Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Universidad Nacional Autónoma de México

Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH

Centro de Ciencias Matemáticas de la UNAM

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas unam-umsnh

Ecuación de Gauss espinorial

T E S I N A

que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta:

Berenice Zavala Jiménez

Asesor: Dr. Pierre Bayard

Morelia, Michoacán - Julio del 2015

Índice

Resumen

En este trabajo damos una introducción corta a la geometría espinorial; algunos de los conceptos que se introducen son álgebras de Clifford, grupos espin y estructuras espin. Con el fin de construir la fórmula de Gauss en este contexto se definen el haz de espinores de Clifford de una variedad y de una subvariedad, como una variante del haz definido en [1]. Se muestra la relación que existe entre el haz de espinores de la variedad y el haz de espinores de la subvariedad, de la manera natural asociamos formas de conexión y derivadas covariantes a dichos haces para de esta manera obtener la fórmula de Gauss en el contexto de la geometría espinorial.

Palabras cavle: álgebra de Clifford, grupo espin, estructura espin, fibrado espinorial de Clifford y fórmula de Gauss.

Abstract

In this job we give a short introduction to spin geometry; we introduce Clifford algebras, spin groups and spin structures. Furthermore, in order to construct the Gauss' formula in this context, we define the Clifford spinor bundle for a manifold and for a submanifold, like a variation of the spinor bundle defined in [1]. We show the relation between the spinor bundle of the manifold and the spinor bundle of the submanifold and then we associate to such bundles, in a natural way, conexion forms and covariant derivatives for in this way give the Gauss' formula in the spin geometry context.

Introducción

Si $\overline{M}$ es una variedad Riemanniana y M es una subvariedad de $\overline{M}$ la ecuación de Gauss expresa la diferencia entre la derivada covariante de la variedad ambiente y la de la subvariedad en términos de la segunda forma fundamental, y se escribe de la siguiente manera

$$\nabla^{\overline{M}}_X Y - \nabla^M_X Y = II(X,Y),$$

para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$, donde $\nabla^{\overline{M}}$ y ∇^M son las respectivas conexiones de Levi-Civita para $\overline{M}$ y M, y II es la segunda forma fundamental de M en $\overline{M}$.

En la tesina estudiamos la ecuación de Gauss en el contexto de la geometría espinorial de las subvariedades. La ecuación de Gauss espinorial ha sido obtenida por Christian Bär en [1], dicha referencia es la que nosotros seguimos; con la diferencia de que cambiamos el haz de los espinores usual por el haz de los espinores de Clifford, i.e., cambiamos la representación espinorial por la representación del grupo $Spin(n)$ dada por la multiplicación en el álgebra de Clifford. En principio, el segundo haz podría parecer más complicado que el primero por ser de rango mayor, sin embargo, resulta que considerar el haz de los espinores de Clifford es en algunos aspectos más sencillo y es más natural para estudiar representaciones de subvariedades en espacios euclidianos ya que este haz está equipado naturalmente con una estructura algebraica más rica que permite escribir formulas de representaciones explícitas [2, 3]. El objetivo de este trabajo es probar que la ecuación de Gauss en [1] sigue siendo válida en este contexto.

En las primeras dos secciones se introducen los conceptos de álgebra de Clifford y grupo $Spin(n)$, en la tercera sección estudiamos lo que es un haz principal, sus haces vectoriales asociados y la derivada covariante para un haz asociado. Lo anterior con el fin de explicar, en la cuarta sección, lo que es una estructura espinorial sobre una variedad y con ello construir los fibrados de espinores de Clifford y así obtener en la última sección la ecuación de Gauss espinorial.

1. Álgebra de Clifford

Definición 1.1. *Consideremos a* $\mathbb{R}^n$ *con su métrica usual* g. *El álgebra de Clifford* Cl_n *asociada a* g *sobre* $\mathbb{R}^n$ *es el álgebra con unidad*

$$Cl_n := T(\mathbb{R}^n)/I(\mathbb{R}^n, g),$$

donde $T(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{k\geqslant 0} (\mathbb{R}^n)^{\otimes k}$ *es el álgebra tensorial de* $\mathbb{R}^n$ *(convenimos* $(\mathbb{R}^n)^{\otimes 0} = \mathbb{R}$*) e* $I(\mathbb{R}^n, g)$ *es el ideal generado por* $\{v \otimes v + g(v, v)1 : v \in \mathbb{R}^n\}$.

Cl_n cumple la siguiente propiedad universal: si $j : \mathbb{R}^n \longrightarrow Cl_n$ es la inclusión natural, A es un álgebra con unidad y $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow A$ es una aplicación lineal tal que $u(v)^2 = -g(v, v)1$ para cada $v \in \mathbb{R}^n$, entonces existe $U : Cl_n \longrightarrow A$ morfismo de álgebras que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & Cl_n \arrow[d, "U"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[ur, "j"] \arrow[r, "u"'] & A \end{tikzcd}$$

Como espacio vectorial, Cl_n tiene dimensión 2^n: más precisamente si $e_1, \ldots, e_n$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\{e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k} : 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

es una base para el álgebra de Clifford Cl_n. Con respecto del producto, los vectores de la base satisfacen $e_i \cdot e_i = -1$, $e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i$ si $i \neq j$.
Usando la observación anterior se pueden escribir las primeras álgebras de Clifford: si $\mathbb{H}$ son los cuaternios, entonces $Cl_1 = \mathbb{C}$, $Cl_2 = \mathbb{H}$, $Cl_3 = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$, $Cl_4 = M_2(\mathbb{H})$, el álgebra de las matrices 2×2 con coeficientes en $\mathbb{H}$.

Definición 1.2. *Una* $\mathbb{Z}_2-$*álgebra graduada* A *es un álgebra que es suma directa de dos subconjuntos* A^0 *y* A^1

$$A = A^0 \oplus A^1$$

con $A^i A^j \subset A^{i+j}$ *para* $i, j \in \mathbb{Z}_2$.

Sean $A = A^0 \oplus A^1$ y $B = B^0 \oplus B^1$ dos álgebras $\mathbb{Z}_2-$graduadas, el álgebra tensorial graduada $A\widehat{\otimes}B$ es el espacio vectorial tensorial $A \otimes B$ con el producto graduado:

$$(a \otimes b^j) \cdot (a^i \otimes b) = (-1)^{ij}(aa^i) \otimes (b^j b) \tag{1.1}$$

para cada $a \in A$, $b \in B$ y $a^i \in A^i$, $b^j \in B^j$.
La $\mathbb{Z}_2$-graduación de $A\widehat{\otimes}B$ es

$$(A \otimes B)^0 = A^0 \otimes B^0 \oplus A^1 \otimes B^1, \; (A \otimes B)^1 = A^0 \otimes B^1 \oplus A^1 \otimes B^0.$$

El álgebra de Clifford Cl_n es una $\mathbb{Z}_2-$álgebra graduada, en efecto, $Cl_n^0 = \{v \in Cl_n : \beta(v) = v\}$ y $Cl_n^1 = \{v \in Cl_n : \beta(v) = -v\}$, donde $\beta : Cl_n \longrightarrow Cl_n$ es el único morfismo de álgebras que extiende a la función $\mathbb{R}^n \longrightarrow Cl_n$ dada por $v \longmapsto -v$, nos dan una descomposición tal que $Cl_n^0 \cdot Cl_n^0 \subset Cl_n^0$ y $Cl_n^0 \cdot Cl_n^1 \subset Cl_n^1$. De lo anterior también se deduce que Cl_n^0 es una subálgebra de Cl_n en tanto que Cl_n^1 no lo es.
Más adelante usaremos el siguiente lema:

Lema 1.3. *Existe $U : Cl_{n+m} \longrightarrow Cl_n\widehat{\otimes}Cl_m$ isomorfismo de álgebras tal que si $x \in Cl_n$ e $y \in Cl_m$ tenemos $U(x \cdot y) = x \otimes y$.*

Demostración. Denotemos por $j_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow Cl_n$, $j_2 : \mathbb{R}^m \longrightarrow Cl_m$ las inclusiones naturales y por g a la métrica producto en $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$; definimos

$$\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m & \longrightarrow & Cl_n \otimes Cl_m \\ & v_1 + v_2 & \longmapsto & j_1(v_1) \otimes 1 + 1 \otimes j_2(v_2). \end{array}$$

Como el álgebra de Clifford es $\mathbb{Z}_2-$graduada y $j_1(v_1) \in Cl_n^1$, $j_2(v_2) \in Cl_m^1$ de la definición de producto graduado dada en (1.1) tenemos que

$$(j_1(v_1) \otimes 1) \cdot (1 \otimes j_2(v_2)) = j_1(v_1) \otimes j_2(v_2),$$

$$(1 \otimes j_2(v_2)) \cdot (j_1(v_1) \otimes 1) = -j_1(v_1) \otimes j_2(v_2)$$

y por tanto

$$\begin{array}{rcl} u(v_1 + v_2)^2 & = & (j_1(v_1) \otimes 1 + 1 \otimes j_2(v_2))^2 \\ & = & -g_1(v_1, v_1)1 \otimes 1 - g_2(v_2, v_2)1 \otimes 1 \\ & = & -g(v_1 + v_2, v_1 + v_2)1 \otimes 1. \end{array}$$

Se sigue de la propiedad universal de Cl_{n+m} que existe una única aplicación $U : Cl_{n+m} \longrightarrow Cl_n\widehat{\otimes}Cl_m$ tal que $U \circ j = u$ para $j : \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m \longrightarrow Cl_{n+m}$ la

inclusión natural.
Ya que U es un homomorfismo de álgebras este se obtiene de extender linealmente

$$U(v_1 \cdot \ldots \cdot v_k) = u(v_1) \ldots u(v_k).$$

Como $Cl_n \widehat{\otimes} Cl_m$ está generado por productos de generadores de Cl_n con generadores de Cl_m eso implica que U es suprayectiva y ya que Cl_{n+m} y $Cl_n \widehat{\otimes} Cl_m$ tienen la misma dimensión 2^{n+m}, U es isomorfismo.

□

2. Grupo Spin(n)

Definición 2.1. *El grupo $Spin(n)$ es el grupo de los elementos de Cl_n que son un producto par de elementos unitarios de $\mathbb{R}^n$, es decir,*

$$Spin(n) = \{x_1 \cdot ... \cdot x_{2k} : x_i \in \mathbb{R}^n,\ |x_i| = 1\}.$$

Consideremos la función $\tau : Cl_n \longrightarrow Cl_n$ que extiende linealmente a la aplicación dada por $x_1 \cdot \ldots \cdot x_k \longmapsto x_k \cdot \ldots \cdot x_1$. Definimos entonces la siguiente función

$$\begin{array}{rccccc} Ad: & Cl_n & \longrightarrow & End(Cl_n) & & \\ & x & \longmapsto & Ad(x): & Cl_n & \longrightarrow & Cl_n \\ & & & & y & \longmapsto & x \cdot y \cdot \tau(x). \end{array}$$

Como Ad es una función cuadrática de la variable x, ella es continua.
Veamos qué pasa si restringimos Ad a $Spin(n)$: sea $g \in Spin(n)$, digamos $g = x_1 \cdot \ldots \cdot x_{2k}$, $x_i \in \mathbb{R}^n$, $|x_i| = 1$ así que $\tau(g) = x_{2k} \cdot \ldots \cdot x_1 = g^{-1}$ y por tanto $Ad(g)y = Ad(x_1) \circ \ldots \circ Ad(x_{2k})(y) = g \cdot y \cdot g^{-1}$.

Lema 2.2. *Si $w \in \mathbb{R}^n$ es un vector unitario, entonces $w \cdot v \cdot w$ es la reflexión de v respecto del hiperplano $w^{\perp}$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $w = e_1$ y considerar una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ $e_1, \ldots, e_n$. Luego si $v \in \mathbb{R}^n$ tenemos que $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$ y

$$e_1 \cdot v \cdot e_1 = -\alpha_1 e_1 + \sum_{j \neq 1} \alpha_j e_j,$$

por lo tanto $e_1 \cdot v \cdot e_1$ es la reflexión de v respecto del hiperplano $e_1^{\perp}$. □

Se sigue de lo anterior que $Ad(g)$ es una aplicación de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ producto de un número par de reflexiones, i.e., una rotación, por lo tanto $Ad(Spin(n)) \subset SO(n)$. Por otro lado sabemos que toda rotación es un producto par de reflexiones (ver [4]) y de aquí que $Ad(Spin(n)) = SO(n)$.
Como consecuencia se obtiene el siguiente resultado:

Proposición 2.3. *La función*

$$\begin{array}{rccccc} Ad: & Spin(n) & \longrightarrow & SO(n) & & \\ & g & \longmapsto & Ad(g): & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & & & v & \longmapsto & g \cdot v \cdot g^{-1} \end{array}$$

es un homomorfismo de grupos continuo y suprayectivo.

Proposición 2.4. *El kernel de la aplicación adjunta es* $ker(Ad) = \{+1, -1\}$.

Demostración. Consideremos $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$ tal que $g(v_i, v_j) = 0$ para $i \neq j$. Sea $g \in ker(Ad)$, así que

$$gv = vg \tag{2.1}$$

para cada $v \in \mathbb{R}^n$. Sabemos que g se escribe como combinación lineal de productos de elementos de la base que elegimos de $\mathbb{R}^n$; por lo tanto

$$g = a_0 + v_1 a_1 \tag{2.2}$$

donde a_0 agrupa a los términos que no contiene a v_1 y $v_1 a_1$ a los que sí lo contienen y por tanto a_1 no contiene a v_1. Observe que a_0 y $v_1 a_1$ deben tener la misma paridad, resulta de hecho que ambos son pares y por lo tanto a_1 es impar. De las Ecuaciones (2.2) y (2.1) con $v = v_1$ tenemos que

$$v_1 a_0 + v_1^2 a_1 = v_1(a_0 + v_1 a_1) = v_1 g = g v_1 = (a_0 + v_1 a_1) v_1 = a_0 v_1 + v_1 a_1 v_1.$$

Como $a_0 v_1 = v_1 a_0$ y $v_1 a_1 v_1 = -v_1^2 a_1$ por ser a_0 un elemento par y a_1 un elemento impar tenemos que

$$v_1 a_0 + v_1^2 a_1 = v_1 a_0 - v_1^2 a_1$$

y por lo tanto $2v_1^2 a_1 = -2g(v_1, v_1) a_1 = 0$ que implica $a_1 = 0$. De la misma manera se prueba que g no contienen a ningún elemento v_j, por lo tanto $g \in \mathbb{R}$ y ya que g es unitario $g = \pm 1$.

□

Proposición 2.5. *Para Ad como en la proposición anterior tenemos las siguientes afirmaciones:*

ii) Para $n \geqslant 2$, *Spin*(n) *es un grupo conexo.*

iii) Para $n \geqslant 3$, *Spin*(n) *es simplemente conexo y Ad es el cubriente universal del grupo* $SO(n)$.

Demostración. Tenemos de la Proposiciones 2.3 y 2.4 que Ad es un cubriente doble de $SO(n)$. Ahora bien, para probar los incisos (ii) y (iii) usaremos un poco de teoría general de cubrientes; si $n = 2$ tenemos que $SO(2) = \mathbb{S}^1$ tiene dos cubrientes dobles, a saber, $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}_2$ (ver [6]); como

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= cos(\pi t) + sen(\pi t) e_i \cdot e_j \\ &= -(cos(\pi t/2) e_i + sen(\pi t/2) e_j)(cos(\pi t/2) e_i - sen(\pi t/2) e_j) \end{aligned}$$

es una trayectoria en $Spin(n)$ que une a 1 y a -1 tenemos que el cubriente es conexo y $Spin(2) = \mathbb{S}^1$.
El grupo fundamental de $SO(n)$ se puede calcular a partir del grupo fundamental de $SO(3) \simeq \mathbb{RP}^3$ usando la sucesión exacta larga de grupos de homotopía que se obtiene de la fibración

$$SO(n-1) \longrightarrow SO(n) \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$$

dada por la acción transitiva del grupo $SO(n)$ en $\mathbb{S}^{n-1}$. Resulta que para $n \geqslant 3$ el grupo fundamental de $SO(n)$ es $\mathbb{Z}_2$. Se puede encontrar la prueba detallada en [11]. Por lo tanto $SO(n)$ sólo tiene dos cubrientes dobles, su cubriente universal y su cubriente trivial de dos hojas (ver [6]).
Considerando la trayectoria γ del inciso anterior tenemos que $Spin(n)$ es conexo por trayectorias y por tanto debe ser el cubriente universal de $SO(n)$ que en particular es simplemente conexo. $\square$

Lema 2.6. *Si $e_1, \ldots, e_n$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$, entonces el espacio vectorial generado por $\{e_i \cdot e_j \ : \ 1 < i < j < n\}$, con la operación $[x, y] = x \cdot y - y \cdot x$, es un álgebra de Lie que coincide con $\mathfrak{spin}(n)$.*

Demostración. Considere la curva

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= cost + sent\ e_i \cdot e_j \\ &= -(cos(t/2)e_i + sen(t/2)e_j)(cos(t/2)e_i - sen(t/2)e_j). \end{aligned}$$

De acuerdo a la última igualdad está en $Spin(n)$, luego

$$\frac{d}{dt}_{|t=0}\gamma(t) = e_i \cdot e_j$$

está en $\mathfrak{spin}(n)$; por lo tanto el espacio vectorial generado por $e_i \cdot e_j$ está contenido en $\mathfrak{spin}(n)$, además ambos espacios tienen la misma dimensión pues al ser $Spin(n)$ cubriente de $SO(n)$ sus respectivas álgebras de Lie tienen la misma dimensión $n(n-1)/2$. $\square$

Lema 2.7. *Para $Ad : Spin(n) \longrightarrow SO(n)$ como en la Proposición 2.3 y $ad : \mathfrak{spin}(n) \longrightarrow \mathfrak{so}(n)$ su diferencial, se cumple que $ad(e_i \cdot e_j) = 2E_{ij}$, donde*

i j

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} 0 & \dots & & 0 \\ & & -1 & \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ & 1 & & \\ 0 & \dots & & 0 \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array}$$

Demostración. Considere nuevamente $\gamma(t) = cost + sent\ e_i \cdot e_j$, se sigue que $\gamma(t)^{-1} = cost - sent\ e_i \cdot e_j$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}_{|t=0} Ad(\gamma(t))e_k &= (-sent + cost e_i \cdot e_j) \cdot e_k \cdot (cost - sent e_i \cdot e_j)|_{t=0} \\ &\quad + (cost + sent e_i \cdot e_j) \cdot e_k \cdot (-sent - cost e_i \cdot e_j)|_{t=0} \\ &= \begin{cases} 2e_j & si\ k{=}i \\ -2e_i & si\ k{=}j \\ 0 & si\ k \neq i, j, \end{cases} \end{aligned}$$

que es lo que se quería probar. □

3. Haces principales, asociados y conexiones

Ahora vamos a introducir el material necesario de haces principales para poder hablar posteriormente de estructuras espinoriales y ecuación de Gauss espinorial. Para fijar notación recordaremos la definición de haz principal y supondremos conocida la noción de conexión sobre un haz principal (ver por ejemplo [12]).
Haz asociado y derivada covariante de un haz vectorial asociado son los topicos principales de esta sección.

Definición 3.1. *Un haz G-principal sobre una variedad X es una cuátrupla (P,π,X,G) tal que*

i) *P es una variedad y G es un grupo de Lie que actúa libremente en P por la derecha, de manera suave.*

ii) $\pi : P \longrightarrow X$ *es una función diferenciable y suprayectiva tal que* $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ *si y sólo si existe* $g \in G$ *con* $p_1 = p_2 g$.

iii) *Para cada* $x \in X$ *existen* U *vecindad de* x *y* $\Phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ *difeomorfismo que hace conmutar el siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times G \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

donde pr_1 *es la proyección en la primera coordenada. Además si* $\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow G$ *es la función tal que* $\Phi(p) = (\pi(p), \phi(p))$ *entonces* $\phi(pg) = \phi(p)g$ *para todo* $p \in \pi^{-1}(U)$ *y* $g \in G$.

Definición 3.2. *Sea* $\pi : P \longrightarrow X$ *un haz principal de grupo G. Consideremos* V *un espacio vectorial y* $\rho : G \longrightarrow Aut(V)$ *una representación lineal de G. El haz asociado a P respecto de la representación* ρ, $E = P \times_\rho V$ *consta de las clases de equivalencia* $[p, v]$ *donde* $(p, v) \sim (p', v')$ *si y sólo si existe* $g \in G$ *tal que* $(p', v') = (pg, \rho(g^{-1})v)$.

El haz asociado es un haz vectorial sobre X con fibra V.

Definición 3.3. *Sea (E, π, M) un haz vectorial. Una derivada covariante es una función lineal*

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$$

que satisface la regla de Leibniz

$$\nabla(f\psi) = df \otimes \psi + f\nabla\psi,$$

para todo $\psi \in \Gamma(E)$ y $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ función diferenciable.

Para una 1-forma de conexión $\omega : TP \longrightarrow \mathfrak{g}$ sobre el haz G-principal $\pi : P \longrightarrow M$ (ver por ejemplo [12]) definimos una derivada covariante sobre cada haz vectorial asociado $E = P \times_\rho \Sigma$, $\rho : G \longrightarrow Aut(\Sigma)$ como sigue:
considere ψ una sección de E, es decir $\psi = [s, \sigma]$, donde $s : U \subset M \longrightarrow P$ es una sección y $\sigma : U \longrightarrow \Sigma$ es una función diferenciable. Tenemos la siguiente composición

$$TU \xrightarrow{s_*} TP \xrightarrow{\omega} \mathfrak{g} \xrightarrow{\rho_*} End(\Sigma)$$

en donde $s_* : TU \longrightarrow TP$ y $\rho_* : \mathfrak{g} \longrightarrow End(\Sigma)$ denotan las diferenciales de s y ρ, respectivamente; por tanto una derivada covariante en E se puede definir como

$$\nabla_X \psi = [s, X.\sigma + \rho_*((\omega \circ s_*)(X))\sigma] \tag{3.1}$$

para $X \in TM$.
Para probar que la definición anterior no depende la sección s y la función σ necesitamos los siguientes resultados:
en [12, pág. 314] se prueba que si $s : U \subset M \longrightarrow P$ es una sección y $g : U \subset M \longrightarrow G$ es una función diferenciable entonces

$$(sg)^*(\omega) = L_{g^{-1}}{}_* dg + R_{g_*} L_{g^{-1}}{}_* s^*(\omega), \tag{3.2}$$

donde $L_g : G \longrightarrow G$ y $R_g : G \longrightarrow G$ son respectivamente la multiplicación por la izquierda y la multiplicación por la derecha por g en el grupo G.

Observación 3.4. *Si e denota la identidad del grupo tenemos que para cada $u \in U$ sucede que*

$$g(u)g^{-1}(u) = e.$$

Derivando ambos lados de la igualdad se obtiene

$$L_{g_*} dg^{-1} + R_{g^{-1}}{}_* dg = 0$$

y por tanto

$$L_{g_*}dg^{-1} = -R_{g^{-1}{}_*}dg. \tag{3.3}$$

Lema 3.5. *Consideremos G un grupo de Lie y $\rho : G \longrightarrow Aut(\Sigma)$ una representación de G en el espacio vectorial Σ. Entonces para $A \in T_gG$*

$$\rho_*(A)\rho(g^{-1})\sigma = \rho_*(R_{g^{-1}{}_*}A)\sigma$$

para toda $\sigma \in \Sigma$.

Demostración. Sea $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow G$ una curva tal que $\gamma(0) = g$ y $\dot\gamma(0) = A$, entonces

$$\begin{aligned}\rho_*(\dot\gamma(0))\rho(g^{-1})\sigma = \tfrac{d}{dt}_{|t=0}\rho(\gamma(t))\rho(g^{-1})\sigma &= \tfrac{d}{dt}_{|t=0}\rho(\gamma(t)g^{-1})\sigma \\ &= \tfrac{d}{dt}_{|t=0}\rho(R_{g^{-1}}\gamma(t))\sigma \\ &= \rho_*(R_{g^{-1}{}_*}\dot\gamma(0))\sigma.\end{aligned}$$

□

De manera similar tenemos la fórmula siguiente:

Lema 3.6. *Con las hipótesis del lema anterior tenemos que*

$$\rho(g^{-1})\rho_*(A)\sigma = \rho_*(L_{g^{-1}{}_*}A)\sigma.$$

Ahora podemos probar que la derivada covariante para el haz asociado no depende del representante tomado en la clase $[s, \sigma]$. Consideremos $\psi = [s', \sigma'] = [s, \sigma]$ una sección de E, donde $s, s' : U \longrightarrow P$ son secciones y $\sigma, \sigma' : U \longrightarrow \Sigma$ son funciones diferenciables tales que $s' = sg$ y $\sigma' = \rho(g^{-1})\sigma$, para $g : U \longrightarrow G$ función diferenciable. Sabemos que

$$\nabla_X\psi = [s', X.\sigma' + \rho_*((\omega \circ s'_*)(X))\sigma'].$$

Considerando por separado los sumandos de $X.\sigma' + \rho_*((\omega \circ s'_*)(X))\sigma'$ tenemos que por la regla de Leibniz

$$X.\sigma' = \rho(g^{-1})X.\sigma + \rho_*(dg^{-1}(X))\sigma. \tag{3.4}$$

De la definición de s' y σ' y de la expresión (3.2) para $(sg)^*\omega$ se sigue que

$$\begin{aligned}\rho_*((\omega \circ s'_*)(X))\sigma' &= \rho_*((\omega \circ (sg)_*)(X))\rho(g^{-1})\sigma \\ &= \rho_*((L_{g^{-1}{}_*}dg + R_{g_*}L_{g^{-1}{}_*}s^*\omega)(X))\rho(g^{-1})\sigma \\ &= \rho_*(L_{g^{-1}{}_*}dg(X))\rho(g^{-1})\sigma + \rho_*(R_{g_*}L_{g^{-1}{}_*}s^*\omega(X))\rho(g^{-1})\sigma.\end{aligned}$$

De lo anterior y de la fórmula (3.3) en la Observación 3.4

$$\rho_*((\omega \circ s'_*)(X))\sigma' = -\rho_*(R_{g_*} dg^{-1}(X))\rho(g^{-1})\sigma + \rho_*(R_{g_*} L_{g^{-1}}{}_* s^*\omega(X))\rho(g^{-1})\sigma.$$

Aplicando el Lema 3.5 obtenemos que

$$\begin{aligned}
\rho_*((\omega \circ s'_*)(X))\sigma' &= -\rho_*(dg^{-1}(X))\rho(g)\rho(g^{-1})\sigma \\
&\quad +\rho_*(L_{g^{-1}}{}_* s^*(\omega))(X))\rho(g)\rho(g^{-1})\sigma \\
&= -\rho_*(dg^{-1}(X))\sigma + \rho_*(L_{g^{-1}}{}_* s^*\omega(X))\sigma.
\end{aligned}$$

Finalmente, usamos el Lema 3.6 para concluir que

$$\rho_*((\omega \circ s'_*)(X))\sigma' = -\rho_*(dg^{-1}(X))\sigma + \rho(g^{-1})\rho_*(s^*\omega X)\sigma. \tag{3.5}$$

De (3.4) y (3.5) se sigue que

$$\begin{aligned}
X.\sigma' + \rho_*((\omega \circ s'_*)(X))\sigma' &= \rho(g^{-1})X.\sigma + \rho_*(dg^{-1}(X))\sigma \\
&\quad -\rho_*(dg^{-1}(X))\sigma + \rho(g^{-1})\rho_*(s^*\omega(X))\sigma \\
&= \rho(g^{-1})X.\sigma + \rho(g^{-1})\rho_*(s^*\omega(X))\sigma,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
[s', X.\sigma' + \rho_*(\omega s'_*(X))\sigma'] &= [sg, \rho(g^{-1})(X.\sigma + \rho_*(s^*\omega(X))\sigma)] \\
&= [s, X.\sigma + \rho_*(\omega s_*(X))\sigma]
\end{aligned}$$

que es lo que se quería probar.

4. Estructura espinorial

En esta sección se define de manera general lo que es una estructura espinorial para después construir los haces de espinores de Clifford sobre una variedad. Además se presentan los preliminares algebraicos relacionados con los haces de espinores de una variedad y sus subvariedades.

Definición 4.1. *Si E es un haz vectorial orientado sobre M con una métrica en cada fibra, entonces una estructura espin sobre E es una pareja $(SpinE, \Lambda)$ donde $SpinE$ es un haz Spin(n)-principal y $\Lambda : SpinE \longrightarrow SOE$ es un cubriente doble del haz de los marcos SOE que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
SpinE \arrow[dd, "\Lambda"] & \times & Spin(n) \arrow[r] \arrow[dd, "Ad"] & SpinE \arrow[dd, "\Lambda"] \arrow[dr] & \\
 & & & & M; \\
SOE & \times & SO(n) \arrow[r] & SOE \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

aquí los renglones son las acciones de los grupos $Spin(n)$ y $SO(n)$, respectivamente.

Definición 4.2. *Una variedad (Riemanniana) orientada M es espinorial si su haz tangente TM admite una estructura espin.*

A partir de esta sección usaremos el producto fibrado entre haces principales y es por ello que aquí recordamos su definición: sean $\pi_1 : P \longrightarrow X$ un haz G_1-principal y $\pi_2 : Q \longrightarrow X$ un haz G_2-principal, definimos su producto fibrado $\pi : P \times_X Q \longrightarrow X$ como el haz $G_1 \times G_2$-principal, donde $P \times_X Q = \{(p,q) : \pi_1(p) = \pi_2(q)\}$ (con la topología de subespacio de $P \times Q$), la acción está dada por $(p,q) \cdot (g_1, g_2) = (pg_1, qg_2)$ para $(p,q) \in P \times_X Q$ y $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$. La proyección se define como

$$\begin{array}{rcl}
\pi : P \times_X Q & \longrightarrow & X \\
(p,q) & \longmapsto & \pi_1(p) = \pi_2(q).
\end{array}$$

Sean E_1 y E_2 haces vectoriales sobre M, con estructuras espinoriales $SpinE_1$ y $SpinE_2$. La suma $E = E_1 \oplus E_2$ tiene una estructura espinorial natural $SpinE$: dicha estructura es tal que existe una función f que hace conmutar el siguiente diagrama (ver [10])

$$
\begin{tikzcd}
SpinE_1 \times SpinE_2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Lambda_1 \quad \Lambda_2"] & SpinE \arrow[d, "\Lambda"] \arrow[dr] & \\
& & M. \\
SOE_1 \times SOE_2 \arrow[r, "i"] & SOE \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\tag{4.1}
$$

i es la yuxtaposición de un elemento de SOE_1 y SOE_2; además f es compatible con las acciones vía el homomorfismo

$$
\begin{array}{rcl}
\lambda : Spin(n) \times Spin(m) & \longrightarrow & Spin(n+m) \\
(x, y) & \longmapsto & x \cdot y.
\end{array}
\tag{4.2}
$$

De hecho, tenemos el resultado más fuerte siguiente ([10]): estructuras espinoriales sobre dos de los haces E_1, E_2 o E determinan una única estructura espinorial sobre el tercer haz de tal manera que (4.1) conmuta para alguna aplicación f.

Supongamos que $\overline{M}$ es una variedad Riemanniana $n+m$-dimensional y M una subvariedad n-dimensional de $\overline{M}$ y que ambas son variedades espinoriales con respectivas estructuras espin $Spin\overline{M}$ y $SpinM$. Como $T\overline{M}|_M = TM \oplus NM$ se sigue de la observación anterior que NM tiene una estructura espinorial $SpinN$ tal que existe una función $f : SpinM \times SpinN \to Spin\overline{M}$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
SpinM \times SpinN \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Lambda_1 \quad \Lambda_2"] & Spin\overline{M} \arrow[d, "\Lambda"] \arrow[dr] & \\
& & M \\
SOM \times SON \arrow[r, "i"] & SO\overline{M} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

donde i es la yuxtaposición de un marco en SOM y uno en SON.

Definimos ahora nuestros haces de espinores de Clifford. Consideramos primero la representación de $Spin(n)$ en el álgebra de Clifford Cl_n dada por la multiplicación por la izquierda

$$
\begin{array}{rclrcl}
Spin(n) & \longrightarrow & Aut(Cl_n) & & & \\
x & \longmapsto & \gamma_x : & Cl_n & \longrightarrow & Cl_n \\
& & & y & \longmapsto & x \cdot y.
\end{array}
\tag{4.3}
$$

Cabe mencionar que dicha representación no es irreducible; de hecho es suma de representaciones irreducibles equivalentes a la representación espinorial (ver [9, pág. 226]).
Los haces de espinores de Clifford son los siguientes haces asociados

$$\Sigma\overline{M}|_M = Spin\overline{M} \times_\rho Cl_{n+m}$$
$$\Sigma M = SpinM \times_{\rho_1} Cl_n$$
$$\Sigma N = SpinN \times_{\rho_2} Cl_m,$$

para ρ, ρ_1 y ρ_2 representaciones de $Spin(n+m)$, $Spin(n)$ y $Spin(m)$ por multiplicación por la izquierda en las correspondientes álgebras de Clifford como en (4.3).
Hay una acción natural de TM sobre el haz de espinores de Clifford ΣM (en analogía con la acción que hay en el haz de espinores usual (ver [7])) la cual llamamos multiplicación de Clifford y denotamos por $X \cdot \psi$, donde $X \in TM$ y ψ es una sección en ΣM, dicha acción se describe en el Apéndice B.
En lo que sigue vamos a probar que los haces de espinores $\Sigma\overline{M}|_M$ y $\Sigma M \otimes \Sigma N$ son isomorfos: nuestra estrategia consiste en primero probar que $\Sigma\overline{M}|_M$ es isomorfo al haz vectorial asociado a $SpinM \times_M SpinN$ con la representación $\rho \circ \lambda$ y que $\Sigma M \otimes \Sigma N$ es isomorfo al haz asociado a $SpinM \times_M SpinN$ con la representación $\rho_1 \otimes \rho_2$. Para al final probar que las representaciones $\rho_1 \otimes \rho_2$ y $\rho \circ \lambda$ son equivalentes y concluir así que $\Sigma\overline{M}|_M$ y $\Sigma M \otimes \Sigma N$ también son isomorfos.
Veamos primero que el haz $\Sigma\overline{M}|_M$ es asociado con el haz principal $SpinM \times_M SpinN$.

Proposición 4.3. *Consideremos f y λ como se definieron en esta sección, entonces*

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & SpinM \times_M SpinN \times_{\rho\circ\lambda} Cl_{n+m} & \longrightarrow & Spin\overline{M} \times_\rho Cl_{n+m} = \Sigma\overline{M} \\ & [p,x] & \longmapsto & [f(p),x] \end{array}$$

es un isomorfismo de haces vectoriales.

Demostración. Por definición f conmuta con las proyecciones y por tanto Ψ también. Veamos que Ψ está bien definido. Sean $g \in Spin(n) \times Spin(m)$, $p \in SpinM \times_M SpinN$ y $x \in Cl_{n+m}$. Si $p' = pg$ y $x' = (\rho \circ \lambda)(g^{-1})x$, entonces

$$\begin{aligned} \Psi([p',x']) &= [f(pg), (\rho\circ\lambda)(g^{-1})x] \\ &= [f(p)\lambda(g), \rho(\lambda(g)^{-1})x] \\ &= [f(p),x] \\ &= \Psi([p,x]). \end{aligned}$$

Dado que los dos haces tienen la misma dimensión para probar que Ψ es isomorfismo basta verificar la suprayectividad; tomemos una sección s, arbitraria pero fija en la imagen de f, $s = f(s_1, s_2)$ con $(s_1, s_2) \in SpinM \times_M SpinN$; para $[r, \alpha]$ una sección en $Spin\overline{M} \times_\rho Cl_{n+m}$ tenemos que existe $g : U \longrightarrow Spin(n+m)$ tal que $r = sg$, por lo tanto

$$[r, \alpha] = [s, \rho(g)(\alpha)] = \Psi([(s_1, s_2), \rho(g)(\alpha)]),$$

lo que prueba que Ψ es suprayectiva. $\square$

Probemos luego que $\Sigma M \otimes \Sigma N$ también es asociado al haz principal $SpinM \times_M SpinN$.

Proposición 4.4. *La siguiente función es un ismorfismo de haces vectoriales*

$$\begin{array}{rccc} \Gamma : & \Sigma M \otimes \Sigma N & \longrightarrow & SpinM \times_M SpinN \times_{\rho_1 \otimes \rho_2} Cl_n \otimes Cl_m \\ & [p, x] \otimes [q, y] & \longmapsto & [(p, q), x \otimes y]. \end{array}$$

Demostración. Veamos que Γ está bien definida; sean $(g_1, g_2) \in Spin(n) \times Spin(m)$, $[p, x] \in \Sigma M$ y $[q, y] \in \Sigma N$, si $(p', x') = (pg_1, \rho_1(g_1^{-1})x)$, $(q', y') = (qg_2, \rho_2(g_2^{-1})y)$, entonces

$$\begin{aligned} \Gamma([p', x'] \otimes [q', y']) &= [(p', q'), x' \otimes y'] \\ &= [(p, q)(g_1, g_2), \rho_1 \otimes \rho_2(g_1^{-1}, g_2^{-1})x \otimes y] \\ &= [(p, q), x \otimes y] \\ &= \Gamma([p, x] \otimes [q, y]). \end{aligned}$$

Ya que $Cl_n \otimes Cl_m$ está generada por elementos de la forma $x \otimes y$ con $x \in Cl_n$, $y \in Cl_m$ se tiene que la función Γ es suprayectiva y dado que ambos haces vectoriales tienen el mismo rango, Γ es un isomorfismo. $\square$

Mostraremos finalmente que tenemos un isomorfismo entre las representaciones $\rho \circ \lambda$ y $\rho_1 \otimes \rho_2$ de $Spin(n) \times Spin(m)$ y por tanto un isomorfismo entre $SpinM \times_M SpinN \times_{\rho \circ \lambda} Cl_{n+m}$ y $SpinM \times_M SpinN \times_{\rho_1 \otimes \rho_2} Cl_n \otimes Cl_m$: los haces $\Sigma\overline{M}$ y $\Sigma M \otimes \Sigma N$ son por lo tanto naturalmente isomorfos.

Lema 4.5. *La función*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_u : & End(Cl_n \widehat{\otimes} Cl_m) & \longrightarrow & End(Cl_{n+m}) \\ & T & \longmapsto & U^{-1} T U \end{array}$$

para $U : Cl_{n+m} \longrightarrow Cl_n \widehat{\otimes} Cl_m$ el isomorfismo del Lema 1.3 hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} End(Cl_n\widehat{\otimes}Cl_m) & \xrightarrow{\gamma_u} & End(Cl_{n+m}) \\ {\scriptstyle \rho_1\otimes\rho_2}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \rho} \\ Spin(n)\times Spin(m) & \xrightarrow{\lambda} & Spin(n+m). \end{array}$$

Demostración. Considere (g_1, g_2) en $Spin(n)\times Spin(m)$ y $e_{i_1}\cdot\ldots\cdot e_{i_k}$ un elemento de la base canónica de Cl_{n+m} tal que $e_{i_1},\ldots,e_{i_t}\in\mathbb{R}^n$ y $e_{i_{t+1}},\ldots,e_{i_k}\in\mathbb{R}^m$. Denotemos $e_I = e_{i_1}\cdot\ldots\cdot e_{i_t}$ y $e_J = e_{i_{t+1}}\cdot\ldots\cdot e_{i_k}$, entonces

$$\begin{aligned} \gamma_u(\rho_1\otimes\rho_2(g_1,g_2))(e_{i_1}\cdot\ldots\cdot e_{i_k}) &= (U^{-1}\rho_1\otimes\rho_2(g_1,g_2)U)(e_{i_1}\cdot\ldots\cdot e_{i_k}) \\ &= U^{-1}\rho_1\otimes\rho_2(g_1,g_2)(e_I\otimes e_J) \\ &= U^{-1}(g_1\cdot e_I\otimes g_2\cdot e_J) \\ &= g_1\cdot e_I\cdot g_2\cdot e_J \\ &= g_1 g_2 e_{i_1}\cdot\ldots\cdot e_{i_k} \\ &= (\rho\lambda)(g_1,g_2)(e_{i_1}\cdot\ldots\cdot e_{i_k}), \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se sigue de que g_2 es un producto par de elementos de Cl_{n+m}.

$\square$

5. Ecuación de Gauss espinorial

En esta sección seguimos utilizando la notación de la sección anterior. Consideramos $X \in TM$, $Y \in \Gamma(TM)$ y $\eta \in \Gamma(NM)$. Denotamos a la proyección en el haz tangente por $()^\top$ y como $()^\perp$ a la proyección en el haz normal. La segunda forma fundamental se define de la siguiente manera

$$\begin{array}{rccc} II: & TM \times TM & \longrightarrow & NM \\ & (X,Y) & \longmapsto & (\nabla^{\overline{M}}_X Y)^\perp. \end{array}$$

Luego, su adjunta $II(X,\cdot)^* : NM \longrightarrow TM$ cumple que

$$< Y, II(X,\cdot)^*\eta > = < II(X,Y), \eta > = < (\nabla^{\overline{M}}_X Y)^\perp, \eta > = - < Y, (\nabla^{\overline{M}}_X \eta)^\top >,$$

y por lo tanto $II(X,\cdot)^*\eta = -(\nabla^{\overline{M}}_X \eta)^\top$.
Tomando las proyecciones en el haz tangente y en el haz normal tenemos

$$\begin{array}{rcl} \nabla^{\overline{M}}_X Y + \nabla^{\overline{M}}_X \eta & = & (\nabla^{\overline{M}}_X Y)^\top + (\nabla^{\overline{M}}_X Y)^\perp + (\nabla^{\overline{M}}_X \eta)^\top + (\nabla^{\overline{M}}_X \eta)^\perp \\ & = & \nabla^{M}_X Y + II(X,Y) - II(X,\cdot)^*\eta + \nabla^{N}_X \eta. \end{array}$$

Concluimos que la ecuación de Gauss usual se ve como

$$\nabla^{\overline{M}}_X = \begin{pmatrix} \nabla^{M}_X & -II(X,\cdot)^* \\ II(X,\cdot) & \nabla^{N}_X \end{pmatrix}$$

en donde la descomposición en bloques corresponde a la descomposición $T\overline{M} = TM \oplus NM$. Equivalentemente

$$\nabla^{\overline{M}}_X - (\nabla^{M}_X \oplus \nabla^{N}_X) = \begin{pmatrix} 0 & -II(X,\cdot)^* \\ II(X,\cdot) & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Ahora bien, sean $X_1, \ldots X_n$ un marco tangente ortonormal positivamente orientado de M en p y $Y_1, \ldots, Y_m$ un marco ortonormal positivamente orientado de NM en p, así $h = (X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m)$ define un marco ortonormal de $\overline{M}$ adaptado a M. Por lo tanto la ecuación anterior se ve de la siguiente manera

$$\nabla^{\overline{M}}_X - (\nabla^{M}_X \oplus \nabla^{N}_X) = \begin{pmatrix} 0 & (- < II(X,X_i), Y_j >)_{ji} \\ (< II(X,X_i), Y_j >)_{ij} & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos las 1-formas diferenciales

$$\omega : TSO\overline{M} \longrightarrow \mathfrak{spin}(n+m),$$

$$\omega^M : TSOM \longrightarrow \mathfrak{spin}(n),$$
$$\omega^N : TSON \longrightarrow \mathfrak{spin}(m),$$

que son los levantamientos de las formas de conexión de los correspondientes haces principales a través de las aplicaciones adjuntas $\mathfrak{spin}(n+m) \longrightarrow \mathfrak{so}(n+m)$, $\mathfrak{spin}(n) \longrightarrow \mathfrak{so}(n)$ y $\mathfrak{spin}(m) \longrightarrow \mathfrak{so}(m)$, respectivamente (ver Lema 2.7). Se sabe que el haz tangente de una variedad se puede ver como el haz asociado al haz principal de los marcos ortonormales, concretamente $TM \simeq SOM \times_{SO(n)} \mathbb{R}^n$.
Por lo tanto, de acuerdo a la ecuación $\nabla_X \psi = [s, X.\sigma + \rho_*((\omega \circ s_*)(X))\sigma]$ que define la derivada covariante para un haz asociado, se tiene que otra expresión para la Ecuación (5.1) es

$$ad(\omega(dhX) - (\omega^M \oplus \omega^N)(dhX)) = \begin{pmatrix} 0 & (-<II(X,X_i),Y_j>)_{ji} \\ (<II(X,X_i),Y_j>)_{ij} & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando el Lema 2.7 a esta última igualdad se obtiene

$$\omega(dhX) - (\omega^M \oplus \omega^N)(dhX) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} <II(X,X_i),Y_j> e_i \cdot f_j, \quad (5.2)$$

donde $e_1, \ldots, e_n$ y $f_1, \ldots, f_m$ son las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente.
Como en la sección anterior $\overline{M}$ y M son variedades espinoriales con respectivas estructuras espin $Spin\overline{M}$ y $SpinM$. De la descomposición $T\overline{M}|_M = TM \oplus NM$ se sigue que NM tiene una única estructura espin $SpinN$ tal que existe una función $f : SpinM \times SpinN \to Spin\overline{M}$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} SpinM \times SpinN \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Lambda_1 \times \Lambda_2"] & Spin\overline{M} \arrow[d, "\Lambda"] \arrow[dr] & \\ SOM \times SON \arrow[r, "i"] & SO\overline{M} \arrow[r] & M \end{tikzcd} \quad (5.3)$$

donde i es la yuxtaposición de un marco en SOM y uno en SON.
Recordemos que para definir los fibrados de espinores de Clifford sobre M usamos la representación de $Spin(n)$ dada por la multiplicación por la izquierda

$$\begin{array}{ccccccc} Spin(n) & \longrightarrow & Aut(Cl_n) & & & & \\ x & \longmapsto & \gamma_x : & & Cl_n & \longrightarrow & Cl_n \\ & & & & y & \longmapsto & x\cdot y. \end{array}$$

Obtuvimos los siguientes fibrados

$\Sigma\overline{M}|_M = Spin\overline{M} \times_\rho Cl_{n+m}$
$\Sigma M = SpinM \times_{\rho_1} Cl_n$
$\Sigma N = SpinN \times_{\rho_2} Cl_m,$

para ρ, ρ_1 y ρ_2 representaciones de $Spin(n+m)$, $Spin(n)$ y $Spin(m)$ en las correspondientes algebras de Clifford.
Consideremos las formas de conexión

$$\overline{\omega} : TSpin\overline{M} \longrightarrow \mathfrak{spin}(n+m),$$

$$\overline{\omega^M} : TSpinM \longrightarrow \mathfrak{spin}(n),$$
$$\overline{\omega^N} : TSpinN \longrightarrow \mathfrak{spin}(m),$$

que se obtienen de levantar ω, ω^M y ω^N, respectivamente a través de las funciones $\Lambda : Spin\overline{M} \longrightarrow SO\overline{M}$, $\Lambda_1 : SpinM \longrightarrow SOM$ y $\Lambda_2 : SpinN \longrightarrow SON$.
Como en la ecuación de Gauss clásica tenemos dos conexiones a comparar, a saber $\nabla^{\Sigma\overline{M}}$ que es la conexión del haz de espinores $\Sigma\overline{M}$ (ver Sección 4) y $\nabla^{\Sigma M\otimes\Sigma N}$ que es la conexión de $\Sigma M \otimes \Sigma N = \Sigma\overline{M}|_M$ que por definición es

$$\nabla^{\Sigma M\otimes\Sigma N} = \nabla^{\Sigma M} \otimes Id + Id \otimes \nabla^{\Sigma N}.$$

En la Proposición 4.4 se prueba que existe un isomorfismo entre $\Sigma M \otimes \Sigma N$ y $SpinM \times_M SpinN \times_{\rho_1\otimes\rho_2} Cl_n \otimes Cl_m$, y en el Apéndice A se prueba que

$$\nabla_X^{\Sigma M\otimes\Sigma N}\psi = [s, X.\sigma + (\rho_1\otimes\rho_2)_*((\overline{\omega^M} \oplus \overline{\omega^N})s_*(X))\sigma]$$

donde $\sigma : U \longrightarrow Cl_n \otimes Cl_m$ es tal que $\psi = [s,\sigma]$.
De acuerdo al Lema 4.5 tenemos que la representación $\rho_1 \otimes \rho_2$ es equivalente a $\rho \circ \lambda$ y por lo tanto

$$\nabla_X^{\Sigma M\otimes\Sigma N}\psi = [s, X.\sigma - \rho_*(\lambda_*(\overline{\omega^M} \oplus \overline{\omega^N})s_*X)\sigma]$$

donde ahora $\sigma : U \longrightarrow Cl_{n+m}$.
Ahora bien, como

$$\begin{array}{rcl} \lambda_* : \mathfrak{spin}(n) \oplus \mathfrak{spin}(m) & \longrightarrow & \mathfrak{spin}(n+m) \\ (h,k) & \longmapsto & h+k \end{array}$$

es una aplicación lineal inyectiva, definimos la identificación $\lambda_*(\overline{\omega^M} \oplus \overline{\omega^N}) \simeq \overline{\omega^M} \oplus \overline{\omega^N}$, donde $\overline{\omega^M}$ y $\overline{\omega^N}$ en el lado derecho de la identificación denotan las formas con valores en las subálgebras $\lambda_*(\mathfrak{spin}(n))$ y $\lambda_*(\mathfrak{spin}(m))$ de $\mathfrak{spin}(n+m)$. Concluimos por tanto que

$$\nabla_X^{\Sigma M \otimes \Sigma N} \psi = [s, X.\sigma - \rho_*((\overline{\omega^M} \oplus \overline{\omega^N}) s_* X)\sigma].$$

Antes de presentar la ecuación de Gauss observamos que del isomorfismo en la Proposición 4.3 se sigue que

$$\nabla_X^{\Sigma \overline{M}} \psi = [s, X.\sigma + \rho_*(f^* \overline{\omega} s_* X)\sigma]$$

donde $\psi = [s, \sigma] \in SpinM \times_M SpinN \times_{\rho \circ \lambda} Cl_{n+m}$. Por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} \nabla_X^{\Sigma \overline{M}} \psi - \nabla_X^{\Sigma M \otimes \Sigma N} \psi & = & [s, X.\sigma + \rho_*(f^* \overline{\omega} s_* X)\sigma] \\ & & -[s, X.\sigma - \rho_*((\overline{\omega^M} \oplus \overline{\omega^N}) s_* X)\sigma] \\ & = & [s, \rho_*(f^* \overline{\omega} s_* X) - \rho_*((\overline{\omega^M} \oplus \overline{\omega^N}) s_* X)\sigma]. \end{array} \tag{5.4}$$

Luego

$$\begin{array}{rcl} (\overline{\omega^M} \oplus \overline{\omega^N}) s_* X & = & (\Lambda_1^* \omega^M \oplus \Lambda_2^* \omega^N) s_* X \\ & = & (\omega^M \oplus \omega^N)(\Lambda_1, \Lambda_2)_* s_* X. \end{array} \tag{5.5}$$

Usando la conmutatividad del diagrama (5.3) tenemos las siguientes igualdades

$$\begin{array}{rcl} f^* \overline{\omega} s_* X & = & f^* \Lambda^* \omega s_* X = (\Lambda \circ f)^* \omega s_* X \\ & = & \omega (\Lambda \circ f)_* s_* X = \omega (i(\Lambda_1, \Lambda_2))_* s_* X. \end{array} \tag{5.6}$$

Sea $h : U \longrightarrow SO\overline{M}$ una sección tal que $i(\Lambda_1, \Lambda_2)s = h$, así que

$$(i(\Lambda_1, \Lambda_2))_* s_* X = dhX.$$

De las Ecuaciones (5.5), (5.6) y de la observación anterior se sigue que

$$\begin{array}{rcl} f^* \overline{\omega} s_* X - (\overline{\omega^M} \oplus \overline{\omega^N}) s_* X & = & \omega (i(\Lambda_1, \Lambda_2))_* s_* X - (\omega^M \oplus \omega^N)(\Lambda_1, \Lambda_2)_* s_* X \\ & = & \omega(dhX) - (\omega^M \oplus \omega^N)(dhX). \end{array}$$

La última expresión ha sido calculada en (5.2)

$$\omega(dhX) - (\omega^M \oplus \omega^N)(dhX) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} < II(X, X_i), Y_j > e_i \cdot f_j.$$

De (5.4) y de lo anterior deducimos la ecuación de Gauss espinorial

$$\begin{aligned} \nabla_X^{\Sigma\overline{M}}\psi - \nabla_X^{\Sigma M \otimes \Sigma N}\psi &= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} < II(X, X_i), Y_j > (X_i \cdot Y_j) \cdot \psi \\ &= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot II(X, X_i) \cdot \psi. \end{aligned}$$

Apéndice A. Multiplicación de Clifford

En este apéndice describimos una acción del haz tangente TM sobre el haz de los espinores de Clifford ΣM que se define en la Sección 4, es decir, $\Sigma M = SpinM \times_\rho Cl_n$ donde $\rho : Spin(n) \longrightarrow Aut(Cl_n)$ es la representación de $Spin(n)$ dada por multiplicación por la izquierda (i.e., si $g \in Spin(n)$ y $y \in Cl_n$ entonces $\rho(g)(y) = g \cdot y$).
Resulta que TM, al igual que ΣM, es isomorfo a un haz asociado a $SpinM$, de hecho $TM \simeq SpinM \times_{Ad} \mathbb{R}^n$ donde Ad es la representación adjunta del grupo $Spin(n)$ que se obtiene en la Proposición 2.3.
Definimos entonces la multiplicación de Clifford de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccc} TM \otimes \Sigma M & \longrightarrow & \Sigma M \\ [s, \varphi] \otimes [s, \sigma] & \longrightarrow & [s, \varphi \cdot \sigma] \end{array}$$

donde $s : U \subset M \longrightarrow SpinM$ es una sección en $SpinM$, $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma : U \longrightarrow Cl_n$ son funciones diferenciables y $\varphi \cdot \sigma$ es el producto en Cl_n. Denotamos dicha acción como $X \cdot \psi$ para $X \in TM$ y ψ una sección en ΣM. Veamos que nuestra acción no depende de los representantes tomados en los elementos de TM y ΣM: sean $[s, \varphi] \in TM$ y $[s, \psi] \in \Sigma M$ como en el párrafo anterior, si $[s', \varphi']$ y $[s', \psi']$ son tales que $s' = sg$, $\varphi' = Ad(g^{-1})\varphi$ y $\psi' = \rho(g^{-1})\psi$, entonces

$$\begin{array}{rcl} [s', \varphi'] \otimes [s', \sigma'] & = & [s', \varphi' \cdot \sigma'] \\ & = & [s', Ad(g^{-1})\varphi \cdot \rho(g^{-1})\sigma] \\ & = & [s', g^{-1}\varphi g \cdot g^{-1}\sigma] \\ & = & [s', g^{-1}\varphi \cdot \sigma] \\ & = & [s, \varphi \cdot \sigma] = [s, \varphi] \otimes [s, \sigma] \end{array}$$

lo que prueba que la acción está bien definida.

Apéndice B. Derivada covariante de $\Sigma M \otimes \Sigma N$

Se sabe que la derivada covariante de $\Sigma M \otimes \Sigma N$ se define por

$$\nabla^{\Sigma M \otimes \Sigma N} := \nabla^{\Sigma M} \otimes Id + Id \otimes \nabla^{\Sigma N}.$$

En la Sección 4 se probó que los siguientes haces vectoriales son isomorfos

$$\Sigma M \otimes \Sigma N \longrightarrow SpinM \times_M SpinN \times_{\rho_1 \otimes \rho_2} Cl_n \otimes Cl_m$$

i.e., $\Sigma M \otimes \Sigma N$ es asociado al haz principal $SpinM \times_M SpinN$. Veamos ahora que la conexión $\nabla^{\Sigma M \otimes \Sigma N}$ es asociada a la forma de conexión natural sobre $SpinM \times_M SpinN$.
Consideremos $s : U \subset M \longrightarrow SpinM \times_M SpinN$ una sección y $\sigma = \sigma_1 \otimes \sigma_2 : U \longrightarrow Cl_n \otimes Cl_m$ una función diferenciable; de acuerdo a la definición de derivada covariante sobre un haz asociado dada por la Ecuación (3.1) tenemos que la derivada covariante en $SpinM \times_M SpinN \times_{\rho_1 \otimes \rho_2} Cl_n \otimes Cl_m$ es

$$[s, X.\sigma + (\rho_1 \otimes \rho_2)_*((\overline{\omega^M} \oplus \overline{\omega^N})s_*X)\sigma];$$

como

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)_* = \rho_{1*} \otimes Id + Id \otimes \rho_{2*}$$

(i.e. para $(h,k) \in \mathfrak{spin}(n) \oplus \mathfrak{spin}(m)$ y $x \otimes y \in Cl_n \otimes Cl_m$

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)_*(h,k)\{x \otimes y\} = \rho_{1*}(h)\{x\} \otimes y + x \otimes \rho_{2*}(k)\{y\})$$

y

$$X.(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = \sigma_1 \otimes X.\sigma_2 + X.\sigma_1 \otimes \sigma_2$$

se tiene

$$\begin{aligned}[s, X.\sigma + (\rho_1 \otimes \rho_2)_*((\overline{\omega^M} \oplus \overline{\omega^N})s_*X)\sigma] &= [s, X.\sigma_1 \otimes \sigma_2 + \rho_{1*}(\overline{\omega^M} s_*(X)) \otimes Id)\sigma \\ &\quad + \sigma_1 \otimes X.\sigma_2 + Id \otimes \rho_{2*}(\overline{\omega^N} s_*(X))\sigma]\end{aligned}$$

que coincide con $\nabla^{\Sigma M} \otimes Id + Id \otimes \nabla^{\Sigma N}$, la derivada covariante de $\Sigma M \otimes \Sigma N$.

Bibliografía

[1] C. Bär, *Extrinsic bounds for eigenvalues of the Dirac operator*, Annals of Global Analysis and Geometry 16 (1998), 573–596.

[2] P. Bayard, M.-A. Lawn, J. Roth, *Spinorial representation of surfaces into 4-dimensional space forms,* Ann. Global Analysis and Geometry 44:4 (2013) 433-453.

[3] P. Bayard, M.-A. Lawn, J. Roth, *Spinorial representation of submanifolds of euclidean spaces*, en preparación.

[4] E. Cartan, *The Theory of Spinors*, Dover Publications, Inc., New York, 1966.

[5] T. Friedrich, *Dirac Operators in Riemannian Geometry*, Graduated Studies in Mathematics vol. 25, The American Mathematical Society, USA, 2000.

[6] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, http://www.math.cornell.edu/ hatcher/#ATI, 2002.

[7] O. Hijazi, *Spectral properties of the Dirac operator and geometrical structures*, lectures notes, Institut Élie Cartan, Université Henri Poincaré, Nancy I.

[8] H. B. Lawson y M. L. Michelson, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1987.

[9] P. Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors*, London Math. Society Lecture Note Series 286, Cambridge University Press, London, 2001.

[10] J. W. Milnor, *Remarks concerning spin manifolds*, Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse), Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1965, pp. 55–62.

[11] R. Mneimné y F. Testard, *Introduction à la théorie des Groupes de Lie Classiques*, Collection Méthodes, Hermann Paris, 1986.

[12] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry Vol. II*, Publish or Perish, Inc., Houston Texas, 1999.