



**Universidad Michoacana
De San Nicolás De Hidalgo**



Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

Dipolo Electro débil: Un Primer Acercamiento

Tesis

que para obtener el grado de:

Licenciado En Ciencias Físico Matemáticas

Presenta:

Victor Manuel Torres Dominguez

Director de Tesis:

Dr. Fernando Iguazú Ramírez Zavaleta

Morelia, Michoacán a Agosto de 2021

Del y para el Universo

Agradecimientos

A mis padres Ildalia y Victor por todo el apoyo y cariño que de ustedes he recibido en estos años, pero sobre todo por apoyar este largo y sinuoso proyecto que ha incluido mi ausencia y dificultades de todo tipo.

A mis padrinos Adriana y Pascual por todos los cuidados y atenciones que de ustedes he recibido, incluso desde antes de nacer.

Al Dr. Fernando Ramírez por la guía que me ha prestado en el desarrollo del presente documento y el camino que se recorre en este proceso de crecimiento y maduración.

Resumen

Al hacer uso de lagrangianos efectivos, analizamos las propiedades débiles de fermiones cargados, las cuales se inducen a nivel de un lazo por medio del cambio de sabor entre fermiones promovido por el bosón de Higgs. El presente análisis se realiza mediante el estudio del vértice que describe el acoplamiento renormalizable más general de un campo escalar a un par de fermiones, tal que se reproducen las características predichas por la mayoría de los sectores extendidos de Yukawa que inducen cambio de sabor.

Palabras clave: correcciones radiativas, fermiones cargados, boson de Higgs, violación de sabor, sectores de Yukawa extendidos.

Abstract

By making use of effective Lagrangians, we analyse the weak properties of charged fermions, which are induced at the one-loop level through flavor violation between fermions generated by the Higgs boson. Our analysis is performed by studying the more general renormalizable coupling between a scalar field and a pair of fermions, such that the characteristics predicted by most of the extended Yukawa sectors that induce flavor change are reproduced.

Keywords: radiative corrections, charged fermions, Higgs boson, flavor violation, extended Yukawa sectors.

Índice general

Introducción	XIII
1. Lagrangiano del Modelo Estándar	1
1.1. De la Materia	1
1.2. De las Fuerzas	3
1.3. Lagrangiano del Modelo Estándar	4
1.3.1. Lagrangiana del Modelo Estándar Electrodébil	4
1.3.2. Sector de Higgs	6
1.3.3. Sector de Yang-Mills	9
1.3.4. Sector de Yukawa	10
1.3.5. Sector de Corrientes	13
1.3.6. Lagrangiano de QCD	15
2. Anomalía Magnética Débil Mediante Un Bosón de Higgs	17
2.1. Lagrangiano de Violación de Sabor Tipo Yukawa	17
2.2. Anomalía Magnética Débil Mediante un Bosón de Higgs	18
3. Conclusiones y perspectivas	27
A. Función de Vértice de Electrones	29
A.1. Parámetros Feynman	29
A.2. Evaluación	29
B. Teorías Gauge	37
B.1. $SU(n)$ y Álgebra de Lie	37
B.2. Representación en el grupo $SU(n)$	39
C. Evaluación del Vértice del Electrón en FeynCalc	43
Bibliografía	48

Introducción

En esta tesis estudiaremos teóricamente el fenómeno de violación o cambio de sabor en el contexto de la física de partículas elementales. Esta sutileza de la naturaleza, a nivel de componentes fundamentales, se lleva a cabo en las oscilaciones de neutrinos [1]. No obstante, este fenómeno se manifiesta exclusivamente en fermiones sin carga eléctrica, por lo tanto, cualquier tipo de transición que involucre fermiones cargados sería de gran interés en la búsqueda de efectos de nueva física, lo que a su vez implicaría una clara presencia de violación de sabor [2]. Esto podría proporcionarnos un entendimiento más amplio de la naturaleza intrínseca del mundo cuántico.

En el contexto del Modelo Estándar de las Interacciones Fundamentales (ME), las transiciones que promueven el cambio de sabor se encuentran en el sector de quarks, sin embargo, están fuertemente suprimidas debido al mecanismo de Glashow-Iliopoulos-Maiani (GIM) y porque son inducidas a nivel de un lazo en teoría de perturbaciones [3].

Si bien en el ME los procesos con cambio de sabor están muy suprimidos, es sabido que la presencia de sectores de corrientes extendidos [2, 4] o de sectores de Yukawa extendidos [5] podría generar un gran impacto en efectos de nueva física, incluso siendo mucho mayores que los del ME. En particular, esta tesis se enfocará al estudio del impacto de sectores de Yukawa extendidos [6, 7], en el contexto de modelos de Lagrangianos efectivos, para analizar posibles efectos de nueva física inducidos por acoplamientos que violan sabor entre un bosón de Higgs y dos fermiones de distinto sabor, a saber, $Hf_i f_j$.

Específicamente, esta tesis versa sobre el análisis del impacto de acoplamientos de Yukawa exóticos, en donde se considera directamente el fenómeno de violación de sabor, postulado teóricamente. La influencia de los citados acoplamientos que generan el cambio de sabor quedará explícita al insertar estos en el vértice que acopla a un bosón Z neutro del ME con dos fermiones del mismo sabor ($Zf_i \bar{f}_i$), también del ME. Por medio del vértice $Zf_i \bar{f}_i$ se abordará, además, el estudio de las propiedades electrodébiles de fermiones cargados del ME.

Este trabajo de tesis está organizado en una introducción y tres capítulos correspondientes a la presentación del ME, el desarrollo del cálculo teórico para estudiar las propiedades electrodébiles de fermiones cargados del ME inducidas por acoplamientos de Yukawa que violan sabor, y finalmente, las conclusiones de la tesis junto con tres apéndices.

Capítulo 1

Lagrangiano del Modelo Estándar

Todas las interacciones conocidas en el mundo están gobernadas por alguna combinación de cuatro fuerzas fundamentales: gravedad, electromagnetismo, fuerza fuerte y fuerza débil [8]. El modelo estándar de física de partículas proporciona una teoría exitosa para tres de cuatro interacciones conocidas de partículas fundamentales. La interacción Fuerte es descrita por la Cromodinámica Cuántica (QCD), mientras que la descripción de las interacciones débil y electromagnética está unificada en el Modelo Glashow–Salam–Weinberg (GSW) para la interacción electrodébil (EW), también conocido como Modelo Estándar Electrodébil (EWSM) [9].

1.1. De la Materia

A principios de la década 1940 se creía que la materia se conformaba únicamente por electrones, protones, neutrones. En la actualidad sabemos que toda la materia y sus interacciones se pueden describir en términos de dos tipos de partículas: bosones y fermiones. Los bosones son partículas cuyo spin es un múltiplo entero de la constante reducida de Planck, \hbar , mientras que los fermiones tienen un spin semientero de la constante reducida de Planck. Los bosones median las fuerzas fundamentales[10, 8] y los fermiones son los componentes elementales de la materia[8]. Los fermiones a su vez son clasificados en familias, cada familia contiene dos de los quarks, un electrón o uno de sus parientes y una de la especie de neutrinos. Los tipos de partículas correspondientes en las tres familias tienen propiedades idénticas excepto por su masa, que aumenta en cada familia sucesiva[11]. Ver Cuadro (1.1) .

Cuadro 1.1: *Familias de fermiones*
Familias de fermiones y sus masas.

Familia 1		Familia 2		Familia 3	
Partícula	Masa (GeV/c^2)	Partícula	Masa (GeV/c^2)	Partícula	Masa (GeV/c^2)
Electron (e)	0,000511	Muon (μ)	0,106	Tau (τ)	1,7771
Electron-Neutrino (ν_e)	$< 10^{-8}$	Muon Neutrino (ν_μ)	$< 0,002$	Tau Neutrino (ν_τ)	$< 0,02$
Quark Up (u)	0.003	Quark Charm (C)	1.3	Quark Top (t)	175
Quark Down (d)	0.006	Quark Strange (S)	0.1	Quark Bottom (b)	4.3

En 1964 Gell-Mann y Zweig independientemente propusieron el modelo de quark que clasifica los hadrones existentes por la simetría interna de $SU(3)$ para hadrones relativamente ligeros formados por tres quarks. En este modelo, los bariones están compuestos por tres quarks y los mesones que están compuestos por un quark y un anti-quark. Actualmente se conocen 6 quarks u, d, s, c, b, t , por lo cual se dice que los quarks tienen seis grados de libertad llamados “sabor” [12]. La cantidad “sabor” es en realidad la carga experimentada por las interacciones débiles [8].

Estas tres familias también se reorganizan en dos tipos elementales: quarks y leptones. Los quarks cuentan con la propiedad de “color”; rojo, verde, azul. Estos colores no están relacionados con los colores que percibimos mediante la vista sino con la fuerza fuerte. Los antiquarks tiene también color; antiazul, antirrojo, antiverde [8]. El color está mediado por gluones y se describe mediante cromodinámica cuántica (QCD). QCD es la teoría de gauge con simetría color $SU(3)$. Si bien la simetría de sabor se rompe por la diferencia de masas de quarks, principalmente para quarks pesados, la simetría de color es una simetría exacta [12].

Por otro lado, tenemos a los leptones (electrón e , μ , tau τ , y sus neutrinos ν_e, ν_μ, ν_τ) [12]. Ya que los leptones no experimentan las interacciones fuertes, no tiene color [8]. e, μ y τ tienen interacciones débiles y electromagnéticas. Las producciones y desintegraciones de los leptones se describen con éxito mediante el modelo estándar electrodébil, es decir, la teoría de gauge de las interacciones electrodébiles $SU(2)_L \times U(1)_Y$ [12].

Cuadro 1.2: *Propiedades elementales de quarks y leptones.*

La Carga EM está en términos de la carga del electrón, $1,602176487(40)10^{-19}C$.

	Sabor	Carga EM	Color
LEPTONES	e	-1	
	ν_e	0	
	μ	-1	
	ν_μ	0	
	τ	-1	
	ν_τ	0	
QUARKS	u	+2/3	R,G,B
	d	-1/3	R,G,B
	c	+2/3	R,G,B
	s	-1/3	R,G,B
	t	+2/3	R,G,B
	b	-1/3	R,G,B

1.2. De las Fuerzas

Como ya fue mencionado, existen cuatro interacciones características entre partículas fundamentales, véase el cuadro 1.3:

1. Interacción electromagnética, mediada por los fotones .
2. Interacción débil, mediada por bosones débiles masivos (W, Z).
3. Interacción fuerte, mediada por gluones sin masa.

Entre estas interacciones, la interacción gravitacional generalmente está fuera de juego para la física de partículas porque es extremadamente débil en comparación con otras interacciones y no tiene un efecto significativo en ninguna reacción de esas partículas (a menos que las energías de las partículas que interactúan sean extremadamente altas). Por ejemplo, la relación entre la fuerza gravitacional y la fuerza de Coulomb (electromagnética) entre 2 protones a una distancia de $10^{-15}m$ es de aproximadamente 10^{-36} [12].

Cuadro 1.3: *Partículas de las interacciones.*

Interacción	Intencidad del Acoplamiento	Mediador	Spin
Electromagnética	$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \cong \frac{1}{137}$	fotón	1
Debil	$G_F \cong 1,16 \times 10^{-5} GeV^{-2}$	bosón debil	1
Fuerte	$\alpha_s = \frac{g_s^2}{2\pi} \cong 0,1$	gluón	1

La interacción electromagnética, mediada por fotones, es descrita por QED que es la teoría que tiene simetría de gauge que tiene la simetría abeliana $U(1)$. Esta teoría renormalizable, es decir, varias divergencias originadas en las integrales de bucles en los ordenes superiores de la teoría de perturbaciones se renormalizan en masas físicas y funciones de onda de partículas. Ver apéndice A .

La teoría de interacciones débiles, originalmente formulada por Fermi, fue desarrollada en la década de 1950. Desafortunadamente, la teoría no es renormalizable a pesar de su pequeña constante de acoplamiento. Esto se debe a que la constante de acoplamiento de Fermi G_F tiene dimensiones de $[masa]^{-2}$. Por lo tanto, la interacción de Fermi debe considerarse como el modelo eficaz para procesos débiles que funcionan solo en la región de baja energía. En el estudio dedicado de la física de la interacción débil en la década de 1960, se superaron muchas dificultades teóricas en la interacción débil. Finalmente se formuló una teoría renormalizable basada en la imagen de unificada de interacciones débiles y electromagnéticas, en el marco de la teoría gauge no abeliana con simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$ (el subíndice L significa los campos que participan en la interacción son *left-handed*¹ e Y denota la hipercarga débil),

¹La helicidad de una partícula es positiva (“diestra” o “right-handed”) si la dirección de su giro es la misma que la dirección de su movimiento. Es negativo (“zurdo” o “left-handed”) si las direcciones de giro y movimiento son opuestas.

se denomina modelo estándar electrodébil.

La teoría gauge de la interacción electrodébil involucra campos con propagadores sin masa; pero los bosones vectoriales de la interacción débil (W , Z) tiene una masa distinta de cero. Higgs propuso un mecanismo que permite que los mediadores de la interacción electromagnética (el fotón) permanece sin masa. Este mecanismo requiere la introducción de un nuevo bosón escalar, cuya auto-interacción modifica el estado fundamental (estado de mínima energía). Las masas de los bosones y fermiones débiles intermedios se generan dinámicamente a través de su interacción con el campo escalar de Higgs, que se supone que está presente en todas partes del espacio-tiempo donde ocurre la interacción.[10]

1.3. Lagrangiano del Modelo Estándar

Para la mecánica cuántica, el lagrangiano es un funcional definido sobre el espacio de Hilbert del sistema físico que se estudia, es mediante estos objetos que se describen las interacciones de los diferentes campos hasta ahora mencionados. Para facilitar la descripción, los términos del lagrangiano del modelo estándar, se mostrarán agrupados según los sectores que lo conforman. Los lagrangianos que se muestran no son más que densidades lagrangianas aunque en ocasiones se utiliza coloquialmente el mote lagrangiano [10].

1.3.1. Lagrangiana del Modelo Estándar Electrodébil

Para obtener una descripción completa de la fuerza electrodébil se requieren dos componentes: Teoría de Yang-Mills y el Rompimiento Espontáneo de la Simetría [10]. Una característica notable de la interacción débil es la capacidad de distinguir los estados de helicidad de los fermiones, esto es, los bosones de norma W^\pm y Z , se acoplan con diferentes intensidades a dichos estados. Esta característica se debe ver reflejada en sus representaciones de bajo el grupo de norma $SU(2)_L$. Por ello los quarks y leptones se agrupan en los dobletes

$$Q_{iL} = \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L, \quad L_{iL} = \begin{pmatrix} \nu_i \\ l_i \end{pmatrix}_L, \quad (1.1)$$

donde $u_i = u, c, t$ y $d_i = d, s, b$ son quarks de tipo up y down, respectivamente, $l_i = e, \mu, \tau$ son los leptones cargados y $\nu_i = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$, sus neutrinos; donde i denota el índice de sabor. Los estados de helicidad derecha se agregan en forma de singuletes de $SU(2)_L$. Estos singuletes son l_{iR}, u_{iR} y d_{iR} . La helicidad, izquierda o derecha, de los fermiones está definida mediante los operadores de proyección

$$\Psi_{L,R} = \frac{1 \mp \gamma^5}{2} \Psi \equiv P_{L,R} \Psi, \quad (1.2)$$

donde $P_{L,R}$ es el operador de proyección quiral. Por lo que Ψ se puede expresar como la suma de su parte izquierda y derecha, es decir, $\Psi = \Psi_L + \Psi_R$, esto es consecuencia de que la interacción débil distingue los estados de helicidad. Debido a que la teoría electrodébil es covariante bajo transformaciones de norma locales del grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$, la invariancia

de la teoría electrodébil ante dichas transformaciones se garantiza al introducir la derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu - ig_2 \frac{\sigma^i}{2} W_\mu^i, \quad (1.3)$$

donde g_1 y g_2 son las constantes de acoplamiento asociados a los grupos $U(1)_Y$ y $SU(2)_L$, B_μ y $\frac{Y}{2}$ representa el campo de la norma y el generador asociado con el grupo abeliano de hipercarga, $U(1)_Y$. Análogamente, W_μ^i y $\frac{\sigma^i}{2}$ son los campos de norma y los generadora en la representación de dobletes asociados al grupo $SU(2)_L$. Los campos de norma W_μ^i con $i = 1, 2, 3$ y B_μ , definen los campos de masa, $W_\mu^-, W_\mu^+, Z_\mu, A_\mu$, mediante combinaciones lineales. Por este medio no se obtienen términos cuadráticos para los campos de gauge, como lo son $m^2 B_\mu B^\mu$ o $m^2 A_\mu A^\mu$. Debido a esto, los bosones asociados a estos campos gauge carecen de masa. Los campos reales Z^0 y W^\pm , se obtienen después de la ruptura espontánea de la simetría.

Higgs propuso un mecanismo mediante el cual los mediadores de la interacción débil adquieren masa mientras el mediador de la interacción electromagnética no lo hace. Este mecanismo es la ruptura espontánea de la simetría y mantiene invariante la densidad lagrangiana bajo transformaciones del grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$ e introduce un nuevo bosón escalar [10].

Para generar las masas de los tres bosones de norma asociados con la interacción débil, se requiere por lo menos tres campos escalares, empero, el número mínimo de tales campos que se pueden incluir cuatro contenidos en un doblete complejo de $SU(2)_L$. Este doblete es el doblete de Higgs. Con este rompimiento apresen tres pseudobosones de Goldstone y un campo escalar real físico, escalar de Higgs. Los pseudobosones de Goldstone no respresentan grados de libertad, motivo por el cual son eliminados en la norma unitaria. Al asignar un numero de hipercarga igual a +1 al doblete escalar de Higgs, se consigue la ruptura espontánea del grupo electrodébil al grupo electromagnético $U(1)$, cuyo generador queda expresado como una combinación lineal del generador $Y/2$ del grupo $U(1)_Y$ y del generador $T^3 = \sigma^3/2$ del grupo $SU(2)_L$ con lo que obtenemos la relación de Gell-Mann-Nishijima

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2}, \quad (1.4)$$

donde $Y = B - L$ para los dobletes izquierdos, y $2Q$ para dobletes derechos, B es el número barionico igual a $\frac{1}{3}$ para quarks y 0 para leptones: L es el número leptónico igual a 1 para leptones y 0 para los quarks. Dado que T^3 y Q se conservan, por tanto Y es una cantidad que se conserva [10].

El mecanismo de Higgs permite dotar de masa a todas las partículas de SM. El sector de Higgs está formado por los sectores cinético y potencial, mediante el sector cinético se generan las masas de los bosones débiles, mientras que del potencial se genera la masa del boson de Higgs.

La lagrangiana de teoría a electrodébil se divide en dos partes, la lagrangina fermionica y la bosonica, a su vez, la parte bosonica se conforma de los sectores de Higgs y Yang-Mills, y la fermionica se conforma por los sectores de corriente y de Yukawa. Con lo anterior escribimos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^B + \mathcal{L}^F, \quad (1.5)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^B &= \mathcal{L}^H + \mathcal{L}^{YM} \\ \mathcal{L}^F &= \mathcal{L}^C + \mathcal{L}^Y, \end{aligned} \quad (1.6)$$

Donde \mathcal{L}^H , \mathcal{L}^{YM} , \mathcal{L}^C , \mathcal{L}^Y representa a los sectores de Higgs, Yang-Mills, corrientes y Yukawa, respectivamente. Más adelante hacemos las descripciones de las partes que conforman esta lagrangiana.

1.3.2. Sector de Higgs

El sector de Higgs, que dota de masa a los *bosones* W^\pm , Z y el bosón de Higgs. Es en este sector donde se implementa el mecanismo de Higgs. Su lagrangiana está dada por [10]

$$\mathcal{L}^H = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger, \Phi) \quad (1.7)$$

donde D_μ representa a la derivada covariante (1.3) y $V(\Phi^\dagger, \Phi)$ representa al potencial de Higgs, cuya estructura es

$$V(\Phi^\dagger, \Phi) = \mu^2(\Phi^\dagger \Phi) + \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (1.8)$$

donde

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_{1,1} + \phi_{1,2} \\ \phi_{2,1} + \phi_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

La ecuación (1.9) es el doblete de Higgs, al que se le asigna un número de hipercarga $Y = +1$. En la ecuación (1.8), μ^2 y λ constantes complejas. Para el caso $\mu^2 > 0$, el potencial toma una forma parabólica, y para $\mu^2 < 0$ toma la forma de “sombbrero mexicano”.

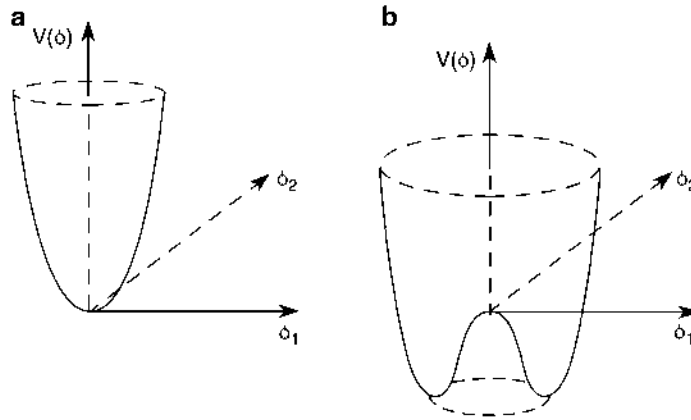


Figura 1.1: *Potencial de Higgs en función de ϕ_1 y ϕ_2 .*

a. Para $\mu^2 > 0$ presenta un mínimo en $V(\phi) = 0$. b. Cuando $\mu^2 < 0$, $V(\phi)$ adquiere forma de “Sombbrero Mexicano”.

La generación de masa procede del rompimiento espontáneo de $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Ahora analizamos el potencial. La condición de mínima energía es

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi^\dagger} = 0 \quad \rightarrow \quad [\mu^2 + 2\lambda(\Phi^\dagger\Phi)] \Phi = 0, \quad (1.10)$$

cuando $\mu > 0$ el estado de mínima energía se da cuando $\Phi_0 = \Phi_0^\dagger = 0$, pero el vacío no es degenerado. La simetría se rompe cuando $\mu^2 < 0$, el vacío es degenerado, es decir, existen un número infinito de estados de mínima energía que satisfacen la condición

$$\Phi_0^\dagger\Phi_0 = |\phi_1^0|^2 + |\phi_2^0|^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda}, \quad (1.11)$$

donde $\Phi_0 = \langle 0|\Phi|0\rangle$ es el valor esperado en el vacío del doblete de Higgs en el campo de Higgs, el cual rompe la simetría electrodébil al grupo electromagnético. Esto es, Φ_0 debe ser invariante bajo el grupo electromagnético, esto es necesario para garantizar la conservación de la carga eléctrica. En otras palabras, si $U \in U(1)$, entonces $U\Phi_0 = \Phi_0$, esto implica que el generador de este grupo, ecuación (1.4), lo hace cero

$$Q\Phi_0 = \left(\frac{\sigma^3}{2} + \frac{Y}{2}\right)\Phi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Phi_0 = 0. \quad (1.12)$$

Podemos escoger la forma de ϕ , y en particular podemos escoger la forma ϕ_0 , para cualquier punto x para poder tener un spinor de la forma $\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$. Tomamos $\phi_{1,1} = \phi_{1,2} = \phi_{2,1} = 0$ y $\phi_{2,2} = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}}$ se obtiene

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} \quad (1.13)$$

[10]

El rompimiento espontáneo de la simetría aparece como consecuencia de elegir a uno solo de los vacíos. Cabe mencionar, también que cuando las simetrías involucradas son globales, el resultado es la presencia de campos escalares sin masa, conocidos con el nombre de bosones de Goldstone. Pero, cuando la simetría es de norma, el resultado es la presencia de bosones de norma masivos uno por cada generador roto de la simetría. A este fenómeno, donde los bosones de Goldstone son absorbidos por los campos de norma asociados con los generadores rotos, se le conoce con el nombre de mecanismo de Higgs.

La teoría debe ser considerada en el entorno de este estado de mínima energía, por lo que se introduce el desplazamiento

$$\Phi \quad \rightarrow \quad \Phi_0 + \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_W^+ \\ \frac{H+iG_Z}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

donde G_W^+ y G_Z son pseudo bosones de Goldstone asociados a los bosones de norma débiles W^\pm y Z^0 , respectivamente. H representa al escalar de Higgs. Aplicando esta transformación en el potencial de Higgs, \mathcal{L}_H , obtenemos

$$\begin{aligned}
 V(\Phi^\dagger, \Phi) &= \mu^2 (\Phi_0 + \Phi)^\dagger (\Phi_0 + \Phi) + \lambda \left[(\Phi_0 + \Phi)^\dagger (\Phi_0 + \Phi) \right]^2 \\
 &= \frac{\lambda v^4}{4} - \frac{m_H^2}{2} H^2 - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4 - 2\lambda v H (G_Z^2 + 2G_W^+ G_W^-) \quad , \quad (1.15) \\
 &\quad - \frac{\lambda}{2} G_Z^2 H^2 - \lambda (H^2 + G_Z^2) G_W^+ G_W^- - \frac{\lambda}{4} G_Z^4 - \lambda (G_W^+ G_W^-)^2
 \end{aligned}$$

donde se obtiene la masa del campo de Higgs, $m_H^2 = 2\lambda v^2$. Es en esta parte donde se dan los autoacoplamientos del bosón de Higgs. Para la parte cinética del potencial de Higgs tenemos que

$$\begin{aligned}
 (D_\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) &= (\partial_\mu G_w^-) (\partial^\mu G_w^+) + \frac{1}{2} (\partial_\mu G_z) (\partial^\mu G_z) \\
 &\quad + \frac{(g_1 v)^2}{4} W_\mu^- W^{+\mu} + \frac{v^2}{8} (g_2 B_\mu - g_1 W_\mu^3) (g_2 B^\mu - g_1 W^{\mu 3}) \quad (1.16) \\
 &\quad + \frac{g_1^2}{2} W_\mu^+ W^{-\mu} G_w^- G_w^+ + \dots
 \end{aligned}$$

donde la derivada covariante (1.3) fue redefinida como

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{ig_1}{2} (W_\mu^+ \tau + W_\mu^- \tau^\dagger) - \frac{i}{2} (g_1 W_\mu^3 \tau^3 + g_2 B_\mu Y) \quad , \quad (1.17)$$

donde el campo W_μ^\pm y el operador τ están definidos como

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \mp iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad , \quad \tau = \frac{\tau^1 + i\tau^2}{2} \quad . \quad (1.18)$$

De la ecuación (1.16) se obtiene el término de masa, $m_W = \frac{gv}{2}$. Ahora, tomamos la matriz asociada a los campos W_μ^3 y B_μ ,

$$M = \frac{1}{2} m_W^2 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{g_1}{g_2} \\ -\frac{g_1}{g_2} & \frac{g_1^2}{g_2^2} \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

la cual, al ser diagonalizada, podemos eliminar el término bilineal $W_\mu^3 B^\mu$. Resolviendo el problema de eigenvalores y definiendo una matriz S como

$$S = \begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad c_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \equiv \cos \theta_W, \quad s_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \equiv \sin \theta_W. \quad (1.20)$$

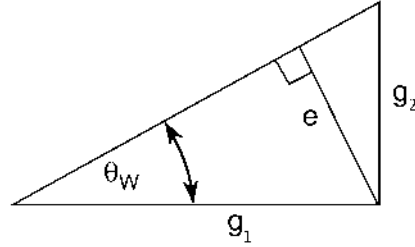


Figura 1.2: Relación entre las constantes de acoplamiento g_1 , g_2 , e , y θ_W
Relación geométrica entre las constantes de acoplamiento de la interacción electrodébil.

Con base en la matriz (1.19) obtenemos la diagonalización de M como

$$S^\dagger M S = \frac{1}{2} m_W^2 \begin{pmatrix} 1 + \frac{g_1^2}{g_2^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Rotando los campos de norma W_μ^3 y B_μ con la matriz S ,

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

rescribimos la ecuación anterior en el sistema de ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} W_\mu^3 &= c_W Z_\mu + s_W A_\mu \\ B_\mu &= -s_W Z_\mu + A_\mu. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Con la ecuación (1.23), reescribimos el tercer término de la ecuación (1.16)

$$\frac{v^2}{8} (g_2 B_\mu - g_1 W_\mu^3) (g_2 B^\mu - g_1 W^{\mu 3}) = \frac{v^2}{8} (g_1^2 + g_2^2) Z^\mu Z_\mu + \dots \quad (1.24)$$

con lo que obtenemos la masa del bosón neutro débil, $m_Z^2 = \frac{m_W^2}{\cos^2 \theta_W}$. El bosón A_μ permanece sin masa y se identifica como el fotón.

1.3.3. Sector de Yang-Mills

En este sector se busca describir el comportamiento de partículas elementales utilizando estos grupos de Lie no abelianos. La estructura de este sector está completamente determinada por el carácter no abeliano del grupo electrodébil. Los invariantes correspondientes no pueden ser construidos con los campos de norma directamente, sino por medio de las estructuras covariantes dadas por el tensor de campo $W_{\mu\nu}$, asociado con el grupo no abeliano $SU(2)_L$ y el correspondiente tensor $B_{\mu\nu}$ del grupo abeliano $U(1)_Y$, los cuales tienen la forma:

$$\begin{aligned} W'_{\mu\nu} &= \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + ig_2 [W_\mu, W_\nu] \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \\ W_{\mu\nu} &= T^i W_{\mu\nu}^i. \end{aligned} \quad (1.25)$$

El tensor del campo de Yang-Mills, $W_{\mu\nu}$, está dado como

$$W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g_2 \epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \quad (1.26)$$

siendo ϵ^{ijk} la constante de estructura totalmente antisemítica de $SU(2)$ [9], T^i los generadores del grupo, normalizados como

$$Tr [T^i, T^j] = \frac{\delta^{ij}}{2}. \quad (1.27)$$

Con lo anterior se puede construir el lagrangiano renormalizable

$$\mathcal{L}^{YM} = -\frac{1}{2} Tr [W_{\mu\nu}^i W_i^{\mu\nu}] - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}. \quad (1.28)$$

Aplicando la normalización (1.27) a la ecuación (1.28), podemos reescribir la lagrangiana como

$$\mathcal{L}^{YM} = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}. \quad (1.29)$$

Hacemos uso de la expresión de $W_{\mu\nu}^\pm$ definido como

$$W_{\mu\nu}^\pm = \frac{W_{\mu\nu}^1 \mp i W_{\mu\nu}^2}{\sqrt{2}} \quad (1.30)$$

Al hacer uso de los tensores

$$\begin{aligned} Z_{\mu\nu} &= \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \end{aligned} \quad (1.31)$$

siendo $F_{\mu\nu}$ el tensor del campo electromagnético y $Z_{\mu\nu}$ asociado al bosón Z , con lo que la lagrangiana, haciendo uso de las ecuaciones (1.23), toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{YM} &= -\frac{1}{2} W_{\mu\nu}^- W_+^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - ig_2 (s_W F_{\mu\nu} + c_W Z_{\mu\nu}) W^{-\mu} W^{+\nu} \\ &\quad + g_2^2 (W_\mu^- W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^-) (W^{-\mu} W^{+\nu} - W^{+\mu} W^{-\nu}); \end{aligned} \quad (1.32)$$

este lagrangiano contiene las partes cinéticas de los cuatro bosones de norma, así como sus autointeracciones.

1.3.4. Sector de Yukawa

Los fermiones (leptones y quarks) se introducen en la teoría con una masa igual a cero. La teoría debe completarse para conferir una masa distinta de cero a los fermiones. Como se mencionó anteriormente, el campo de Higgs resuelve el problema de la generación de masa, es decir, las masas que no desaparecen para los fermiones se generan a través de los

acoplamiento del campo de Higgs a los fermiones[10].

La lagrangiana renormalizable del sector de Yukawa se representa en dos partes independientes, sector de quarks (\mathcal{L}_q^Y) y leptones (\mathcal{L}_l^Y), los cuales se describen brevemente a continuación.

Sector de Yukawa para Quarks

Dado que los quarks existen en los estados derechos asociados a los dos miembros del doblete izquierdo, por lo que se debe introducir un objeto que se transforme covariante bajo el grupo $SU(2)_L$, cuya forma esta dada por

$$\tilde{\Phi} = i\sigma^2\Phi^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^- \\ \phi^{0*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v+H-iG_Z}{\sqrt{2}} \\ -G_W^- \end{pmatrix}, \quad (1.33)$$

donde σ^2 es una matriz de Pauli. Tiene $\tilde{\Phi}$ una hipercarga $Y = +1$; con esto ahora podemos escribir el lagrangiano del sector de Yukawa para quarks como

$$\mathcal{L}_q^Y = -Y_{ij}^u \hat{Q}'_{iL} \tilde{\Phi} U'_{jL} - Y_{ij}^d \hat{Q}'_{iL} \Phi d'_{jR} + h.c.,^2 \quad (1.34)$$

siendo Y_{ij}^u y Y_{ij}^d son constantes arbitrarias, constantes de acoplamiento de Yukawa. Las constantes de acoplamiento son arbitrarias y se eligen de manera que reproduzcan las masas físicas conocidas de los fermiones[10]. Los símbolos primados denotan los estados de norma. Este lagrangiano no conserva el sabor, ya que las matrices Y^u y Y^d no están sujetas a restricciones, en particular, no son diagonales, y su presencia indica que pueden existir mezcla entre fermiones, por lo que se requiere diagonalizarlas para conseguir los eigenestados de masa. En términos de los vectores del espacio de sabor definidos por

$$U' = \begin{pmatrix} u' \\ c' \\ t' \end{pmatrix}, \quad D' = \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}, \quad (1.35)$$

y las matrices de masa tiene la forma

$$M_{ij}^u = \frac{u}{\sqrt{2}} Y_{ij}^u, \quad M_{ij}^d = \frac{u}{\sqrt{2}} Y_{ij}^d, \quad (1.36)$$

con lo cual el lagrangiano toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q^Y = & - \left(1 + \frac{H}{v}\right) (\bar{U}'_L M^u U'_R + \bar{D}'_L M^d D'_R) + \frac{i}{v} G_Z (\bar{U}'_L M^u U'_R - \bar{D}'_L M^d D'_R) \\ & - \frac{\sqrt{2}}{v} G_W^- \bar{D}'_L M^u U'_R + \frac{\sqrt{2}}{v} G_W^+ \bar{U}'_L M^d D'_R + h.c. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Al diagonalizar la parte cuadrática de este lagrangiano se encuentran las masa de los quarks. Para lo que se definen los campos de masa mediante las transformaciones

²h.c. significa conjugado hermítico.

$$U_{L,R} = V_{L,R}^u U'_{L,R} \quad D_{L,R} = V_{L,R}^d D'_{L,R}, \quad (1.38)$$

donde las matrices $V_{L,R}^u$ y $V_{L,R}^d$ se asume que son unitarias con el fin de conservar la estructura canónica de los términos cinéticos que aparecen en el sector de corrientes, lo que a su vez garantiza la existencia de propagadores en su forma canónica.

Del álgebra lineal sabemos que para cualquier matriz M de entradas reales, es posible encontrar matrices unitarias A y B tales que AMB es real y diagonal. Dado que las matrices $V_{L,R}^u$ y $V_{L,R}^d$ son unitarias, se cumple el teorema antes mencionado para las matrices $V_{L,R}^{u,d} M^{u,d} V_{L,R}^{u,d\dagger}$ serán diagonales y reales, por lo que cumplen representar las masas de los quarks. Con esto, podemos expresar el lagrangiano de Yukawa para quarks en términos de los campos de masa U y D como [13]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q^Y = & - \left(1 + \frac{H}{v}\right) (\bar{U} \bar{M}^u U + \bar{D} \bar{M}^d D) + \frac{i\gamma^5}{v} G_Z (UM^u U - DM^d D) \\ & - \frac{\sqrt{2}}{v} \bar{D} (K^\dagger \bar{M}^u P_r - M^d K^\dagger P_L) U + \frac{\sqrt{2}}{v} G_W^+ U (KM^d P_R - M^u K P_L) D \end{aligned} \quad (1.39)$$

donde K está definida como

$$K = V_L^u V_L^{d\dagger}, \quad (1.40)$$

es la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Masakawa (CKM) y siendo \bar{M}^u y \bar{M}^d matrices de masas dadas por

$$\begin{aligned} \bar{M}^u = V_L^u M^u V_R^{u\dagger} &= \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} \\ \bar{M}^d = V_L^d M^d V_R^{d\dagger} &= \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.41)$$

por lo que obtenemos la masa de los quarks y las interacciones de los quarks con el bosón de Higgs, también se observa que el sector de Yukawa conserva el sabor, derivado de que el bosón de Higgs se acopla a pares del mismo tipo de quarks.

Sector de Yukawa para Leptones

Para los leptones tomamos en cuenta que no existen estados de helicidad derecha de neutrinos, por lo que escribimos este sector como [13]

$$\mathcal{L}_l^Y = -Y_{ij}^l \bar{L}'_{iL} \Phi'_{jR} + h.c., \quad (1.42)$$

donde Y_{ij}^l son los componentes de la matriz de Yukawa. En términos de los campos en el espacio de sabor

$$E' = \begin{pmatrix} e' \\ \mu' \\ \tau' \end{pmatrix}, \quad v' = \begin{pmatrix} \nu'_e \\ \nu'_\mu \\ \nu'_\tau \end{pmatrix}, \quad (1.43)$$

y la matriz de masa

$$W_{ij}^l = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ij}^l, \quad (1.44)$$

con lo que se puede escribir el lagrangiano de Yukawa para leptones como

$$\mathcal{L}_l^Y = - \left(1 + \frac{H}{v} \right) \bar{E}'_L M^l E'_R - \frac{i}{v} G_Z \bar{E}'_L M^l E'_R - \frac{\sqrt{2}}{v} G_W^+ \bar{\nu}' M^l E'_R + h.c. \quad (1.45)$$

Así como en el caso de los quarks, las masas de los leptones se definen mediante la diagonalización de la parte cuadrática del lagrangiano (1.44). Se definen ahora los campos de masa mediante las transformaciones

$$E_{L,R} = V_{L,R}^l E'_{L,R}, \quad v_L = V_L^l \nu'_L, \quad (1.46)$$

donde $V_{L,R}^l$ son matrices de rotación unitarias, lo que nos lleva a expresar el lagrangiano para leptones como

$$\mathcal{L}_l^Y = - \left(1 + \frac{H}{v} \right) \bar{E} \bar{M}^l E - \frac{i\gamma^5}{v} G_Z \bar{E} \bar{M}^l E - \frac{\sqrt{2}}{v} (G_W^+ \bar{\nu} \bar{M}^l P_R E + G_W^- \bar{E} \bar{M}^l P_L \nu). \quad (1.47)$$

Dado que siempre es posible encontrar las matrices unitarias $V_{L,R}^l$ tales que $\bar{M}^l = V_L^l M^l V_R^{l+}$ es de diagonal con entradas reales, cumple lo que se requiere para representar los términos de masa. Dicha matriz la expresamos como

$$\bar{M}^l = \begin{pmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_\tau \end{pmatrix}, \quad (1.48)$$

análogamente con el sector de quarks, en términos de los campos de masa, el sector de Yukawa para leptones conserva el sabor.

1.3.5. Sector de Corrientes

En este sector de analizan, mediante los sectores cinéticos de los leptones y quarks, las interacciones de campo de norma del grupo electrodébil con los fermiones [13]. A los acoplamientos de pares de fermiones con el bosón W^\pm se les conoce como corrientes cargadas, mientras a los acoplamientos con los bosones Z y A se les denomina corrientes neutras. Debido a la invariancia de norma, podemos descomponer la lagrangiana en el sector de corrientes de quarks (\mathcal{L}_q^C) y de leptones (\mathcal{L}_l^C) [13].

Sector de Corrientes para Quarks

Para este sector, en términos de los campos de norma, se conserva el sabor dado por

$$\mathcal{L}_q^C = i\bar{Q}_{i,L}\gamma^\mu D_\mu Q'_{i,L} + i\bar{u}'_{i,R}\gamma^\mu D_\mu u'_{i,R} + i\bar{d}'_{i,R}\gamma^\mu D_\mu d'_{i,R}, \quad (1.49)$$

en la ecuación anterior podemos hacer uso de la notación slash de Feynmann. La ecuación (1.48) expresada en términos de los campos de masa adquiere la forma

$$\mathcal{L}_q^C = i\bar{U}\gamma^\mu\partial_\mu U + i\bar{D}\gamma^\mu\partial_\mu D + \frac{g_2}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ J^{-\mu} + J_\mu^+ W^{-\mu}) + \frac{g_2}{2c_W}Z_\mu J_Z^\mu + eA_\mu J_A^\mu, \quad (1.50)$$

donde las corrientes cargadas, $J^{-\mu}$, y neutras, J_Z^μ y J_A^μ , están definidas como

$$\begin{aligned} J^{-\mu} &= \bar{U}_L\gamma^5 K D_L \\ J_Z^\mu &= \bar{U}\gamma^\mu (g_V^u + g_A^u\gamma^5) U + \bar{D}\gamma^\mu (d_V^d + g_A^d\gamma^5) D \\ J_A^\mu &= \bar{U}\gamma^\mu U + \bar{D}\gamma^\mu D, \end{aligned} \quad (1.51)$$

siendo K es la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Masakawa (CKM) definida en la ecuación (1.40), mientras que $g_V u_i$ con constantes de acoplamiento que dependen de la carga del quark $u_i = u, d$. Debido a la unitariedad de las matrices $V_{L,R}^{u,d}$ las corrientes neutras conservan el sabor, sin embargo, en las corrientes cargadas se dan transiciones entre diferentes familias mediante la matriz de CKM. La presencia de corrientes cargadas con cambio de sabor a nivel árbol da lugar a la aparición de corrientes neutras con cambio de sabor a nivel de un lazo.

Sector de Corrientes para Leptones

Producto de la ausencia de neutrinos derechos, la lagrangiana de corrientes para leptones está dado por [13]

$$\mathcal{L}_l^C = i\bar{L}_{iL}\gamma^\mu D_\mu L'_{iL} + i\bar{l}'_{iR}\gamma^\mu D_\mu l'_{iR}. \quad (1.52)$$

Así como en el caso de los quarks, se conserva el sabor. En terminos de los campos de masa la lagrangiana (1.52) adquiere la forma

$$\mathcal{L}_l^C = i\bar{E}_i\gamma^\mu\partial_\mu E_i + i\bar{\nu}_L\gamma^\mu\partial_\mu \nu_L + \frac{g_2}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ J^{-\mu} + J_\mu^+ W^{-\mu}) + \frac{g_2}{2c_W}Z_\mu J_Z^\mu + eA_\mu J_A^\mu, \quad (1.53)$$

en este caso las corrientes cargadas, $J^{-\mu}$, y neutras, J_Z^μ y J_A^μ , están definidas como

$$\begin{aligned} J^{-\mu} &= \bar{\nu}_L\gamma^5 E_L \\ J_Z^\mu &= \bar{\nu}\gamma^\mu (g_V^v + g_A^v\gamma^5) \nu + \bar{E}\gamma^\mu (d_V^d + g_A^d\gamma^5) E \\ J_A^\mu &= \bar{\nu}_L\gamma^\mu \nu_L + \bar{E}\gamma^\mu E, \end{aligned} \quad (1.54)$$

siendo $g_V^{l_i}$ y $g_A^{l_i}$, $l_i = \nu, E$ constantes de acoplamiento que dependen de los números cuánticos con que se acomodan los leptones en el grupo electrodébil. Debido a la ausencia de neutrinos

derechos, las corrientes conservan el sabor a todo orden en la serie perturbativa. Es menester señalar que la ausencia de interacciones de entre leptones de diferentes familias medidas por el bosón cargado, no solo se debe a la falta de neutrinos derechos, sino también a que el sector de corrientes es invariante al sabor.

1.3.6. Lagrangiano de QCD

La cromodinámica cuántica (QCD) describe las interacciones entre gluones y quarks mediante el requerimiento de invariancia de norma local. Mediante la imposición de la condición de renormalizabilidad, se bosqueja la forma del lagrangiano asociado a esta teoría; este lagrangiano es del tipo de Yang-Mills con base en el grupo de norma $SU(3)_C$, con lo que obtenemos un lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}Tr [G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] + \bar{q}_i (i\gamma^\mu D_\mu - m_i) q_i \quad (1.55)$$

donde $q_i = u, d, s, c, b, t$. son los campos de quarks con masa m_i , D_μ es la derivada covariante definida como

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s G_\mu \quad (1.56)$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu + ig_s [G_\mu, G_\nu] \quad (1.57)$$

siendo $G_\mu = G_\mu^a \lambda^a / 2$, donde λ^a representa a las matrices de Gell-Mann (véase Apéndice B), generadores del grupo $SU(3)_C$, las que satisfacen la relación de conmutación

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c, \quad (1.58)$$

cuya condición de renormalización es

$$Tr [\lambda^a \lambda^b] = 2\delta^{ab}, \quad (1.59)$$

lo que conduce a

$$-\frac{1}{2}Tr [G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (1.60)$$

por tanto el lagrangiano toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{QCD} = & -\frac{1}{4} (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) + \bar{q}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_i) q_i - g_s \bar{q}_i \gamma^\mu \left(\frac{\lambda^a}{2} \right) q_i G_\mu^a \\ & + \frac{g_s^2}{2} f^{abc} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) G_\mu^b G_\nu^c - \frac{g_s^2}{4} f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Los campos de norma de la interacción fuerte, G_μ^a , son denominados gluones y dada la relación con la simetría de norma $SU(3)_c$ se deduce que existen ocho tipos de gluones. Son eléctricamente neutros; es decir, no tienen interacciones con el campo electromagnético.

Interactúan con los quarks de una manera que es algo así como una interacción de fotones, pero con una diferencia importante: dado que los generadores no son todos diagonales, la interacción con un gluón puede cambiar la carga de color de un quark [14]. Más aun, como se trata de una teoría no abeliana los gluones interactúan entre sí, por lo que surgen verices trilineales y cuárticos como se aprecia en la ecuación (1.61). Análogamente a la parte electrodébil de la teoría, en el lagrangiano de interacción entre fermiones y bosones de norma aparecen los acoplamientos entre quarks y gluones.

Capítulo 2

Anomalía Magnética Débil Mediante Un Bosón de Higgs

2.1. Lagrangiano de Violación de Sabor Tipo Yukawa

Si bien el sector de Yukawa del ME presenta conservación de sabor y conservación de CP ¹, a nivel árbol puede inducirse violación de sabor si se introducen nuevos campos escalares, por ejemplo, a través de un doblete de Higgs extra. Una alternativa, que no contempla la introducción de nuevos grados de libertad, consiste en incorporar a la acción clásica los efectos virtuales de grados de libertad pesados introduciendo operadores invariantes $SU_L(2) \times U_Y(1)$, de dimensión mayor a cuatro [6, 7]. De hecho, solo es necesario extender el sector Yukawa con operadores de dimensión seis para inducir el acoplamiento más general del bosón de Higgs a los quarks y leptones. Motivado por el rol jugado por el sector de Yukawa en la física de sabor, asumiremos que la fuente principal de corrientes neutras que cambian sabor, mediadas por el bosón de Higgs, provendrán de sectores extendidos de Yukawa que contienen operadores de dimensión seis [7]. Un sector Yukawa con estas características tiene la siguiente estructura

$$\mathcal{L}_{eff}^Y = -Y_{ij}^q (\bar{Q}_i \Phi_q q_j) - \frac{\alpha_{ij}^q}{\Lambda^2} (\Phi^\dagger \Phi) (\bar{Q}_i \Phi_q q_j) + H.c., \quad (2.1)$$

donde Y_{ij} , Q_i , Φ_q ($\Phi_q = \Phi, \tilde{\Phi}$ para $q = d, u$ respectivamente y la suma sobre q es implícita), d_i , y u_i representan los componentes usuales de la matriz de Yukawa, el doblete izquierdo de quarks, el doblete de Higgs y los singuletes de quark *up* y *down* diestros, respectivamente. Los números α_{ij} son componentes de una matriz general de 3×3 entradas, tal que parametriza los detalles de la física subyacente de los nuevos efectos de la física, mientras que Λ es la escala típica de estos nuevos efectos físicos. Este sector efectivo de Yukawa induce un sabor y violación CP en el acoplamiento $f_i f_j H$ del tipo renormalizable dado por

$$\Gamma_{f_i f_j H} = -i (\omega_R^{ij} P_R + \omega_L^{ij} P_L), \quad (2.2)$$

¹La transformación CP combina los operadores de conjugación de carga C y paridad P. Bajo CP, un electrón zurdo se convierte en un positrón diestro. Si CP es una simetría exacta, las leyes de la naturaleza serían completamente idénticas para la materia y la antimateria. La mayoría de los fenómenos observados son simétricos con respecto a C y P y, en consecuencia, simétricos a CP [10].

donde $\omega_R^{ij} = \frac{gm_i}{2m_W} \delta_{ij} + \Omega_{ij}$ y $\omega_R^{ij} = \frac{gm_i}{2m_W} \delta_{ij} + \Omega_{ij}^*$, con $P_{R,L} = (1 \pm \gamma^5)/2$. En estas expresiones, $\Omega^{(u,d)} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{v}{\Lambda}\right)^2 V_L^{(U,d)} \alpha^{(u,d)} V_R^{(u,d)\dagger}$, siendo $V_L^{(u,d)}$ y $V_R^{(u,d)}$ las usuales matrices unitarias que se correlacionan los estados de Gauge con los estados propios de la masa. Vamos a enfatizar que este vértice describe el acoplamiento renormalizable más general de una campo escalar a un par de fermiones que reproduce las características medias de la mayoría de los sectores extendidos de Yukawa [7, 15].

2.2. Anomalía Magnética Débil Mediante un Bosón de Higgs

A continuación se plasma el cambio de sabor de un fermión debido a la interacción de este con un bosón de Higgs. Paralelamente al caso del vértice del electrón, nos encontramos con un lazo; exceptuando que este lazo está formado por un bosón de Higgs en vez de un fotón. Es requerido que nos basemos en la estructura de Lorentz más general del acoplamiento Zff , donde los fermiones están *on-shell*, dada por [16]:

$$\Gamma_\mu^{Zff}(q^2) = (V_f^Z(q^2) + A_f^Z(q^2) \gamma_5) \gamma_\mu + (F_{fM}^Z(q^2) - iF_{fE}^Z(q^2) \gamma_5) i\sigma_{\mu\nu} q^\nu \quad (2.3)$$

donde q es el momento que se transfiere y $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Así como en el Apéndice A, se cumple que $q = p - p'$. Los factores de forma $V_f^Z(q^2)$ y $A_f^Z(q^2)$ parametrizan los flujos axiales y vectoriales.

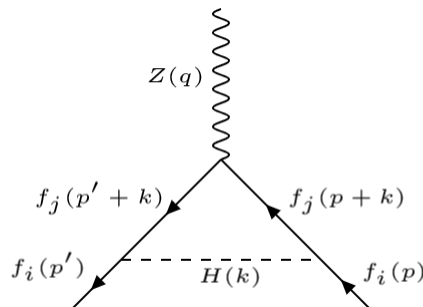


Figura 2.1: *Vértice caso QCD*. Cambio de sabor de un fermión.

Al construir la amplitud con las reglas de Feynman para la teoría electrodébil [17], logramos obtener

$$i\mathcal{M}^\mu = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') \left[\Gamma_{f_j f_i H} \frac{-i(\not{k} + \not{p}' + m_{f_j})}{(k + p')^2 - m_{f_j}^2} \frac{-ig_z \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma^5)}{2} \right. \\ \left. \times \frac{-i(\not{k} + \not{p} + m_{f_j})}{(k + p)^2 - m_{f_j}^2} \Gamma_{f_i f_j H} \frac{i}{k^2 - m_H^2} \right] u(p) \quad (2.4)$$

Cuadro 2.1: Valores de g_V y g_A en el Modelo Estándar.

f_j	g_V	g_A
ν_e, ν_μ, ν_τ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e, μ, τ	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_w$
u, c, t	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_w$
d, s, b	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w$

donde $g_W = \frac{g}{2 \cos \theta_w}$, $g_Z = \frac{e}{\sin \theta_w \cos \theta_w}$, mientras que los valores de g_V y g_A se muestran en el cuadro 2.1.

$$i\mathcal{M}^\mu = \frac{-(i)^6 g_z}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') \left[\frac{\Gamma_{f_j f_i H} (\not{k} + \not{p}' + m_{f_j}) \gamma^\mu (\not{k} + \not{p} + m_{f_j}) \Gamma_{f_i f_j H g_V}}{\left[(k+p')^2 - m_{f_j}^2 \right] \left[(k+p)^2 - m_{f_j}^2 \right] [k^2 - m_H^2]} - \frac{\Gamma_{f_j f_i H} (\not{k} + \not{p}' + m_{f_j}) \gamma^\mu \gamma^5 (\not{k} + \not{p} + m_{f_j}) \Gamma_{f_i f_j H g_A}}{\left[(k+p')^2 - m_{f_j}^2 \right] \left[(k+p)^2 - m_{f_j}^2 \right] [k^2 - m_H^2]} \right] u(p) \quad (2.5)$$

Haciendo uso de la definicion del verce del bosón de Higgs dado por la ecuación (2.2) como lo refieren [15, 7], la amplitud toma la forma

$$i\mathcal{M}^\mu = \frac{-(i)^8 g_z}{2} \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') \left[\frac{g_V N D_1^\mu - g_A N D_2^\mu}{\left[(k+p')^2 - m_{f_j}^2 \right] \left[(k+p)^2 - m_{f_j}^2 \right] [k^2 - m_H^2]} \right] u(p) \quad (2.6)$$

donde $N D_1^\mu = (\omega_R^{ji} P_R + \omega_L^{ji} P_L) (\not{k} + \not{p}' + m_{f_j}) \gamma^\mu (\not{k} + \not{p} + m_{f_j}) (\omega_R^{ij} P_R + \omega_L^{ij} P_L)$ y $N D_2^\mu = (\omega_R^{ji} P_R + \omega_L^{ji} P_L) (\not{k} + \not{p}' + m_{f_j}) \gamma^\mu \gamma^5 (\not{k} + \not{p} + m_{f_j}) (\omega_R^{ij} P_R + \omega_L^{ij} P_L)$. Ahora debemos aplicar el método de parametrización de Feynman a ambas partes del numerador y al denominador con el objetivo de hacer manejables las integrales. Haciendo el cambio de variable $k = \ell - yq + zp$ obtendremos términos de la forma $\not{\ell} \gamma^\mu \not{\ell}$ y $\not{\ell} \gamma^\mu \gamma^5 \not{\ell}$, en un procedimiento análogo al expuesto para las ecuaciones (A.15) y (A.17) del Apéndice A, construimos las integrales

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} (\omega_R^{ji} P_R + \omega_L^{ji} P_L) \not{\ell} \gamma^\mu \not{\ell} (\omega_R^{ij} P_R + \omega_L^{ij} P_L) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \ell^2 (\omega_R^{ji} P_R + \omega_L^{ji} P_L) \gamma^\mu (\omega_R^{ij} P_R + \omega_L^{ij} P_L), \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} (\omega_R^{ji} P_R + \omega_L^{ji} P_L) \not{\ell} \gamma^\mu \gamma^5 \not{\ell} (\omega_R^{ij} P_R + \omega_L^{ij} P_L) \\
 = \frac{1}{2} \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \ell^2 (\omega_R^{ji} P_R + \omega_L^{ji} P_L) \gamma^\mu \gamma^5 (\omega_R^{ij} P_R + \omega_L^{ij} P_L);
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

con las que podemos expandir la primera parte del numerador hasta adquirir la forma

$$\begin{aligned}
 ND_1^\mu &= (\omega_R^{ji} P_R + \omega_L^{ji} P_L) (\not{k} + \not{p}' + m_{f_j}) \gamma^\mu (\not{k} + \not{p} + m_{f_j}) (\omega_R^{ij} P_R + \omega_L^{ij} P_L) \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ 2 \left[(\omega_L^{ji} \omega_R^{ij} + \omega_L^{ij} \omega_R^{ji}) \not{q} + (\omega_L^{ji} \omega_R^{ij} - \omega_L^{ij} \omega_R^{ji}) \not{q} \gamma^5 \right] q^\mu y^2 \right. \\
 &\quad - m_{f_j} (\omega_L^{ij} \omega_L^{ji} + \omega_R^{ij} \omega_R^{ji}) \gamma^\mu \not{q} y - m_{f_j} \omega_L^{ij} \omega_L^{ji} \not{q} \gamma^\mu y - m_{f_j} \omega_R^{ij} \omega_R^{ji} \not{q} \gamma^\mu y \\
 &\quad + m_{f_j} \omega_L^{ij} \omega_L^{ji} \gamma^\mu \not{q} \gamma^5 y - m_{f_j} \omega_R^{ij} \omega_R^{ji} \gamma^\mu \not{q} \gamma^5 y - \omega_L^{ij} \omega_R^{ij} z \not{p} \gamma^\mu \not{q} y \\
 &\quad - \omega_L^{ij} \omega_R^{ij} \not{p}' \gamma^\mu \not{q} y - \omega_L^{ij} \omega_R^{ij} \not{p}' \not{q} y + m_{f_j} \omega_L^{ij} \omega_L^{ji} \not{q} \gamma^\mu \gamma^5 y - m_{f_j} \omega_R^{ij} \omega_R^{ji} \not{q} \gamma^\mu \gamma^5 y \\
 &\quad - \omega_L^{ij} \omega_R^{ij} \not{q} \gamma^\mu \not{p} y - \omega_L^{ij} \omega_R^{ij} \not{q} \gamma^\mu \not{p} y - \omega_L^{ij} \omega_R^{ij} z \not{q} \gamma^\mu \not{p} y - \omega_L^{ij} \omega_R^{ij} z \not{q} \gamma^\mu \not{p} y \\
 &\quad - \omega_L^{ij} \omega_R^{ij} z \not{p} \gamma^\mu \not{q} \gamma^5 y + \omega_L^{ij} \omega_R^{ij} z \not{p} \gamma^\mu \not{q} \gamma^5 y - \omega_L^{ij} \omega_R^{ij} \not{p}' \gamma^\mu \not{q} \gamma^5 + \omega_L^{ij} \omega_R^{ij} \not{p}' \gamma^\mu \not{q} \gamma^5 \\
 &\quad - \omega_L^{ij} \omega_R^{ij} \not{q} \gamma^\mu \not{p} \gamma^5 y + \omega_L^{ij} \omega_R^{ij} \not{q} \gamma^\mu \not{p} \gamma^5 y - \omega_L^{ij} \omega_R^{ij} z \not{q} \gamma^\mu \not{p} \gamma^5 y + \omega_L^{ij} \omega_R^{ij} z \not{q} \gamma^\mu \not{p} \gamma^5 y \\
 &\quad + m_{f_j} (\omega_L^{ij} \omega_L^{ji} + \omega_R^{ij} \omega_R^{ji}) (z + 1) \gamma^\mu \not{p} + m_{f_j} \omega_L^{ij} \omega_L^{ji} z \not{p} \gamma^\mu + m_{f_j} \omega_R^{ij} \omega_R^{ji} z \not{p} \gamma^\mu \\
 &\quad + m_{f_j} \omega_L^{ij} \omega_L^{ji} \not{p}' \gamma^\mu + m_{f_j} \omega_R^{ij} \omega_R^{ji} \not{p}' \gamma^\mu - m_{f_j} \omega_L^{ij} \omega_L^{ji} \gamma^\mu \not{p} \gamma^5 + m_{f_j} \omega_R^{ij} \omega_R^{ji} \gamma^\mu \not{p} \gamma^5 \\
 &\quad - m_{f_j} \omega_L^{ij} \omega_L^{ji} z \gamma^\mu \not{p} \gamma^5 + m_{f_j} \omega_R^{ij} \omega_R^{ji} z \gamma^\mu \not{p} \gamma^5 - m_{f_j} \omega_L^{ij} \omega_L^{ji} z \not{p} \gamma^\mu \gamma^5 \\
 &\quad + m_{f_j} \omega_R^{ij} \omega_R^{ji} z \not{p} \gamma^\mu \gamma^5 - m_{f_j} \omega_L^{ij} \omega_L^{ji} \not{p}' \gamma^\mu \gamma^5 + m_{f_j} \omega_R^{ij} \omega_R^{ji} \not{p}' \gamma^\mu \gamma^5 + \omega_L^{ij} \omega_R^{ij} \not{p}' \gamma^\mu \not{p} \\
 &\quad + \omega_L^{ij} \omega_R^{ij} \not{p}' \gamma^\mu \not{p} + \omega_L^{ij} \omega_R^{ij} z \not{p}' \gamma^\mu \not{p} + \omega_L^{ij} \omega_R^{ij} z \not{p}' \gamma^\mu \not{p} + \omega_L^{ij} \omega_R^{ij} \not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma^5 \\
 &\quad - \omega_L^{ij} \omega_R^{ij} \not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma^5 + \omega_L^{ij} \omega_R^{ij} z \not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma^5 - \omega_L^{ij} \omega_R^{ij} z \not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma^5 + 2\omega_L^{ij} \omega_R^{ij} z^2 \not{p} p^\mu \\
 &\quad + 2\omega_L^{ij} \omega_R^{ij} z^2 \not{p} p^\mu + 2\omega_L^{ij} \omega_R^{ij} z \not{p} p^\mu + 2\omega_L^{ij} \omega_R^{ij} z \not{p} p^\mu + 2\omega_L^{ij} \omega_R^{ij} z^2 \\
 &\quad - 2\omega_L^{ij} \omega_R^{ij} z^2 \not{p} \gamma^5 p^\mu + 2\omega_L^{ij} \omega_R^{ij} z \not{p} \gamma^5 p^\mu - 2\omega_L^{ij} \omega_R^{ij} z \not{p} \gamma^5 p^\mu \left. \right\} \\
 &\quad - (\omega_L^{ji} \omega_R^{ij} + \omega_L^{ij} \omega_R^{ji}) \gamma^\mu \left[2(z^2 + z - 1) m_{f_j}^2 + \ell^2 + 2y^2 q^2 \right] \\
 &\quad - (\omega_L^{ji} \omega_R^{ij} - \omega_L^{ij} \omega_R^{ji}) \gamma^\mu \gamma^5 \left[2(z^2 + z - 1) m_{f_j}^2 + \ell^2 + 2y^2 q^2 \right].
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Haciendo uso de la ecuación de Dirac tenemos que

$$\begin{aligned}
 \not{p} u(p) &= m u(p), \quad \bar{u}(p') \not{p}' = m \bar{u}(p') \\
 \bar{u}(p') \not{q} u(p) &= \bar{u}(p') (\not{p}' - \not{p}) u(p) = 0,
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

del álgebra de Dirac, y sustituyendo los términos de \not{q} como $\not{p}' - \not{p}$, encontramos que

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(p') \not{q} \gamma^5 u(p) &= \bar{u}(p') (\not{p}' - \not{p}) \gamma^5 u(p) = \bar{u}(p') 2m_{f_i} \gamma^5 u(p), \\
 \bar{u}(p') \not{q} \gamma^\mu \gamma^5 u(p) &= \bar{u}(p') (\not{p}' - \not{p}) \gamma^\mu \gamma^5 u(p) = -2p^\mu \bar{u}(p') \gamma^5 u(p), \\
 \bar{u}(p') \gamma^\mu \not{q} \gamma^5 u(p) &= \bar{u}(p') \gamma^\mu (\not{p}' - \not{p}) \gamma^5 u(p) = 2p'^\mu \bar{u}(p') \gamma^5 u(p).
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Lo anterior nos dota de la posibilidad de plasmar la ecuación (2.9) como

$$\begin{aligned}
 ND_1^\mu &= m_{f_j} \left\{ [\omega_R^{ij} (z\omega_L^{ji} + \omega_L^{ji} + \omega_R^{ji}) + \omega_L^{ij} (\omega_L^{ji} + \omega_R^{ji} + \omega_R^{ji}z)] [(y+z)p^\mu - yp'^\mu] \right. \\
 &\quad + \gamma^5 [(y+z) (- (\omega_L^{ij} + \omega_R^{ij}) (\omega_L^{ji} - \omega_R^{ji}) - \omega_L^{ji}\omega_R^{ij}z\omega_L^{ij}\omega_R^{ji}z) p^\mu \\
 &\quad + y (\omega_L^{ij} (\omega_L^{ji} + \omega_R^{ji} + \omega_R^{ji}z) - \omega_R^{ji} (z\omega_L^{ji} + \omega_L^{ji} + \omega_R^{ji})) p'^\mu \\
 &\quad \left. + 2 (\omega_L^{ji}\omega_R^{ij} - \omega_L^{ij}\omega_R^{ji}) y(y+z)q^\mu \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{4} (\omega_L^{ji}\omega_R^{ij} - \omega_L^{ij}\omega_R^{ji}) \gamma^\mu \gamma^5 [2z(z+2) m_{f_j} + \ell^2 + 2y(y+z)q^2] \\
 &\quad + \frac{1}{4} \gamma^\mu \left\{ 2m_{f_j} [2 (\omega_L^{ij} + \omega_R^{ij}) (\omega_L^{ji} + \omega_R^{ji}) - (\omega_L^{ji}\omega_R^{ij} + \omega_L^{ij}\omega_R^{ji}) z^2] \right. \\
 &\quad \left. - (\omega_L^{ji}\omega_R^{ij} + \omega_L^{ij}\omega_R^{ji}) [\ell^2 + 2y(y+z)q^2] \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Ahora, para los términos que contienen los factores p'^μ y p^μ aplicamos la identidad de Gordon,

$$\bar{u}(p')(p'+p)^\mu u(p) = \bar{u}(p') [2m\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu}q_\nu] u(p), \tag{2.13}$$

lo que nos conduce a

$$\begin{aligned}
 p^\mu &= \frac{1}{2} (p+p')^\mu - \frac{1}{2} q^\mu \\
 &= \frac{1}{2} (2m_{f_i}\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu}q_\nu) - \frac{1}{2} q^\mu,
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

y a

$$\begin{aligned}
 p'^\mu &= \frac{1}{2} (p+p')^\mu + \frac{1}{2} q^\mu \\
 &= \frac{1}{2} (2m_{f_i}\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu}q_\nu) + \frac{1}{2} q^\mu.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

De forma paralela se debe desarrollar el caso que contiene el término $\gamma^\mu\gamma^5$, el cual se desarrolla a continuación: Partimos del hecho de que

$$i\gamma^5\sigma^{\mu\nu}q_\nu = i\gamma^5\sigma^{\mu\nu}(p'-p)_\nu \tag{2.16}$$

y tomando en cuenta que

$$\begin{aligned}
 i\sigma^{\mu\nu} &= i \cdot \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \\
 &= -\frac{1}{2} (\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\nu\gamma^\mu) \\
 &= -\frac{1}{2} (2g^{\mu\nu} - 2\gamma^\nu\gamma^\mu) \\
 &= \gamma^\nu\gamma^\mu - g^{\mu\nu},
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

lo que nos conduce a

$$\begin{aligned}
 p^\mu \gamma^5 &= \frac{1}{2} (p + p')^\mu \gamma^5 - \frac{1}{2} q^\mu \gamma^5 \\
 &= -\frac{1}{2} (i\gamma^5 \sigma^{\mu\nu} q_\nu) - \frac{1}{2} q^\mu \gamma^5,
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

y análogamente tenemos

$$\begin{aligned}
 p'^\mu \gamma^5 &= \frac{1}{2} (p + p')^\mu \gamma^5 + \frac{1}{2} q^\mu \gamma^5 \\
 &= -\frac{1}{2} (i\gamma^5 \sigma^{\mu\nu} q_\nu) + \frac{1}{2} q^\mu \gamma^5.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ahora procedemos a sustituir las ecuaciones (2.14), (2.15), (2.18), (2.19) en (2.11), lo que nos lleva a expresar el ND_1 como

$$\begin{aligned}
 ND_1^\mu &= \frac{1}{4} [-2im_{f_j} [\omega_R^{ji} (z\omega_L^{ji} + \omega_L^{ji} + \omega_R^{ji}) + \omega_L^{ij} (\omega_L^{ji} + \omega_R^{ji} + \omega_R^{ji}z)] \sigma^{\mu\nu} q_\nu \\
 &\quad + 2im_{f_j} [\omega_L^{ji} (\omega_L^{ij}z + \omega_R^{ij}(z+1)(2y+z)) \\
 &\quad - \omega_R^{ji} (\omega_R^{ij}z + \omega_L^{ij}(z+1)(2y+z))] \gamma^5 \sigma^{\mu\nu} q_\nu \\
 &\quad - 2m_{f_j} (2y+z) [\omega_R^{ij} (z\omega_L^{ij} + \omega_L^{ij}\omega_R^{ij}) + \omega_L^{ij} (\omega_L^{ji} + \omega_R^{ji} + \omega_R^{ji}z)] q^\mu \\
 &\quad + 2m_{f_j} [\omega_R^{ij} (\omega_L^{ji} ((2y+z)^2 + z) - \omega_R^{ji}(2y+z)) \\
 &\quad + \omega_L^{ij} (\omega_L^{ij}(2y+z) - \omega_R^{ji} ((2y+z)^2 + z))] \gamma^5 q^\mu \\
 &\quad - (\omega_L^{ji}\omega_R^{ij} - \omega_L^{ij}\omega_R^{ji}) \gamma^\mu \gamma^5 (2z(z+2)m_{f_j}^2 + \ell^2 + 2y(y+z)q^2) \\
 &\quad + [2m_{f_j}^2 ((\omega_L^{ji}\omega_R^{ij} + \omega_L^{ij}\omega_R^{ji}) z^2 + 2(\omega_L^{ij} + \omega_R^{ij}) (\omega_L^{ji} + \omega_R^{ji}) z \\
 &\quad + 2(\omega_L^{ij} + \omega_R^{ij}) (\omega_L^{ji} + \omega_R^{ji})) - (\omega_L^{ji}\omega_R^{ij} + \omega_L^{ij}\omega_R^{ji}) (\ell^2 + 2y(y+z)q^2)] \gamma^\mu].
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Aplicando el procedimiento análogo a la segunda parte del numerador, llegamos a

$$\begin{aligned}
ND_2^\mu &= (\omega_R^{ji} P_R + \omega_L^{ji} P_L) (\not{k} + \not{p}' + m_{f_j}) \gamma^\mu \gamma^5 (\not{k} + \not{p} + m_{f_j}) (\omega_R^{ij} P_R + \omega_L^{ij} P_L) \\
&= \frac{1}{4} [2im_{f_j} [\omega_L^{ij} (\omega_L^{ji} (2y + z) - \omega_R^{ji} z (z + 1)) \\
&\quad + \omega_R^{ij} (z(z + 1) - \omega_R^{ji} (2y + y))] \sigma^{\mu\nu} q_\nu \\
&\quad - 2im_{f_j} (2y + z) [\omega_R^{ij} (z\omega_L^{ji} + \omega_L^{ji} + \omega_R^{ji}) \\
&\quad + \omega_L^{ij} (\omega_L^{ji} + \omega_R^{ji} + \omega_R^{ji} z)] \gamma^5 \sigma^{\mu\nu} q_\nu \\
&\quad + 2m_{f_j} [\omega_L^{ji} (\omega_L^{ij} z + \omega_R^{ij} (z + 1)(2y + z)) \\
&\quad - \omega_R^{ji} (\omega_R^{ij} z + \omega_L^{ij} (z + 1)(2y + z))] q^\mu \\
&\quad - 2m_{f_j} [\omega_R^{ji} (\omega_R^{ij} z + \omega_L^{ij} ((2y + z)^2 + z)) \\
&\quad + \omega_L^{ji} (\omega_L^{ij} z + \omega_R^{ij} ((2y + z)^2 + z))] \gamma^5 q^\mu \\
&\quad - (\omega_L^{ij} \omega_R^{ij} - \omega_L^{ij} \omega_R^{ji}) [2z(z + 2)m_{f_j}^2 - \ell^2 - 2y(y + z)q^2] \gamma^\mu \\
&\quad + [2m_{f_j} ((\omega_L^{ji} \omega_R^{ij} + \omega_L^{ij} \omega_R^{ji}) z^2 + 2(\omega_L^{ij} + \omega_R^{ij}) (\omega_L^{ji} + \omega_R^{ji}) z \\
&\quad + 2(\omega_L^{ij} + \omega_R^{ij}) (\omega_L^{ji} + \omega_R^{ji})) \\
&\quad + (\omega_L^{ji} \omega_R^{ij} + \omega_L^{ij} \omega_R^{ji}) (\ell^2 + 2y(y + z)q^2)] \gamma^\mu \gamma^5].
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Con las ecuaciones (2.20) y (2.21), el numerador del integrando de la integral (2.26) adquiere la forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N} &= g_V N D_1^\mu - g_A N D_2^\mu \\
 &= \frac{1}{4} \left[-2im_{f_j} \left\{ [(g_A + g_V) \omega_L^{j_i} \omega_R^{i_j} - (g_A - g_V) \omega_L^{i_j} \omega_R^{j_i}] z^2 \right. \right. \\
 &\quad + (\omega_L^{i_j} + \omega_R^{i_j}) [g_A (\omega_L^{j_i} - \omega_R^{j_i}) + g_V (\omega_L^{j_i} + \omega_R^{j_i})] z \\
 &\quad + 2g_A (\omega_L^{i_j} \omega_R^{j_i} - \omega_R^{i_j} \omega_L^{j_i}) y \left. \right\} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \\
 &\quad + 2im_{f_j} \left\{ g_A (2y + z) [\omega_R^{i_j} (z\omega_L^{j_i} + \omega_L^{j_i} + \omega_R^{j_i}) + \omega_L^{i_j} (\omega_L^{j_i} + \omega_R^{j_i} + \omega_R^{j_i} z)] \right. \\
 &\quad + g_V [\omega_L^{j_i} (\omega_L^{i_j} z + \omega_R^{i_j} (z + 1)(2y + z)) \\
 &\quad \left. - \omega_R^{j_i} (\omega_R^{i_j} z + \omega_L^{i_j} (z + 1)(2y + z))] \right\} \gamma^5 \sigma^{\mu\nu} q_\nu \\
 &\quad - 2m_{f_j} \left\{ g_V (2y + z) [\omega_R^{i_j} (z\omega_L^{i_j} + \omega_L^{j_i} + \omega_R^{j_i}) + \omega_L^{i_j} (\omega_L^{j_i} + \omega_R^{j_i} + \omega_R^{j_i} z)] \right. \\
 &\quad + g_A [\omega_L^{j_i} (\omega_L^{i_j} z + \omega_R^{i_j} (z + 1)(2y + z)) \\
 &\quad \left. - \omega_R^{j_i} (\omega_R^{i_j} z + \omega_L^{i_j} (z + 1)(2y + z))] \right\} q^\mu \\
 &\quad + 2m_{f_j} \left\{ g_A [\omega_R^{j_i} (\omega_R^{i_j} z + \omega_L^{i_j} ((2y + z)^2 + z)) \right. \\
 &\quad \left. + \omega_L^{j_i} (\omega_L^{i_j} z + \omega_R^{i_j} ((2y + z)^2 + z))] \right. \\
 &\quad + g_V [\omega_R^{i_j} (\omega_L^{j_i} ((2y + z)^2 + z) - \omega_R^{j_i} (2y + z)) \\
 &\quad \left. + \omega_L^{i_j} (\omega_L^{j_i} (2y + z) - \omega_R^{j_i} ((2y + z)^2 + z))] \right\} \gamma^5 q^\mu \\
 &\quad + [2m_{f_j} \left\{ g_A [\omega_L^{j_i} \omega_R^{i_j} - \omega_L^{i_j} \omega_R^{j_i}] z(z + 2) \right. \\
 &\quad + g_V [(\omega_L^{j_i} \omega_R^{i_j} - \omega_L^{i_j} \omega_R^{j_i}) z^2 + 2(\omega_L^{i_j} + \omega_R^{i_j}) (\omega_L^{j_i} + \omega_R^{j_i}) z \\
 &\quad \left. + 2(\omega_L^{i_j} + \omega_R^{i_j}) (\omega_L^{j_i} + \omega_R^{j_i}) \right\} \\
 &\quad - [(g_A + g_V) \omega_L^{i_j} \omega_R^{i_j} - (g_A - g_V) \omega_L^{i_j} \omega_R^{j_i}] [\ell^2 + 2y(y + z)q^2] \gamma^\mu \\
 &\quad - \left\{ 2m_{f_j} [g_V (\omega_L^{j_i} \omega_R^{i_j} - \omega_L^{i_j} \omega_R^{j_i}) z(z + 2) \right. \\
 &\quad + g_A [(\omega_L^{j_i} \omega_R^{i_j} + \omega_L^{i_j} \omega_R^{j_i}) z^2 + 2z(\omega_L^{i_j} + \omega_R^{i_j}) (\omega_L^{j_i} \omega_R^{j_i}) \\
 &\quad \left. + 2(\omega_L^{i_j} + \omega_R^{i_j}) (\omega_L^{j_i} + \omega_R^{j_i})] \right. \\
 &\quad \left. + [(g_A + g_V) \omega_L^{j_i} \omega_R^{i_j} + (g_A - g_V) \omega_L^{i_j} \omega_R^{j_i}] [\ell^2 + 2y(y + z)q^2] \right\} \gamma^\mu \gamma^5 \right].
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

La información relevante para esta tesis estará contenida en los coeficientes que acompañan a las estructuras dipolares de Dirac $\sigma^{\mu\nu} q_\nu$ y $\gamma^5 \sigma^{\mu\nu} q_\nu$, los cuales se encuentran contenidos, precisamente, en la ecuación anterior (2.22). Aplicando la parametrización de Feynman al denominador del integrando de la ecuación (2.5) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{[(k + p')^2 - m_{f_i}^2] [(k + p)^2 - m_{f_i}^2] [k^2 - m_H^2]} \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(x + y + z - 1) \frac{2}{Denom^3},
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

donde

$$\begin{aligned}
 Denom &= x [k^2 - m_H^2] + y [(k + p')^2 - m_{f_i}^2] + z [(k + p)^2 - m_{f_i}^2] \\
 &= \ell^2(x + y + z) + zp' [2(\ell + pz - qy) + p'] \\
 &\quad + 2\ell [p(z(x + y) + y + z^2) - qy(x + y + z)] + z^2 [m_{f_i}^2(x + y) - 2pqy] \\
 &\quad + yz [2m_{f_j}^2 + q(qy - 2p(x + y))] + m_{f_j}^2 z^3 - m_{f_j}^2 z \\
 &\quad - m_H^2 x + qy^2 [q(x + y) - 2p].
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

De los parámetros Feynman tenemos que $x + y + z = 1$, por lo que la ecuación (2.24) toma la forma

$$\begin{aligned}
 Denom &= \ell^2 + 2p\ell(y + 2z) + p^2(y + 2z)^2 - mh^2 x + z [(2y + 3z)m_f^2 + q^2 y] \\
 &= [\ell + p(y + 2z)]^2 + yzq^2 + m_{f_j}^2 [7z^2 + 6yz + y^2] - m_H^2 x.
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Haciendo el cambio de variable $\ell \rightarrow \ell - p(y + 2z)$ $Denom$ toma la forma

$$Denom = \ell^2 - \Delta, \tag{2.26}$$

donde $\Delta = -yzq^2 - m_{f_j}^2 [7z^2 + 6yz + y^2] + m_H^2 x$. Dado que no tenemos términos de x en el numerador y que el término Δ de denominador lo podemos plasmar como $\Delta = -yzq^2 - m_{f_j}^2 [7z^2 + 6yz + y^2] + m_H^2 (1 - y - z)$; con esto tenemos a posibilidad de reescribir las integral (2.23) como

$$\frac{1}{[(k + p')^2 - m_{f_i}^2] [(k + p)^2 - m_{f_i}^2] [k^2 - m_H^2]} = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{2}{Denom^3}. \tag{2.27}$$

Los factores de forma que nos son de interés, F_{fM}^Z y F_{fE}^Z , moran en los términos independientes de ℓ en la ecuación (2.22); motivo por el cual debemos hacer uso de la integral [18]

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta)^3} &= i \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(-\ell_E^2 - \Delta)^3} \\
 &= (-1)^3 \frac{i}{8\pi^2} \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^3}{(\ell_E^2 + \Delta)^3} \\
 &= \frac{-i}{32\pi^2 \Delta}.
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Debe subrayarse que la integral anterior no presenta problemas de divergencias, por lo que se espera que una vez realizada la integración de los parámetros de Feynman los factores de forma F_{fM}^Z y F_{fE}^Z serán cantidades finitas. De este modo, los factores de forma de interés se pueden escribir como

$$\begin{aligned}
 F_{fM}^Z &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{-im_{f_j}}{32\pi^2 \Delta} \{ [(g_A + g_V) \omega_L^{ji} \omega_R^{ij} - (g_A - g_V) \omega_L^{ij} \omega_R^{ji}] z^2 \\
 &\quad + (\omega_L^{ij} + \omega_R^{ij}) [g_A (\omega_L^{ji} - \omega_R^{ji}) + g_V (\omega_L^{ji} + \omega_R^{ji})] z \\
 &\quad + 2g_A (\omega_L^{ij} \omega_L^{ji} - \omega_R^{ij} \omega_R^{ji}) y \}.
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}
 F_{fE}^Z = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{m_{f_j}}{32\pi^2 \Delta} \{ & g_A(2y+z) [\omega_R^{ij} (z\omega_L^{ji} + \omega_L^{ji} + \omega_R^{ji}) \\
 & + \omega_L^{ij} (\omega_L^{ji} + \omega_R^{ji} + \omega_R^{ji}z)] \\
 & + g_V [\omega_L^{ji} (\omega_L^{ij}z + \omega_R^{ij}(z+1)(2y+z)) \\
 & - \omega_R^{ji} (\omega_R^{ij}z + \omega_L^{ij}(z+1)(2y+z))] \}. \tag{2.30}
 \end{aligned}$$

Los factores de forma F_{fM}^Z y F_{fE}^Z contienen la información de la anomalía de momento magnético débil y del momento dipolar eléctrico débil, lo cual, entendemos, es parte de la estructura electromagnética débil de fermiones cargados.

Capítulo 3

Conclusiones y perspectivas

En esta tesis se ha estudiado la influencia de sectores de Yukawa extendidos, que contemplan el fenómeno de violación de sabor. Estos sectores generalizados de Yukawa se inducen en presencia de operadores efectivos invariantes ante el grupo de norma $SU_L(2) \times U_Y(1)$, donde al menos es necesario introducir operadores de dimensión seis, canónica, para generar los acoplamientos más generales entre el bosón de Higgs y los fermiones del ME. Dado que en el ME las transiciones que cambian sabor se encuentran fuertemente suprimidas, se hace interesante estudiar transiciones que violen sabor en propiedades o procesos donde el ME contribuya marginalmente, para así buscar efectos de física nueva.

Como principal resultado de este trabajo de tesis podemos mencionar que, mediante la inserción de acoplamientos de Yukawa que violan sabor, $Hf_i f_j$, se calcularon sus efectos en las propiedades electrodébiles de fermiones cargados del ME a través del vértice que acopla al bosón Z , neutro, del ME, con dos fermiones del mismo sabor, $Zf_i \bar{f}_i$, también del ME. Con el estudio de este último vértice, se calcularon las propiedades electrodébiles de fermiones cargados del ME, lo cual quedó determinado en las fórmulas analíticas obtenidas para los factores de forma F_{fM}^Z y F_{fE}^Z . Estas cantidades caracterizan la intensidad de la anomalía de momento magnético débil junto con el momento dipolar eléctrico débil; lo que es parte de la estructura electromagnética débil de fermiones cargados. Los resultados obtenidos fueron satisfactorios puesto que dichos factores son finitos y ya pueden evaluarse numéricamente.

Finalmente, comentamos que por cuestiones de tiempo no fue posible llevar a cabo la evaluación numérica para F_{fM}^Z y F_{fE}^Z , sin embargo, a la brevedad planea realizarse esta evaluación para completar el trabajo y ver la posibilidad de enviarlo a revisión en alguna revista de circulación internacional y de arbitraje estricto.

Apéndice A

Función de Vértice de Electrones

A.1. Parámetros Feynman

Para hacer la evaluación de la Función de vértice del Electrón requeriremos la utilizar los parámetros de Feynman

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[xA + (1-x)B]^2}, \quad (\text{A.1})$$

para probar la ecuación anterior, partimos del hecho de que:

$$\frac{1}{A-B} \int_B^A \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{A-B} \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) = \frac{1}{AB}, \quad (\text{A.2})$$

haciendo $Z = Ax + (1-x)B$ recuperamos la ecuación (A.1). De lo anterior podemos derivar la siguiente ecuación [19]:

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{1}{[A(1-x-y) + Bx + Cy]^3}. \quad (\text{A.3})$$

A.2. Evaluación

Partiendo del hecho de que el vértice efectivo tiene la forma [20]

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m} F_2(q^2), \quad (\text{A.4})$$

donde F_1 y F_2 denotan los factores de forma.

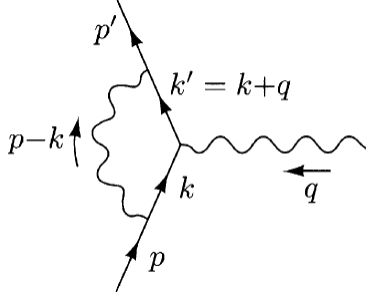


Figura A.1: *Diagrama Feynman de la Función de vértice del Electrón.*
 Los electrones están on-shell. El fotón, que tiene el momento q , está off-shell.

Partiendo del diagrama, aplicando las reglas de Feynman, obtenemos a orden α que $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \delta\gamma^\mu$ donde

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p', p)u(p) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\nu\rho}}{(p-k)^2 + i\epsilon} \bar{u}(p') (-ie\gamma^\rho) \frac{i(\not{k}' + m)}{k'^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &\quad \times \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie\gamma^\nu) u(p) \\ &= -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p') \gamma^\rho [\not{k}\gamma^\mu \not{k}' + m\gamma^\mu \not{k} + \not{k}'\gamma^\mu m + m^2\gamma^\mu] \gamma_\rho u(p)}{((k-p)^2 + i\epsilon) (k'^2 - m^2 + i\epsilon) (k^2 - m^2 + i\epsilon)}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

haciendo uso de los teoremas de las matrices gama en el numerador obtenemos:

$$\gamma^\rho [\not{k}\gamma^\mu \not{k}' + m\gamma^\mu \not{k} + \not{k}'\gamma^\mu m + m^2\gamma^\mu] \gamma_\rho = -2 [\not{k}\gamma^\mu \not{k}' - 2m(k+k')^\mu + m^2\gamma^\mu], \quad (\text{A.6})$$

sustituyendo lo anterior en (A.5), obtenemos:

$$\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p', p)\bar{u}(p) = 2ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p') [\not{k}\gamma^\mu \not{k}' - 2m(k+k')^\mu + m^2\gamma^\mu] u(p)}{((k-p)^2 + i\epsilon) (k'^2 - m^2 + i\epsilon) (k^2 - m^2 + i\epsilon)}. \quad (\text{A.7})$$

Aplicando los parámetros de Feynman de la sección A.1 en el denominador de la ecuación (A.7).

$$\frac{1}{((k-p)^2 + i\epsilon) (k'^2 - m^2 + i\epsilon) (k^2 - m^2 + i\epsilon)} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(1-x-y-z) \frac{2}{D^3}, \quad (\text{A.8})$$

donde el denominador D es:

$$\begin{aligned} D &= z((k-p)^2 + i\epsilon) + y(k'^2 - m^2 + i\epsilon) + x(k^2 - m^2 + i\epsilon) \\ &= z((k-p)^2 + i\epsilon) + y((k+q)^2 - m^2 + i\epsilon) + x(k^2 - m^2 + i\epsilon) \\ &= k^2 + 2k(qy - pz) + q^2y + p^2z - m^2(1-z) + i\epsilon. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Haciendo el cambio de variable

$$\ell \equiv k + yq - pz \quad \rightarrow \quad k = \ell - pq + pz \quad (\text{A.10})$$

y completando el cuadrado y tomando en cuenta que $m^2 = p^2$, condición on-shell para los electrones, obtendremos

$$D = \ell^2 + (y - y^2)q^2 + (z - z^2)p^2 + 2pqyz + (z - 1)m^2 + i\epsilon. \quad (\text{A.11})$$

Por conservación de momento sabemos que

$$p' = p + q \quad \rightarrow \quad p'^2 = p^2 + q^2 + 2pq, \quad \text{además} \quad m^2 = m^2 + q^2 + p^2, \quad (\text{A.12})$$

por lo cual, la ecuación (A.11) se convierte en

$$D = \ell^2 + (y - y^2)q^2 + (1 - z)m^2 + 2yzpq + i\epsilon. \quad (\text{A.13})$$

Haciendo uso del hecho de que $x + y + z = 1$

$$D = \ell^2 - \Delta + i\epsilon \quad \text{donde} \quad \Delta \equiv -xyq^2 + m^2(1 - z)^2 \quad (\text{A.14})$$

Ahora, para reducir la ecuación, hacemos uso de las siguientes dos identidades. Por la invariancia de Lorentz se obtiene la primera, ecuación (A.15).

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^\mu}{D^3} = 0 \quad (\text{A.15})$$

Para la segunda, partimos de que $\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^\mu \ell^\nu}{D^3}$ es proporcional a $g^{\mu\nu}$, con ello obtenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^\mu \ell^\nu}{D^3} &= Jg^{\mu\nu} \\ g_{\mu\nu} \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^\mu \ell^\nu}{D^3} &= Jg_{\mu\nu}g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

resolviendo para J y sustituyendo, obtenemos

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^\mu \ell^\nu}{D^3} = \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{4}g^{\mu\nu}\ell^2}{D^3}. \quad (\text{A.17})$$

Continuamos ahora con el numerador del ecuación (A.7), aplicando que $k' = k + p$ y tomando en cuenta la ecuación (A.10), así como aplicado la tecnología de traza

$$N = \not{\ell}\gamma^\mu \not{\ell} + (-y\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu ((1 - y)\not{q} + z\not{p}) - 2m(k' + k)^\mu + m^2\gamma^\mu, \quad (\text{A.18})$$

aplicando la identidad (A.15)

$$N = \not{\ell}\gamma^\mu \not{\ell} + (-y\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu ((1 - y)\not{q} + z\not{p}) - 2m(k + k')^\mu + m^2\gamma^\mu, \quad (\text{A.19})$$

además como $2m(k + k')^\mu = 2m(2k + q)^\mu = 2m[2\ell + (1 - y)q + 2zp]^\mu$

$$N = \not{\ell}\gamma^\mu\not{\ell} + (-y\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu((1 - y)\not{q} + z\not{p}) - 2m[2\ell + (1 - y)q + 2zp]^\mu + m^2\gamma^\mu. \quad (\text{A.20})$$

Con el uso del álgebra de Dirac reducimos el primer término de la ecuación (A.20) a

$$\not{\ell}\gamma^\mu\not{\ell} = -\frac{1}{2}\not{\ell}^2\gamma^\mu. \quad (\text{A.21})$$

Para el segundo término de la ecuación (A.20) desarrollando obtenemos

$$\begin{aligned} (-y\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu((1 - y)\not{q} + z\not{p}) &= z(1 - y)\not{p}\gamma^\mu\not{q} + z^2\not{p}\gamma^\mu\not{p} - y(1 - y)\not{q}\gamma^\mu\not{q} \\ &\quad - yz\not{q}\gamma^\mu\not{p} \\ &= z(1 - y)[m\gamma^\mu\not{q} - 2(q^\mu\not{q} - q^\mu)] + z^2[2p^\mu\not{p} - p^2\gamma^\mu] \\ &\quad - y(1 - y)[2q^\mu\not{q} - q^2\gamma^\mu] - yzm\not{q}\gamma^\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Recordando la ecuación de Dirac,

$$\begin{aligned} \not{p}u(p) &= mu(p), \quad \bar{u}(p')\not{p}' = m\bar{u}(p') \\ \bar{u}(p')\not{q}u(p) &= \bar{u}(p')(\not{p}' - \not{p})u(p) = 0; \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

y aplicando esto último y agrupando términos llegamos a

$$\begin{aligned} (-y\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu((1 - y)\not{q} + z\not{p}) &= q^2\gamma^\mu[z + zy - y + y^2] + m^2\gamma^\mu[-z^2 - 2z] \\ &\quad + p^\mu[2mz + 2mz^2] + q^\mu[2mz(1 - y)], \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

con lo cual reescribimos el numerador como

$$\begin{aligned} N &= -\frac{1}{2}\not{\ell}^2\gamma^\mu + q^2\gamma^\mu[z - zy + y - y^2] - m^2\gamma^\mu[z(z + 2) - 1] + p^\mu[2mz(z - 1)] \\ &\quad + q^\mu[2mz(1 - y) - 2m(1 - 2y)]. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Tomado en cuenta que

$$p^\mu = \frac{1}{2}(p + p') - \frac{1}{2}q^\mu, \quad (\text{A.26})$$

al sustituir la ecuación (A.26) en (A.25) obtenemos el término

$$q^\mu m[-x^2 - x + y + y^2] \quad \text{empero} \quad \int_0^1 \int_0^1 dx dy [-x^2 - x + y + y^2] = 0, \quad (\text{A.27})$$

con lo cual llegamos a la expresión

$$N = -\frac{1}{2}\ell^2\gamma^\mu - m^2\gamma^\mu [z(z+2) - 1] + (p+p')^\mu [mz(z-1)] - q^2\gamma^\mu(1-x)(y-1). \quad (\text{A.28})$$

Ahora, haciendo uso de la identidad de Gordon

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) &= \bar{u}(p') \left[\frac{(p'+p)^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}(p'_\nu - p_\nu)}{2m} \right] u(p) \\ \rightarrow \bar{u}(p')(p'+p)^\mu u(p) &= \bar{u}(p') [2m\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu}q_\nu] u(p), \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

obtenemos la expresión para el numerador

$$N = -\frac{1}{2}\gamma^\mu\ell^2 + m^2\gamma^\mu [z^2 - 4z + 1] - \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m}q_\nu [2m^2z(z-1)], \quad (\text{A.30})$$

lo que nos conduce a plasmar la ecuación (A.7) como

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p',p)\bar{u}(p) &= 2ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(1-x-y-z) \frac{2}{D^3} \\ &\quad \bar{u}(p') \left\{ -\frac{1}{2}\ell^2\gamma^\mu + m^2\gamma^\mu [z^2 - 4z + 1] \right. \\ &\quad \left. - \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m}q_\nu [2m^2z(z-1)] \right\} u(p) \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Para continuar desarrollando las integrales, haremos uso de un truco llamado rotación Wick para facilitar la evaluación de las mismas.

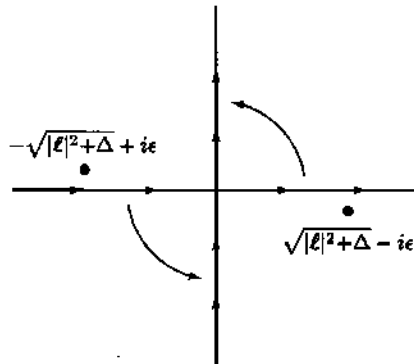


Figura A.2: Rotación tipo Wick de la componente ℓ^0 .
El contorno de la integración se puede rotar como se muestra.

Las ubicaciones de los polos, y el hecho de que el integrando se decae lo suficientemente rápido para ℓ^0 grandes, nos permiten rotar el contorno en el sentido contrario a las manecillas

del reloj $\pi/2$ [18]. Véase la figura A.2 . Después de esto, definimos una variable euclidiana de 4 momentos ℓ_E :

$$\ell^0 \equiv i\ell_E^0, \quad \boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell}_E. \quad (\text{A.32})$$

El contorno rotado va de $\ell_e^0 = \infty$ a ∞ . Hacemos ahora el cambio de variables a ℓ_E , ahora podemos evaluar la integral en coordenadas esféricas de cuatro dimensiones, lo que nos conduce a la integral:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(n) &= \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^{2n}}{[\ell^2 - \Delta]^m} \\ &= \frac{i}{(-1)^m} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4\ell_E \frac{\ell_E^{2n}}{[\ell_E^2 + \Delta]^m} \\ &= \frac{i(-1)^m}{(2\pi)^4} \int d\Omega_4 \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^{2n+3}}{[\ell_E^2 + \Delta]^m} \\ &= \frac{i(-1)^m}{8\pi^2} \int_0^\infty d\ell_E \frac{\ell_E^{2n+3}}{[\ell_E^2 + \Delta]^m}, \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

lo que nos lleva a resolver la siguiente integral

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty dx \frac{x^{2n+1}}{[x^2 + \Delta]^m}. \quad (\text{A.34})$$

Haciendo al cambio de variable $y = x^2 + \Delta$, $2y = 2xdy$ obtenemos

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \int_\Delta^\infty dy \frac{(y - \Delta)^n}{y^m}; \quad (\text{A.35})$$

definimos ahora $y = \Delta z$

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \Delta^{n-m+1} \int_1^\infty dz \left(1 - \frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{z^{m-n}}, \quad (\text{A.36})$$

y final mente hacemos $s = z^{-1}$, $ds = z^{-2}dz$, $ds = -s^2dz$ y $dz = s^{-2}ds$ y tomando en cuenta la relación entre las funciones beta y gama, llegamos a

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \Delta^{n-m+1} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m-n-1)}{\Gamma(m)}. \quad (\text{A.37})$$

Con $n=1$, obtenemos

$$\int_0^\infty dx \frac{x^3}{[x^2 + \Delta]^m} = \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta^{m-2}} \frac{1}{(m-1)(m-2)}, \quad (\text{A.38})$$

y con $n=2$, obtenemos

$$\int_0^\infty dx \frac{x^5}{[x^2 + \Delta]^m} = \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta^{m-3}} \frac{1}{(m-1)(m-2)(m-3)}. \quad (\text{A.39})$$

Con las ecuaciones (A.38) y (A.39) llegamos, con cierto abuso de notación, a

$$\mathcal{I}(n=1) = \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^m} = \frac{i(-1)^m}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-1)(m-2)} \frac{1}{\Delta^{m-2}} \quad (\text{A.40})$$

$$\mathcal{I}(n=2) = \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta]^m} = \frac{i(-1)^m}{(4\pi)^2} \frac{2}{(m-1)(m-2)(m-3)} \frac{1}{\Delta^{m-3}}, \quad (\text{A.41})$$

nótese que la integral (A.41) diverge cuando $m = 3$, por lo que es menester hacerla converger. Con este fin, hacemos, en la integral del diagrama Feynman, un cambio en el propagador del fotón

$$\frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} - \frac{1}{(k-p)^2 - \Lambda^2 + i\epsilon}, \quad (\text{A.42})$$

donde Λ es una masa grande. El segundo termino de la transformación puede ser interpretado como un propagador de un fotón pesado y ficticio. Este truco para hacer converger las integrales de Feynman mediante la introducción de partículas pesadas ficticias se conoce como *regularización de Pauli-Villars*. El numerador en la integral del diagrama Feynman se mantiene sin cambios, mientras que el denominador cambia como

$$\Delta \rightarrow \Delta_\Lambda = -xyq^2 + (1-z)^2m^2 + z\Lambda^2, \quad (\text{A.43})$$

motivo por el cual la ecuación (A.31) toma la forma

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p', p)\bar{u}(p) &= 2ie^2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(1-x-y-z) \frac{2}{D^3} \\ &\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{[\ell^2 - \Delta]^3} - \frac{1}{[\ell^2 - \Delta_\Lambda]^3} \right] \\ &\bar{u}(p') \left\{ -\frac{1}{2}\ell^2\gamma^\mu + m^2\gamma^\mu [z^2 - 4z + 1] \right. \\ &\left. - \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m_{fi}} q_\nu [2m_{fi}^2 z(z-1)] \right\} u(p), \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

con lo que obtenemos la integral

$$\int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \left[\frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta]^3} - \frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta_\Lambda]^3} \right]. \quad (\text{A.45})$$

Para poder obtener esta integral, derivamos respecto a Δ y aplicamos la ecuación (A.39)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \Delta} \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \left[\frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta]^3} - \frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta_\Lambda]^3} \right] &= \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \left[\frac{3\ell^2}{[\ell^2 - \Delta]^4} - \frac{3\ell^2}{[\ell^2 - \Delta_\Lambda]^4} \right] \\
 &= \frac{-i}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta_\Lambda} \right], \quad (\text{A.46}) \\
 &= \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{-z\Lambda^2}{\Delta\Delta_\Lambda}
 \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \left[\frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta]^3} - \frac{\ell^2}{[\ell^2 - \Delta_\Lambda]^3} \right] &= \int d\Delta \left[\frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{-z\Lambda^2}{\Delta\Delta_\Lambda} \right] \\
 &= \frac{i}{(4\pi)^2} \log\left(\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta}\right). \quad (\text{A.47})
 \end{aligned}$$

Debido a la *regularización de Pauli-Villars*, debemos también resolver la siguiente integral:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{(\ell^2 - \Delta)^3} - \frac{1}{(\ell^2 - \Delta_\Lambda)^3} \right] &= -i \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^3} - \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta_\Lambda)^3} \right] \\
 &= -\frac{i}{8\pi^2} \int d\ell_E \ell_E^3 \left[\frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta)^3} - \frac{1}{(\ell_E^2 + \Delta_\Lambda)^3} \right] \\
 &= -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^\infty du \left[\frac{u}{(u + \Delta)^3} - \frac{u}{(u + \Delta_\Lambda)^3} \right] \quad (\text{A.48}) \\
 &= -\frac{i}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta_\Lambda} \right] \int_0^\infty dy \frac{y}{(1+y)^3} \\
 &= -\frac{i}{32\pi^2} \left[\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta_\Lambda} \right] \\
 &\approx -\frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{\Delta} \text{ cuando } \Lambda \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Ahora podemos reescribir la ecuación (A.44), en el límite cuando $q \ll \Lambda$, como

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(p') \delta \Gamma^\mu(p', p) \bar{u}(p) &= \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(1-x-y-z) \\
 &\quad \bar{u}(p') \left\{ \gamma^\mu \left[\log\left(\frac{z\Lambda^2}{\Delta}\right) + \frac{1}{\Delta} \left((1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2) \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m_{f_i}} q_\nu \left[\frac{m_{f_i}^2 z}{\Delta} (z-1) \right] \right\} u(p). \quad (\text{A.49})
 \end{aligned}$$

Apéndice B

Teorías Gauge

Las teorías de gauge son teorías de campo de la física que involucran grupos de simetría. Los grupos de simetría son grupos de transformaciones que actúan sobre algo y dejan algo (posiblemente algo más) invariante. Por ejemplo, los grupos de simetría pueden actuar sobre objetos geométricos (por rotación, traslación, etc.) y dejar esos objetos invariables. Para las simetrías relevantes en las teorías de campo, los grupos actúan sobre los campos y dejan invariante el Lagrangiano o la acción (la integral del espacio-tiempo sobre el Lagrangiano)[21].

Algunas partículas exhiben propiedades muy similares; esto sugiere la existencia de simetrías. Por ejemplo, los quarks aparecen en tres colores y las propiedades de la interacción débil sugieren la agrupación de partículas en dobletes. Estas propiedades conducen naturalmente a adoptar las estructuras de grupo $SU(2)$ y $SU(3)$ para las interacciones débil y fuerte, respectivamente. La interacción electromagnética no modifica los números cuánticos de partículas que interactúan y, por lo tanto, puede ser descrita por el grupo $U(1)$ [10].

La invariancia de gauge no es física. No es observable y no es una simetría de la naturaleza. Las simetrías globales son físicas, ya que tienen consecuencias físicas, a saber, conservación de carga. Es decir, medimos la carga total en una región, y si nada sale de esa región, siempre que la midamos nuevamente la carga total será exactamente la misma. No hay nada que se pueda medir asociado con la invariancia de gauge. Introducimos la invariancia de gauge para tener una descripción local de las partículas de espín 1 sin masa[18].

B.1. $SU(n)$ y Álgebra de Lie

El grupo $SU(n)$ (grupo especial unitario) se define en el espacio complejo n , que se expresa mediante una matriz unitaria de $n \times n$, con $2n^2$ entradas reales. Para la construcción de estas matrices tomamos n^2 restricciones a los parámetros de estas matrices, las cuales derivan de la unitariedad $U^+U = 1$ y $DetU = 1$. Por lo que el número de parámetros reales se reduce a $n^2 - 1$, esto nos conduce a que la matriz para $SU(2)$ hay 3 parámetros reales, y para $SU(3)$ habrá 8.

Haciendo uso de los parámetros, expresados como θ^i con $i = 1, 2, 3, \dots, n^2 - 1$, la matriz,

de $n \times n$ entradas, U toma la forma

$$U(\theta) = e^{-i\theta^i L^i} = e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{L}}, \quad (\text{B.1})$$

L^i son matrices hermíticas, y la traza se debe anular debido a que $\text{Det}U = 1$. De manera explícita, para el caso de $SU(2)$, L^i están dador por la matrices de Pauli para spin $\frac{\sigma^i}{2}$, o equivalentemente, para matrices de isospin $\frac{\tau^i}{2}$, $i = 1, 2, 3$, cuya forma explícita es

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

para $SU(3)$, L^i toma la forma de las matrices de Gell-Mann $\frac{\lambda^i}{2}$, $i = 1, 2, \dots, 8$, definidas como

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

El grupo $SU(n)$ tiene $n - 1$ generadores diagonales y es un grupo de rango $n - 1$; para el caso $SU(2)$, τ^3 es diagonal y $\lambda^3 \lambda^8$ para $SU(3)$. Debido a las características de U podemos ver que sus generadores satisfacen el álgebra de Lie, para la que se define el corchete de Lie, dado por

$$[L^i, L^j] = i f^{ijk} L^k, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n^2 - 1, \quad (\text{B.4})$$

donde f^{ijk} son las constantes antisimétricas de para el intercambio de i, j y k , son denominadas constantes de estructuras del grupo. Nótese que se hace uso del convenio de suma de Einstein. Para el grupo $SU(3)$, f^{abc} tiene la forma [14]

$$\begin{aligned} f^{123} &= 1, & f^{458} &= f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ f^{147} &= f^{516} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = f^{637} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

De la identidad de Jacobi obtenemos la relación

$$f^{jkl} f^{ilm} + f^{kil} f^{jlm} + f^{ijl} f^{klm} = 0, \quad (\text{B.6})$$

si identificamos las matrices T^i como $(T^i)_{jk} = -i f^{ijk}$, entonces la ecuación (B.4) tomará la forma

$$[T^i, T^j] = i f^{ijk} T^k, \quad (\text{B.7})$$

por lo tanto, las constantes de estructura generan por si mismas una representación del álgebra de Lie, a esta estructura se le llama representación adjunta del álgebra de Lie y tiene $n^2 - 1$ generadores.

B.2. Representacion en el grupo $SU(n)$

Considérese un campo Φ conformado por n campos complejos ϕ_a , $a = 1, 2, \dots, n$, expresado en un vector columna tenemos

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}, \quad (\text{B.8})$$

Si aplicamos una transformación bajo el grupo $SU(n)$ dada por

$$\Phi \rightarrow \Phi' = U\Phi \quad \phi_a \rightarrow \phi'_a = U_a^b \phi_b \equiv U_{ab} \phi_b, \quad (\text{B.9})$$

se dice que ϕ_a está en la representación fundamental de $SU(n)$, la cual se denota por \mathbf{n} . Ahora consideramos una transformación infinitesimal

$$U(\theta) = e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{L}} \approx 1 - i\vec{\theta} \cdot \vec{L}, \quad (\text{B.10})$$

para lo cual se debe cumplir que $\theta \ll 1$. Con esto nos es posible escribir la transformación de los campos ϕ como

$$\phi_a \rightarrow \phi'_a \approx \phi_a - \delta\phi_a \quad \text{con} \quad \delta\phi_a = i \left(\vec{\theta} \cdot \vec{L} \right)_a^b \phi_b = i\epsilon_a^b \phi_b, \quad (\text{B.11})$$

tomando el complejo conjugado de la ecuación (B.9) y tomando en cuenta que

$$(U^*)^b_a \equiv (U^*)_{ab} = (U^{*T})_{ba} \equiv (U^\dagger)_{ba} \equiv (U^\dagger)^a_b, \quad (\text{B.12})$$

siendo U^\dagger es el conjugado hermitico de U , nos es posible obtener el conjugado de los estados ϕ_a^* cuya forma es

$$\phi_a^* \rightarrow \phi'^*_a = (U^*)^b_a \phi_b^* = \phi_b^* (U^\dagger)^a_b; \quad (\text{B.13})$$

suele ser conveniente expresar los índices superiores como $\phi^a \equiv \phi_a^*$. Ahora, podemos reescribir la ecuación (B.12) como

$$\phi^a \rightarrow \phi'^a = \phi^b (U^\dagger)^a_b, \quad (\text{B.14})$$

esta representación es denominada representación fundamental conjugada y se denota por \mathbf{n}^* . Dada la forma de la transformacional infinitesimal de $U(\theta)^*$ toma la forma

$$U(\theta)^* = 1 + i\theta^i L^{i*} = 1 - i\theta^i (-L^{i*}), \quad (\text{B.15})$$

por lo que podemos ver que la representación conjugada, $\phi^a = \phi_a^*$, se genera mediante $-L^{i*}$, por lo tanto, los vectores propios de los generadores L^i de matrices diagonales son también vectores propios de $-L^{i*}$, empero, con signo opuesto. Es debido a esta propiedad que el grupo $SU(2)$ es de interés, las presentaciones $\mathbf{2}$ y $\mathbf{2}^*$ son equivalentes.

Ahora hacemos el producto directo de las representaciones \mathbf{n} y \mathbf{n}^* , fundamental y fundamental conjugada, dada por

$$\phi_a \otimes \chi^b = \left(\phi_a \chi^b - \frac{1}{n} \delta_a^b \phi_c \chi^c \right) + \frac{1}{n} \delta_a^b \phi_c \chi^c \quad (\text{B.16})$$

tomando su traza

$$\text{Tr} [\phi_a \otimes \chi^b] = \phi_a \chi^a, \quad (\text{B.17})$$

nos podemos percatar de que el primer término de la ecuación (B.17) es de traza nula y tiene $n^2 - 1$ componentes, la cual denotamos por

$$T_a^b = \phi_a \chi^b - \frac{1}{n} \delta_a^b \phi_c \chi^c, \quad (\text{B.18})$$

el segundo termino se le denota como

$$S_a^b = \frac{1}{n} \delta_a^b \phi_c \chi^c, \quad (\text{B.19})$$

De las ecuaciones (B.14) y (B.9) deducimos que la transformación de S y T bajo $SU(n)$ son

$$\begin{aligned} T_a^b &\rightarrow T_a'^b = U_a^m \phi_m \chi^n U_n^{\dagger b} - \frac{1}{n} \delta_a^b U_c^m \phi_m \chi^n U_n^{\dagger c} \\ S_a^b &\rightarrow S_a'^b = \frac{1}{n} \delta_a^b U_c^m \phi_m \chi^n U_n^{\dagger c}. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Haciendo uso de la condición de unitariedad $U_c^m U_n^{\dagger c} = \delta_n^m$, esto lo podemos reescribir en forma matricial como

$$\begin{aligned} T &\rightarrow T' = UTU^\dagger \\ S &\rightarrow S' = S. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Producto de las propiedades de T_a^b (traza nula y $n^2 - 1$ componentes) la podemos expresar mediante $n^2 - 1$ generadores L^i del grupo $SU(2)$ como

$$T_a^b = A^i (L^i)_a^b \quad i = 1, \dots, n^2 - 1, \quad (\text{B.22})$$

A^i son parámetros del grupo $SU(n)$. Ahora aplicamos la ley de transformación infinitesimal de A^i sobre $SU(n)$, conseguimos

$$T \rightarrow T' = T - i[\epsilon, T], \quad \text{donde} \quad \epsilon = \alpha^j L^j, \quad T = A^k L^k. \quad (\text{B.23})$$

Podemos expresar esta ecuación (B.22) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} A^i L^i &\rightarrow A'^i L^i = A^i L^i - i\alpha^j [L^j, L^K] A^k \\ &= A^i L^i - i\alpha^j (i f^{ijk} L^i) A^k, \end{aligned} \tag{B.24}$$

lo que conduce a

$$A'^i = A^i + f^{ijk} \alpha^j A^k, \tag{B.25}$$

y aplicando la representación adjunta, A^i se transforma como

$$\delta A^i = f^{ijk} \alpha^j A^k = -i (T^j)_{ik} \alpha^j A^k = -i \left(\vec{T} \cdot \vec{\alpha} \right)_{ik} A^k, \tag{B.26}$$

los T_a^b se transforman bajo las reglas de transformación (B.21) y (B.23), dados por (B.22), con $n^2 - 1$ componentes y se le llama “representación adjunta” del grupo $SU(n)$ denotado por $\mathbf{n}^2 - \mathbf{1}$, mientras que S_a^b es invariante bajo la transformación $SU(n)$, es decir, se transforma como un singlete y se denota por $\mathbf{1}$.

Apéndice C

Evaluación del Vértice del Electrón en FeynCalc

FeynCalc es un paquete de Wolfram Mathematica para la evaluación simbólica de diagramas de Feynman y cálculos algebraicos en teoría cuántica de campos y física de partículas elementales. Para los presentes cálculos se hace uso de Wolfram Mathematica 5.1 con FeynCalc 4.1.1, se tomó como base el artículo [22]. El procedimiento realizado en el Apéndice A para el numerador se desarrolla a continuación con FeynCalc.

Se hizo uso del manual correspondiente a la versión de FeynCalc y de la documentación presente el repositorio de GitHub. Primero se debe cargar FeynCalc para que Mathematica pueda operar de acuerdo al álgebra requerida.

```
In[1]:= << HighEnergyPhysics`fc` ]
FeynCalc 4.1.1 For help, type ?FeynCalc, use the built-in help system or visit www.feyncalc.org ]
```

Se carga el numerador del integrando de la ecuación del vértice efectivo, ecuación (A.7), en la entrada primera de un vector para poder contrastar los cambios que se van aplicando. En este caso la masa del electrón se ve representada por la variable `me`.

```
In[2]:= num[1] = (GS[k].GA[μ].GS[k'] - 2 me FV[k + k', μ] + me^2 GA[μ]) // Calc ]
Out[2]= γμ me2 - 2 kμ me - 2 k'μ me + (γ·k).γμ.(γ·k')
```

Ahora definimos las condiciones cinemáticas que precisamos, así como los cambios de variable $k' \rightarrow k + q$ y $k \rightarrow l - yq + zp$. En este caso, como en el Apéndice A, el cambio de variable emana de la integral de Feynman, solo que no se aplica dicha integración.

```

In[3]:= (*Condiciones*)
ScalarProduct[p, p] = me^2;

In[4]:= num[2] = num[1] /. Momentum[k'] -> Momentum[k] + Momentum[q]
num[3] = num[2] /. Momentum[k] -> Momentum[l] - y Momentum[q] + z Momentum[p]

Out[4]=  $\gamma^\mu me^2 - 2k^\mu me - 2(k + q)^\mu me + (\gamma \cdot k) \cdot \gamma^\mu \cdot (\gamma \cdot k + \gamma \cdot q)$ 

Out[5]=  $\gamma^\mu me^2 - 2(l + z p - y q)^\mu me - 2(z p - y q + (l + q)^\mu) me +$ 
 $(\gamma \cdot l + z \gamma \cdot p - y \gamma \cdot q) \cdot \gamma^\mu \cdot (\gamma \cdot l + z \gamma \cdot p - y \gamma \cdot q + \gamma \cdot q)$ 
    
```

Procedemos con la aplicación de las condición (A.15), en la que se determina que que la 4-integración de un numerador de orden ℓ se anula, el termino $\ell \gamma^\mu \ell$ también se elimina en esta instrucción por lo que lo agregaremos más adelante.

```

In[6]:= (*1 impar -> 0 y por condiciones del Peskin*)
num[4] = num[3] /. FCI[Momentum[l]] -> 0 // DiracSimplify

Out[6]=  $-z^2 \gamma^\mu me^2 + \gamma^\mu me^2 - 4z p^\mu me + 4y q^\mu me - 2q^\mu me - yz (\gamma \cdot p) \cdot \gamma^\mu \cdot (\gamma \cdot q) +$ 
 $z (\gamma \cdot p) \cdot \gamma^\mu \cdot (\gamma \cdot q) - yz (\gamma \cdot q) \cdot \gamma^\mu \cdot (\gamma \cdot p) + 2z^2 \gamma \cdot p p^\mu + 2y^2 \gamma \cdot q q^\mu - 2y \gamma \cdot q q^\mu - y^2 \gamma^\mu q^2 + y \gamma^\mu q^2$ 
    
```

Una de las limitantes que presenta esta versión de FeynCalc es la imposibilidad de desarrollar el álgebra de Dirac de los términos $\not{p} \gamma^\mu \not{q}$ y $\not{q} \gamma^\mu \not{p}$, por lo que uno debe eliminarlos, operarlos manualmente y agregarlos después. En la presente instrucción se hace la eliminación de dichos términos.

```

In[7]:= (*Correccion en p.q*)
num[5] = num[4] /. FCI[GS[p] . GA[mu] . GS[q]] -> 0 /. FCI[GS[q] . GA[mu] . GS[p]] -> 0

Out[7]=  $-z^2 \gamma^\mu me^2 + \gamma^\mu me^2 - 4z p^\mu me + 4y q^\mu me -$ 
 $2q^\mu me + 2z^2 \gamma \cdot p p^\mu + 2y^2 \gamma \cdot q q^\mu - 2y \gamma \cdot q q^\mu - y^2 \gamma^\mu q^2 + y \gamma^\mu q^2$ 
    
```

A los términos que quedan, deben ser *ensandwichados* entre los *spinors* que surgen del diagrama A.1 y a esto se le aplica la ecuación de Dirac mediante el comando Calc. Derivado le la ecuación de Dirac, ecuación (A.23), se debe anular el término $\bar{u}(p') \not{q} u(p)$, operación que se muestra en la instrucción [9]

```

In[8]:= (*Ecuacion de Dirac*)
num[6] = FCI[SpinorUBar[p', me].num[5].SpinorU[p, me]] // Calc //
Collect2[#, Spinor] &
num[7] = num[6] /. FCI[SpinorUBar[p', me].GS[q].SpinorU[p, me]] -> 0
Out[8]= -2(1 - y) y φ(p', me).(γ · q).φ(p, me) qμ - 2 me φ(p', me).φ(p, me)(-pμ z2 + 2 pμ z - 2 y qμ + qμ) +
φ(p', me).γμ.φ(p, me)(-z2 me2 + me2 - y2 q2 + y q2)
Out[9]= φ(p', me).γμ.φ(p, me)(-z2 me2 + me2 - y2 q2 + y q2) - 2 me φ(p', me).φ(p, me)(-pμ z2 + 2 pμ z - 2 y qμ + qμ)

```

Ahora, de las partes que fueron retiradas en pasos anteriores, por los motivos ya expuestos, y acorde con las ecuaciones (A.21) y (A.25) agregamos los términos $\bar{u}(p') \bar{u}(p) (2mez(1 - y)q^\mu + 2mezp^\mu) + \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) (-2me^2z - z(y - 1)q^2 - \frac{1}{2}l^2)$. A estos términos que agregamos ya se la aplicó la ecuación de Dirac. Con lo anterior obtenemos las siguientes entradas:

```

In[10]:= (*Anexion de la parte de pγμq, qγμp y lγμl*)
num[8] =
FCI[
num[7] +
(-2 me ^2 z - z (y - 1) Pair[Momentum[q], Momentum[q]] -
Pair[Momentum[1], Momentum[1]] / 2)
SpinorUBar[p', me].GA[μ].SpinorU[p, me] +
(2 me z (1 - y) FV[q, μ] + 2 me z FV[p, μ]) SpinorUBar[p', me].SpinorU[p, me]]
num[9] = num[8] // Calc // Collect2[#, Spinor] &
Out[10]= -2 me φ(p', me).φ(p, me)(-pμ z2 + 2 pμ z - 2 y qμ + qμ) + φ(p', me).φ(p, me)(2 me z pμ + 2 me (1 - y) z qμ) +
φ(p', me).γμ.φ(p, me)(-z2 me2 + me2 - y2 q2 + y q2) + φ(p', me).γμ.φ(p, me) (-2 z me2 -  $\frac{l^2}{2}$  - (y - 1) z q2)
Out[11]=  $\frac{1}{2}$  φ(p', me).γμ.φ(p, me)(-2 z2 me2 - 4 z me2 + 2 me2 - l2 - 2 y2 q2 + 2 y q2 - 2 y z q2 + 2 z q2) -
2 me φ(p', me).φ(p, me)(-pμ z2 + pμ z + y qμ z - qμ z - 2 y qμ + qμ)

```

De las ecuaciones (A.26) y (A.29) agregamos la identidad de Gordon, la que dota de la forma (A.4) al vértice del electrón.

```

In[12]:= num[10] = num[9] // Collect2[#, FCI[FV[p, μ]]] &
num[11] =
num[10] /.
FCI[FV[p, μ]] ->
FCI[(2 me GA[μ] - I DiracSigma[GA[μ], GA[ν]]).FV[q, ν]] / 2 - (FV[q, μ]) / 2]
Out[12]= 1/2 (-2 z^2 φ(p', me).γ^μ.φ(p, me) me^2 - 4 z φ(p', me).γ^μ.φ(p, me) me^2 +
2 φ(p', me).γ^μ.φ(p, me) me^2 + 8 y φ(p', me).φ(p, me) q^μ me - 4 y z φ(p', me).φ(p, me) q^μ me +
4 z φ(p', me).φ(p, me) q^μ me - 4 φ(p', me).φ(p, me) q^μ me - φ(p', me).γ^μ.φ(p, me) l^2 -
2 y^2 φ(p', me).γ^μ.φ(p, me) q^2 + 2 y φ(p', me).γ^μ.φ(p, me) q^2 - 2 y z φ(p', me).γ^μ.φ(p, me) q^2 +
2 z φ(p', me).γ^μ.φ(p, me) q^2) - 2 me (1 - z) z φ(p', me).φ(p, me) p^μ
Out[13]= 1/2 (-2 z^2 φ(p', me).γ^μ.φ(p, me) me^2 - 4 z φ(p', me).γ^μ.φ(p, me) me^2 + 2 φ(p', me).γ^μ.φ(p, me) me^2 +
8 y φ(p', me).φ(p, me) q^μ me - 4 y z φ(p', me).φ(p, me) q^μ me + 4 z φ(p', me).φ(p, me) q^μ me -
4 φ(p', me).φ(p, me) q^μ me - φ(p', me).γ^μ.φ(p, me) l^2 - 2 y^2 φ(p', me).γ^μ.φ(p, me) q^2 +
2 y φ(p', me).γ^μ.φ(p, me) q^2 - 2 y z φ(p', me).γ^μ.φ(p, me) q^2 + 2 z φ(p', me).γ^μ.φ(p, me) q^2) -
2 me (1 - z) z φ(p', me).φ(p, me) (1/2 (2 me γ^μ - i σ^μν .q^ν) - q^μ / 2)
    
```

Con esto último solo queda reorganizar los términos en tanto a la representación de γ^μ con los *spinors*, lo que justifica las siguientes entradas.

```

In[14]:= num[12] = num[11] // ExpandAll // Collect2[#, Spinor] &
num[13] =
num[12] /. FCI[SpinorUBar[p', me].GA[μ].SpinorU[p, me]] ->
FCI[GA[μ] SpinorUBar[p', me].SpinorU[p, me]]
Out[14]= 1/2 φ(p', me).γ^μ.φ(p, me) (-2 z^2 me^2 - 4 z me^2 + 2 me^2 - l^2 - 2 y^2 q^2 + 2 y q^2 - 2 y z q^2 + 2 z q^2) -
me φ(p', me).φ(p, me)
(-2 me γ^μ z^2 + i σ^μν .q^ν z^2 + q^μ z^2 + 2 me γ^μ z - i σ^μν .q^ν z + 2 y q^μ z - 3 q^μ z - 4 y q^μ + 2 q^μ)
Out[15]= 1/2 γ^μ φ(p', me).φ(p, me) (-2 z^2 me^2 - 4 z me^2 + 2 me^2 - l^2 - 2 y^2 q^2 + 2 y q^2 - 2 y z q^2 + 2 z q^2) -
me φ(p', me).φ(p, me)
(-2 me γ^μ z^2 + i σ^μν .q^ν z^2 + q^μ z^2 + 2 me γ^μ z - i σ^μν .q^ν z + 2 y q^μ z - 3 q^μ z - 4 y q^μ + 2 q^μ)
    
```

Recuperamos la ecuación (A.30) salvo los términos de q^μ que se anulan al aplicar el método de parametrización de Feynman para las integrales de lazo.

```

In[16]:= num[14] = num[13] // FullSimplify
Out[16]= 1/2 φ(p', me).φ(p, me)
(-2 i me (z - 1) z σ^μν .q^ν - 2 me (z - 2) (2 y + z - 1) q^μ + γ^μ (2 ((z - 4) z + 1) me^2 - l^2 - 2 (y - 1) (y + z) q^2))
    
```

Bibliografía

- [1] R. Becker-Szendy *et al.*, Nucl. Phys. B, Proc. Suppl. 38, 331 (1995); Y. Fukuda *et al.*, Phys. Lett. B 335, 237 (1994); Phys. Rev. Lett. 81, 1562 (1998); H. Sobel, Nucl. Phys. B, Proc. Suppl. 91, 127 (2001); M. Ambrossio *et al.*, Phys. Lett. B 566, 35 (2003); M. Apollonio *et al.*, Eur. Phys. J. C 27, 331 (2003); M. B. Smy *et al.*, Phys. Rev. D 69, 011104 (R) (2004); S. N. Ahmed *et al.*, Phys. Rev. Lett. 92, 181301 (2004); Y. Ashie *et al.*, Phys. Rev. Lett. 93, 101801 (2004); E. Aliu *et al.*, Phys. Rev. Lett. 94, 081802 (2005); Y. Ashie *et al.*, Phys. Rev. D 71, 112005 (2005); W. W. M. Allison *et al.*, Phys. Rev. D 72, 052005 (2005); P. Adamson *et al.*, Phys. Rev. D 73, 072002 (2006).
- [2] J. I. Aranda, D. Espinosa-Gómez, J. Montaña, B. Quezadas-Vivian, F. Ramírez-Zavaleta and E.S. Tututi, Phys. Rev. D 98, 116003 (2018).
- [3] Por ejemplo, ver G. Eilam, J. L. Hewett and A. Soni, Phys. Rev. D 44, 1473 (1991); 59, 039901(E) (1998); N. G. Deshpande, B. Margolis and H. D. Trottier, Phys. Rev. D 45, 178 (1992); B. Mele, S. Petrarca and A. Soddu, Phys. Lett. B 435, 401 (1998); A. Cordero-Cid, J. M. Hernández, G. Tavares-Velasco and J. J. Toscano, Phys. Rev. D 73, 094005 (2006); G. Eilam, M. Frank and I. Turan, Phys. Rev. D 73, 053011 (2006); 74, 035012 (2006).
- [4] A. Arhrib, K. Cheung, C.-W. Chiang and T.-C. Yuan, Phys. Rev. D 73, 075015 (2006); J. I. Aranda, F. Ramírez-Zavaleta, J. J. Toscano and E. S. Tututi, J. Phys. G 38, 045006 (2011); J. I. Aranda, J. Montaña, F. Ramírez-Zavaleta, J. J. Toscano, and E. S. Tututi, Phys. Rev. D 86, 035008 (2012).
- [5] J. I. Aranda, F. Ramírez-Zavaleta, J. J. Toscano and E. S. Tututi, Phys. Rev. D 78, 017302 (2008); J. I. Aranda, A. Flores-Tlalpa, F. Ramírez-Zavaleta, F.J. Tlachino, J.J. Toscano and E. S. Tututi, Phys. Rev. D 79, 093009 (2009); J. I. Aranda, A. Cordero-Cid, F. Ramírez-Zavaleta, J.J. Toscano and E.S. Tututi, Phys. Rev. D 81, 077701 (2010); A. Fernández, C. Pagliarone, F. Ramírez-Zavaleta and J. J. Toscano, J. Phys. G 37, 085007 (2010); J. I. Aranda, J. Montaña, F. Ramírez-Zavaleta, J. J. Toscano and E. S. Tututi, Phys. Rev. D 82, 054002 (2010); A. Das, T. Nomura, H. Okada and S. Roy, Phys. Rev. D 96, 075001 (2017).
- [6] A. Cordero-Cid *et al.*, Phys. Rev. D 70, 074003 (2004).
- [7] J. I. Aranda, A. Cordero-Cid, F. Ramirez-Zavaleta, J. J. Toscano, and E. S. Tututi. Higgs mediated flavor violating top quark decays $t \rightarrow u_i H$, $u_i \gamma$, $u_i \gamma \gamma$, and the process $\gamma \gamma \rightarrow tc$ in effective theories. *Phys. Rev. D*, 81:077701, 2010.

- [8] Robert Mann. *An Introduction to Particle Physics and the Standard Model*. 11 2009.
- [9] Ansgar Denner and Stefan Dittmaier. Electroweak radiative corrections for collider physics. *Physics Reports*, 864:1–163, Jun 2020.
- [10] Sylvie Braibant, Giorgio Giacomelli, and Maurizio Spurio. *Particles and fundamental interactions: an introduction to particle physics*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [11] Brian Greene. *The elegant universe: Superstrings, hidden dimensions, and the quest for the ultimate theory*, 2000.
- [12] Chong-sa Lim, Toshiyuki Morii, and Shankar Nath Mukherjee. *The physics of the standard model and beyond*. World Scientific, 2004.
- [13] Francisco Alberto Santoyo Valdez. *Un Estudio preliminar de violación de sabor en el decaimiento de quark top a un bosón Z y un quark charm*. 2019.
- [14] Gordon Kane. *Modern elementary particle physics: explaining and extending the standard model*. Cambridge University Press, 2017.
- [15] JI Aranda, A Flores-Tlalpa, F Ramirez-Zavaleta, FJ Tlachino, JJ Toscano, and ES Tututi. Effective lagrangian description of higgs mediated flavor violating electromagnetic transitions: Implications on lepton flavor violation. *Physical Review D*, 79(9):093009, 2009.
- [16] F. Ramirez-Zavaleta E. S. Tututi. B. Quezadas-Vivian, J. Montaña-Domínguez. Weak dipole moments of heavy fermions with flavor violation induced by Z' gauge bosons.
- [17] Yorikiyo Nagashima. *Elementary Particle Physics: Foundations of the Standard Model V2*, volume 2. John Wiley & Sons, 2013.
- [18] Matthew D Schwartz. *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge University Press, 2014.
- [19] Lewis H Ryder. *Quantum field theory*. Cambridge university press, 1996.
- [20] Michael Peskin. *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 1995.
- [21] Mark JD Hamilton. *Mathematical gauge theory*. Springer, 2017.
- [22] Rolf Mertig, Manfred Böhm, and Ansgar Denner. Feyn calc-computer-algebraic calculation of feynman amplitudes. *Computer Physics Communications*, 64(3):345–359, 1991.