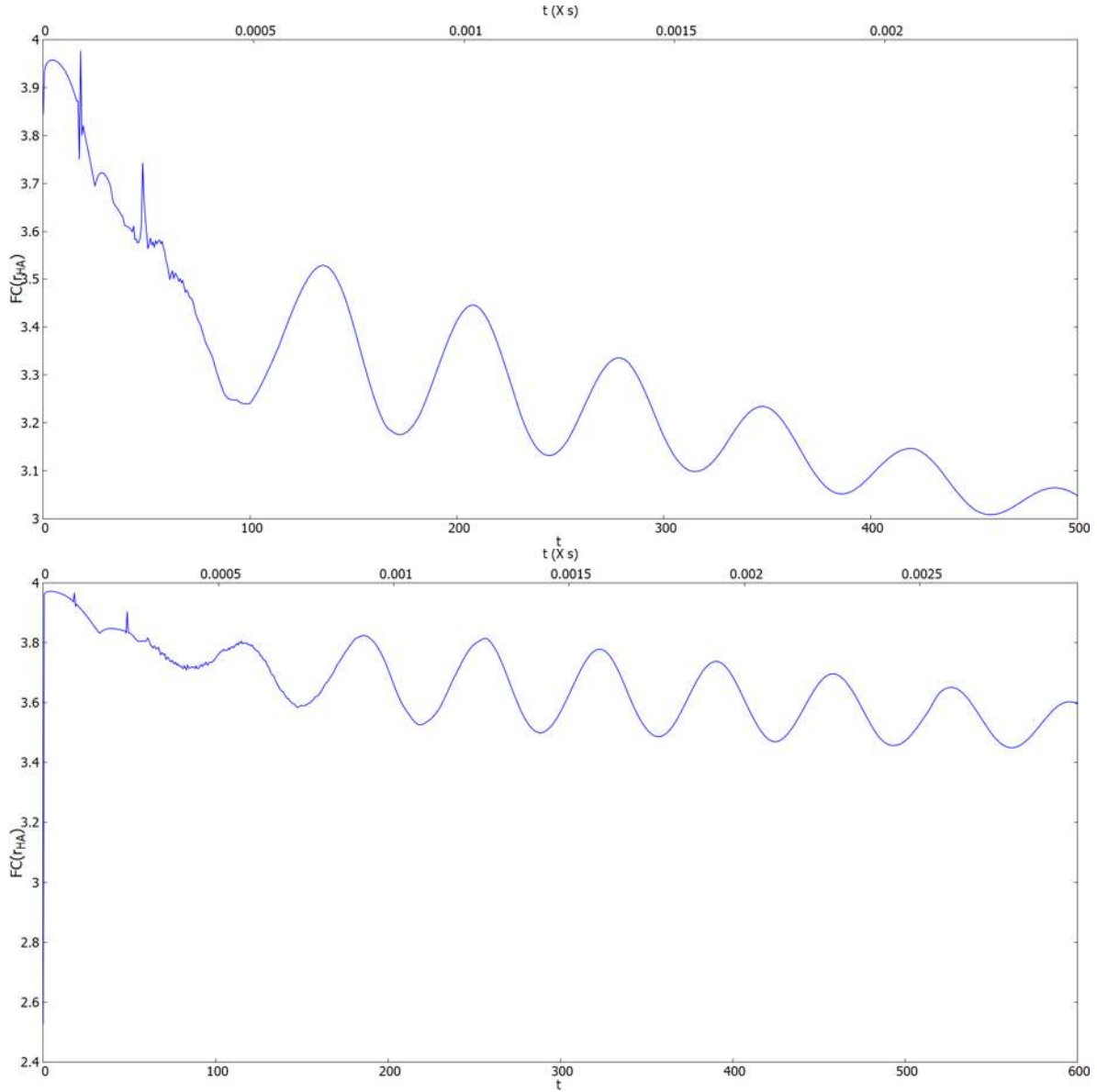


Figura 6.7: Resultado obtenido para el factor de convergencia como función del tiempo. Se presenta el tiempo en unidades geométricas, eje inferior y en unidades físicas, eje superior. El factor de conversión considera que $M = \mathcal{X}M_{\odot}$; en la tabla 8.2 se pueden encontrar todos los factores para este caso. Para el calculo del factor se usaron las resoluciones $\Delta r = 0.025, 0.0125, 0.00625$.

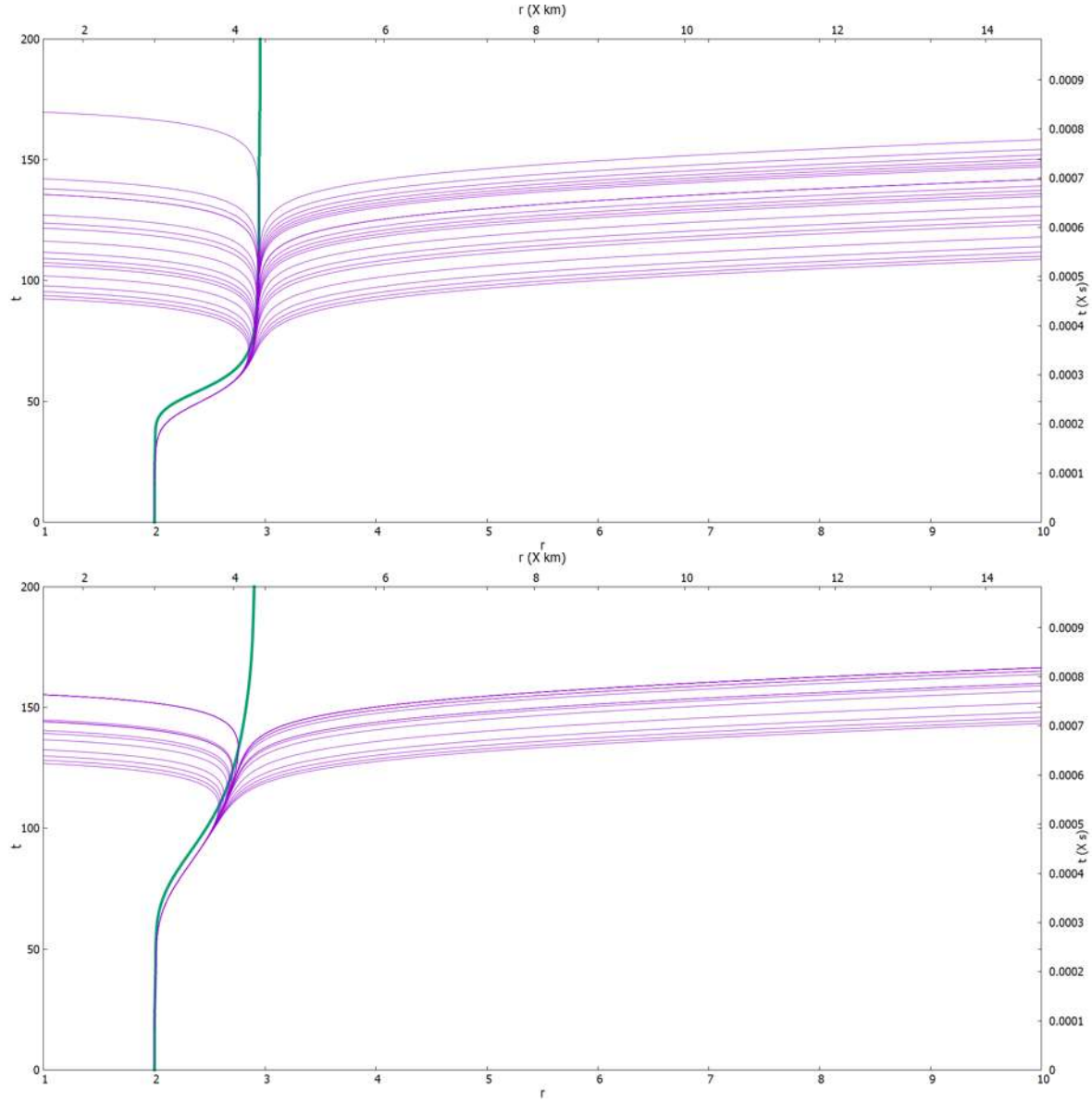


Figura 6.8: Se muestra para el caso $v_0 = -0.1$ (superior) y $v_0 = 0.1$ (inferior) el horizonte aparente (verde) y un conjunto de geodésicas nulas (morado) que parten de puntos cercanos a $r = 2$. El rayo que separa las geodésicas que van hacia $r = 0$ y las que escapan al infinito es el horizonte de eventos.

Capítulo 7

Conclusiones y comentarios finales

Se presentó con detalle la separación 3+1 del espacio-tiempo, la cual permite distinguir entre las coordenadas espaciales y el tiempo en las ecuaciones de Einstein, permitiendo buscar soluciones del espacio-tiempo como un problema de evolución de condiciones iniciales. Se llevó a cabo el proceso de obtención de las ecuaciones ADM en un espacio-tiempo general y en el caso de uno con simetría esférica descrito en coordenadas esféricas.

Se revisó qué es un hoyo negro, así como las coordenadas de Schwarzschild y de Eddington-Finkelstein para describirlo, además se estudiaron las ventajas de usar estas última coordenadas. Se definieron los conceptos de horizonte de eventos y horizonte aparente, explicando la diferencia entre los mismos y los métodos para obtener cada uno de ellos en un escenario en que el hoyo negro evoluciona.

Se estudiaron las ecuaciones de Euler para el espacio-tiempo de Minkowski y para el espacio-tiempo del enfoque 3+1 con simetría esférica descrito en coordenadas esféricas, además se describió por qué estas ecuaciones generan discontinuidades en las variables de estado.

Se estudiaron los métodos de diferencias finitas y volúmenes finitos para resolver las ecuaciones ADM y las ecuaciones de Euler respectivamente; asimismo, se desarrolló el material necesario para llevar a cabo el análisis del error y la convergencia de la evolución numérica efectuada, esto comprende las normas del error L_1 , L_2 y los factores de convergencia y autoconvergencia.

Se presentó la evolución de un fluido perfecto alrededor de un hoyo negro de Schwarzschild considerando el espacio-tiempo fijo, únicamente llevando a cabo la evolución del fluido, para lo cual se construyó un código capaz de llevar a cabo este proceso. Se dividió

esta evolución en dos casos tomando el fluido perfecto con y sin presión, los casos de la acreción de Bondi y Michel respectivamente, para las cuales se calculó la solución estacionaria; se presentaron 2 pruebas para cada tipo de acreción. Para llevar a cabo la evolución se fijaron condiciones iniciales y de frontera adecuadas para la las variables de estado. Se obtuvo para todas las pruebas realizadas que los perfiles de la densidad de masa en reposo ρ_0 , la velocidad v^r y la presión p convergen con el tiempo a las soluciones estacionarias de Bondi y Michel, por lo que se tiene un comportamiento atractor de dichas soluciones. Se verificó la validez de los resultados por medio de una prueba de convergencia, teniendo que esta es consistente con la precisión de los métodos usados. Se llevó a cabo la evolución del caso no lineal para un hoyo negro de Schwarzschild, esto es, se resolvieron las ecuaciones de Euler para el fluido perfecto y las ecuaciones ADM para el espacio-tiempo a la par. Para esto fue necesario ampliar el código usado en el caso de la acreción de Bondi y Michel, además de imponer condiciones iniciales y de frontera diferentes, así como condiciones adicionales sobre las funciones de norma y las funciones métricas del espacio-tiempo. Se realizaron dos casos diferentes, uno con velocidad inicial v_0 en dirección al hoyo negro y otro con velocidad inicial v_0 en dirección contraria. Para ambos casos se llegó a obtener que los perfiles para la densidad ρ_0 , la componente γ_{rr} de la 3-métrica y las componentes $K_{rr}, K_{\theta\theta}$ de la curvatura extrínseca llegan a un estado estacionario, donde el hoyo negro solo presenta acreción parásita de la atmósfera ρ_{atm} .

Se diagnosticó el crecimiento del horizonte de eventos y del horizonte aparente como función del tiempo debido a la acreción de materia, siendo menor el ritmo y el crecimiento de ambos horizontes para el caso donde el perfil de densidad se mueve en dirección contraria al hoyo negro. Se comprobó que el horizonte aparente siempre está dentro del horizonte de eventos tal como la teoría dicta. Para el horizonte aparente se usó la prueba de autoconvergencia, obteniendo resultados positivos que comprueban la validez de los resultados obtenidos; asimismo se comprobó la convergencia de la solución por medio de la resolución espacial con la norma L_2 del error para la violación de la constricción Hamiltoniana.

Capítulo 8

Apéndice

SECCIÓN 8.1

Unidades geométricas

En las ecuaciones de campo de Einstein (2.1) aparecen las constantes G y c , siendo $G = 6.674 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$ la constante gravitación universal y $c = 3 \times 10^8 \frac{km}{s}$ la velocidad de la luz en el vacío, y aunque estas no representan un problema para solucionar las ecuaciones, es incomodo tener que tener en cuenta estos factores pudiendo conducir a errores de no ser manejados con cuidado. Para solucionar este ligero inconveniente se toma $G = c = 1$, dejando a las ecuaciones de la Relatividad General libres de unidades y factores, con excepción de 8π . A estas nuevas unidades se les llama *Unidades geométricas*. Este cambio conducirá a tener todas las unidades físicas tales como tiempo, longitud, masa, etc., expresadas en términos de una única unidad, la cual se elige dependiendo del problema estudiado. En este caso se elige como base a la masa M y se usa el sistema internacional (SI) de unidades para todas las variables. Es de esta equivalencia que se pueden recuperar los factores de las unidades físicas para cada una de las variables una vez que se solucionan las ecuaciones.

Para lograr obtener las diferentes equivalencias entre variables como energía, densidad, etc., es necesario primero obtener las de la longitud, el tiempo y la masa, pues las demás unidades están en términos de estas. Dado que se eligió como base la masa

M , se tendrá que $M = M$, lo que en unidades del SI es $kg = kg$. A continuación se presenta el proceso de obtención de las equivalencias, donde las constantes barradas hacen referencia únicamente al valor de la constante sin unidades. Las equivalencias básicas se obtienen de la condición $G = c = 1$ como sigue:

$$\begin{aligned} c = \bar{c} \frac{m}{s} = 1 & \Rightarrow m = \frac{s}{\bar{c}} \\ G = \bar{G} \frac{Nm^2}{kg^2} = \bar{G} \frac{m^3}{s^2 kg} \\ & = \bar{G} \left(\frac{s}{\bar{c}} \right)^3 \frac{1}{s^2 kg} = \frac{\bar{G}}{\bar{c}^3} \frac{s}{kg} = 1 \Rightarrow s = \frac{\bar{c}^3}{\bar{G}} kg \end{aligned}$$

Y sustituyendo en la primera expresión encontrada para m se obtiene las conversiones base:

$$s = \frac{\bar{c}^3}{\bar{G}} kg \quad m = \frac{\bar{c}^2}{\bar{G}} kg \quad (8.1)$$

Antes de seguir con otra variable es conveniente obtener la equivalencia para newtons N :

$$1N = 1kg \frac{m}{s^2} = 1kg \frac{\frac{\bar{c}^2}{\bar{G}} kg}{\left(\frac{\bar{c}^3}{\bar{G}} kg \right)^2} = 1 \frac{\bar{G}}{\bar{c}^4}$$

Ahora se sigue con la energía, la cual se expresa en Joules J :

$$\begin{aligned} 1J = 1N \cdot m & = 1 \frac{\bar{G}}{\bar{c}^4} \frac{\bar{c}^2}{\bar{G}} kg = \frac{1}{\bar{c}^2} kg \\ \Rightarrow J & = \frac{1}{\bar{c}^2} kg \end{aligned} \quad (8.2)$$

Ahora la densidad siendo su unidad kg/m^3 :

$$1 \frac{kg}{m^3} = 1 \frac{kg}{\left(\frac{\bar{c}^3}{\bar{G}} kg \right)^3} = \frac{\bar{G}^3}{\bar{c}^6} \frac{1}{kg^2}$$

Variable	SI	Unidades geométricas (UG)	UG $\rightarrow$ SI	SI $\rightarrow$ UG
Masa	kg	kg	1	1
Tiempo	s	kg	Gc^{-3}	$G^{-1}c^3$
Longitud	m	kg	Gc^{-2}	$G^{-1}c^2$
Energía	J	kg	c^2	c^{-2}
Densidad	kg/m^3	$1/kg^2$	$G^{-3}c^6$	G^3c^{-6}
Presión	Pa	$1/kg^2$	$G^{-3}c^8$	G^3c^{-8}
Velocidad	m/s	1	c	c^{-1}

Cuadro 8.1: Equivalencias entre las unidades geométricas y físicas tomando como base la masa.

$$\Rightarrow \frac{kg}{m^3} = \frac{\bar{G}^3}{\bar{c}^6} \frac{1}{kg^2} \quad (8.3)$$

—

Se sigue con la presión en Pascales Pa :

$$1Pa = 1 \frac{N}{m^2} = \frac{\frac{\bar{G}}{\bar{c}^4}}{\left(\frac{\bar{c}^2}{\bar{G}} kg\right)^2} = \frac{\bar{G}^3}{\bar{c}^8} \frac{1}{kg^2}$$

$$\Rightarrow Pa = \frac{\bar{G}^3}{\bar{c}^8} \frac{1}{kg^2} \quad (8.4)$$

Para finalizar la velocidad se puede obtener fácilmente de $c = 1$:

$$c = \bar{c} \frac{m}{s} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{s} = \frac{1}{\bar{c}} \quad (8.5)$$

De esta manera se tienen los factores suficientes para la conversión de unidades en el SI a unidades geométricas, y de estos mismos es posible obtener los factores para la conversión opuesta. En la tabla 8.1 se presentan de manera sintetizada las factores para la conversión de ambos sistemas de unidades para el caso de $M = 1kg$. Aunque estos factores son útiles no son muy prácticos, ya que objetos como agujeros negros son cuerpos de varias masas solares $M_\odot$, por lo que este sería un factor más cómodo $M = \mathcal{X}M_\odot$, siendo $\mathcal{X}$ el número de masas solares. Para obtener estos nuevos factores

Variable	SI	Unidades geométricas (UG)	UG $\rightarrow$ SI
Masa	kg	$\mathcal{X}M_{\odot}$	$(1.98 \times 10^{30})\mathcal{X}$
Tiempo	s	$\mathcal{X}M_{\odot}$	$(4.916 \times 10^{-6})\mathcal{X}$
Longitud	m	$\mathcal{X}M_{\odot}$	$1474.954\mathcal{X}$
Energía	J	$\mathcal{X}M_{\odot}$	$(1.79 \times 10^{47})\mathcal{X}$
Densidad	Kg/m^3	$1/(\mathcal{X}M_{\odot})^2$	$(6.198 \times 10^{20})\mathcal{X}^{-2}$
Presión	Pa	$1/(\mathcal{X}M_{\odot})^2$	$(5.578 \times 10^{37})\mathcal{X}^{-2}$
Velocidad	m/s	1	c

Cuadro 8.2: Factores de conversión de unidades geométricas al SI en base a las masas solares $\mathcal{X}M_{\odot}$.

basta con multiplicar por el valor de $M_{\odot}$, o dividir según sea el caso, los factores anteriores. Las nuevas equivalencias se presentan en la tabla 8.2, la cual no contiene los factores para convertir del SI hacia unidades geométricas, ya que en la tabla anterior se aprecia de manera muy clara como los factores son recíprocos.

REFERENCIAS

- [Bondi 1952] Bondi, H., “*On spherically symmetrical accretion*” MNRAS, **112** (1952), 195.
- [Michel 1972] Michel, F. C., “*Accretion of matter by condensed objects*” Astrophysics and Space Science , **15** (1972), 153-160.
- [Schwarzschild 1916] Schwarzschild, K., “*Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinischen theorie*” Sitzungsber. Dtsch. Akad. Wiss Berlin, Kl. Math. Phys. Tech., 1916.
- [Guzmán & Lora-Clavijo 2012] Guzmán, F. S., Lora-Clavijo, F. D., “*Revisiting spherically symmetric relativistic hydrodynamics*”, Rev. Mex. Fis. E. **58** (2012), 84-98.
- [Papadopoulos & Font 1998] Papadopoulos, P., Font, J. A., “*Relativistic Hydrodynamics around Black Holes and Horizon Adapted Coordinate Systems*” Phys. Rev. D. **58**, (1998), 024005.
- [Font, Ibañez, Marquina & Martí 1994] J. A. Font, J. M. Ibañez, A. Marquina, J. M. Martí, *Multidimensional relativistic hydrodynamics: Characteristic fields and modern high-resolution shock-capturing schemes*, A&A **282**, 304-314 (1994).
- [Banyuls, Font, Ibáñez, Martí & Miralles 1996] Banyuls, F., Font, J.A., Ibáñez, J. M., Martí, J. M., Miralles, J. A., “*Numerical 3+1 General Relativistic Hydrodynamics: A Local Characteristic Approach*.”ApJ **D. 476**, (1996), 221-231.
- [Schutz 2009] Schutz, B., “*A first course in general relativity*”, Cambridge University Press, second edition, (2009).
- [Wald 1984] Wald, R., “*General relativity*”, The University of Chicago Press, (1984).
- [Misner, Thorne & Wheeler 1973] Misner C. W., Thorne K., Wheeler J. A., “*Gravitation*”, W. H. Freeman and Company, (1973).
- [Toro 1999] E. F. Toro, Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Springer (1999).

-
- [Harten, Lax, & van Leer 1983] P. Harten, B. Lax, B. B. van Leer, *On Upstream Difference and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws*, SIAM Review, 25 (1983) 35-61.
- [Einfeldt 1988] B. Einfeldt, *On godunov-type methods for gas dynamics*, J. Comp. Phys. 25 (1988) 294-318
- [Press, Teukolsky, Vetterling & Flannery] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery, *Numerical Recipes in C The Art of Scientific Computing*. Springer (1999).
- [Alcubierre 2008] Alcubierre, M., *“Introduction to 3+1 Numerical Relativity”*, Oxford University Press, (2008)
- [Lora-Clavijo 2013] F. D. Lora-Clavijo. Dr. Sc. Thesis. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, 2013. <http://www.ifm.umich.mx/~guzman/LoraClavijoDrScThesis.pdf>
- [Baumgarte & Shapiro 2010] Baumgarte, T. W., and Shapiro, S. L., *“Numerical Relativity: Solving Einstein’s equations on the computer”*, Cambridge University Press, (2010)
- [Leveque 1992] Leveque, R. J., *“Numerical methods for conservation laws”*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser (1992).
- [Guzmán 2010] Guzmán, F. S., *“Solución de la ecuación de onda como un problema de valores iniciales usando diferencias finitas”*, Rev. Mex. Fis. E. **56** (2012), 51-68.
- [Guzmán 2020] Guzmán, F. S., *“Numerical solution of PDEs: Finite volume and hydrodynamics”* (2020)
- [Thornburg 1999] J. Thornburg, *A 3+1 Computational Scheme for Dynamic Spherically Symmetric Black Hole Spacetimes – II: Time Evolution*. <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/9906022.pdf>
- [Thomas 1995] J. W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Texts in Applied Mathematics, Springer 1995.
- [Diener 2003] P. Diener, *A new general purpose event horizon finder for 3D numerical spacetimes*. Class.Quant.Grav. 20, 4901-4918, (2003)
- [Szuszkiewicz, Malkan & Abramowicz 1995] Ewa Szuszkiewicz, Matthew A. Malkan and Marek A. Abramowicz, *The Observational Appearance of Slim Accretion Disks*. The Astrophysical Journal Letters (1995)
- [Guzmán, Alvarez-Ríos, Romero & González 2020] Francisco S. Guzmán, Iván Alvarez-Ríos, Alejandro Romero, José A. González, *Spherical accretion of a perfect fluid onto a black hole*.

-
- [EHT I 2019] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole, *The Astrophysical Journal Letters* (2019).
- [EHT II 2019] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope Results. II. Array and Instrumentation, *The Astrophysical Journal Letters* (2019).
- [EHT III 2019] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope Results. III. Data Processing and Calibration, *The Astrophysical Journal Letters* (2019).
- [EHT IV 2019] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope Results. IV. Imaging the Central Supermassive Black Hole, *The Astrophysical Journal Letters* (2019).
- [EHT V 2019] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope Results. V. Physical Origin of the Asymmetric Ring, *The Astrophysical Journal Letters* (2019).
- [EHT VI 2019] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope Results. VI. The Shadow and Mass of the Central Black Hole, *The Astrophysical Journal Letters* (2019).