



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS  
DE HIDALGO

---

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

**MAPEO NO SUAVE DE SISTEMAS DE  
CONTROL LINEAL**

**TESIS**

PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
**LICENCIADA EN CIENCIAS FÍSICO  
MATEMÁTICAS**

PRESENTA  
**MARÍA AZUCENA MORENO OROZCO**

ASESOR  
**DR. ABDON EDDY CHOQUE RIVERO**

MORELIA, MICH. MARZO 2021.



*A mi familia.*



# Agradecimientos

Quisiera comenzar agradeciéndole a la vida por que creo que ha elegido a las mejores personas y las ha puesto en mi camino, todas y cada una de ellas han sido grandes pilares de los cuáles yo me apoyé para alcanzar mis metas, esas personas me han apoyado y enseñado a afrontar gran parte de mi vida y sin ellos yo estaría completamente perdida. Primeramente quisiera agradecerle al pilar más grande que tengo y al más importante que es mi mamá María Guadalupe Orozco Garcia, mami yo se que nunca te lo digo pero te amo tanto y agradezco todo el apoyo que me has brindado desde que soy una niña, nunca me has dejado sola en ningún momento y siempre has sido como una heroína para mi, ya que siempre lograste salir adelante y sacar adelante a mis hermanas y a mi, quiero seguir tus pasos y lograr mis metas por ti por que quiero convertirme en la gran mujer que tu eres, no podré de terminar de agradecerte todo lo que me has dado y lo que me has enseñado, eres una gran inspiración para mi. Quiero continuar con agradecerle a mi papá Juan Moreno Mendoza, el cuál también es un pilar en el cuál me he apoyado para lograr esta meta,el es una persona que sin duda nunca faltó en mi vida siempre tuve un apoyo paternal muy grande de su parte y yo lo amo y valoro tanto como a mi mamá, siempre supo darme los mejores consejos para afrontar la vida y tuve su apoyo siempre,y todo mi esfuerzo es dedicado a el y a mi mamá sin duda alguna los mejores padres del mundo. Quiero agradecer también a mi asesor de tesis el Dr. Abdon Eddy Choque Rivero, profesor a usted le tengo mucho respeto tanto profesionalmente como personalmente, en si es usted una persona de admirar bastante ya que tiene un gran conocimiento, usted es un catedrático del cuál yo quiero seguir su ejemplo además quiero agradecer todo el apoyo que me ha brindado y los consejos que son de mucho agradecer por que eso es lo que hace un gran asesor y profesor de tesis brindar un apoyo y aconsejar al alumno con respecto a la experiencia que usted tiene por que en si eso es lo que lo hace un gran profesor el que comparte todo ese conocimiento a sus alumnos, sin duda alguna un gran asesor de tesis y una persona increíble, muchas gracias por todo el apoyo. A mis sinodales tambien quiero agradecer por el apoyo con el progreso de mi tesis el que me puedan brindar su opinión y correcciones

es de mucho agradecer el que compartan sus puntos de vista y consejos me enriquecen mucho en mi trabajo de tesis, agradezco el poder acompañarme en la presentación de mi trabajo por su tiempo y colaboración muchas gracias. Quiero continuar con agradecer a mis hermanas Angela Paola Moreno Orozco, Ana Laura Moreno Orozco, Marili Moreno Orozco y Yesica Moreno Orozco todas ellas las mejores hermanas del mundo siempre desde niña con mis hermanas mayores Marili y Yesica conté con un apoyo y una amistad de hermanas muy bonita y con mis hermanas menores Paola y Ana Laura todo el cariño de hermanas menores. Pavis quiero comenzar contigo por que eres la hermana más pequeña y sin duda la hermana más fuerte de todas, siempre que escribía mi tesis y en los momentos en que quería darme por vencida pensaba en ti por siempre has sido una inspiración para mi desde muy niña tuviste que ser fuerte y nunca perdiste las ganas de vivir, toda mi vida te veré a ti como una guerrera una inspiración para salir adelante. Ani quiero agradecerte a ti por siempre ser más que una hermana una amiga y compañera siempre siendo una hermana leal y divertida nunca te des por vencida sigue siempre tus sueños. Luchi a ti quiero agradecerte toda la amistad desde que soy una niña los consejos como hermana mayor que me has brindado y por todo el apoyo. Kikika quiero agradecerte por siempre estar conmigo, acosejarme y cuidarme siendo tu la hermana mayor de todas has hecho tu papel extraordinariamente bien, desde niña siempre estuviste atenta a mi hasta el momento que entré a la Universidad siempre me acompañaste hasta la puerta e ibas por mi por que decías que estaba un poco tonta y me perdería creo que si me hubiera perdido si no hubieras estado tu, muchas gracias por todo. También quiero agradecer a mi nina por se una abuela muy cariñosa y sabia siempre dandome mu buenos consejos y sobre todo enseñandome a ayudar a los demás. A mi abuelita carmen quiero agradecerle que apoyo que me brindo cuando entré a la Universidad, el darme una cama donde dormir, darme alimentos y una casa donde poder estar mientras yo estudiaba muchas gracias por todo el apoyo brindado. Quiero agradecerle a moya por siempre tener un plato de comida en la mesa para mi aún que tuviera poco siempre me díó mucho, de ella hago constar y validar la frase de que las personas que tienen menos son las que dan más, muchas gracias moya por siempre apoyarme. Quiero agradecer a mi mejor amigo, al más increíble y genial amigo de todo el mundo al calamardo de patricio, a la Regina George de Gretchen Wieners a ti mi más grande y leal amigo Migue, siempre has sido una persona extremadamente sensacional, no encuentro la palabras para describir la persona tan increíble que eres, eres un amigo que siempre ha estado conmigo se la ha jugado conmigo siempre apoyandome y dandome grandes consejos, contigo he vivido grandes momentos de mi vida muy divertidos siempre haciendo lo posible por hacerme reír y sentir bien de verdad amistades como la tuya valen oro, siempre me has escuchado y has estado conmigo en las buenas y en las malas, migue muchas gracias esta gran amistad que me ha brindado. Quiero agradecer a una gran amiga

también ella es una increíble persona siempre he contado con su amistad y apoyo, otty muchas gracias por brindarme siempre una amistad increíble, un apoyo incondicional y muchos momentos divertidos, por siempre aconsejarme y escucharme, muchas gracias por toda tu amistad. Quiero agradecer a dos amigos más que conocí en la Universidad, Roxana y Chamo muchas gracias por esa amistad tan bonita que me ha brindado y ese compañerismo inigualable. También agradecer a Antonio Morfin, Angel Rosas, Reyes, Martin Onofre, Josue, Samuel Morales, Armando Madrigal, Luis Carlos Castro, Rafael Zepeda y Quetzal, muchas gracias por su amistad y compañerismo en la Universidad. Muchas gracias de todo corazón a todas las personas mencionadas ya que sin ellos y sin su apoyo yo no habría llegado hasta aquí, nunca terminaré de agradecer todo lo queme han brindado, solo que queda dedicarles a todos ellos una frase que a mi me gusta mucho y forma parte de mi, ya que me recuerda a todas las personas increíbles que he conocido en mi camino por la vida.

Que hermosa familia! que increíbles amigos! los mejores días de mi vida los pasé a su lado, si renacemos por favor volvamos a encontrarnos.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>5</b>
<b>Abstract</b>	<b>11</b>
<b>Resumen</b>	<b>12</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>13</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	13
1.2. Objetivo de la tesis . . . . .	15
1.3. Planteamiento del problema . . . . .	15
1.4. Metodología . . . . .	15
1.5. Contribuciones de la tesis . . . . .	17
1.6. Organización de la tesis . . . . .	17
<b>2. Introducción a la teoría de control</b>	<b>19</b>
2.1. Planteamiento del problema de control óptimo . . . . .	19
2.2. Restricciones del control óptimo y principio máximo de Pontryagin . . . . .	21
2.2.1. Principio Máximo de Pontryagin . . . . .	22

---

2.3. Controlabilidad, teorema de Kalman, teorema de Weierstrass y definición de difeomorfismo . . . . .	23
2.4. Tiempo de control óptimo para sistemas lineales . . . . .	26
2.5. Número de conmutaciones del control óptimo . . . . .	28
<b>3. Sistema canónico, sistema periódico y sistema con valores reales positivos y negativos</b>	<b>34</b>
3.1. Sistema canónico . . . . .	34
3.1.1. Tiempo de control óptimo para el sistema canónico . .	40
3.2. Sistema periódico . . . . .	42
3.3. Sistema con valores reales positivos y negativos. . . . .	45
<b>4. Construcción del <math>\tilde{S}_1</math>-Difeomorfismo</b>	<b>48</b>
4.1. Caso 1: $b \neq 0$ . . . . .	51
4.1.1. Caso 1a, valores propios reales iguales . . . . .	56
4.1.2. Caso 1b, valores propios reales diferentes . . . . .	59
4.1.3. Caso 1c, valores propios complejos . . . . .	62
4.2. Caso 2, $b=0$ . . . . .	64
<b>5. Ejemplos del mapeo a diferentes sistemas de ecuaciones difer- enciales lineales</b>	<b>69</b>
5.1. Ejemplo 1 . . . . .	70
5.2. Ejemplo 2 . . . . .	75
5.3. Ejemplo 3 . . . . .	77
5.4. Ejemplo 4 . . . . .	80

<b>A.</b>	<b>84</b>
A.1. Sistema de ecuaciones diferenciales cuasi lineales con la misma parte principal. . . . .	84
<b>B.</b>	<b>90</b>
B.1. Propiedad de un eigenvector de una matriz $A$ . . . . .	90
<b>C.</b>	<b>91</b>
C.1. Primeras integrales . . . . .	91

# Abstract

In this thesis, we study the construction of a diffeomorphism of the linear system

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = ay_1 + by_2 + u, \\ \dot{y}_2 = y_1, \end{cases} \quad |u| \leq 1, \quad (1)$$

to the canonical system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1, \end{cases} \quad |u| \leq 1.$$

This diffeomorphism is defined on  $\mathbb{R}^2$  except on a curve, called a switching curve. The mentioned transformation allows solving the optimal control problem for the original system (1).

It is worth mentioning that the control is bounded, that is, the control satisfies the restriction  $|u| \leq 1$ .

# Resumen

En esta tesis estudiamos la construcción de un difeomorfismo del sistema lineal

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = ay_1 + by_2 + u, \\ \dot{y}_2 = y_1, \end{cases} \quad |u| \leq 1, \quad (2)$$

al sistema canónico

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \quad |u| \leq 1.$$

Tal difeomorfismo, definido en  $\mathbb{R}^2$  excepto en una curva llamada curva de conmutación, permite resolver el problema de control óptimo para el sistema original (2).

Cabe mencionar que el control es acotado, es decir, el control satisface la restricción  $|u| \leq 1$ .

Palabras clave: Difeomorfismo, acotado, control óptimo, curva de conmutación, sistema canónico.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

La teoría de control es una disciplina matemática descrita por ecuaciones diferenciales que se usa para resolver problemas modelados mediante sistemas que evolucionan con el tiempo, estos sistemas son influenciados por parámetros externos.

El control óptimo es el estudio de sistemas de control tal que las variables de control, llevan un estado inicial del sistema de control a un estado final en forma óptima.

La teoría de control existía desde mucho antes de que se le conocieran con su nombre teoría de control, por ejemplo, en el mundo de los organismos cuentan con mecanismos de regulación que garantizan el mantenimiento de las variables esenciales.

Una de las nociones con las cuáles está inspirada la teoría de control es la de "feedback" que se traduce al español como retroalimentación, dicho término se incorporó a lo que hoy conocemos como teoría de control en los años 20 por los ingenieros del "Bell Telephone Laboratory".

Hoy en día la noción de feedback es también común en la biología, psicología, etc. El principio de causa-efecto se ha dejado de entender como un estado estático y se entiende ahora desde una perspectiva dinámica, con el mecanismo de feedback estamos frente al principio causa-efecto-causa.

Otra noción importante en la teoría de control es la de optimización, la cuál es una técnica que tiene como objetivo aumentar o mejorar el valor de una variable. Por lo tanto, se puede decir que las dos grandes ideas que han servido de inspiración a la teoría de control son: el mecanismos de feedback y la optimización.

Refiriéndonos sobre la historia de la teoría de control, ya en los trabajos de Ch. Huygens y R. Hooke sobre la oscilación del péndulo a finales del siglo XVII, surgen elementos de lo que hoy conocemos como teoría de control, cuyo objetivo era el de tener una medición precisa del tiempo. En los años 30 del siglo XX la ingeniería del control juega un rol importante en la ingeniería de sistemas complejos. Durante los años 30 se produjo un importante avance en el control automático y las técnicas de diseño y análisis. Las aplicaciones eran numerosas por ejemplo: amplificadores en sistemas telefónicos, estabilización de aviones, el sistema de distribución de platas eléctricas, química del petróleo y del acero, etc.

Las instituciones también comenzaron a tomar conciencia de la relevancia de la disciplina del control automático por ejemplo la ASME (Sociedad Americana de Ingenieros Mecánicos) de EEUU y la IEE (Instituto de Ingenieros Eléctricos) Británica.

Durante la Segunda Guerra Mundial y los años que le siguieron, los ingenieros y científicos tuvieron que mejorar su experiencia en los mecanismos de control de seguimiento de aviones y de los proyectiles antiaéreos y en el diseño de baterías antiaéreas. Para inicio de la década de los años 50, científicos rusos y norteamericanos tenían el problema de resolver como llevar un vehículo espacial de algún punto inicial  $A$  de la Tierra a un punto final  $B$  en el espacio en un tiempo mínimo y que a la vez se consumiera la menos cantidad de combustible posible. En resumen, se quería encontrar las trayectorias óptimas en un espacio tridimensional. A partir de 1960 comienza el auge de la teoría del control clásica.

En esta década se comienza una nueva era en la que se pretende hacer un frente a algo que se había puesto de manifiesto durante la segunda guerra mundial: los modelos utilizados hasta ese momento eran inadecuados para representar la complejidad del mundo real puesto que los sistemas reales son no-lineales y está sujetos frecuentemente a perturbaciones ruidosas, las importantes contribuciones de R. Bellman (programación dinámica), de R. Kalman (filtrado y análisis algebraico de problemas de control) y de L. Pontryagin (Principio del Máximo en el control óptimo no-lineal) establecieron los pilares fundamentales de la investigación en Teoría de control en las últimas décadas.

En 1987, Korobov y Sklyar dieron una solución analítica exacta del problema de control de tiempo óptimo para el sistema  $n$ -dimensional de control canónico. Para  $n = 2$  este sistema tiene la forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1. \end{cases} \quad |u| \leq 1. \quad (1.1)$$

Dicho método fue construido mediante algunos polinomios algebraicos cuyas raíces corresponden al tiempo óptimo y puntos de salto del control óptimo  $u(t)$ .

En el presente trabajo de tesis se considera la clase de sistemas de la forma

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = ay_1 + by_2 + u, \\ \dot{y}_2 = y_1. \end{cases} \quad |u| \leq 1. \quad (1.2)$$

Donde  $a$  y  $b$  son números reales.

Cada sistema lineal controlable con coeficientes constantes de la forma del sistema (1.2) puede ser reducido al sistema (1.1) por medio de un cambio de variables.

En este trabajo se estudiará una transformación de la forma  $y = \Phi(x)$  entre los sistemas (1.1) y (1.2). Dicho mapeo nos brinda la posibilidad de resolver el problema de control de tiempo óptimo para sistema (1.2) y usar la solución analítica de este problema para diferentes casos de sistemas lineales con coeficientes constantes.

## 1.2. Objetivo de la tesis

El objetivo de la tesis es el estudio detallado del mapeo entre el sistema canónico (1.1) y el sistema lineal (1.2), esta transformación permite encontrar una solución analítica del problema de control lineal (1.2) en tiempo óptimo.

Otro objetivo es aplicar dicho mapeo a diferentes ejemplos de ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

Esta tesis se basa principalmente en el trabajo de Korobov [18]

## 1.3. Planteamiento del problema

A. Sea dado el sistema lineal con control acotado (1.2). Determinar la existencia de un mapeo, en general no lineal, tal que el sistema anterior se transforma en el sistema canónico (1.1).

B. Determinar de manera explícita el mapeo que resuelve el problema anterior, y brindar algunos ejemplos de aplicación de dichos mapeos.

## 1.4. Metodología

1.- Se realiza un cambio de variable sobre el sistema lineal (1.2) de la forma  $y_1 = \Phi_1(x_1, x_2)$ ,  $y_2 = \Phi_2(x_1, x_2)$ , obteniendo la ecuación diferencial

siguiente:

$$\Phi_{1x_1}u + \Phi_{1x_2}x_1 = a\Phi_1 + b\Phi_2 + u, \quad (1.3)$$

$$\Phi_{2x_1}u + \Phi_{2x_2}x_1 = \Phi_1. \quad (1.4)$$

2.- Se propone una función de cuatro variables  $Z(x_1, x_2, x_3, x_4)$  tal que  $x_3 = \Phi_1$ ,  $x_4 = \Phi_2$ . Derivamos  $Z$  respecto del tiempo, llegamos a una ecuación en derivadas parciales de la forma:

$$Z_{x_1}u + Z_{x_2}x_1 + Z_{x_3}(ax_3 + bx_4 + u) + Z_{x_4}x_3 = 0. \quad (1.5)$$

Utilizando la equivalencia del sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (1.5) y el sistema conformado por las funciones (1.3), (1.4) se llega a un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\frac{dx_1}{u} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{dx_3}{(ax_3 + bx_4 + u)} = \frac{dx_4}{x_3}.$$

3.- Se realiza un análisis del sistema de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias resolviendo el sistema por partes separadas: la primera parte se resuelve la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1}{u},$$

por el método de variables separadas.

La segunda parte se encuentra la solución del sistema normal

$$\frac{dx_3}{dx_1} = \frac{(ax_3 + bx_4 + u)}{u},$$

$$\frac{dx_4}{dx_1} = \frac{x_3}{u}.$$

donde dicho sistema normal se reduce a la ecuación diferencial ordinaria

$$x_4'' - aux_4' - bx_4 - u = 0. \quad (1.6)$$

4.- Se encuentra la solución general de la ecuación diferencial ordinaria (1.6) en la forma:

$$u = -1 :$$

$$\Phi_1^-(x_1, x_2) = -\varphi^-(x_2 + (1/2)x_1^2)F_1^{-'}(x_1) - \Psi^-(x_2 + (1/2)x_1^2)F_2^{-'}(x_1), \quad (1.7)$$

$$\Phi_2^-(x_1, x_2) = \varphi^-(x_2 + (1/2)x_1^2)F_1^-(x_1) + \Psi^-(x_2 + (1/2)x_1^2)F_2^-(x_1) + 1/b, \quad (1.8)$$

$$u = 1 :$$

$$\Phi_1^+(x_1, x_2) = \varphi^+(x_2 - (1/2)x_1^2)F_1^{+'}(x_1) + \Psi^+(x_2 - (1/2)x_1^2)F_2^{+'}(x_1), \quad (1.9)$$

$$\Phi_2^+(x_1, x_2) = \varphi^+(x_2 - (1/2)x_1^2)F_1^+(x_1) + \Psi^+(x_2 - (1/2)x_1^2)F_2^+(x_1) - 1/b. \quad (1.10)$$

5.- Por medio del método de Cramer se encuentran las funciones asociadas

$$\begin{aligned} \varphi^-(x_2 + (1/2)x_1^2), & \quad \Psi^-(x_2 + (1/2)x_1^2), \\ \varphi^+(x_2 - (1/2)x_1^2), & \quad \Psi^+(x_2 - (1/2)x_1^2). \end{aligned}$$

de la solución general (1.7), (1.8), (1.9), (1.10).

6.- Por último se realiza un análisis de la ecuación diferencial ordinaria (1.6) para los diferentes casos donde la matriz del sistema (1.2) tiene valores propios reales iguales, valores propios reales diferentes, valores propios complejos y donde la matriz del sistema (1.2) es singular.

## 1.5. Contribuciones de la tesis

En este trabajo se expone de manera detallada un método de solución de sistemas lineales de la forma de (1.2). Se realiza un análisis extenso sobre el mapeo propuesto en el artículo [18], verificando los diferentes casos para los valores propios cuando:

- Caso 1:  $b \neq 0$ . La matriz del sistema (1.2) es no singular
- Caso 1a: La matriz del sistema (1.2) tiene valores propios reales iguales.
- Caso 1b: La matriz del sistema (1.2) tiene valores propios reales diferentes.
- Caso 1c: La matriz del sistema (1.2) tiene valores propios complejos.
- caso 2:  $b = 0$ . La matriz del sistema (1.2) es singular.

Y por último se brindan ejemplos de aplicación para cada caso.

## 1.6. Organización de la tesis

El presente trabajo se divide en 5 capítulos.

En el capítulo 1 se da una breve introducción sobre el trabajo estudiado en esta tesis.

En el capítulo 2 se realiza una introducción a la teoría de control, en particular a la teoría de control de sistemas lineales. Se presenta el principio del máximo de Pontryagin. En el capítulo 3 se presentan 3 ejemplos de sistemas de control lineal, donde se destacan 2 ejemplos importantes los cuáles son, una partícula en movimiento descrita por el sistema canónico (1.1) y el oscilador armónico representado por el sistema periódico

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u. \end{aligned}$$

y por último el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + u.\end{aligned}$$

Dicho sistema cuenta con una peculiaridad ya que es un sistema en el cuál no todos los puntos del espacio fase pueden ser controlados.

En el capítulo 4 se presenta el mapeo aplicado sobre el sistema canónico (1.1) al sistema lineal (1.2). Se describe un estudio extenso sobre la metodología a seguir para generar dicho mapeo, se encuentran las soluciones generales de  $y_1$  y  $y_2$  para los diferente valores propios del sistema lineal estudiado.

En el capítulo 5 se expone una serie de 4 ejemplos de aplicación del mapeo estudiado en el capítulo 4 para diferentes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

## Capítulo 2

# Introducción a la teoría de control

### 2.1. Planteamiento del problema de control óptimo

Consideramos un sistema que cambia con el paso del tiempo. Definimos el estado del sistema mediante un conjunto de  $n$  variables dependientes del tiempo  $t$

$$x_1(t), \dots, x_n(t). \quad (2.1)$$

Estas variables se llaman variables de estado donde  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ , para  $t$  que pertenece a cierto intervalo  $(a, b)$ .

El proceso descrito por  $x_i(t)$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$  a lo largo del tiempo, puede ser controlado por  $r$  funciones dadas:

$$u_1(t), \dots, u_r(t).$$

Estas funciones influyen en dicho proceso, y reciben el nombre de funciones de control.

Se les llamará controles admisibles a las transformaciones  $u : t \rightarrow u(t) \in \mathbb{R}^r$ . Además se asumirá que el sistema dinámico variante con el tiempo es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)) \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_r(t)) \end{cases} \quad (2.2)$$

Donde  $(f_1, \dots, f_n)$  son funciones conocidas las cuales describen la dinámica del sistema. Por lo tanto, el sistema dinámico de ecuaciones diferenciales se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)) \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad t \geq t_0, \quad (2.3)$$

con la condición inicial  $x(t_0) = x^0 \in \mathbb{R}^n$ .

Al sustituir un control admisible  $u = u(t)$  en la ecuación (2.3) con condición inicial  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  se obtendrá un problema de Cauchy:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x^0.$$

Como es conocido, si  $f$  es de clase  $C^1$ , dicho problema de Cauchy tiene una solución única denotada como  $x(t, t_0, x^0)$  en cierto intervalo  $(-h+t_0, t_0+h)$ .

Para plantear el problema de control óptimo se introduce un funcional  $J$  con el objetivo de comparar diferentes controles admisibles en el intervalo  $[t_0, t_1]$ :

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t)) dt.$$

Aquí  $f_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$  es continua con respecto de  $x, u$  y  $t$ .

**Definición 2.1.** *definamos la variable  $x_0$ , tal que*

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(x(t), u(t)) \quad (2.4)$$

donde

$$x_0(t_0) = 0$$

Por lo tanto, el problema de tiempo mínimo consiste en minimizar el tiempo de traslado de un estado inicial  $x(t_0)$  a un estado final  $x(t_1)$  donde  $t_1$  no es necesariamente fijo. Ahora que se han definido los puntos fundamentales de la teoría de control, el problema que se estudiará se enunciará de la manera siguiente:

*Entre todas las variables de control  $u(t)$  del sistema (2.3) que lleva al sistema desde el estado inicial  $x(t_0)$  al estado final  $x(t_1)$  encontrar la función  $\bar{u}(t)$  tal que  $J$  toma su valor mínimo. Dicho control se llama problema de control óptimo.*

## 2.2. Restricciones del control óptimo y principio máximo de Pontryagin

Es importante mencionar algunas restricciones sobre las variables de control. Primeramente, se asumirá que  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$  solo podrá tomar valores sobre un subconjunto cerrado y acotado  $U \in \mathbb{R}^n$ . Donde  $U$  será conocida como "la región de control".

Asumiremos también que  $u(t)$  es una función continua a trozos con un número finito de discontinuidades y supondremos que  $f_i(x, u)$  y  $\frac{\partial f_i(x, u)}{\partial x_j}$  para todo  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  y para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$  son continuas respecto a las  $n + r + 1$  variables de las que dependen.

Con la variable  $x_0$  añadida anteriormente al sistema inicial (2.1), tenemos

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, u),$$

donde  $\bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ ,  $\bar{f}(\bar{x}, u) = (f_0(\bar{x}, u), \dots, f_n(\bar{x}, u))$  y  $f_j(\bar{x}, u)$ ,  $j = 0, \dots, n$  representan la parte derecha de (2.2) Recordemos que el problema de control óptimo se estudia en un intervalo de tiempo  $[t_0, t_1]$  fijo. De la observación 2.1 tenemos que:

$$x_0(t) = \int_{t_0}^t f_0(x(t), u(t)) dt$$

tal que  $x_0(t_0) = 0$  y  $x_0(t_1) = J(x, u)$ . Recordemos que  $f_0$  es una función continua respecto de  $x$  y  $u$ , fija.

Introducimos el vector  $\psi(t)$  denominado función adjunta que satisface la igualdad

$$\dot{\psi}_i = - \sum_{j=0}^n \frac{\partial f_j(\bar{x}, u)}{\partial x_i} \psi_j, \quad i = 0, \dots, n. \quad (2.5)$$

El sistema de ecuaciones (2.5) satisface las condiciones de existencia y unicidad, ya que  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$  es continua.

Introducimos una función escalar  $H(x, u, \psi, t)$ , definida de la siguiente manera:

$$H(x, u, \psi) := \psi_0 f_0(x, u) + \psi_1 f_1(x, u) + \dots + \psi_n f_n(x, u),$$

donde

$$\dot{\psi}_j = - \frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad j = (0, 1, 2, \dots, n)$$

La función  $H$  se denomina "función Hamiltoniana". La introducción de la función Hamiltoniana induce el siguiente teorema, mejor conocido como el Principio Máximo de Pontryagin del cuál se brindará una explicación en la siguiente sección para  $n = 2$ .

### 2.2.1. Principio Máximo de Pontryagin

Recordemos el problema de control óptimo para  $\mathbb{R}^2$ . Se desea encontrar el control óptimo  $\bar{u}(t)$  para el sistema

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u), \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u)$$

que permita trasladar el punto  $(x_1^0, x_2^0)$  al punto  $(x_1^1, x_2^1)$ , en algún sentido óptimo. Iniciamos en tiempo fijo  $t = t_0$  y terminamos en algún tiempo no especificado  $t_1$ . Se utilizarán las funciones de control admisibles  $u(t)$  las cuáles son continuas y acotadas por trozos de tal manera que minimicen el funcional:

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1(t), x_2(t), u) dt.$$

En este caso y como se explicó en la sección anterior, se realizará un análisis sobre el comportamiento de la función Hamiltoniana:

$$H = \psi_0 f_0(x_1, x_2, u) + \psi_1 f_1(x_1, x_2, u) + \psi_2 f_2(x_1, x_2, u), \quad (2.6)$$

donde  $\psi_i$  satisface las ecuación:

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad i = (0, 1, 2). \quad (2.7)$$

**Teorema 2.1.** (*Principio del Máximo de Pontryagin*). Sea  $\bar{u}(t)$  un control admisible con la trayectoria correspondiente  $x^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t))$  que traslada el punto  $x^0$  en el momento  $t = t_0$  al punto  $x^1$  en algún tiempo no especificado  $t_1$ . Entonces para que  $\bar{u}$  y  $x^*$  sean óptimos (es decir que  $J$  se minimice) es necesario que exista un vector  $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2)$  que satisfaga la ecuación (2.7) y exista una función escalar

$$H(\psi, x, u) = \psi_0 f_0(x, u) + \psi_1 f_1(x, u) + \psi_2 f_2(x, u),$$

tal que:

- i) Por cada  $t$  en  $t_0 \leq t \leq t_1$ ,  $H$  alcanza su máximo con respecto a  $u$  en  $u = u^*(t)$ .
- ii)  $H(\psi^*, x^*, u^*) = 0$  y  $\psi_0 \leq 0$  en  $t = t_1$ , donde  $\psi^*(t)$  es la solución de (2.7) para  $u = u^*$ .

Además, se puede mostrar que  $H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)) = \text{constante}$  y  $\psi_0(t) = \text{constante}$  de tal modo que  $H = 0$  y  $\psi \leq 0$  en cada punto de la trayectoria óptima.

La variable de estado  $x_0$  se define como la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{x}_0 = f_0(x_1(t), x_2(t), u),$$

la cuál satisface la condición inicial  $x_0(t_0) = 0$ . La función  $f_0$  satisface las mismas condiciones diferenciales que  $f_1, f_2$ , es decir, la función  $x_0(t)$  en un tiempo  $t$  se interpreta como el costo incurrido hasta ese tiempo. En el tiempo  $t = t_1$ ,  $x_0(t_1)$  es el costo total de  $J$ .

## 2.3. Controlabilidad, teorema de Kalman, teorema de Weierstrass y definición de difeomorfismo

Ahora se presentarán algunas definiciones y teoremas sobre la teoría de control que tendrán gran importancia en las secciones posteriores.

Consideramos el siguiente sistema de control:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad f \in C^1(D), \quad D \subset \mathbb{R}^{n+r}. \quad (2.8)$$

Donde  $D$  es una región, es decir, un conjunto abierto y simplemente conexo.

**Definición 2.2.** Si para un par de estados  $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^n$  existe una función continua a trozos  $u(t)$ :

$$u(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^r,$$

tal que la trayectoria  $x(t)$  del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u(t)) \\ x(0) &= x^0 \end{aligned}$$

satisface la igualdad  $x(T) = x^1$ , entonces se dice que el control  $u(t)$  traslada el estado  $x^0$  al estado  $x^1$  en tiempo  $T$ .

**Definición 2.3.** El sistema (2.8) es completamente controlable si para todo  $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$  existe un control  $u(t)$  definido en  $[0, T]$  tal que traslada el estado  $x^1$  al estado  $x^2$ .

**Definición 2.4.** (Controlabilidad cero). Se considera el sistema de control lineal siguiente:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.9)$$

donde  $A_{n \times n}$ ,  $B_{n \times r}$  son matrices reales. Entonces el sistema (2.9) se llama cero controlable en tiempo  $T$  si existe

$$u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$$

donde  $\Omega$  es conjunto compacto. Tal que  $u = u(t)$  traslada  $x^0$  al origen en tiempo  $T$ .

**Definición 2.5.** El conjunto de puntos  $X_u$  en  $\mathbb{R}^n$  desde los cuáles se puede alcanzar el origen en virtud a controles admisibles se llama conjunto cero controlable.

**Teorema 2.2.** (Criterio de Kalman). Sea  $\Omega = \mathbb{R}^r$ . Consideramos el sistema de control lineal siguiente:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.10)$$

donde  $A_{n \times n}$ ,  $B_{n \times r}$  son matrices reales. El sistema de control lineal (2.10) es completamente controlable si el rango de la matriz  $(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$ , donde  $n$  es la dimensión del espacio fase  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 2.3. Teorema de Weierstrass** [10, Teorema 3.16] Sea  $f$  una función continua en un intervalo compacto  $[a, b]$ . Entonces  $f$  es acotada en  $[a, b]$ .

**Teorema 2.4. Teorema de Bolzano-Weierstrass** [10, Teorema 3.17] Sea  $f : [a, b] \Rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $[a, b]$ . Entonces  $f$  alcanza su máximo y su mínimo en  $[a, b]$ , es decir, existe  $M, m \in [a, b]$  de modo que:

$$f(M) \geq f(x); \quad \text{para todo } x \in [a, b],$$

$$f(m) \leq f(x); \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

**Definición 2.6.** Dados dos conjuntos  $R$  y  $S$ , una aplicación diferenciable  $f : R \rightarrow S$ , es un difeomorfismo si  $f$  es biyectiva y su inversa  $f^{-1} : R \rightarrow S$ , también es diferenciable.

Dos conjuntos  $R$  y  $S$  son difeomorfos si existe un difeomorfismo  $f$  entre ellas.

**Definición 2.7.** [18, Definición 1.1] Sea  $S$  una superficie en  $\mathbb{R}^n$ , nos referimos a la aplicación diferenciable  $y = \Phi(x)$  como el  $\tilde{S}_{n-1}$ -difeomorfismo si es continuo y suave en su dominio.

**Definición 2.8.** [18, Definición 1.2] Sea  $S$  una curva en  $\mathbb{R}^2$ , llamamos a los sistemas

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1. \end{cases} \quad |u| \leq 1, \quad (2.11)$$

y

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = ay_1 + by_2 + u, \\ \dot{y}_2 = y_1. \end{cases} \quad |u| \leq 1. \quad (2.12)$$

$\tilde{S}_1$ -difeomorfos si existe un  $\tilde{S}_1$ -difeomorfismo, del conjunto cero controlable del sistema (2.11) al conjunto cero controlable del sistema (2.12) correspondiente al un mismo control.

**Definición 2.9.** Sea  $A$  una matriz de dimensión  $n \times n$ . La matriz exponencial  $e^{At}$  se define mediante la relación

$$e^{At} := \sum_0^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j.$$

La matriz está bien definida en virtud a la desigualdad  $\|e^{At}\| \leq e^{t\|A\|}$ . Donde  $\|A\|$  es la norma de la matriz  $A$  definida como

$$\|A\| := \left( \sum_{ij} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Definición 2.10.** Consideramos el sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{2.13}$$

donde

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix}.$$

El sistema (2.13) se llama sistema normal si es completamente controlable respecto de cada componente  $u_1, \dots, u_r$  del vector control  $u(t)$ .

**Lema 2.5.** [17, Lema 3.1] Para que el sistema (2.13) sea normal es necesario y suficiente que todas las matrices

$$G_j = [b_j Ab_j, \dots, A^{n-1} b_j], \quad (j = 1, 2, \dots, r),$$

sean invertibles.

Aquí  $b_j$  es la columna  $j$ -ésima de la matriz  $B$ .

**Observación 2.1.** Notemos que cada sistema normal es completamente controlable, pero no cada sistema completamente controlable es normal.

En efecto, consideramos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 + u_1 + au_2, \\ \dot{x}_2 &= -5x_2 + u_1 + 2u_2. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Denotemos

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces tenemos,

$$G = (B, AB) = \begin{pmatrix} 1 & a & -3 & -3a \\ 1 & 2 & -5 & -10 \end{pmatrix}.$$

Por teorema 2.2 el sistema (2.14) es completamente controlable.

Por otro lado, para verificar que el sistema (2.14) es normal se toman los siguientes sistemas

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= -5x_2 + u_1. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 + au_2, \\ \dot{x}_2 &= -5x_2 + 2u_2. \end{aligned} \tag{2.15}$$

los cuales deben ser completamente controlables, sin embargo, denotando

$$G_1 := \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad G_2 := \begin{pmatrix} a & -3a \\ 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Vemos que el sistema (2.15) no es completamente controlable para  $a = 0$ . Es decir el sistema (2.14) no es normal para  $a = 0$ .

## 2.4. Tiempo de control óptimo para sistemas lineales

Consideramos un sistema lineal de control en  $\mathbb{R}^2$ , es decir, se consideran dos variables de estado  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ . Consideramos una variable de control  $u(t)$ , la cuál cumple con la condición siguiente  $|u| \leq 1$ , donde  $u$  es una función continua a trozos. Este sistema lineal se representa de manera general por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + bx_2 + lu \\ \dot{x}_2 = cx_1 + dx_2 + mu \end{cases} \tag{2.16}$$

donde  $a, b, c, d, l, m$  son constantes.

En forma matricial el sistema (2.16) se reescribe como sigue:

$$\dot{x} = Ax + gu,$$

donde

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad g := \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}.$$

A continuación, consideramos un ejemplo del problema de tiempo de control óptimo para el sistema lineal (2.16).

Sea que el sistema (2.16) es completamente controlable, es decir, se puede trasladar un punto inicial dado  $x(t_0) = x^0$  a un punto final  $x(t_1) = x^1$ , mediante un control admisible.

Deseamos encontrar un control admisible  $\bar{u}(t)$  tal que minimice el funcional siguiente:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} 1 dt = t_1 - t_0.$$

Para minimizar  $J$  se hará uso del Principio del Máximo de Pontryagin descrito en la sección (2.1). Notemos que el funcional  $J$  representa el tiempo. La función  $H(\psi, x, u)$  de acuerdo a la ecuación (2.6) tiene la forma siguiente:

$$H = -1 + \psi_1(ax_1 + bx_2 + lu) + \psi_2(cx_1 + dx_2 + mu),$$

$$H = -1 + \psi_1(x_1a + x_2b) + \psi_2(x_1c + x_2d) + (l\psi_1 + m\psi_2)u.$$

El sistema adjunto está dado por:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -a\psi_1 - c\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -b\psi_1 - d\psi_2. \end{cases}$$

En notación matricial tiene la siguiente forma:

$$\dot{\psi} = -A^T \psi \quad \text{donde} \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

ya que  $H$  es lineal en  $u$ , para maximizar  $H$  es necesario que  $u = 1$  ó  $u = -1$ , dependiendo del signo del coeficiente  $l\psi_1 + m\psi_2$ . Por lo tanto, los únicos controles que pueden llevar a un tiempo mínimo de transferencia son aquellos de la forma

$$\bar{u} = \text{sgn}(l\psi_1 + m\psi_2).$$

Estos controles son constantes por partes y discontinuos en los ceros de

$$S := (l\psi_1 + m\psi_2).$$

Es decir, cambian de 1 a -1 siempre que  $S = 0$ , donde  $S$  se denomina función de conmutación.

En el intervalo de tiempo entre dos ceros de  $S$ , el control es constante por lo que las ecuaciones de estado se vuelven autónomas.

$$\dot{x} = Ax + g\bar{u} \quad \text{donde} \quad \bar{u} = 1, \quad \bar{u} = -1.$$

Las formas de las trayectorias en el plano  $(x_1, x_2)$  se encuentran fácilmente en cada caso. Cuando  $ad - bc$  es distinto de cero, las trayectorias para  $\bar{u} = 1$  tienen una singularidad aislada o punto de reposo en la intersección de

$$(ax_1 + bx_2 + l) = 0,$$

y

$$(cx_1 + dx_2 + m) = 0.$$

Mientras que las trayectorias para  $\bar{u} = -1$  tendrán una singularidad aislada en la intersección de

$$(ax_1 + bx_2 - l) = 0,$$

y

$$(cx_1 + dx_2 - m) = 0.$$

El comportamiento de ambas familias de trayectorias está determinado por los valores propios de la matriz  $A$  del sistema (2.16), recordemos que un punto de reposo en el plano de fase representa una solución para todo  $t$ .

## 2.5. Número de conmutaciones del control óptimo

En esta sección presentamos el resultado sobre el número de conmutaciones del control óptimo.

**Lema 2.6.** [8, Lema 5.1] (i) Sea  $A$  matriz de  $2 \times 2$ , si los valores propios de  $A$  son reales, entonces la función de conmutación  $S$  puede tener como máximo un cero.

(ii) Cuando es el caso, las únicas secuencias de control que pueden ser óptimas son:

$$\{1\}, \{-1\}, \{1, -1\}, \{-1, 1\}$$

Donde por ejemplo,  $\{1\}$  significa  $\bar{u} = 1$  para  $t_0 \leq t \leq t_1$

$$\{1, -1\} \quad \text{significa} \quad \bar{u} = \begin{cases} 1, & t_0 \leq t \leq \tau \\ -1, & \tau \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

y  $\tau$  el cero de  $S$ .

La demostración de este lema se llevará a cabo para  $n$  arbitrario. Sea que la región de control representa un cubo de  $r$  dimensional determinado por las desigualdades

$$|u_k| \leq 1 \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

Recordemos que la función Hamiltoniana del problema considerado tiene la forma

$$H(\psi, x, u) = \sum_{i=1}^n \psi_i \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^r b_{ik} u_k \right),$$

o en su forma vectorial

$$H(\psi, x, u) = \psi^T A x + \psi^T B u. \quad (2.17)$$

El sistema adjunto para la variable  $\psi(t)$  es:

$$\frac{d\psi}{dt} = -A^T \psi. \quad (2.18)$$

El control óptimo debe alcanzar en el máximo de la función  $H$ . En virtud a que el control  $u$  depende solamente del segundo sumando en (2.17), el control óptimo debe alcanzar su máximo en el sumando  $\psi^T B u$ . Tenemos

$$\psi^T B u = \sum_{i=1}^n \psi_i \sum_{k=1}^r b_{ik} u_k = \sum_{k=1}^r u_k \sum_{i=1}^n b_{ik} \psi_i. \quad (2.19)$$

Cada componente  $u_k$  del control  $u$  varía independientemente de los restantes. Por eso, la expresión (2.19) alcanza su máximo si  $\psi_k$  toma el valor

$$u_k = \operatorname{sgn} \sum_{i=1}^n b_{ik} \psi_i, \quad (k = 1, 2, \dots, r). \quad (2.20)$$

De esta manera, el control óptimo es una función constante a trozos respecto del tiempo con valores que pertenecen a las aristas del cubo  $r$ -dimensional. Cada componente  $u_k$  es una función constante a trozos que toma valor en  $\pm 1$  que depende del signo  $\sum_{i=1}^n b_{ik} \psi_i(t)$ . Vamos a mostrar que si el sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^r b_{ik} u_k, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

es normal, entonces la relación (2.20) determina de manera unívoca para cada vector no cero  $\psi(t)$  las funciones de control  $u_k(t)$ , además estas funciones tienen en el intervalo  $[t_0, t_1]$  un número finito de conmutaciones. En efecto, sea que existe un número infinito  $M$  de valores  $t$  en el intervalo  $[t_0, t_1]$  tales que para  $t \in M$  tiene lugar  $\sum_{i=1}^n b_{ik} \psi_i(t) = 0$  ó  $\psi^T(t) b_k = 0$ , donde  $b_k$  es la columna  $k$ -ésima del vector  $B$ . En virtud a que el vector  $\psi(t)$  es la solución del sistema (2.18) esta función es analítica, consecuentemente es analítica la función  $\psi^T(t) b_k$ . Usando el teorema de identidad de variable compleja tenemos que  $\psi^T(t) b_k \equiv 0$  para  $t \in [t_0, t_1]$ . Derivamos esta igualdad respecto

de  $t$ ,  $n - 1$  veces. Tomando en cuenta que la función  $\psi(t)$  satisface (2.18) obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \psi^T(t)Ab_k &\equiv 0, \\ \dots\dots\dots \\ \psi^T(t)A^{n-1}b_k &\equiv 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

La solución  $\psi(t)$  del sistema (2.18) tiene la forma

$$\psi(t) = e^{-A^T(t-t_0)}\psi^0,$$

donde  $\psi^0 = \psi(t_0)$  entonces

$$\psi^T(t) = (\psi^0)^T e^{-A(t-t_0)}.$$

Sustituimos este valor  $\psi^T(t)$  en la identidad (2.21) tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} (\psi^0)^T e^{-A(t-t_0)}b_k &\equiv 0, \\ \dots\dots\dots \\ (\psi^0)^T e^{A(t-t_0)}A^{n-1}b_k &\equiv 0. \end{aligned}$$

Este sistema de identidades se puede unir de la siguiente manera

$$(\psi^0)^T e^{A(t-t_0)}G_k \equiv 0, \tag{2.22}$$

donde la matriz  $G_k = [b_k|Ab_k|\dots|A^{n-1}b_k]$ .

El sistema

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \tag{2.23}$$

por la condición de que (2.23) es normal, consecuentemente, la matriz  $G_k$  es no singular. Multiplicando ambas partes de la identidad (2.22) por la matriz  $G_k^{-1}$  tenemos

$$(\psi^0)^T e^{A(t-t_0)} \equiv 0.$$

Pero la matriz  $e^{-A(t-t_0)}$  es no singular por eso  $\psi^0 = 0$ , esto contradice a la suposición de que la solución  $\psi(t) = e^{-A^T(t-t_0)}\psi^0$  no es cero.

Así,  $\psi^T(t)b_k$  tiene un número finito de ceros.

**Observación 2.2.** *En el caso general el número de conmutaciones del control óptimo  $u_k$  es finito y depende de la posición inicial  $x_0$  y de la posición final  $x_1$ , de los valores propios de la matriz  $A$  y de la forma del poliedro  $U$  en el espacio de controles.*

*En el caso particular, cuando todos los valores propios de  $A$  son reales y la región de control es un cubo  $r$ -dimensional el número de conmutaciones no depende de la posición inicial y final y este número no es mayor que  $n$ .*

Antes de demostrar esta afirmación formulemos y demostremos el siguiente lema.

**Lema 2.7.** [17] Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  son números reales diferentes y  $f_1(t), \dots, f_m(t)$  son polinomios con coeficientes reales que tiene grados correspondientemente  $k_1, \dots, k_m$  entonces la función

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^m f_i(t)e^{\lambda_i t}$$

tiene no más de  $k_1 + \dots + k_m + m - 1$  ceros reales.

*Demostración.* Usemos el método de inducción matemática. Para  $m = 1$  el lema es válido. En efecto, la función  $\varphi(t) = f_1(t)e^{\lambda_1 t}$  tiene no más  $k_1$  ceros reales donde  $k_1$  es el grado del polinomio  $f_1(t)$ . Supongamos que el lema es válido para el caso  $m = l - 1$ . Esta afirmación la demostraremos por contradicción.

Sea que para  $m = l$ , el lema no es válido y la función  $\varphi(t) = \sum_{i=1}^l f_i(t)e^{\lambda_i t}$  tiene no menos de  $k_1 + \dots + k_l + l$  ceros reales. Multipliquemos  $\varphi(t)$  por  $e^{-\lambda_l t}$  en este caso los ceros reales no cambian. Obtenemos

$$\varphi(t)e^{-\lambda_l t} = \sum_{i=1}^{l-1} f_i(t)e^{(\lambda_i - \lambda_l)t} + f_l(t).$$

Diferenciando respecto de  $t$  esta expresión  $k_l + 1$  veces, tenemos

$$\varphi_1(t) = \sum_{i=1}^{l-1} \tilde{f}_i(t)e^{(\lambda_i - \lambda_l)t}. \quad (2.24)$$

Ya que entre dos ceros de una función se tiene por lo menos un cero de la derivada, entonces el número de ceros reales de la función  $\varphi_1(t)$  será no menos que

$$k_1 + \dots + k_{l-1} + k_l + l - (k_l + 1) = k_1 + \dots + k_{l-1} + (l - 1)$$

ceros.

En la expresión (2.24) los polinomios  $\tilde{f}_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, l - 1$ ) tienen grado  $k_i$  y los números  $(\lambda_i - \lambda_l)$  son distintos.

Para el caso cuando  $m = l - 1$  el lema se supone válido, por eso la función  $\varphi_1(t)$  debe tener no más de  $k_1 + \dots + k_{l-1} + (l - 2)$  ceros reales. Por la contradicción obtenida, el lema queda demostrado.  $\square$

Aplicamos el lema para la demostración del siguiente teorema.

**Teorema 2.8. Sobre los  $n$ -intervalos.**[17] Si los valores propios de la matriz  $A$  son reales y la región de control  $U$  es un cubo  $r$ -dimensional entonces cada uno de los controles  $u_k(t)$  es constante a trozos y tiene no más

$n - 1$  conmutaciones (es decir, no más de  $n$  intervalos donde es constante) donde  $n$  es el orden del sistema.

*Demostración.* Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  valores propios distintos de  $A$  y  $r_1, \dots, r_m$  sus multiplicidades. Entonces la solución general del sistema adjunto tiene la forma

$$\psi_i(t) = \sum_{j=1}^m f_{ij}(t)e^{-\lambda_j t}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.25)$$

Donde  $f_{ij}(t)$  son polinomios en  $t$  de grado no más de  $r_j - 1$ . Sustituyendo los valores para  $\psi_i(t)$  de (2.25) en (2.20), obtenemos la siguiente expresión para el control óptimo

$$u_k(t) = \operatorname{sgn} \sum_{i=1}^n b_{ik} \sum_{j=1}^m f_{ij}(t)e^{-\lambda_j t} = \operatorname{sgn} \sum_{j=1}^m \tilde{f}_{kj} e^{-\lambda_j t}, \quad (2.26)$$

donde  $\tilde{f}_{kj}(t) = \sum_{i=1}^n b_{ik} f_{ij}(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, m$ ) son polinomios respecto de  $t$  de grado no mayor de  $r_j - 1$ .

Aplicamos el lema (2.7) a la expresión (2.26) obtenemos que la suma de la parte derecha de la ecuación (2.26) tiene no más de

$$(r_1 - 1) + (r_2 - 1) + \dots + (r_k - 1) + (k - 1) = r_1 + \dots + r_k - 1 = n - 1$$

ceros reales, lo que demuestra el teorema.  $\square$

**Observación 2.3.** Para  $n = 2$ , se observa que para satisfacer el teorema se debe de tener que  $\bar{u} = \operatorname{sgn} S$  y sabemos que  $S$  puede tener como máximo un cero.

Suponiendo que  $S$  no tiene cero. Entonces  $S$  es positivo para todo  $t$ , dando como la secuencia el control igual a  $\{1\}$ , o es negativo para todo  $t$  dando como la secuencia el control igual a  $\{-1\}$ .

Ahora se hará la suposición de que  $S$  tiene un cero en  $t = \tau$  en el intervalo  $[t_0, t_1]$  y que además  $S(t_0) < 0$ .

consecuentemente:

$$\bar{u} = \operatorname{sgn} S = \begin{cases} -1, & t \leq \tau \\ 1, & t > \tau \end{cases}$$

Dando como resultante la secuencia de control  $\{-1, 1\}$ . por otro lado si  $S(t_0) > 0$  tenemos que:

$$\bar{u} = \operatorname{sgn} S = \begin{cases} 1, & t \leq \tau \\ -1, & t > \tau \end{cases}$$

Y se obtiene la secuencia  $\{1, -1\}$ .

Estos controles de nuestro sistema son los únicos que satisfacen el principio del máximo.

Entonces el control óptimo que lleva un punto inicial  $x(t_0) = x^0$  a un punto final  $x(t_1) = x^1$  en el tiempo mínimo  $t_1 - t_0$  tiene la forma descrita en el lema 2.6.

Para los problemas de control de tiempo óptimo de sistemas lineales, se puede demostrar que para tales problemas el Principio Máximo de Pontryagin no solo es una condición necesaria, sino que además es suficiente.

## Capítulo 3

# Sistema canónico, sistema periódico y sistema con valores reales positivos y negativos

### 3.1. Sistema canónico

En esta sección presentaremos ejemplos ilustrativos de aplicación del principio máximo de Pontryagin. El primer ejemplo modela el problema de frenado más eficiente de una partícula en movimiento hasta llegar al reposo. Primeramente consideramos una ecuación diferencial de segundo orden con un control acotado.

$$\ddot{x} = u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad |u| \leq 1.$$

Esta ecuación puede ser escrita como un sistema de control en un conjunto de estado  $M = \mathbb{R}^2$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & |u| &\leq 1, \\ \dot{x}_2 &= u, \end{aligned}$$

donde la variable de estado se escribe como  $x = (x_1^0, x_2^0)$  y el conjunto de todos los controles admisibles como  $U = \{u \in \mathbb{R} \text{ tal que } |u| \leq 1\}$ , las condiciones iniciales son  $x(t_0) = x^0$  y  $x(t_1) = 0$ . El objetivo principal es minimizar el funcional  $J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t) dt$ . En principio, se puede verificar que nuestro sistema estudiado sea un sistema

completamente controlable.

De acuerdo al teorema 2.2, para que el sistema dado sea completamente controlable debe de cumplir que el rango de la matriz  $(b, Ab)$  es igual a la dimensión del espacio fase.

Procedemos a calcular el rango de la matriz de Kalman, tenemos:

$$rg(b, Ab) = rg \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

El rango es 2 y la dimensión del espacio fase es igual a 2 por lo tanto el sistema es completamente controlable.

Como anteriormente se había planteado, se requiere llevar el estado  $(x_1^0, x_2^0)$  al estado  $(0, 0)$  en tiempo mínimo.

El funcional correspondiente para minimizar el tiempo de traslado está dado por:

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1(t), x_2(t), u) dt \rightarrow \min, \quad (3.1)$$

donde  $f_0 \equiv 1$ . De esta manera  $J = t_1 \rightarrow \min$ .

Ahora procedemos a escribir la función Hamiltoniana  $H$  asociado al sistema estudiado. Para el sistema canónico estudiado la función  $H$  se escribe como:

$$H = \psi_0 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u, \quad (3.2)$$

donde  $\dot{\psi}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}$  y sea  $x_0$  una variable como en la observación 2.1.

De acuerdo a (3.2) el sistema conjugado se escribe como:

$$\dot{\psi}_0 = -\frac{\partial H}{\partial x_0} = 0, \quad (3.3)$$

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad (3.4)$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1. \quad (3.5)$$

Resolviendo las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5) tenemos:

$$\psi_0 = c_0,$$

$$\psi_1 = c_1,$$

$$\psi_2 = -c_1 t + c_2.$$

La forma matricial de nuestro sistema conjugado queda como sigue:

$$\dot{\psi} = \begin{pmatrix} \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Por el teorema 2.1 tenemos que:

$$\max_{u \in [-1, 1]} (\psi_0 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u) = \psi_0 + \psi_1 x_2 + \max_{u \in [-1, 1]} \psi_2 u.$$

De las soluciones de  $\psi_0$ ,  $\psi_1$  y  $\psi_2$  tenemos que:

$$c_0 + c_1 x_2 + \max_{u \in [-1, 1]} [(-c_1 t + c_2)u].$$

Por el teorema 2.3 (Weierstrass) una función lineal definida en  $[-1, 1]$  alcanza sus extremos en  $-1$  o  $1$ , entonces nuestro control  $u(t)$  tomará los valores de  $u = -1$ ,  $u = 1$ .

Recordemos la función

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & \text{si } t < 0, \\ 1, & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Consecuentemente

$$\bar{u}(t) = \text{sgn}(\psi_2(t)) = \text{sgn}(-c_1 t + c_2),$$

entonces,

$$\text{sgn}(\psi_2(t)) = \begin{cases} -1, & \text{si } \psi_2(t) < 0, \\ 1, & \text{si } \psi_2(t) > 0. \end{cases}$$

Además, el control óptimo  $\bar{u}(t)$  tiene a lo más un salto.

Ahora se procederá a encontrar la trayectoria óptima asociada al sistema de control. Como conocemos, el control tomará valores de  $1$  y  $-1$  reescribimos el sistema de control como sigue:

$$\dot{x}_1 = x_2, \tag{3.6}$$

$$\dot{x}_2 = \pm 1. \tag{3.7}$$

Donde el punto inicial lo representaremos como  $x^0 := (a, b)$ .

Sea  $\bar{u} = \pm 1$  tenemos que:

$$x_2(t) = \bar{u}t + b. \tag{3.8}$$

Sustituyendo (3.8) en la parte derecha de (3.6) e integrando tenemos:

$$x_1(t) = \bar{u} \frac{t^2}{2} + bt + a, \tag{3.9}$$

despejamos  $t$  de la ecuación (3.8), tenemos

$$t = \frac{x_2 - b}{\bar{u}}.$$

Sustituimos el valor de  $t$  en la ecuación (3.9):

$$x_1(t) = \bar{u} \frac{(x_2 - b)^2}{2\bar{u}^2} + \frac{b(x_2 - b)}{\bar{u}} + a.$$

Por lo tanto:

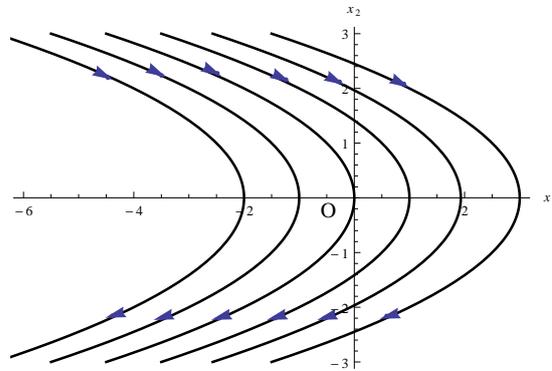
$$x_1(t) = \frac{1}{2u}x_2^2(t) - \frac{1}{u}b^2 + a. \quad (3.10)$$

La relación (3.10) modela la familia de trayectorias óptimas.

Ahora se considerarán todas las combinaciones posibles que pasen por el origen y no tengan más de un cambio.

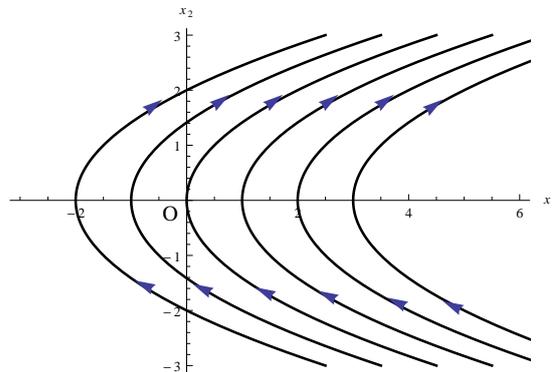
Para  $\dot{x}_1 = x_2$  y  $\dot{x}_2 = -1$ , entonces las curvas integrales se representan como:

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + a \quad \text{con } a \in \mathbb{R}$$



De igual manera para  $\dot{x}_1 = x_2$  y  $\dot{x}_2 = 1$  entonces tenemos que las curvas integrales están dadas por:

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + b \quad \text{con } b \in \mathbb{R}$$



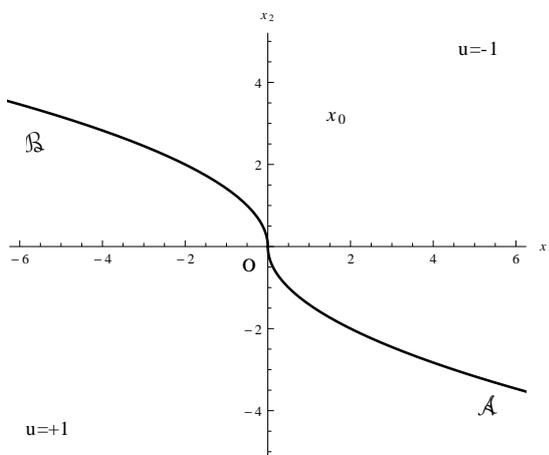
Por lo tanto, de entre todas las curvas integrales las cuáles son parábolas que se abren hacia la izquierda si ( $u = -1$ ) y derecha ( $u = 1$ ) solo hay dos

que dirigen al sistema hacia el origen, las cuáles se escriben de la siguiente manera:

$$\Upsilon_+ : x_1 = \frac{1}{2}x_2^2, \text{ para } x_2 < 0,$$

$$\Upsilon_- : x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2, \text{ para } x_2 > 0.$$

En la siguiente figura resumimos el comportamiento de  $\bar{u}$  respecto de las curvas  $\Upsilon_-$ ,  $\Upsilon_+$ :



- Si  $x_0 = (a, b)$  se ubica por arriba de la curva BOA o sobre la curva BO entonces  $\bar{u} = -1$ .
- Si  $x_0 = (a, b)$  se ubica por abajo de la curva BOA o sobre la curva AO entonces  $\bar{u} = 1$ .

Por lo tanto, cualquier trayectoria óptima debe alcanzar el origen a lo largo de las curvas  $\Upsilon_+$  y  $\Upsilon_-$ .

Ahora se verificará que las trayectorias encontradas son óptimas.

La demostración se lleva a cabo por medio de contradicción asumiendo que las trayectorias de la ecuación (3.10) no son óptimas, es decir, supondremos que existe otro control óptimo  $\tilde{u}(t)$  tal que dicho control también incide en el sistema dinámico canónico trasladando a  $x_0$  al origen en tiempo  $\tilde{T} < T$ , donde T es el tiempo de traslado de  $x_0$  al origen en virtud de las trayectorias de la ecuación (3.10).

Asumiremos que  $x^0$  se ubica arriba de la curva BOA, entonces

$$\bar{u} = \begin{cases} -1, & t_0 \leq t < \alpha, \\ 1, & \alpha \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

Sea

$$T = t_1 - t_0, \quad \tilde{T} = \theta - t_0.$$

Y sea  $\tilde{u}(t)$ ,  $\tilde{x}(t)$  tal que  $\tilde{x}(\theta) = 0$ , donde  $\theta < t_1$ .  
Consideramos dos sistemas de control:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \bar{u}(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

y

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{x}_2, \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{u}(t), \quad t_0 \leq t \leq \theta. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Sean

$$\phi(t) = -x_1(t) + x_2(t)(t - \alpha), \quad (3.13)$$

$$\psi(t) = -\tilde{x}_1(t) + \tilde{x}_2(t)(t - \alpha), \quad (3.14)$$

funciones asociadas a cada uno de los dos sistemas de control (3.11) y (3.12).  
Notemos ahora que en el tiempo inicial  $t_0$  tenemos la siguiente igualdad de las funciones (3.13), (3.14):

$$\begin{aligned} \phi(t_0) &= -a + b(t_0 - \alpha), \\ \psi(t_0) &= -a + b(t_0 - \alpha). \end{aligned}$$

Lo que implica que:

$$\phi(t_0) = \psi(t_0), \quad \text{además} \quad \phi(t_1) = 0 = \psi(\theta).$$

Ahora derivamos las funciones (3.13), (3.14) respecto de  $t$  en virtud a los sistemas de control (3.11) y (3.12), tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= -\dot{x}_1 + \dot{x}_2(t - \alpha) + x_2 = \bar{u}(t)(t - \alpha), \\ \dot{\psi}(t) &= -\dot{\tilde{x}}_1 + \dot{\tilde{x}}_2(t - \alpha) + \tilde{x}_2 = \tilde{u}(t)(t - \alpha). \end{aligned}$$

Lo que implica que:

$$|\dot{\phi}(t)| = |t - \alpha|.$$

De donde:

$$\dot{\phi}(t) \geq |\dot{\psi}(t)| \geq \dot{\psi}(t). \quad (3.15)$$

Pero sabemos que:

$$|\dot{\psi}(t)| = |\tilde{u}(t)||t - \alpha| = |\dot{\phi}(t)| \text{ ya que } |\tilde{u}| \leq 1.$$

Integrando la desigualdad (3.15), tenemos

$$\int_{t_0}^{\theta} \dot{\phi}(t) dt \geq \int_{t_0}^{\theta} \dot{\psi}(t) dt,$$

de donde,

$$\phi(\theta) - \phi(t_0) \geq \psi(\theta) - \psi(t_0).$$

Lo que implica:

$$\phi(\theta) \geq \psi(\theta) = 0. \quad (3.16)$$

Por otro lado, integrando  $\dot{\phi}(t)$  de  $\theta$  a  $t_1$ , tenemos:

$$-\phi(\theta) = \phi(t_1) - \phi(\theta) = \int_{\theta}^{t_1} \dot{\phi}(t) dt = \int_{\theta}^{t_1} |t - \alpha| dt > 0.$$

por lo tanto:

$$\phi(\theta) < 0. \quad (3.17)$$

Entonces de (3.16) y (3.17) se llega a una contradicción: que  $\theta \neq t_1$ . Consecuentemente  $(\bar{u}(t), \bar{x}(t))$  son óptimos.

### 3.1.1. Tiempo de control óptimo para el sistema canónico

En esta sección describimos el tiempo de control óptimo  $T$  como función del punto inicial  $(a, b)$ .

En principio, supongamos que el punto inicial  $x^0 = (a, b)$  está ubicado arriba de la curva AOB e integramos el sistema canónico estudiado con  $u = -1$  entonces  $\dot{x}_2 = -1$  por lo tanto:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -t + b, \\ x_1(t) &= -\frac{t^2}{2} + bt + a. \end{aligned}$$

Entonces, obtenemos la familia de curvas del sistema canónico:

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}b^2 + a. \quad (3.18)$$

La semicurva de AO está dada por

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2. \quad (3.19)$$

Requerimos hallar la intersección de las curvas dadas por (3.18) y (3.19); restando ambas ecuaciones tenemos:

$$0 = -x_2^2 + \frac{1}{2}b^2 + a,$$

es decir,

$$x_2^c = \pm \sqrt{\frac{1}{2}b^2 + a}.$$

Debemos tomar el signo " - " delante de la raíz cuadrada debido a que  $u = -1$ , así

$$x_2^c = -\sqrt{\frac{1}{2}b^2 + a}.$$

De donde,

$$x_1^c = \frac{1}{2} \left| \frac{b^2}{2} + a \right|.$$

Por otro lado, si  $u = 1$ ,  $\dot{x}_2(t) = 1$  entonces:

$$x_2(t) = \int_{\alpha}^{t_1} \dot{x}_2(t) dt = \int_{\alpha}^{t_1} 1 dt = t_1 - \alpha.$$

Por teorema fundamental del cálculo tenemos:

$$x_2(t_1) - x_2(\alpha) = \int_{\alpha}^{t_1} \dot{x}_2(s) ds = \int_{\alpha}^{t_1} 1 ds = t_1 - \alpha.$$

Ya que  $x(t_1) = 0$ , entonces  $x_2(t_1) = 0$  por lo tanto

$$-x_2^c = t_1 - \alpha.$$

Ahora para  $u = -1$  tenemos:

$$x_2(\alpha) - x_2(t_0) = \int_{t_0}^{\alpha} \dot{x}_2(t) dt = t_0 - \alpha,$$

ya que  $x(t_0) = x^0$  donde  $x^0 = (a, b)$ , entonces  $x_2(t_0) = b$ , entonces tenemos:

$$x_2^c - b = t_0 - \alpha, \quad (3.20)$$

$$-x_2^c = t_1 - \alpha. \quad (3.21)$$

Restando las expresiones (3.20) y (3.21) tenemos:

$$2x_2^c - b = t_0 - t_1$$

es decir,

$$-2x_2^c + b = t_1 - t_0 = T(a, b).$$

Por lo tanto:

$$T(a, b) = \begin{cases} b + 2\sqrt{\frac{1}{2}b^2 + a}, & \text{si } (a, b) \text{ se encuentra arriba de } BO, \\ b - 2\sqrt{\frac{1}{2}b^2 - a}, & \text{si } (a, b) \text{ se encuentra abajo de } AO. \end{cases}$$

### 3.2. Sistema periódico

Ilustraremos con un segundo ejemplo la aplicación de la teoría de control óptimo. Ahora se considera un oscilador lineal cuyo movimiento puede ser controlado por una fuerza externa.

$$\ddot{x}_1 + \dot{x}_1 = u, \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad |u| \leq 1. \quad (3.22)$$

La ecuación diferencial (3.22) la reescribimos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u. \end{aligned}$$

Se requiere encontrar entre las soluciones  $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$  de este sistema y el valor mínimo de  $t_1$  tal que  $x(t_0) = x^0$  y  $x(t_1) = 0$ . El conjunto de controles admisibles está dado por  $U = \{u \in \mathbb{R} \text{ tal que } |u| \leq 1\}$ .

El sistema periódico es completamente controlable ya que el rango de la matriz  $(b, Ab)$  coincide con la dimensión del espacio fase  $\mathbb{R}^2$ . Ahora bien, se requiere llevar el estado  $(x_1^0, x_2^0)$  al estado  $(0, 0)$  en tiempo mínimo. El funcional correspondiente para minimizar el tiempo de traslado está dado por (3.1).

Por el principio máximo de Pontryagin construimos la función Hamiltoniana  $H$  asociada al sistema periódico:

$$H = \psi_0 f_0(x, u) + \psi_1 f_1(x, u) + \psi_2 f_2(x, u) = \psi_0 + \psi_1 x_2 + \psi_2 (-x_1 + u)$$

donde  $\dot{\psi}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}$ ,  $j = (0, 1, 2)$ .

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_0 = 0 &\Rightarrow \psi_0 = \text{constante} = c_0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1 &\Rightarrow \psi_2 = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t), \\ \dot{\psi}_1 = \psi_2 &\Rightarrow \psi_1 = c_1 \sin(t) - c_2 \cos(t) + c_3. \end{aligned}$$

Como en el ejemplo anterior, el máximo de la función  $H$  está dado por:

$$\begin{aligned} \max_{u \in [-1, 1]} (\psi, x, u) &= \psi_0 + \psi_1 x_2 - \psi_2 x_1 + \psi_2 u \\ &= c_0 + (c_1 \sin(t) - c_2 \cos(t) + c_3)x_2 - (c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t))x_1 \\ &+ \max_{u \in [-1, 1]} (c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t))u. \end{aligned}$$

Por el Teorema 2.3 (Weierstrass) tenemos:

$$\bar{u}(t) = \operatorname{sgn} \psi_2(t) = \operatorname{sgn} (c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)).$$

Entonces:

$$\operatorname{sgn} (\psi_2(t)) = \begin{cases} -1, & \text{si } \psi_2(t) < 0, \\ 1, & \text{si } \psi_2(t) > 0. \end{cases}$$

Todas las conmutaciones están separadas por  $\pi$  unidades, lo cuál quiere decir que cualquier solución  $\psi_2$  de la ecuación adjunta tendrá la siguiente forma:

$$\psi_2(t) = a \cos(t) + b \sin(t),$$

donde  $x^0 = (a, b)$  es el punto inicial. La solución de la ecuación adjunta se escribe en forma de ángulo de fase:

$$\psi_2(t) = A \cos(t + \varphi).$$

Donde  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$  denota la amplitud y  $\varphi = \arctan(\frac{b}{a})$  denota la fase.

Ahora procedemos a encontrar la trayectoria óptima de el sistema dinámico estudiado, utilizando la fórmula de Cauchy tenemos:

$$x(t) = e^{At} \left( x_0 + \int_0^t e^{-A\tau} b u(\tau) dt \right).$$

Encontramos la matriz exponencial asociada al sistema periódico.

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

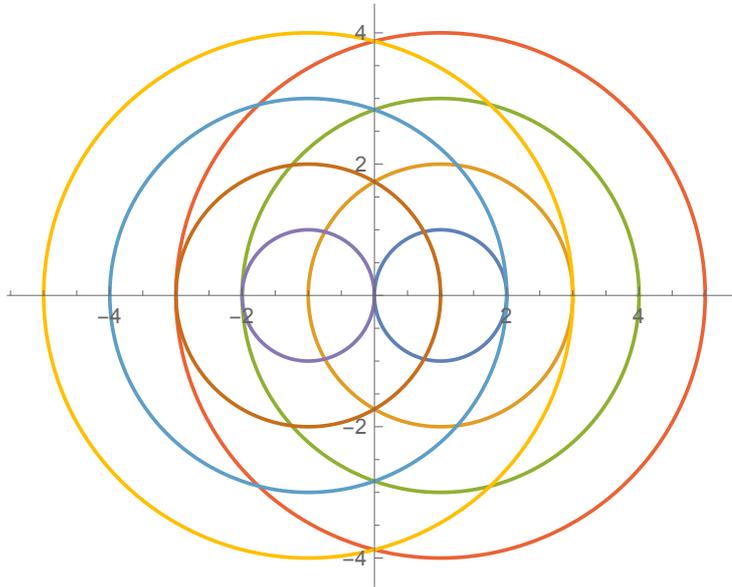
Supongamos que X e Y denotan los campos vectoriales correspondientes a los controles  $u = -1$  y  $u = 1$ , respectivamente. Donde las curvas integrales de X son círculos con centro en el punto  $P_- = (-1, 0)$  y las curvas integrales de Y son círculos con centro en el punto  $P_+ = (1, 0)$ .

Por lo tanto, la familia de trayectorias óptimas para el sistema periódico se representa de la siguiente manera:

$$x_1(t) = u + (a - u) \cos(t) + b \sin(t),$$

$$x_2(t) = b \cos(t) + (-a + u) \sin(t).$$

De entre todas las curvas integrales de los campos vectoriales X e Y solo dos curvas lleva a cualquier punto inicial dado  $x^0 = (a, b)$  al origen en tiempo óptimo, tales curvas se hallan mediante la fórmula de Cauchy.



Por lo tanto, de la fórmula de Cauchy para  $P_- = (-1, 0)$ , tenemos que:

$$x(t) = e^{At} \left( \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} (-1) dt \right),$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Y para  $P_+ = (1, 0)$ , tenemos que:

$$x(t) = e^{At} \left( \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1) dt \right),$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} -1 + \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}.$$

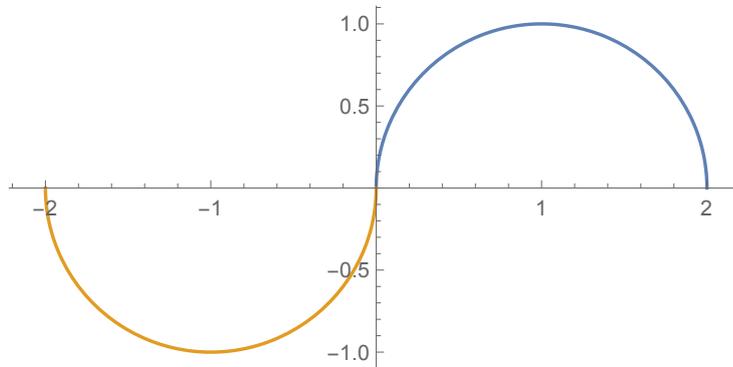
Las trayectorias correspondientes se representan de la siguiente manera:

$$\Upsilon_+ : [-\pi, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \rightarrow (x_1(t), x_2(t)) = (1 - \cos(t), \sin(t)),$$

y

$$\Upsilon_- : [-\pi, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \rightarrow (x_1(t), x_2(t)) = (-1 + \cos(t), -\sin(t)).$$

Dando como resultado las curvas óptimas que trasladan en tiempo mínimo a cualquier punto inicial  $x^0 = (a, b)$  al origen por medio del sistema dinámico (3.22)



### 3.3. Sistema con valores reales positivos y negativos.

Ahora consideramos un ejemplo sobre la aplicación de la teoría de control, donde la matriz  $A$  del sistema de control cuenta con valores propios tanto positivos como negativos. Sea

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (3.23)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u, \quad |u| \leq 1. \quad (3.24)$$

La forma matricial de este sistema es:

$$\dot{x} = x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

El sistema claramente es completamente controlable ya que:

$$rg \ (b, Ab) = rg \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Se procede ahora a encontrar el control óptimo del sistema conformado por las ecuaciones diferenciales (3.23) y (3.24). El funcional para minimizar el tiempo de traslado está dado por (3.1). Por el principio máximo de Pontryagin construimos la función hamiltoniana  $H$ .

$$H = \psi_0 f_0(x, u) + \psi_1 f_1(x, u) + \psi_2 f_2(x, u) = \psi_0 + \psi_1 x_2 + \psi_2 (x_1 + u)$$

donde  $\dot{\psi}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}$ ,  $j = (0, 1, 2)$

Entonces tenemos que:

$$\dot{\psi}_0 = 0 \Rightarrow \psi_0 = \text{constante} = c_0,$$

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_2 \Rightarrow \psi_1 = c_1 e^{-t} + c_2 e^t,$$

$$\dot{\psi}_2 = -\psi_1 \Rightarrow \psi_2 = -c_1 e^{-t} - c_2 e^t + c_3.$$

Como en el ejemplo anterior el máximo de la función H está dado por:

$$\begin{aligned} \max_{u \in [-1,1]} (\psi, x, u) &= \psi_0 + \psi_1 x_2 + \psi_2 x_1 + \psi_2 u \\ &= c_0 + (c_1 e^{-t} + c_2 e^t) x_2 + (-c_1 e^{-t} + c_2 e^t + c_3) x_1 \\ &+ \max_{u \in [-1,1]} (-c_1 e^{-t} + c_2 e^t + c_3) u. \end{aligned}$$

Por el Teorema 2.3 (Weierstrass) tenemos:

$$\bar{u}(t) = \operatorname{sgn} \psi_2(t) = \operatorname{sgn} (-c_1 e^{-t} + c_2 e^t + c_3).$$

Entonces:

$$\operatorname{sgn} (\psi_2(t)) = \begin{cases} -1, & \text{si } \psi_2(t) < 0, \\ 1, & \text{si } \psi_2(t) > 0. \end{cases}$$

Los valores propios de  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  son  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = -1$ , entonces por el lema 2.6 los controles óptimos tienen a lo más un cambio. Ahora, por medio del retrato de fase se estudian las trayectorias óptimas para este sistema.

La matriz  $e^{At}$  está dada por:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{-t}(1 + e^{2t}) & \frac{1}{2} e^{-t}(-1 + e^{2t}) \\ \frac{1}{2} e^{-t}(-1 + e^{2t}) & \frac{1}{2} e^{-t}(1 + e^{2t}) \end{pmatrix}.$$

Para el sistema  $\dot{x} = Ax$  el origen es una silla hiperbólica y los subsistemas estables e inestables en los puntos de equilibrio son abarcados por los vectores propios  $v_1$  y  $v_2$ .

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que si tomamos un múltiplo  $p$  de  $v_1$ , entonces la solución  $x(t)$  al problema del valor inicial  $\dot{x} = Ax$ ,  $x(0) = p$ , está dado por  $x(t) = e^{At}p = e^{-t}p$ , mientras que para múltiplos de  $v_2$  la solución está dada por  $x(t) = e^{At}p = e^t p$ . Los retratos fase de los campos vectoriales controlados con  $u = 1$  y  $u = -1$  son versiones desplazadas del retrato de fase del sistema homogéneo  $\dot{x} = Ax$  a lo largo del eje  $x$ . De igual manera, se denotamos con  $X$  el campo vectorial correspondiente al control  $u = -1$  y por  $Y$  el campo vectorial correspondiente para  $u = 1$ , es decir;

$$X(x) = Ax - b = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - 1 \end{pmatrix}, \quad Y(x) = Ax + b = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, estos campos vectoriales tienen, una silla hiperbólica desplazada en los puntos  $P_+ = (1, 0)$  y  $P_- = (-1, 0)$ . De igual manera, como en los casos anteriores, existen trayectorias únicas  $\Upsilon_-$  del campo vectorial  $X$  y  $\Upsilon_+$  del

campo vectorial de  $Y$ , que dirigen al sistema hacia el origen. Sin embargo, en este caso ya no sería posible dirigir cada punto al origen como lo fue en los ejemplos anteriores y el conjunto controlable será delimitado por las variables estables de los equilibrios  $P_+$  y  $P_-$ , es decir, por las líneas:

$$E_+ = P_+ + v_1 = x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 1,$$

$$E_- = P_- + v_1 = x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = -1.$$

Entonces, llegamos a las siguientes conclusiones: para cualquier control admisible  $\bar{u}$ , tenemos que:

$$\frac{d}{dt}(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2) + u.$$

Sabemos que  $|u| \leq 1$ , entonces tenemos que  $\frac{d}{dt}(x_1 + x_2) \leq 0$  en puntos  $(x_1, x_2)$  tales que satisfacen que  $x_1 + x_2 \leq -1$  y para  $\frac{d}{dt}(x_1 + x_2) \geq 0$  en puntos  $(x_1, x_2)$  que satisfacen que  $x_1 + x_2 \geq 1$ , por lo tanto ningún punto que se encuentre fuera de

$$\varsigma = \{(x_1, x_2) : -1 < x_1 + x_2 < 1\},$$

se podrá dirigir hacia el origen.

## Capítulo 4

# Construcción del $\tilde{S}_1$ -Difeomorfismo

El material de este capítulo es una versión extendida del artículo de Korobov [18]. Tal que como se mencionó en el capítulo 1, se construye de un homeomorfismo diferenciable, es decir un difeomorfismo que poseé aplicación inversa, siendo ambas aplicaciones diferenciables. Esta transformación nos ayudará a realizar un mapeo entre el conjunto 0-controlable del sistema canónico

$$\dot{x}_1 = u, \quad |u| \leq 1, \quad (4.1)$$

$$\dot{x}_2 = x_1, \quad (4.2)$$

sobre el conjunto 0-controlable del sistema lineal

$$\dot{y}_1 = ay_1 + by_2 + u, \quad |u| \leq 1, \quad (4.3)$$

$$\dot{y}_2 = y_1. \quad (4.4)$$

Para comenzar con el proceso de construcción del  $\tilde{S}_1$ -difeomorfismo se realizará un cambio de variable en el sistema conformado por las ecuaciones diferenciales (4.3),(4.4). Sean

$$y_1 = \Phi_1(x_1, x_2), \quad y_2 = \Phi_2(x_1, x_2), \quad (4.5)$$

donde

$$\Phi_{1,2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \Phi_{1,2}^+(x_1, x_2), & \text{si } u = 1, \\ \Phi_{1,2}^-(x_1, x_2), & \text{si } u = -1. \end{cases}$$

Derivamos (4.5) respecto de  $t$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = \dot{\Phi}_1 &= \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \right) \dot{x}_1 + \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \right) \dot{x}_2, \\ \dot{y}_2 = \dot{\Phi}_2 &= \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} \right) \dot{x}_1 + \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} \right) \dot{x}_2. \end{aligned}$$

Haciendo uso del sistema conformado por las ecuaciones diferenciales (4.1), (4.2) tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = \dot{\Phi}_1 &= \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \right) u + \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \right) x_1, \\ \dot{y}_2 = \dot{\Phi}_2 &= \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} \right) u + \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} \right) x_1. \end{aligned}$$

Ahora sustituimos las nuevas variables  $y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2$  en el sistema (4.3), (4.4), tenemos:

$$\dot{\Phi}_1 = \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \right) u + \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} \right) x_1 = a\Phi_1 + b\Phi_2 + u, \quad (4.6)$$

$$\dot{\Phi}_2 = \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} \right) u + \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} \right) x_1 = \Phi_1. \quad (4.7)$$

Usaremos la siguiente notación

$$\begin{aligned} \Phi_{1x_1} &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}, \\ \Phi_{1x_2} &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}, \\ \Phi_{2x_1} &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1}, \\ \Phi_{2x_2} &= \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Entonces el sistema (4.6), (4.7) queda como sigue:

$$\Phi_{1x_1} u + \Phi_{1x_2} x_1 = a\Phi_1 + b\Phi_2 + u, \quad (4.8)$$

$$\Phi_{2x_1} u + \Phi_{2x_2} x_1 = \Phi_1. \quad (4.9)$$

Utilizando el teorema (A.1) del apéndice A, tenemos que el sistema (4.8), (4.9) es equivalente a la ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$Z_{x_1} u + Z_{x_2} x_1 + Z_{x_3} (ax_3 + bx_4 + u) + Z_{x_4} x_3 = 0. \quad (4.10)$$

donde  $Z(x_1, x_2, x_3, x_4)$  es una función desconocida tal que

$$x_3 = \Phi_1 \quad x_4 = \Phi_2$$

son nuevas variables.

De la teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, la ecuación (4.10) se reduce a la integración del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Esto permite encontrar las características de la ecuación (4.10). Así, tenemos las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dx_1}{u} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{dx_3}{(ax_3 + bx_4 + u)} = \frac{dx_4}{x_3}$$

las cuáles son equivalentes al sistema normal (ya que  $u \neq 0$ )

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1}{u}, \quad (4.11)$$

$$\frac{dx_3}{dx_1} = \frac{(ax_3 + bx_4 + u)}{u}, \quad (4.12)$$

$$\frac{dx_4}{dx_1} = \frac{x_3}{u}. \quad (4.13)$$

Dividimos el sistema en dos subsistemas.

Resolviendo primeramente la ecuación diferencial ordinaria (4.11), tenemos:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1}{u},$$

de donde,

$$dx_2 = \frac{x_1}{u} dx_1$$

resolviendo esta ecuación tenemos:

$$x_2 = \frac{x_1^2}{2u} + p_3.$$

consecuentemente

$$p_3 = x_2 - \frac{x_1^2}{2u}.$$

Ahora consideramos el sistema conformado por las ecuaciones diferenciales (4.12), (4.13)

$$\frac{dx_3}{dx_1} = \frac{(ax_3 + bx_4 + u)}{u},$$

$$\frac{dx_4}{dx_1} = \frac{x_3}{u}.$$

Despejando  $x_3$  de la ecuación (4.13), tenemos:

$$x_3 = u \frac{dx_4}{dx_1}.$$

Así

$$\frac{dx_3}{dx_1} = \frac{d^2x_4}{dx_1^2} u. \quad (4.14)$$

Entonces sustituimos (4.14) en (4.12), tenemos:

$$u \frac{d^2x_4}{dx_1^2} = \frac{ax_3 + bx_4 + u}{u}$$

de donde,

$$\frac{d^2x_4}{dx_1^2} u^2 = ax_3 + bx_4 + u.$$

Ya que  $u = \pm 1$ , entonces tenemos:

$$\frac{d^2x_4}{dx_1^2} = ax_3 + bx_4 + u.$$

Entonces

$$\frac{d^2x_4}{dx_1^2} = au \frac{dx_4}{dx_1} + bx_4 + u. \quad (4.15)$$

Por lo tanto, la ecuación (4.15) queda de la forma siguiente:

$$x_4'' - aux_4' - bx_4 - u = 0, \quad (4.16)$$

donde la prima denota la derivada con respecto a  $x_1$ .

La ecuación característica de (4.16) es:

$$\lambda^2 - au\lambda - b = 0,$$

de donde:

$$\lambda_{1,2} = \frac{ua \pm \sqrt{(ua)^2 + 4b}}{2}.$$

Vamos a considerar todos los casos posibles para los valores de  $\lambda_{1,2}$ .

#### 4.1. Caso 1: $b \neq 0$ .

En este caso la matriz del sistema conformado por las ecuaciones (4.3), (4.4) es no singular.

Recordemos que una matriz singular es una matriz cuadrada cuyo determinante es nulo. En este caso el determinante de la matriz  $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  es distinto de cero, por lo tanto, es no singular. Ya que  $b \neq 0$ , tenemos que la solución particular de (4.16) es  $v(x_1) = q_0$  en este caso  $q_0 = -\frac{u}{b}$ . La solución general de la ecuación diferencial ordinaria (4.16) queda de la siguiente forma:

$$x_4 = p_1 F_1^\pm(x_1) + p_2 F_2^\pm(x_1) - \frac{u}{b}, \quad (4.17)$$

donde  $F_1^+(x_1), F_1^-(x_1), F_2^+(x_1), F_2^-(x_1)$  son soluciones de las ecuaciones homogéneas asociadas a la ecuación diferencial ordinaria (4.16).

De la ecuación (4.13), conocemos el valor de  $x_3$ :

$$\frac{dx_4}{dx_1} = \frac{x_3}{u}$$

de donde,

$$x_3 = u \frac{dx_4}{dx_1}.$$

Derivamos la ecuación (4.17) respecto de  $x_1$ , tenemos:

$$\frac{dx_4}{dx_1} = p_1 F_1^{\pm'}(x_1) + p_2 F_2^{\pm'}(x_1),$$

así,

$$x_3 = u(p_1 F_1^{\pm'}(x_1) + p_2 F_2^{\pm'}(x_1)), \quad (4.18)$$

donde  $p_1(x_1, x_3, x_4), p_2(x_1, x_3, x_4)$  son las primeras integrales del sistema (4.12), (4.13).

Utilizaremos las ecuaciones (4.17) y (4.18) para encontrar las primeras integrales de los sistemas (4.12), (4.13) que son  $p_1(x_1, x_3, x_4), p_2(x_1, x_3, x_4)$ . Partiremos de la solución general de la ecuación diferencial parcial (4.10) la cuál se escribe de la siguiente forma:

$$Z = \Psi(p_1(x_1, x_3, x_4), p_2(x_1, x_3, x_4), p_3(x_1, x_2)) \equiv \Psi(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad (4.19)$$

donde  $p_3(x_1, x_2)$  representa la primera integral de la ecuación diferencial ordinaria (4.11). Por lo tanto, la solución general del sistema (4.10) tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_1(x_1, x_2, \Phi_1, \Phi_2) &= 0, \\ \tilde{\Psi}_2(x_1, x_2, \Phi_1, \Phi_2) &= 0. \end{aligned}$$

Donde  $\tilde{\Psi}_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$  y  $\tilde{\Psi}_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$  son soluciones arbitrarias de (4.10) tal que  $\partial(\tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_2)/\partial(x_3, x_4) \neq 0$ . Usando (4.19), reescribimos la solución general del sistema en términos de las primeras integrales, ver (C.1)

$$\begin{aligned} \Psi_1(p_1, p_2, p_3) &= 0, \\ \Psi_2(p_1, p_2, p_3) &= 0. \end{aligned}$$

Sabemos que  $\partial(\Psi_1, \Psi_2)/\partial(p_1, p_2) \neq 0$ . Por lo tanto, tenemos:

$$p_1 = \varphi(p_3), \quad p_2 = \Psi(p_3).$$

Las primeras integrales  $p_1, p_2$  de los sistemas (4.12), (4.13) se escriben en términos de la primera integral  $p_3$  de la solución general de la ecuación diferencial ordinaria (4.11). Donde  $p_3$  describe las curvas de conmutación. Aquí  $\varphi(p_3)$  y  $\Psi(p_3)$  son funciones suaves arbitrarias. Combinando (4.17)-(4.18) y usando la notación  $x_3 = \Phi_1$ ,  $x_4 = \Phi_2$ , obtenemos la solución general de la ecuación diferencial ordinaria (4.16) para  $u = -1$  y para  $u = 1$ .

$u = -1$  :

$$\Phi_1^-(x_1, x_2) = -\varphi^-(x_2 + (1/2)x_1^2)F_1^{-'}(x_1) - \Psi^-(x_2 + (1/2)x_1^2)F_2^{-'}(x_1), \quad (4.20)$$

$$\Phi_2^-(x_1, x_2) = \varphi^-(x_2 + (1/2)x_1^2)F_1^-(x_1) + \Psi^-(x_2 + (1/2)x_1^2)F_2^-(x_1) + 1/b, \quad (4.21)$$

$u = 1$  :

$$\Phi_1^+(x_1, x_2) = \varphi^+(x_2 - (1/2)x_1^2)F_1^{+'}(x_1) + \Psi^+(x_2 - (1/2)x_1^2)F_2^{+'}(x_1), \quad (4.22)$$

$$\Phi_2^+(x_1, x_2) = \varphi^+(x_2 - (1/2)x_1^2)F_1^+(x_1) + \Psi^+(x_2 - (1/2)x_1^2)F_2^+(x_1) - 1/b. \quad (4.23)$$

Nuestro sistema de soluciones generales está en términos de:

$$\begin{aligned} &\varphi^-(x_2 + (1/2)x_1^2), \quad \Psi^-(x_2 + (1/2)x_1^2), \\ &\varphi^+(x_2 - (1/2)x_1^2), \quad \Psi^+(x_2 - (1/2)x_1^2). \end{aligned}$$

Estas funciones son desconocidas. Por lo tanto, tenemos que obtener una expresión explícita para estas funciones.

Por la definición 2.8, la cuál nos indica que si tenemos una curva en  $\mathbb{R}^2$ , el sistema canónico conformado por las ecuaciones diferenciales (4.1), (4.2) y el sistema lineal conformado por las ecuaciones diferenciales (4.3), (4.4) son  $\tilde{S}$ -Difeomorfos, si existe un  $\tilde{S}$ -Difeomorfismo del conjunto 0-controlable del sistema canónico (4.1), (4.2) al conjunto 0-controlable del sistema lineal (4.3), (4.4) que corresponden al mismo control, entonces tenemos que:

$$\Phi_1^\pm(0, 0) = \Phi_2^\pm(0, 0) = 0.$$

Por lo tanto, podemos encontrar los valores  $\varphi^-(0), \Psi^-(0), \varphi^+(0), \Psi^+(0)$ .

Resolvemos el sistema no homogéneo de ecuaciones algebraicas lineales tomando primeramente el caso cuando  $u = -1$  con la finalidad de encontrar  $\varphi^-(0), \Psi^-(0)$ . Tenemos:

$$\begin{cases} 0 = \varphi^-(0)F_1^-(0) + \Psi^-(0)F_2^-(0) + 1/b, \\ 0 = -\varphi^-(0)F_1^{-'}(0) - \Psi^-(0)F_2^{-'}(0). \end{cases} \quad (4.24)$$

Ya que el determinante del sistema (4.24) es distinto de 0, entonces existe una única solución del sistema. Ahora, para encontrar las expresiones explícitas para las funciones  $\varphi^\pm(x_2 \pm x_1^2/2)$  y  $\Psi^\pm(x_2 \pm x_1^2/2)$  usamos la continuidad del  $\tilde{S}_1$ -Difeomorfismo en la curva

$$x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 = 0, \quad x_1 \leq 0,$$

es decir,

$$x_2 = \frac{x_1^2}{2}. \quad (4.25)$$

Sustituimos (4.25) en  $\Phi_1^-(x_1, x_2)$ ,  $\Phi_2^-(x_1, x_2)$  tenemos:

$$\begin{aligned} & \varphi^-(x_1^2)F_1^-(x_1) + \Psi^-(x_1^2)F_2^-(x_1) + 1/b \\ &= \varphi^+(0)F_1^+(x_1) + \Psi^+(0)F_2^+(x_1) - \frac{1}{b}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} & -\varphi^-(x_1^2)F_1^{-'}(x_1) - \Psi^-(x_1^2)F_2^{-'}(x_1) \\ &= \varphi^+(0)F_1^{+'}(x_1) + \Psi^+(0)F_2^{+'}(x_1). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Observemos que como las funciones de los sistemas (4.27), (4.26) son continuas, se igualan de esta manera, ya que para un mismo punto en la curva  $x_2 - (1/2)x_1^2 = 0$ , dichas curvas tienen que ser iguales.

Para encontrar las funciones  $\varphi^-(x_1^2)$ ,  $\Psi^-(x_1^2)$  utilizaremos el método de Cramer. Ya que existe una solución única del sistema, la cuál tiene la forma siguiente:

$$\varphi^-(x_1^2) = \frac{\Delta_1^-(x_1)}{\Delta^-(x_1)}, \quad \Psi^-(x_1^2) = \frac{\Delta_2^-(x_1)}{\Delta^-(x_1)}.$$

Donde:

$$\begin{aligned} \Delta^-(x_1) &= \begin{vmatrix} F_1^-(x_1) & F_2^-(x_1) \\ F_1^{-'}(x_1) & F_2^{-'}(x_1) \end{vmatrix} \neq 0, \\ \Delta_1^-(x_1) &= \begin{vmatrix} \varphi^+(0)F_1^+(x_1) + \Psi^+(0)F_2^+(x_1) - \frac{2}{b} & F_2^-(x_1) \\ -\varphi^+(0)F_1^{+'}(x_1) - \Psi^+(0)F_2^{+'}(x_1) & F_2^{-'}(x_1) \end{vmatrix}, \\ \Delta_2^-(x_1) &= \begin{vmatrix} F_1^-(x_1) & \varphi^+(0)F_1^+(x_1) + \Psi^+(0)F_2^+(x_1) - \frac{2}{b} \\ F_1^{-'}(x_1) & -\varphi^+(0)F_1^{+'}(x_1) - \Psi^+(0)F_2^{+'}(x_1) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

De la misma manera, para encontrar  $\varphi^+(0)$ ,  $\Psi^+(0)$  resolvemos el correspondiente sistema no homogéneo de ecuaciones algebraicas lineales para  $u = 1$ .

$$\begin{cases} 0 = \varphi^+(0)F_1^+(0) + \Psi^+(0)F_2^+(0) - 1/b, \\ 0 = \varphi^+(0)F_1^{+'}(0) + \Psi^+(0)F_2^{+'}(0). \end{cases}$$

Nuevamente, usando la continuidad del  $\tilde{S}_1$ -Difeomorfismo en la curva tenemos:

$$x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 = 0, \quad x_1 \geq 0,$$

es decir,

$$x_2 = -\frac{x_1^2}{2}.$$

Sustituyendo  $x_2$  en  $\Phi_1^+(x_1, x_2), \Phi_2^+(x_1, x_2)$ , obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \varphi^+(-x_1^2)F_1^+(x_1) + \Psi^+(-x_1^2)F_2^+(x_1) + 1/b \\ = \varphi^-(0)F_1^-(x_1) + \Psi^-(0)F_2^-(x_1) - \frac{1}{b}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \varphi^+(-x_1^2)F_1^{+'}(x_1) + \Psi^+(-x_1^2)F_2^{+'}(x_1) \\ = -\varphi^-(0)F_1^{-'}(x_1) - \Psi^-(0)F_2^{-'}(x_1). \end{aligned} \quad (4.29)$$

De manera análoga, para los sistemas de ecuaciones lineales (4.28), (4.29) existe una única solución. Claramente, esta solución tiene la forma:

$$\varphi^+(-x_1^2) = \frac{\Delta_1^+(x_1)}{\Delta^+(x_1)}, \quad \Psi^+(-x_1^2) = \frac{\Delta_2^+(x_1)}{\Delta^+(x_1)}.$$

Donde:

$$\Delta^+(x_1) = \begin{vmatrix} F_1^+(x_1) & F_2^+(x_1) \\ F_1^{+'}(x_1) & F_2^{+'}(x_1) \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\Delta_1^+(x_1) = \begin{vmatrix} \varphi^-(0)F_1^-(x_1) + \Psi^-(0)F_2^-(x_1) + \frac{2}{b} & F_2^+(x_1) \\ -\varphi^-(0)F_1^{-'}(x_1) - \Psi^-(0)F_2^{-'}(x_1) & F_2^{+'}(x_1) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2^+(x_1) = \begin{vmatrix} F_1^+(x_1) & \varphi^-(0)F_1^-(x_1) + \Psi^-(0)F_2^-(x_1) + \frac{2}{b} \\ F_1^{+'}(x_1) & -\varphi^-(0)F_1^{-'}(x_1) - \Psi^-(0)F_2^{-'}(x_1) \end{vmatrix}.$$

Denotamos  $s = x_1^2$ , ya que  $x_1 \leq 0$ , tenemos  $x_1 = -\sqrt{s}$ . Luego obtenemos las expresiones para las funciones  $\varphi^-(s), \Psi^-(s)$  sustituyendo  $x_2 + (\frac{1}{2})x_1^2$  por  $s$  en estas expresiones obtenemos las expresiones explícitas para las funciones  $\varphi^- = (x_2 + (\frac{1}{2})x_1^2)$  y  $\Psi^- = (x_2 + (\frac{1}{2})x_1^2)$  de igual manera para  $\varphi^+(s), \Psi^+(s)$ .

De este primer caso, se desglozan los tres subcasos siguientes.

- Caso 1a: La matriz del sistema conformado por las ecuaciones (4.3),(4.4) tiene valores propios reales iguales.
- Caso 1b: La matriz del sistema conformado por las ecuaciones (4.3),(4.4) tiene valores propios reales diferentes.
- Caso 1c: La matriz del sistema conformado por las ecuaciones (4.3),(4.4) tiene valores propios complejos.

### 4.1.1. Caso 1a, valores propios reales iguales

Consideramos primeramente el caso 1a: La ecuación característica es:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

En este caso, la matriz del sistema conformado por las ecuaciones (4.3), (4.4) tiene valores propios iguales, entonces:

$$D = a^2 + 4b = 0 \Rightarrow b = -\frac{a^2}{4} \neq 0.$$

Entonces, para este caso los números característicos son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a}{2} \neq 0.$$

Si  $a \neq 0$ , tenemos que:

$$F_1^\pm(x_1) = e^{\pm(\frac{a}{2})x_1}, \quad F_2^\pm(x_1) = x_1 e^{\pm(\frac{a}{2})x_1}, \quad (4.30)$$

$$F_1^{\pm'}(x_1) = \pm \left(\frac{a}{2}\right) e^{\pm(\frac{a}{2})x_1}, \quad F_2^{\pm'}(x_1) = \pm \left(\frac{x_1 a}{2}\right) e^{\pm(\frac{a}{2})x_1} + e^{\pm(\frac{a}{2})x_1}. \quad (4.31)$$

Hallamos  $\varphi^-(0)$ ,  $\Psi^-(0)$ . Sustituimos los valores de  $F_1^-(0)$  y  $F_2^-(0)$  en el sistema no homogéneo de ecuaciones algebraicas lineales para  $u = -1$

$$\begin{cases} \varphi^-(0) + 1/b = 0, \\ \frac{a}{2}\varphi^-(0) - \Psi^-(0) = 0. \end{cases}$$

Como resultado, obtenemos las siguientes igualdades para  $\varphi^-(0)$  y  $\Psi^-(0)$ :

$$\begin{aligned} \varphi^-(0) &= -1/b = 4/a^2, \\ \Psi^-(0) &= 2/a. \end{aligned}$$

De la misma manera, vamos a encontrar  $\varphi^+(0)$  y  $\Psi^+(0)$

$$\begin{cases} \varphi^+(0) - 1/b = 0, \\ \frac{a}{2}\varphi^+(0) + \Psi^+(0) = 0. \end{cases}$$

Obtenemos las siguientes igualdades para  $\varphi^+(0)$  y  $\Psi^+(0)$ :

$$\begin{aligned} \varphi^+(0) &= 1/b = -4/a^2, \\ \Psi^+(0) &= 2/a. \end{aligned}$$

Ahora nuevamente utilizaremos el método de Cramer para hallar las funciones  $\varphi^-(x_1^2)$  y  $\Psi^-(x_1^2)$ :

$$\Delta^-(x_1) = \begin{vmatrix} F_1^-(x_1) & F_2^-(x_1) \\ F_1^{-'}(x_1) & F_2^{-'}(x_1) \end{vmatrix} = F_1^-(x_1)F_2^{-'}(x_1) - F_2^-(x_1)F_1^{-'}(x_1).$$

De (4.30) y (4.31), tenemos

$$\Delta^-(x_1) = e^{-(\frac{a}{2})x_1} \left( -\frac{x_1 a}{2} e^{-(\frac{a}{2})x_1} + e^{-(\frac{a}{2})x_1} \right) - x_1 e^{-(\frac{a}{2})x_1} \left( -\frac{a}{2} e^{-(\frac{a}{2})x_1} \right).$$

Entonces,

$$\Delta^-(x_1) = e^{-ax_1}. \quad (4.32)$$

Para  $\Delta_1^-(x_1)$  tenemos,

$$\begin{aligned} \Delta_1^-(x_1) &= \begin{vmatrix} \varphi^+(0)F_1^+(x_1) + \Psi^+(0)F_2^+(x_1) - \frac{2}{b} & F_2^-(x_1) \\ -\varphi^+(0)F_1^{+'}(x_1) - \Psi^+(0)F_2^{+'}(x_1) & F_2^{-'}(x_1) \end{vmatrix} = \\ &(\varphi^+(0)F_1^+(x_1) + \Psi^+(0)F_2^+(x_1) - \frac{2}{b})F_2^{-'}(x_1) - F_2^-(x_1)(-\varphi^+(0)F_1^{+'}(x_1) - \Psi^+(0)F_2^{+'}(x_1)) \\ &= \left( -\frac{4}{a^2} e^{(\frac{a}{2})x_1} + \frac{2x_1}{a} e^{(\frac{a}{2})x_1} - \frac{2}{b} \right) \left( -\frac{x_1 a}{2} e^{-(\frac{a}{2})x_1} + e^{-(\frac{a}{2})x_1} \right) - \\ &x_1 e^{-(\frac{a}{2})x_1} \left[ \frac{2}{a} e^{(\frac{a}{2})x_1} - \frac{2}{a} \left( \frac{x_1 a}{2} e^{(\frac{a}{2})x_1} + e^{(\frac{a}{2})x_1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Así,

$$\Delta_1^-(x_1) = -\frac{4}{a^2} + \left( \frac{4}{a} \right) x_1 + e^{-(\frac{a}{2})x_1} \left[ \frac{8}{a^2} - \left( \frac{4}{a} \right) x_1 \right]. \quad (4.33)$$

Para  $\Delta_2^-(x_1)$  tenemos,

$$\begin{aligned} \Delta_2^-(x_1) &= \begin{vmatrix} F_1^-(x_1) & \varphi^+(0)F_1^+(x_1) + \Psi^+(0)F_2^+(x_1) - \frac{2}{b} \\ F_1^{-'}(x_1) & -\varphi^+(0)F_1^{+'}(x_1) - \Psi^+(0)F_2^{+'}(x_1) \end{vmatrix} = \\ &F_1^-(x_1)(-\varphi^+(0)F_1^{+'}(x_1) - \Psi^+(0)F_2^{+'}(x_1)) - F_1^{-'}(x_1)(\varphi^+(0)F_1^+(x_1) + \Psi^+(0)F_2^+(x_1) - \frac{2}{b}) \\ &= e^{-(\frac{a}{2})x_1} \left[ \frac{2}{a} e^{(\frac{a}{2})x_1} - \frac{2}{a} \left( \frac{x_1 a}{2} e^{(\frac{a}{2})x_1} + e^{(\frac{a}{2})x_1} \right) \right] \\ &+ \frac{a}{2} e^{-(\frac{a}{2})x_1} \left( -\frac{4}{a^2} e^{(\frac{a}{2})x_1} + \frac{2x_1}{a} e^{(\frac{a}{2})x_1} - \frac{2}{b} \right). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\Delta_2^-(x_1) = -\frac{2}{a} + \left( \frac{4}{a} \right) e^{-(\frac{a}{2})x_1}. \quad (4.34)$$

Mediante el método de Cramer tenemos que:

$$\varphi^-(x_1^2) = \frac{\Delta_1^-(x_1)}{\Delta^-(x_1)}, \quad \Psi^-(x_1^2) = \frac{\Delta_2^-(x_1)}{\Delta^-(x_1)}.$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.32), (4.33), (4.34) en  $\varphi^-(x_1^2)$ ,  $\Psi^-(x_1^2)$ , tenemos las siguientes igualdades:

$$\varphi^-(x_1^2) = e^{ax_1} \left[ -\frac{4}{a^2} + \left( \frac{4}{a} \right) x_1 \right] + e^{(\frac{a}{2})x_1} \left[ \frac{8}{a^2} - \left( \frac{4}{a} \right) x_1 \right],$$

$$\Psi^-(x_1^2) = -\left(\frac{2}{a}\right) e^{ax_1} + \left(\frac{4}{a}\right) e^{(\frac{a}{2})x_1}.$$

De igual manera, encontramos las funciones  $\varphi^+(-x_1^2)$  y  $\Psi^+(-x_1^2)$ . Con el método de Cramer, tenemos:

$$\Delta^+(x_1) = \begin{vmatrix} F_1^+(x_1) & F_2^+(x_1) \\ F_1^{+'}(x_1) & F_2^{+'}(x_1) \end{vmatrix} = F_1^+(x_1)F_2^{+'}(x_1) - F_2^+(x_1)F_1^{+'}(x_1).$$

De (4.30) y (4.31), tenemos

$$\Delta^+(x_1) = e^{(\frac{a}{2})x_1} \left( \frac{x_1 a}{2} e^{(\frac{a}{2})x_1} + e^{(\frac{a}{2})x_1} \right) - x_1 e^{(\frac{a}{2})x_1} \left( \frac{a}{2} e^{(\frac{a}{2})x_1} \right),$$

entonces

$$\Delta^+(x_1) = e^{ax_1}. \quad (4.35)$$

Ahora calculemos  $\Delta_1^+(x_1)$

$$\begin{aligned} \Delta_1^+(x_1) &= \begin{vmatrix} \varphi^-(0)F_1^-(x_1) + \Psi^-(0)F_2^-(x_1) + \frac{2}{b} & F_2^+(x_1) \\ -\varphi^-(0)F_1^{-'}(x_1) - \Psi^-(0)F_2^{-'}(x_1) & F_2^{+'}(x_1) \end{vmatrix} = \\ &(\varphi^-(0)F_1^-(x_1) + \Psi^-(0)F_2^-(x_1) + \frac{2}{b})F_2^{+'}(x_1) - F_2^+(x_1)(-\varphi^-(0)F_1^{-'}(x_1) - \Psi^-(0)F_2^{-'}(x_1)) \\ &= \left( \frac{4}{a^2} e^{(-\frac{a}{2})x_1} + \frac{2x_1}{a} e^{-(\frac{a}{2})x_1} + \frac{2}{b} \right) \left( \frac{x_1 a}{2} e^{(\frac{a}{2})x_1} + e^{(\frac{a}{2})x_1} \right) - \\ &x_1 e^{(\frac{a}{2})x_1} \left[ \frac{2}{a} e^{-(\frac{a}{2})x_1} - \frac{2}{a} \left( -\frac{x_1 a}{2} e^{-(\frac{a}{2})x_1} + e^{-(\frac{a}{2})x_1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\Delta_1^+(x_1) = \frac{4}{a^2} + \left(\frac{4}{a}\right) x_1 + e^{(\frac{a}{2})x_1} \left[ -\frac{8}{a^2} - \left(\frac{4}{a}\right) x_1 \right]. \quad (4.36)$$

Ahora hallamos  $\Delta_2^+(x_1)$

$$\begin{aligned} \Delta_2^+(x_1) &= \begin{vmatrix} F_1^+(x_1) & \varphi^-(0)F_1^-(x_1) + \Psi^-(0)F_2^-(x_1) + \frac{2}{b} \\ F_1^{+'}(x_1) & -\varphi^-(0)F_1^{-'}(x_1) - \Psi^-(0)F_2^{-'}(x_1) \end{vmatrix} = \\ &F_1^+(x_1)(-\varphi^-(0)F_1^{-'}(x_1) - \Psi^-(0)F_2^{-'}(x_1)) - F_1^{+'}(x_1)(\varphi^-(0)F_1^-(x_1) + \Psi^-(0)F_2^-(x_1) + \frac{2}{b}) \\ &= e^{(\frac{a}{2})x_1} \left[ \frac{2}{a} e^{-(\frac{a}{2})x_1} - \frac{2}{a} \left( -\frac{x_1 a}{2} e^{-(\frac{a}{2})x_1} + e^{-(\frac{a}{2})x_1} \right) \right] \\ &\quad - \frac{a}{2} e^{(\frac{a}{2})x_1} \left( \frac{4}{a^2} e^{(-\frac{a}{2})x_1} + \frac{2x_1}{a} e^{-(\frac{a}{2})x_1} + \frac{2}{b} \right). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\Delta_2^+(x_1) = -\frac{2}{a} + \left(\frac{4}{a}\right) e^{(\frac{a}{2})x_1}. \quad (4.37)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.35), (4.36), (4.37) en  $\varphi^+(x_1^2)$ ,  $\Psi^+(x_1^2)$ , tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \varphi^+(x_1^2) &= e^{-ax_1} \left[ \frac{4}{a^2} + \left(\frac{4}{a}\right) x_1 \right] + e^{-(\frac{a}{2})x_1} \left[ -\frac{8}{a^2} - \left(\frac{4}{a}\right) x_1 \right], \\ \Psi^+(x_1^2) &= -\left(\frac{2}{a}\right) e^{-ax_1} + \left(\frac{4}{a}\right) e^{-(\frac{a}{2})x_1}. \end{aligned}$$

Denotamos

$$f(x_1, x_2) := \sqrt{x_2 + (1/2)x_1^2}, \quad (4.38)$$

$$g(x_1, x_2) := \sqrt{-x_2 + (1/2)x_1^2}. \quad (4.39)$$

Sustituimos (5.40) y (5.41) en las ecuaciones (4.20), (4.21), (4.22), (4.23) obtenemos las expresiones explícitas para el  $\tilde{S}_1$ -Difeomorfismo en el caso 1a:

$$\Phi_1(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{a[-x_1/2 - f(x_1, x_2)]} [-2f(x_1, x_2) - x_1] \\ + e^{a/2[-x_1 - f(x_1, x_2)]} [2f(x_1, x_2) + 2x_1], & x_2 + x_1|x_1|/2 \geq 0, \\ e^{a[x_1/2 - g(x_1, x_2)]} [2g(x_1, x_2) - x_1] \\ + e^{(a/2)[x_1 - g(x_1, x_2)]} [-2g(x_1, x_2) + 2x_1], & x_2 + x_1|x_1|/2 \leq 0, \end{cases}$$

$$\Phi_2(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{a[-x_1/2 - f(x_1, x_2)]} [-(4/a)f(x_1, x_2) - 4/a^2 - (2/a)x_1] \\ + e^{a/2[-x_1 - f(x_1, x_2)]} [(4/a)f(x_1, x_2) + 8/a^2 + (4/a)x_1] - 4/a^2, \\ & x_2 + x_1|x_1|/2 \geq 0, \\ e^{a[x_1/2 - g(x_1, x_2)]} [(4/a)g(x_1, x_2) + 4/a^2 - (2/a)x_1] \\ + e^{(a/2)[x_1 - g(x_1, x_2)]} [-(4/a)g(x_1, x_2) - 8/a^2 + (4/a)x_1] + 4/a^2, \\ & x_2 + x_1|x_1|/2 \leq 0. \end{cases}$$

#### 4.1.2. Caso 1b, valores propios reales diferentes

Ahora consideramos el caso 1b: La matriz del sistema tiene valores propios reales diferentes.

Los valores cacterísticos son:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} F_1^\pm(x_1) &= e^{\pm(\lambda_1)x_1}, & F_2^\pm(x_1) &= e^{\pm(\lambda_2)x_1}, \\ F_1^{\pm'}(x_1) &= \pm \lambda_1 e^{\pm(\lambda_1)x_1}, & F_2^{\pm'}(x_1) &= \pm \lambda_2 e^{\pm(\lambda_2)x_1}. \end{aligned}$$

Ahora, encontramos  $\varphi^-(0), \Psi^-(0)$  del siguiente sistema:

$$\begin{cases} \varphi^-(0) + \Psi^-(0) + 1/b = 0, \\ \lambda_1 \varphi^-(0) + \lambda_2 \Psi^-(0) = 0. \end{cases}$$

Dando como resultado lo siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi^-(0) &= -\frac{\lambda_1}{b\sqrt{D}}, \\ \Psi^-(0) &= \frac{\lambda_2}{b\sqrt{D}}, \end{aligned}$$

donde  $D = a^2 + 4b$ .

De manera análoga, encontramos  $\varphi^+(0), \Psi^+(0)$  del sistema:

$$\begin{cases} \varphi^+(0) + \Psi^+(0) - 1/b = 0, \\ \lambda_1 \varphi^+(0) + \lambda_2 \Psi^+(0) = 0. \end{cases}$$

Dando como resultado las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \varphi^+(0) &= -\frac{\lambda_2}{b\sqrt{D}}, \\ \Psi^+(0) &= \frac{\lambda_1}{b\sqrt{D}}. \end{aligned}$$

De manera similar, como en el caso 1a, utilizaremos el método de Cramer para encontrar las funciones  $\varphi^-(x_1^2), \Psi^-(x_1^2)$ . Encontramos  $\Delta^-(x_1), \Delta_1^-(x_1), \Delta_2^-(x_1)$ :

$$\Delta^-(x_1) = e^{-ax_1} \sqrt{D} \neq 0, \quad (4.40)$$

$$\Delta_1^-(x_1) = \frac{\lambda_2}{b} e^{-\lambda_2 x_1} \left( \frac{\lambda_2}{\sqrt{D}} e^{\lambda_1 x_1} - \frac{\lambda_1}{\sqrt{D}} e^{\lambda_1 x_1} - 2 \right), \quad (4.41)$$

$$\Delta_2^-(x_1) = \frac{\lambda_1}{b} e^{-\lambda_1 x_1} \left( -\frac{\lambda_2}{\sqrt{D}} e^{\lambda_2 x_1} + \frac{\lambda_1}{\sqrt{D}} e^{\lambda_2 x_1} - 2 \right). \quad (4.42)$$

Mediante el método de Cramer tenemos:

$$\varphi^-(x_1^2) = \frac{\Delta_1^-(x_1)}{\Delta^-(x_1)}, \quad \Psi^-(x_1^2) = \frac{\Delta_2^-(x_1)}{\Delta^-(x_1)}.$$

Sustituyendo los valores anteriores de (4.40), (4.41) y (4.42) en  $\varphi^-(x_1^2)$ ,  $\Psi^-(x_1^2)$ , obtenemos los siguientes resultados:

$$\varphi^-(x_1^2) = \frac{1}{\sqrt{D}} \left[ \frac{\lambda_2}{b} e^{ax_1} e^{-\lambda_2 x_1} \right] (e^{\lambda_1 x_1} - 2),$$

$$\Psi^-(x_1^2) = \frac{1}{\sqrt{D}} \left[ \frac{\lambda_1}{b} e^{ax_1} e^{-\lambda_1 x_1} \right] (e^{\lambda_2 x_1} - 2).$$

Ahora calculamos las funciones  $\varphi^+(-x_1^2)$  y  $\Psi^+(-x_1^2)$ . En principio hallamos  $\Delta^+(x_1)$ ,  $\Delta_1^+(x_1)$ ,  $\Delta_2^+(x_1)$

$$\Delta^+(x_1) = -e^{ax_1} \sqrt{D} \neq 0,$$

$$\Delta_1^+(x_1) = -\frac{\lambda_2}{b} e^{\lambda_2 x_1} (e^{-\lambda_1 x_1} + 2),$$

$$\Delta_2^+(x_1) = \frac{\lambda_1}{b} e^{\lambda_1 x_1} (e^{-\lambda_2 x_1} - 2).$$

De manera análoga obtenemos  $\varphi^+(-x_1^2)$  y  $\Psi^+(-x_1^2)$ :

$$\varphi^+(-x_1^2) = \frac{\lambda_2}{b\sqrt{D}} (e^{-2\lambda_1 x_1} - 2e^{-\lambda_1 x_1}),$$

$$\Psi^+(-x_1^2) = \frac{\lambda_1}{b\sqrt{D}} (-e^{-2\lambda_2 x_1} + 2e^{-\lambda_2 x_1}).$$

Finalmente, para el caso 1b el resultado final es:

$$\Phi_1(x_1, x_2) = \begin{cases} -(1/\sqrt{D})e^{-\lambda_2 x_1} [e^{-2\lambda_2 f(x_1, x_2)} - 2e^{-\lambda_2 f(x_1, x_2)}] \\ +(1/\sqrt{D})e^{-\lambda_1 x_1} [e^{-2\lambda_1 f(x_1, x_2)} - 2e^{-\lambda_1 f(x_1, x_2)}], \\ \quad x_2 + x_1|x_1|/2 \geq 0, \\ +(1/\sqrt{D})e^{\lambda_2 x_1} [e^{-2\lambda_2 g(x_1, x_2)} - 2e^{-\lambda_2 g(x_1, x_2)}] \\ +(1/\sqrt{D})e^{\lambda_1 x_1} [-e^{-2\lambda_1 g(x_1, x_2)} + 2e^{-\lambda_1 g(x_1, x_2)}], \\ \quad x_2 + x_1|x_1|/2 \leq 0, \end{cases}$$

$$\Phi_2(x_1, x_2) = \begin{cases} -(\lambda_1/b\sqrt{D})e^{-\lambda_2 x_1} [-e^{-2\lambda_2 f(x_1, x_2)} + 2e^{-\lambda_2 f(x_1, x_2)}] \\ -(\lambda_1/b\sqrt{D})e^{-\lambda_1 x_1} [e^{-2\lambda_1 f(x_1, x_2)} - 2e^{-\lambda_1 f(x_1, x_2)}] + 1/b, \\ \quad x_2 + x_1|x_1|/2 \geq 0, \\ -(\lambda_1/b\sqrt{D})e^{\lambda_2 x_1} [e^{-2\lambda_2 g(x_1, x_2)} - 2e^{-\lambda_2 g(x_1, x_2)}] \\ -(\lambda_1/b\sqrt{D})e^{\lambda_1 x_1} [-e^{-2\lambda_1 g(x_1, x_2)} + 2e^{-\lambda_1 g(x_1, x_2)}] - 1/b, \\ \quad x_2 + x_1|x_1|/2 \leq 0, \end{cases}$$

donde

$$f(x_1, x_2) := \sqrt{x_2 + (1/2)x_1^2}, \quad (4.43)$$

$$g(x_1, x_2) := \sqrt{-x_2 + (1/2)x_1^2}. \quad (4.44)$$

### 4.1.3. Caso 1c, valores propios complejos

Ahora consideramos el caso 1c. La matriz del sistema tiene valores propios complejos. El sistema fundamental de soluciones de las ecuaciones homogéneas es:

$$\begin{aligned} F_1^\pm(x_1) &= e^{\pm(\frac{a}{2})x_1} \cos(\alpha x_1), \\ F_2^\pm(x_1) &= e^{\pm(\frac{a}{2})x_1} \sin(\alpha x_1). \end{aligned}$$

Derivando respecto de  $x_1$ , tenemos

$$\begin{aligned} F_1^{\pm'}(x_1) &= \pm \frac{a}{2} e^{\pm(\frac{a}{2})x_1} \cos(\alpha x_1) - e^{\pm(\frac{a}{2})x_1} \alpha \sin(\alpha x_1), \\ F_2^{\pm'}(x_1) &= \pm \frac{a}{2} e^{\pm(\frac{a}{2})x_1} \sin(\alpha x_1) + e^{\pm(\frac{a}{2})x_1} \alpha \cos(\alpha x_1), \end{aligned}$$

donde

$$\alpha = \frac{\sqrt{-(a^2 + 4b)}}{2}.$$

Ahora calculamos  $\varphi^-(0), \Psi^-(0)$  del sistema

$$\begin{cases} \varphi^-(0)F_1^-(0) + \Psi^-(0)F_2^- + 1/b = 0, \\ -F_1^{-'}\varphi^-(0) - F_2^{-'}\Psi^-(0) = 0. \end{cases}$$

Dando como resultado respecto de  $\varphi^-(0), \Psi^-(0)$  lo siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi^-(0) &= -\frac{1}{b}, \\ \Psi^-(0) &= -\frac{a}{2b\alpha}. \end{aligned}$$

De manera análoga, de las ecuaciones

$$\begin{cases} \varphi^+(0)F_1^+(0) + \Psi^+(0)F_2^+ - 1/b = 0, \\ F_1^{+'}\varphi^+(0) + F_2^{+'}\Psi^+(0) = 0. \end{cases}$$

obtenemos  $\varphi^+(0), \Psi^+(0)$ :

$$\begin{aligned} \varphi^+(0) &= \frac{1}{b}, \\ \Psi^+(0) &= -\frac{a}{2b\alpha}. \end{aligned}$$

Ahora hallamos las funciones  $\varphi^-(x_1^2)$  y  $\Psi^-(x_1^2)$ . Encontramos en principio  $\Delta^-(x_1), \Delta_1^-(x_1), \Delta_2^-(x_1)$

$$\begin{aligned}\Delta^-(x_1) &= \alpha e^{-ax_1} \neq 0, \\ \Delta_1^-(x_1) &= \frac{1}{b} (e^{-(\frac{a}{2})x_1} (e^{(\frac{a}{2})x_1} \alpha \cos(2x_1\alpha) + a \sin(x_1\alpha) \\ &\quad - \cos(x_1\alpha)(2\alpha + ae^{(\frac{a}{2})x_1} \sin(x_1\alpha))), \\ \Delta_2^-(x_1) &= \frac{1}{2b} (e^{-(\frac{a}{2})x_1} (-2a \cos(x_1\alpha) + ae^{(\frac{a}{2})x_1} \cos(2x_1\alpha) \\ &\quad + 4\alpha(-1 + e^{(\frac{a}{2})x_1} \cos(x_1\alpha)) \sin(x_1\alpha)).\end{aligned}$$

De igual forma, se obtienen  $\varphi^-(x_1^2)$  y  $\Psi^-(x_1^2)$ :

$$\begin{aligned}\varphi^-(x_1^2) &= \frac{1}{b\alpha} (e^{(\frac{a}{2})x_1} (e^{(\frac{a}{2})x_1} \alpha \cos(2x_1\alpha) \\ &\quad + a \sin(x_1\alpha) - \cos(x_1\alpha)(2\alpha + ae^{(\frac{a}{2})x_1} \sin(x_1\alpha))), \\ \Psi^-(x_1^2) &= \frac{1}{2b\alpha} (e^{(\frac{a}{2})x_1} (-2a \cos(x_1\alpha) + ae^{(\frac{a}{2})x_1} \cos(2x_1\alpha) \\ &\quad + 4\alpha(-1 + e^{(\frac{a}{2})x_1} \cos(x_1\alpha)) \sin(x_1\alpha)).\end{aligned}$$

Ahora procedemos a encontrar las funciones  $\varphi^+(-x_1^2)$  y  $\Psi^+(-x_1^2)$  para el caso cuando  $u = 1$ .

Hallamos como en los casos anteriores  $\Delta^+(x_1), \Delta_1^+(x_1), \Delta_2^+(x_1)$ :

$$\begin{aligned}\Delta^+(x_1) &= \alpha e^{ax_1} \neq 0, \\ \Delta_1^+(x_1) &= \frac{1}{b} (2e^{(\frac{a}{2})x_1} \alpha \cos(x_1\alpha) - a \cos(2x_1\alpha) \\ &\quad + a(e^{(\frac{a}{2})x_1} - \cos(x_1\alpha)) \sin(x_1\alpha)), \\ \Delta_2^+(x_1) &= \frac{1}{2b} (-2ae^{(\frac{a}{2})x_1} \cos(x_1\alpha) + a \cos(2x_1\alpha) \\ &\quad + 4\alpha(e^{(\frac{a}{2})x_1} - \cos(x_1\alpha)) \sin(x_1\alpha)).\end{aligned}$$

De igual forma, se obtienen  $\varphi^+(-x_1^2)$  y  $\Psi^+(-x_1^2)$ :

$$\begin{aligned}\varphi^+(-x_1^2) &= \frac{1}{b\alpha} (e^{ax_1} (2e^{(\frac{a}{2})x_1} \alpha \cos(x_1\alpha) - \alpha \cos(2x_1\alpha) \\ &\quad + a(e^{(\frac{a}{2})x_1} - \cos(x_1\alpha)) \sin(x_1\alpha))), \\ \Psi^+(-x_1^2) &= \frac{1}{2b\alpha} (e^{ax_1} (-2ae^{(\frac{a}{2})x_1} \cos(x_1\alpha) + a \cos(2x_1\alpha) \\ &\quad + 4\alpha(e^{(\frac{a}{2})x_1} - \cos(x_1\alpha)) \sin(x_1\alpha)).\end{aligned}$$

El resultado final para el caso 1c es:

$$\Phi_1(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-(a/2)x_1} [-(1/\alpha)e^{-af(x_1, x_2)} \sin\{\alpha[2f(x_1, x_2) + x_1]\}] \\ + (2/\alpha)e^{-(a/2)f(x_1, x_2)} \sin\{\alpha[f(x_1, x_2) + x_1]\}, & x_2 + x_1|x_1|/2 \geq 0, \\ e^{(a/2)x_1} [(1/\alpha)e^{-ag(x_1, x_2)} \sin\{\alpha[2g(x_1, x_2) - x_1]\}] \\ - (2/\alpha)e^{-(a/2)g(x_1, x_2)} \sin\{\alpha[g(x_1, x_2) - x_1]\}, & x_2 + x_1|x_1|/2 \geq 0, \end{cases}$$

$$\Phi_2(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-(a/2)x_1} [e^{-af(x_1, x_2)} ((a/2b\alpha) \sin\{\alpha[2f(x_1, x_2) + x_1]\}) \\ + (1/b) \cos\{\alpha[2f(x_1, x_2) + x_1]\}] \\ - e^{-(a/2)f(x_1, x_2)} ((a/b\alpha) \sin\{\alpha[f(x_1, x_2) + x_1]\}) \\ + (2/b) \cos\{\alpha[f(x_1, x_2) + x_1]\}) + 1/b & x_2 + x_1|x_1|/2 \geq 0, \\ e^{-(a/2)x_1} [e^{-ag(x_1, x_2)} ((a/2b\alpha) \sin\{\alpha[2g(x_1, x_2) - x_1]\}) \\ + (1/b) \cos\{\alpha[2g(x_1, x_2) - x_1]\}] \\ + e^{-(a/2)g(x_1, x_2)} ((a/b\alpha) \sin\{\alpha[g(x_1, x_2) - x_1]\}) \\ + (2/b) \cos\{\alpha[g(x_1, x_2) - x_1]\}) - 1/b & x_2 + x_1|x_1|/2 \geq 0, \end{cases}$$

donde

$$f(x_1, x_2) := \sqrt{x_2 + (1/2)x_1^2}, \quad (4.45)$$

$$g(x_1, x_2) := \sqrt{-x_2 + (1/2)x_1^2}. \quad (4.46)$$

## 4.2. Caso 2, $b=0$

Finalmente, consideramos el caso 2:  $b = 0$ . La matriz del sistema conformado por las ecuaciones (4.3), (4.4) es singular.

Entonces la ecuación diferencial ordinaria asociada al sistema conformado por las ecuaciones (4.3), (4.4) cuando  $b = 0$  es el siguiente:

$$x_4'' - aux_4' - u = 0 \quad (4.47)$$

Los valores característicos son:

$$\lambda_1 = ua, \quad \lambda_2 = 0.$$

En este caso, para  $a = 0$  se obtiene el mapeo del conjunto 0-controlable de sistema canónico sobre si mismo. Entonces, en este caso el  $\tilde{S}_1$ -difeomorfismo es:

$$\Phi_1^\pm(x_1, x_2) = x_1, \quad \Phi_2^\pm(x_1, x_2) = x_2.$$

Ahora, asumimos que  $a \neq 0$ . Y que cero es una raíz de la ecuación característica, entonces la solución particular de la ecuación diferencial ordinaria (4.47) es :  $v(x_1) = qx_1$  donde  $q = -\frac{1}{a}$ . Para este caso, la solución particular es  $v(x_1) = -\frac{1}{a}x_1$  la nueva solución general, para la ecuación diferencial ordinaria (4.47) tiene la forma:

$$x_4 = p_1 F_1^\pm(x_1) + p_2 F_2^\pm(x_1) - \frac{1}{a}x_1.$$

Entonces,  $x_3$  queda de la siguiente manera:

$$x_3 = u \left( p_1 F_1^{\pm'}(x_1) + p_2 F_2^{\pm'}(x_1) - \frac{1}{a} \right).$$

Usando la notación de los casos anteriores donde  $x_3 = \Phi_1$ ,  $x_4 = \Phi_2$  obtenemos el sistema de soluciones para el caso 2:

$$u = -1$$

$$\Phi_1^-(x_1, x_2) = -\varphi^-(x_2 + (1/2)x_1^2)F_1^{-'}(x_1) - \Psi^-(x_2 + (1/2)x_1^2)F_2^{-'}(x_1) + 1/a,$$

$$\Phi_2^-(x_1, x_2) = \varphi^-(x_2 + (1/2)x_1^2)F_1^-(x_1) + \Psi^-(x_2 + (1/2)x_1^2)F_2^-(x_1) - (1/a)x_1,$$

$$u = 1$$

$$\Phi_1^+(x_1, x_2) = \varphi^+(x_2 - (1/2)x_1^2)F_1^{+'}(x_1) + \Psi^+(x_2 - (1/2)x_1^2)F_2^{+'}(x_1) - 1/a,$$

$$\Phi_2^+(x_1, x_2) = \varphi^+(x_2 - (1/2)x_1^2)F_1^+(x_1) + \Psi^+(x_2 - (1/2)x_1^2)F_2^+(x_1) - (1/a)x_1.$$

De igual manera, como en los casos anteriores obtenemos una expresión explícita para las funciones:

$$\begin{aligned} &\varphi^-(x_2 + (1/2)x_1^2), \quad \Psi^-(x_2 + (1/2)x_1^2), \\ &\varphi^+(x_2 - (1/2)x_1^2), \quad \Psi^+(x_2 - (1/2)x_1^2). \end{aligned}$$

Para encontrar las expresiones explícitas para las funciones  $\varphi^\pm(x_2 \pm (1/2)x_1^2)$ ,  $\Psi^\pm(x_2 \pm (1/2)x_1^2)$  usaremos la continuidad del  $\tilde{S}$ - Difeomorfismo en la curva. Para el caso negativo, tenemos

$$x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 = 0,$$

Para el caso positivo, tenemos

$$x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 = 0,$$

Ahora, obtenemos los respectivos sistemas para cada caso, tanto negativo como positivo.

Para el caso cuando  $u = -1$ , tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \varphi^-(x_1^2)F_1^-(x_1) + \Psi^-(x_1^2)F_2^-(x_1) - (1/a)x_1 \\ = \varphi^+(0)F_1^+(x_1) + \Psi^+(0)F_2^+(x_1) - (1/a)x_1, \\ -\varphi^-(x_1^2)F_1'^-(x_1) - \Psi^-(x_1^2)F_2'^-(x_1) + 1/a \\ = \varphi^+(0)F_1^{+'}(x_1) + \Psi^+(0)F_2^{+'}(x_1) - 1/a. \end{aligned}$$

Para el caso cuando  $u = 1$ , tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \varphi^+(-x_1^2)F_1^+(x_1) + \Psi^+(-x_1^2)F_2^+(x_1) - (1/a)x_1 \\ = \varphi^-(0)F_1^-(x_1) + \Psi^-(0)F_2^-(x_1) - (1/a)x_1, \\ \varphi^+(-x_1^2)F_1^{+'}(x_1) + \Psi^+(-x_1^2)F_2^{+'}(x_1) - 1/a \\ = -\varphi^-(0)F_1'^-(x_1) - \Psi^-(0)F_2'^-(x_1) + 1/a. \end{aligned}$$

Ya que existe una solución única del sistema, para encontrar  $\varphi^-(x_1^2)$ ,  $\Psi^-(x_1^2)$ ,  $\varphi^+(-x_1^2)$ ,  $\Psi^+(-x_1^2)$ , se utilizará nuevamente el método de Cramer. Para el caso cuando  $u = -1$  tenemos la solución que tiene la siguiente forma:

$$\varphi^-(x_1^2) = \frac{\Delta_1^-(x_1)}{\Delta^-(x_1)}, \quad \Psi^-(x_1^2) = \frac{\Delta_2^-(x_1)}{\Delta^-(x_1)}.$$

Donde,

$$\begin{aligned} \Delta^-(x_1) &= \begin{vmatrix} F_1^-(x_1) & F_2^-(x_1) \\ F_1'^-(x_1) & F_2'^-(x_1) \end{vmatrix} \neq 0, \\ \Delta_1^-(x_1) &= \begin{vmatrix} \varphi^+(0)F_1^+(x_1) + \Psi^+(0)F_2^+(x_1) & F_2^-(x_1) \\ -\varphi^+(0)F_1^{+'}(x_1) - \Psi^+(0)F_2^{+'}(x_1) + 2/a & F_2'^-(x_1) \end{vmatrix}, \\ \Delta_2^-(x_1) &= \begin{vmatrix} F_1^-(x_1) & \varphi^+(0)F_1^+(x_1) + \Psi^+(0)F_2^+(x_1) \\ F_1'^-(x_1) & -\varphi^+(0)F_1^{+'}(x_1) - \Psi^+(0)F_2^{+'}(x_1) + 2/a \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Para el caso cuando  $u = 1$  tenemos la solución de la siguiente forma:

$$\varphi^+(-x_1^2) = \frac{\Delta_1^+(x_1)}{\Delta^+(x_1)}, \quad \Psi^+(-x_1^2) = \frac{\Delta_2^+(x_1)}{\Delta^+(x_1)}.$$

Donde,

$$\Delta^+(x_1) = \begin{vmatrix} F_1^+(x_1) & F_2^+(x_1) \\ F_1^{+'}(x_1) & F_2^{+'}(x_1) \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\Delta_1^+(x_1) = \begin{vmatrix} \varphi^-(0)F_1^-(x_1) + \Psi^-(0)F_2^-(x_1) & F_2^+(x_1) \\ -\varphi^-(0)F_1^{-'}(x_1) - \Psi^-(0)F_2^{-'}(x_1) + 2/a & F_2^{+'}(x_1) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2^+(x_1) = \begin{vmatrix} F_1^+(x_1) & \varphi^-(0)F_1^-(x_1) + \Psi^-(0)F_2^-(x_1) \\ F_1^{+'}(x_1) & -\varphi^-(0)F_1^{-'}(x_1) - \Psi^-(0)F_2^{-'}(x_1) + 2/a \end{vmatrix}.$$

Por tanto, los sistemas fundamentales de soluciones de las ecuaciones homogéneas correspondiente a la ecuación (4.47), cuando  $u = -1, u = 1$  son:

$$F_1^\pm(x_1) = e^{\pm ax_1}, \quad F_2^\pm(x_1) = 1.$$

Donde los valores característicos son:

$$\lambda_1 = ua, \quad \lambda_2 = 0.$$

Si  $a \neq 0$  tenemos que:

$$F_1^\pm(x_1) = e^{\pm ax_1}, \quad F_2^\pm(x_1) = 1,$$

$$F_1^{\pm'}(x_1) = \pm ae^{\pm ax_1}, \quad F_2^{\pm'}(x_1) = 0.$$

Ahora procederemos a encontrar  $\varphi^-(0), \Psi^-(0)$  sustituyendo nuestros sistemas fundamentales en el sistema no homogéneo de nuestras ecuaciones algebraicas lineales. Para este caso nuestro sistema esta dado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \varphi^-(0)F_1^-(0) + \Psi^-(0)F_2^- = 0, \\ -\varphi^-(0)F_1^{-'}(0) - \Psi^-(0)F_2^{-'}(0) + 1/a = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior encontramos que:

$$\varphi^-(0) = -\frac{1}{a^2}, \quad \Psi^-(0) = \frac{1}{a^2}.$$

De igual manera para el caso cuando  $u = 1$  nuestro sistema no homogéneo de ecuaciones algebraicas lineales es:

$$\begin{cases} \varphi^+(0)F_1^+(0) + \Psi^+(0)F_2^+ = 0, \\ \varphi^+(0)F_1^{+'}(0) + \Psi^+(0)F_2^{+'}(0) - 1/a = 0. \end{cases}$$

Dando como resultado lo siguiente:

$$\varphi^+(0) = \frac{1}{a^2}, \quad \Psi^+(0) = -\frac{1}{a^2}.$$

Por tanto para el caso donde  $u = -1$  tenemos que el resultado para  $\Delta^-(x_1), \Delta_1^-(x_1), \Delta_2^-(x_1)$  es el siguiente:

$$\Delta^-(x_1) = ae^{-ax_1} \neq 0,$$

$$\Delta_1^-(x_1) = \frac{1}{a}(e^{ax_1} - 2),$$

$$\Delta_2^-(x_1) = \frac{1}{a}e^{-ax_1}.$$

Por tanto, las funciones  $\varphi^-(x_1^2), \Psi^-(x_1^2)$  tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\varphi^-(x_1^2) &= \frac{1}{a^2} e^{ax_1} (e^{ax_1} - 2), \\ \Psi^-(x_1^2) &= \frac{1}{a^2}.\end{aligned}$$

Para el caso cuando  $u = 1$ , tenemos que  $\Delta^+(x_1), \Delta_1^+(x_1), \Delta_2^+(x_1)$  están representadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Delta^+(x_1) &= -ae^{ax_1} \neq 0, \\ \Delta_1^+(x_1) &= \frac{1}{a} (e^{-ax_1} - 2), \\ \Delta_2^+(x_1) &= \frac{1}{a} e^{ax_1}.\end{aligned}$$

Por tanto, las funciones  $\varphi^+(x_1^2), \Psi^+(x_1^2)$  tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\varphi^+(-x_1^2) &= \frac{1}{a^2} (-e^{-2ax_1} + 2e^{-ax_1}), \\ \Psi^+(-x_1^2) &= -\frac{1}{a^2}.\end{aligned}$$

Finalmente el resultado final para el caso 2 tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\Phi_1(x_1, x_2) &= \begin{cases} (1/a)e^{-ax_1} [e^{-2af(x_1, x_2)} - 2e^{-af(x_1, x_2)}] + 1/a, \\ \quad x_2 + x_1|x_1|/2 \geq 0, \\ (1/a)e^{ax_1} [-e^{-2ag(x_1, x_2)} + 2e^{-ag(x_1, x_2)}] - 1/a, \\ \quad x_2 + x_1|x_1|/2 \leq 0, \end{cases} \\ \Phi_2(x_1, x_2) &= \begin{cases} (1/a^2)e^{-ax_1} [e^{-2af(x_1, x_2)} - 2e^{-af(x_1, x_2)}] + 1/a, \\ \quad +1/a^2 - (1/a)x_1, \\ \quad \quad x_2 + x_1|x_1|/2 \geq 0. \\ (1/a^2)e^{ax_1} [-e^{-2ag(x_1, x_2)} + 2e^{-ag(x_1, x_2)}] \\ \quad -1/a^2 - (1/a)x_1, \\ \quad \quad x_2 + x_1|x_1|/2 \leq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Donde

$$f(x_1, x_2) := \sqrt{x_2 + (1/2)x_1^2}, \quad (4.48)$$

$$g(x_1, x_2) := \sqrt{-x_2 + (1/2)x_1^2}. \quad (4.49)$$

## Capítulo 5

# Ejemplos del mapeo a diferentes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

En este capítulo consideramos algunos ejemplos del mapeo descrito en el capítulo 4. En principio, recordemos el siguiente teorema que permite transformar cualquier sistema lineal de control de la forma

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad |u| \leq 1. \quad (5.1)$$

al sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n + u, \\ \dot{y}_2 = y_1, \\ \dots\dots\dots \\ \dot{y}_n = y_{n-1}. \end{cases} \quad |u| \leq 1 \quad (5.2)$$

**Teorema 5.1. Transformación de sistemas lineales de control.** [7]  
*Consideramos un sistema de la forma:*

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

donde  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $a \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Asumimos que  $Q = (b, Ab, \dots, A^{n-1}b)$  tal que  $\text{rg } Q = m \leq n$ . Entonces existe una transformación

$$z = Fx$$

donde  $\det F \neq 0$  tal que el sistema (5.1) se transforma en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \sum_{i=1}^q \alpha_{1i} z_i, \\ \vdots \\ \dot{z}_q = \sum_{i=1}^q \alpha_{qi} z_i. \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_{q+1} = z_{q+2}, \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n \\ \dot{z}_n = \sum_{i=1}^n \gamma_i z_i + u. \end{cases} \quad (5.4)$$

donde  $q = n - m$ .

**Observación 5.1.** Los sistemas (5.3), (5.4) son la forma canónica de (5.1), donde (5.3) es la parte no controlable y (5.4) es la parte controlable.

La demostración del teorema 5.1 Se encuentra en [7] . En nuestro caso  $q = 0$ , es decir,  $m = n$  ya que el sistema es completamente controlable es decir, para este caso no se cuenta con la parte no controlable, entonces la matriz  $F$  de la transformación tiene la forma:

$$F = \begin{pmatrix} c^* \\ c^* A \\ \vdots \\ c^* A^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Donde  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y donde  $c$  es tal que  $(c, b) = 0, (c, Ab) = 0, \dots, (c, A^{n-1}b) = 1$ .

## 5.1. Ejemplo 1

Consideremos el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 3x_2 - 7u, \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 + x_2 - 5u. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Como se puede verificar este sistema no tiene la forma de sistema lineal (5.2).

Entonces realizaremos una transformación del sistema (5.5) al sistema (5.2)

Para dicho proceso utilizaremos el teorema 5.1.

Donde nuestro nuevo sistema toma la forma de:

$$\dot{z} = FAF^{-1}z + Fbu,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Entonces, realizando los cálculos correspondientes tenemos que:

$$c^* = \begin{pmatrix} \frac{5}{72} & -\frac{7}{72} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \frac{5}{72} & \frac{-7}{72} \\ \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

De donde

$$Fb = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad FAF^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, nuestro sistema transformado tiene la forma:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$

ó equivalentemente:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= 8z_1 + 2z_2 + u. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Con el cambio de variable

$$\begin{aligned} z_1 &= y_2, \\ z_2 &= y_1. \end{aligned} \tag{5.7}$$

el sistema (5.8) toma la forma,

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 2y_1 + 8y_2 + u, \\ \dot{y}_2 &= y_1. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Ya que se ha realizado la transformación de nuestro sistema estudiado (5.5) a la forma del sistema (5.2) ahora se procederá a la aplicación del mapeo estudiado en el capítulo 4.

Primeramente realizamos el cambio de variable propuesto en el capítulo 4 siguiente:

$$\begin{aligned} y_1 &= \Phi_1(x_1, x_2), \\ y_2 &= \Phi_2(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Donde

$$\Phi_{1,2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \Phi_{1,2}^+(x_1, x_2), & \text{si } u = 1, \\ \Phi_{1,2}^-(x_1, x_2), & \text{si } u = -1. \end{cases}$$

Encontramos las derivadas parciales de  $y_1, y_2$  ahora con sus nuevas variables

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = \dot{\Phi}_1 &= \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}\right) \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}\right) \dot{x}_2, \\ \dot{y}_2 = \dot{\Phi}_2 &= \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1}\right) \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}\right) \dot{x}_2. \end{aligned}$$

Y sustituimos en el sistema estudiado (5.8)

$$\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}\right)u + \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2}\right)x_1 = 2\Phi_1 + 8\Phi_2 + u, \quad (5.9)$$

$$\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1}\right)u + \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2}\right)x_1 = \Phi_1. \quad (5.10)$$

De acuerdo al el teorema (A.1) del apéndice A el sistema (5.9), (5.10) es equivalente a la ecuación

$$Z_{x_1}u + Z_{x_2}x_1 + Z_{x_3}(2\Phi_1 + 8\Phi_2 + u) + Z_{x_4}\Phi_1 = 0. \quad (5.11)$$

donde  $Z(x_1, x_2, x_3, x_4)$  es una función desconocida tal que

$$x_3 = \Phi_1 \quad x_4 = \Phi_2.$$

Como se planteó en el capítulo 4 se realiza la equivalencia del sistema (5.11) al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias siguiente:

$$\frac{dx_1}{u} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{dx_3}{2x_3 + 8x_4 + u} = \frac{dx_4}{x_3}.$$

El cuál también es equivalente al sistema normal siguiente:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1}{u}, \quad (5.12)$$

$$\frac{dx_3}{dx_1} = \frac{2x_3 + 8x_4 + u}{u}, \quad (5.13)$$

$$\frac{dx_4}{dx_1} = \frac{x_3}{u}. \quad (5.14)$$

Obtenemos la siguiente ecuación diferencial ordinaria,

$$x_4'' - 2x_4'u - 8x_4 - u = 0.$$

Donde la característica asociada es la siguiente,

$$\lambda^2 - 2\lambda u - 8 = 0. \quad (5.15)$$

Las raíces de esta ecuación son:

$$\lambda_1 = \pm 2, \quad \lambda_2 = \pm 4.$$

Por lo tanto, del capítulo 4 sabemos que la solución general para (5.15) cuando  $b \neq 0$  es de la forma siguiente:

$u = -1$  :

$$\Phi_1^-(x_1, x_2) = -\varphi^-(x_2 + (1/2)x_1^2)F_1^{-'}(x_1) - \Psi^-(x_2 + (1/2)x_1^2)F_2^{-'}(x_1),$$

$$\Phi_2^-(x_1, x_2) = \varphi^-(x_2 + (1/2)x_1^2)F_1^-(x_1) + \Psi^-(x_2 + (1/2)x_1^2)F_2^-(x_1) + 1/b,$$

$u = 1$  :

$$\Phi_1^+(x_1, x_2) = \varphi^+(x_2 - (1/2)x_1^2)F_1^{+'}(x_1) + \Psi^+(x_2 - (1/2)x_1^2)F_2^{+'}(x_1),$$

$$\Phi_2^+(x_1, x_2) = \varphi^+(x_2 - (1/2)x_1^2)F_1^+(x_1) + \Psi^+(x_2 - (1/2)x_1^2)F_2^+(x_1) - 1/b.$$

Donde

$$\begin{aligned} F_1^\pm(x_1) &= e^{\pm 2x_1}, & F_2^\pm(x_1) &= e^{\pm 4x_1}, \\ F_1^{\pm'}(x_1) &= \pm 2e^{\pm 2x_1}, & F_2^{\pm'}(x_1) &= \pm 4e^{\pm 4x_1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$F_1^\pm(0) = 1, \quad F_2^\pm(0) = 1, \quad (5.16)$$

$$F_1^{+'}(0) = 2, \quad F_2^{+'}(0) = 4, \quad F_1^{-'}(0) = -2, \quad F_2^{-'}(0) = -4. \quad (5.17)$$

Ahora sustituimos los valores (5.16) y (5.17) en las siguientes ecuaciones con el propósito de encontrar  $\varphi^-(0)$ ,  $\psi^-(0)$ ,  $\varphi^+(0)$ ,  $\psi^+(0)$

$$0 = \varphi^+(0)F_1^+(0) + \Psi^+(0)F_2^+(0) - 1/b,$$

$$0 = \varphi^+(0)F_1^{+'}(0) + \Psi^+(0)F_2^{+'}(0).$$

$$0 = \varphi^-(0)F_1^-(0) + \Psi^-(0)F_2^-(0) + 1/b,$$

$$0 = -\varphi^-(0)F_1^{-'}(0) - \Psi^-(0)F_2^{-'}(0).$$

Por lo tanto, los valores de  $\varphi^-(0)$ ,  $\psi^-(0)$ ,  $\varphi^+(0)$ ,  $\psi^+(0)$  son los siguientes:

$$\varphi^-(0) = -\frac{1}{12}, \quad \psi^-(0) = \frac{1}{24}.$$

$$\varphi^+(0) = \frac{1}{24}, \quad \psi^+(0) = -\frac{1}{12}.$$

Estos valores coinciden con la parte derecha de las siguientes igualdades

$$\varphi^-(0) = -\frac{\lambda_1}{b\sqrt{D}},$$

$$\Psi^-(0) = \frac{\lambda_2}{b\sqrt{D}},$$

$$\varphi^+(0) = -\frac{\lambda_2}{b\sqrt{D}},$$

$$\Psi^+(0) = \frac{\lambda_1}{b\sqrt{D}},$$

encontradas en el capítulo 4.

Entonces los valores de  $\varphi^-(x_1^2)$ ,  $\psi^-(x_1^2)$ ,  $\varphi^+(-x_1^2)$ ,  $\psi^+(-x_1^2)$  para este ejemplo son:

$$\varphi^-(x_1^2) = \frac{1}{6} \left[ \frac{1}{2} e^{2x_1} e^{-8x_1} \right] (e^{2x_1} - 2),$$

$$\psi^-(x_1^2) = \frac{1}{6} \left[ \frac{1}{4} e^{2x_1} e^{-2x_1} \right] (e^{8x_1} - 2),$$

$$\varphi^+(-x_1^2) = \frac{1}{12} [e^{-x_1} - 2e^{-2x_1}],$$

$$\psi^+(-x_1^2) = \frac{1}{24} [-e^{-8x_1} - 2e^{-4x_1}].$$

Por lo tanto, las trayectorias óptimas para este ejemplo se escriben de la siguiente manera:

$$\Phi_1(x_1, x_2) = \begin{cases} -(1/6)e^{-2x_1}[e^{4f(x_1, x_2)} - 2e^{-2f(x_1, x_2)}] \\ +(1/6)e^{4x_1}[e^{8f(x_1, x_2)} - 2e^{4f(x_1, x_2)}], \\ \quad x_2 + x_1|x_1|/2 \geq 0, \\ +(1/6)e^{-2x_1}[e^{4g(x_1, x_2)} - 2e^{2g(x_1, x_2)}] \\ +(1/6)e^{4x_1}[-e^{-8g(x_1, x_2)} + 2e^{4g(x_1, x_2)}], \\ \quad x_2 + x_1|x_1|/2 \leq 0, \end{cases}$$

$\Phi_2(x_1, x_2)$

$$= \begin{cases} -(1/12)e^{-2x_1}[-e^{4f(x_1, x_2)} + 2e^{-2f(x_1, x_2)}] \\ -(1/12)e^{4x_1}[e^{8f(x_1, x_2)} - 2e^{4f(x_1, x_2)}] + 1/8, \\ \quad x_2 + x_1|x_1|/2 \geq 0, \\ -(1/12)e^{-2x_1}[-e^{4g(x_1, x_2)} - 2e^{2g(x_1, x_2)}] \\ -(1/12)e^{4x_1}[-e^{-8g(x_1, x_2)} + 2e^{-4g(x_1, x_2)}] - 1/8, \\ \quad x_2 + x_1|x_1|/2 \leq 0. \end{cases}$$

donde,

$$f(x_1, x_2) := \sqrt{x_2 + (1/2)x_1^2}, \quad (5.18)$$

$$g(x_1, x_2) := \sqrt{-x_2 + (1/2)x_1^2}. \quad (5.19)$$

## 5.2. Ejemplo 2

Procederemos ahora a aplicar el mapeo encontrado en el capítulo 4 a un ejemplo donde los valores propios de sistema dinámico son valores reales iguales. Sea

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 4y_1 - 4y_2 + u, & |u| &\leq 1, \\ \dot{y}_2 &= y_1. \end{aligned}$$

Siguiendo el procedimiento del ejemplo anterior, primeramente realizamos el cambio de variable de la forma:

$$\begin{aligned} y_1 &= \Phi_1(x_1, x_2), \\ y_2 &= \Phi_2(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Donde

$$\Phi_{1,2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \Phi_{1,2}^+(x_1, x_2), & \text{si } u = 1, \\ \Phi_{1,2}^-(x_1, x_2), & \text{si } u = -1. \end{cases}$$

De (5.2) tenemos que:

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}\right)u + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}\right)x_1 = 4\Phi_1 - 4\Phi_2 + u, \tag{5.21}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1}\right)u + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}\right)x_1 = \Phi_1. \tag{5.22}$$

De acuerdo al el teorema (A.1) del apéndice A el sistema (5.21), (5.22) es equivalente a la ecuación

$$Z_{x_1}u + Z_{x_2}x_1 + Z_{x_3}(4\Phi_1 - 4\Phi_2 + u) + Z_{x_4}\Phi_1 = 0. \tag{5.23}$$

donde  $Z(x_1, x_2, x_3, x_4)$  es una función desconocida tal que

$$x_3 = \Phi_1 \quad x_4 = \Phi_2.$$

Y a su vez, el sistema (5.23) es equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias siguiente:

$$\frac{dx_1}{u} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{dx_3}{4x_3 - 4x_4 + u} = \frac{dx_4}{x_3}.$$

Este sistema es equivalente al sistema normal siguiente:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1}{u}, \tag{5.24}$$

$$\frac{dx_3}{dx_1} = \frac{4x_3 - 4x_4 + u}{u}, \tag{5.25}$$

$$\frac{dx_4}{dx_1} = \frac{x_3}{u}. \tag{5.26}$$

La ecuación diferencial ordinaria asociada a nuestro sistema estudiado quedaría de la siguiente manera:

$$x_4'' - 4x_4'u + 4x_4 - u = 0,$$

donde la ecuación característica asociada es la siguiente:

$$\lambda^2 - 4\lambda u + 4 = 0.$$

Entonces, los valores propios son:

$$\lambda_1 = \pm 2, \quad \lambda_2 = \pm 2.$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} F_1^\pm(x_1) &= e^{\pm 2x_1}, & F_2^\pm(x_1) &= x_1 e^{\pm 2x_1}, \\ F_1^{\pm'}(x_1) &= \pm 2e^{\pm 2x_1}, & F_2^{\pm'}(x_1) &= \pm 2x_1 e^{\pm 2x_1} + e^{\pm 2x_1}. \end{aligned}$$

De donde

$$F_1^\pm(0) = 1, \quad F_1^{-'}(0) = -2, \quad F_1^{+'}(0) = 2, \quad F_2^\pm(0) = 0, \quad F_2^{\pm'}(0) = 1.$$

De manera análoga, hallamos los valores de  $\varphi^-(0)$ ,  $\psi^-(0)$ ,  $\varphi^+(0)$ ,  $\psi^+(0)$ , los cuáles son los siguientes:

$$\begin{aligned} \varphi^-(0) &= \frac{1}{4}, & \psi^-(0) &= \frac{1}{2}, \\ \varphi^+(0) &= -\frac{1}{4}, & \psi^+(0) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Los valores de  $\varphi^-(x_1^2)$ ,  $\psi^-(x_1^2)$ ,  $\varphi^+(-x_1^2)$ ,  $\psi^+(-x_1^2)$  para este segundo ejemplo son:

$$\begin{aligned} \varphi^-(x_1^2) &= e^{4x_1} \left[ -\frac{1}{4} + x_1 \right] + e^{2x_1} \left[ \frac{1}{2} - x_1 \right], \\ \varphi^+(-x_1^2) &= e^{-4x_1} \left[ \frac{1}{4} + x_1 \right] + e^{-2x_1} \left[ -\frac{1}{2} - x_1 \right], \\ \psi^-(x_1^2) &= -\frac{1}{2} e^{4x_1} + e^{2x_1}, \\ \psi^+(-x_1^2) &= -\frac{1}{2} e^{-4x_1} + e^{-2x_1}. \end{aligned}$$

Finalmente, hallamos las trayectorias óptimas correspondientes al ejemplo estudiado.

$$\Phi_1(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{4[-x_1/2-f(x_1, x_2)]}[-2f(x_1, x_2) - x_1] \\ + e^{2[-x_1-f(x_1, x_2)]}[2f(x_1, x_2) + 2x_1], & x_2 + x_1|x_1|/2 \geq 0, \\ e^{4[x_1/2-g(x_1, x_2)]}[2g(x_1, x_2) - x_1] \\ + e^{(2)[x_1-g(x_1, x_2)]}[-2g(x_1, x_2) + 2x_1], & x_2 + x_1|x_1|/2 \leq 0, \end{cases}$$

$$\Phi_2(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{4[-x_1/2-f(x_1, x_2)]}[-f(x_1, x_2) - 1/4 - (1/2)x_1] \\ + e^2[-x_1 - f(x_1, x_2)][f(x_1, x_2) + 1/2 + x_1] - 1/4, \\ x_2 + x_1|x_1|/2 \geq 0, \\ e^{4[x_1/2-g(x_1, x_2)]}[g(x_1, x_2) + 1/4 - (1/2)x_1] \\ + e^2[x_1 - g(x_1, x_2)][-g(x_1, x_2) - 1/2 + x_1] + 1/4, \\ x_2 + x_1|x_1|/2 \leq 0. \end{cases}$$

donde,

$$f(x_1, x_2) := \sqrt{x_2 + (1/2)x_1^2}, \quad (5.27)$$

$$g(x_1, x_2) := \sqrt{-x_2 + (1/2)x_1^2}. \quad (5.28)$$

### 5.3. Ejemplo 3

Ahora consideramos un ejemplo donde los valores propios del sistema dinámico son números complejos. Sea

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -2y_1 - 2y_2 + u, & |u| &\leq 1 \\ \dot{y}_2 &= y_1. \end{aligned}$$

Se realiza el cambio de variable de la forma de (5.20) siguiendo el mismo procedimiento se llega al sistema de la forma:

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}\right)u + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}\right)x_1 = -2\Phi_1 - 2\Phi_2 + u, \quad (5.29)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1}\right)u + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}\right)x_1 = \Phi_1. \quad (5.30)$$

De acuerdo al el teorema (A.1) del apéndice A el sistema (5.29), (5.30) es equivalente a la ecuación

$$Z_{x_1}u + Z_{x_2}x_1 + Z_{x_3}(-2\Phi_1 - 2\Phi_2 + u) + Z_{x_4}\Phi_1 = 0. \quad (5.31)$$

donde  $Z(x_1, x_2, x_3, x_4)$  es una función desconocida tal que

$$x_3 = \Phi_1 \quad x_4 = \Phi_2.$$

Y a su vez, el sistema (5.31) es equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias siguiente:

$$\frac{dx_1}{u} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{dx_3}{-2x_3 - 2x_4 + u} = \frac{dx_4}{x_3}.$$

El cuál también es equivalente al sistema normal siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{x_1}{u}, \\ \frac{dx_3}{dx_1} &= \frac{-2x_3 - 2x_4 + u}{u}, \\ \frac{dx_4}{dx_1} &= \frac{x_3}{u}. \end{aligned}$$

La ecuación diferencial ordinaria asociada al sistema estudiado tiene la forma,

$$x_4'' + 2x_4'u + 2x_4 - u = 0,$$

donde la ecuación característica asociada es la siguiente:

$$\lambda^2 + 2\lambda u + 2 = 0.$$

Entonces, los valores propios son:

$$\begin{aligned} \lambda_1^+ &= 1 - i, & \lambda_2^+ &= -1 - i, \\ \lambda_1^- &= 1 + i, & \lambda_2^- &= 1 - i. \end{aligned}$$

por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} F_1^+(x_1) &= e^{-x_1} \cos(\alpha x_1), & F_2^+(x_1) &= e^{-x_1} \sin(\alpha x_1) \\ F_1^-(x_1) &= e^{x_1} \cos(\alpha x_1), & F_2^-(x_1) &= e^{x_1} \sin(\alpha x_1) \\ F_1^{+'}(x_1) &= -e^{-x_1} \cos(\alpha x_1) - e^{-x_1} \alpha \sin(\alpha x_1), \\ F_2^{+'}(x_1) &= -e^{-x_1} \sin(\alpha x_1) + e^{-x_1} \alpha \cos(\alpha x_1), \\ F_1^{-'}(x_1) &= e^{x_1} \cos(\alpha x_1) - e^{x_1} \alpha \sin(\alpha x_1), \\ F_2^{-'}(x_1) &= e^{x_1} \sin(\alpha x_1) + e^{x_1} \alpha \cos(\alpha x_1). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} F_1^+(0) &= 1, & F_2^+(0) &= 0, \\ F_1^-(0) &= 1, & F_2^-(0) &= 0, \\ F_1^{+'}(0) &= -1, & F_1^{-'}(0) &= 1, \\ F_2^{+'}(0) &= 1, & F_2^{-'}(0) &= 1. \end{aligned}$$

De manera análoga, se encuentran los valores de  $\varphi^-(0)$ ,  $\psi^-(0)$ ,  $\varphi^+(0)$ ,  $\psi^+(0)$  los cuáles son los siguientes:

$$\varphi^-(0) = \frac{1}{2}, \quad \psi^-(0) = -\frac{1}{2}.$$

$$\varphi^+(0) = -\frac{1}{2}, \quad \psi^+(0) = -\frac{1}{2}.$$

Los valores de  $\varphi^-(x_1^2)$ ,  $\psi^-(x_1^2)$ ,  $\varphi^+(-x_1^2)$ ,  $\psi^+(-x_1^2)$  para este ejemplo son:

$$\begin{aligned} \varphi^-(x_1^2) &= \frac{1}{2\alpha} (e^{x_1} (e^{x_1} \alpha \cos(2\alpha x_1) + 2 \sin(\alpha x_1) - 2\alpha \cos(\alpha x_1) + 2e^{x_1} \sin(\alpha x_1))) \\ \psi^-(x_1^2) &= \frac{1}{4\alpha} (e^{2x_1} (-4 \cos(\alpha x_1) + 2e^{x_1} \cos(2\alpha x_1) \\ &\quad + 4\alpha (-1 + e^{x_1} \cos(\alpha x_1)) \sin(\alpha x_1))) \\ \varphi^+(-x_1^2) &= \frac{1}{2\alpha} (e^{2x_1} (2e^{x_1} \alpha \cos(\alpha x_1) \\ &\quad - \alpha \cos(2\alpha x_1) + 2(e^{x_1} - \cos(\alpha x_1)) \sin(\alpha x_1))) \\ \psi^+(-x_1^2) &= \frac{1}{4\alpha} (e^{2x_1} (-4e^{x_1} \cos(\alpha x_1) \\ &\quad + \cos(2\alpha x_1) + 4\alpha (e^{x_1} - \cos(\alpha x_1)) \sin(\alpha x_1))) \end{aligned}$$

Por último encontramos las trayectorias óptimas correspondientes al ejemplo estudiado:

$$\Phi_1(x_1, x_2)$$

$$= \begin{cases} \begin{cases} e^{x_1} [-e^{2f(x_1, x_2)} \sin\{[2f(x_1, x_2) + x_1]\}] \\ + 2e^{f(x_1, x_2)} \sin\{[f(x_1, x_2) + x_1]\}, & x_2 + x_1|x_1|/2 \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} e^{-x_1} [e^{2g(x_1, x_2)} \sin\{[2g(x_1, x_2) - x_1]\}] \\ - (2e^{g(x_1, x_2)} \sin\{[g(x_1, x_2) - x_1]\}), & x_2 + x_1|x_1|/2 \geq 0, \end{cases} \end{cases}$$

$$\Phi_2(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{x_1} [e^{2f(x_1, x_2)} ((1/2) \sin\{[2f(x_1, x_2) + x_1]\}) \\ - (1/2) \cos\{[2f(x_1, x_2) + x_1]\}) \\ - e^{f(x_1, x_2)} ((\sin\{[f(x_1, x_2) + x_1]\}) \\ - \cos\{[f(x_1, x_2) + x_1]\}) - 1/2 & x_2 + x_1|x_1|/2 \geq 0, \\ e^{x_1} [e^{2g(x_1, x_2)} ((1/2) \sin\{[2g(x_1, x_2) - x_1]\}) \\ - (1/2) \cos\{[2g(x_1, x_2) - x_1]\}) \\ + e^{g(x_1, x_2)} ((\sin\{[g(x_1, x_2) - x_1]\}) \\ - \cos\{[g(x_1, x_2) - x_1]\}) + 1/2 & x_2 + x_1|x_1|/2 \geq 0. \end{cases}$$

donde,

$$f(x_1, x_2) := \sqrt{x_2 + (1/2)x_1^2}, \quad (5.32)$$

$$g(x_1, x_2) := \sqrt{-x_2 + (1/2)x_1^2}. \quad (5.33)$$

## 5.4. Ejemplo 4

Por último consideramos el caso cuando  $b = 0$ , es decir, la matriz del sistema dinámico estudiado es singular.

Estudiamos el sistema de control siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 2y_1 + u, & |u| &\leq 1, \\ \dot{y}_2 &= y_1. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en los ejemplos anteriores se llega a la equivalencia del sistema (5.34) al sistema de la forma:

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}\right)u + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2}\right)x_1 = -2\Phi_1 + u, \quad (5.35)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1}\right)u + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}\right)x_1 = \Phi_1. \quad (5.36)$$

De acuerdo al el teorema (A.1) del apéndice A el sistema (5.35), (5.36) es equivalente a la ecuación

$$Z_{x_1}u + Z_{x_2}x_1 + Z_{x_3}(-2\Phi_1 + u) + Z_{x_4}\Phi_1 = 0 \quad (5.37)$$

donde  $Z(x_1, x_2, x_3, x_4)$  es una función desconocida tal que

$$x_3 = \Phi_1 \quad x_4 = \Phi_2.$$

Y su vez, el sistema (5.37) es equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias siguiente:

$$\frac{dx_1}{u} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{dx_3}{2x_3 + u} = \frac{dx_4}{x_3} \quad (5.38)$$

Las igualdades (5.38) son equivalentes al siguiente sistema normal:

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{x_1}{u}, \\ \frac{dx_3}{dx_1} &= \frac{2x_3 + u}{u}, \\ \frac{dx_4}{dx_1} &= \frac{x_3}{u}. \end{aligned}$$

La ecuación diferencial ordinaria asociada a nuestro sistema estudiado quedaría de la siguiente manera:

$$x_4'' - 2x_4' u - u = 0, \quad (5.39)$$

donde la ecuación característica asociada es la siguiente:

$$\lambda^2 - 2\lambda u = 0.$$

Entonces, los valores propios son:

$$\lambda_1^\pm = 0, \quad \lambda_2^\pm = \pm 2.$$

Entonces la solución particular de la ecuación diferencial (5.39) de está dada en la forma  $v(x_1) = -\frac{1}{2}x_1$ .

Entonces,

$$\begin{aligned} x_4 &= p_1 F_1^\pm(x_1) + p_2 F_2^\pm(x_1) - \frac{1}{2}x_1, \\ x_3 &= u \left( p_1 F_1^{\pm'}(x_1) + p_2 F_2^{\pm'}(x_1) - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Del capítulo 4 tenemos que la solución general para este caso tiene la forma siguiente:

$$u = -1$$

$$\Phi_1^-(x_1, x_2) = -\varphi^-(x_2 + (1/2)x_1^2)F_1^{-'}(x_1) - \Psi^-(x_2 + (1/2)x_1^2)F_2^{-'}(x_1) + 1/a,$$

$$\Phi_2^-(x_1, x_2) = \varphi^-(x_2 + (1/2)x_1^2)F_1^-(x_1) + \Psi^-(x_2 + (1/2)x_1^2)F_2^-(x_1) - (1/a)x_1,$$

$$u = 1$$

$$\Phi_1^+(x_1, x_2) = \varphi^+(x_2 - (1/2)x_1^2)F_1^{+'}(x_1) + \Psi^+(x_2 - (1/2)x_1^2)F_2^{+'}(x_1) - 1/a,$$

$$\Phi_2^+(x_1, x_2) = \varphi^+(x_2 - (1/2)x_1^2)F_1^+(x_1) + \Psi^+(x_2 - (1/2)x_1^2)F_2^+(x_1) - (1/a)x_1.$$

Por lo tanto, tenemos:

$$F_1^\pm(x_1) = e^{\pm 2x_1}, \quad F_2^\pm(x_1) = 1,$$

$$F_1^{\pm'}(x_1) = \pm 2e^{\pm 2x_1} \quad F_2^{\pm'}(x_1) = 0.$$

Así,

$$F_1^\pm(0) = 1, \quad F_2^\pm(0) = 1,$$

$$F_1^{\pm'}(0) = \pm 2, \quad F_2^{\pm'}(0) = 0.$$

De igual manera, se encuentran los valores de  $\varphi^-(0)$ ,  $\psi^-(0)$ ,  $\varphi^+(0)$ ,  $\psi^+(0)$  los cuáles son los siguientes:

$$\varphi^-(0) = -\frac{1}{4}, \quad \psi^-(0) = \frac{1}{4},$$

$$\varphi^+(0) = \frac{1}{4}, \quad \psi^+(0) = -\frac{1}{4}.$$

Entonces los valores de  $\varphi^-(x_1^2)$ ,  $\psi^-(x_1^2)$ ,  $\varphi^+(-x_1^2)$ ,  $\psi^+(-x_1^2)$  para este ejemplo son:

$$\varphi^-(x_1^2) = \frac{1}{4}e^{2x_1} (e^{2x_1} - 2),$$

$$\varphi^+(-x_1^2) = \frac{1}{4}(-e^{4x_1} + 2e^{-2x_1}),$$

$$\psi^-(x_1^2) = \frac{1}{4},$$

$$\psi^+(-x_1^2) = -\frac{1}{4}.$$

Finalmente, encontramos las trayectorias óptimas

$$\Phi_1(x_1, x_2) = \begin{cases} (1/2)e^{-2x_1}[e^{-4f(x_1, x_2)} - 2e^{-2f(x_1, x_2)}] + 1/2, \\ x_2 + x_1|x_1|/2 \geq 0, \\ (1/2)e^{2x_1}[-e^{-4g(x_1, x_2)} + 2e^{-2g(x_1, x_2)}] - 1/2, \\ x_2 + x_1|x_1|/2 \leq 0, \end{cases}$$

$$\Phi_2(x_1, x_2) = \begin{cases} (1/4)e^{-2x_1}[e^{-4f(x_1, x_2)} - 2e^{-2f(x_1, x_2)}] + 1/2, \\ +1/4 - (1/2)x_1, \\ x_2 + x_1|x_1|/2 \geq 0. \\ (1/4)e^{2x_1}[-e^{-4g(x_1, x_2)} + 2e^{-2g(x_1, x_2)}] \\ -1/4 - (1/2)x_1, \\ x_2 + x_1|x_1|/2 \leq 0. \end{cases}$$

donde,

$$f(x_1, x_2) := \sqrt{x_2 + (1/2)x_1^2}, \quad (5.40)$$

$$g(x_1, x_2) := \sqrt{-x_2 + (1/2)x_1^2}. \quad (5.41)$$



Para asegurar la posibilidad de calcular las funciones  $u_1, u_2, \dots, u_m$  se asume que el Jacobiano

$$\frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial\phi_m}{\partial u_1} \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial\phi_m}{\partial u_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial u_m} & \cdots & \frac{\partial\phi_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \quad (\text{A.3})$$

es diferente de cero por doquier. Al derivar las ecuaciones (A.2) obtenemos

$$\frac{\partial\phi_\mu}{\partial x_\kappa} + \sum_{\lambda=1}^n \frac{\partial\phi_\mu}{\partial u_\lambda} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\kappa} = 0 \quad \begin{array}{l} \mu = 1, 2, \dots, m \\ \kappa = 1, 2, \dots, n. \end{array}$$

Multiplicamos por  $a_\kappa$  y sumando sobre  $\kappa$  tenemos:

$$\sum_{\kappa=1}^n a_\kappa \frac{\partial\phi_\mu}{\partial x_\kappa} + \sum_{\lambda=1}^m \frac{\partial\phi_\mu}{\partial u_\lambda} \left( \sum_{\kappa=1}^n a_\kappa \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\kappa} \right) = 0,$$

por lo tanto, debido a (A.1)

$$\sum_{\kappa=1}^n a_\kappa \frac{\partial\phi_\mu}{\partial x_\kappa} + \sum_{\lambda=1}^m b_\lambda \frac{\partial\phi_\mu}{\partial u_\lambda} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Vemos que las funciones  $\phi = \phi_\mu$  del sistema (A.2) satisfacen la ecuación (A.4) idénticamente respecto de  $x_1, x_2, \dots, x_n, c_1, c_2, \dots, c_m$ , es decir, todas estas variables también satisfacen la misma ecuación diferencial lineal

$$\sum_{\kappa=1}^n a_\kappa \frac{\partial\phi}{\partial x_\kappa} + \sum_{\lambda=1}^m b_\lambda \frac{\partial\phi}{\partial u_\lambda} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Idénticamente respecto de  $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u(m)$ . Si introducimos la notación

$$b_\lambda = a_{n+\lambda}, \quad u_\lambda := x_{n+\lambda}, \quad r := m + n,$$

entonces (A.5) toma finalmente la forma de la ecuación diferencial

$$\sum_{\kappa=1}^r a_\kappa \frac{\partial\phi}{\partial x_\kappa} = 0, \quad (\text{A.6})$$

para una función  $\phi(x_1, x_2, \dots, x_r)$ . Así se ha demostrado la primera parte del teorema recíprocamente sea que se dan  $m$  soluciones  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)$  de la ecuación diferencial (A.6) cuyo Jacobiano es:

$$\frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)}{\partial(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_r)}$$

que no se anula en ninguna parte.

Mostraremos que las funciones  $u_1, u_2, \dots, u_m$  calculadas a partir de las ecuaciones

$$\phi_\mu(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) = C_\mu,$$

satisfacen el sistema (A.1).

Derivando, tenemos

$$\frac{\partial \phi_\mu}{\partial x_\kappa} + \sum_{\lambda=1}^m \frac{\partial \phi_\mu}{\partial u_\lambda} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\kappa} = 0$$

Nuevamente multiplicamos por  $a_\kappa$  y sumamos respecto del índice  $\kappa$ , usando (A.4), tenemos:

$$\sum_{\lambda=1}^m b_\lambda \frac{\partial \phi_\mu}{\partial u_\lambda} = \sum_{\kappa=1}^n \sum_{\lambda=1}^m a_\kappa \frac{\partial \phi_\mu}{\partial u_\lambda} \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\kappa},$$

ó

$$\sum_{\lambda=1}^m \frac{\partial \phi_\mu}{\partial u_\lambda} \left( b_\lambda - \sum_{\kappa=1}^n a_\kappa \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\kappa} \right) = 0.$$

Ya que el determinante de las cantidades  $\frac{\partial \phi_\mu}{\partial u_\lambda}$  no se anula, entonces tenemos

$$b_\lambda - \sum_{\kappa=1}^n a_\kappa \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_\kappa} = 0,$$

es decir, el sistema (A.1) se satisface. De acuerdo al [15, párrafo 2, cap. 2] la integración de la ecuación diferencial lineal (A.6) es equivalente a la integración del sistema característico de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_\kappa}{ds} = a_\kappa, \quad (\kappa = 1, 2, \dots, r).$$

Por lo tanto, vemos que el sistema (A.1) de ecuaciones diferenciales parciales con la misma parte principal es equivalente a un sistema de  $m+n$  ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir; al sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx_\kappa}{ds} &= a_\kappa, & (\kappa = 1, 2, \dots, n), \\ \frac{du_\lambda}{ds} &= b_\lambda, & (\lambda = 1, 2, \dots, m). \end{aligned}$$

Utilizando estos resultados para desarrollar nuevamente la teoría de las características de las ecuaciones diferenciales generales de primer orden. Consideramos la ecuación diferencial

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}) = 0, \quad (\text{A.7})$$

y lo reemplazamos para el siguiente sistema de  $n + 1$  ecuaciones diferenciales cuasi-lineales para  $u, p_1, \dots, p_n$  con la misma parte principal, obtenida a partir de la función  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, p_1, p_2, \dots, p_n)$ :

$$\sum_{v=1}^n F_{p_v} \frac{\partial p_i}{\partial x_v} + F_u p_i + F_{x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (\text{A.8})$$

$$\sum_{v=1}^n F_{p_v} \frac{\partial u}{\partial x_v} - \sum_{v=1}^n F_{p_v} p_v = 0. \quad (\text{A.9})$$

Las ecuaciones (A.8) se obtienen formalmente de (A.7) al diferenciar con respecto a  $x_i$  y luego reemplazar  $u_x$  por  $p_i$  y  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_v}$  por  $\frac{\partial p_i}{\partial x_v}$ . Por esta sustitución la última ecuación se torna trivial.

Partiendo del sistema de ecuaciones diferenciales cuasi lineales con la misma parte principal, ahora se puede desarrollar la teoría de la ecuación diferencial (A.7) para las  $n + 1$  funciones desconocidas  $u$  y  $p_i$ . En primer lugar, vemos de las observaciones anteriores que la integración de (A.8) es equivalente a la del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\frac{dx_i}{ds} = F_{p_i}, \quad \frac{dp_i}{ds} = -F_{x_i} - p_i F_u, \quad \frac{du}{ds} = \sum_{v=1}^n p_v F_{p_v}, \quad (\text{A.10})$$

es decir, es equivalente a la integración de las ecuaciones diferenciales características derivadas para  $F$  de manera diferente que en el [15, párrafo 7, cap 2]. Demostraremos además que un problema de Cauchy especial para el sistema (A.8)-(A.9) es equivalente a un problema de Cauchy para la ecuación diferencial (A.7). Esto proporciona un nuevo fundamento para la solución de un problema de Cauchy, el cuál fue resuelto en el [15, párrafo 7, cap 2], mediante las ecuaciones diferenciales características (A.10).

Para la demostración notamos que para cada solución de la ecuación diferencial (A.7), las funciones  $u$  y  $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$  son una solución de (A.8). Recíprocamente, consideramos un sistema de soluciones  $u, p_i$  del sistema de ecuaciones diferenciales (A.8) que satisfacen las siguientes condiciones iniciales: Sea  $C$  una variedad inicial de dimensión  $(n - 1)$  en el espacio  $(x, u)$ , que no es característico en ninguna parte. Sea que en  $C$  se dan tales condiciones iniciales  $p_i$ , que  $F = 0$  por doquier en  $C$ , además tal que en  $C$

$$du - \sum_{v=1}^n p_v dx_v = 0.$$

Además, de que aquellas soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales (A.10) que pasan por cada punto de  $C$  los valores iniciales correspondientes de  $p_i$  forman una superficie  $n$ -dimensional  $S$  dada por:

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

y que contiene  $C$ . Esta función  $u$  junto con las funciones correspondientes  $p_i$  es precisamente la solución del problema del valor inicial correspondiente para (A.8).

Ahora debemos mostrar que también esta solución resuelve el problema de valor inicial para  $F = 0$ . Para ello solo tenemos que demostrar que las relaciones

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, p_1, p_2, \dots, p_n) &= R(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ p_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - u_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= P_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{aligned}$$

se satisfacen por doquier en la superficie  $S$ . Tenemos en cuenta que las relaciones

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_\kappa} - \frac{\partial P_\kappa}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_\kappa} - \frac{\partial p_\kappa}{\partial x_i}. \quad (\text{A.11})$$

satisfacen para las funciones  $P_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Además, tenemos

$$R_{x_i} = \sum_{v=1}^n F_{p_v} \frac{\partial p_v}{\partial x_i} + F_{x_i} + F_u u_{x_i},$$

y por lo tanto, en base a las primeras  $n$  ecuaciones diferenciales en (A.8) y la ecuación (A.11).

$$R_{x_i} = \sum_{v=1}^n F_{p_v} \left( \frac{\partial P_v}{\partial x_i} - \frac{\partial P_i}{\partial x_v} \right) - F_v P_i. \quad (\text{A.12})$$

Por otro lado, la última ecuación diferencial en (A.8) se puede escribir en la forma

$$0 = \sum_{v=1}^n F_{p_v} P_v. \quad (\text{A.13})$$

Así obtenemos

$$\sum_{i=1}^n R_{x_i} F_{p_i} = 0,$$

es decir, usando la notación

$$F_{p_i} = a_i, \quad (\text{A.14})$$

donde las funciones  $a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  deben ser consideradas como coeficientes conocidas.

$$\sum_{i=1}^n a_i R_{x_i} = 0. \quad (\text{A.15})$$

En la superficie integral  $S$ , consideramos ahora la curva definida por (A.10) que genera esta superficie. La ecuación (A.15) afirma que en cada una de estas curvas,

$$\frac{dR}{ds} = 0,$$

es decir; ya que  $R$  se anula en el punto inicial en  $C$ , tenemos que

$$R \equiv 0.$$

en  $S$ . Además, de la ecuación (A.12) tenemos

$$\sum_{v=1}^n a_v \frac{\partial P_i}{\partial x_v} - \sum_{v=1}^n a_v \frac{\partial P_v}{\partial x_i} + P_i F_u = 0, \quad (\text{A.16})$$

mientras que, después de la diferenciación con respecto de  $x_i$ , la ecuación (A.13)

$$\sum_{v=1}^n a_v P_v = 0,$$

da la relación.

$$\sum_{v=1}^n a_v \frac{\partial P_v}{\partial x_i} + \sum_{v=1}^n b_{iv} P_v. \quad (\text{A.17})$$

aquí  $b_{iv} = \frac{\partial a_v}{\partial x_i}$  es nuevamente una función conocida de las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Sumando (A.16) y (A.17) se llega a las ecuaciones de la forma

$$\sum_{v=1}^n a_v \frac{\partial P_i}{\partial x_v} + \sum_{v=1}^n c_{iv} P_v = 0,$$

donde las cantidades  $c_{iv}$  también son funciones conocidas de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . En cada una de las curvas características  $\frac{dx_i}{ds} = a_i$ , estas ecuaciones se reducen a la ecuación

$$\frac{dP_i}{ds} + \sum_{v=1}^n c_{iv} P_v = 0.$$

sin embargo, de (A.13) junto con la condición inicial (A.10), tenemos el siguiente resultado: Ya que  $C$  no es característica, el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{p_1} & \cdots & F_{p_n} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix}$$

no se anula. Los valores iniciales de  $P_i$  son cero en  $C$ , y por lo tanto éstas funciones se anulan idénticamente.

De esta manera, la demostración de la equivalencia de los problemas de valores iniciales para (A.8) y (A.7) está completa.  $\square$

## Apéndice B

### B.1. Propiedad de un eigenvector de una matriz $A$

**Lema B.1.** *Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$  y sea  $v$  un eigenvector de  $A$  con eigenvalor  $a$ , entonces  $v$  es un eigenvector de  $e^A$  con eigenvalor  $e^a$ .*

*Demostración.* Sabemos que

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Si  $Av = av$  entonces  $A^2v = A(Av) = aAv = a^2v$ . Por inducción tenemos  $A^n v = a^n v$ .

Entonces

$$e^A v = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right) v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^k v = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^k \right) v = e^a v.$$

□

# Apéndice C

## C.1. Primeras integrales

Consideramos, un sistema autónomo normal de ecuaciones

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{C.1})$$

cuyas partes derechas, junto con sus derivadas parciales, están definidos y son continuas en algún dominio  $\Delta$  de las variables  $x^1, \dots, x^n$  y sea la notación vectorial para este sistema como:

$$\dot{x} = f(x). \quad (\text{C.2})$$

Una función que se define como:

$$u(x^1, \dots, x^n) = u(x), \quad (\text{C.3})$$

que es continua, junto con sus derivadas parciales, en un cierto dominio  $G$  contenido en  $\Delta$ , se llama primera integral del sistema (C.1) si la sustitución en (C.3) de  $x$  por una solución arbitraria  $\varphi(t)$  de (C.2) conduce a una expresión que es independiente de  $t$ ; es decir, la función  $u(\varphi(t))$ , depende solo de la elección de la solución  $\varphi(t)$ , y no de  $t$ . Cualquier primer integral  $u(x)$  del sistema (C.1) satisface la condición

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x^i} f^i(x) = 0. \quad (\text{C.4})$$

Recíprocamente, cualquier función  $u(x)$  que satisfaga la condición (C.4) es una primera integral del sistema (C.1).

Sea  $\xi$  un punto arbitrario de  $G$  y sea  $x = \varphi(t, \xi)$  una solución de la ecuación (C.2) con condiciones iniciales  $(0, \xi)$ . Tenemos:

$$0 = \frac{d}{dt}(u(\varphi(t, \xi)))|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi^i} f^i(\xi);$$

como  $\xi$  es un punto arbitrario de  $G$ , la relación (C.4) se cumple en  $G$ . Supongamos ahora que la relación (C.4) se cumple para la función  $u(x)$ , y sea  $x = \varphi(t)$  una solución arbitraria de (C.2). Sustituyendo  $x = \varphi(t)$  en  $u(x)$ , obtenemos una cierta función

$$v(t) = u(\varphi(t)).$$

Al diferenciar esta función con respecto a  $t$ , obtenemos:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(\varphi(t))}{\partial x^i} f^i(\varphi(t)) = 0.$$

Entonces  $u(\varphi(t))$  no depende de  $t$ .

# Bibliografía

- [1] A.E. CHOQUE RIVERO, YU. KARLOVICH; *The time optimal control as an interpolation problem*, Commun. Math. ISSN:0973-3841, Conf. 03(2011)
- [2] A.E. CHOQUE RIVERO, V.I KOROBV, V.O SKORYK; *The controllability function as time of motion I Mathematical Physics, Analisis and Geometry*. Analisis and Geometry, No. 2, Vol.11, 2004
- [3] A.E. CHOQUE RIVERO, V.I KOROBV, V.O SKORYK; *The controllability function as time of motion II Mathematical Physics, Analisis and Geometry*. Analisis and Geo-metry, No. 3, Vol.11, 2004
- [4] A.E. CHOQUE RIVERO; *Sistemas de control desde el punto de vista del problema de momentos*. Emalca 2013.
- [5] B.J. GOMEZ OROZCO; *El control admisible mediante polinomios ortogonales*. Tesis de Licenciatura. Asesor A.E. Choque Rivero 2015.
- [6] D.E. KIRK; *Optimal Control Theory. An introduction*.Dover Publications, 1970.
- [7] D.G. LUENBERGER; *Observers for multivariable systems*. IEEE Trans Automat Contr., V.AC-11, -1966, -P-190-197
- [8] E.R. PINCH; *Optimal Control and the Calculus of Variations*. New York 1993.
- [9] J.W. MACKI; A. STRATUSS.; *Introduction to Optimal Theory*. Ed Springer-Verlang, second edition. 1980.
- [10] J. GARCIA CABELLO; *Cálculo diferencial de las ciencias económicas*. primera edición 2006 las Rozas Madrid, departamento de matemática aplicada Universidad de Granada.
- [11] L.M. HOCKING.; *Optimal Control an Introduction to the Theory with Applications*. Ed clarendon press, Oxford. 1991.

- 
- [12] L. E. ELSGOLTZ; *Calculus of Variations*. Pergamon Press Ltd., 1962
- [13] L.S. PONTRYAGIN; V.G. BOLTYANSKI; R.V. GAMKRELITSE AND E.F. MISCHENKO; *The mathematical theory of optimal processes*. Moscow, 1961; English translated, Gordon and Breach, 1985.
- [14] N.N. KRASOVSKII; *Control of dynamical systems*. Nauka, Moscow, 1985.
- [15] R. COURANT AND D. HILBERT; *Methods of Mathematical*. WILEY-VCH Volumen 2, pp.139-145, 1989.
- [16] R.E. KALMAN; Y.C. HO; K.S. NARENDRA; *Controllability of dynamical systems*. Contributions to differential equations 1:189-213, 1963.
- [17] V.A. IVANOV AND FALDIN; *Theory of Optimal Automatic Control Systems*. Nauka, Moscú 1981.
- [18] V.I. KOROBV AND T.I. IVANOVA; *Nonsmooth Mapping of Linear Control Systems*. Journal of Optimization Theory and Applications Vol. 108, No. 2, pp.389-405, february 2001.
- [19] Z. JERZY; *Mathematical Control Theory: An Introduction*. Birkhäuser, Boston, 1992.