



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE  
HIDALGO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO MATEMATICAS  
"MAT.LUIS MANUEL RIVERA GUTIERREZ"

SOBRE LA ESTABILIZACIÓN DEL PÉNDULO INVERTIDO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
LIC. CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS.

PRESENTA:

VALERIA FROYLÁN LÁZARO.

ASESOR:

DR. RICARDO BECERRIL BÁRCENAS



Estados Unidos Mexicanos  
Morelia, Michoacán  
Agosto, 2021

# Agradecimientos

Al concluir esta etapa maravillosa de mi formación como profesional quiero agradecer a mis padres por apoyarme en las decisiones que tomo, a mi hermano por brindarme sus consejos, gracias por creer en mi y en mis sueños, a los principales promotores de mis proyectos mis tíos Antonio Froylán y Andriana Lázaro, gracias por tanto cariño. A mi madre y a mi abuela Socorro por brindarme el mejor ejemplo de mujeres trabajadoras y fuertes. A lo largo de los últimos seis años siempre conté con el apoyo y compañía de José quien me enseñó a ser una mejor persona, gracias por todo.

Por motivarme y ayudarme a sumergirme en el mundo de la investigación a mi asesor el Dr. Ricardo Becerril.

# Resumen

Una de las peculiaridades del estudio del péndulo es que, varios problemas en diversas áreas de la física, están relacionados o pueden reducirse a las ecuaciones de este icónico sistema. Un péndulo tiene un estado de equilibrio inestable en la posición vertical, sin embargo, se ha mostrado teórica y experimentalmente que, cuando el pivote del péndulo se hace oscilar verticalmente con una aceleración a alta frecuencia, la posición invertida del péndulo puede estabilizarse.

En el presente trabajo se realiza un estudio de la estabilidad de la posición invertida para cuando el pivote se mueve describiendo trayectorias verticales, horizontales, circulares, elípticas y de lemniscatas. Utilizando el formalismo de Lagrange de la mecánica clásica, se encuentran las ecuaciones de movimiento de cada caso y a partir de éstas, utilizando el método de Landau, se generan potenciales efectivos para obtener los puntos críticos para cada caso en estudio.

Las conclusiones que proporciona el análisis de estabilidad de los puntos críticos se validan con simulaciones numéricas de las ecuaciones encontradas. Se encuentra que la posición invertida del péndulo es inestable cuando el pivote se mueve en forma horizontal, circular y a lo largo de elipses horizontales. Puede ser estable cuando el pivote se mueve periódicamente en forma vertical, siguiendo una elipse (dependiendo de su excentricidad) o lemniscata vertical. Cuando el pivote sigue una lemniscata horizontal, en algunos casos descritos en este trabajo, también se estabiliza el péndulo invertido. En casi todos los casos, aparecen bifurcaciones super críticas para ciertos valores de los parámetros relevantes de los diversos péndulos estudiados, esos valores los determinamos.

Una generalización de lo que se observo en este estudio apunta a que el péndulo invertido se puede estabilizar cuando el pivote se mueve describiendo figuras verticales que sean más amplias en la coordenada vertical que en la horizontal.

*Palabras clave:* mecánica lagrangiana, bifurcaciones, sistemas dinámicos, péndulo físico, péndulo invertido.

# Abstract

One of the peculiarities of the study of the pendulum is that various problems in various areas of physics are or can be reduced to the equations of this iconic system. A pendulum has an unstable equilibrium state in the vertical position, however, it has been theoretically and experimentally shown that, when the pendulum pivot is made to swing vertically with a high-frequency acceleration, the inverted position of the pendulum can be stabilized.

In the present work, a study is made of the stability of the inverted position for when the pivot moves describing vertical, horizontal, circular, elliptical and lemniscate trajectories. Using the Lagrange formalism of classical mechanics, the motion equations of each case are found and from these, using the Landau's method, effective potentials are generated to obtain the critical points for each case under study.

The conclusions provided by the stability analysis of the critical points are validated with numerical simulations of the equations found. The inverted position of the pendulum is found to be unstable when the pivot moves horizontally, circular and along horizontal ellipses. It can be stable when the pivot moves periodically vertically, following an ellipse (depending on its eccentricity) or vertical lemniscate. When the pivot follows a horizontal lemniscate, in some cases described in this work, the inverted pendulum is also stabilized. In almost all cases, super critical bifurcations appear for certain values of the relevant parameters of the various pendulums studied, these values are determined.

A generalization of what is observed in this study suggests that the inverted pendulum can be stabilized when the pivot moves by describing vertical figures that are wider in the vertical coordinate than in the horizontal coordinate.

Keywords: lagrangian mechanics, bifurcations, dynamic systems, physical pendulum.

# Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	II
Abstract	III
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2 Péndulo con pivote móvil</b>	<b>3</b>
2.1 El péndulo simple . . . . .	3
2.2 Péndulo con pivote móvil . . . . .	4
2.3 Péndulo cuyo pivote se mueve verticalmente . . . . .	6
2.4 Péndulo cuyo pivote se mueve izquierda-derecha . . . . .	9
2.5 Péndulo con pivote móvil en trayectoria circular . . . . .	9
2.6 Péndulo con pivote móvil que describe una elipse . . . . .	10
2.7 Péndulo con pivote móvil que describe una lemniscata . . . . .	12
<b>3 Movimiento del pivote en línea recta vertical y horizontal</b>	<b>14</b>
3.1 Movimiento vertical del pivote . . . . .	14
3.2 Movimiento horizontal . . . . .	19
<b>4 Movimiento circular y elíptico del pivote</b>	<b>24</b>
4.1 Movimiento circular . . . . .	24
4.2 Movimiento del pivote en trayectoria elíptica . . . . .	26
4.2.1 Elipse Horizontal . . . . .	27
4.2.2 Elipse vertical . . . . .	30
<b>5 Movimiento en forma lemniscata del pivote</b>	<b>35</b>
5.1 Lemniscata vertical . . . . .	35
5.2 Lemniscata horizontal . . . . .	40
<b>6 Conclusiones y comentarios finales</b>	<b>46</b>
<b>A Potencial Efectivo</b>	<b>49</b>
<b>B Estabilidad lineal</b>	<b>51</b>

# Índice de figuras

2.1	Se muestra el diagrama de las fuerzas que actúan en un péndulo simple. . .	4
2.2	Péndulo cuyo pivote se mueve en el tiempo $(X(\tau), Y(\tau))$ . . . . .	5
2.3	Péndulo invertido cuyo pivote P se mueve a una frecuencia $\Omega$ verticalmente $Y(\tau) = -A \cos(\Omega\tau)$ . . . . .	7
2.4	Péndulo cuyo pivote P se mueve a una frecuencia $\Omega$ en una trayectoria circular de radio $A$ . . . . .	10
2.5	Péndulo invertido cuyo pivote P se mueve a una frecuencia $\Omega$ describiendo una elipse . . . . .	11
2.6	Trayectoria de lemniscata vertical que sigue el pivote de un péndulo. . . .	12
2.7	Péndulo cuyo pivote P se mueve a una frecuencia $\Omega$ describiendo una lemniscata horizontal con $\gamma = 1$ y $A = 2$ . . . . .	13
3.1	Potencial efectivo para el péndulo cuyo pivote se mueve verticalmente. Se construyó la gráfica con $\omega = 17.5$ lo cual resulta en un valor de $p_c = 24.7487$ donde el péndulo invertido comienza a ser estable. . . . .	15
3.2	Gráfica de $\frac{\theta(t)}{\pi}$ para dos valores de $p < p_c = 24.7487$ para el caso en que el pivote se mueve verticalmente. Las condiciones iniciales en ambas simulaciones numéricas fueron $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (3.1416, -0.002)$ . . . . .	18
3.3	Historial de como se mueve $\theta$ a través del tiempo para valores $p=26$ , $p=30$ que son $p > p_c$ en el movimiento vertical. Las condiciones iniciales en ambas simulaciones numéricas fueron $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (3.1416, -0.002)$ . . . . .	19
3.4	Potencial efectivo para el caso en que el pivote se mueve horizontalmente de izquierda a derecha. Aparecen dos mínimos alrededor de $\theta = 0$ cuando $p > \sqrt{2}w = p_c$ . . . . .	20
3.5	Para el caso en que el pivote se mueve horizontalmente en forma periódica, el ángulo $\theta = 0$ es un punto fijo del tipo espiral estable para $0 < p < p_c = \sqrt{2}\omega$ , en el valor de $p = p_c$ aparecen dos puntos fijos estables $\theta_c = \pm \cos^{-1}(\frac{2\omega^2}{p^2})$ y el punto fijo $\theta = 0$ pierde estabilidad. . . . .	21
3.6	Gráfica de $\frac{\theta(t)}{\pi}$ para tres valores de $p = 40$ en color morado, $p = 50$ en color verde y $p = 70$ en color azul cuando el pivote se mueve horizontalmente. Las condiciones iniciales en ambas simulaciones numéricas fueron $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (3.1416, -0.002)$ . . . . .	22
3.7	Gráfica de $\frac{\theta(t)}{\pi}$ para el valor de $p = 30$ en ambas cuando el pivote se mueve horizontalmente. Las condiciones iniciales del gráfico morado en simulaciones numéricas fueron $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (3.1416, -0.01)$ , mientras que para el color menta $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (3.1416, 0.02)$ . . . . .	23

4.1 Potencial efectivo para el pivote que describe un círculo . . . . . 25

4.2 Gráfica de  $\frac{\theta(t)}{\pi}$  para el valor de  $p = 200$  cuando el pivote se mueve en forma circular. Las condiciones iniciales del gráfico morado en simulaciones numéricas fueron  $(\theta(0), \dot{\theta}(0))=(3.1416,0.01)$  . . . . . 26

4.3 Potencial efectivo cuando el pivote se mueve describiendo una elipse horizontal con un valor de la excentricidad  $\epsilon = 0.8$  . . . . . 28

4.4 Gráfica del parámetro crítico  $p_c$  donde ocurre la bifurcación pitchfork. La posición *hacia abajo* pierde estabilidad y se da origen a ramas estables  $\theta_c = \cos^{-1}\left(\frac{2\omega^2}{p_H^2(1-\alpha_H)}\right)$ , esto para cuando el pivote se mueve a lo largo de una elipse horizontal. Aquí  $\alpha_H = \sqrt{1-\epsilon_H}$  siendo  $\epsilon_H$  la excentricidad.  $\omega = 17.5$  . . . . . 29

4.5 Gráfica de  $\frac{\theta(t)}{\pi}$  para el valor de  $p = 75$  en ambas cuando el pivote se mueve en elipse horizontalmente. Las condiciones iniciales del gráfico morado en simulaciones numéricas fueron  $(\theta(0), \dot{\theta}(0))=(3.1416,-0.01)$ , mientras que para el color menta  $(\theta(0), \dot{\theta}(0))=(3.1416,-0.4)$  con un valor de  $\epsilon = 0.5$  para ambas gráficas. . . . . 30

4.6 Potencial efectivo cuando el pivote describe un elipse vertical con un valor de  $\epsilon = 0.5$  . . . . . 31

4.7 Gráfica de  $\frac{\theta(t)}{\pi}$  para dos valores de  $p < p_c = 61.8718$  para el caso en que el pivote se mueve en elipse vertical. Las condiciones iniciales en ambas simulaciones numéricas fueron  $(\theta(0), \dot{\theta}(0))=(3.1416,-0.02)$  y  $\epsilon = 0.8$ . El péndulo tiende a la posición *hacia abajo*. . . . . 33

4.8 Gráfica de  $\frac{\theta(t)}{\pi}$  para dos valores de  $p > p_c = 61.87$  para el caso en que el pivote se mueve en elipse vertical. Las condiciones iniciales en ambas simulaciones numéricas fueron  $(\theta(0), \dot{\theta}(0))=(3.1416,-0.02)$  y  $\epsilon = 0.8$  . . . . . 34

5.1 Potenciales efectivos para  $\gamma = 4$  y  $A = 2$  (panel superior), para  $\gamma = 0.5$  y  $A = 2$  (panel inferior izquierdo) y para  $\gamma = 0.2$  y  $A = 2$  (panel inferior derecho). . . . . 36

5.2 La figura superior es la serie de tiempo de  $\theta/\pi$  para cuando el pivote se mueve en una trayectoria de lemniscata vertical, con parámetros  $\gamma = 0.5$  y  $p = 100$  y condiciones iniciales  $(\theta = 3.1416, \dot{\theta} = -0.01)$ . Se observa que la oscilación no es alrededor de la posición hacia abajo del péndulo. Realmente es alrededor de  $\frac{\theta}{\pi} \approx 8.105207$ . La figura inferior es la trayectoria del péndulo en el espacio fase  $(\frac{\theta}{\pi}, \frac{\dot{\theta}}{\pi})$  y con parámetros  $\gamma = 0.5$  y  $p = 100$ . Se observa con claridad que la oscilación es alrededor de un punto ligeramente diferente a la posición hacia abajo del péndulo. . . . . 40

5.3 Potenciales efectivos para  $\gamma = 4$  y  $A = 2$  (panel superior izquierdo), para  $\gamma = 0.5$  y  $A = 2$  (panel superior derecho) y para  $\gamma = 0.2$  y  $A = 2$  (panel inferior). . . . . 42

5.4 Gráfica de  $\frac{\theta(t)}{\pi}$  para dos valores de  $p < p_c = 2.0695$  para el caso en que el pivote se mueve en lemniscata horizontal. Las condiciones iniciales en ambas simulaciones numéricas fueron  $(\theta(0), \dot{\theta}(0))=(3.1416,-0.02)$  y  $\gamma = 3$ . El péndulo tiende a la posición *hacia abajo*. . . . . 45

5.5 Gráfica de  $\frac{\theta(t)}{\pi}$  para dos valores de  $p > p_c = 2.0695$  para el caso en que el pivote se mueve en lemniscata horizontal. Las condiciones iniciales en ambas simulaciones numéricas fueron  $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (3.1416, -0.02)$  y  $\gamma = 3$  . . . . . 45

B.1 Clasificación de los puntos fijos del sistema según los valores propios obtenidos del mismo . . . . . 52



# Capítulo 1

## Introducción

El péndulo es un sistema físico que los científicos han utilizado durante muchos siglos para comprender el movimiento [Galileo (1970)], es uno de los sistemas favoritos debido a que su comportamiento se puede ver con cierta facilidad de manera experimental. En el tiempo de Galileo, se consideraba como un sistema mecánico que tenía fines prácticos por su uso como un reloj. Aunque el péndulo ha sido estudiado durante por un largo período de tiempo, continua sorprendiendo a muchos con sus notables propiedades. De hecho, se ha convertido en uno de los arquetipos para el estudio de la dinámica no lineal y fenómenos complejos, por ejemplo, en el libro Deterministic Chaos [Schuster y Just (2006)], se introduce el concepto de caos a través de cuatro sistemas representativos, uno de los cuales es el péndulo amortiguado y forzado. En el ampliamente usado libro de S. Strogatz se estudia la aparición del caos en el péndulo, y la estructura fractal de las fronteras de los valles de atracción [Strogatz (2018)]. En prácticamente todos los libros de dinámica no lineal y de mecánica clásica se estudia el péndulo. El estudio de las diferentes modalidades de péndulos han mostrado tener un papel importante en otros fenómenos físicos y campos de la ciencia y la ingeniería. Se conoce de la existencia de una equivalencia matemática entre el péndulo elástico y la dinámica de las ondas resonantes de Rossby en la atmósfera, el estudio del péndulo elástico ayuda en el entendimiento de la dinámica de estas ondas [Lynch (2003)]. Algunas características de resonancia del péndulo elástico tienen relación con el estudio de la molécula de  $CO_2$  a nivel cuántico [Cushman y cols. (2004)].

No cabe duda de que el péndulo es uno de los sistemas que más atención ha atraído en el modelado de fenómenos relacionados con oscilaciones, bifurcaciones y caos [Baker y Gollub (1996)]. Por otro lado, muchos problemas oscilatorios pueden reducirse de alguna manera a la ecuación del péndulo. Se podría argumentar que, como una especie de unidad oscilatoria, se puede encontrar en cualquier lugar donde se produzcan oscilaciones [Chirikov (1979)], debido a estas buenas aproximaciones a sistemas físicos y eléctricos los científicos se han motivado en su estudio desde el comportamiento de estructuras en tierra [Rainey (1978)] y grúas de embarcaciones [McCormick y Witz (1993)] a la respuesta de las uniones de Josephson [Salam y Sastry (1985)].

Un péndulo simple tiene un estado de equilibrio inestable en la posición vertical. La excitación de alta frecuencia en la dirección de la gravedad logra la estabilización del estado de equilibrio inestable (posición vertical), que es la llamada 'estabilización dinámica' [Kapitza (1965)]. La estabilización del péndulo invertido que se logra poniendo a oscilar

el pivote verticalmente, ha sido el objeto de estudio de diversos autores desde experimentales hasta teóricos, en el año de 1984 se realizaron estudios experimentales construyendo distintos aparatos [Leven, Pompe, Wilke, y Koch (1984)] y técnicas como el efecto estroboscópico [Michaelis (1984)] para hacer un poco más didáctico el estudio y visualización del movimiento que realiza un péndulo invertido y la variación de sus parámetros, aproximadamente una década después se encontraron relaciones directas del movimiento caótico que aparece en el sistema con las constantes de Feigenbaum mediante la utilización de métodos numéricos [Van Dooren (1996)] los cuales se han convertido en una herramienta indispensable para el estudio de sistemas físicos y en este caso han permitido obtener información valiosa como dependencia a condiciones iniciales [Bartuccelli, Gentile, y Georgiou (2001)] y no solo incluir movimientos perimétricos sino también agregar excitaciones externas basándose en el método de Melnikov's [Jing y Yang (2006)], una de las aplicaciones más recientes es la utilización del modelo para ayudar a equilibrar personas con distintas enfermedades que son propensas a caer y lastimarse, con la ayuda del modelo del péndulo invertido se llegó a la implementación de plantillas con ciertas características que ayudan a mejorar la vida de las personas que padecen dichas enfermedades [Chen (2008)].

En el capítulo 2 de esta tesis, haremos una breve revisión de las ecuaciones de movimiento del péndulo cuando el punto de soporte o pivote, cuyas coordenadas son  $(X(\tau), Y(\tau))$ , se mueve en forma arbitraria en un plano. Escribimos su Lagrangeana y las ecuaciones de movimiento generales y de éstas, tomaremos casos particulares cuando el pivote se mueve en forma oscilatoria en diversas formas: verticalmente, horizontalmente, en forma circular y siguiendo la trayectoria de una elipse ya sea horizontal o vertical, el estudio de este último caso, no lo hemos encontrado en la literatura, ni tampoco cuando sigue una trayectoria más compleja como la de una lemniscata (vertical y horizontal). En el capítulo 3,4.5 se hace una revisión de la metodología de construcción de potenciales efectivos para sistemas rápidamente oscilantes siguiendo el método de Kapitza y Landau, también este método puede verse en Blackburn *et al.* El potencial efectivo provee una justificación analítica del por qué existen soluciones invertidas. Así que en estos capítulos, se construye el correspondiente potencial efectivo para cada uno de los casos de trayectorias del pivote que hemos mencionado. En el capítulo 4, nos centraremos en la estabilización del péndulo invertido cuando el pivote se mueve a lo largo de una elipse, determinando numéricamente, bajo qué condiciones de los parámetros involucrados se logra su estabilización análogamente en el capítulo 5 para la trayectoria lemniscata. La integración de las ecuaciones se realiza con el método de Runge-Kutta de orden 4. El capítulo 6 provee conclusiones y comentarios finales.

# Capítulo 2

## Péndulo con pivote móvil

En este capítulo se hará una breve descripción del péndulo (plano) utilizando el formalismo de Lagrange. En particular, se construye el Lagrangeano del péndulo cuando su punto de suspensión  $(X(\tau), Y(\tau))$ , se mueve en forma arbitraria, de ahí se escriben las ecuaciones de movimiento correspondientes. Estas ecuaciones generales, sirven de base para los casos particulares de trayectorias que sigue el pivote y que se estudiarán en esta tesis: el movimiento oscilatorio vertical, horizontal, circular, elíptico y de lemniscata.

### 2.1. El péndulo simple

Un péndulo simple es definido como una partícula de masa  $m$  suspendida del punto  $O$  por un hilo o barra inextensible de longitud  $l$  y que cuenta con una masa despreciable. Cuando la partícula se desplaza a una posición  $\theta_0$  formado por el ángulo que hace el hilo con la vertical y luego se suelta, el péndulo comienza a oscilar. El lagrangiano del sistema es

$$\mathcal{L} = K - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta, \quad (2.1)$$

donde  $K$  es la energía cinética de la partícula de masa  $m$  y  $V$  su energía potencial gravitacional. La ecuación de movimiento proviene de las ecuaciones de Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= 0 \\ ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

que implica la forma conocida del péndulo:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0} \quad (2.3)$$

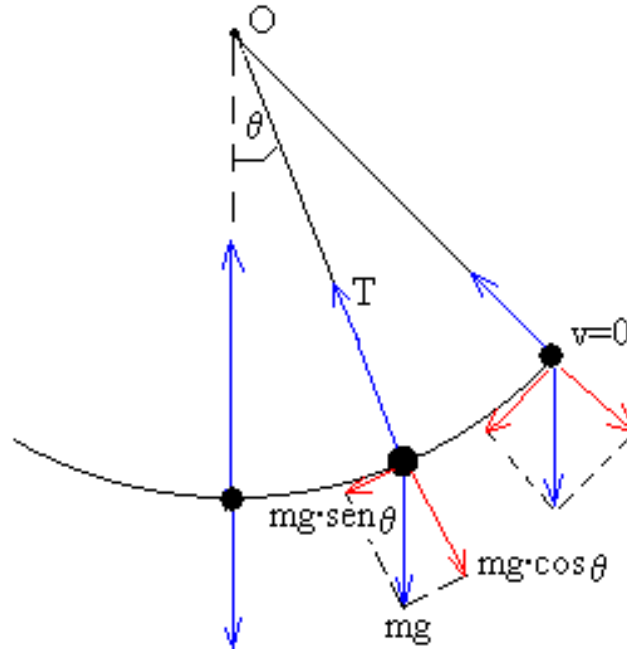


Figura 2.1: Se muestra el diagrama de las fuerzas que actúan en un péndulo simple.

## 2.2. Péndulo con pivote móvil

Ahora consideremos un péndulo cuyo pivote se mueve en el plano  $x$ - $y$  como se muestra en la figura 2.2. El vector de posición del pivote  $P$  es  $\vec{r}_p = (X(\tau), Y(\tau))$ ,  $l$  es la longitud de la barra de masa despreciable y  $m$  la masa de la partícula. Tomando en cuenta lo anterior la posición de la partícula con masa  $m$  será:

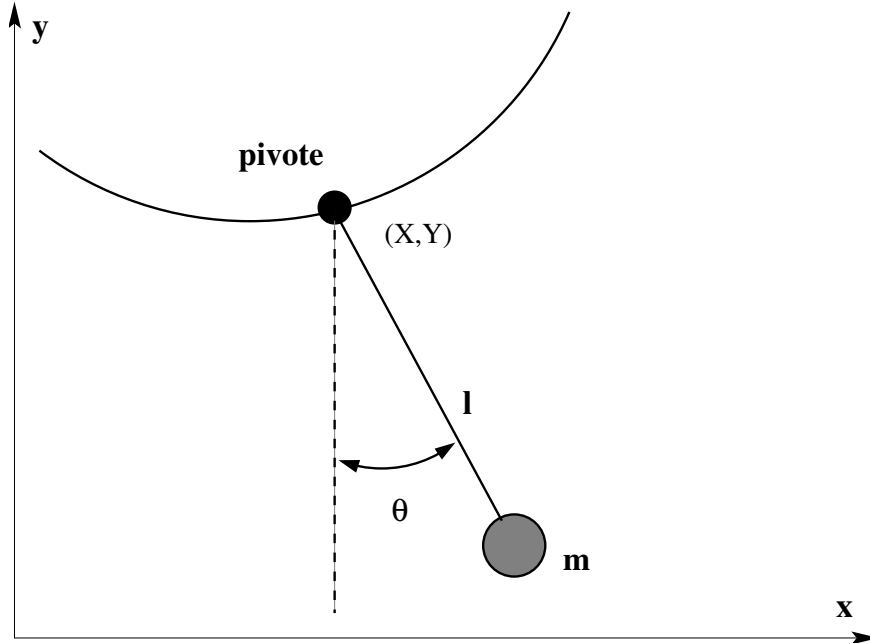
$$\begin{aligned} x &= X + l \sin \theta \\ y &= Y - l \cos \theta \end{aligned} \quad (2.4)$$

Cuando se deriva respecto el tiempo las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{X} + l \cos(\theta) \dot{\theta} \\ \dot{y} &= \dot{Y} + l \sin(\theta) \dot{\theta} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Sabemos que la energía cinética es  $K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$  lo que nos lleva a tener

$$K = \frac{m}{2} \left[ \dot{X}^2 + l^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + 2l\dot{X} \cos \theta \dot{\theta} + \dot{Y}^2 + l^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 + 2l\dot{Y} \sin \theta \dot{\theta} \right]$$


 Figura 2.2: Péndulo cuyo pivote se mueve en el tiempo  $(X(\tau), Y(\tau))$ .

que simplificando toma la forma

$$K = \frac{m}{2} \left[ l^2 \dot{\theta}^2 + \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + 2l\dot{\theta}(\dot{X} \cos \theta + \dot{Y} \sin \theta) \right]. \quad (2.6)$$

Por otra parte sabemos que la energía potencial gravitacional es  $V = mgy$  lo que nos lleva a escribirla como:

$$V = mg(Y(t) - l \cos \theta) \quad (2.7)$$

con las ecuaciones anteriores se puede obtener la lagrangiana del sistema  $\mathcal{L} = K - V$

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)}{2} + ml\dot{\theta}(\dot{X} \cos \theta + \dot{Y} \sin \theta) - mg(Y - l \cos \theta) \quad (2.8)$$

Este lagrangiano tiene asociado un lagrangiano equivalente, para determinarlo, considere la función de la forma

$$F = F(\theta, \tau) \equiv l(\dot{X} \sin \theta - \dot{Y} \cos \theta) + \frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) \quad (2.9)$$

la derivada de la ecuación anterior es

$$\frac{dF}{d\tau} = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + l(\ddot{X} \sin \theta - \ddot{Y} \cos \theta) + l\dot{\theta}(\ddot{X} \cos \theta + \ddot{Y} \sin \theta) \quad (2.10)$$

sustituyendo en la ecuación (2.8) se obtiene la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - ml(\ddot{X} \sin \theta - \ddot{Y} \cos \theta) + \frac{m\dot{F}}{2} - mg(Y - l \cos \theta) \\ &= \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + ml[(g + \ddot{Y}) \cos \theta - \ddot{X} \sin \theta] + \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{mF}{2} - mg \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau Y(\tau) \right]\end{aligned}\quad (2.11)$$

Esto es, el lagrangiano (2.8) resulta tener una sumando que es la derivada total con respecto al tiempo de una función de la coordenada  $\theta$  y el tiempo. Se trabajara con la Lagrangiana equivalente

$$\mathcal{L} = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + ml[(g + \ddot{Y}) \cos \theta - \ddot{X} \sin \theta] \quad (2.12)$$

que resulta tener una forma más simple. De las ecuaciones de Euler-Lagrange  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$  y observando que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= ml^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= ml[-(g + \ddot{Y}) \sin \theta - \ddot{X} \cos \theta]\end{aligned}$$

se obtiene la ecuación de movimiento del péndulo con pivote móvil

$$\boxed{\ddot{\theta} + \left( \frac{g + \ddot{Y}}{l} \right) \sin \theta + \frac{\ddot{X}}{l} \cos \theta = 0} \quad (2.13)$$

Si se considera el péndulo físico, esto es, el soporte de la partícula de masa  $m$  ya no se desprecia, y tiene momento de inercia  $I$ , la ecuación correspondiente de movimiento sería

$$\boxed{I\ddot{\theta} + ml(g + \ddot{Y}) \sin \theta + ml\ddot{X} \cos \theta = 0} \quad (2.14)$$

donde en este caso,  $l$  sería la distancia del pivote al centro de masa del péndulo físico. Si se considerase amortiguamiento proporcional a la velocidad angular, la ecuación de movimiento sería

$$\boxed{I\ddot{\theta} + \zeta\dot{\theta} + ml(g + \ddot{Y}) \sin \theta + ml\ddot{X} \cos \theta = 0} \quad (2.15)$$

que es la ecuación que estaremos utilizando.

### 2.3. Péndulo cuyo pivote se mueve verticalmente

Un péndulo rígido en el que el punto de pivote vibra en dirección vertical, hacia arriba y hacia abajo, también es conocido como el péndulo de Kapitza. La característica única del

péndulo Kapitza es que la suspensión vibratoria puede hacer que se equilibre de manera estable en una posición invertida.

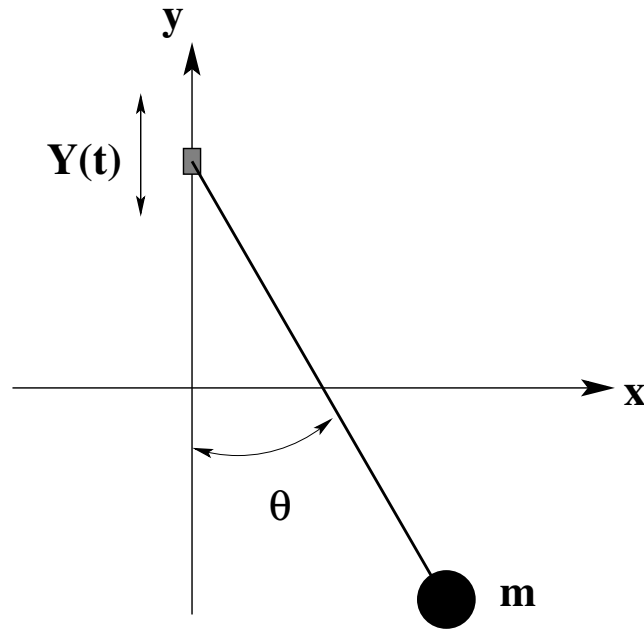


Figura 2.3: Péndulo invertido cuyo pivote  $P$  se mueve a una frecuencia  $\Omega$  verticalmente  $Y(\tau) = -A \cos(\Omega\tau)$ .

En el péndulo habitual con suspensión fija y sin termino de amortiguamiento, la única posición de equilibrio estable es con la partícula de masa  $m$  colgando debajo del punto de suspensión (el pivote), es decir, con  $\theta = 0$ ; si se perturba este péndulo, éste oscilará alrededor de  $\theta = 0$ . Matemáticamente, esto puede visualizarse escribiendo la ecuación del péndulo  $\ddot{\theta} + (g/l) \sin(\theta) = 0$  como un sistema dinámico 2-dimensional, a saber

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -w_0^2 \sin(\theta)\end{aligned}\tag{2.16}$$

donde  $w_0^2 = g/l$ . El punto fijo  $(\theta, \omega) = (0, 0)$  es un centro, en efecto, la matriz Jacobiana evaluada en este punto fijo es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(g/l) \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/l & 0 \end{pmatrix}\tag{2.17}$$

Como el determinante de la matriz  $J$ ,  $\det(J) = g/l > 0$  y la traza  $Tr(J) = 0$ , de acuerdo a la teoría de estabilidad lineal de sistemas dinámicos (ver apéndice), el punto fijo  $(0, 0)$  es un centro, esto es, la órbita en el espacio fase  $(\theta, \omega)$  es un ciclo. El punto fijo  $(\theta, \omega) = (\pi, 0)$

(posición invertida), es un punto de equilibrio inestable, la matriz correspondiente  $J$  es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/l & 0 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

que tiene  $\det(J) = -g/l$  y traza nula, es decir, es un punto fijo de punto silla (ver apéndice) y la perturbación más pequeña mueve el péndulo fuera del equilibrio. Si incluimos amortiguamiento, el sistema dinámico del péndulo con el pivote fijo, sería

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\zeta\omega - w_0^2 \sin(\theta), \end{aligned} \quad (2.19)$$

recuerde que  $w_0^2 = g/l$  y  $\zeta > 0$  es la constante de amortiguamiento. Para determinar la estabilidad del punto fijo  $(\theta, \omega) = (0, 0)$ , debemos fijarnos en la matriz Jacobiana del sistema (2.19)

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(g/l) \cos(\theta) & -\omega \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/l & -\zeta \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Como el determinante de la matriz  $J$ ,  $\det(J) = g/l > 0$  y la traza  $Tr(J) = -\zeta < 0$ , el punto fijo  $(0, 0)$  será un atractor o una espiral estable, dependiendo de si  $(Tr(J))^2 - 4\det(J)$  es positiva o negativa (ver apéndice). Otra manera de visualizar la estabilidad de los puntos fijos del péndulo es construyendo el potencial efectivo para cada caso. Ese análisis se llevará a cabo en el siguiente capítulo.

Con el movimiento del pivote dado por

$$X(\tau) = 0 \quad , \quad Y(\tau) = -A \cos(\Omega\tau), \quad (2.21)$$

se tiene  $\ddot{Y} = A\Omega^2 \cos(\Omega\tau)$  y la ecuación de movimiento (2.15) estaría entonces dada por

$$I\ddot{\theta} + \zeta\dot{\theta} + mlg\left(1 + \frac{A}{g} \cos(\Omega\tau)\right) \sin\theta = 0 \quad (2.22)$$

Escalaremos el tiempo e introduciremos las siguientes cantidades en la ecuación anterior

$$t = \tau\omega_I \quad , \quad \omega_I^2 = \frac{gml}{I} \quad , \quad \omega = \frac{\Omega}{\omega_I} \quad , \quad c = \frac{\zeta}{I\omega_I} \quad , \quad p = \frac{A\Omega^2}{g}, \quad (2.23)$$

quedándonos la ecuación de movimiento cuando el pivote se mueve horizontalmente con



amplitud  $A$  y frecuencia  $\Omega$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + c\frac{d\theta}{dt} + [1 + p \cos(\omega t)] \sin \theta = 0} \quad (2.24)$$

que es la ecuación que se trabaja en el artículo de Bishop *et al.*

## 2.4. Péndulo cuyo pivote se mueve izquierda-derecha

Para un péndulo rígido cuyo pivote se mueve horizontalmente de izquierda a derecha y viceversa, con una frecuencia angular  $\Omega$  y una amplitud  $A$ , escribiremos las coordenadas de su punto de suspensión como

$$X(\tau) = -A \sin(\Omega\tau) \quad , \quad Y(\tau) = 0. \quad (2.25)$$

de donde se tiene que  $\ddot{X}(\tau) = A\Omega^2 \sin(\Omega\tau)$ , que usamos junto con los cambios de variables expresados en (2.23) en la ecuación general (2.15) que nos conduce a

$$\boxed{\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + \sin \theta + p \sin(\omega t) \cos \theta = 0} \quad (2.26)$$

que es la ecuación de movimiento del péndulo cuando el punto de suspensión se mueve horizontalmente.

## 2.5. Péndulo con pivote móvil en trayectoria circular

Para el caso en que el pivote se mueve en una trayectoria circular, con una frecuencia angular  $\Omega$  y un radio  $A$ , como se muestra en la figura 2.4, escribiremos sus coordenadas de la siguiente manera

$$X(\tau) = -A \sin \Omega\tau \quad , \quad Y(\tau) = -A \cos \Omega\tau, \quad (2.27)$$

de radio  $A$  y en sentido de las manecillas del reloj. Con los cambios de variables (2.23), la ecuación (2.15) adquiere la forma

$$\boxed{\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + [1 + p \cos(\omega t)] \sin \theta + p \sin(\omega t) \cos \theta = 0} \quad (2.28)$$

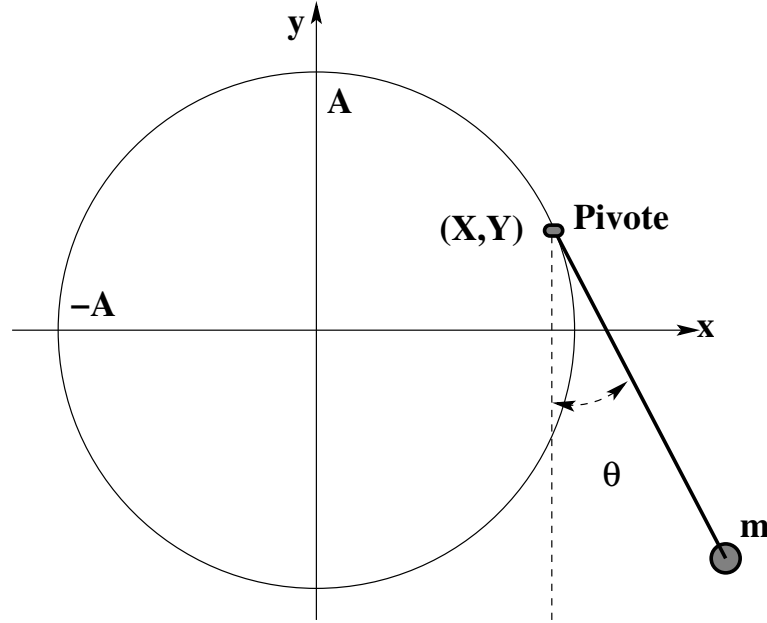


Figura 2.4: Péndulo cuyo pivote P se mueve a una frecuencia  $\Omega$  en una trayectoria circular de radio  $A$ .

## 2.6. Péndulo con pivote móvil que describe una elipse

En esta sección trabajaremos el péndulo cuando el punto de suspensión se mueve a lo largo de una trayectoria elíptica con una frecuencia  $\Omega$  como se ve en la figura 2.5. Las coordenadas parametrizadas de la elipse son

$$X(\tau) = -a \sin(\Omega\tau) \quad , \quad Y(\tau) = -b \cos(\Omega\tau). \quad (2.29)$$

Con lo que se recorre la elipse en el sentido de las manecillas del reloj. Si  $a > b$ , se tiene que  $a$  es el eje mayor y  $b$  el menor y se tiene una elipse horizontal como en la figura 2.5. De lo contrario, se tiene una elipse vertical. La excentricidad para la elipse horizontal está dada por  $\epsilon_H = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$  y para la vertical por  $\epsilon_V = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$ . Como  $\ddot{X} = a\Omega^2 \sin(\Omega\tau)$  y  $\ddot{Y} = a\Omega^2 \cos(\Omega\tau)$ , utilizando los cambios (2.23), la ecuación (2.15) adquiere la forma

$$\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + \left[ 1 + \frac{b\Omega^2}{g} \cos \omega t \right] \sin \theta + \frac{a\Omega^2}{g} \sin(\omega t) \cos \theta = 0 \quad (2.30)$$

Si se considera una elipse horizontal ( $a > b$ ), se tiene que  $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \epsilon_H^2}$ , definiendo para este caso al parámetro  $p_H$  como

$$p_H \equiv \frac{a\Omega^2}{g} \quad (2.31)$$

la ecuación (2.30) quedaría

$$\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + \left[1 + p_H \sqrt{1 - \epsilon_H^2} \cos \omega t\right] \sin \theta + p_H \sin(\omega t) \cos \theta = 0 \quad (2.32)$$

Mientras que si se considera una elipse vertical ( $a < b$ ), se tiene que  $\frac{a}{b} = \sqrt{1 - \epsilon_V^2}$ , definiendo para este caso al parámetro  $p_V$  como

$$p_V \equiv \frac{b\Omega^2}{g} \quad (2.33)$$

la ecuación (2.30) quedaría

$$\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + [1 + p_V \cos \omega t] \sin \theta + p_V \sqrt{1 - \epsilon_V^2} \sin(\omega t) \cos \theta = 0 \quad (2.34)$$

La situación en la que el pivote se mueve en una trayectoria elíptica no la hemos encontrado

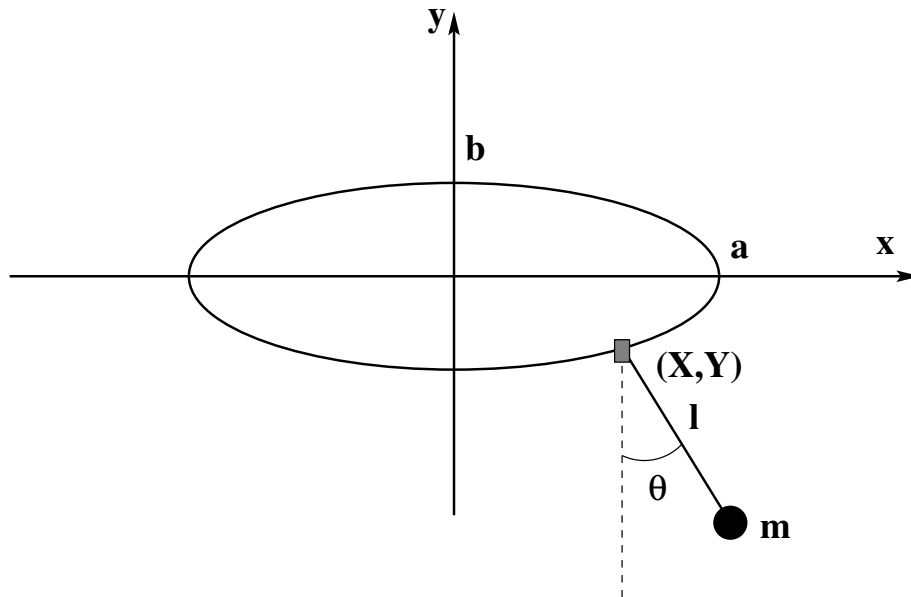


Figura 2.5: Péndulo invertido cuyo pivote P se mueve a una frecuencia  $\Omega$  describiendo una elipse

en la literatura. En este trabajo se analizarán los casos descritos por las ecuaciones (2.32) y (2.34) en los siguientes capítulos.

## 2.7. Péndulo con pivote móvil que describe una lemniscata

En esta sección trabajaremos el péndulo cuando el punto de suspensión se mueve a lo largo de una trayectoria de lemniscata con una frecuencia  $\Omega$  como se ve en la figura. Las coordenadas parametrizadas de la lemniscata vertical son

$$X(\tau) = -A\gamma \sin(2\Omega\tau) \quad , \quad Y(\tau) = -A \cos(\Omega\tau). \quad (2.35)$$

La ecuación (2.15) se escribe, usando las variables (2.23), como

$$\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + [1 + p \cos(\omega t)] \sin \theta + 4\gamma p \sin(2\omega t) \cos \theta = 0 \quad (2.36)$$

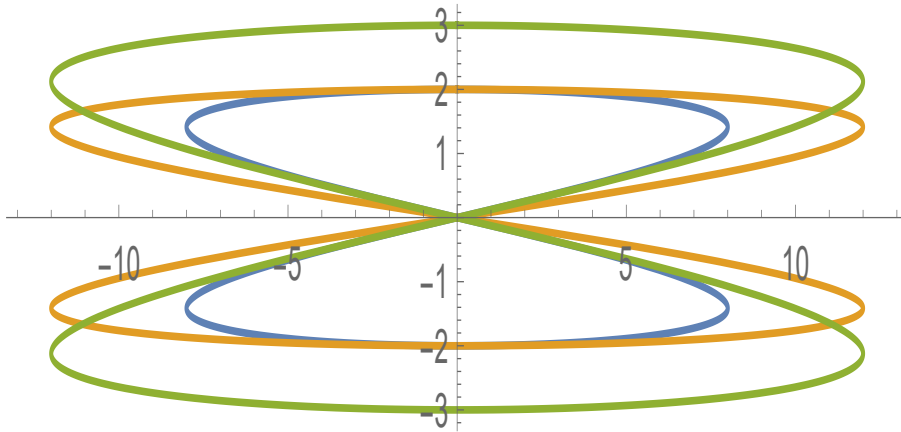


Figura 2.6: Trayectoria de lemniscata vertical que sigue el pivote de un péndulo.

En la figura 2.6 se pueden observar tres lemniscatas, colores verde, naranja y azul, la diferencia entre ellas es el valor de  $\gamma$  y  $A$ . En el gráfico color azul se utilizó un valor de  $\gamma = 4$  y  $A = 2$  mientras que en el naranja  $\gamma = 6$  y  $A = 2$ . Como ambas gráficas tienen la misma amplitud  $A = 2$ , las dos cortan el eje vertical en  $y = \pm A = \pm 2$  (esos son sus valores máximos y mínimos en la dirección vertical); como para la lemniscata azul  $\gamma = 4$ , los valores extremos (máximo y mínimo) que alcanza la curvan azul en la dirección horizontal son  $A\gamma = \pm 4 \times 2 = 8$  mientras que la lemniscata naranja tiene valores extremos horizontales (máximo y mínimo) iguales a  $A\gamma = \pm 6 \times 2 = \pm 12$ . La lemniscata en verde, debido a que tiene amplitud  $A = 3$  tiene valores extremos verticales en  $A = \pm 3$ , y en la dirección horizontal, como  $\gamma = 4$ , los valores extremos están en  $A\gamma = \pm 4 \times 3 = \pm 12$ . En resumen, para la lemniscata vertical, el valor de  $A$  determina los valores máximo y mínimo

(donde se corta al eje  $y$ ), mientras que el valor de  $\gamma$  determina el valor máximo y mínimo que alcanza la lemniscata en la dirección horizontal (que tan ancha es).

En cambio, si consideramos el caso en el que el pivote se mueve a lo largo de una trayectoria de lemniscata horizontal cuyas ecuaciones paramétricas que usaremos son

$$X(\tau) = -A \cos(\Omega\tau) \quad , \quad Y(\tau) = -A\gamma \sin(2\Omega\tau), \quad (2.37)$$

la ecuación de movimiento del péndulo adquiriría la siguiente forma

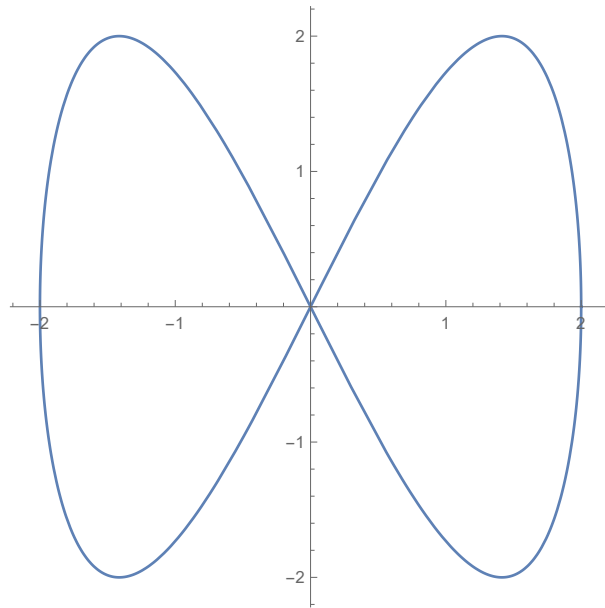


Figura 2.7: Péndulo cuyo pivote P se mueve a una frecuencia  $\Omega$  describiendo una lemniscata horizontal con  $\gamma = 1$  y  $A = 2$

$$\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + [1 + 4\gamma p \sin(2\omega t)] \sin \theta + p \cos(\omega t) \cos \theta = 0 \quad (2.38)$$

En la figura 2.7, se muestra una lemniscata horizontal con  $A = 2$  y  $\gamma = 1$ . Para la lemniscata horizontal, esto significa que el valor máximo y mínimo en la dirección horizontal es  $\pm 2$  lo mismo que el la dirección vertical.

En los siguientes capítulos construiremos potenciales efectivos (la teoría básica se encuentra en el apéndice) para cada caso de trayectoria seguida por el pivote y analizaremos la dinámica de cada caso.

# Capítulo 3

## Movimiento del pivote en línea recta vertical y horizontal

En este capítulo estudiaremos la dinámica del péndulo cuando el pivote se mueve periódicamente en línea recta en forma vertical y en forma horizontal. Para ambos casos se obtendrá el potencial efectivo que se obtiene utilizando el método de Kapitza [1951] y de Landau y Lifshitz [1976] y que también discute Blackburn [1992], estos potenciales efectivos proveen de una justificación analítica del por qué puede existir (o no) estabilidad del péndulo en la posición invertida, realizaremos simulaciones numéricas usando las ecuaciones de movimiento encontradas en el capítulo anterior. El método para la obtención de potenciales efectivos que tienen frecuencias altas se expone brevemente en el primer apéndice de esta tesis.

### 3.1. Movimiento vertical del pivote

En el caso en el que el pivote se mueve verticalmente hacia arriba y abajo obtendremos una ecuación de movimiento de la forma (2.24) que se puede fácilmente reescribir para obtener la expresión del potencial efectivo:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} + c\dot{\theta} &= -\sin\theta - p\cos\omega t\sin\theta \\ &= -\frac{dU}{d\theta} + f_1(\theta)\cos\omega t\end{aligned}\tag{3.1}$$

lo que nos lleva a la expresión

$$U_{ef} = U + \frac{1}{2m\omega^2}f^2 = U + \frac{p^2\sin^2\theta}{2m\omega^2}\overline{\cos^2\omega t}\tag{3.2}$$

es decir, el potencial efectivo para este caso es

$$U_{ef}(\theta) = -\cos \theta + \frac{p^2 \sin^2 \theta}{4\omega^2} \quad (3.3)$$

La figura 5.1, muestra la gráfica de este potencial como función de  $\theta/\pi$  y el parámetro  $p = A\Omega^2/g$  que fundamentalmente es la razón entre la aceleración vertical del pivote y la aceleración de la gravedad. De la expresión del potencial efectivo (3.3), es posible

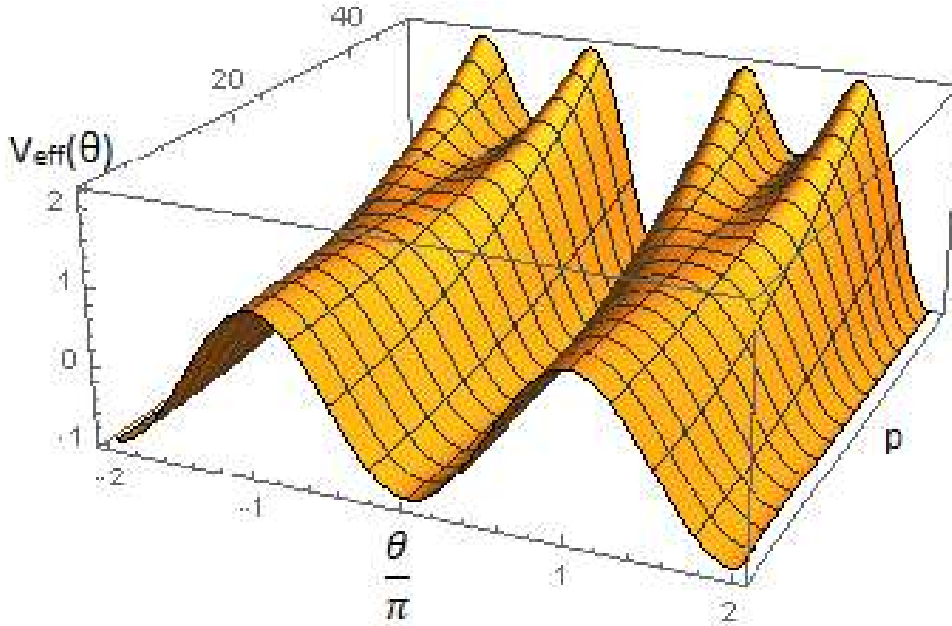


Figura 3.1: Potencial efectivo para el péndulo cuyo pivote se mueve verticalmente. Se construyó la gráfica con  $\omega = 17.5$  lo cual resulta en un valor de  $p_c = 24.7487$  donde el péndulo invertido comienza a ser estable.

determinar la primera bifurcación obteniendo los puntos extremos y viendo si corresponden a puntos máximos o mínimos. Los puntos extremos se obtienen al resolver

$$\frac{dU_{ef}}{d\theta} = \sin \theta \left[ 1 + \frac{p^2}{2\omega^2} \cos \theta \right] = 0 \quad (3.4)$$

que se satisface si (A)  $\sin \theta = 0$  ó si (B)  $1 + \frac{p^2}{2\omega^2} \cos \theta = 0$ .

*Caso A.* -  $\sin \theta = 0$  esto es, si  $\theta = \pm n\pi$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Para el caso en que  $\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$  se tiene la posición *hacia abajo*. Si la segunda derivada se evalúa en estos valores de  $\theta$ ,

$$\frac{d^2U_{ef}}{d\theta^2} = \left[ \cos \theta + \frac{p^2}{2\omega^2} \cos(2\theta) \right]_{\theta=\pm 2n\pi} = 1 + \frac{p^2}{2\omega^2} > 0 \quad (3.5)$$

por lo que

la posición hacia abajo  $\theta = \pm 2n\pi$  se refiere siempre, a un mínimo.

Para el caso  $\theta = \pm\pi, \pm 3\pi, ..$  se tiene la posición del péndulo invertido. Evaluando la segunda derivada del potencial efectivo en estos valores de  $\theta$  se tiene que

$$\frac{d^2 U_{ef}}{d\theta^2} = \left[ \cos \theta + \frac{p^2}{2\omega^2} \cos(2\theta) \right]_{\theta=\pm(2n+1)\pi} = -1 + \frac{p^2}{2\omega^2} \quad (3.6)$$

puede ser positivo o negativo.  $U_{ef}'' > 0$  si y solo si  $\frac{p^2}{2\omega^2} > 1$

es decir, si y solo si  $p > \sqrt{2}\omega = p_c$ , para  $\omega = 17.5$  se tiene que  $p_c = 24.7487$ , que es el valor de  $p = \frac{A\Omega^2}{g}$  donde el péndulo invertido comienza a ser estable,  $p$  puede incrementar su valor ya sea aumentando la frecuencia angular  $\Omega$  o incrementando la amplitud  $A$  también pueden ser ambos. Eventualmente, la posición invertida deja de ser estable, pero esto no lo captura el potencial efectivo, no se aprecia en la figura 5.1. La otra posibilidad de que (3.4) se anule es que

*Caso B.*  $-1 + \frac{p^2}{2\omega^2} \cos \theta = 0$ . Para este caso (B), se tiene entonces que  $\cos \theta = -\frac{2\omega^2}{p^2} < 0$  de modo que  $p^2 > 2\omega^2$  y además  $\theta$  debe estar ya sea en el intervalo  $-\frac{3}{2} < \frac{\theta}{\pi} < -\frac{1}{2}$  ó bien en el intervalo  $\frac{1}{2} < \frac{\theta}{\pi} < \frac{3}{2}$ . Así que, una vez dados los valores de  $\omega$  y  $p$ , el ángulo extremo sería  $\theta_c = \cos^{-1}\left(-\frac{2\omega^2}{p^2}\right)$ . Al evaluar la segunda derivada de  $U_{ef}$  en  $\theta_c$ , se tiene que  $U_{ef}''(\theta_c) = \frac{2\omega^2}{p^2} - \frac{p^2}{2\omega^2}$ . El ángulo  $\theta_c$  sería mínimo si  $U_{ef}'' > 0$  esto implicaría que  $2\omega^2 > p^2$  lo cual contradice al requisito de que  $p^2 > 2\omega^2$ , así que

$\theta_c$  nunca es un mínimo para  $p < \sqrt{2}\omega = p_c$

Pero

$U_{ef}(\theta_c) < 0$  se obtiene si  $p^2 > 2\omega^2$

y de hecho  $\theta_c = \cos^{-1}\left(-\frac{2\omega^2}{p^2}\right)$  implica la existencia de dos  $\theta_c$ 's que son máximos y que son simétricos respecto a  $\theta/\pi = -1$  como se ve en la figura 5.1. Como el potencial es invariante ante  $\theta \rightarrow -\theta$ , también se concluye que existen dos  $\theta_c$ 's que son máximos y son simétricos respecto a  $\theta/\pi = 1$ , esos cuatro máximos que existen para  $p > p_c$  se aprecian en la figura 5.1.



Resolveremos la ecuación de movimiento

$$\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + [1 + p \cos \omega t] \sin \theta = 0 \quad (3.7)$$

con el método de Runge Kutta de orden 4. Los parámetros experimentales usados por Bishop *et al* fueron  $c = 0.1$  y  $\omega = 17.5$ , esos valores son los que se usarán en las simulaciones en todo este trabajo.

Si se fija el valor de  $\omega$ , como  $p = \frac{A\Omega^2}{g} = \frac{A}{l}\omega^2$ , se puede variar  $p$  variando la amplitud de la oscilación del pivote ( $A$ ) o la longitud  $l$  del péndulo. Si en un experimento, la geometría del péndulo es fija, en el caso de una varilla, entonces su longitud sería fija, se puede variar el parámetro (experimental)  $p$  cambiando ya se la amplitud ( $A$ ) o bien la frecuencia angular del pivote ( $\Omega$ ). Para este caso del movimiento vertical del punto de suspensión del péndulo incrementamos el valor del parámetro  $p$  hasta que observamos que para condiciones iniciales cercanas a  $\theta = \pi$  el péndulo se queda oscilando alrededor de esa posición invertida.

La figura 3.2 muestra la gráfica se  $\frac{\theta(t)}{\pi}$  para valores de  $p = 24$  (curva morada) y  $p = 24.5$  (curva verde), ambos valores son menores que el valor crítico  $p_c = 24.7487$ , por lo que, aunque la condición inicial  $\theta(0)/\pi = 3.1416 \approx 1$  y  $\dot{\theta} = -0.002$ , el péndulo eventualmente tiende al punto fijo  $\theta = 0$  en una espiral estable. En las simulaciones numéricas realizadas, uno observa que entre más pequeño es el valor de  $p = \frac{A\Omega^2}{g} < p_c$ , más rápido se tiende a punto de equilibrio (punto fijo)  $\theta = 0$ . Para la condición inicial  $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (3.1416, 0)$ , con  $p = 24.7487 \approx p_c$ , se observa (numéricamente) una línea recta horizontal por un muy largo periodo de tiempo (casi hasta  $t/T = 1000$ ), esto es, el péndulo permanece fijo en la posición invertida por un tiempo muy largo y luego tiende a  $\theta = 0$ .

La figura 3.3 muestra la gráfica se  $\frac{\theta(t)}{\pi}$  para valores de  $p = 26$  (curva morada) y  $p = 30.0$  (curva verde), ambos valores son ahora mayores que el valor crítico  $p_c = 24.7487$ . Usando la condición inicial  $\theta(0)/\pi = 3.1416 \approx 1$  y  $\dot{\theta} = -0.002$ , el péndulo eventualmente tiende al punto fijo  $\theta = \pi$  en una espiral estable, es decir, la posición invertida se hace estable. En las simulaciones numéricas realizadas, uno observa que entre más cercano es el valor de  $p = \frac{A\Omega^2}{g} > p_c$ , más se tarda en acercarse al punto de equilibrio (punto fijo)  $\theta = \pi$ . Estas observaciones son congruentes con lo que el análisis del potencial efectivo arroja. De acuerdo con Bishop Bishop y Sudor (1999), existe un valor de  $p_F > p_c$  para el cual, la posición invertida deja de ser estable y aparece dos puntos fijos simétricos alrededor de  $\theta/\pi = 1$ . La determinación de ese punto  $p_F$  de bifurcación está fuera del propósito de esta

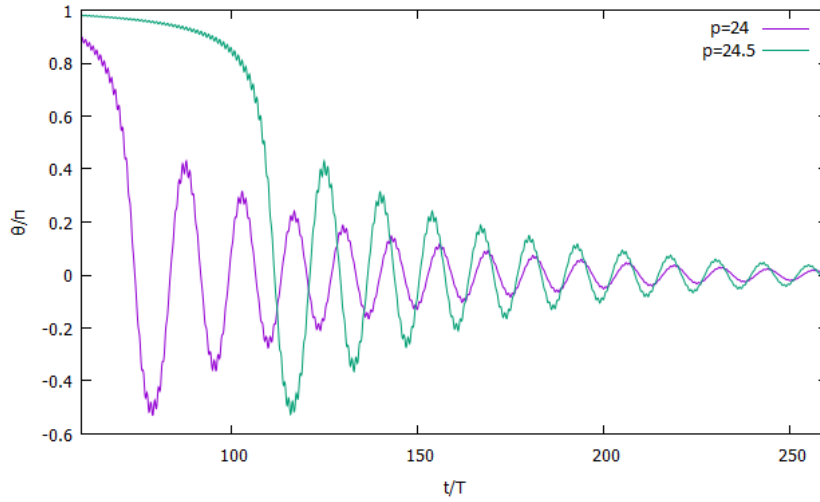


Figura 3.2: Gráfica de  $\frac{\theta(t)}{\pi}$  para dos valores de  $p < p_c = 24.7487$  para el caso en que el pivote se mueve verticalmente. Las condiciones iniciales en ambas simulaciones numéricas fueron  $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (3.1416, -0.002)$

tesis y no lo abordaremos.

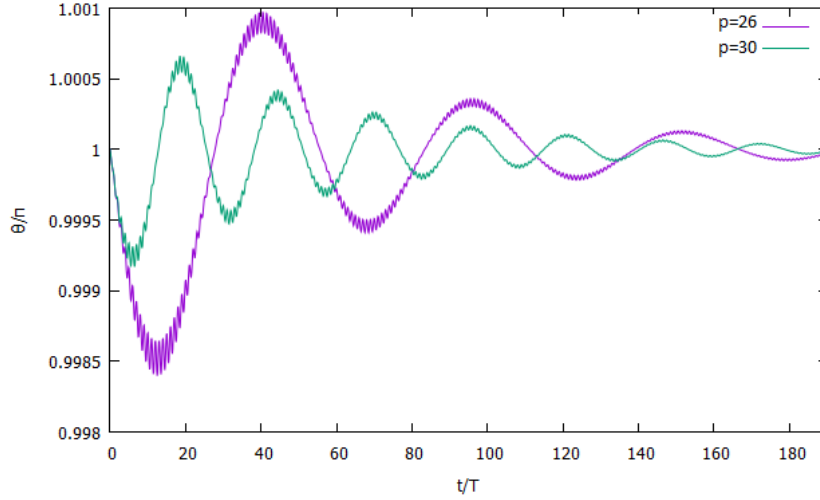


Figura 3.3: Historial de como se mueve  $\theta$  a través del tiempo para valores  $p=26$ ,  $p=30$  que son  $p > p_c$  en el movimiento vertical. Las condiciones iniciales en ambas simulaciones numéricas fueron  $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (3.1416, -0.002)$

## 3.2. Movimiento horizontal

Cuando el pivote se mueve de manera horizontal de izquierda a derecha, como se vió en el capítulo anterior, se obtiene la ecuación de movimiento (2.26), la cual se puede reescribir para obtener una expresión de potencial efectivo (A.6)

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + c\dot{\theta} &= -\sin \theta - p \sin \omega t \cos \theta \\ &= -\frac{dU}{d\theta} + f_1(\theta) \sin \omega t \end{aligned} \quad (3.8)$$

usando esto para obtener el potencial efectivo encontramos;

$$U_{ef} = U + \frac{1}{2m\omega^2} \overline{f^2} = U + \frac{p^2 \cos^2 \theta}{2m\omega^2} \overline{\sin^2 \omega t} \quad (3.9)$$

es decir, el potencial efectivo para el caso en que el pivote se mueve horizontalmente es

$$\boxed{U_{ef}(\theta) = -\cos \theta + \frac{p^2 \cos^2 \theta}{4\omega^2}} \quad (3.10)$$

Para determinar los puntos extremos se requiere conocer su primer derivada, ésta tiene la forma

$$\frac{dU_{ef}}{d\theta} = \sin \theta \left[ 1 - \frac{p^2}{2\omega^2} \cos \theta \right] = 0. \quad (3.11)$$

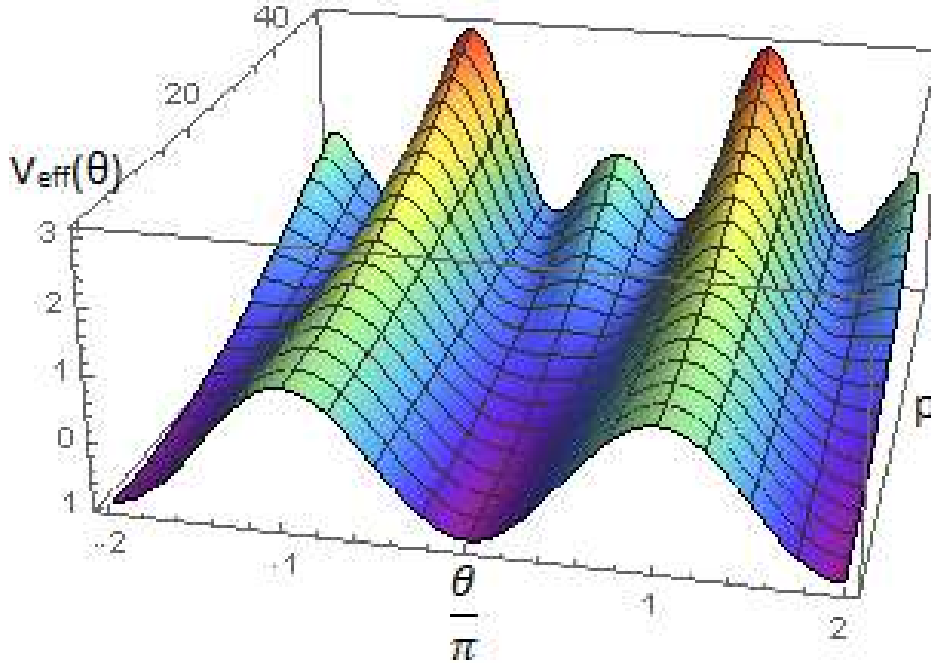


Figura 3.4: Potencial efectivo para el caso en que el pivote se mueve horizontalmente de izquierda a derecha. Aparecen dos mínimos alrededor de  $\theta = 0$  cuando  $p > \sqrt{2}w = p_c$ .

Para determinar si son máximos o mínimos, se requiere la segunda derivada

$$\frac{d^2 U_{ef}}{d\theta^2} = \left[ \cos \theta - \frac{p^2}{2\omega^2} \cos(2\theta) \right] = \cos \theta - \frac{p^2}{2\omega^2} [2 \cos^2 \theta - 1]. \quad (3.12)$$

La ecuación (3.11) se igualó a cero para buscar valores críticos del movimiento, esa igualdad puede satisfacerse en dos casos:

*Caso A.*-  $\sin \theta = 0$ , esto es, si  $\theta = \pm n\pi$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Para el caso en que  $\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ , se tiene la posición del péndulo *hacia abajo*, esto es, todos estos valores del ángulo, son por supuesto, físicamente equivalentes. Si la segunda derivada se evalúa en estos valores de  $\theta$ ,

$$\frac{d^2 U_{ef}}{d\theta^2} = \left[ \cos \theta - \frac{p^2}{2\omega^2} \cos(2\theta) \right]_{\theta=\pm 2n\pi} = 1 - \frac{p^2}{2\omega^2} \quad (3.13)$$

puede ser positivo o negativo.  $U''_{ef} > 0$  cuando  $p < \sqrt{2}\omega$ ,  $U''_{ef} < 0$  cuando  $p > \sqrt{2}\omega$ .

También el  $\sin \theta$  se anula en  $\theta = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$  se tiene la posición del péndulo invertido.

Evaluando la segunda derivada del potencial efectivo en estos valores de  $\theta$  se tiene que

$$\frac{d^2 U_{ef}}{d\theta^2} = \left[ \cos \theta - \frac{p^2}{2\omega^2} \cos(2\theta) \right]_{\theta=\pm(2n+1)\pi} = -1 - \frac{p^2}{2\omega^2} \quad (3.14)$$

que es siempre negativo, por lo cual nos referimos a máximos; por tanto, de acuerdo al potencial efectivo, el

péndulo invertido siempre es inestable.

*Caso B.-* La derivada del potencial (3.11) también se anula cuando  $1 - \frac{p^2}{2\omega^2} \cos \theta = 0$ , es decir, cuando  $1 > \cos \theta = \frac{2\omega^2}{p^2} > 0$ , de modo que  $p^2 > 2\omega^2$  y además  $-\frac{1}{2} < \frac{\theta}{\pi} < \frac{1}{2}$ . Así que dados valores de  $\omega$  y  $p$ , el ángulo extremo sería  $\theta_c = \cos^{-1}\left(\frac{2\omega^2}{p^2}\right)$ . Al evaluar la segunda derivada de  $U_{ef}$  en  $\theta_c$ , se tiene que  $U''_{ef}(\theta_c) = -\frac{2\omega^2}{p^2} + \frac{p^2}{2\omega^2}$ . El ángulo  $\theta_c$  sería mínimo si  $U''_{ef} > 0$  esto implicaría que  $p^2 > 2\omega^2$ . El ángulo  $\theta_c$  sería un máximo si  $U_{ef}(\theta_c) < 0$  que ocurre si y sólo si  $p^2 < 2\omega^2$  lo cual contradice al requisito de que  $p^2 > 2\omega^2 = p_c$ .

De modo que este  $\theta_c$  nunca es un máximo y existe a partir de  $p > \sqrt{2}\omega$

Dada la simetría del potencial ante  $\theta \rightarrow -\theta$ , existen dos ángulos  $\theta_c$  a ambos lados de  $\theta = 0$  como se aprecia en la figura 3.4. En la figura 3.5 se muestra esta bifurcación *pitchfork* super crítica, que ocurre cuando  $p_c = \sqrt{2}\omega$ , en ese valor, el ángulo  $\theta = 0$  pierde estabilidad (representado por la línea punteada) mientras que para  $0 < p < p_c$ ,  $\theta = 0$  es un punto fijo espiral estable. Para  $p > p_c$  aparecen los puntos fijos estables  $\theta_c = \pm \cos^{-1}\left(\frac{2\omega^2}{p^2}\right)$ .

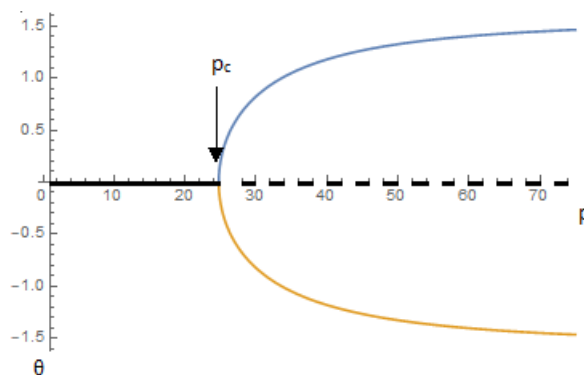


Figura 3.5: Para el caso en que el pivote se mueve horizontalmente en forma periódica, el ángulo  $\theta = 0$  es un punto fijo del tipo espiral estable para  $0 < p < p_c = \sqrt{2}\omega$ , en el valor de  $p = p_c$  aparecen dos puntos fijos estables  $\theta_c = \pm \cos^{-1}\left(\frac{2\omega^2}{p^2}\right)$  y el punto fijo  $\theta = 0$  pierde estabilidad.

En la figura 3.6 se muestran gráficas de  $\theta(t)/\pi$  para distintos valores del parámetro  $p$  y con las mismas  $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (3.1416, -0.002)$ . Para el valor  $p = 40$  se muestra la serie de tiempo en color morado (curva inferior), para  $p = 50$  es la curva verde (en medio) y para  $p = 70$  se tiene la curva en azul (curva superior). Entre mayor es el valor del parámetro  $p$ , podemos el péndulo gira algunas veces antes de oscilar alrededor de la posición *hacia abajo*, que corresponde a valores de  $\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$

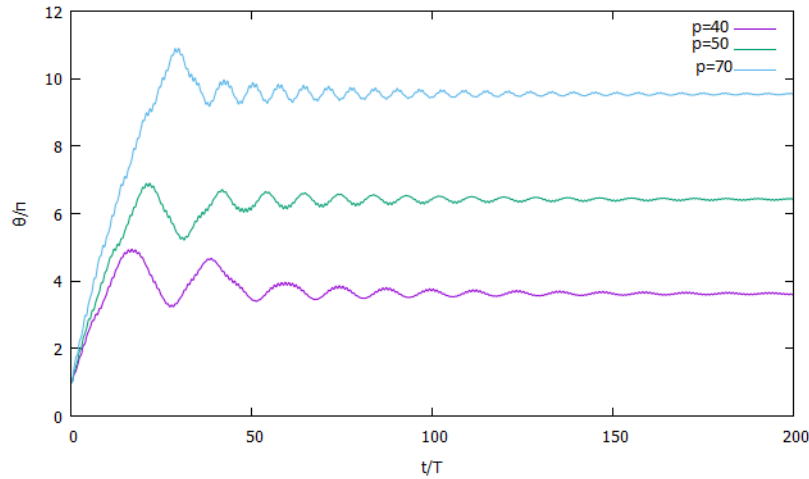


Figura 3.6: Gráfica de  $\frac{\theta(t)}{\pi}$  para tres valores de  $p = 40$  en color morado,  $p = 50$  en color verde y  $p = 70$  en color azul cuando el pivote se mueve horizontalmente. Las condiciones iniciales en ambas simulaciones numéricas fueron  $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (3.1416, -0.002)$

En la figura 3.7 se muestran las series de tiempo que ilustran precisamente la aparición de dos puntos fijos (espirales) estables simétricos con respecto a la posición *hacia abajo*, para un valor de  $p = 30$ . La curva morada se construye con las condiciones iniciales  $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (3.1416, -0.01)$ , mientras que la color menta tiene el mismo valor de  $p$  y cambiamos las condiciones iniciales a  $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (3.1416, 0.02)$ . La curva morada se va a un lado de la posición *hacia abajo*, mientras que la otra curva, simétricamente, del lado contrario.

En nuestra exploración numérica, hasta valores de  $p = 105$ , todavía observamos dos atractores (espirales) simétricos alrededor de  $\theta/\pi = 34$  (posición *hacia abajo*), esto es, dió varias rotaciones antes de estabilizarse. sin embargo, para  $p = 106$  el péndulo experimentaba solamente rotaciones, sin estabilizarse en ningún ángulo. Para este caso del movimiento del pivote en forma horizontal, jamás se observó que la posición invertida fuese estable.

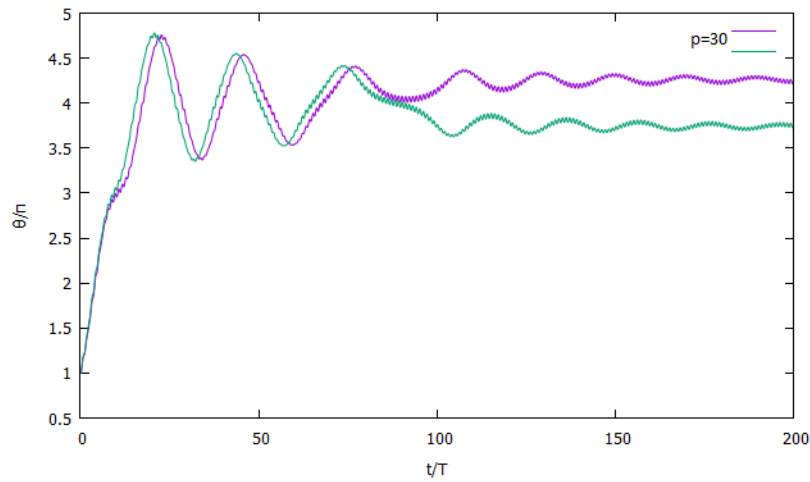


Figura 3.7: Gráfica de  $\frac{\theta(t)}{\pi}$  para el valor de  $p = 30$  en ambas cuando el pivote se mueve horizontalmente. Las condiciones iniciales del gráfico morado en simulaciones numéricas fueron  $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (3.1416, -0.01)$ , mientras que para el color menta  $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (3.1416, 0.02)$

# Capítulo 4

## Movimiento circular y elíptico del pivote

### 4.1. Movimiento circular

Cuando el pivote se mueve de manera que su trayectoria describe una circunferencia, como se vió en el capítulo 2, se obtiene la ecuación de movimiento (2.28) que adaptamos para proveer una expresión de potencial efectivo de acuerdo a la teoría expuesta en el apéndice:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} + c\dot{\theta} &= -\sin\theta - p\cos\omega t\sin\theta - p\sin\omega t\cos\theta \\ &= -\frac{dU}{d\theta} + f_1(\theta)\cos\omega t + f_2(\theta)\sin\omega t\end{aligned}\tag{4.1}$$

usando esto para obtener el potencial efectivo, encontramos;

$$U_{ef} = U + \frac{1}{4\omega^2}(f_1^2 + f_2^2)\tag{4.2}$$

$$\boxed{U_{ef} = -\cos\theta + \frac{p^2}{4\omega^2}}\tag{4.3}$$

La primera derivada del potencial,

$$\frac{dU_{ef}}{d\theta} = \sin\theta = 0\tag{4.4}$$

se iguala a cero para buscar valores críticos. La segunda derivada es simplemente

$$\frac{d^2U_{ef}}{d\theta^2} = \cos\theta\tag{4.5}$$



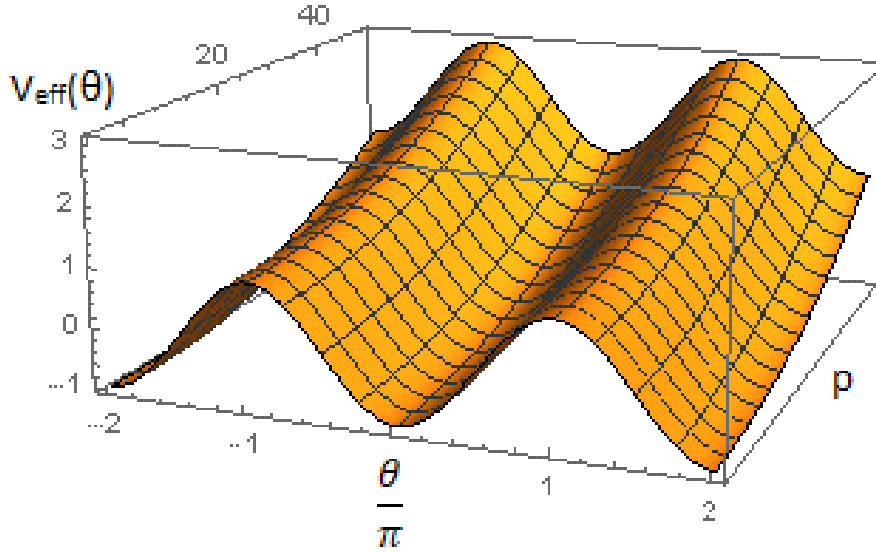


Figura 4.1: Potencial efectivo para el pivote que describe un círculo

Ahora la primera derivada del potencial efectivo (4.4) se anula cuando  $\theta = \pm n\pi$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$ , cuando  $\theta = 0, \pm 2\pi, \dots$  se tiene la posición *hacia abajo* del péndulo. Si la segunda derivada se evalúa en estos valores de  $\theta$ ,

$$\frac{d^2 U_{ef}}{d\theta^2} = [\cos \theta]_{\theta=\pm 2n\pi} = 1 > 0 \quad (4.6)$$

por lo que la posición *hacia abajo*  $\theta = \pm 2n\pi$  se refiere siempre, a un mínimo.

Para el caso  $\theta = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$  se tiene la posición del péndulo *invertido*. Evaluando la segunda derivada del potencial efectivo en estos valores de  $\theta$  se tiene que

$$\frac{d^2 U_{ef}}{d\theta^2} = [\cos \theta]_{\theta=\pm(2n+1)\pi} = -1 < 0 \quad (4.7)$$

con lo cual nos referimos a máximos, posición invertida inestable

Como hemos mencionado, el análisis del potencial de péndulo invertido sirve como guía para visualizar cuales podrían ser puntos fijos estables o inestables y determinar el umbral de bifurcaciones. Bishop *et al* han encontrado que el potencial efectivo es muy confiable en sus predicciones para determinar la primera bifurcación, al menos en el caso de estudio que ellos realizaron, esto es, cuando el pivote se mueve verticalmente, pero no predice el diagrama de bifurcaciones que muestran en la figura 3 de su artículo. En este caso del mo-

movimiento circular de pivote, la predicción basada en el potencial efectivo, es que la posición *hacia abajo* es siempre estable y que la *posición invertida* es siempre inestable. Con nuestros experimentos numéricos donde observábamos la dinámica del péndulo a medida que aumentábamos el valor del parámetro  $p$ , en efecto, parece que la posición invertida no es estable. Sin embargo, se observa que existe una bifurcación *pitchfork* supercrítica (o *hacia adelante*) en el que aparecen dos puntos fijos estables simétricos respecto a la posición *hacia abajo*, por ejemplo para  $p = 200$  y con las condiciones iniciales  $(\theta(0) = 3.1416, \dot{\theta}(0) = 0.1)$ , ya es notorio que el péndulo oscila no alrededor de la posición *hacia abajo* (en este caso, no alrededor de  $\theta_c/\pi = 12$ ), sino que oscila alrededor de  $\theta_c/\pi \approx 11.891285$ . El valor de estos ángulos críticos no es sencillo de determinar numéricamente; nosotros tomamos como valor de  $\theta_c$  al promedio de  $\theta(t)/\pi$  en el intervalo  $(\frac{3}{4}t_{max}, t_{max})$ , donde  $t_{max}$  es el tiempo máximo de la simulación numérica.

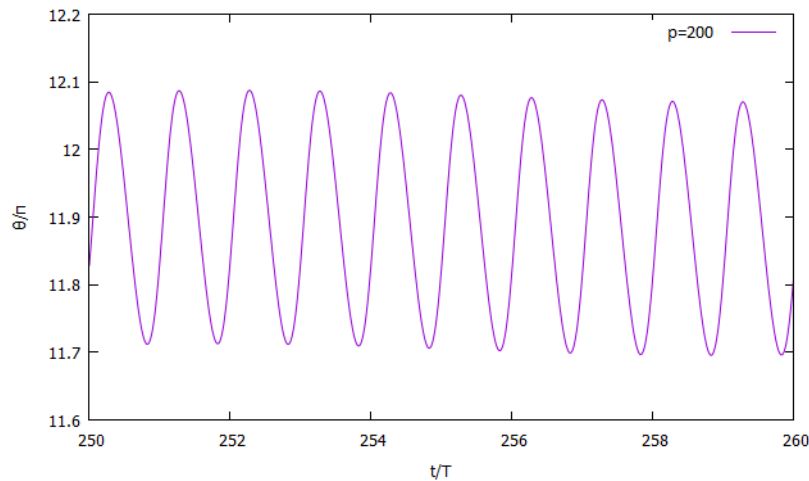


Figura 4.2: Gráfica de  $\frac{\theta(t)}{\pi}$  para el valor de  $p = 200$  cuando el pivote se mueve en forma circular. Las condiciones iniciales del gráfico morado en simulaciones numéricas fueron  $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (3.1416, 0.01)$

## 4.2. Movimiento del pivote en trayectoria elíptica

En esta sección analizaremos la dinámica del movimiento del péndulo cuando el punto de soporte se mueve siguiendo una trayectoria elíptica. Consideraremos dos casos: la elipse horizontal y la elipse vertical.

### 4.2.1. Elipse Horizontal

Cuando el pivote se mueve describiendo una trayectoria en forma de una elipse horizontal se obtiene la ecuación de movimiento (2.32) la cual reescribimos para obtener el potencial efectivo de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} + c\dot{\theta} &= -\sin\theta - p_H\sqrt{1 - \epsilon_H^2}\cos\omega t\sin\theta - p_H\sin\omega t\cos\theta \\ &= -\frac{dU}{d\theta} + f_1(\theta)\cos\omega t + f_2(\theta)\sin\omega t\end{aligned}\quad (4.8)$$

usando esto para obtener el potencial efectivo, encontramos;

$$U_{ef} = U + \frac{1}{4\omega^2}(f_1^2 + f_2^2) \quad (4.9)$$

$$\boxed{U_{ef} = -\cos\theta + \frac{p_H^2}{4\omega^2}(\alpha_H\sin^2\theta + \cos^2\theta)} \quad (4.10)$$

donde  $\alpha_H = \sqrt{1 - \epsilon_H^2}$  y  $\epsilon_H$  es la excentricidad de la elipse. La primera derivada se iguala a cero para buscar valores críticos,

$$\frac{dU_{ef}}{d\theta} = \sin\theta \left[ 1 + \frac{p_H^2}{2\omega^2}(\alpha_H - 1)\cos\theta \right] = 0. \quad (4.11)$$

La segunda derivada es

$$\frac{d^2U_{ef}}{d\theta^2} = \cos\theta - \frac{p_H^2(1 - \alpha_H)}{2\omega^2}(2\cos^2\theta - 1). \quad (4.12)$$

La ecuación (4.11) se satisface en dos casos, el *caso A* es cuando  $\sin\theta = 0$  y el *caso B* cuando  $1 + \frac{p_H^2}{2\omega^2}(\alpha_H - 1)\cos\theta = 0$ . Analizaremos cada caso por separado.

*Caso A.* -  $\sin\theta = 0$ . Esto ocurre si y sólo si  $\theta = \pm n\pi$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Para el caso en que  $\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$  se tiene la posición *hacia abajo*. Si la segunda derivada se evalúa en estos valores de  $\theta$ ,

$$\frac{d^2U_{ef}}{d\theta^2} = \left[ \cos\theta - \frac{p_H^2(1 - \alpha_H)}{2\omega^2}(2\cos^2\theta - 1) \right]_{\theta=\pm 2n\pi} = 1 - \frac{p_H^2}{2\omega^2}(1 - \alpha_H) \quad (4.13)$$

$$\boxed{U'' > 0 \text{ implica que } p^2 < \frac{2\omega^2}{1 - \alpha_H}, \text{ pero si } U'' < 0 \text{ implicaría que } p^2 > \frac{2\omega^2}{1 - \alpha_H}}$$

El  $\sin\theta$  también se anula en los múltiplos impares de  $\pi$  cuando  $\theta = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ , es decir, cuando se tiene la posición del *péndulo invertido*. Evaluando la segunda derivada del

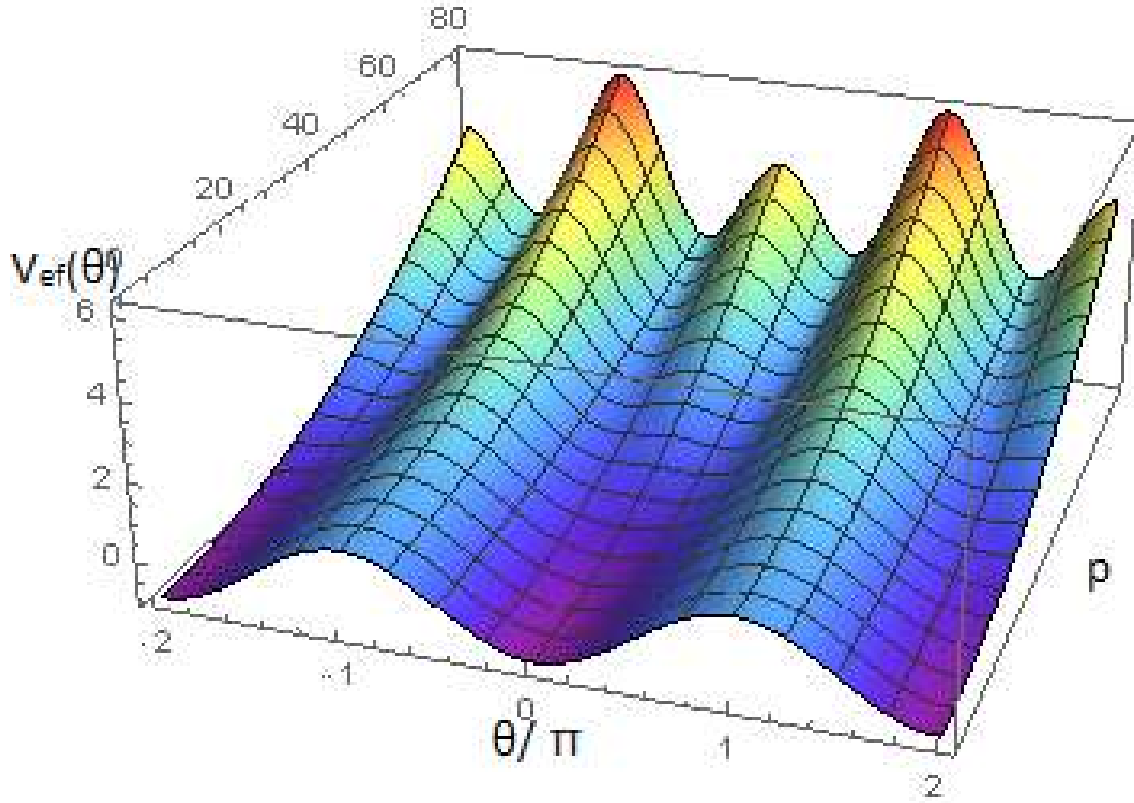


Figura 4.3: Potencial efectivo cuando el pivote se mueve describiendo una elipse horizontal con un valor de la excentricidad  $\epsilon = 0.8$

potencial efectivo en estos valores de  $\theta$  se tiene que

$$\frac{d^2 U_{ef}}{d\theta^2} = \left[ \cos \theta - \frac{p_H^2 (1 - \alpha_H)}{2\omega^2} (2 \cos^2 \theta - 1) \right]_{\theta = \pm(2n+1)\pi} = -1 - \frac{p_H^2}{2\omega^2} (1 - \alpha_H) \quad (4.14)$$

que siempre es negativo por lo que se tiene máximos.

La posición invertida del péndulo no es estable

Caso B.-  $1 - \frac{p_H^2}{2\omega^2} (1 - \alpha_H) \cos \theta = 0$ . De donde se tiene  $1 > \cos \theta = \frac{2\omega^2}{p_H^2 (1 - \alpha_H)} > 0$  y  $p_H^2 > \frac{2\omega^2}{1 - \alpha_H}$  que es mayor que cero. Al evaluar la segunda derivada de  $U_{ef}$  en  $\cos \theta$ , se tiene que  $U''_{ef}(\cos \theta) = \frac{p_H^2 (1 - \alpha_H)}{2\omega^2} - \frac{2\omega^2 (1 - \alpha_H)}{p^2}$ , para este caso  $U'' > 0$  sería mínimo si  $\left[ \frac{p_H^2 (1 - \alpha_H)}{2\omega^2} \right]^2 > 1$  que también se puede poner como  $p^2 > \frac{2\omega^2}{1 - \alpha_H}$ .

Cuando  $U'' < 0$  sería máximo si  $\left[ \frac{p_H^2 (1 - \alpha_H)}{2\omega^2} \right]^2 < 1$  que también se puede poner como  $p_H^2 < \frac{2\omega^2}{1 - \alpha_H}$ , pero esto contradice el hecho de que, para este caso B,  $p_H^2 < \frac{2\omega^2}{1 - \alpha_H}$  siempre.

Por lo tanto,  $\theta_c$  dado por

$$\theta_c = \cos^{-1} \left( \frac{2\omega^2}{p_H^2(1-\alpha_H)} \right) \quad (4.15)$$

Los valores de  $\theta_c$  son mínimos y aparecen solamente para  $p_H > \frac{\sqrt{2}\omega}{\sqrt{1-\sqrt{1-\epsilon_H}}}$

En la figura 4.4, se muestra  $p_c = p_c(\epsilon_H)$  para  $\omega = 17.5$ , para valores  $p < p_c(\epsilon_H)$  la posición *hacia abajo* ( $\theta = 0, \pm 2\pi, \dots$ ) es estable, para  $p > p_c(\epsilon_H)$  se hace inestable y aparece una bifurcación pitchfork supercrítica con dos ramas estables dadas por  $\theta_c = \cos^{-1} \left( \frac{2\omega^2}{p_H^2(1-\alpha_H)} \right)$ . Nótese que a medida que la excentricidad crece, la aparición de la bifurcación ocurre a valores más pequeños de  $p$ , mientras que si la excentricidad  $\epsilon_H$  decrece, para que aparezca esa bifurcación, se requieren de valores cada vez más grandes de  $p$ .

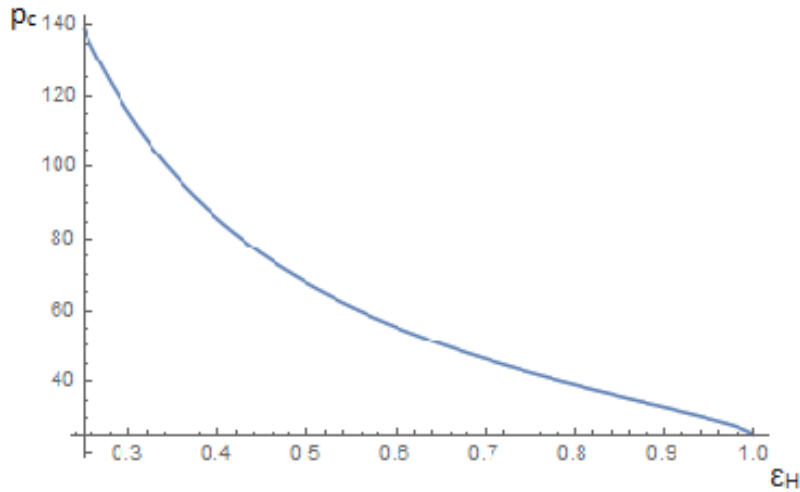


Figura 4.4: Gráfica del parámetro crítico  $p_c$  donde ocurre la bifurcación pitchfork. La posición *hacia abajo* pierde estabilidad y se da origen a ramas estables  $\theta_c = \cos^{-1} \left( \frac{2\omega^2}{p_H^2(1-\alpha_H)} \right)$ , esto para cuando el pivote se mueve a lo largo de una elipse horizontal. Aquí  $\alpha_H = \sqrt{1-\epsilon_H}$  siendo  $\epsilon_H$  la excentricidad.  $\omega = 17.5$

En la figura 4.5 se muestran las series de tiempo que ilustran precisamente la aparición de dos puntos fijos (espirales) estables simétricos para un valor de  $p = 75$  y  $\epsilon = 0.5$ . La curva morada se construye con las condiciones iniciales  $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (3.1416, -0.01)$ , mientras que la color menta tiene el mismo valor de  $p$  y cambiamos las condiciones iniciales a  $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (3.1416, -0.4)$ .

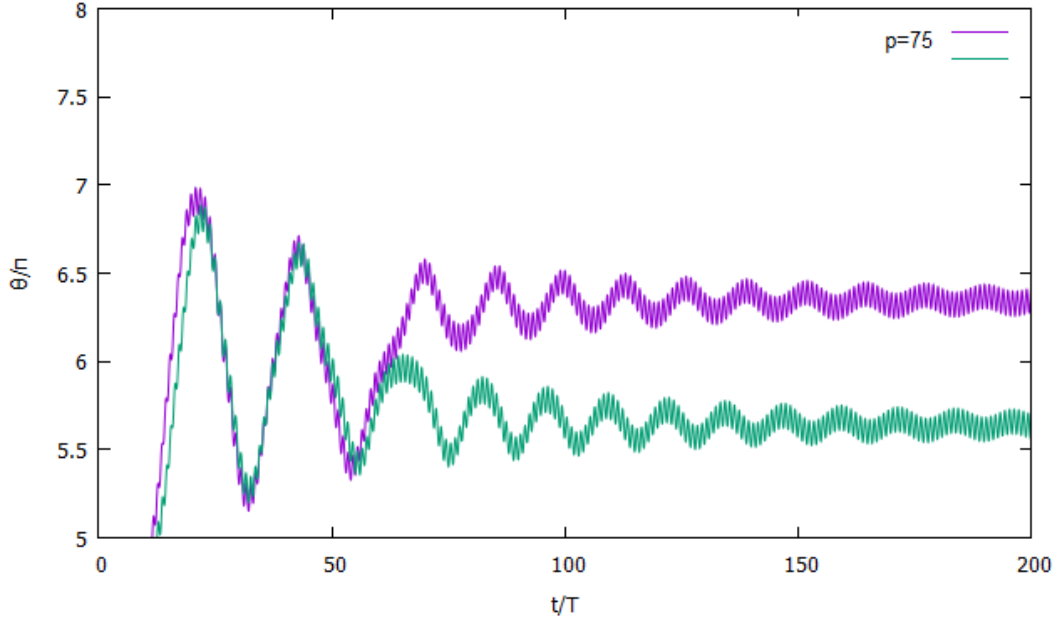


Figura 4.5: Gráfica de  $\frac{\theta(t)}{\pi}$  para el valor de  $p = 75$  en ambas cuando el pivote se mueve en elipse horizontalmente. Las condiciones iniciales del gráfico morado en simulaciones numéricas fueron  $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (3.1416, -0.01)$ , mientras que para el color menta  $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (3.1416, -0.4)$  con un valor de  $\epsilon = 0.5$  para ambas gráficas.

### 4.2.2. Elipse vertical

Ahora bien, si el pivote describe una trayectoria elíptica vertical con ecuación de movimiento (2.34), tendremos entonces ligeros cambios que se verán de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + c\dot{\theta} &= -\sin\theta - p_V \cos\omega t \sin\theta - p_V \sqrt{1 - \epsilon_V^2} \sin\omega t \cos\theta \\ &= -\frac{dU}{d\theta} + f_1(\theta) \cos\omega t + f_2(\theta) \sin\omega t \end{aligned} \quad (4.16)$$

Usando esto para obtener el potencial efectivo encontramos:

$$U_{ef} = U + \frac{1}{4\omega^2} (f_1^2 + f_2^2) \quad (4.17)$$

$$\boxed{U_{ef} = -\cos\theta + \frac{p_V^2}{4\omega^2} (\sin^2\theta + \alpha_V \cos^2\theta)} \quad (4.18)$$

con la expresión  $\alpha_V = \sqrt{1 - \epsilon_V}$  para la elipse vertical.

La primer derivada del potencial efectivo nos proporcionará información sobre los pun-

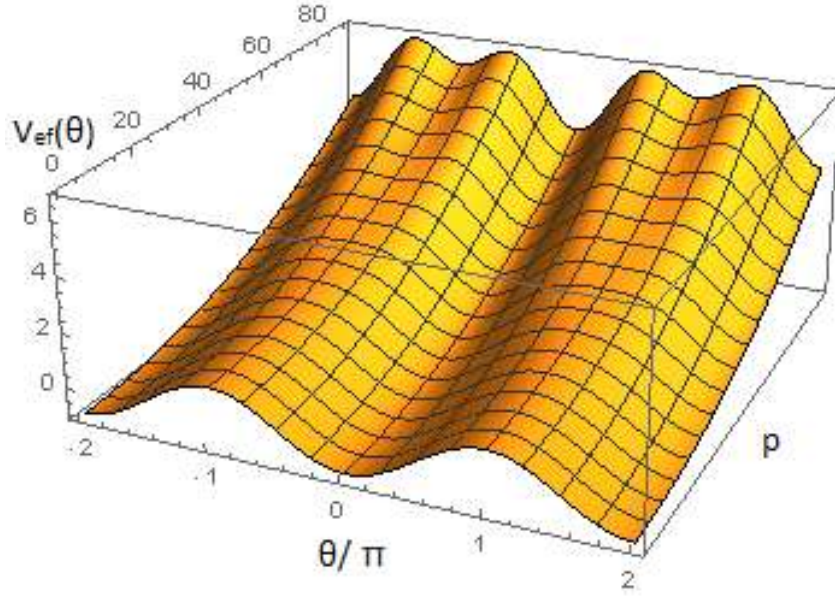


Figura 4.6: Potencial efectivo cuando el pivote describe un elipse vertical con un valor de  $\epsilon = 0.5$

tos críticos del sistema entonces al igualarla a cero:

$$\frac{dU_{ef}}{d\theta} = \sin \theta \left[ 1 + \frac{p_V^2}{2\omega^2} (1 - \alpha_V) (\cos \theta) \right] = 0 \quad (4.19)$$

y la segunda derivada es

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = \cos \theta + \frac{p_V^2 (1 - \alpha_V)}{2\omega^2} [2 \cos \theta^2 - 1] \quad (4.20)$$

La ecuación (4.19) se cumple en dos casos: caso *A* es cuando  $\sin \theta = 0$  y el caso *B*, cuando  $1 + \frac{p_V^2}{2\omega^2} (1 - \alpha_V) (\cos \theta) = 0$ . Ambos casos serán analizados a continuación.

*Caso A.*-  $\sin \theta = 0$ , esto es, si  $\theta = \pm n\pi$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Para el caso en que  $\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$  se tiene la posición *hacia abajo*. Si la segunda derivada se evalúa en estos valores de  $\theta$ ,

$$\frac{d^2U_{ef}}{d\theta^2} = \left[ \cos \theta + \frac{p_V^2 (1 - \alpha_V)}{2\omega^2} [2 \cos \theta^2 - 1] \right]_{\theta=\pm 2n\pi} = 1 + \frac{p_V^2}{2\omega^2} (1 - \alpha_V) \quad (4.21)$$

que es siempre positivo porque  $1 - \alpha_V > 0$ , por lo cual nos referimos a mínimos.

El  $\sin \theta$  también se anula en los múltiplos impares de  $\pi$  cuando  $\theta = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$  se tiene

la posición del péndulo invertido. Evaluando la segunda derivada del potencial efectivo en estos valores de  $\theta$  se tiene que

$$\frac{d^2 U_{ef}}{d\theta^2} = \left[ \cos \theta + \frac{p_V^2 (1 - \alpha_V)}{2\omega^2} [2 \cos \theta^2 - 1] \right]_{\theta = \pm(2n+1)\pi} = -1 + \frac{p_V^2}{2\omega^2} (1 - \alpha_V) \quad (4.22)$$

Si  $U'' < 0$  tendríamos máximos y esto implica que  $p^2 < \frac{2\omega^2}{1 - \alpha_V}$ , es decir,

la posición invertida es inestable para  $p < p_c = \frac{\sqrt{2}\omega}{1 - \alpha_V}$

Tendríamos mínimos si  $U'' > 0$ , que nos lleva a  $p^2 > \frac{2\omega^2}{1 - \alpha_V}$ . Es decir,

la posición invertida es estable para  $p > p_c = \frac{\sqrt{2}\omega}{1 - \alpha_V}$ .

*Caso B.*- Cuando  $1 + \frac{p_V^2}{2\omega^2} (1 - \alpha_V) (\cos \theta) = 0$ . Por tanto,  $-1 < \cos \theta = -\frac{2\omega^2}{p_V^2 (1 - \alpha_V)} < 0$ , así que

$$p_V^2 > \frac{2\omega^2}{(1 - \alpha_V)} \quad (4.23)$$

debe satisfacerse siempre para este caso. De modo que, dados los valores de  $\omega$  y  $p_V$ , el ángulo extremo sería

$$\theta_c = \cos^{-1} \left( \frac{-2\omega^2}{p_V^2 (1 - \alpha_V)} \right) \quad (4.24)$$

Resulta evidente que  $-\frac{3}{2} < \frac{\theta_c}{\pi} < -\frac{1}{2}$  o bien  $\frac{1}{2} < \frac{\theta_c}{\pi} < \frac{3}{2}$ .

$U''_{ef}$  evaluada en  $\theta_c$  llega a ser  $U''_{ef}(\theta_c) = \frac{2\omega^2}{p_V^2 (1 - \alpha_V)} - \frac{p_V^2 (1 - \alpha_V)}{2\omega^2}$ . El ángulo  $\theta_c$  sería mínimo si  $U'' > 0$  esto implicaría que  $p_V^2 < \frac{2}{(1 - \alpha_V)} \omega^2$  que contradice la primera condición general (4.23) de este caso *B*; por consiguiente, el ángulo  $\theta_c$  no puede ser un mínimo. Pero  $U_{ef}(\theta_c) < 0$  ocurre si y sólo si  $p_V^2 > \frac{2}{(1 - \alpha_V)} \omega^2$  por lo que el ángulo  $\theta_c$  es un máximo, que es además donde posición invertida se hace estable.

$\theta_c$  es un máximo para  $p_V^2 > \frac{2\omega^2}{(1 - \alpha_V)}$

La figura 4.7 muestra la gráfica de  $\frac{\theta(t)}{\pi}$  para valores de  $p = 45$  (curva morada) y  $p = 50$  (curva verde), ambos valores son menores que el valor crítico  $p_c = 61.871$ , por lo que, aunque la condición inicial  $\theta(0)/\pi = 3.1416 \approx 1$  y  $\dot{\theta} = -0.02$ , el péndulo eventualmente



tiende al punto fijo  $\theta = 0$  o un múltiplo de él, en una espiral estable. En las simulaciones numéricas realizadas, uno observa que entre más pequeño es el valor de  $p = \frac{A\Omega^2}{g} < p_c$ , más rápido se tiende al punto de equilibrio (punto fijo)  $\theta/\pi = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$

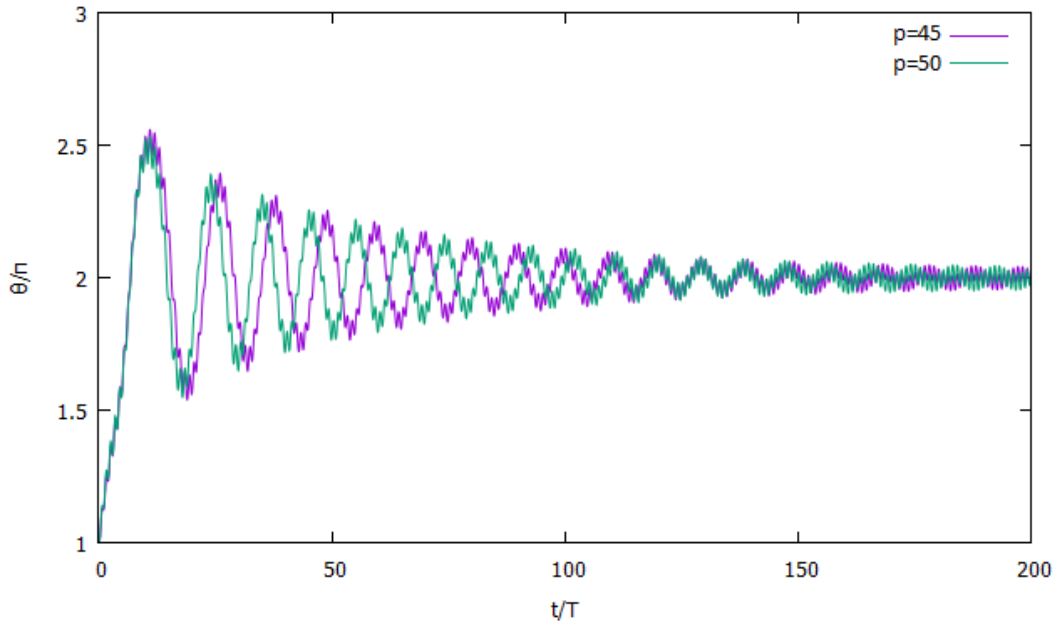


Figura 4.7: Gráfica de  $\frac{\theta(t)}{\pi}$  para dos valores de  $p < p_c = 61.8718$  para el caso en que el pivote se mueve en elipse vertical. Las condiciones iniciales en ambas simulaciones numéricas fueron  $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (3.1416, -0.02)$  y  $\epsilon = 0.8$ . El péndulo tiende a la posición *hacia abajo*.

La figura 4.8 muestra la gráfica de  $\frac{\theta(t)}{\pi}$  para valores de  $p = 70$  (curva morada) y  $p = 80.0$  (curva verde), ambos valores son ahora mayores que el valor crítico  $p_c = 61.87$  ( $\epsilon_V = 0.5$ ). Usando la condición inicial  $\theta(0)/\pi = 3.1416 \approx 1$  y  $\dot{\theta} = -0.02$ , el péndulo eventualmente tiende al punto fijo  $\theta = \pi$  en una espiral estable, es decir, la posición invertida se hace estable, este hecho ya se había visualizado en el análisis del potencial.

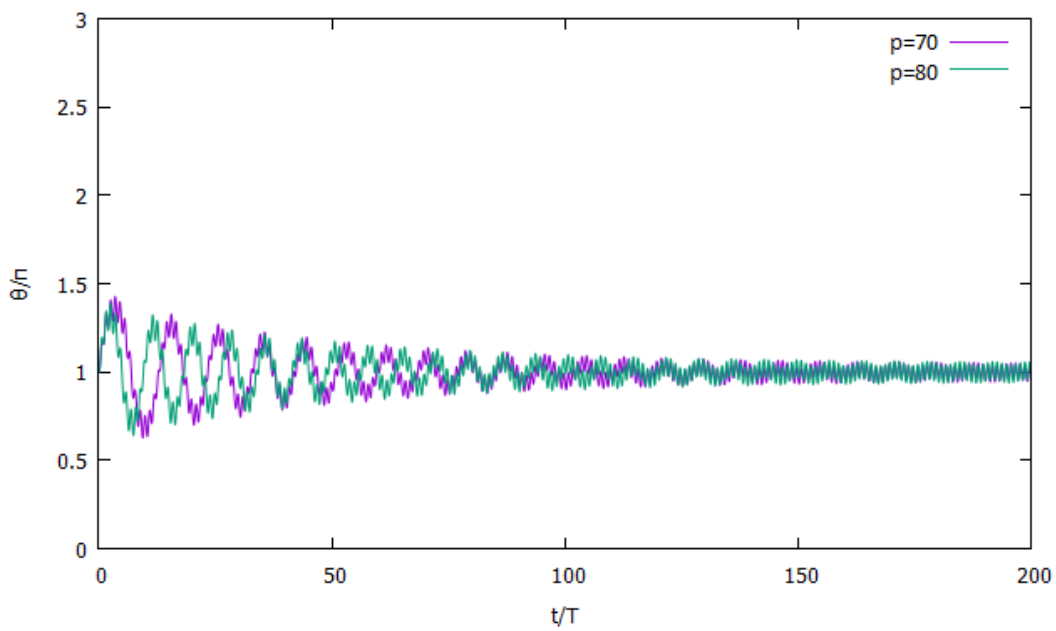


Figura 4.8: Gráfica de  $\frac{\theta(t)}{\pi}$  para dos valores de  $p > p_c = 61.87$  para el caso en que el pivote se mueve en elipse vertical. Las condiciones iniciales en ambas simulaciones numéricas fueron  $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (3.1416, -0.02)$  y  $\epsilon = 0.8$

# Capítulo 5

## Movimiento en forma lemniscata del pivote

En este capítulo se estudia la dinámica del péndulo cuando su pivote se mueve a lo largo de una trayectoria de Lemniscata. Distinguiremos dos casos: la lemniscata vertical y la horizontal.

### 5.1. Lemniscata vertical

Para obtener una ecuación de potencial efectivo, realizamos un procedimiento igual a las secciones anteriores. Primeramente estudiaremos el caso de la trayectoria del pivote a lo largo de una lemniscata vertical, la cual tiene por ecuación de movimiento (2.6)

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} + c\dot{\theta} &= -\sin\theta - p\cos\omega t\sin\theta - 4\gamma p\sin 2\omega t\cos\theta \\ &= -\frac{dU}{d\theta} + f_1(\theta)\cos\omega t + f_2(\theta)\sin 2\omega t\end{aligned}\tag{5.1}$$

usando lo anterior llegamos a

$$U_{ef} = U + \frac{1}{4\omega^2}(f_1^2 + f_2^2)$$

$$\boxed{U_{ef} = -\cos\theta + \frac{p^2}{4\omega^2}(\sin^2\theta + 16\gamma^2\cos^2\theta)}\tag{5.2}$$

En la figura 5.1 se muestran tres potenciales efectivos para cuando el pivote se mueve describiendo una trayectoria de lemniscata vertical  $\mathcal{L}_{4,2}$  con valores  $\gamma = 4$  y  $A = 2$  (cuadro superior), una  $\mathcal{L}_{0.5,2}$  con valores  $\gamma = 0.5$  y  $A = 2$  (cuadro inferior izquierdo) y una  $\mathcal{L}_{0.2,2}$  con valores  $\gamma = 0.2$  y  $A = 2$  (cuadro inferior derecho). Para la lemniscata  $\mathcal{L}_{4,2}$ , se observa

que los puntos con  $\theta = 0$  (posición *hacia abajo* del péndulo) y con  $\theta = \pm\pi$  (posición *invertida*) son máximos y por ende inestables. Para la lemniscata  $\mathcal{L}_{0.5,2}$ , se observa que el punto con  $\theta = 0$  (posición *hacia abajo*) es estable para valores pequeños del parámetro  $p$  y deja de ser estable para valores de  $p$  mayores. La posición invertida continúa siendo inestable. Uno podría concluir, sin una exploración más detallada, que el péndulo en la posición invertida nunca se estabiliza; sin embargo, para la lemniscata  $\mathcal{L}_{0.2,2}$ , se observa que existe un valor de  $p_c$  tal que, para  $p > p_c$ , los puntos con  $\theta = \pm\pi$  (posición *invertida*) se tornan en mínimos y por ende estables. Por tanto, se aprecia que la forma del potencial cambia de acuerdo a los valores de  $\gamma$ , es decir, dichos valores determinan la aparición o no de máximos y mínimos, la existencia o no, de puntos de equilibrio. La determinación de umbrales de bifurcación se realiza con la variación de los dos parámetros  $(\gamma, p)$ , tenemos ante nosotros un sistema *biparamétrico de bifurcaciones* .

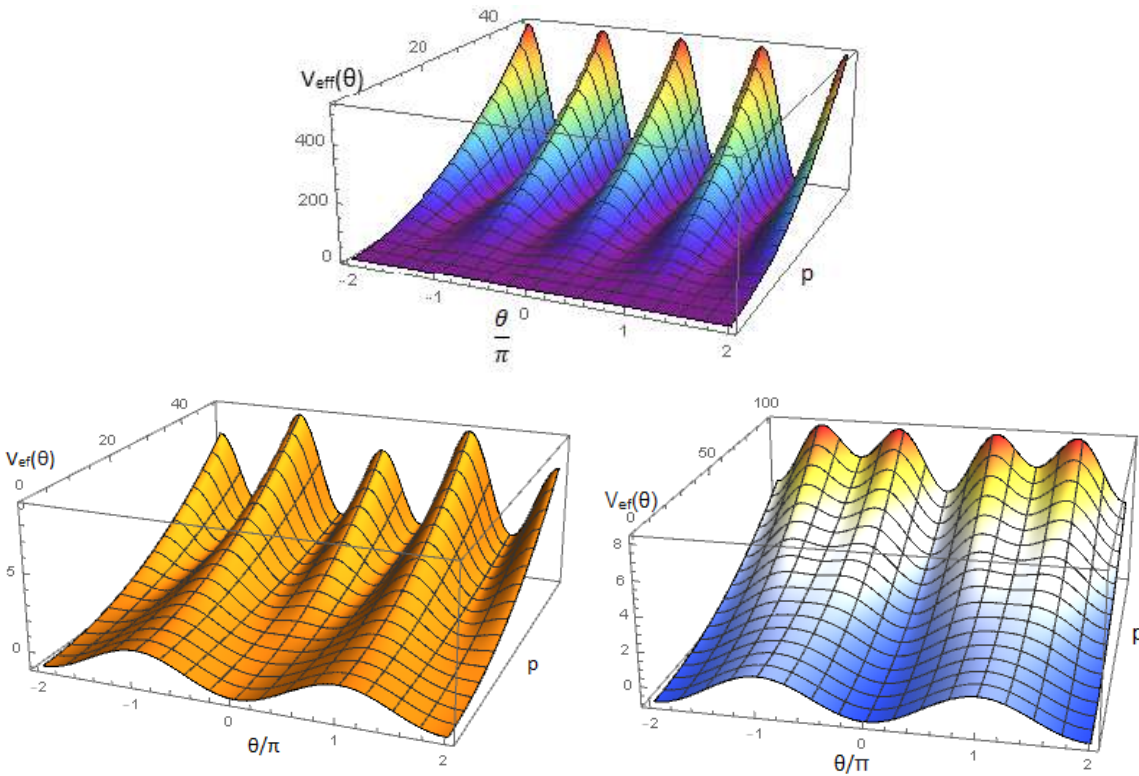


Figura 5.1: Potenciales efectivos para  $\gamma = 4$  y  $A = 2$  (panel superior), para  $\gamma = 0.5$  y  $A = 2$  (panel inferior izquierdo) y para  $\gamma = 0.2$  y  $A = 2$  (panel inferior derecho).

Para establecer el valor de los parámetros con precisión, calculamos las derivadas de la ecuación del potencial para buscar puntos críticos,

$$\frac{dU}{d\theta} = \sin \theta \left[ 1 - \frac{p^2}{2\omega^2} \cos \theta (16\gamma^2 - 1) \right] = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{dU^2}{d\theta^2} = \cos \theta - \frac{p^2(16\gamma^2 - 1)}{2\omega^2} [2 \cos^2 \theta - 1] \quad (5.4)$$

La ecuación (5.3) se cumple si (A)  $\sin \theta = 0$  ó (B)  $1 - \frac{p^2(16\gamma^2-1)}{2\omega^2} \cos \theta = 0$ , ambos casos los analizaremos a continuación.

Caso Aa.-  $\sin \theta = 0$ , si  $\theta = \pm n\pi$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$

Para el caso en que  $\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$  se tiene la posición *hacia abajo*. Si la segunda derivada se evalúa en estos valores de  $\theta$ ,

$$\frac{d^2U_{ef}}{d\theta^2} = \left[ \cos \theta - \frac{p^2(16\gamma^2 - 1)}{2\omega^2} [2 \cos^2 \theta - 1] \right]_{\theta=\pm 2n\pi} = 1 - \frac{p^2}{2\omega^2}(16\gamma^2 - 1) \quad (5.5)$$

Si  $U'' > 0$  (un mínimo) se implica que  $1 > \frac{p^2(16\gamma^2-1)}{2\omega^2}$ . Aquí hay dos sub-casos debido a que  $(16\gamma^2 - 1)$  puede ser una cantidad positiva o negativa.

Caso A.a1. Si  $16\gamma^2 > 1$  entonces  $\gamma > \frac{1}{4}$  y  $p^2 < \frac{2\omega^2}{16\gamma^2-1}$  de lo que podemos concluir que:

La posición hacia abajo es un mínimo estable para  $\gamma > \frac{1}{4}$  y  $p^2 < \frac{2\omega^2}{16\gamma^2-1}$

Esto puede apreciarse en la gráfica del cuadro inferior izquierdo en la figura 5.1.

Caso A.a2. Si  $16\gamma^2 < 1$  entonces  $\gamma < \frac{1}{4}$  y  $p^2 > \frac{2\omega^2}{16\gamma^2-1}$  de lo que podemos concluir que:

La posición hacia abajo es un mínimo estable para  $\gamma > \frac{1}{4}$  y  $p^2 > \frac{2\omega^2}{16\gamma^2-1}$

Esto puede apreciarse en la gráfica del cuadro inferior derecho en la figura 5.1.

Caso Ab.-  $\sin \theta = 0$  también se anula en los múltiplos impares de  $\pi$ , esto es, cuando  $\theta = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$  donde se tiene la posición del *péndulo invertido*. Evaluando la segunda derivada del potencial efectivo en estos valores de  $\theta$ ,

$$\frac{d^2U_{ef}}{d\theta^2} = \left[ \cos \theta - \frac{p^2(16\gamma^2 - 1)}{2\omega^2} [2 \cos^2 \theta - 1] \right]_{\theta=\pm(2n+1)\pi} = - \left[ 1 + \frac{p^2}{2\omega^2}(16\gamma^2 - 1) \right] \quad (5.6)$$

Nuevamente, aquí hay dos sub-casos debido a que  $(16\gamma^2 - 1)$  puede ser una cantidad positiva o negativa.

Caso A.b1 Si  $16\gamma^2 > 1$  entonces  $\gamma > \frac{1}{4}$ , para estos valores  $U'' < 0$  siempre es válida, por lo que

La posición invertida es siempre inestable (por ser un máximo) para  $\gamma > \frac{1}{4}$ .

Esto puede apreciarse en la gráfica del primer cuadro y el cuadro inferior izquierdo en la figura 5.1 que son potenciales para  $\gamma > \frac{1}{4}$ .

Caso A.b2 Si  $16\gamma^2 < 1$  entonces  $\gamma < \frac{1}{4}$ . Para estos valores  $U'' > 0$  si y solo si  $1 < \frac{p^2(1-16\gamma^2)}{2\omega^2}$  pero como  $(1 - 16\gamma^2) > 0$ , entonces podemos escribir  $p^2 > \frac{2\omega^2}{(1-16\gamma^2)}$  para  $\gamma < \frac{1}{4}$ , así que

La posición invertida es estable (por ser un mínimo) para  $\gamma < \frac{1}{4}$  y  $p^2 > \frac{2\omega^2}{(1-16\gamma^2)}$ .

Esto puede apreciarse en la gráfica del cuadro inferior derecho en la figura 5.1.

Caso B. - La derivada del potencial también se anula cuando  $1 - \frac{p^2}{2\omega^2}(16\gamma^2 - 1) \cos \theta = 0$ , es decir, cuando

$$\cos \theta = \frac{2\omega^2}{p^2(16\gamma^2 - 1)} \quad (5.7)$$

El coseno del ángulo puede ser positivo ó negativo dependiendo de si  $(16\gamma^2 - 1)$  es una cantidad positiva o negativa. Estos dos sub-casos los analizamos a continuación.

Caso B.1. Si  $16\gamma^2 > 1$  implica que  $\gamma > \frac{1}{4}$  y  $0 < \cos \theta < 1$ , el ángulo crítico es entonces

$$\theta_c = \cos^{-1} \left[ \frac{2\omega^2}{p^2(16\gamma^2 - 1)} \right], \quad (5.8)$$

y debe estar en el intervalo  $-\frac{1}{2} < \frac{\theta}{\pi} < \frac{1}{2}$ . Además, como en este caso  $\cos \theta < 1$ , se tiene  $p^2 > \frac{2\omega^2}{(16\gamma^2 - 1)}$  que se *debe de cumplir siempre* para este caso B.1. Sustituyendo (5.7) en la segunda derivada se obtiene

$$U'' = \left[ \frac{p^2(16\gamma^2 - 1)}{2\omega^2} - \frac{2\omega^2}{p^2(16\gamma^2 - 1)} \right]. \quad (5.9)$$

$U'' > 0$  implica que  $p^2 > \frac{2\omega^2}{16\gamma^2 - 1}$ , por lo que

$\theta_c$  dado por (5.8) es estable para  $\gamma > \frac{1}{4}$  y  $p^2 > \frac{2\omega^2}{(16\gamma^2 - 1)}$

Y como  $-\frac{1}{2} < \frac{\theta_c}{\pi} < \frac{1}{2}$ , estos puntos de equilibrio están situados a los lados de la posición de *hacia abajo* del péndulo. Esto puede verse en el cuadro inferior izquierdo de la figura 5.1.

$U'' < 0$  implica que  $p^2 < \frac{2\omega^2}{16\gamma^2-1}$  pero esto contradice nuestra condición para el caso B.1, por lo que el ángulo crítico  $\theta_c$  no puede ser nunca un máximo.

Caso B.2 Si  $16\gamma^2 < 1$  implica que  $\gamma < \frac{1}{4}$ . De (5.7) se sigue que  $-1 < \cos \theta < 0$ . El ángulo crítico es entonces

$$\theta_c = \cos^{-1} \left[ \frac{-2\omega^2}{p^2(1-16\gamma^2)} \right] \quad (5.10)$$

y  $p^2 > \frac{2\omega^2}{(1-16\gamma^2)}$ , que se debe de cumplir siempre para este caso B.2. Sustituyendo los valores del ángulo crítico en la segunda derivada

$$U'' = \left[ \frac{2\omega^2}{p^2(1-16\gamma^2)} - \frac{p^2(1-16\gamma^2)}{2\omega^2} \right] \quad (5.11)$$

Se tiene que  $U'' > 0$  implica que  $p^2 < \frac{2\omega^2}{1-16\gamma^2}$  que contradice la condición de que  $p^2 > \frac{2\omega^2}{(1-16\gamma^2)}$  debe de cumplir siempre. Por tanto,  $\theta_c$  no puede ser estable. Sin embargo,  $U'' < 0$  implica que  $p^2 > \frac{2\omega^2}{1-16\gamma^2}$  que si es admisible, por lo que

$\theta_c$  dado por (5.10) es inestable para  $\gamma < \frac{1}{4}$  y  $p^2 > \frac{2\omega^2}{(1-16\gamma^2)}$

Esto se aprecia claramente en el potencial del cuadro inferior derecho de la figura 5.1. Estos ángulos están alrededor de la posición invertida del péndulo que para esos valores de los dos parámetros  $\gamma$  y  $p$ , es estable.

Lo que se predice a través del uso de los potenciales efectivos, puede validarse con simulaciones numéricas (se una Runge-Kutta de orden 4) de las ecuaciones de movimiento. Por ejemplo, para  $\gamma = 0.5$  y  $p = 100$ , de acuerdo con el potencial mostrado en el panel inferior izquierdo de la figura 5.1, el péndulo terminaría oscilando alrededor de un ángulo cercano (pero no igual) a la *posición hacia abajo* del péndulo. La figura 5.2 es la serie de tiempo correspondiente a estos valores, con condiciones iniciales ( $\theta = 3.1416, \dot{\theta} = -0.01$ ), termina oscilando alrededor del ángulo  $\frac{\theta}{\pi} \approx 8.105207$  que físicamente equivale a un ángulo ligeramente superior a  $\theta = 0$  (*posición hacia abajo*). La figura 5.2 muestra la trayectoria del péndulo en el espacio fase  $(\frac{\theta}{\pi}, \frac{\dot{\theta}}{\pi})$ . Aquí se puede observar que el péndulo oscila no alrededor de la posición de equilibrio hacia abajo, sino alrededor de un ángulo ligeramente diferente.

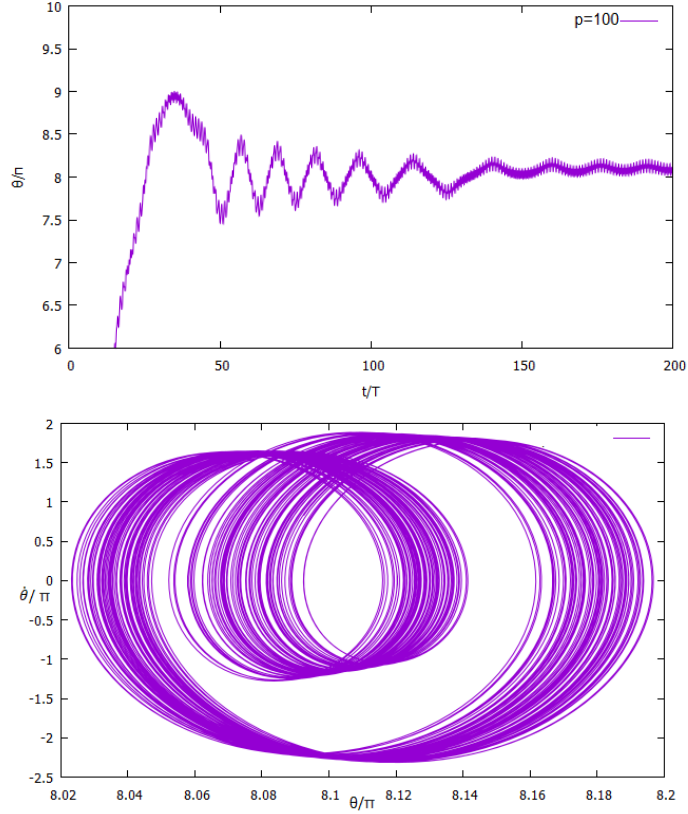


Figura 5.2: La figura superior es la serie de tiempo de  $\theta/\pi$  para cuando el pivote se mueve en una trayectoria de lemniscata vertical, con parámetros  $\gamma = 0.5$  y  $p = 100$  y condiciones iniciales  $(\theta = 3.1416, \dot{\theta} = -0.01)$ . Se observa que la oscilación no es alrededor de la posición hacia abajo del péndulo. Realmente es alrededor de  $\frac{\theta}{\pi} \approx 8.105207$ . La figura inferior es la trayectoria del péndulo en el espacio fase  $(\frac{\theta}{\pi}, \frac{\dot{\theta}}{\pi})$  y con parámetros  $\gamma = 0.5$  y  $p = 100$ . Se observa con claridad que la oscilación es alrededor de un punto ligeramente diferente a la posición hacia abajo del péndulo.

## 5.2. Lemniscata horizontal

De manera análoga se obtienen las expresiones para la lemniscata horizontal partiendo de (2.38)

$$\begin{aligned}
 \ddot{\theta} + c\dot{\theta} &= -\sin \theta - 4\gamma p \sin 2\omega t \sin \theta - p \cos \omega t \cos \theta \\
 &= -\frac{dU}{d\theta} + f_1(\theta) \sin 2\omega t + f_2(\theta) \cos \omega t
 \end{aligned} \tag{5.12}$$



usando lo anterior llegamos a

$$\begin{aligned} U_{ef} &= U + \frac{1}{4\omega^2}(f_1^2 + f_2^2) \\ &= -\cos\theta + \frac{p^2}{4\omega^2}(16\gamma^2 \sin^2\theta + \cos^2\theta) \end{aligned} \quad (5.13)$$

En la figura 5.3 se muestran tres potenciales efectivos para cuando el pivote se mueve describiendo una trayectoria de lemniscata horizontal  $\mathcal{L}_{4,2}$  con valores  $\gamma = 4$  y  $A = 2$  (cuadro superior izquierdo), una  $\mathcal{L}_{0.5,2}$  con valores  $\gamma = 0.5$  y  $A = 2$  (cuadro superior derecho) y una  $\mathcal{L}_{0.2,2}$  con valores  $\gamma = 0.2$  y  $A = 2$  (cuadro inferior). Para la lemniscata  $\mathcal{L}_{4,2}$ , se observa que los puntos con  $\theta = 0$  (posición *hacia abajo* del péndulo) y con  $\theta = \pm\pi$  (posición *invertida*) son mínimos y por ende estables. Para la lemniscata  $\mathcal{L}_{0.5,2}$ , se observa que el punto con  $\theta = 0$  (posición *hacia abajo*) sigue siendo estable. La posición invertida cambia de estabilidad para cierto valor del parámetro  $p$  y se vuelve inestable. Uno podría concluir, sin una exploración más detallada, que el péndulo en la posición hacia abajo es estable y la invertida cambia sin embargo, para la lemniscata  $\mathcal{L}_{0.2,2}$ , se observa que existe un valor de  $p_c$  tal que, para  $p > p_c$ , los puntos con  $\theta = \pm\pi$  (posición *invertida*) se tornan en mínimos y por ende estables y la posición hacia abajo empiezan a aparecer máximos. Por tanto, se aprecia que la forma del potencial cambia de acuerdo a los valores de  $\gamma$ , es decir, dichos valores determinan la aparición o no de máximos y mínimos, la existencia o no, de puntos de equilibrio.

Calculando las derivadas de la ecuación del potencial para buscar puntos críticos se obtiene

$$\frac{dU}{d\theta} = \sin\theta \left[ 1 + \frac{p^2}{2\omega^2}(\cos\theta)(16\gamma^2 - 1) \right] = 0 \quad (5.14)$$

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = \cos\theta + \frac{p^2}{2\omega^2}(16\gamma^2 - 1) [2\cos^2\theta - 1] \quad (5.15)$$

La ecuación (5.14) se cumple si (A)  $\sin\theta = 0$  ó (B)  $1 + \frac{p^2}{2\omega^2}(16\gamma^2 - 1)(\cos\theta) = 0$ .

Caso Aa.-  $\sin\theta = 0$ , si  $\theta = \pm n\pi$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Consideramos primero el caso en que  $\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$  que representa la posición *hacia abajo*. Si la segunda derivada se evalúa en estos valores de  $\theta$ .

$$\frac{d^2U_{ef}}{d\theta^2} = \left[ \cos\theta + \frac{p^2}{2\omega^2}(16\gamma^2 - 1)[2\cos^2\theta - 1] \right]_{\theta=\pm 2n\pi} = 1 + \frac{p^2}{2\omega^2}(16\gamma^2 - 1) \quad (5.16)$$

Distinguiremos los dos casos dependiendo de si  $(16\gamma^2 - 1)$  es positiva o negativa.

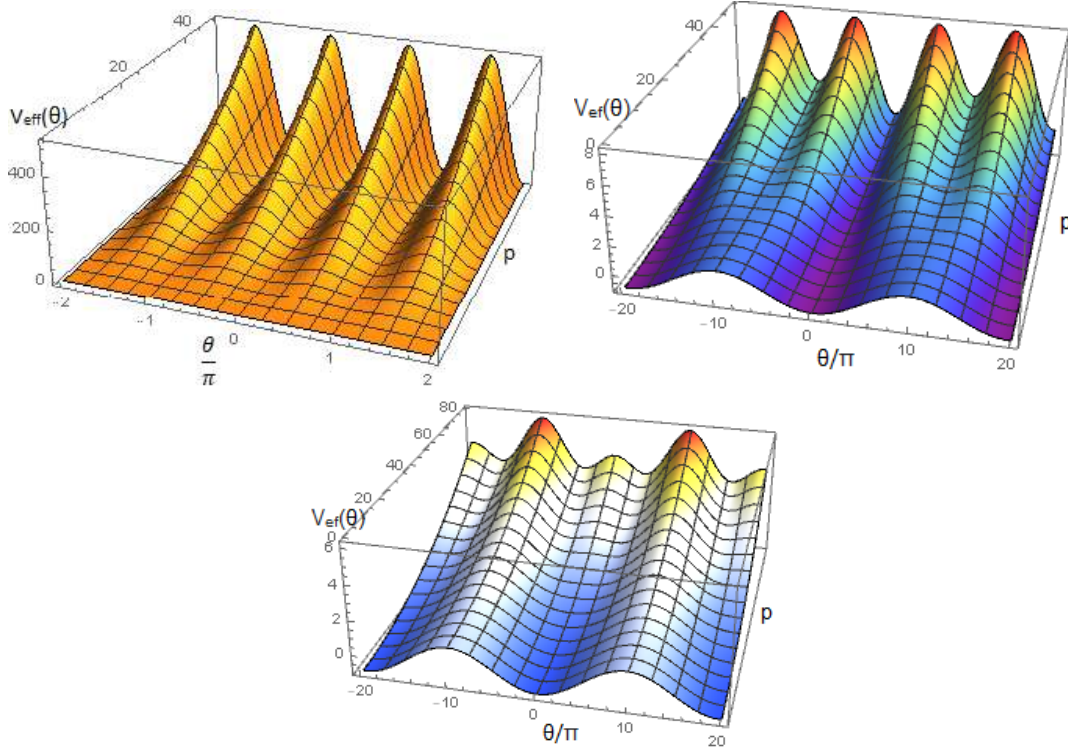


Figura 5.3: Potenciales efectivos para  $\gamma = 4$  y  $A = 2$  (panel superior izquierdo), para  $\gamma = 0.5$  y  $A = 2$  (panel superior derecho) y para  $\gamma = 0.2$  y  $A = 2$  (panel inferior).

Caso Aa1. Si  $16\gamma^2 > 1$ , se tiene  $\gamma > \frac{1}{4}$ . Por consiguiente  $U'' > 0$  todo el tiempo, por lo que

El péndulo *hacia abajo* ( $\theta = 0$ ) siempre es estable para  $\gamma > \frac{1}{4}$ .

Caso Aa2. Si  $16\gamma^2 < 1$ , se tiene  $\gamma < \frac{1}{4}$ . Por consiguiente  $U'' < 0$  si y solamente si  $p^2 > \frac{2\omega^2}{1-16\gamma^2}$ . Así que

El péndulo *hacia abajo* ( $\theta = 0$ ) siempre es inestable para  $\gamma < \frac{1}{4}$  y  $p^2 > \frac{2\omega^2}{1-16\gamma^2}$

Caso Ab.- El  $\sin \theta$  también se anula en los múltiplos impares de  $\pi$  cuando  $\theta = \pm\pi, \pm3\pi, \dots$  esto es, cuando se tiene la posición del péndulo *invertido*. Evaluando la segunda derivada del potencial efectivo en estos valores de  $\theta$ ,

$$\frac{d^2 U_{ef}}{d\theta^2} = \left[ \cos \theta + \frac{p^2}{2\omega^2} (16\gamma^2 - 1) [2 \cos^2 \theta - 1] \right]_{\theta=\pm(2n+1)\pi} = -1 + \frac{p^2}{2\omega^2} (16\gamma^2 - 1) \quad (5.17)$$

Dependiendo de si  $(16\gamma^2 - 1)$  es positivo o negativo, se considerarán dos sub-casos:

Caso A.b1 Si  $16\gamma^2 > 1$  entonces  $\gamma > \frac{1}{4}$ . Con esto  $U'' > 0$  solamente si  $p^2 > \frac{2\omega^2}{16\gamma^2-1}$  entonces resulta que

$$\boxed{\text{El péndulo invertido es estable si } \gamma > \frac{1}{4} \text{ y } p^2 > \frac{2\omega^2}{16\gamma^2-1}}$$

Caso A.b2. Si  $16\gamma^2 < 1$ ) entonces  $\gamma < \frac{1}{4}$ . Con esto  $U'' > 0$  nunca es posible (no se tiene un mínimo); pero  $U'' < 0$  siempre ocurre, por lo que

$$\boxed{\text{el péndulo invertido es inestable para valores } \gamma < \frac{1}{4}.$$

Caso B.- La derivada del potencial también se anula cuando  $1 + \frac{p^2}{2\omega^2}(16\gamma^2 - 1) \cos \theta = 0$ , es decir, cuando

$$\cos \theta = -\frac{2\omega^2}{p^2(16\gamma^2 - 1)}. \quad (5.18)$$

Se tendrán dos sub-casos dependiendo del signo de  $(16\gamma^2 - 1)$ , dichos casos los consideramos a continuación.

Caso B1. Si  $(16\gamma^2 - 1) > 0$  entonces  $\gamma > \frac{1}{4}$ . Como  $-1 < \cos \theta < 0$ , se tiene que  $p^2 > \frac{2\omega^2}{(16\gamma^2 - 1)}$  debe ser siempre válida. Así que  $U' = 0$  implica que

$$\theta_c = \cos^{-1} - \left[ \frac{2\omega^2}{p^2(16\gamma^2 - 1)} \right] \quad (5.19)$$

debe estar en los intervalos  $-\frac{3}{2} < \frac{\theta_c}{\pi} < -\frac{1}{2}$  o bien  $\frac{1}{2} < \frac{\theta_c}{\pi} < \frac{3}{2}$ . El ángulo  $\theta_c$  se ubica alrededor de la *posición invertida del péndulo*. Sustituyendo los valores de  $\theta_c$  en la segunda derivada del potencial se tiene

$$U'' = \frac{2\omega^2}{p^2(16\gamma^2 - 1)} - \frac{p^2(16\gamma^2 - 1)}{2\omega^2} \quad (5.20)$$

$U'' > 0$  implica que  $p^2 < \frac{2\omega^2}{16\gamma^2-1}$  que contradice el hecho de que  $p^2 > \frac{2\omega^2}{(16\gamma^2 - 1)}$  debe ser siempre válida en este caso. Así que

$$\boxed{\theta_c \text{ dado por (5.20) no puede ser un mínimo para } \gamma > \frac{1}{4} \text{ y } p^2 < \frac{2\omega^2}{16\gamma^2-1}}$$

Caso B2. Si  $(16\gamma^2 - 1) < 0$  entonces  $\gamma < \frac{1}{4}$  y se tiene que

$$\cos \theta = \frac{2\omega^2}{p^2(1 - 16\gamma^2)} > 0 \quad (5.21)$$

es decir  $\cos \theta < 1$  que implica que  $p^2 > \frac{2\omega^2}{1-16\gamma^2}$  debe ser válida siempre en este caso. El ángulo que hace que  $U' = 0$  es entonces

$$\theta_c = \cos^{-1} \left[ \frac{2\omega}{p^2(1 - 16\gamma^2)} \right] \quad (5.22)$$

Sustituyendo los valores de  $\theta_c$  en la segunda derivada del potencial se tiene

$$U'' = \frac{p^2(1 - 16\gamma^2)}{2\omega^2} - \frac{2\omega^2}{p^2(1 - 16\gamma^2)} \quad (5.23)$$

$U'' > 0$  implica que  $p^2 > \frac{2\omega^2}{1-16\gamma^2}$  entonces

$\theta_c$  dado por (5.22) es estable para  $\gamma < \frac{1}{4}$  y  $p^2 > \frac{2\omega^2}{1-16\gamma^2}$

$U'' < 0$  solamente con  $p^2 < \frac{2\omega^2}{1-16\gamma^2}$  que contradice la condición para nuestro caso. Por lo tanto,  $\theta_c$  nunca será un máximo para  $\gamma < \frac{1}{4}$  y  $p^2 < \frac{2\omega^2}{1-16\gamma^2}$ .

La figura 5.4 muestra la gráfica de  $\frac{\theta(t)}{\pi}$  para valores de  $p = 0.5$  (curva morada) y  $p = 1.5$  (curva verde) y  $\gamma = 3$ . Usando la condición inicial  $\theta(0)/\pi = 3.1416 \approx 1$  y  $\dot{\theta} = -0.02$ , el péndulo eventualmente tiende al punto fijo  $\theta = 0$  que es el complemento del caso A.b1 de esta sección donde el péndulo invertido es inestable para  $p^2 < \frac{2\omega^2}{(16\gamma^2-1)}$  de este modo aunque las condiciones iniciales se pongan cerca de  $\theta = \pi$  el péndulo tiende a la posición hacia abajo. La figura 5.5 muestra la gráfica de  $\frac{\theta(t)}{\pi}$  para valores de  $p = 5$  (curva morada) y  $p = 8$  (curva verde), ambos valores son ahora mayores que el valor crítico  $p_c = 2.0695$  y  $\gamma = 3$ . Usando la condición inicial  $\theta(0)/\pi = 3.1416 \approx 1$  y  $\dot{\theta} = -0.02$ , el péndulo eventualmente tiende al punto fijo  $\theta = \pi$  en una espiral estable, es decir, la posición invertida se hace estable, esta acción ya se había visualizado en el caso A.b1 para valores de  $\gamma > \frac{1}{4}$  y  $p^2 > \frac{2\omega^2}{16\gamma^2-1}$ .

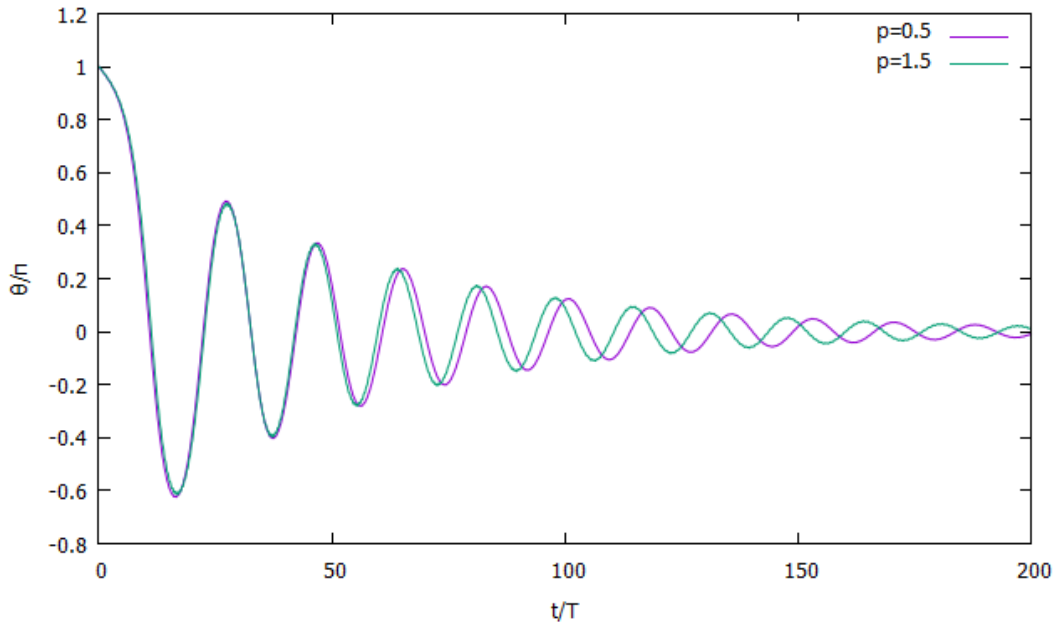


Figura 5.4: Gráfica de  $\frac{\theta(t)}{\pi}$  para dos valores de  $p < p_c = 2.0695$  para el caso en que el pivote se mueve en lemniscata horizontal. Las condiciones iniciales en ambas simulaciones numéricas fueron  $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (3.1416, -0.02)$  y  $\gamma = 3$ . El péndulo tiende a la posición *hacia abajo*.

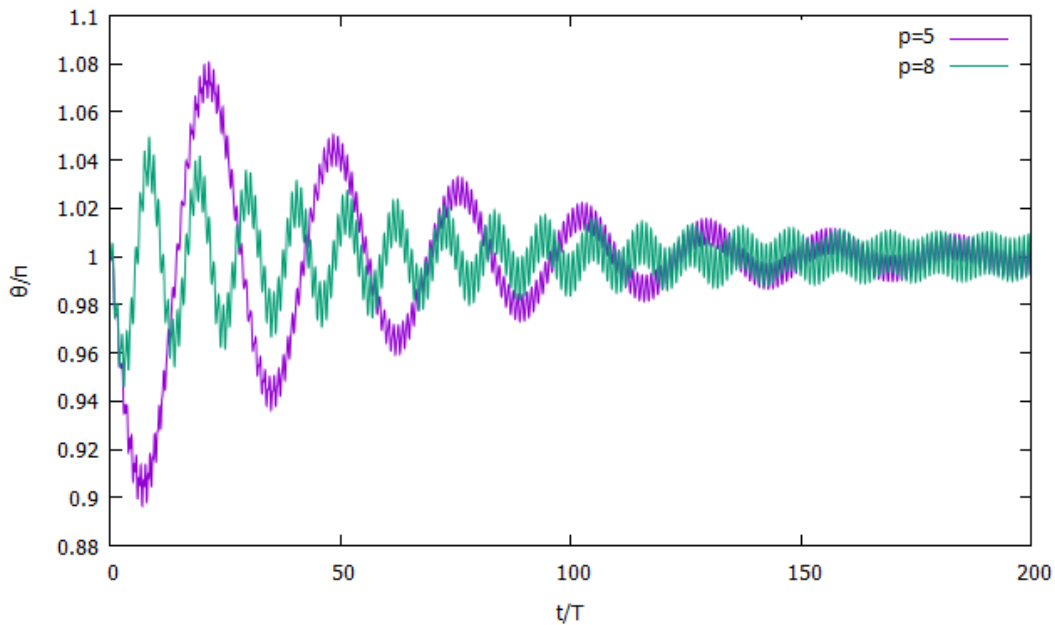


Figura 5.5: Gráfica de  $\frac{\theta(t)}{\pi}$  para dos valores de  $p > p_c = 2.0695$  para el caso en que el pivote se mueve en lemniscata horizontal. Las condiciones iniciales en ambas simulaciones numéricas fueron  $(\theta(0), \dot{\theta}(0)) = (3.1416, -0.02)$  y  $\gamma = 3$ .

# Capítulo 6

## Conclusiones y comentarios finales

Con la ayuda de potenciales efectivos construidos mediante el método de [Landau y Lifshitz (1970)], analizamos el comportamiento del péndulo cuando el pivote se mueve siguiendo diferentes trayectorias, encontrando particularidades en cada situación. Cuando el pivote se mueve verticalmente el péndulo invertido se estabiliza y forma bifurcaciones que después se pueden llegar a romper a cierto valor de  $p$  el cual no calculamos con precisión en este trabajo.

Para cada caso calculamos el valor de  $p_c$  que es donde cambia la estabilidad para alguno de las posiciones del péndulo. Cuando el pivote se mueve de manera horizontal el péndulo invertido nunca se estabiliza al igual que para la trayectoria circular y de elipse horizontal. En esta ultima trayectoria encontramos una bifurcación para la posición hacia abajo, en cambio cuando la trayectoria sigue una elipse vertical el péndulo invertido puede ser estable o inestable y depende del parámetro  $p$  que se utilice y se encuentran bifurcaciones para el caso invertido, cuando se sigue una trayectoria en forma de lemniscata lo que encontramos fue que la estabilidad del sistema depende de los valores que tomemos de  $\gamma$  y estos afectaran de forma evidente el  $p_c$ . En un intento de condensar toda la información encontrada analizando los potenciales efectivos hemos generado la tabla 6.1 para obtener una visión mas general de los comportamientos de cada caso y bajo cuales circunstancias.

Observando los resultados obtenidos en general se podría decir que el péndulo invertido puede estabilizarse cuando el pivote sigue alguna trayectoria de apariencia vertical que no sea muy amplia en el plano horizontal. Sería de interés calcular el espectro de los exponentes de Lyapunov que determinan las regiones en el espacio de parámetros donde existe caos. El cálculo de este espectro es directo cuando se tiene un sólo parámetro, pero

Movimiento del pivote	Posición abajo	Posición invertida	$p_c$	Bifurcación
Verticalmente	estable	estable para $p > p_c$ , inestable para $p < p_c$	$p_c = \sqrt{2}\omega$	aparece en $p > \sqrt{2}\omega$ para invertido
Horizontalmente	estable para $p < \sqrt{2}\omega$ , inestable para $p > \sqrt{2}\omega$	inestable	$p_c = \sqrt{2}\omega$	a partir de $p > \sqrt{2}\omega$ para posición abajo
Circular	estable	inestable	*	*
Elipse horizontal ( $\alpha = \sqrt{1 - \epsilon^2}$ )	estable para $p^2 < \frac{2\omega^2}{1-\alpha}$ , inestable para $p^2 > \frac{2\omega^2}{1-\alpha}$	inestable	$p_c = \frac{\sqrt{2}\omega}{\sqrt{1-\sqrt{1-\epsilon^2}}}$	aparecen a partir de $p^2 > \frac{2\omega^2}{1-\alpha}$ posición abajo.
Elipse vertical ( $\alpha = \sqrt{1 - \epsilon^2}$ )	estable	inestable para $p^2 < \frac{2\omega^2}{1-\alpha}$ , estable para $p^2 > \frac{2\omega^2}{1-\alpha}$	$p_c = \frac{\sqrt{2}\omega}{\sqrt{1-\sqrt{1-\epsilon^2}}}$	a partir de $p^2 > \frac{2\omega^2}{1-\alpha}$ posición invertida
Lemniscata vertical	estable para $\gamma > \frac{1}{4}$ y $\gamma < \frac{1}{4}$	inestable para $\gamma > \frac{1}{4}$ , estable para $\gamma < \frac{1}{4}$ y $p^2 > \frac{2\omega^2}{(1-16\gamma^2)}$	$p_c = \frac{\sqrt{2}\omega}{\sqrt{16\gamma^2-1}}$ para $\gamma > \frac{1}{4}$ y $p_c = \frac{\sqrt{2}\omega}{\sqrt{1-16\gamma^2}}$ para $\gamma < \frac{1}{4}$	a partir de $p^2 > \frac{2\omega^2}{(16\gamma^2-1)}$ para $\gamma > \frac{1}{4}$ y para $\gamma < \frac{1}{4}$ aparecen a partir de $p^2 > \frac{2\omega^2}{1-16\gamma^2}$
Lemniscata horizontal	estable para $\gamma > \frac{1}{4}$ , inestable para $\gamma < \frac{1}{4}$	estable si $\gamma > \frac{1}{4}$ , inestable para $\gamma < \frac{1}{4}$	$p_c = \frac{\sqrt{2}\omega}{\sqrt{1-16\gamma^2}}$ para $\gamma < \frac{1}{4}$ y $p_c = \frac{\sqrt{2}\omega}{\sqrt{16\gamma^2-1}}$ para $\gamma > \frac{1}{4}$	a partir de $p^2 > \frac{2\omega^2}{(1-16\gamma^2)}$ para $\gamma < \frac{1}{4}$ y a partir de $p^2 > \frac{2\omega^2}{16\gamma^2} - 1$ para $\gamma > 1/4$

Tabla 6.1: Condensado de información, \* quiere decir que sabemos que existe por experimentaciones numéricas pero no es un dato obtenido del análisis del potencial efectivo

en los casos del péndulo estudiados en esta tesis, hay de hecho, dos parámetros  $\omega$  y  $p$ ; la excentricidad y  $p_c$  (valor del umbral de las bifurcaciones) están relacionadas, como se vio. La construcción de los valles o cuencas de atracción de los puntos fijos encontrados, también es un tema a abordar todavía (excepto el del movimiento vertical y horizontal que ya se ha realizado). Y por supuesto, la construcción de diagramas de bifurcación completas (ver Bishop *et al*) es un estudio que debería realizarse.



# Apéndice A

## Potencial Efectivo

En este capítulo se proveerá una justificación analítica de como soluciones estables invertidas existen basándonos el planteamiento que se usa en [Landau] considerando la función de potencial efectivo. La idea de la aproximación es separar la dinámica natural del sistema y la dinámica producida por el forzamiento, de esta forma la amplitud total de movimiento se divide en dos amplitudes, una de ellas que varía lentamente en el tiempo y es debida a la oscilación natural del sistema y otra que varía rápidamente causada por el forzamiento externo, y con las aproximaciones mencionadas se generan ecuaciones de movimiento para cada una de estas amplitudes. Lo interesante en el caso del péndulo es que esta división del movimiento en su componente rápida y lenta es ideal para darnos información acerca de la región de estabilidad, ya que en dicha región la componente rápida domina la componente lenta y es realmente la causante de la estabilidad (por ejemplo el péndulo invertido sin forzamiento es altamente inestable, pero es estable al incluir el forzamiento). Precizando la aproximación al caso del péndulo, tenemos que bajo la suposición que la frecuencia  $\omega$  asociada al forzamiento periódico  $A(t)$  es mucho mayor que la frecuencia natural  $\omega_0$  de oscilación del péndulo en presencia solamente del campo gravitacional, separamos el movimiento del péndulo forzado en dos partes: una componente rápida y que suponemos de pequeña amplitud  $\xi(t)$ , y una componente lenta y de  $\phi(t)$  alta amplitud, de manera que

$$\theta(t) = \phi(t) + \xi(t) \tag{A.1}$$

el valor medio de la función  $\xi(t)$  sobre un periodo  $T = 2\pi/\omega$  es cero y que la función  $\phi(t)$  cambia muy ligeramente con el tiempo. La función  $\phi(t)$  describe el movimiento no perturbado considerando la media sobre las oscilaciones rápidas entonces tendremos:

$$m\ddot{\phi} + m\ddot{\xi} = \frac{-dU}{d\theta} - \xi \frac{d^2U}{d^2\theta} + f(\phi, t) + \xi \frac{\partial f}{\partial \phi} \tag{A.2}$$

En esta ecuación figuran dos grupos de términos de carácter distinto, oscilatorios y no perturbados que deben ser iguales por separado, para los oscilatorios, integrando la ecuaciones resultantes con la función  $f$  dada y considerando la componente  $\phi$  constante en un intervalo de tiempo  $2\pi/\omega$  se obtiene la expresión para la componente oscilatoria de la siguiente manera

$$\xi = -\frac{f}{m\omega^2} \quad (\text{A.3})$$

tomando el valor medio en el tiempo de (A.2) y considerando que los valores medios de las primeras potencias de  $f$  y  $\xi$  son cero, se tiene que

$$m\ddot{\phi} = -\frac{dU}{d\phi} - \frac{1}{m\omega^2} f \frac{\partial f}{\partial \phi} \quad (\text{A.4})$$

dado que contiene solamente la función  $\phi$  entonces podemos escribirle como

$$m\ddot{\phi} = \frac{-dU_{ef}}{d\phi} \quad (\text{A.5})$$

donde se ha definido la energía potencial efectiva comocomo

$$U_{ef} = U + \overline{f^2}/2m\omega^2 = U + (f_1^2 + f_2^2)/4m\omega^2 \quad (\text{A.6})$$

donde se ve claramente que el termino añadido al campo  $U$  es la energía cinética media del movimiento oscilatorio, así que

$$U_{ef} = U + \frac{1}{2}m\overline{\xi^2} \quad (\text{A.7})$$

el movimiento de la partícula respecto a las oscilaciones se realizan como si actuarán dos campos uno constante  $U$  y otro suplementario que es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo variable, generalizando a un sistema con cualesquiera grados de libertad representados por coordenadas generalizadas  $q$ , entonces la energía potencial efectiva se expresa

$$\begin{aligned} U_{ef} &= U + \frac{1}{2\omega^2} \sum_{ik} a_{ik}^{-1} \overline{f_i f_k} \\ &= U + \sum_{ik} \frac{1}{2} a_{ik} \overline{\dot{\xi}_i \dot{\xi}_k} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

donde las  $a_{ik}^{-1}$  son elementos de la matriz inversa de los coeficientes  $a_{ik}$  de la energía cinética de sistema.

# Apéndice B

## Estabilidad lineal

Consideremos el sistema

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x})) \quad (\text{B.1})$$

un punto fijo  $\tilde{x}$  es una raíz de  $\vec{f}(\vec{x})$ , cuando se introduce una perturbación  $\vec{\eta}(t)$  como  $\vec{x}(t) = \tilde{x} + \vec{\eta}(t)$  se quiere determinar el comportamiento de  $\vec{\eta}(t)$  en forma lineal. Asumiendo que  $|\vec{\eta}(t)| \ll 1$  se tiene  $\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{\eta}} = \vec{f}(\tilde{x} + \vec{\eta})$ , para la componente  $j$ -ésima tenemos la expresión

$$\dot{\eta}_j = f_j(\tilde{x} + \vec{\eta}) = f_j(\tilde{x}) + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right)_{\tilde{x}} (x_k(t) - \tilde{x}_k) + \dots \quad (\text{B.2})$$

Como  $\tilde{x}$  es un punto fijo  $f_j(\tilde{x}) = 0$ ,  $x_k(t) - \tilde{x}_k = \eta_k(t)$  se tiene  $\dot{\eta}_j(t) = \sum_{k=1}^n (\partial f_j / \partial x_k)_{\tilde{x}} \eta_k + \mathcal{O}(\eta^2)$  a orden lineal se desprecian los términos  $\mathcal{O}(\eta^2)$ , queda entonces  $\dot{\vec{\eta}} = \underline{J} \vec{\eta}$  con  $\underline{J} = (f_{jk})$  que tiene por solución  $\vec{\eta}(t) = \vec{\eta}_0 e^{\lambda t}$  que sustituyendo en las ecuaciones anteriores se obtiene  $\underline{J} \vec{\eta}_0 = \lambda \vec{\eta}_0$  que es un problema de valores y vectores propios, que se reescribe como  $\underline{M} = (\underline{J} - \lambda \underline{I})$ ,  $\underline{M} \vec{\eta}_0 = \vec{0}$  que tiene solución no trivial ssi  $\det(\underline{J} - \lambda \underline{I}) = 0 = P(\lambda)$  polinomio característico. Una vez encontrados los valores y vectores propios se puede escribir la solución que nos dará el comportamiento del sistema en la velocidad de un punto fijo, y nos permite clasificar a los puntos fijos.

### Caso 2-D

El sistema linealizado se escribirá como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_{11}x + f_{12}y \\ \dot{y} &= f_{21}x + f_{22}y \end{aligned}$$

con  $\vec{x}(t) = (x,y)$  y  $\vec{x}(0) = (x_0, y_0)$  aquí se renombra  $\eta_1 \rightarrow x, \eta_2 \rightarrow y$  trabajaremos en la velocidad de  $\vec{x}$  que es el origen del sistema. Así que  $\eta_1 = \eta_2 = 0$  es correspondiente al origen visto desde el sistema  $(\eta_1, \eta_2)$  o corresponde al punto fijo, visto en el sistema  $(x_1, x_2)$ , trabajando con las perturbaciones renombradas como  $(x,y)$ . Entonces tenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{B.3}$$

o abreviando  $\dot{\vec{x}} = \underline{A}\vec{x}$  donde  $\underline{J} \rightarrow \underline{A}$ .  $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{\lambda t}$  nos conduce a un valor de valores y vectores propios, donde el polinomio característico para este caso dos dimensional se ve de la forma

$$\lambda = \frac{Tr \underline{A} \pm \sqrt{(Tr \underline{A})^2 - 4det \underline{A}}}{2} \tag{B.4}$$

Si  $\lambda_+ = \lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_-$  los vectores propios correspondientes  $\vec{v}_+, \vec{v}_-$  son linealmente independiente y genera  $\mathbb{R}^2$  en lo particular  $\vec{x}_0 = c_+ \vec{v}_+ + c_- \vec{v}_- (= c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2)$  y en general  $\vec{x}(t) = c_+ e^{\lambda_+ t} \vec{v}_+ + c_- e^{\lambda_- t} \vec{v}_- (= c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2)$ .

Un esquema de valores de los puntos fijos en dos dimensiones, basándonos en los valores propios  $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(Tr J \pm \sqrt{(Tr J)^2 - 4det J})$

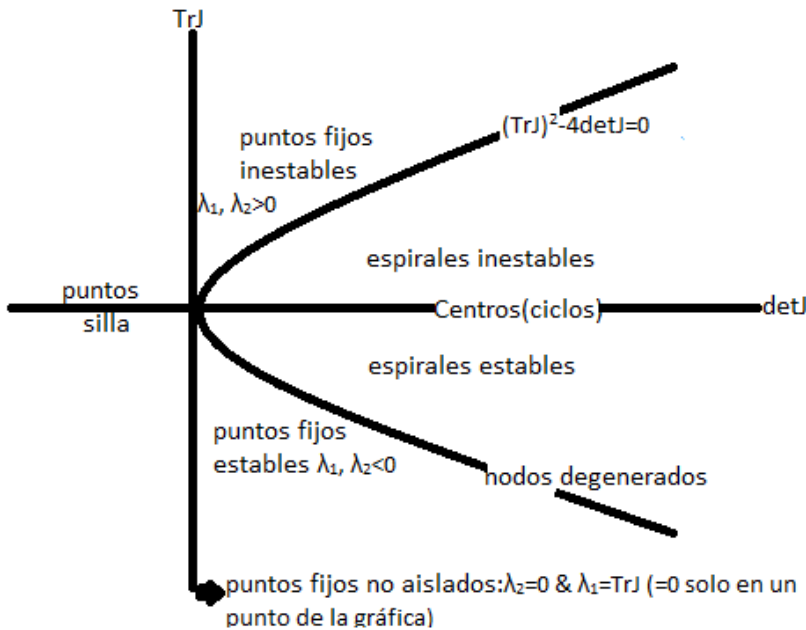


Figura B.1: Clasificación de los puntos fijos del sistema según los valores propios obtenidos del mismo

# Referencias

- Baker, G., y Gollub, J. P. (1996). *Chaotic dynamics: an introduction*. Cambridge university press.
- Bartuccelli, M., Gentile, G., y Georgiou, K. (2001). On the dynamics of a vertically driven damped planar pendulum. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 457(2016), 3007–3022.
- Bishop, S., y Sudor, D. (1999). The 'not quite' inverted pendulum. *International Journal of Bifurcation and chaos*, 9(01), 273–285.
- Chen, K. F. (2008). Standing human: an inverted pendulum. *Latin-American Journal of Physics Education*, 2(3), 7.
- Chirikov, B. V. (1979). A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics reports*, 52(5), 263–379.
- Cushman, R., Dullin, H., Giacobbe, A., Holm, D., Joyeux, M., Lynch, P., . . . Zhilinskií, B. (2004). C o 2 molecule as a quantum realization of the 1,1,2 resonant swing-spring with monodromy. *Physical review letters*, 93(2), 024302.
- Galileo, G. (1970). *Dialogue concerning the two chief world system*. Berkeley University of California Press.
- Jing, Z., y Yang, J. (2006). Complex dynamics in pendulum equation with parametric and external excitations ii. *International Journal of bifurcation and Chaos*, 16(10), 3053–3078.
- Kapitza, P. L. (1965). Dynamical stability of a pendulum when its point of suspension vibrates, and pendulum with a vibrating suspension. *Collected papers of PL Kapitza*, 2, 714–737.
- Landau, L. D., y Lifshitz, E. (1970). *Física teórica. mecánica* (Vol. 1). Reverte.
- Leven, R., Pompe, B., Wilke, C., y Koch, B. (1984). Experiments on periodic and chaotic motions of a parametrically forced pendulum. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 16(3), 371–384.
- Lynch, P. (2003). Resonant rossby wave triads and the swinging spring. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 84(5), 605–616.

- McCormick, F., y Witz, J. (1993). An investigation into the parametric excitation of suspended loads during crane vessel operations. *Underwater Technology London*, 19, 30–30.
- Michaelis, M. (1984). Stroboscopic study of the inverted pendulum. *American Journal of Physics*, 53(11), 1079–1083.
- Rainey, R. C. (1978). Dynamics of tethered platforms. *Nav. Archit.:(United Kingdom)*, 2.
- Salam, F., y Sastry, S. (1985). Dynamics of the forced josephson junction circuit: the regions of chaos. *IEEE transactions on circuits and systems*, 32(8), 784–796.
- Schuster, H. G., y Just, W. (2006). *Deterministic chaos: an introduction*. John Wiley & Sons.
- Strogatz, S. H. (2018). *Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press.
- Van Dooren, R. (1996). Chaos in a pendulum with forced horizontal support motion: a tutorial. *Chaos, Solitons & Fractals*, 7(1), 77–90.