



Universidad Michoacana de San Nicolás de  
Hidalgo

---

Instituto de Física y Matemáticas

---



Dispersión de Compton entre bosones U y partículas cargadas  
elementales.

Tesis

como requisito parcial para la obtención del grado de

Maestro en Ciencias en el Área de Física

por

David Rivera Rangel

asesorado por

Dr. en Física Juan Carlos Arteaga Velázquez

Morelia, Michoacán, México  
Agosto del 2015

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1. Física de partículas</b>	<b>1</b>
1.1. Modelo Estándar . . . . .	2
1.2. Ecuación de Dirac . . . . .	4
1.3. Contenido de partículas . . . . .	8
1.4. Bosones de norma . . . . .	9
1.5. Rotura espontánea de la simetría . . . . .	11
<b>2. Rayos Cósmicos</b>	<b>15</b>
2.1. Historia . . . . .	16
2.2. Detección . . . . .	18
2.3. Rayos cósmicos ultra energéticos . . . . .	20
2.3.1. Mecanismos de aceleración de rayos cósmicos . . . . .	21
2.4. El detector Pierre Auger . . . . .	22
<b>3. Materia Oscura</b>	<b>25</b>
3.1. Historia . . . . .	25
3.2. Distribución de materia oscura en la galaxia . . . . .	29
3.3. Naturaleza de la materia oscura . . . . .	29
3.3.1. Candidatos a partículas de materia oscura . . . . .	30
<b>4. Herramientas matemáticas y conceptuales</b>	<b>35</b>
4.1. Amplitud invariante . . . . .	38
4.2. Diagramas de Feynman . . . . .	38
4.3. Interacciones entre partículas . . . . .	40
4.4. Efecto Compton . . . . .	42
4.5. Variables de Mandelstam . . . . .	45
<b>5. Propuesta</b>	<b>47</b>
5.1. Sección Eficaz . . . . .	58

## ÍNDICE GENERAL

---

5.2. Restricciones cinemáticas . . . . .	60
<b>6. Discusión y resultados</b>	<b>65</b>
6.1. Sección eficaz diferencial . . . . .	65
<b>7. Conclusiones</b>	<b>75</b>
<b>Simetrías</b>	<b>77</b>
<b>Propiedades de las matrices <math>\gamma</math></b>	<b>81</b>

# Resumen

En este trabajo proponemos a un bosón U, el cual es masivo y neutro, como componente de la materia oscura y analizamos sus interacciones con la materia ordinaria. Utilizando los rayos cósmicos como fuente de partículas ultraenergéticas, las cuales pertenecen al Modelo Estándar de partículas. Este estudio se hace mediante el cálculo de la sección eficaz de un efecto Compton entre el bosón U y un quark. Posteriormente se analizan los resultados y se validan mediante una comparación con el efecto Compton clásico.

*palabras clave:* materia oscura, efecto Compton, sección eficaz diferencial, bosón U, rayos cósmicos.

### Abstract

Asuming the dark matter is formed for a masive, neutral particle called boson U, We analyze the interactions between dark matter and ordinary matter. Using cosmic rays as ultra high energy particle source. This analysis is made by calculating de differential cross section of the Compton effect between a boson U and a quark. Afterwards the results are discussed and validated using the classical Compton effect.

*key words:* dark matter, Compton effect, differential cross section, boson U, cosmic rays.

# Introducción

El Modelo estándar de partículas es una teoría que contiene todo nuestro conocimiento sobre las partículas fundamentales y sus interacciones, el cual ha sido desde sus comienzos una de las teorías físicas más exitosas. Esta teoría surgió como resultado del trabajo y las ideas de grandes científicos como Feynman, Salam, Weinberg, Glashow, Dirac, Pauli entre otros.

A pesar de los grandes esfuerzos que ha realizado la comunidad científica a lo largo de los años, aún existen observaciones fenomenológicas que siguen sin explicación, como es el caso de la materia oscura, cuyos efectos y naturaleza no han podido ser explicados ni con el modelo estándar, ni con la cosmología ni con ninguna teoría física existente. Aunque se cree que la materia oscura constituye el 26.8% del universo [1], su composición sigue siendo un completo misterio, sin embargo, sabemos que esta ahí debido a las observaciones de los efectos gravitacionales que esta tiene sobre la materia ordinaria, como por ejemplo, los lentes gravitacionales[2]. En el presente trabajo analizaremos la posibilidad de que un bosón neutro pesado, sea una de las componentes de la materia oscura.

En este trabajo proponemos a un bosón pesado neutro como candidato para ser uno de los componentes de la materia oscura e investigamos que tipo de interacción tiene con la materia ordinaria. Para lograr esto estudiamos sus propiedades y posteriormente hacemos el cálculo de la sección eficaz diferencial para una dispersión tipo Compton entre un Bosón U y componentes de rayos cósmicos, los cuales están compuestos por materia ordinaria. Posteriormente analizamos los resultados y analizamos su comportamiento, buscando así, entender a partir de los gráficos y las ecuaciones como es que se presentaría el efecto en la realidad en caso de existir, en particular, se generan restricciones sobre el ángulo de dispersión para el efecto Compton entre el bosón U y el quark. Para validar nuestros resultados utilizamos el efecto Compton entre un fotón y un electrón, el cual es un fenómeno que ha sido ampliamente estudiado.

Esta tesis se presenta de la siguiente manera, En el capítulo uno damos una breve descripción del Modelo Estándar, presentamos la ecuación de Dirac y algunas de sus consecuencias. En el segundo capítulo entramos al tema de los rayos cósmicos, damos una breve reseña histórica y explicamos algunas de sus propiedades más importantes para la realización de este trabajo; por ejemplo, su clasificación a partir de la energía

## CAPÍTULO 0. INTRODUCCIÓN

---

que poseen, mediante que mecanismos alcanzan energías tan altas los llamados rayos cósmicos ultraenergéticos. En este mismo capítulo, exploramos los métodos que existen para su detección. En el tercer capítulo, abordamos el problema de la materia oscura, cómo es que surgió, explicamos por que es un problema que concierne a la física de partículas y damos una breve descripción de algunas de las partículas candidatas a ser componentes de la materia oscura y es aquí donde nos ocupamos de explicar por que nos inclinamos hacia la propuesta de el bosón U como componente de diacha materia. Así mismo analizamos algunas propuestas que existen para su detección. En el cuarto capítulo mostramos algunas herramientas matemáticas y conceptuales que serán de utilidad para el desarrollo del trabajo, explicamos como se utilizan las reglas de Feynman, de que manera se expresa matemáticamente la dispersión entre dos partículas así como el estudio del concepto de sección eficaz; también explicamos que es el efecto compton y por que será de utilidad en esta tesis. En el capítulo cinco, damos una propuesta sobre el uso de rayos cósmicos para investigar la interacción entre un bosón U y un quark, de este modo presentamos la forma de la sección eficaz diferencial para este fenómeno y que restricciones cinemáticas debe tener el proceso según las energías y momentos de las partículas involucradas. En el capítulo seis, presentamos los resultados de utilizar nuestra propuesta y analizamos los resultados obtenidos y se dan algunas posibles explicaciones físicas para los resultados. Finalmente en el capítulo 7 se dan a conocer las conclusiones de este trabajo.

# Capítulo 1

## Física de partículas

Antes de comenzar a hablar de materia oscura, rayos cósmicos o el universo, hablaremos de la materia común, de esa que observamos diariamente, que nos ha interesado y ha captado nuestra atención. De ésta se forma nuestro cuerpo, nuestro planeta, los objetos sobre la Tierra y el Universo; y es la misma que nos maravilla cuando vemos cuerpos celestes y sus movimientos o que observemos con detenimiento los fenómenos que acontecen aquí en la Tierra. Tanto nos ha impresionado que todas las civilizaciones de las cuales se tienen registro han tenido pensadores a los que no les bastó con maravillarse, o bien el encanto fue tan fuerte, sintieron la necesidad de explicar cual era la naturaleza de la sustancia de la que estaba compuesto todo, incluso ellos mismos. Algunos pensadores abordaron esta tarea mediante el mito y las supersticiones, otros mediante explicaciones científicas basadas en la observación continua de los fenómenos naturales. Entre los griegos, hace 2500 años, Demócrito se preguntaba que tanto era posible cortar un trozo de materia fuese el material que fuese. Él pensaba que era posible llegar a un punto en el cual ya no era posible seguir cortando. A este bloque fundamental se le conoció como átomo, que en griego quiere decir indivisible, sin embargo, quedó en el olvido pues tuvo mayor aceptación entre los filósofos de aquella época la idea de que todo cuanto se conocía estaba compuesto de cuatro elementos fundamentales, la tierra, el aire, el agua y el fuego.

Comunmente se dice que la verdad busca la forma de darse a conocer y en este caso las ideas de Demócrito fueron retomadas de manera indirecta por Dalton, en 1803; Este científico postuló una teoría atómica de la materia que es predictiva y cuantificable, basándose en la premisa de que átomos de elementos diferentes se diferencian unos de otros por su peso. Esta teoría tuvo gran aceptación puesto que permitió dar sentido a muchas leyes químicas conocidas hasta ese momento, por ejemplo, la estequiometría.

Posteriormente, en el año de 1897 J.J. Thompson un hombre de ciencia lleno de dudas y en busca de respuestas, descubre el electrón. Para el año en que se hace este descubrimiento la química ya había conseguido muchos logros en cuanto a la descripción y predicción de resultados experimentales, sin embargo, con el descubrimiento del

electrón y de manera más general, el descubrimiento de que el átomo posee estructura, se hace evidente que el concepto de átomo propuesto por la química no es el mismo que había propuesto Demócrito o Dalton. El entendimiento de la estructura del átomo dió pie al descubrimiento de nuevas partículas, los quarks y los leptones, las cuales se cree, hoy en día, son los bloques fundamentales de materia. Aquí no ha terminado la búsqueda de las componentes básicas de la materia. Esta continúa con los trabajos de Planck, Schrödinger, Einstein, Dirac, Feynman, Tomonaga, etc. [?] Ahora bien la existencia de leptones y quarks trae consigo más preguntas, en particular de la forma en que interactúan estas nuevas partículas. Por ejemplo, ¿cómo es que los quarks se mantienen agrupados en el núcleo atómico?, ¿Qué relación existe entre las fuerzas en el núcleo atómico y las fuerzas conocidas hasta entonces? y muchas más, los físicos han generado un modelo que describe el comportamiento de la mejor manera hasta ahora las partículas fundamentales y las leyes que dictan su comportamiento.

### 1.1. Modelo Estándar

Como se dijo anteriormente, el Modelo Estándar es un modelo que describe las propiedades de los bloques fundamentales de materia que son los quarks y los leptones, así como sus interacciones.

En el Modelo Estándar se conoce como fermiones a todos los componentes de la materia que poseen un espín no entero, por supuesto, aquí se encuentran los quarks y los leptones. Dentro del Modelo se hace una importante distinción entre quarks y leptones, la cual obedece básicamente al modo en que interactúan, ya que los primeros lo hacen mediante al fuerza débil, electromagnética y fuerte, mientras que los segundos lo hacen sólo a través de la fuerza débil y electromagnética.

Es preciso dar una descripción sobre las fuerzas que permiten la distinción entre quarks y leptones, así como de los fenómenos físicos que motivaron la postulación de la forma en que dichas partículas interactúan. Dentro del modelo atómico aceptado en la década de los 60's se postulaba que dentro del núcleo atómico se encontraban los protones, en número equivalente al de electrones para mantenerlo eléctricamente neutro. El átomo, sin embargo, había un problema que molestaba a los físicos de aquella época, pues es conocido que las partículas de cargas iguales se repelen y a pesar de ello los componentes del núcleo son cargas positivas que se encuentran muy cercanas unas de otras. Para resolver este problema se postuló lo que en aquella época fue conocido como fuerza nuclear fuerte la cual era responsable de mantener los protones confinados dentro del núcleo, aunque a diferencia de la fuerza electromagnética; debía ser de corto alcance, ya que sus efectos eran percibidos a distancias apenas un poco menores que el tamaño del núcleo atómico. Después de esta propuesta para resolver el problema de estabilidad nuclear fueron descubiertos los quarks en 1964 y se pensó que la fuerza fuerte es la que actúa sobre estas nuevas partículas fundamentales. Todas estas ideas se for-

mularon en términos de la teoría cuántica de campos, dando lugar a la cromodinámica cuántica, en la cual a cada tipo de interacción le corresponde una partícula portadora de fuerza. En este caso, a la fuerza fuerte se le asoció nueva partícula llamada gluón, propuesta por Gell-Mann en 1962 y descubierta por la colaboración TASSO en 1979. Por otra parte, para que tuvieran lugar las interacciones fuertes fue necesario postular la existencia de un nuevo tipo de carga conservada, la carga de color. Este tipo de carga fue propuesta en 1964 por Oscar W. Greenberg para explicar la existencia de los estados ( $\Delta$ ).

Como se menciona al comienzo del capítulo la observación de los fenómenos naturales ha permitido en gran medida el entendimiento de los mismos. Tal es el caso de la electricidad y el magnetismo, ramas de la física cuyo estudio pensamos comenzó en la antigua Grecia cuando se dieron cuenta que había algunos materiales que se atraían unos a otros después de ser frotados con el cabello o un trozo de tela, posteriormente llegaría Benjamin Franklin quien sugirió los nombres de cargas positivas y negativas para designar los dos tipos de carga eléctrica que se conocen, sin embargo, a pesar de los nombres y las descripciones que se tenían de los fenómenos eléctricos aún no se sabía como era que una carga atraía a otra y mucho menos existía una descripción matemática del fenómeno. En 1785, Coulomb haciendo uso de un invento suyo pudo entender las causas del fenómeno de atracción o repulsión eléctrica y postuló una ley que permitiera hacer predicciones sobre la fuerza con la que se daba la interacción  $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}$ . Para el entendimiento del magnetismo llegarían científicos de gran nivel como Faraday quien logró una explicación satisfactoria al fenómeno conocido como inducción magnética en el que una corriente eléctrica genera un campo magnético al generar experimentalmente campos magnéticos a partir de corrientes eléctricas y viceversa haciendo predicciones precisas de lo observado; Ampere lograría relacionar el campo magnético con la causa que lo produce, una especie de Ley de Coulomb para el magnetismo.

Fue Clerk Maxwell quien se encargó de poner todos los conocimientos generados por Coulomb, Ampere, Faraday y otros en cuatro ecuaciones que permitieron modelar matemáticamente los fenómenos electromagnéticos y que tuvieron como una de sus principales consecuencias el entendimiento de que la luz estaba conformada por ondas, idea que posteriormente chocaría con los conceptos de la mecánica cuántica que estaba por nacer.

A través del concepto de dualidad onda partícula se lograron conciliar la teoría electromagnética y la mecánica cuántica, pero no fue sino hasta el nacimiento de la electrodinámica cuántica que la mecánica cuántica y la teoría electromagnética conciliaron sus ideas. La electrodinámica cuántica es la teoría que ofrece una descripción detallada de la interacción entre fotones (partículas que componen la luz) y partículas cargadas del tipo fermiónico como los electrones. Esto se logra a través de un lagrangiano de interacción el cual tiene la forma:

$$\mathcal{L} = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu,$$

donde  $A_\mu$  es el campo electromagnético como el que se obtiene a partir de la teoría electromagnética, mientras que  $e$  es la carga del electrón y  $\psi$  es la función de onda asociada al electrón tal como se piensa en mecánica cuántica [4, 25].

Siguiendo ahora con la fuerza débil, la historia comienza con Lise Meiter y Otto Han quienes, en 1911, realizaron un experimento donde mostraron que la energía de los electrones emitidos en el decaimiento beta del neutrón tiene un espectro continuo en vez de discreto. El problema de este espectro continuo radica en que si se asume la idea que se tenía en ese tiempo de que el neutrón decaía en un protón y se emitía un electrón, el cambio de energía inicial debía estar bien determinado, y por la conservación de energía, los electrones emitidos debían tener una energía bien definida, de modo que en el espectro debía observarse un pico o un gráfico muy parecido a una delta de Dirac, al no observarse esto se ponía en duda el principio de la conservación de la energía. Como solución a este problema, Wolfgang Pauli escribió una carta donde propone la existencia de una partícula hipotética, que era emitida al mismo tiempo que el electrón y era la responsable de llevarse la energía faltante.

Fue Enrico Fermi quien en 1934 propuso un primer modelo teórico de la fuerza débil. Este modelo estaba basado en el de la teoría electromagnética, es decir, el lagrangiano de interacción utilizado por Fermi era muy similar al de QED, además incorporó la partícula propuesta por Pauli a la que Fermi bautizó como neutrino.

## 1.2. Ecuación de Dirac

*In medias res* es un recurso literario que consiste en comenzar en la mitad de la historia que se va a narrar, útil para muchos escritores como Gabriel García Márquez en Cien años de soledad; para nosotros será de provecho para poder traer algunos hechos de importancia para el desarrollo del Modelo Estándar aún cuando el orden cronológico no sea el esperado, dicho esto, regresamos al año de 1925 cuando Erwin Schrödinger describe la evolución temporal de una partícula microscópica masiva de espín cero, acorde con los resultados experimentales de ese tiempo, como por ejemplo el espectro de emisión del hidrogeno, mediante su famosa ecuación, sin embargo, esta ecuación, a pesar de sus grandes ventajas, también tenía algunas limitantes importantes, por ejemplo, no conciliaba las ideas cuánticas con las nuevas ideas relativistas que habían aparecido por entonces de la mano de Albert Einstein. La ecuación de Schrödinger describe partículas masivas no relativistas pero no partículas que pueden moverse a velocidades cercanas a la de la luz. Fue Paul Dirac quien en 1927 logró resolver este problema al proponer una ecuación para el electrón consistente con la teoría cuántica y la teoría de la relatividad especial, aunque no sin dificultades. Alguna vez alguien mencionó que es una buena analogía el matrimonio con la conciliación de la mecánica

cuántica y la relatividad. Éste matrimonio tendría como cualquier otro sus problemas, el principal, el problema de los infinitos del cual nos ocuparemos más tarde, a este respecto, amigos de dicho matrimonio se ocuparon de limar asperesas, hombres como Feynman, Schwinger, Dyson y Tomanaga.

Ahora bien, como resultado, de su esfuerzo, Dirac obtuvo una ecuación de mucho interés para la física moderna. Ésta ecuación nos permite describir el comportamiento cuántico relativista de los fermiones masivos de espín  $\frac{1}{2}$ .

Uno de los métodos para obtener la ecuación de Dirac es partir de la relación relativista de energía y momento la cual tiene la siguiente forma:

$$\frac{E}{c} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{p}}{c} + \sqrt{1 - \beta^2} mc \quad (1.1)$$

Donde  $\beta = \frac{v}{c}$ , Dirac postuló la existencia de los operadores  $\hat{\alpha} = \frac{\vec{v}}{c}$  y  $\hat{\beta} = \sqrt{1 - \beta^2}$ , los cuales cumplen las siguientes relaciones:

$$[\hat{\alpha}, \hat{p}] = 0 \quad (1.2)$$

$$[\hat{\beta}, \hat{p}] = 0 \quad (1.3)$$

Además se impone que la relación de Einstein para partícula libre sea satisfecha:

$$\frac{E^2}{c^2} \psi(\vec{r}, t) = (\beta^2 + m^2 c^4) \psi(\vec{r}, t) \quad (1.4)$$

Sustituyendo la forma de los operadores en (1.2) elevando al cuadrado y posteriormente utilizando las propiedades (1.3) y (1.4) podemos comprar lo que se obtiene término a término con (1.5), notamos que para que (1.5) sea igual a (1.2) se deben cumplir las siguientes relaciones:

$$\hat{\alpha}_i^2 = \hat{\beta}^2, \quad (1.5)$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0, \quad (1.6)$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0, \quad (1.7)$$

donde el índice  $i$  corre desde 1 hasta 3, tomando en cuenta que se deben cumplir estas propiedades, obtenemos:

$$\frac{E}{c} \psi = (\hat{\alpha} \cdot \hat{p} + \hat{\beta} mc) \psi \quad (1.8)$$

multiplicando toda la expresión por el operador  $\hat{\beta}$  obtenemos:

$$\hat{\beta} \frac{E}{c} \psi = (\hat{\beta} \hat{\alpha} \cdot \hat{p} + mc) \psi \quad (1.9)$$

## CAPÍTULO 1. FÍSICA DE PARTÍCULAS

---

Ahora, definimos los operadores  $\hat{\gamma}_0 = \hat{\beta}$  y  $\hat{\gamma}_i = \hat{\beta}\hat{\alpha}_i$  y ya que,  $p_\mu = (\frac{E}{c}, -\vec{p})$  tenemos que (1.1) queda escrita como:

$$\begin{aligned}(\gamma^\mu p_\mu - mc)\psi &= 0 \\ (\not{p} - mc)\psi &= 0\end{aligned}\tag{1.10}$$

Los objetos gamma los podemos pensar como matrices, las cuales en la representación de Dirac tienen la siguiente forma:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \hat{I} & 0 \\ 0 & -\hat{I} \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ \hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix}$$

Donde  $\sigma_i$  son las matrices de Pauli. Ahora tenemos una representación relativista de la energía y momento de una partícula de espín  $\frac{1}{2}$ , para cuantizarla utilizamos la sustitución  $\hat{p}_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu$  y dejamos que actúe sobre una función de onda  $\psi$ :

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0\tag{1.11}$$

Debemos notar que la ecuación de onda  $\psi$  que satisface la ecuación de Dirac tiene cuatro componentes:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}\tag{1.12}$$

Estos objetos son conocidos como espinores. Donde es posible conocer el valor de cada  $\psi_i$ , para esto primero es necesario darse cuenta que las soluciones a la ecuación de Dirac, son cuatro, las cuales están degeneradas en energía y momentum.

$$\psi = Ne^{-\frac{i}{\hbar}p \cdot x}u_\pm(p),\tag{1.13}$$

$$\psi = Ne^{\frac{i}{\hbar}p \cdot x}v_\pm(p),\tag{1.14}$$

las soluciones de la expresión (1.15) representan estados con  $E > 0$  mientras que las de la expresión (1.16) representan estados con  $E < 0$ . Falta decir quien es  $u(p)$  y  $v(p)$ , resulta que:

$$u(p) = \begin{pmatrix} x_\pm \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+mc^2}x_\pm \end{pmatrix}, \quad v(p) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}c}{E+mc^2}x_\pm \\ x_\pm \end{pmatrix},$$

donde los factores  $x_\pm$  están dados como:

$$x_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Siendo  $u_{\pm}$  y  $v_{\pm}$  nuevos factores conocidos como biespinores, es importante mencionar que no deben confundirse con los cuadvectores de Lorentz.[4]

Aunque las soluciones de la ecuación de Dirac son degeneradas en  $E$  y  $\vec{p}$ . Contamos con una variable adicional que conmuta con  $\hat{H}$  y  $\hat{P}$  y que sirve para diferenciar estados. Dicha observable es conocida como helicidad y se define de la siguiente forma:

$$\vec{p} \cdot \hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{p} \cdot \hat{\Sigma}] &= 0, \\ [\hat{P}, \hat{p} \cdot \hat{\Sigma}] &= 0, \end{aligned} \quad (1.16)$$

por lo que la helicidad ( $\lambda$ ) es un buen número cuántico, el cual puede ser usado para etiquetar estados. Para una partícula de Dirac, la helicidad representa la proyección del espín en la dirección del movimiento. Los posibles eigenvalores del operador de helicidad son:

$$\lambda = \begin{cases} 1 & \text{helicidad positiva,} \\ -1 & \text{helicidad negativa.} \end{cases}$$

Si  $\lambda$  es positivo entonces la proyección del espín sobre el momento es paralela a la dirección del movimiento, por otra parte, si  $\lambda$  es negativo la proyección del espín sobre el momento es antiparalela a la dirección de movimiento.

Ahora podemos definir un nuevo operador conocido como el operador de quiralidad. Es posible definir los operadores de proyección de quiralidad izquierda y quiralidad derecha, mediante las expresiones:

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5), \quad (1.17)$$

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5), \quad (1.18)$$

respectivamente, donde:

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando el operador  $P_L$  a un espinor de Dirac, tenemos:

$$u_L(p) = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u(p). \quad (1.19)$$

Mientras que si aplicamos el operador  $P_R$  a un espinor de Dirac, tenemos:

$$u_R(p) = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)u(p). \quad (1.20)$$

A muy altas energías, en el límite en que la masa de las partículas puede despreciarse, el operador de quiralidad y de helicidad coinciden.

En el desarrollo de la tesis, esta sección será de importancia ya que las interacciones que analizaremos son débiles y estas se describen mediante corrientes quirales [4].

### 1.3. Contenido de partículas

Tal como se mencionó anteriormente, el Modelo Estándar contiene nuestro conocimiento actual sobre la física de las partículas elementales y sus interacciones aunque, aún así, es una buena descripción de la realidad. A manera de breve introducción sobre cómo se construyó este modelo, se presentó un breve recorrido histórico donde se esbozaron las ideas que dieron lugar al descubrimiento de la fuerza fuerte, la débil y la electromagnética. Ahora nos interesa ampliar un poco la explicación sobre los quarks y los leptones, los cuales, en el Modelo Estándar, se consideran los bloques fundamentales de materia, los verdaderos átomos de Demócrito.

Aunque los leptones y los quarks son ambos fermiones ya se dijo que existen algunas diferencias entre estos dos tipos de partículas (sus interacciones). Por otra parte los quarks, en la naturaleza, sólo se encuentran en grupo formando hadrones. A este hecho se le conoce como confinamiento. Los hadrones se dividen a su vez en dos importantes grupos; los bariones, como los neutrones y los protones, los cuales poseen tres quarks, y los mesones, como los piones. Estos últimos están compuestos únicamente por dos quarks.

Otras partículas fundamentales del Modelo Estándar son los bosones de interacción, los cuales no son componentes básicos de la materia, sin embargo, permiten las interacciones entre los bloques fundamentales de la materia. Los bosones de fuerza son: el fotón, los bosones masivos cargados y neutro ( $W^\pm, Z^0$ ) y el gluón, del cual ya se habló en la sección anterior. los bosones mencionados anteriormente son conocidos como bosones de norma, la causa de este nombre tan peculiar será expuesta en la siguiente sección. Otro bosón de importancia en el Modelo Estándar, aunque no sea un portador de fuerza, es el bosón de Higgs, ya que, como vemos dentro de los que sí son bosones de norma unos tienen masa y otros no (ver figura 1.1), resulta que, es precisamente gracias a este bosón que se da esta diferencia, como también veremos en la siguiente sección .

**Tres generaciones de la materia (fermiones)**

	I	II	III	
masa →	2.4 MeV	1.27 GeV	171.2 GeV	0
carga →	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
espín →	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
nombre →	<b>u</b> arriba	<b>c</b> encanto	<b>t</b> cima	<b>γ</b> fotón
	4.8 MeV	104 MeV	4.2 GeV	0
	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
<b>Quarks</b>	<b>d</b> abajo	<b>s</b> extraño	<b>b</b> fondo	<b>g</b> gluón
	< 2.2 eV	< 0.17 MeV	< 13.3 MeV	91.2 GeV
	0	0	0	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	<b>ν<sub>e</sub></b> neutrino electrónico	<b>ν<sub>μ</sub></b> neutrino muónico	<b>ν<sub>τ</sub></b> neutrino tauónico	<b>Z<sup>0</sup></b> bosón Z
	0.511 MeV	105.7 MeV	1.777 GeV	80.4 GeV
	-1	-1	-1	$\pm 1$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
<b>Leptones</b>	<b>e</b> electrón	<b>μ</b> muón	<b>τ</b> tauón	<b>W<sup>±</sup></b> bosón W

**Bosones de gauge**

Figura 1.1: Partículas que conforman el modelo estándar

## 1.4. Bosones de norma

Para hablar de bosones de norma, primeramente hablaremos sobre el principio de norma. Este nos dice que, dado un sistema físico  $\psi$  de partículas descrito por el lagrangiano que es invariante ante una simetría global  $G$ , resulta que promoviendo la simetría global por una local, la teoría del sistema libre original se transforma en una teoría con interacciones. Estas interacciones surgen de manera natural a causa de una conservación de simetría local presente en el sistema.

Una vez enunciado el principio de norma expliquemos a que se refiere la invarianza del lagrangiano ante una simetría local o global. Consideremos de manera general una transformación perteneciente al grupo  $SU(N)$ , es decir, el grupo de transformaciones de  $\psi$  formado por matrices  $N \times N$  unitarias, de esta forma tenemos la transformación:

$$\psi'(x) = \hat{U}(\vec{\alpha})\psi(x), \quad (1.21)$$

donde  $\vec{\alpha}$  es un vector constante de  $N^2 - 1$  elementos y la transformación  $\hat{U}$  tiene la siguiente forma:

$$\hat{U}(\vec{\alpha}) = e^{i\vec{\alpha} \cdot \hat{I}}. \quad (1.22)$$

Ahora tomemos una transformación del tipo  $U(1)$  es decir del grupo de matrices de  $1 \times 1$ , vemos entonces que partiendo del caso general (1.24) nuestra transformación queda:

$$\psi'(x) = \hat{U}(\alpha)\psi(x), \quad (1.23)$$

## CAPÍTULO 1. FÍSICA DE PARTÍCULAS

---

Mientras que de (1.25)  $\hat{U}(\alpha) = e^{i\alpha}$ . Siendo  $\alpha$  una constante independiente de  $x^\mu$ . A este tipo de transformación se les llama transformaciones globales. Si el sistema es invariante ante dicha transformación entonces decimos que  $\hat{U}(\alpha)$  representa una simetría global del sistema. En el caso en que  $\alpha \rightarrow \alpha(x^\mu)$  se tiene una transformación local y la simetría asociada se llama también local. Si utilizamos el lagrangiano de Dirac  $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$  y aplicamos la transformación de simetría global vemos que:

$$L(\bar{\psi}', \psi, \dots) = L(\bar{\psi}, \psi, \dots), \quad (1.24)$$

lo que quiere decir que hay invarianza ante la simetría  $U(1)$  global. Ahora bien, cuando promovemos esta simetría global a una local, ocurre que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\bar{\psi}', \psi', \dots) &= \bar{\psi}'(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi' & (1.25) \\ &= \psi'^{\dagger}\gamma^0(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi' \\ &= e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{i\alpha(x)}\psi \\ &= e^{-i\alpha(x)}\bar{\psi}\{i\gamma^\mu[i\psi(\partial_\mu\alpha(x)) + e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\psi] - m\}e^{i\alpha(x)}\psi \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \partial_\mu\alpha(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\ &\neq \mathcal{L}(\bar{\psi}, \psi, \dots) \end{aligned}$$

Para imponer invarianza al lagrangiano debemos introducir un término que compense la falta de simetría. Esto requiere que se añadan campos compensatorios o de norma con propiedades bien definidas ante el grupo de norma local. Con el fin de lograr lo propuesto anteriormente se reemplaza:

$$\partial_\mu D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu, \quad (1.26)$$

de esta manera el lagrangiano se redefine como:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi. \quad (1.27)$$

Sustituyendo la forma de  $D_\mu$  obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - m\bar{\psi}\psi & (1.28) \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \end{aligned}$$

donde podemos identificar que el primer término de la ecuación (1.31) es el lagrangiano de Dirac, mientras que el segundo término es el denominado lagrangiano de interacción electromagnético. Al campo de norma  $A_\mu$  se le asocia también un bosón de interacción, a este bosón se le conoce como bosón de norma, el cual puede ser o no masivo, por ejemplo en el caso del electromagnetismo se tiene como bosón de norma al fotón el cual no posee masa, sin embargo, para la fuerza débil tenemos a los bosones  $W^\pm$  y  $Z^0$  que si poseen masa.

## 1.5. Rotura espontánea de la simetría

La rotura espontánea de la simetría, (RES) se presenta cuando los números cuánticos del estado base, el vacío de la teoría, se convierte en un estado degenerado. En el caso del Modelo Estándar la rotura espontánea de la simetría se logra introduciendo campos cuyos valores esperados en el vacío (v.e.v.) son diferentes de cero. Es necesario comentar que cada uno de estos valores esperados representan un estado base de un sistema físico diferente.

Lo anterior expresa en otras palabras lo enunciado en el teorema de Coleman que postula que si el vacío es invariante ante alguna simetría,  $\mathcal{L}$  debe ser necesariamente invariante. En este caso el sistema del vacío representa la invarianza del universo. Por otra parte si el vacío no es invariante ante dicha simetría. Podemos ver que de lo dicho en el primer párrafo entonces los estados base son el vacío que se menciona en el teorema de Coleman.

Consideremos el lagrangiano  $\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi \phi^* - \lambda(\phi \phi^*)^2$  con el término  $m^2 < 0$ . Bajo el grupo de simetría  $U(1)$  global el lagrangiano es simétrico.

$$\begin{aligned}\phi_0^*(m^2 + 2\lambda\phi_0^2) &= 0 \\ \phi_0(m^2 + 2\lambda\phi_0^2) &= 0\end{aligned}\tag{1.29}$$

obtenemos así dos puntos extremos locales,  $\phi_0^* = \phi_0 = 0$  y como mínimo:

$$\phi_0^2 = -\frac{m^2}{2\lambda} \geq 0\tag{1.30}$$

Notese que el lagrangiano puede escribirse como  $L = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - V(\phi)$  con  $V(\phi) = m^2 \phi \phi^* + \lambda(\phi \phi^*)^2$

Como era de esperarse la solución a la ecuación (1.30) es degenerada. Por lo que se obtienen un número infinito de vacíos asociados con los distintos valores de  $\phi_0$  y cada uno de los estados base anteriores representa un estado base distinto donde la simetría  $U(1)$  se rompe espontáneamente ya que de todos los estados base que se obtienen, sólo uno representa nuestro universo y es aquella solución que sea invariante ante  $U(1)$ , que corresponde a un estado eléctricamente neutro, de lo contrario la descripción que tendríamos del universo sería un universo cargado eléctricamente lo que ocasionaría la aparición de un fotón masivo, contradiciendo completamente lo que observamos en la naturaleza.

Tal como se aprecia en la figura, el mínimo del sistema cae en un círculo de radio  $v = \sqrt{\frac{-m^2}{2\lambda}}$ , veamos el efecto de  $U(1)$  local sobre el vacío, como ya se dijo anteriormente no obtendremos un sistema invariante, debido a que los valores del vacío caen en un círculo:

$$\phi_0 = Re\phi_0 + iIm\phi_0\tag{1.31}$$

Cada uno de los estados lo podemos escoger, pero por convención escogeremos  $Re\phi_0 = v$  y  $Im\phi_0 = 0$ , trabajamos en torno a este estado de vacío y trasladamos nuestro sistema a

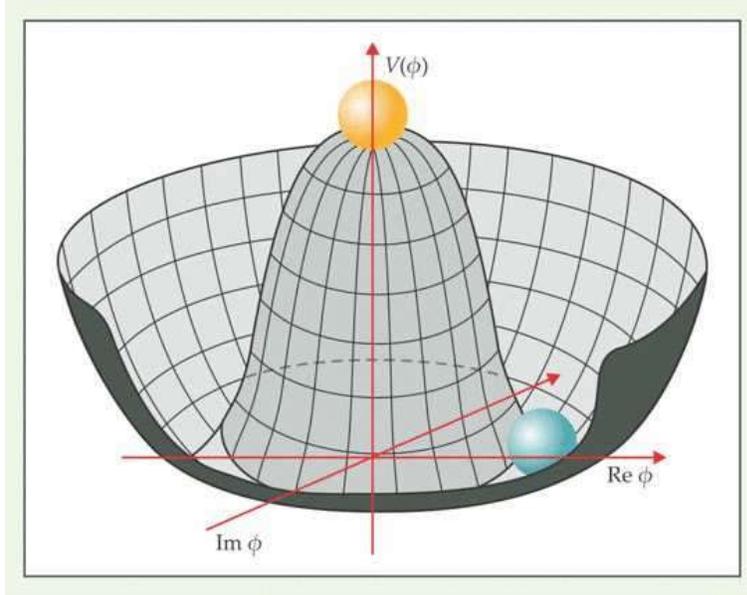


Figura 1.2: Potencial escalar

dicho punto mediante la transformación  $\phi(x)'' = \phi(x) - v$  por lo tanto  $\phi(x) = \phi''(x) + v$  para obtener finalmente:

$$\phi(x) = \frac{\eta(x) - i\xi(x)}{\sqrt{2}} + v \quad (1.32)$$

donde  $\eta(x), \xi(x)$  pertenecen a los reales; partiendo de ( ) obtenemos la siguiente densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial^\mu \eta)^2 - (\partial^\mu \xi)^2] - \frac{\lambda(\eta^2 + \xi^2)^2}{4} - \sqrt{2}\eta(\eta^2 + \xi^2) - 2^2\eta^2 + \frac{m^4}{4\lambda} \quad (1.33)$$

antes de continuar, veamos que  $m_\eta^2 = 4\lambda^2 \frac{m^2}{2\lambda}$  obteniendo así:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}[(\partial^\mu \eta)^2 - (m_\eta^2 \eta^2) + (\partial^\mu \xi)^2] \\ &- \frac{\lambda}{4}(\eta^2 + 2\eta^2 \xi^2 + \xi^4) \\ &- \sqrt{-m^2 \lambda}(\eta^2 - \eta \xi^2) + \frac{m^4}{4\lambda} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Donde el los primeros dos terminos de la expresión anterior representan el campo escalar masivo, mientras que al tercer término es el correspondiente al Bosón de Goldstone, el porque de este nombre se da a continuación comenzando por hablar del teorema de Goldstone que dice que si una simetría continua se rompe espontáneamente debe existir un bosón sin masa escalar o pseudoescalar, asociada a cada generador que no aniquila el estado de vacío; estos modos son conocidos como bosones de Goldstone. Como vemos había más de un campo escalar en la expresión de  $\phi''$  pero algunos de

estos quedaron escondidos al hacer el cambio de variable para  $m_\eta$ , a este proceso mediante el cual los bosones de Goldstone adquieren masa se conoce como mecanismo de Higgs.

## Lagrangiano

En el modelo estandar de física de partículas hay una descripción para cada tipo de interacción; débil, fuerte y electromagnética, incluso hay descripción para procesos en los cuales intervienen más de una fuerza como lo es el modelo electrodébil y a cada descripción se le asocia un lagrangiano que es básicamente lo que permite una descripción matemática de las interacciones. Sin embargo, en el presente trabajo solo será necesario hablar sobre el lagrangiano del modelo débil que es el tipo de interacción que nos interesara por razones que se explican en el capítulo 3 (materia oscura). El lagrangiano del modelo débil es el siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{cc} = & -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left[ \sum_{s=1}^n \bar{\nu}^s \gamma^\mu (1 - \gamma^5) l^s + \sum_{s,r=1}^n \bar{u}^s \gamma^\mu (1 - \gamma^5) V_{rs} d^r \right] W_\mu^+ \\ & -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left[ \sum_{s=1}^n \bar{l}^s \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu^s + \sum_{s,r=1}^n \bar{d}^s \gamma^\mu (1 - \gamma^5) V_{rs}^* u^r \right] W_\mu^- \end{aligned} \quad (1.35)$$

donde:

$\mathcal{L}$  es la densidad lagrangiana,  $n$  es el número de familias de fermiones,  $\nu^f$  es el neutrino correspondiente a la familia  $f$ ,  $l^f$  es el leptón cargado correspondiente a la familia  $f$ ;  $V_{fg}$  es la matriz de mezcla entre quarks con carga  $-\frac{1}{3}$ , también se le llama matriz CKM (siglas para Cabibbo–Kobayashi–Maskawa). Para los procesos que analizaremos en capítulos posteriores tomaremos esta matriz como diagonal, ya que no tomaremos en cuenta las transiciones entre diferentes familias del quark;  $g$  es la constante de acoplamiento débil la cual está relacionada con la constante de Fermi mediante la igualdad  $G_f = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{g^2}{M_W^2}$ , hay que decir que en la expresión anterior  $M_W$  es la masa del Bosón  $W_\pm$  intermediario de las interacciones débiles. La constante  $g$  además está relacionada con la carga del electrón mediante la expresión  $g = \frac{e}{\sin \theta_W}$ .

Para las interacciones mediadas por el bosón  $Z_0$  neutro se tiene la siguiente densidad lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n = & \frac{g}{4 \cos \theta_W} \sum_s^n \left[ \bar{\nu}^s \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu^s - \bar{l}^s \gamma^\mu (1 - \gamma^5) l^s \right. \\ & \left. \bar{u}^s \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u^s - \bar{d}^s \gamma^\mu (1 - \gamma^5) d^s \right] Z_\mu \end{aligned} \quad (1.36)$$

donde:

$u^s$  es el espinor asociado al quark up de la familia  $s$ ,  $d^s$  es el espinor asociado al

## CAPÍTULO 1. FÍSICA DE PARTÍCULAS

---

quark down de la familia  $s$ ,  $g$  es la constante de acoplamiento débil;  $\theta_w$  es el ángulo de Weinberg o ángulo de mezcla electrodébil, definido como  $\cos \theta_w = \frac{M_W}{M_Z}$  donde  $M_W$  es la masa del boson  $W$  y  $M_Z$  es la masa del boson  $Z$

En este punto ya hemos descrito las interacciones débiles tanto cargadas como neutras mediante su lagrangiano, aunque para esto utilizamos los bosones mediadores (bosones de norma) de la interacción débil. Trataré ahora de explicar brevemente y sin gran profundidad el por que estos bosones.

Recordemos que la propuesta de Fermi para el modelo débil era una representación de la interacción de dos corrientes que interactuaban de manera puntual, esta interacción puntual fue útil para la descripción de procesos débiles a bajas energías, sin embargo, para altas energías no era aplicable.

Los bosones masivos que aparecen en el lagrangiano débil, aparecen como resultado de la rotura espontánea de la simetría y obtienen su masa mediante el mecanismo de Higgs. La introducción de estos bosones masivos en las interacciones débiles permite una buena descripción de las mismas en cualquier rango de energías además físicamente al comparar con el electromagnetismo se tiene un portador de fuerza como el fotón pero que al ser masivo se restringe su rango de alcance.

## Capítulo 2

# Rayos C3smicos

En todo momento nuestro planeta es impactado por radiaci3n y part3culas provenientes de todas partes del universo, algunas muy conocidas como las ondas de radio, los rayos UV, los rayos gamma, e incluso algunas tan familiares como lo es la luz visible, pero tambi3n hay otras menos conocidas como los neutrinos y los rayos c3smicos que son de las radiaciones m3s energ3ticas del universo.

Hace ya m3s de 100 a3os que los rayos c3smicos fueron descubiertos y a3un quedan muchas preguntas sin responder. Sabemos, sin embargo, que es un tipo de radiaci3n de altas energ3as que llega a la Tierra en forma de electrones, n3cleos at3micos y neutrones. Algunos de estos flujos de part3culas pueden llegar a alcanzar energ3as de  $10^{20} eV$  [11] e incluso hay evidencia de part3culas que han logrado energ3as m3s altas [16]. Este es un hecho impresionante considerando que en el LHC; el acelerador m3s potente construido hoy en d3a, se alcanzan energ3as del orden de  $TeV$ <sup>1</sup>, es decir, los rayos c3smicos pueden llegar a tener energ3as cien millones de veces m3s grandes que las que se pueden inducir en la Tierra, este hecho es de gran importancia en el presente trabajo.

Sabemos que esta radiaci3n proviene del espacio exterior. El flujo con el que los rayos c3smicos entran a la Tierra puede ser aproximado mediante una ley de potencias,  $J(E) \propto E^\alpha$ , donde el 3ndice  $\alpha$  puede variar en el rango  $-2.6 \lesssim \alpha \lesssim -3.2$  de manera que las part3culas m3s abundantes en este flujo son las de menor energ3a, tal y como se puede ver en la gr3fica (2.1) obtenida gracias a los distintos experimentos alrededor del mundo y al an3lisis de los datos recolectados. Hoy en d3a sabemos que el flujo en lo alto de la atm3sfera es alrededor de  $1000 m^{-2} sr^{-1} s^{-1}$  y tambi3n que la intensidad o el flujo cambia con la latitud (a bajas energ3as) indicando que consiste, en su mayor parte, de part3culas cargadas que son afectadas por el campo magn3tico de la Tierra. Debido adem3s, a la gran energ3a que llegan alcanzar los rayos c3smicos m3s energ3ticos, podemos inferir que los de m3s alta energ3a deben provenir de lugares muy violentos y

---

<sup>1</sup>Informaci3n tomada de la p3gina <http://home.web.cern.ch/about/updates/2015/03/lhc-stronger-machine>

## CAPÍTULO 2. RAYOS CÓSMICOS

energéticos del cosmos, pero no sabemos con certeza de donde. Se sabe que los rayos cósmicos de más baja energía es decir, con energías menores a  $10^{10}eV$  son producidos en el Sol, acelerados en la atmósfera solar, donde se libera gran cantidad de materia y energía. Por otra parte, se han propuesto las explosiones estelares y supernovas como posibles candidatos para generar las partículas que componen los rayos cósmicos con energías de entre  $10^{10}eV$  y  $10^{18}eV$ , mientras que las componentes más energéticas se asumen de origen extragaláctico.[14]

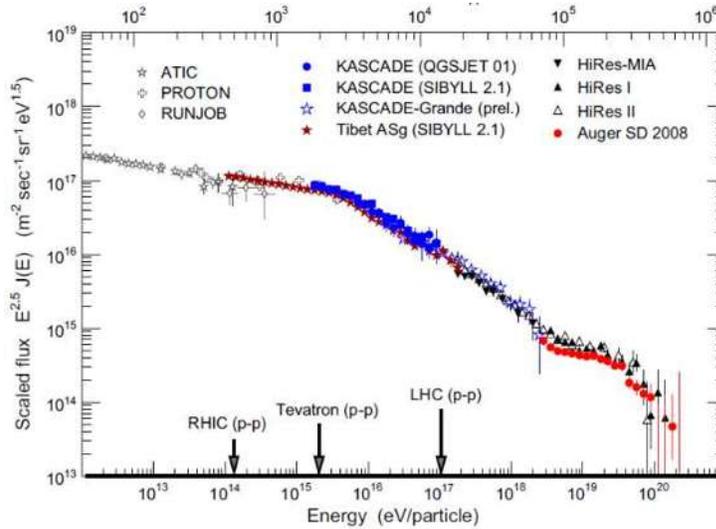


Figura 2.1: Compilación de diferentes mediciones experimentales del flujo de rayos cósmicos como función de la energía. Gráfica obtenida de [13]

La composición de los rayos cósmicos es aproximadamente de un 89 % de protones, un 9 % de partículas alfa (núcleos de Helio), un 1 % de electrones y el resto, de núcleos atómicos más pesados y partículas de antimateria.

### 2.1. Historia

Después del descubrimiento de la radioactividad en 1896 era un hecho aceptado que la ionización del aire era producto exclusivo de la radiación producida por algunos elementos radioactivos encontrados en la superficie terrestre. Sin embargo, se descubrió que a medida que se alcanzaba una mayor altitud los niveles de radiación en el aire disminuían mucho más lentamente de lo esperado [3]. En el año de 1909, Theodor Wulf desarrolló un electrómetro, un electroscoPIO adicionado con una escala para permitir una medición de la tasa de producción de iones en el aire dentro de un contenedor sellado herméticamente. Con la ayuda de este dispositivo Wulf descubrió que la radiación en la cima de la torre Eifel (300 m) era más alta que en su base, lo cual, contradecía por completo la idea de que la ionización del aire era debida

a la radiación proveniente de la superficie terrestre, aunque sus resultados no tuvieron mucha aceptación en la comunidad científica de la época.

No obstante, en 1912, Víctor Hess, quien a la postre sería recordado como el padre de la investigación de los rayos cósmicos, tuvo la idea de realizar un experimento parecido al realizado por Wulf, pero a una mayor altura y bajo distintas circunstancias; embarcándose con sus electrómetros en un globo aerostático hasta los 5000 metros de altura con el fin de encontrar cual era la fuente de la radiación “extra”, responsable de la ionización, el aumento que Wulf detectó en la cima de la torre Eiffel. A medida que ascendía, Hess, con sus electroscopios, registró un aumento significativo de cargas libres en la atmósfera; las moléculas de aire perdían electrones haciéndose conductores de electricidad. Estas mediciones demostraron la existencia de lo que Hess llamó “radiación penetrante proveniente del espacio”, pero no aportaron claves definitivas sobre su naturaleza. Hess realizó sus mediciones durante el día y durante la noche para descartar algunas fuentes externas como por ejemplo el Sol y la Luna entre otras, además de medir con precisión la temperatura y altitud a la que se encontraba; los suyos fueron los primeros de muchos viajes audaces realizados por los físicos para estudiar los rayos cósmicos. Por el descubrimiento de esta radiación proveniente del espacio exterior Hess recibió en 1936 el premio Nobel de física[3].

Posteriormente en 1914, Werner Kolhörster confirmó el descubrimiento de dicha radiación mediante sus estudios de electricidad atmosférica. En 1929 mediante el uso de la cámara de niebla, Dimitri Skobelzky observó las huellas fantasmales dejadas por el paso de los rayos cósmicos. Y fue hasta 1932 que Robert Milikan bautizó a la radiación penetrante descrita en los trabajos de Hess como rayos cósmicos y pensaba que estaban constituidos por rayos gamma. Milikan además de dar nombre a los rayos cósmicos realizó experimentos en lagos a diferentes alturas descartando al aire en sí como la fuente de la radiación, mostrando sin dejar lugar a dudas que los rayos cósmicos se originan fuera de la atmósfera terrestre.[6]

En el año de 1937, Seth Neddermayer y Carl Anderson descubrieron una partícula subatómica presente en los rayos cósmicos llamada muón. El positrón y el muón fueron las primeras partículas que fueron descubiertas usando rayos cósmicos lo que permitió el desarrollo de la física de partículas elementales [?]. Los rayos cósmicos fueron utilizados para este fin hasta el advenimiento de los aceleradores de partículas[?].

Pierre Auger, en 1938, usando una red de detectores que había colocado en los alpes, noto que la misma registraba la presencia de señales simultáneas. Auger atribuyó el fenómeno a la existencia de chubascos atmosféricos extendidos de partículas, que son lluvias de partículas secundarias ocasionadas por la colisión de partículas primarias de altas energías con el aire.[16]

Once años más tarde Enrico Fermi propuso una explicación para la aceleración de

los rayos cósmicos conocido como mecanismo de fermi de segundo orden. En este caso, se propone la existencia de nubes magnéticas que viajan en el espacio. Cuando estas se encuentran con partículas cargadas en el espacio las últimas aumentan su velocidad al chocar sobre dichas nubes. También se propuso otro mecanismo de aceleración (mecanismo de primer orden), mediante el cual los rayos cósmicos alcanzan energías muy altas. En este escenario se producen ondas de choque debidas a las explosiones de supernovas que le transfieren energía a las partículas cargadas del medio.[12]

Una par de décadas después, en el arreglo de Volcano Ranch, fue detectado el primer rayo cósmico con energía mayor a  $10^{20}eV$ , este evento aumentó el espectro energético de los rayos cósmicos conocidos hasta el momento [11]. En el año de 1966, después del descubrimiento de la radiación cósmica de fondo, Kenneth Greisen, Vadim Kuzmin y Georgi Zatsepin (GZK) señalaron que los rayos cósmicos de más alta energía ( $E > 10^{18} eV$ ) interactúan con la radiación cósmica de fondo reduciendo su energía. De esta forma, predijeron que los rayos cósmicos perdían energía gradualmente durante su propagación en el espacio debido a la interacción con la radiación cósmica de fondo, y que los de energía del orden de  $10^{20} eV$  debían de provenir de una distancia menor a  $100 Mpc$ . [8]

No fue sino hasta los años de 1991 y 1994 cuando los grupos Fly's Eye y AGASA detectaron más eventos de rayos cósmicos ultra energéticos, de  $3 \times 10^{20}eV$  y  $2 \times 10^{20}eV$ , respectivamente; siendo los eventos más energéticos detectados hasta ese momento. Derivado de la detección de estos eventos; en 1995 se planteó la creación de un nuevo observatorio de rayos cósmicos, el observatorio Pierre Auger, bautizado en nombre del descubridor de los chubascos de partículas. Este nuevo observatorio contaría con una red gigante de 3000 detectores Cherenkov de agua y una serie de 4 telescopios de fluorescencia para medir grandes números de lluvias de partículas provenientes de los rayos cósmicos de más alta energía [16]. Es importante decir que hoy en día, este proyecto es una realidad, de la cual hablaremos más adelante en este mismo capítulo.

## 2.2. Detección

El espectro energético de los rayos cósmicos es muy amplio. Como ya se mencionó anteriormente, su rango va desde los  $10^6eV$  hasta los  $10^{20}eV$  y, por tanto, es necesario el uso de distintos tipos de experimentos para el estudio de los rayos cósmicos según la energía que posean y el flujo que los caracteriza. Mientras más alta es la energía de los rayos cósmicos menor es el número de partículas que llegan a la superficie terrestre. Por ejemplo, para observar una partícula con una energía de  $10^{20}eV$  en una región de un kilómetro cuadrado debemos esperar un siglo. En la figura 2.2 podemos ver el flujo de rayos cósmicos por cierta unidad de superficie, de tiempo y de ángulo sólido. Los experimentos de detección directa, como los situados en globos aerostáticos o satélites (BESS, ATIC, TRACER, PAMELA, AMS, por mencionar algunos) han resultado de gran utilidad en la detección y estudio de rayos cósmicos hasta  $1PeV$ , sin embargo, dichas técnicas han resultado ineficaces para el estudio de rayos cósmicos de

más alta energía al resultar el flujo de éstos mucho menor.

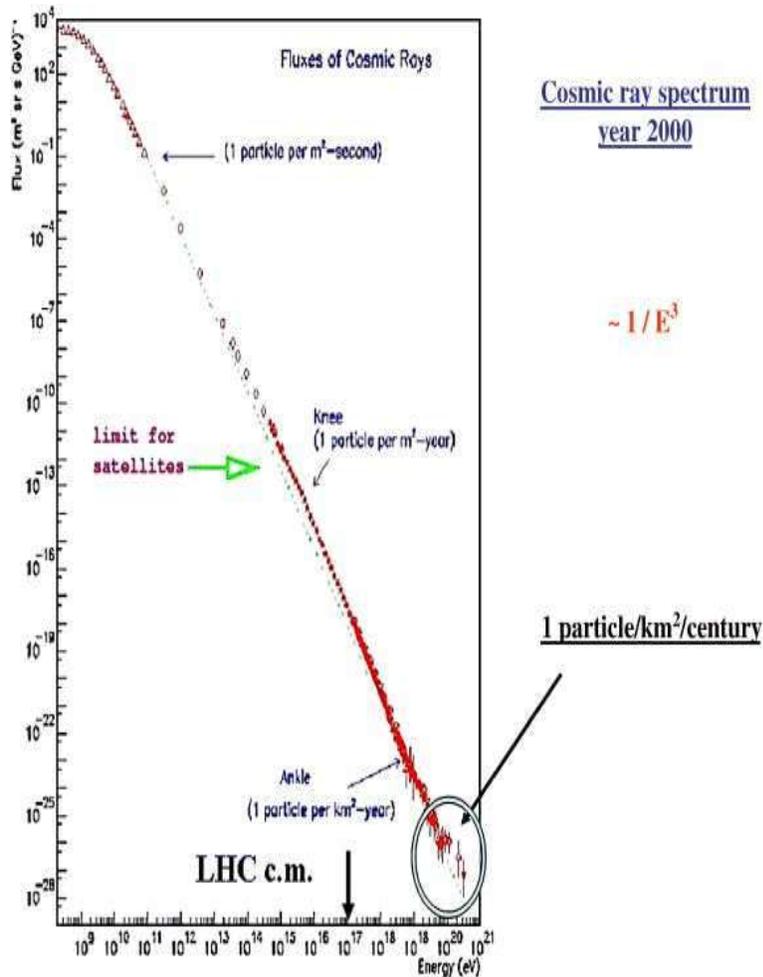


Figura 2.2: Flujo de rayos cósmicos medido por diferentes observatorios

Afortunadamente los científicos encontraron la forma para acceder a la investigación de las propiedades de los rayos cósmicos de muy altas energías. Para ello sólo se necesitó del uso de una técnica diferente: la detección de los chubascos de partículas que los rayos cósmicos de altas energías crean en la atmósfera. Cuando los rayos cósmicos golpean la atmósfera interactúan con los átomos que la componen dando lugar a un nuevo flujo de partículas producto de la interacción original que, a su vez, interactuará con otros átomos de la atmósfera, creando así la cascada de partículas (ver figura 2.3).

Como podemos apreciar de la figura 2.3, el chubasco de partículas está compuesto por cuatro grupos básicos; la componente electromagnética, la muónica, la hadrónica y la componente del neutrino. Las partículas presentes en la componente electro-

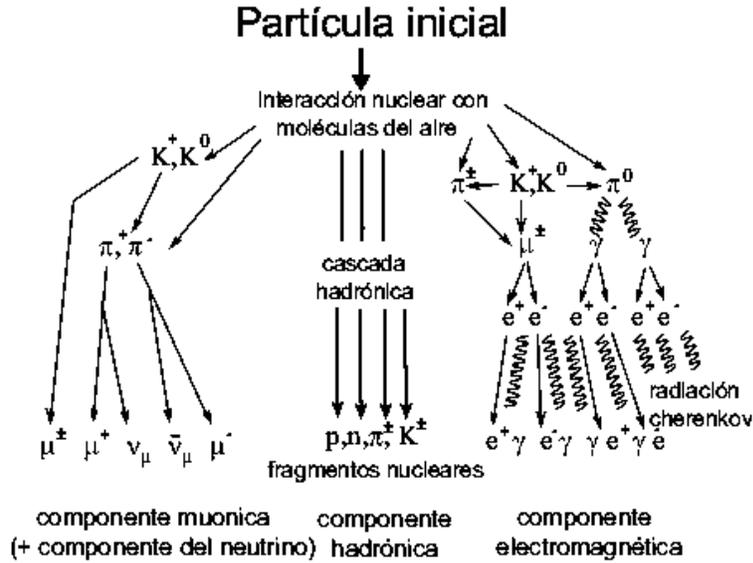


Figura 2.3: Chubasco de partículas generado por un rayo cósmico que interactúa con alguno de los átomos de la atmósfera.

magnética son electrones y positrones, producidos por el decaimiento de muones y piones neutros (los cuales son parte de la parte muónica y hadrónica respectivamente) además de núcleos atómicos y fotones. El flujo de partículas que llega a la superficie terrestre, como ya se mencionó anteriormente, sigue una ley de potencias. Los detectores utilizados entonces para estudiar los rayos cósmicos de muy altas energías miden fotones y partículas secundarias del chubasco, por ejemplo, la radiación fluorescente de la atmósfera inducida por los chubascos de partículas. Los detectores son colocados en arreglos que ocupan grandes extensiones de área. Algunos pueden cubrir hasta cientos de kilómetros cuadrados, esto para compensar el flujo tan bajo que se tiene a altas energías. Por ejemplo, a energías de  $E = 10^{18} \text{ eV}$  se tiene un flujo de rayos cósmicos de una partícula por  $\text{km}^2$  por semana, mientras que para los rayos cósmicos de hasta  $20 \text{ eV}$  se tiene un flujo de una partícula por  $\text{km}^2$  por siglo! Algunos de los experimentos terrestres que estudian rayos cósmicos a altas energías son, KASCADE-Grande, Pierre Auger, TIBET, IceCube, HAWC, AGASA, entre otros, los cuales cuentan con la colaboración de muchos científicos alrededor del mundo para el análisis de datos así como el desarrollo y mantenimiento de la tecnología necesaria para llevar a cabo estos experimentos.

### 2.3. Rayos cósmicos ultra energéticos

Como podemos ver en la figura 2.2, el flujo de rayos cósmicos siguen una ley de potencias de la forma  $E^{-\gamma}$ , donde  $\gamma$  se conoce como índice espectral, el cual, es constante en ciertos intervalos. En los puntos donde cambia el valor de  $\gamma$  se generan

ciertas estructuras en el espectro de rayos cósmicos. Estas estructuras tienen nombres específicos[12]. El primer cambio ocurre a  $10^{15}$  eV y se le conoce como la rodilla, el segundo cambio ocurre a energías mayores a los  $10^{18}$  eV, a este segundo punto se le conoce con el nombre de tobillo. Entre el tobillo y la rodilla existe un tercer punto conocido como segunda rodilla. Ahora bien, por encima del tobillo tenemos los rayos cósmicos ultraenergéticos, cuyo origen es desconocido.

Después de que los rayos cósmicos son emitidos se propagarán a través del medio interestelar o extragaláctico. Antes de ser detectados en la Tierra, se encontrarán con campos magnéticos con los que interactuarán, de manera que su trayectoria inicial se vera alterada mientras viajan. De este modo, cuando estos rayos cósmicos llegan a nuestro sistema ya no poseen información de la dirección de la cual provienen. Por otra parte, varias interacciones que sufren los rayos cósmicos con el medio en el viaje hasta nuestro planeta consumen cierta parte de su energía inicial, de manera que, cuando llegan a la Tierra lo hacen con menor energía.

Como ya se mencionó, a altas energías, las fuentes de rayos cósmicos pueden estar situadas dentro de la Vía láctea (remanentes de supernova, pulsares con intensos campos magnéticos, etc.) e incluso fuera de nuestra galaxia (GRB's, núcleos de galaxias activas, etc.), lugares muy energéticos y violentos del universo. Pero tenemos un gran problema por resolver pues debemos descubrir como los rayos cósmicos de ultra altas energías llegan alcanzar energías de muchos órdenes de magnitud. Al respecto, existen varios modelos que intentan dar una respuesta como veremos a continuación.

### 2.3.1. Mecanismos de aceleración de rayos cósmicos

Los mecanismos de producción de rayos cósmicos de altas energías son clasificados en dos grupos: los "Bottom-up" y los "Top-down", Sin embargo, nosotros nos centraremos en los modelos de aceleración "Bottom-up" ya que son los que tienen una mayor aceptación ante la comunidad científica debido a que aún son compatibles con los flujos de rayos cósmicos ultraenergéticos y los límites sobre el flujo de rayos gamma a dichas energías. [10]

Los modelos "Bottom-up" sugieren que las partículas son aceleradas a muy altas energías mediante un proceso conocido como, el mecanismo de Fermi de primer orden, el cual se sabe, tiene lugar para el caso de partículas cargadas, estas se aceleran al quedar atrapadas por una onda de choque producto de algún evento astrofísico muy violento, como lo es el caso de las remanentes de supernova. En este caso las partículas cargadas interactúan con la onda de choque varias veces hasta que adquieren una energía mayor a la que tenían antes de comenzar el proceso, hasta alcanzar la suficiente energía como para escapar del confinamiento en que las mantenía el campo magnético de la fuente. A continuación explicamos con un mayor detalle este mecanismo.

En el mecanismo de Fermi de primer orden, una partícula energética y cargada se ve atrapada por el campo magnético en el frente de la onda de choque. Al tratar de escapar interactúa con la onda de choque y con el medio detrás de la onda. Debido a los múltiples choques de las partículas cargadas en estos medios se gana energía hasta alcanzar la necesaria para salir del confinamiento. En este caso la energía ganada por cruce o ciclo es:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{4 v_R}{3 c}, \quad (2.1)$$

donde  $v_R$  es la velocidad de las partículas detrás de la onda de choque. Como podemos ver; en este caso la energía ganada es de primer orden en  $v_R$  lo que le da el nombre al mecanismo. Un aspecto interesante es que este proceso se puede llevar a cabo en más de una ocasión de modo que la partícula puede ser atrapada por la onda de choque nuevamente, por lo que después de  $n$  ciclos su energía será  $E_n = E_0(1 + \frac{\Delta E}{E})^n$ . Un aspecto interesante de la teoría, es que bajo estas condiciones se reproduce naturalmente una ley de potencias para el flujo de partículas resultante.

Pensando en que en estos mecanismos de aceleración intervienen campos magnéticos que confinan a los rayos cósmicos durante su aceleración se tiene que la energía máxima que se puede suministrar a las partículas en el lugar de confinamiento es  $E_{max} = \gamma ZeBR$ . donde  $Ze$  es la carga de la partícula,  $B$  el campo magnético,  $R$  el tamaño de la región y  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  en este caso *gamma* representa el factor de Lorentz. Notemos que en esta relación, entre  $B$ ,  $E_{max}$  y  $R$  el tamaño de la región de confinamiento también influye sobre la energía máxima posible que puede adquirir una partícula.

Hillas llegó a la siguiente relación en el límite  $\beta \rightarrow 1$  [15]:

$$\frac{B}{Gauss} = \left(\frac{E_{max}}{eV}\right) \left(\frac{1kpc}{R}\right) \frac{10^{14}}{Z}, \quad (2.2)$$

donde  $Z$  es la carga de la partícula acelerada. La gráfica 2.4 muestra esta relación para distintos valores de  $E_{max}$  como función de  $R$ , y es conocida como la gráfica de Hillas.

Las fuentes que en principio pueden acelerar protones hasta energías del orden de  $10^{20}$  eV están en la parte superior derecha de la gráfica, arriba de la línea punteada. Entre los sistemas que podrían acelerar protones hasta  $\sim 10^{20}$  eV tenemos estrellas de neutrones con campos magnéticos superficiales mayores a  $10^{13}$  G, núcleos activos de galaxias, galaxias gigantes y ondas de choques en el medio extra-galáctico, entre otros.

## 2.4. El detector Pierre Auger

El observatorio Pierre Auger es el detector más grande del mundo dedicado al estudio de rayos cósmicos ultraenergéticos. El observatorio fue completado en el año 2008

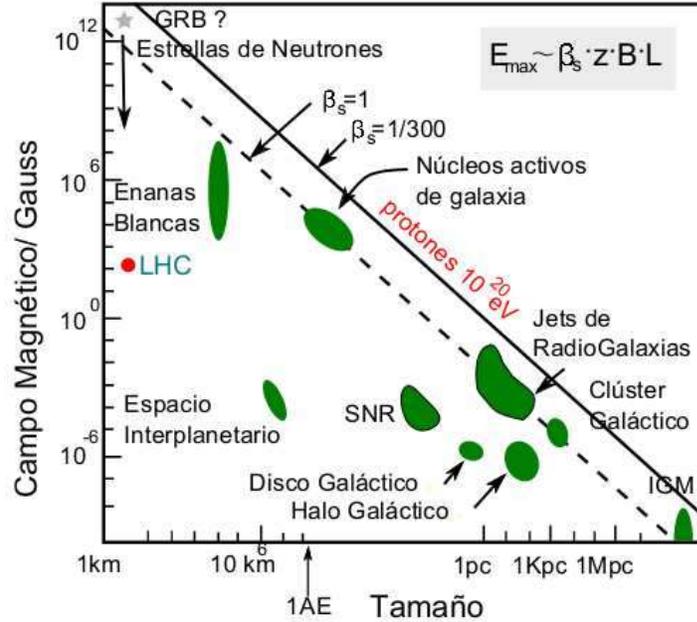


Figura 2.4: Grafica de Hillas. Muestra las características (campo magnético y tamaños) de diversas fuentes posibles de rayos cósmicos. Con líneas calculadas con la relación de Hillas (2.3) se pueden ubicar los objetos astronómicos candidatos a acelerar rayos cósmicos ultraenergéticos[12].

y cubre un área de  $3000 \text{ km}^2$ . Este se localiza sobre una meseta al este de la ciudad de Malargüe, Argentina, a una altitud de  $1400 \text{ m}$  sobre el nivel del mar.

El observatorio Pierre Auger utiliza dos técnicas distintas de observación, ambas basadas en la detección indirecta de chubascos de partículas. La primera técnica se basa en el registro de la radiación fluorescente que proviene de las partículas excitadas de la atmósfera por el paso del chubasco; para detectar esta radiación el observatorio cuenta con detectores fotofluorescentes. La segunda técnica utiliza detectores Cherenkov, tanques de agua equipados cada uno con tres tubos fotomultiplicadores. Estos detectores registran el paso de las partículas del chubasco al llegar a la superficie terrestre. Cuando dichas partículas atraviesan el tanque generan luz mediante el efecto Cherenkov que es captada por los tubos fotomultiplicadores.

El observatorio Auger detecta cerca de 200 eventos por mes que superan los  $10^{19} \text{ eV}$  y al rededor de un evento arriba de los  $6 \times 10^{19} \text{ eV}$  en el mismo periodo de tiempo.

En la figura 2.5 podemos ver el flujo de rayos cósmicos ultraenergéticos reportado por la colaboración Pierre Auger usando datos proporcionados por los detectores Cherenkov y fluorescentes.[16]

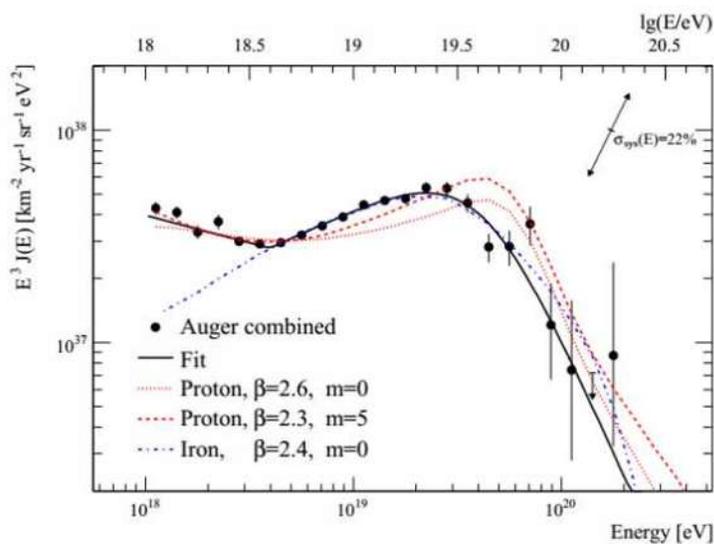


Figura 2.5: Flujo de rayos cósmicos como función de la energía (círculos negros) reportado por la colaboración Pierre Auger utilizando tanto los tanques Cherenkov como los telescopios de fluorescencia, Gráfica tomada de [16], donde la línea continua es el ajuste.

# Capítulo 3

## Materia Oscura

Según el diccionario de la real academia de la lengua española, oscuridad se define como la falta de luz para percibir las cosas; en el universo existen muchas zonas en oscuridad en las que no podemos ver en muchos casos, lo que hay dentro de ellas en el espectro de luz visible; sin embargo, una palabra que aparece de forma repetida en la definición es percibir, esto nos será de utilidad más adelante para explicar como es que surgió la idea de materia oscura.

Para percibir el mundo nos valemos de nuestros sentidos: vista, tacto, gusto, oído y olfato; son por así decirlo nuestros detectores naturales, sin embargo, no podemos valernos solo de uno de ellos para entender el mundo y, más que eso, ni utilizando nuestros cinco sentidos podemos asegurar que tenemos una percepción completa de la naturaleza. Así como nuestros ojos se ayudan del tacto para describir el viento, nuestros sentidos son ayudados por la tecnología para percibir lo que por sí mismos no pueden, los detectores de rayos X, por ejemplo son una forma de ver lo que los ojos no pueden captar.

En este sentido es que la materia oscura fue un buen nombre para denominar a eso de lo que se observaron sus efectos pero no era posible ver a simple vista y ni siquiera con los aparatos de detección con los que se contaba en aquella época y ciertamente hoy en día no nos es posible detectar nada más que sus efectos.

### 3.1. Historia

Cuando se comienza a hablar de materia oscura es común que se aborde de entrada lo ocurrido con las curvas de rotación galáctica que son representaciones gráficas sobre la velocidad que llevan los cuerpos al orbitar al rededor del núcleo galáctico como función de la distancia al mismo [17]. Sin embargo, esta no fue la primera vez que se detectó algo que no se podía ver, así que comenzaremos el recorrido histórico con uno de los primeros ejemplos de este tipo: el descubrimiento del planeta Neptuno. [41].

El planeta Neptuno fue encontrado mediante sus efectos gravitacionales en la órbita de Urano, Saturno y Júpiter, en particular, la trayectoria que seguían estos planetas no concordaba del todo con las leyes de Kepler, hecho que intrigaba a los científicos de aquella época, de modo que, para explicar lo que estaba ocurriendo, en 1843 Jhon Couch Adams asumió la existencia de un octavo planeta y calculó su órbita en base a la perturbación en la trayectoria de Urano. Una vez trazada la posible trayectoria del planeta hipotético, las búsquedas observacionales confirmaron la presencia del octavo planeta con una trayectoria muy cercana a la predicha por Adams. En este contexto, más tarde, intentaron explicar las anomalías en la órbita de Mercurio proponiendo un planeta llamado Vulcano aunque sin éxito. Albert Einstein y su teoría de la relatividad general explicarían años después que la anomalía era debida a efectos que no podían ser explicados solamente con las leyes de Newton. Regresando al tema de materia oscura, Neptuno no había sido observado y fue gracias a sus efectos gravitacionales que pudo ser descubierto, es básicamente el concepto que se tenía de materia oscura, aunque claro está que hoy en día es un poco más complicado que eso [41], ya que, analizando el caso de Vulcano vemos que no todas las anomalías gravitacionales son debidas a objetos masivos oscuros, existen otros efectos derivados de las leyes mismas de la naturaleza a grandes escalas o a muy pequeñas escalas; por lo que los científicos han tenido que ser muy cuidadosos a la hora del estudio del problema de la materia oscura y analizar todas las posibles causas del fenómeno. Hoy en día pensamos que la materia oscura a la cual nos referimos interacciona gravitacionalmente y tal vez débilmente de modo que su detección mediante ondas electromagnéticas es prácticamente imposible.

Ahora bien hasta antes del descubrimiento de los rayos X y del desarrollo de tecnología que nos permitiera observar esta y otras frecuencias del espectro electromagnético en el cual se encuentra una pequeña banda de frecuencia que se conoce como espectro visible, se contaba solamente con los métodos de observación convencionales, es decir, los ópticos para conocer el Universo. Utilizando dichos métodos observacionales se pudo encontrar el primer indicio de la presencia de materia oscura en el universo, éste llegó de la mano del estudio de la dinámica de nuestra galaxia.[17]

El astrónomo británico James Jeans, en 1922, [20] reanalizó el movimiento vertical de las estrellas cercanas al plano galáctico. Este estudio ya había sido realizado y publicado meses antes por el astrónomo Holandés Jacobus Kapteyn [21]. Ambos científicos calcularon la densidad de materia cercana al Sol a partir de sus observaciones, además, estimaron la densidad de materia debida a la materia cercana de todas las estrellas próximas al plano galáctico. Kapteyn encontró que la densidad de estrellas observadas en el plano galáctico era suficiente para explicar los movimientos verticales de las estrellas estudiadas, pero por otra parte, los resultados de Jeans arrojaban un resultado distinto: debían existir dos estrellas oscuras por cada estrella luminosa estudiada para que el movimiento estelar analizado pudiera ser explicado.

## Curvas de rotación

El segundo indicio de la existencia de la materia oscura llegó en 1933 con el trabajo de Fritz Zwicky [18]. Zwicky estudió el corrimiento al rojo o al azul de la luz proveniente de galaxias del cúmulo de Coma, esto le permitió construir la curva de rotación para el cúmulo galáctico en cuestión. Lo anterior lo realizó analizando el corrimiento al rojo, mediante el efecto Doppler, de las galaxias del cúmulo, de donde calculó las velocidades de rotación de las galaxias al rededor del centro gravitacional del sistema.

Este problema fue retomado por Vera C. Rubin y W. Kent Ford en 1969 durante el estudio de la curva de rotación de la galaxia M31 [43]. En base a la curva de rotación de M31 obtenida y a la ley de gravitación universal, Rubin y su grupo estimaron que la densidad de masa de la galaxia debía ser uniforme a grandes distancias del centro galáctico (mas allá de la región que concentra a la mayoría de las estrellas). En particular, Rubin y Ford encontraron que para explicar el comportamiento de las curvas de rotación, la densidad de masa de la galaxia debía variar de forma proporcional a  $r$ :

$$M(r) \propto r \tag{3.1}$$

Una curva de rotación es una gráfica donde se muestra la velocidad de rotación de un objeto al rededor del centro de gravedad del sistema a diferentes distancias del mismo, es decir, nos muestra la velocidad orbital como función de la distancia al centro. Las curvas de rotación se generan no solamente para cúmulos galácticos sino también para galaxias.

En el caso de galaxias espirales, es posible idealizar la órbita de una estrella alrededor del centro galáctico como una órbita circular y realmente es una muy buena aproximación. Para una estrella moviéndose en una galaxia espiral en una órbita circular (ver figura 3.1) a una distancia  $r$  del centro galáctico con una velocidad  $v(r)$ , tenemos la fuerza gravitacional en balance con la fuerza centrípeta:

$$\frac{mv^2(r)}{r} = \frac{GmM_{<r}}{r^2}, \tag{3.2}$$

donde  $M_{<r}$  es la masa encerrada dentro del radio  $r$  y  $m$  la masa de la estrella. Si la estrella está dentro de la región de densidad central de la galaxia, entonces  $M_{<r} = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$  con  $\rho$  la densidad promedio de la región central. Por lo tanto, de la ecuación (3.1) se esperaría que dentro de la región central:

$$v(r) \sim r \tag{3.3}$$

Ahora bien, para los cuerpos fuera del núcleo masivo la masa  $M_{<r} \sim r$  puede ser tomada como constante, en este caso, de la ecuación (3.1) obtenemos que la velocidad va de la forma  $v(r) \sim r^{1/2}$ . Entonces la variación de la velocidad  $v(r)$  respecto a  $r$  para una galaxia espiral debería mostrar, primero, un crecimiento proporcional a  $r$  cuando  $r <$  radio del núcleo galáctico y un decaimiento proporcional a  $\frac{1}{r^{1/2}}$  cuando

## CAPÍTULO 3. MATERIA OSCURA

$r >$  radio del núcleo de la galaxia. Sin embargo, las mediciones observacionales de numerosas galaxias muestran un comportamiento diferente al esperado teóricamente, tal y como se muestra en la figura 3.1, donde se puede apreciar que el crecimiento inicialmente es como el predicho pero, posteriormente, a medida que el valor de  $r$  crece, la velocidad de rotación se vuelve constante.

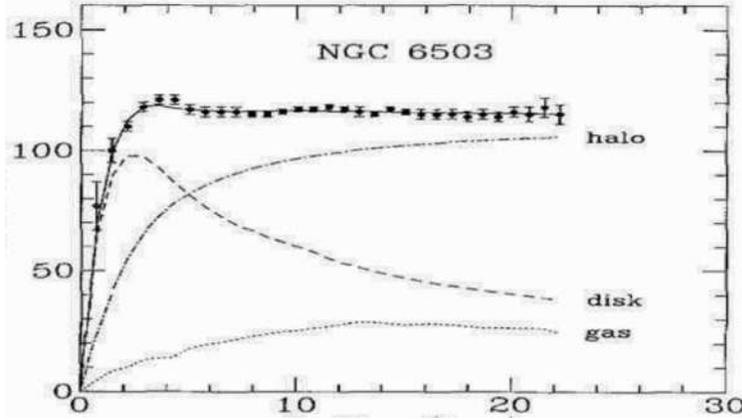


Figura 3.1: curva de rotación de la galaxia M1 con el radio medido en kiloparsecs y la velocidad medida en  $\frac{km}{s}$

La presencia de materia oscura se infiere comparando la masa estimada a partir de la dinámica gravitacional del sistema con la masa luminosa observada, sin embargo, a diferencia del movimiento de estrellas en una galaxia el movimiento de galaxias en un cúmulo puede describirse como un sistema de partículas interactuando debido a una fuerza central, Mediante el teorema del virial es posible relacionar el promedio temporal de la energía cinética del sistema con la potencial:

$$V + 2\bar{T} = 0. \quad (3.4)$$

Ahora bien, la energía potencial de una esfera auto-gravitante (como lo es un cúmulo de galaxias) de masa  $M$ , densidad  $\rho$  y radio  $R$  puede ser fácilmente calculada recordando que al tratar con un objeto auto-gravitante el potencial actúa sobre cada cascarón esférico que conforma el sistema y por la esfera que produce el potencial como se detalla en la referencia [51], con dichas consideraciones y después de integrar sobre el radio del sistema se obtiene un potencial de la forma:

$$V = -\frac{3GM^2}{5R}. \quad (3.5)$$

Por otra parte, la energía cinética de dicho cúmulo puede escribirse como  $T = \frac{1}{2}Mv^2$ , donde  $M$  es la masa del sistema auto-gravitante, la cual puede ser encontrada a partir de (3.5) y (3.4) si el radio  $R$  y la velocidad son conocidas, que de hecho es lo que hizo Zwicky para estimar la masa gravitacional del cúmulo a partir de las curvas de rotación.

Utilizando el valor medido experimentalmente para la masa visible y comparando con estimaciones teóricas es que en 1933 se concluyó que había una gran cantidad de materia faltante para describir la dinámica galáctica.

En su trabajo Zwicky, como ya se dijo, midió la velocidad de siete galaxias y estimó la masa gravitacional del cúmulo galáctico del cangrejo <sup>1</sup>. Posteriormente Kuzmin, Sinclair Smith y Einasto comprobaron los resultados de Zwicky trabajando con otros cúmulos galácticos, como el de Virgo y galaxias, entre las que se encontraba la M1 que de hecho es la que se estudió para obtener la curva de rotación de la figura 3.1. En 1974 Einasto en la primera reunión europea de astronomía, presentó como resultado de los cálculos hechos y observaciones realizadas sobre galaxias, la conclusión: es imposible reproducir los datos de la rotación de las estrellas sólo con la población estelar conocida.

## 3.2. Distribución de materia oscura en la galaxia

En los trabajos mencionados anteriormente, en especial, en el propuesto para explicar el comportamiento dinámico de las estrellas al rotar en una galaxia [23]; se trabajó con una distribución de densidad de masa que dependía del radio como  $r^n$ . Hoy en día, en base a las observaciones astronómicas, han sido propuestos nuevos modelos para describir la distribución de materia oscura en las galaxias, como en la Vía Láctea. Uno de los más conocidos es el propuesto por Jaan Einasto [29], el cual tiene la peculiaridad que no diverge para valores pequeños de  $r$ . Este modelo originalmente fue utilizado para describir la distribución de densidad en un sistema solar que posee simetría esférica, pero también es utilizado para describir la distribución de materia oscura en el halo galáctico. La distribución de Einasto tiene la siguiente forma:

$$\rho_E = \rho_s \exp \left[ -\frac{2}{\alpha} \left( \left( \frac{r}{r_s} \right)^\alpha - 1 \right) \right]; \quad (3.6)$$

donde  $r$  es la distancia medida desde el centro de la galaxia,  $\rho_s$  es la densidad al radio  $r_s$  que define un volumen que contiene a la mitad de la masa total del halo, y  $\alpha$  es un parámetro que gobierna la forma en que se aglomera la materia en el modelo. Ajustando los parámetros de este modelo de forma que la expresión para  $\rho_E$  reproduzca las estimaciones de materia oscura en el sistema solar,  $\rho_{dm} = 0.039 \pm 0.03 \text{ GeV}/\text{cm}^3$  se obtiene así  $\rho_s = 0.0715 \text{ GeV}/\text{cm}^3$ ,  $r_s = 21 \text{ kpc}$  y  $\alpha = 0.22$ .

## 3.3. Naturaleza de la materia oscura

Hasta ahora hemos hablado de los efectos gravitacionales de la materia oscura sobre la dinámica de la materia visible. Es precisamente de esos efectos de donde se infiere

---

<sup>1</sup>Es importante recordar que un cúmulo es un conglomerado de galaxias agrupadas por un potencial gravitacional en común y sumergidas en un gas que emite en la frecuencia de los rayos X

## CAPÍTULO 3. MATERIA OSCURA

---

la existencia de la materia oscura.

Uno de los métodos para la detección de la materia oscura son los lentes gravitacionales. Este tipo de detección consiste en medir la desviación de la dirección de propagación de la luz tal como propone la Teoría de la relatividad general al pasar cerca de un sistema masivo. De esta desviación y de la masa visible del sistema se infiere la presencia de materia oscura. Los lentes gravitacionales han sido detectados en varios rincones del universo.

Por otra parte, sobre la naturaleza de la materia oscura realmente se sabe muy poco y es aquí donde la física de partículas juega un papel de mucha importancia. Sí bien la materia oscura pudiera deberse a alguna deficiencia en nuestra teoría de la gravitación [41], también es posible que, en efecto, esta materia oscura realmente exista en forma de partículas, lo cual representaría un gran problema para la física de partículas, pues debería ser capaz de describir la composición básica de esta nueva componente del universo así como sus interacciones con la materia ordinaria y más aún, sus autointeracciones si es que las tiene.

Recordemos que debido a que la materia oscura no ha podido ser detectada directamente mediante el espectro electromagnético, pero sí mediante interacciones gravitacionales, asumimos que no debería poseer carga eléctrica, tendría que interactuar débilmente, no debería interactuar fuertemente pero sí interactuar gravitacionalmente. En base a estas propiedades la física de partículas ya ha propuesto algunos candidatos, algunos de los cuales hablaremos a continuación. En nuestro caso nos centraremos en un candidato en especial: el bosón U.

### 3.3.1. Candidatos a partículas de materia oscura

En la sección anterior hablamos de algunas de las propiedades que las partículas de materia oscura, de existir, deberían tener de manera que se reproduzca en teoría, las observaciones. Como se mencionó en el primer capítulo, nuestra comprensión sobre la materia que observamos y sus interacciones está sintetizado en una teoría más grande conocido como Modelo Estándar de las interacciones y partículas elementales. Ahora bien, una pregunta natural podría ser, si la materia oscura está formada por bloques que respeten las reglas postuladas en el Modelo Estándar. Para esa pregunta no tenemos aún respuesta alguna, por lo que se han realizado muchos esfuerzos por responderla.

Algunos han optado por pensar el caso en que el Modelo Estándar a pesar de ser una teoría elegante y capaz de dar explicación a la mayor parte de resultados experimentales con partículas, es una teoría incompleta. De este modo han propuesto varios caminos a seguir. Una propuesta ha sido extender el modelo estándar a dimensiones extras

[47]. A continuación damos un breve repaso de algunos de los candidatos con mayor aceptación pues cumplen con los requisitos listados en el último párrafo del capítulo anterior aunque no todos están de acuerdo con el modelo estándar.

1) Partículas masivas débilmente interactuantes (WIMPS, por sus siglas en inglés “weakly interacting massive particles”). Estas partículas poseen una masa de entre  $10 \text{ GeV}$  y unos cuantos  $\text{TeV}$  por lo que es comprensible porque el nombre de masivas, considerando que la mayoría de los bloques fundamentales que están englobadas en el Modelo Estándar son de algunos  $\text{MeV}$ ; dichas partículas, como su nombre lo dice solo interactúan débil y gravitacionalmente. Aquí es necesario incluir otras partículas del estilo conocidas como super-WIMPS que tienen una interacción con la materia más débil que los WIMPS pero poseen masas del mismo orden que los WIMP’s. Los WIMP’s son una de las propuestas más viables ya que son capaces de reproducir algunas de las propiedades actuales de la materia oscura como lo es la densidad reliquia térmica [50], que sería producto del equilibrio térmico en que se encontraban los WIMP’s justo antes del enfriamiento del universo.

2) Partícula ligera supersimétrica (LSP, por sus siglas en inglés light supersymmetric particle). La teoría de supersimetría (SUSY por sus siglas en inglés), propone extender las tres simetrías de Gauge del Modelo Estándar lo que permitiría relacionar las propiedades de los bosones con las de los fermiones. A cada fermión y bosón del Modelo Estándar se le asocia un supercompañero bosón o fermión masivo. Al momento, los experimentos no han encontrado los supercompañeros de las partículas del modelo estándar. Las partículas supersimétricas deben poseer masas mucho mayores que las partículas asociadas a ellos. Los LSP son partículas ligeras que viven en el marco de SUSY. Estas, para poder ser un buenas candidatas, deben ser estables o tener un tiempo de vida muy grande lo cual ocurre en algunos modelos de supersimetría. Un ejemplo es el neutralino, el cual posee una masa arriba de los  $100 \text{ GeV}$ . En dimensiones extra, como en los modelos de Kaluza-Klein, se tienen partículas parecidas a los LSP conocidas como LKP o partículas ligeras de Kaluza-Klein, dichas partículas viven en un sistema con dimensiones extras lo que puede o no dar lugar a nuevas simetrías.

3) Axiones. Estas son partículas pseudoescalares que surgen como un intento de explicar por que la fuerza fuerte obedece la simetría CP. Primeramente, en el lagrangiano de QCD uno de los términos que aparece va como  $\frac{\theta g^2}{32\pi^2} G_{\mu\nu}^\alpha \tilde{G}^{\alpha\mu\nu}$ . Este término viola CP y, en particular, se induce un momento dipolar eléctrico al neutrón. La contribución en el límite quiral es  $dN \sim 5 \times 10^{-16} \theta_{QCD} \text{ e cm}$ . Por otra parte, la cota experimental es  $dN \leq 6.3 \times 10^{-26} \text{ e cm}$ , lo que da la restricción  $\theta_{QCD} \leq 10^{-10}$ . Puesto que  $\theta_{QCD}$  aparece debido a efectos no perturbativos en QCD, es imposible calcularla. Sin embargo, hay buenas razones para pensar que  $\theta_{QCD} \sim O(1)$ [53]. Dentro del modelo estándar un valor tan pequeño no es natural [54]. El problema de CP fuerte es entonces comprender por que  $\theta_{QCD}$  es tan pequeño en interacciones fuertes. Peccei y Quinn propusieron solucionar el problema de CP fuerte la existencia de una quasi-simetría global  $U_{PQ}(1)$ , la cual, debía ser una simetría de la teoría (es decir, en el lagrangiano de QCD)

## CAPÍTULO 3. MATERIA OSCURA

---

a nivel clásico y debería romperse explícitamente por los efectos no perturbativos que hacen que el lagrangiano de QCD dependa de  $\theta_{QCD}$ . Finalmente  $U_{PQ}(1)$  debe romperse espontáneamente. El axión es entonces el bosón de Nambu-Goldstone asociado a dicha rotura espontánea.

El axión tiene algunas características como su masa, la cual está dada en términos de un factor conocido como constante de decaimiento del axión  $f_a$ ;  $m_a \simeq 0.6 \text{ eV} \frac{10^7 \text{ GeV}}{f_a}$ . Así otra propiedad del axion es que todas sus interacciones son inversamente proporcionales a  $f_a$ .

Antes de hablar de nuestro último candidato, nos referiremos brevemente a la teoría de dimensiones extras (UED) en la cual, a diferencia de SUSY, en que el espectro de masa es ampliamente distribuido en el caso de UED el espectro es más bien degenerado. En este tipo de modelos, la conservación de momento en dimensiones extra da lugar a la conservación de una nueva cantidad conocida como el número de Kaluza Klein (KK). La paridad de KK se mantiene a cualquier orden en la teoría de perturbaciones<sup>2</sup>, lo cual permite la existencia de una partícula estable ligera (LKP), que no decae a partículas más ligeras del Modelo Estándar. Además por las correcciones radiativas todas las demás partículas de KK eventualmente decaen en la LKP. Estas partículas y algunas de sus propiedades han sido investigadas tanto en cinco como seis dimensiones con una compactificación del radio del orden de  $TeV^{-1}$ , donde la LKP es la primer partícula masiva y que puede ser tanto el KK neutrino como el KK fotón. [56]

Y finalmente, otra partícula candidata a materia oscura, y en la que nos enfocaremos en esta tesis, es el Bosón U. Usualmente, algunas teorías más allá del modelo estándar usualmente involucran grupos de Gauge extendidos, haciendo necesario un nuevo bosón de Gauge, adicional al gluón, al fotón y a los bosones  $W^\pm$  y  $Z$ . Por lo general, se piensa que deben ser bosones pesados de por lo menos unos cientos de  $GeV$ . En la mayoría de los contextos en que el bosón U es referido [48], este se genera a partir de una extensión supersimétrica del Modelo Estándar añadiendo una simetría global extra  $U(1)$ , de modo que el nuevo marco tenga la simetría  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_\gamma \times U_{\text{extra}}(1)$ . Dicha simetría se rompe espontáneamente; por lo que el bosón U es la partícula de Nambu-Goldston proveniente de dicha ruptura. Dado el modelo y sus simetrías podemos construir el lagrangiano de interacción para nuestra nueva partícula y este va como:

$$\mathcal{L} = gq_f \bar{\psi}_f \gamma^\mu (g_v - g_A \gamma^5) \psi_f U_\mu \quad (3.7)$$

donde  $g$  es la constante de acoplamiento para esta nueva interacción y  $q_f$  es la carga de los fermiones interactuantes.

El Bosón U es un bosón neutro de espín uno que interactúa de forma vectorial, axial y vectorial-axial. A partir de las características de esta partícula hipotética es posible

---

<sup>2</sup>Dicha teoría se encuentra explicada de manera breve en el siguiente capítulo.



### CAPÍTULO 3. MATERIA OSCURA

---

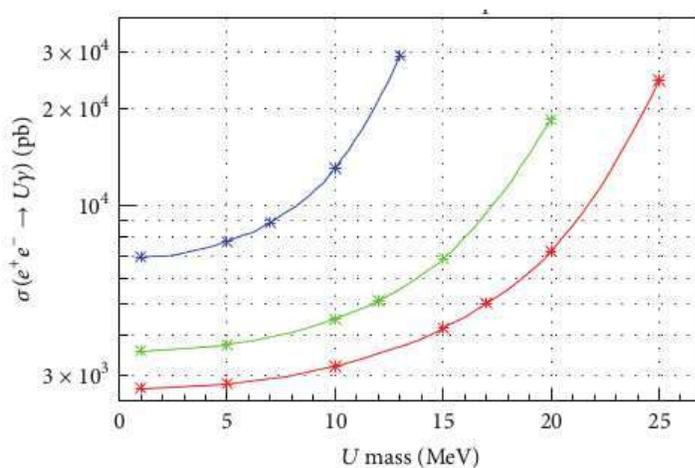


Figura 3.3: Sección eficaz de la producción de Bosones U para diferentes valores de energías del haz incidente.

con material del alrededor ubicado en laboratorios subterráneos. En el presente trabajo se presentará una nueva técnica basada en el trabajo [64] y que se comienza a explicar en [65] para estudiar las propiedades de la materia oscura.

Esta técnica se basa en la búsqueda de esta última utilizando los detectores de rayos cósmicos de los cuales se hablo en el capítulo anterior, así como el uso de rayos cósmicos como un medio para sondear el universo.

## Herramientas matemáticas y conceptuales

En el capítulo anterior se presentó el lagrangiano de las interacciones que nos interesan, y hablamos que para el estudio de viabilidad del método propuesto de caracterización de materia oscura usando rayos cósmicos debemos hacer el cálculo de la sección eficaz respectiva, que es el tema de esta tesis. Es momento entonces de abordar los conceptos básicos de Teoría cuántica de campos que nos permitan realizar el cálculo de la sección eficaz.

En orden, para adentrarnos en el cálculo de la sección eficaz comenzaremos por recordar que la mecánica cuántica puede ser descrita mediante la formulación de Schrödinger y la formulación de Heisenberg, las cuales son distintas pero totalmente equivalentes. En la primera, los operadores no evolucionan en el tiempo, mientras que los vectores de estado sí lo hacen. En la segunda formulación los operadores evolucionan con el tiempo mientras que los vectores de estado no. Esto podría indicar que existen forzadamente formulaciones en que los operadores o los vectores de estado no dependen del tiempo. Sin embargo, existe una formulación intermedia entre ambas y que es, como era de esperarse, equivalente a las otras dos mencionadas anteriormente; la representación de Dirac o de interacciones. La ventaja de esta representación es que nos permite separar en la solución la contribución del Hamiltoniano libre de la contribución del Hamiltoniano de interacción entre los campos, asumiendo que el Hamiltoniano puede ser separado en dos partes:

$$H = H_0 + H_I \quad (4.1)$$

donde  $H_0$  corresponde al Hamiltoniano de las partículas libres, mientras que  $H_I$  contiene toda la información que describe la interacción de los campos que se están considerando. Así, la representación de interacción viene dada por las transformaciones:

$$|\psi(t)\rangle^I = e^{i\hat{H}_0^S t} |\psi(t)\rangle^S \quad (4.2)$$

$$\hat{O}^I(t) = e^{i\hat{H}_0^S t} \hat{O}^S e^{-i\hat{H}_0^S t} \quad (4.3)$$

## CAPÍTULO 4. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS Y CONCEPTUALES

---

donde:  $|\psi(t)\rangle^I$  es el vector de estado del sistema en la representación de interacción al tiempo  $t$ ,  $|\psi(t)\rangle^S$  es el vector de estado del sistema en la representación de Schrödinger en el tiempo,  $\hat{O}^I(t)$  es un operador en la representación de interacción y depende del tiempo, mientras que  $\hat{O}^S$  es el mismo operador, pero en la representación de Schrödinger, el cual no depende del tiempo.

Entonces la ecuación de Schrödinger que describe la evolución temporal del vector de estado tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 i\partial_t|\psi(t)\rangle^I &= -\hat{H}_0^s e^{i\hat{H}_0^s t} |\psi(t)\rangle^s + e^{i\hat{H}_0^s t} \partial_t |\psi(t)\rangle^s \\
 &= -\hat{H}_0^s |\psi(t)\rangle^I + e^{i\hat{H}_0^s t} \hat{H}_0^s e^{-i\hat{H}_0^s t} e^{i\hat{H}_0^s t} |\psi(t)\rangle^s \\
 &= (\hat{H}^I - \hat{H}_0^s) |\psi(t)\rangle^I \\
 &= (\hat{H}^I - \hat{H}_I^I) |\psi(t)\rangle^I
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Nótese que en el desarrollo anterior se utilizó la relación:

$$\hat{H}_0^I = e^{i\hat{H}_0^s t} \hat{H}_0^s e^{-i\hat{H}_0^s t} = \hat{H}_0^s, \tag{4.5}$$

Para finalmente obtener

$$i\partial_t|\psi(t)\rangle^I = \hat{H}_I^I |\psi(t)\rangle^I. \tag{4.6}$$

Ahora para resolver la ecuación anterior proponemos una solución de la siguiente forma:

$$i\partial_t|\psi(t)\rangle^I = \hat{S}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle^I, \tag{4.7}$$

donde  $|\psi(t_0)\rangle^I$  es el vector de estado del sistema para un tiempo  $t_0$  y  $\hat{S}(t, t_0)$  es el operador de evolución temporal; para obtener la ecuación del operador de evolución temporal sustituimos (4.7) en (4.6) para obtener:

$$i\partial_t \hat{S}(t, t_0) = \hat{H}_I^I \hat{S}(t, t_0); \tag{4.8}$$

y fijando como solución inicial  $\hat{S}(t, t_0) = \hat{I}$ , se obtiene como solución de (4.8)

$$\hat{S}(t, t_0) = \hat{T} \left[ e^{-i \int_{t_0}^t \hat{H}_I^I(x) dx} \right]; \tag{4.9}$$

siendo  $\hat{T}$  el operador de orden cronológico. Para resolver (4.8) primero se integra esta ecuación, la solución se expande en serie por iteración, de este proceso se obtiene un producto de integrales en  $t$  donde los límites superiores de las integrales que se obtienen son mutuamente dependientes, por lo que su evaluación es bastante complicada. Por otra parte, las integrales están acomodadas de forma que sus límites cubren consecutivamente el intervalo de tiempo que dura la interacción. Lo que se garantiza usando el operador de orden cronológico. Este operador acomoda sus argumentos en orden descendente en el tiempo de modo que las integrales aparecen en el orden deseado. La expresión (4.10) se puede expandir como:

$$\hat{S}(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{S}_n(t, t_0), \tag{4.10}$$

## CAPÍTULO 4. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS Y CONCEPTUALES

---

donde:

$$\hat{S}_n(t, t_0) = \frac{-i}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} \hat{T}[\hat{H}_I^I(t_1) \cdots \hat{H}_I^I(t_n)] \quad (4.11)$$

A la serie obtenida se le llama serie de Dyson, si expresamos ahora  $\hat{H}_I$  en términos de la constante de acoplamiento:

$$\hat{H}_I = g\hat{V}_I, \quad (4.12)$$

se obtiene,

$$\hat{S}(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} g^n \hat{S}_n(t, t_0), \quad (4.13)$$

y sustituyendo en (4.11) se llega a que

$$\hat{S}_n(t, t_0) = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} \hat{T}[\hat{V}_I(t_1) \cdots \hat{V}_I(t_n)]. \quad (4.14)$$

El formalismo abordado anteriormente es de mucha utilidad, al intentar calcular la amplitud de probabilidad de observar el o los estados finales en los cuales estoy interesado después de la interacción dado que nosotros conocemos los estados iniciales del sistema; de esta manera la amplitud de probabilidad adquiere la siguiente forma  $\mathcal{M}_{if} = \langle f | \psi(t = \infty) \rangle$ . Veamos ahora que dada la forma del estado  $|\psi(t = \infty)\rangle$  usando la teoría de perturbaciones adquiere la forma  $\hat{S}|\psi_0\rangle$ , es aquí donde el operador  $\hat{S}$  es de utilidad para los propósitos que se buscan en esta tesis. Antes de continuar, expondremos algunas características del formalismo para poder implementarlo.

- Se comienza con un sistema de partículas libres antes de la interacción en  $t = -\infty$ , a dichos estados se les conoce como estados asintóticos.
- Después de la interacción en un tiempo  $t = \infty$  las partículas deben encontrarse en un estado de partículas libres, es decir en un estado asintótico.
- En el caso de la teoría de perturbaciones cuando la constante de acoplamiento  $g \gg 1$  se hace una aproximación a (4.13) conservando los primeros términos de la expansión. Se dice que se trabaja a nivel árbol, cuando se trabaja con el primer término diferente de cero de la serie.
- Para calcular la probabilidad de que después de una interacción el estado se encuentre en  $|\psi_f\rangle$ , se calcula la amplitud de probabilidad

$$S_{fi} = \langle \psi_f | \psi(t = \infty) \rangle = \langle \psi_f | \hat{S} | \psi(t_0) \rangle \quad (4.15)$$

Por otra parte es usual que al analizar un sistema conozcamos el lagrangiano o su densidad lagrangiana; recordemos que no son la misma cosa, pero que están relacionadas por  $L = \int \mathcal{L} d^3x$  donde  $L$  es el lagrangiano de la interacción que queremos

## CAPÍTULO 4. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS Y CONCEPTUALES

---

analizar, es entonces posible encontrar una densidad hamiltoniana  $\mathcal{H}$  a partir de la transformación de Legendre

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}, \quad (4.16)$$

donde  $\phi$  es el campo a transformar y  $\pi$  es el momento conjugado de la densidad lagrangiana asociada al campo  $\phi$ , dicho momento está dado por  $\partial_t \phi$ . Entonces, si conocemos la densidad lagrangiana de interacción de un sistema es posible a partir de este conocer el hamiltoniano de interacción  $\mathcal{H}_I$  del mismo y poder realizar los cálculos de la amplitud invariante para posteriormente obtener la sección eficaz, siguiendo los pasos que se mencionan en los capítulos siguientes.

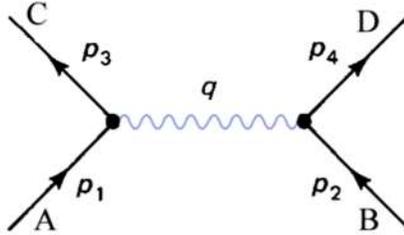


Figura 4.1: Diagrama de Feynman para la dispersión entre una partícula A y B.

### 4.1. Amplitud invariante

El elemento de matriz  $S_{fi}$  para el proceso  $p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4$  el cual se muestra en la figura 4.1, se puede escribir en términos de la llamada amplitud invariante  $\mathcal{M}_{fi}$ :

$$S_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \mathcal{M}_{fi} \frac{1}{\sqrt{2E_1 V}} \frac{1}{\sqrt{2E_2 V}} \frac{1}{\sqrt{2E_3 V}} \frac{1}{\sqrt{2E_4 V}}, \quad (4.17)$$

donde la delta de Dirac impone la conservación de energía-momento y  $V$  es el volumen de la caja en que estamos normalizando. Esta amplitud invariante  $\mathcal{M}_{fi}$  adquiere importancia pues varias cantidades se obtienen a partir de ella, como en nuestro caso la sección eficaz, así como el tiempo de decaimiento y razones de decaimiento, además de que puede ser calculada por reglas sencillas llamadas reglas de Feynman.

### 4.2. Diagramas de Feynman

Para trabajar cada uno de los términos de la serie de Dyson se hace uso de la teoría de operadores y del álgebra existente entre estos [25, 24], lo cual resulta muy útil. Sin embargo, Feynman creó una nueva manera de obtener los términos de dicha serie

## CAPÍTULO 4. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS Y CONCEPTUALES

---

usando representaciones pictográficas, pensando en un método un poco más intuitivo de los procesos que se analizaban.

Los diagramas de Feynman representan gráficamente cada uno de los términos que aparecen en la serie de Dyson (ver ecuación (4.11)). Con estas representaciones resulta más sencillo calcular las matrices de amplitud invariante además de resultar un método muy práctico y directo. Por ejemplo, la dispersión de Compton, en un diagrama de Feynman, puede verse como en la figura 4.2.

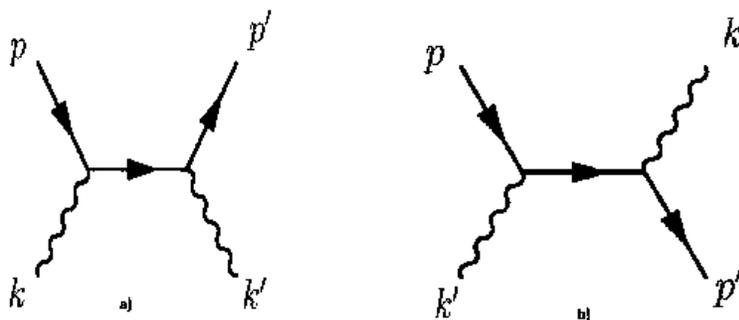


Figura 4.2: Diagrama de Feynman para la dispersión Compton.

Describiremos ahora brevemente las reglas de Feynman para el diagrama de la figura 4.1 que nos permitan obtener la amplitud invariante  $\mathcal{M}_{if}$ . Estamos considerando la interacción de las partículas  $A + B \rightarrow C + D$  a nivel árbol, en el cual la interacción posee como partícula mediadora la partícula  $Q$  como se muestra en la figura 4.1. En este caso los momentos  $p_1$  y  $p_2$  están asociados a las partículas  $A$  y  $B$ , respectivamente, mientras que  $p_3$  y  $p_4$  están relacionadas con las partículas  $C$  y  $D$ . Por otra parte, tenemos que  $q$  es el momento de la partícula mediadora  $Q$ .

- A cada flecha entrante hacia el vértice que apunta hacia arriba, le asociamos un espinor  $u$ .
- A cada flecha que sale del vértice apuntando hacia arriba, se le asocia un espinor  $\bar{u}$ .
- A cada flecha que sale del vértice apuntando hacia abajo, se le asocia un espinor  $\bar{v}$ .
- A cada flecha que entra al vértice apuntando hacia arriba, se le asocia un espinor  $v$ .

## CAPÍTULO 4. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS Y CONCEPTUALES

---

- Por cada vértice de interacción entre dos fermiones y un bosón neutro masivo se escribe:

$$-ig'\gamma^\mu\frac{1}{2}(g_v - g_A\gamma^5), \quad (4.18)$$

donde  $g_v$  y  $g_A$  son términos constantes asociados a acoplamientos vectoriales y axiales respectivamente y  $g' = \frac{g}{\cos\theta_w}$  con  $g$  la constante universal de interacciones.

- Por cada línea que indique que un fermión es el mediador de la interacción entre los vértices (ver figura 4.2) se escribe un propagador:

$$\frac{-i}{\gamma^\mu p_\mu + m}. \quad (4.19)$$

donde  $p_\mu$  son las componentes del cuadri-momento del fermión mediador y  $m$  su masa.

Estas reglas son suficientes para facilitarnos el cálculo de las amplitudes invariantes y los elementos de matriz de las secciones eficaces que calcularemos en el siguiente capítulo. Sin embargo, es importante mencionar que existen otras reglas de Feynman para cuando tenemos como partícula mediadora un bosón cargado masivo o uno neutro y sin masa como el fotón, pero ya que no serán abordadas en este trabajo no fueron utilizadas.

### 4.3. Interacciones entre partículas

Es momento de explicar como es que se relacionan la amplitud invariante y la sección eficaz. Comencemos por recordar que estamos estudiando la transición por unidad de volumen y por unidad de tiempo, esto lo podemos expresar en lenguaje matemático mediante la expresión.

$$\frac{P(i \rightarrow f)}{VT} = \frac{|S_{fi}|^2}{VT}. \quad (4.20)$$

Estamos normalizando los estados de las partículas usando una caja de volúmenes finitos  $V$ . La ecuación (4.20) nos da la posibilidad de transición a un estado final en particular  $f$ . En la práctica no estamos interesados en una partícula que se dispersa a un estado final caracterizado por un momento bien definido, sino en una dispersión a un conjunto de estados finales muy cercanos entre si y contiguos.

El número de estados finales en el espacio de momentos en torno a cierto estado final es  $\vec{p}_f$  es:

$$\prod_f \frac{V d^3 p_f}{(2\pi)^3}. \quad (4.21)$$

## CAPÍTULO 4. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS Y CONCEPTUALES

---

Así la probabilidad de que el sistema se encuentre en uno de los estados finales con momentos entre  $(\vec{p}_f^{(1)}, \vec{p}_f^{(1)} + d\vec{p}_f^{(1)})$  y  $(\vec{p}_f^{(n_f)}, \vec{p}_f^{(n_f)} + d\vec{p}_f^{(n_f)})$  siendo  $n_f$  el número de partículas finales. Entonces:

$$dp(i \rightarrow f) = P(i \rightarrow f) \frac{V d^3 p_f}{(2\pi)^3}. \quad (4.22)$$

La sección eficaz es el área efectiva del blanco que ve el proyectil. Se calcula a partir de la razón de transición de probabilidad por unidad de volumen y tiempo, dividido entre el flujo de partículas incidentes ( $\vec{j}_i$ ) y el número de blancos dispersores ( $\rho_f$ ). Ya que hemos normalizado los estados a una partícula por unidad de volumen [25, 24], obtenemos que:

$$|\vec{j}_i| = |\vec{v}| \frac{1}{V}, \quad (4.23)$$

$$\rho_f = \frac{1}{V}, \quad (4.24)$$

siendo  $|\vec{v}|$  la velocidad relativa entre partícula blanco e incidente. De esta manera obtenemos una expresión para la sección eficaz:

$$d\sigma = dP(i \rightarrow f) \frac{1}{|\vec{j}_i \rho_f|} \frac{1}{VT} \quad (4.25)$$

$$d\sigma = \frac{V^2 |S_{fi}|^2}{VT |\vec{v}|^2} \prod_f \frac{V d^3 p_f}{(2\pi)^3} \quad (4.26)$$

sustituyendo (4.17) en (4.26) obtenemos la siguiente expresión:

$$d\sigma = \frac{1}{2E_1 E_2 E_3 E_4 V^4} \frac{(2\pi)^8 \delta^4(p_1 + p_3 - p_2 - p_4)}{(|\vec{v}|/V^2)(VT)} \frac{VT}{(2\pi)^4} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \quad (4.27)$$

Eliminando términos semejantes, obtenemos:

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{2E_1 E_2 |\vec{v}|} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_3 - p_2 - p_4) \frac{d^3 p_2}{2E_2} \frac{d^3 p_4}{2E_4}; \quad (4.28)$$

Es necesario aclarar que en esta última ecuación podemos escribir el término  $4E_1 E_2 |\vec{v}|$  como  $F$  que es conocido como el factor de flujo de Moller, el cual es invariante ante las transformaciones de Lorentz [25] en el capítulo 5 se aborda la forma explícita de este factor. Además, es importante notar que los parámetros de normalización  $T$  y  $V$  han desaparecido. Esto tiene una explicación física: para un volumen  $V$  suficientemente grande, el proceso físico debe ser independiente de las condiciones a la frontera sobre la superficie  $V$ .

## CAPÍTULO 4. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS Y CONCEPTUALES

---

Por otra parte, ya que en los experimentos, generalmente, no observamos los espines de las partículas involucradas en la dispersión, sumaremos sobre los espines de los estados finales y promediaremos sobre los espines iniciales de las partículas interactuantes. En nuestro caso esto se logra, realizando el promedio y la suma sobre los elementos de matriz  $\mathcal{M}_{fi}$  que son los que poseen la información del espín de las partículas en cada estado final e inicial.

Ahora, es momento de utilizar los conceptos expuestos en los dos capítulos anteriores. En especial, las interacciones que experimentan los rayos cósmicos ultraenergéticos con el medio interestelar en su viaje hasta la superficie terrestre. Pensemos además que en el trayecto que siguen los rayos cósmicos pueden encontrarse no solo con materia ordinaria, ya que, si tomamos en cuenta lo expuesto en el capítulo 3 y asumimos que la materia oscura está conformada por partículas las cuales están distribuidas por el universo es posible tener interacción entre materia ordinaria y las componentes de la materia oscura, recordemos que en este trabajo proponemos al Bosón U como componente de básica de la materia oscura. Para investigar esta posibilidad estudiaremos la sección eficaz en el proceso de dispersión que se genera al colisionar un quark y un boson U. Tenemos algunas herramientas para estudiar este proceso, conocemos el lagrangiano, se asume el tipo de interacción que se presenta en el proceso (en este caso débil) y sabemos como calcular la sección eficaz de interacción tal como se presentó al principio de esta sección. Sin embargo, aún no presentamos alguna referencia para poder comparar nuestros resultados y corroborar que los cálculos obtenidos sean correctos.

El proceso de dispersión que estudiaremos se da entre un bosón masivo que puede interactuar con la materia ordinaria débilmente de manera vectorial o axial, en nuestro caso estudiaremos la interacción con un quark el cual es un fermión. Es posible ver que si como fermión en la dispersión elegimos un electrón y la masa del bosón se reduce hasta ser cero entonces lo que obtenemos es el efecto Compton, salvo por la diferencia de que la dispersión de Compton se da como un efecto en QED mientras que el proceso que nosotros estamos analizando se da mediante la fuerza débil, dicha diferencia se ve en las constantes de interacción. El efecto Compton es un proceso que se da puramente electromagnética entre un electrón y un fotón  $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$  y el proceso de dispersión que nos interesa tiene la forma  $Uq \rightarrow Uq$  de manera que recuperar el efecto Compton a partir de nuestros resultados puede ser un factor para tener certidumbre de que estamos en el camino correcto.

### 4.4. Efecto Compton

Podemos comenzar por explicar que el efecto Compton consiste en la dispersión de fotones u ondas electromagnéticas debido a una partícula cargada en una colisión elástica relativista en la cual la longitud de onda  $\lambda$  del fotón antes del proceso es distinta de la observada después de la dispersión. Este fenómeno fue descubierto en

## CAPÍTULO 4. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS Y CONCEPTUALES

---

1922 por Arthur H. Compton [24]. Es importante discutir los resultados del efecto Compton en este momento, pues como ya se dijo en la sección anterior, será utilizado como referencia para comparar nuestros resultados debido a que nuestro propósito es estudiar un problema semejante aunque en nuestro caso tendremos que nuestro bosón  $U$  puede o no tener masa. En este caso el efecto Compton puede ser descrito cualitativamente como un caso particular del que nosotros estamos abordando cuando la masa del bosón  $U$  es cero.

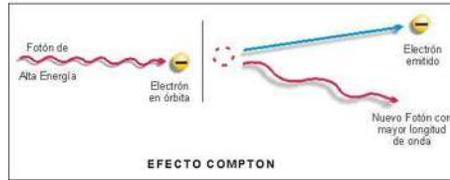


Figura 4.3: Diagrama de la colisión entre un fotón y un electrón antes y después de la dispersión

En la dispersión de Compton, además de un cambio en la dirección de la onda electromagnética, del fotón incidente, hay un cambio en su energía, pues cede cierta cantidad al electrón con el que interactúa. Para calcular la cantidad de energía cedida es necesario hacer uso del concepto de dualidad onda-partícula dado por la mecánica cuántica, de esta forma podemos relacionar la energía de nuestro fotón con la longitud de onda del mismo de la siguiente forma:

$$E = \frac{hc}{\lambda},$$

resulta que, el cambio en la longitud de onda durante la dispersión es una medida del cambio energético sufrido en la colisión. Sabemos entonces que el cambio en la longitud de onda es [24]:

$$\Delta\lambda = \frac{(1 - \cos\theta)}{m} \quad (4.29)$$

Recordando que la energía está dada por la relación  $E = \frac{1}{\lambda}$  en unidades naturales, no es difícil ver que de la ecuación (4.20), obtendremos:

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{m}(1 - \cos\theta)}. \quad (4.30)$$

Es posible, además, analizar este fenómeno utilizando las reglas de Feynman. A nivel árbol, la figura (4.2) muestra los diagramas a nivel árbol para el efecto Compton. Es importante analizar ambos diagramas ya que, como podemos ver, ambos representan el mismo fenómeno observacional aunque la manera en que ocurren es distinta.

## CAPÍTULO 4. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS Y CONCEPTUALES

---

Aplicando las reglas previamente vistas podemos encontrar la matriz de dispersión de probabilidad para cada diagrama mostrado en la figura 4.2 a y 4.2 b, respectivamente:

$$-i\mathcal{M}_a = \bar{u}(p')ie\gamma^\mu \frac{i}{\gamma^\epsilon q_\epsilon - m} ie\gamma^\nu u(p)\xi_\nu^*(k')\xi_\mu(k) \quad (4.31)$$

$$-i\mathcal{M}_b = \bar{u}(p')ie\gamma^\mu \frac{i}{\gamma^\epsilon q_\epsilon - m} ie\gamma^\nu u(p)\xi_\mu^*(k')\xi_\nu(k) \quad (4.32)$$

Con estos elementos de matriz y las ecuaciones (4.17) y (4.21) podemos calcular la sección eficaz de dispersión para la reacción de la figura 4.2. Debido a que ese proceso se realizará en el siguiente capítulo de manera un poco más detallada en esta sección nos limitaremos a mostrar los resultados del procedimiento, primeramente la sección eficaz diferencial queda de la siguiente forma:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{2(4\pi)^2} \left(\frac{E'}{mE}\right)^2 \left[\frac{E}{E'} + \frac{E'}{E} - \sin^2\theta\right], \quad (4.33)$$

a continuación mostramos la gráfica del comportamiento de la sección eficaz diferencial del efecto Compton para distintos ángulos de dispersión y distintas energías.

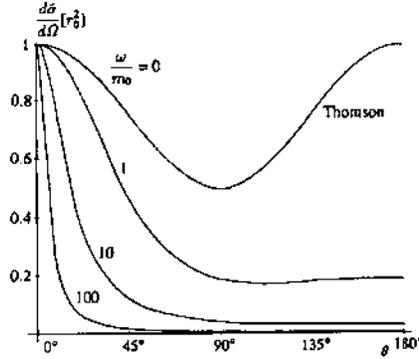


Figura 4.4: Sección eficaz diferencial del efecto Compton para distintos valores del ángulo; donde  $r_0 = \frac{E}{m}$ , gráfica tomada de [24]

Veamos que el parámetro  $r_0 = \frac{E}{m}$  relaciona la energía del haz incidente con la masa del electrón  $m$ , por lo que la línea que aparece en la parte superior de la gráfica es el caso en que  $E \ll m$ , vemos que cuando esto sucede la ecuación (4.31) se convierte en  $E' \sim E$ , o lo que es lo mismo  $\theta \rightarrow 0$ , de manera que al sustituir en (4.34) obtenemos:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{2m^2(4\pi)^2} (1 + \cos^2\theta);$$

como podemos ver de la expresión anterior se tiene un comportamiento simétrico para  $\theta$ , lo cual se ve gráficamente en la figura (4.4). Por otra parte, tenemos el caso

en que  $E \lg m$ , cuando esto pasa obtenemos que la ecuación (4.31) tomo la forma  $E' = \frac{m}{1-\cos\theta}$  de modo que la sección eficaz diferencial adquiere la forma:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{2m^2(4\pi)^2} \frac{m}{4E} \frac{1}{1-\cos\theta};$$

vemos que en este caso no se tiene un comportamiento simétrico, ya que, adquiere su valor mayor cuando el ángulo  $\theta$  se aproxima a ser cero y su menor valor cuando el ángulo se acerca a  $\pi$ . Este comportamiento se va haciendo más notorio a medida que el factor  $r_0$  aumenta su valor numérico.

## 4.5. Variables de Mandelstam

Para introducir estas variables debemos tener presente la figura (4.1) la cual muestra la dispersión de dos partículas. En estos casos esperamos dos variables cinemáticas independientes, por ejemplo, la energía de la partícula incidente y el ángulo de dispersión. Por otra parte es posible y útil expresar la matriz de dispersión invariante  $\mathcal{M}$  como función de variables invariantes bajo las transformaciones de Lorentz. Para lograr esto contamos con los cuadrimomentos, por lo que las variables invariantes son los productos escalares  $p_A \cdot p_B$ ,  $p_A \cdot p_C$ ,  $p_A \cdot p_D$ ,  $p_B \cdot p_C$ ,  $p_B \cdot p_D$ ,  $p_C \cdot p_D$ ,  $p_i^2 = m_i^2$  y la conservación de la energía -momento formada entre parejas de cuadrimomentos que tiene la forma  $p_A + p_B = p_C + p_D$ . Es fácil notar que no todas las relaciones anteriores son invariantes, convencionalmente lo común es usar las variables de Mandelstam.

$$\begin{aligned} S &= (p_A + p_B)^2, \\ t &= (p_A - p_C)^2, \\ U &= (p_A - p_D)^2, \end{aligned} \tag{4.34}$$

Como consecuencia del hecho que  $p_i^2 = m_i^2$  y de la conservación de la energía sabemos que se cumple la propiedad [25]:

$$S^2 + t^2 + U^2 = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2. \tag{4.35}$$

Las letras con las que se nombran las variables de Mandelstam también suelen ser utilizadas para identificar las posibles maneras en que se da la dispersión, el canal  $S$ , el canal  $U$  y el canal  $t$ .

## CAPÍTULO 4. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS Y CONCEPTUALES

---

# Capítulo 5

## Propuesta

Como ya se mencionó en la sección anterior asumiremos que la materia oscura está formada por bosones U y cuya interacción con fermiones fundamentales del Modelo Estándar está dada mediante reacciones tipo Compton, como en la figura 5.1. Para este estudio calcularemos la sección eficaz del proceso de dispersión utilizando el lagrangiano que fue descrito en la sección (3.7). El proceso está pensado para la colisión de rayos cósmicos ultraenergéticos provenientes de distintas partes del universo con Bosones tipo U que pudieran estar presentes como materia oscura en nuestra galaxia. Sin embargo, para facilitar el cálculo, mediante un cambio de sistema de referencia, analizamos el caso en que el bosón U es el que se mueve y tenemos a los fermiones estáticos. Puesto que los rayos cósmicos están formados por núcleos atómicos y estos nucleones, que a su vez están formados por quarks, la reacción a estudiar es la siguiente:

$$B + q \rightarrow q + B, \tag{5.1}$$

es decir la dispersión de un bosón U con un quark. El diagrama de Feynman correspondiente a este proceso se muestra a continuación.

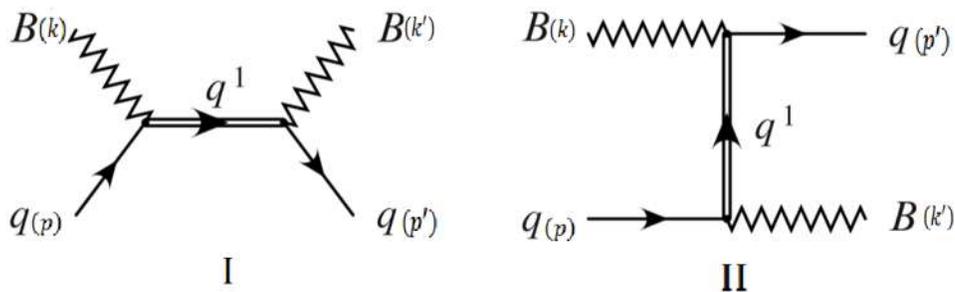


Figura 5.1: Diagramas de Feynman para la dispersión del Bosón U con un quark

## CAPÍTULO 5. PROPUESTA

---

En los diagramas de la figura (5.1) aparece en la línea interna un fermión pesado  $q^1$  este es un fermión pesado que existe en el marco de las teorías de Kaluza Klein como por ejemplo los fermiones espejo.

Utilizando las reglas de Feynman para los diagramas de la figura 5.1. podemos construir el elemento de matriz  $\mathcal{M}_{if}$ , el cual, como ya vimos en el capítulo anterior, es de gran importancia para poder conocer la sección eficaz del proceso que estamos analizando. Podemos ver la presencia de un fermión  $q^1$  pesado en la línea interna del diagrama del proceso, por lo que debemos utilizar la regla (4.19) para escribir el propagador correspondiente, sin embargo, no conocemos directamente el valor del cuadrimento de nuestro fermión intermediario. Para esto utilizamos las reglas de conservación de energía-momento de este modo, si llamamos  $T$  al cuadrimento del fermión intermediario, para el diagrama I,  $T = k + p$ , mientras que para el diagrama II,  $T = p - k'$ . Teniendo todo lo anterior en mente, los elementos de matriz resultantes para el diagrama 5.1 I son:

$$\mathcal{M}_1 = \bar{u}(p')\gamma^\nu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^{\nu*}(k') \left( \frac{-ig^2}{\gamma_\mu(k+p)\mu - N} \right) \xi^\mu(k)\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)u(p), \quad (5.2)$$

mientras que los elementos de matriz pertenecientes al segundo diagrama son:

$$\mathcal{M}_2 = \bar{u}(p')\gamma^\nu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^\nu(k) \left( \frac{-ig^2}{\gamma_\mu(p-k')\mu - N} \right) \xi^{\mu*}(k')\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)u(p), \quad (5.3)$$

para ambas expresiones,  $N$  es la masa del fermión espejo responsable de mediar los procesos de dispersión y los términos  $g_V$  y  $g_A$  son las constantes de los términos vectorial y axial respectivamente. Por otra parte, de la interacción el factor  $ig^2$  es la constante de acoplamiento de la interacción y, por lo tanto, es posible sacarlo como término común en la expresión anterior. Podemos desarrollar el propagador de las expresiones (5.2) y (5.3) de la siguiente forma:[24].

$$\frac{-1}{\gamma^\mu T_\mu - N} * \frac{\gamma^\epsilon T_\epsilon + N}{\gamma^\alpha T_\alpha + N} = \frac{\gamma^\epsilon T_\epsilon + N}{(\gamma^\alpha T_\alpha + N)(\gamma^\mu T_\mu - N)}, \quad (5.4)$$

desarrollando el denominador obtenemos:

$$(\gamma^\alpha T_\alpha - N)(\gamma^\mu T_\mu + N) = T^2 - N^2. \quad (5.5)$$

Podemos ahora sustituir (5.4) y (5.5) en (5.2) y (5.3), sin embargo, por lo pronto trabajaremos solo con  $\mathcal{M}_1$ , para obtener:

$$\mathcal{M}_1 = \frac{-ig^2}{(k+p)^2 - N^2} [\bar{u}(p')\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^{\nu*}(k')[\gamma_\epsilon(k+p)^\epsilon - N]\xi^\mu(k)\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)u(p)]. \quad (5.6)$$

Debemos encontrar ahora su matriz adjunta, para esto debemos utilizar las siguientes relaciones:

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0, \quad (5.7)$$

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \gamma_0, \quad (5.8)$$

$$\xi^{\nu*} = \xi^{\nu\dagger}, \quad (5.9)$$

$$(\gamma_0)^2 = \mathbf{I}, \quad (5.10)$$

$$\gamma_0^\dagger = \gamma_0, \quad (5.11)$$

$$\gamma^5 = \gamma^{5\dagger}, \quad (5.12)$$

además, debemos considerar:

$$(\psi(x) \gamma_\mu)^\dagger = \gamma_\mu^\dagger \psi^\dagger. \quad (5.13)$$

Por último necesitamos la relación de conmutacion entre las matrices gamma

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -g_{\mu\nu} \mathbb{I}_4, \quad (5.14)$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0. \quad (5.15)$$

Al aplicar el operador adjunto a la matriz  $\mathcal{M}_1$  obtenemos:

$$\mathcal{M}_1^\dagger = \left[ \frac{-ig^2}{(k+p)^2 - N^2} [\bar{u}(p') \gamma_\nu (g_V - g_A \gamma^5) \xi^{\nu*}(k') [\gamma_\epsilon (k+p)^\epsilon + N] \xi^\mu(k) \gamma_\mu (g_V - g_A \gamma^5) u(p)] \right]^\dagger$$

esta última ecuación puede dividirse en dos factores al hacer el producto del binomio que se tiene justo al centro de la expresión:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1^\dagger &= \left\{ \frac{-ig^2}{(k+p)^2 - N^2} [\bar{u}(p') \gamma_\nu (g_V - g_A \gamma^5) \xi^{\nu*}(k') \gamma_\epsilon (k+p)^\epsilon \xi^\mu(k) \gamma_\mu (g_V - g_A \gamma^5) u(p)] \right\}^\dagger \\ &+ \left\{ \frac{-ig^2 N}{(k+p)^2 - N^2} [\bar{u}(p') \gamma_\nu (g_V - g_A \gamma^5) \xi^{\nu*}(k') \xi^\mu(k) \gamma_\mu (g_V - g_A \gamma^5) u(p)] \right\}^\dagger \\ &= \mathcal{M}_{1a}^\dagger + \mathcal{M}_{1b}^\dagger \end{aligned} \quad (5.16)$$

Utilizaremos las relaciones (5.7) a (5.13) con el término  $\mathcal{M}_{1a}^\dagger$  de la expresión (5.16) entendiendo que el modo de tratar el término  $\mathcal{M}_{1b}^\dagger$  es análogo a lo que vamos a realizar:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{1a}^\dagger &= \left[ \frac{-ig^2}{(k+p)^2 - N^2} [\bar{u}(p')\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^{\nu*}(k')\gamma_\epsilon(k+p)^\epsilon\xi^\mu(k)\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)u(p)] \right]^\dagger \\
&= \frac{ig^2(k+p)^\epsilon}{(k+p)^2 - N^2} [u^\dagger(p)(\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5))^\dagger\xi^{\mu\dagger}(k)\gamma_0\gamma_\epsilon\gamma_0\xi^\nu(k')(\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5))^\dagger\bar{u}^\dagger(p')] \\
&= \frac{ig^2(k+p)^\epsilon}{(k+p)^2 - N^2} [u^\dagger(p)(g_V - g_A\gamma^5)\gamma_\mu^\dagger\xi^{\mu*}(k)\gamma_0\gamma_\epsilon\gamma_0\xi^\nu(k')(g_V - g_A\gamma^5)\gamma_\nu^\dagger((u)^\dagger(p')\gamma_0)^\dagger] \\
&= \frac{ig^2(k+p)^\epsilon}{(k+p)^2 - N^2} [u^\dagger(p)(g_V - g_A\gamma^5)\gamma_0\gamma_\mu\gamma_0\xi^{\mu*}(k)\gamma_0\gamma_\epsilon\gamma_0\xi^\nu(k')(g_V - g_A\gamma^5)\gamma_0\gamma_\nu\gamma_0u(p')] \\
&= \frac{ig^2(k+p)^\epsilon}{(k+p)^2 - N^2} [u^\dagger(p)\gamma_0\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^{\mu*}(k)\gamma_0\gamma_0\gamma_\epsilon\gamma_0\gamma_0\gamma_\nu\xi^\nu(k')(g_V - g_A\gamma^5)\gamma_0\gamma_0u(p')] \\
&= \frac{ig^2(k+p)^\epsilon}{(k+p)^2 - N^2} [\bar{u}(p)\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^{\mu*}(k)\gamma_\epsilon\gamma_\nu\xi^\nu(k')(g_V - g_A\gamma^5)u(p')].
\end{aligned}$$

Después de tratar el primer y el segundo término de  $\mathcal{M}_1^\dagger$  obtenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1^\dagger &= \frac{ig^2(k+p)^\epsilon}{(k+p)^2 - N^2} [\bar{u}(p)\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^{\mu*}(k)\gamma_\epsilon\gamma_\nu\xi^\nu(k')(g_V - g_A\gamma^5)u(p')] \\
&+ \frac{ig^2N}{(k+p)^2 - N^2} [\bar{u}(p)\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^{\mu*}(k)\gamma_\nu\xi^\nu(k')(g_V - g_A\gamma^5)u(p')]. \quad (5.17)
\end{aligned}$$

Ahora vayamos por la amplitud de probabilidad del diagrama (5.1 II). Calcular la segunda matriz de dispersión no es complicado si partimos de la expresión (5.3) y hacemos uso de los recurso algebraicos utilizados en el tratamiento de la matriz  $\mathcal{M}_1$ . Posteriormente podemos utilizar el mismo procedimiento utilizado para llegar a la expresión (5.16) pero ahora partiendo de (5.3) y encontrar  $\mathcal{M}_2^\dagger$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2^\dagger &= \frac{ig^2(p-k')^\epsilon}{(p-k')^2 - N^2} [\bar{u}(p)\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^\mu(k')\gamma_\epsilon\gamma_\nu\xi^{\nu*}(k)(g_V - g_A\gamma^5)u(p')] \\
&+ \frac{ig^2N}{(p-k')^2 - N^2} [\bar{u}(p)\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^\mu(k)\gamma_\nu\xi^{\nu*}(k)(g_V - g_A\gamma^5)u(p')]. \quad (5.18)
\end{aligned}$$

Debemos recordar que estamos interesados en el cálculo de la sección eficaz, de manera que lo que nosotros queremos conocer en realidad es el módulo al cuadrado de la amplitud invariante  $\mathcal{M}_{if}$ . Como podemos recordar nosotros tenemos dos posibles procesos para la dispersión y a cada proceso se le ha asociado un elemento de matriz distinto distinto, en este caso:  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$ . Por lo tanto, el cuadrado de la matriz tendrá la siguiente forma:

$$|\mathcal{M}_{if}|^2 = (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2) * (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)^\dagger, \quad (5.19)$$

$$|\mathcal{M}_{if}|^2 = |\mathcal{M}_1|^2 + |\mathcal{M}_2|^2 + \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2^\dagger + \mathcal{M}_2\mathcal{M}_1^\dagger. \quad (5.20)$$

## CAPÍTULO 5. PROPUESTA

Vayamos entonces término por término y calculemos  $|\mathcal{M}_1|^2$ . Ya que  $|\mathcal{M}_1|^2 = \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1^\dagger$  basta con multiplicar las expresiones (5.17) y (5.6) teniendo en cuenta hacer la siguiente sustitución de índices en (5.17)

$$\begin{aligned} \epsilon &\rightarrow \omega \\ \nu &\rightarrow \alpha \\ \mu &\rightarrow \beta \end{aligned} \tag{5.21}$$

para obtener como resultado del producto:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_1|^2 &= \frac{g^4(k+p)^\epsilon(k+p)^\omega}{[(k+p)^2 - N^2]^2} [\bar{u}(p')\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^{\nu*}(k')\gamma_\epsilon\xi^\mu(k)\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma^5)\xi^{\alpha*}(k)\xi^\beta(k')\gamma_\omega\gamma_\beta(g_V - g_A\gamma^5)u(p')] \\ &+ \frac{g^4(k+p)^\epsilon N}{[(k+p)^2 - N^2]^2} [\bar{u}(p')\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^{\nu*}(k')\gamma_\epsilon\xi^\mu(k)\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma^5)\xi^{\alpha*}(k)\xi^\beta(k')\gamma_\beta(g_V - g_A\gamma^5)u(p')] \\ &+ \frac{g^4(k+p)^\omega N}{[(k+p)^2 - N^2]^2} [\bar{u}(p')\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^{\nu*}(k')\xi^\mu(k)\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma^5)\xi^{\alpha*}(k)\xi^\beta(k')\gamma_\omega\gamma_\beta(g_V - g_A\gamma^5)u(p')] \\ &+ \frac{g^4 N^2}{[(k+p)^2 - N^2]^2} [\bar{u}(p')\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^{\nu*}(k')\xi^\mu(k)\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma^5)\xi^{\alpha*}(k)\xi^\beta(k')\gamma_\beta(g_V - g_A\gamma^5)u(p')] \end{aligned} \tag{5.22}$$

De la misma manera en que encontramos (5.19), es posible partiendo de (5.18) encontrar  $|\mathcal{M}_2|^2$

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_2|^2 &= \frac{g^4(p-k')^\epsilon(p-k')^\omega}{[(p-k')^2 - N^2]^2} [\bar{u}(p')\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^\nu(k)\gamma_\epsilon\xi^{\mu*}(k')\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma^5)\xi^\alpha(k')\xi^{\beta*}(k)\gamma_\omega\gamma_\beta(g_V - g_A\gamma^5)u(p')] \\ &+ \frac{g^4(p-k')^\epsilon N}{[(p-k')^2 - N^2]^2} [\bar{u}(p')\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^\nu(k)\gamma_\epsilon\xi^{\mu*}(k')\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma^5)\xi^\alpha(k')\xi^{\beta*}(k)\gamma_\beta(g_V - g_A\gamma^5)u(p')] \\ &+ \frac{g^4(p-k')^\omega N}{[(p-k')^2 - N^2]^2} [\bar{u}(p')\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^\nu(k)\xi^{\mu*}(k')\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma^5)\xi^\alpha(k')\xi^{\beta*}(k)\gamma_\omega\gamma_\beta(g_V - g_A\gamma^5)u(p')] \\ &+ \frac{g^4 N^2}{[(p-k')^2 - N^2]^2} [\bar{u}(p')\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^\nu(k)\xi^{\mu*}(k')\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma^5)\xi^\alpha(k')\xi^{\beta*}(k)\gamma_\beta(g_V - g_A\gamma^5)u(p')] \end{aligned} \tag{5.23}$$

De manera similar obtenemos los términos cruzados. Para reducir la escritura de la expresión utilizaremos las variables de mandelstam definidas en la sección anterior de modo que si vemos nuevamente la figura 5.1, podemos ver que  $S = (k+p)^2$  y  $U = (p-k')^2$  es decir el proceso I se da mediante el canal  $S$  mientras que el II se da mediante el canal  $U$ . Ahora sí comencemos por calcular  $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^\dagger$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^\dagger &= \frac{g^4}{(U-N^2)} \{ (k+p)^\epsilon(p-k')^\omega [\bar{u}(p')\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^{\nu*}(k')\gamma_\epsilon\xi^\mu(k)\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma^5)\xi^\alpha(k')\xi^{\beta*}(k)\gamma_\omega\gamma_\beta(g_V - g_A\gamma^5)u(p')] \\ &+ (k+p)^\epsilon N [\bar{u}(p')\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^{\nu*}(k')\gamma_\epsilon\xi^\mu(k)\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma^5)\xi^\alpha(k')\xi^{\beta*}(k)\gamma_\beta(g_V - g_A\gamma^5)u(p')] \\ &+ (p-k')^\omega N [\bar{u}(p')\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^{\nu*}(k')\xi^\mu(k)\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma^5)\xi^\alpha(k')\xi^{\beta*}(k)\gamma_\omega\gamma_\beta(g_V - g_A\gamma^5)u(p')] \\ &+ N^2 [\bar{u}(p')\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^{\nu*}(k')\xi^\mu(k)\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma^5)\xi^\alpha(k')\xi^{\beta*}(k)\gamma_\omega\gamma_\beta(g_V - g_A\gamma^5)u(p')] \} \frac{1}{(S-N^2)} \end{aligned} \tag{5.24}$$

Y podemos calcular el adjunto de la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^\dagger &= \frac{g^4}{(U-N^2)} \{ (p-k')^\epsilon(k+p)^\omega [\bar{u}(p')\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^\nu(k)\gamma_\epsilon\xi^{\mu*}(k')\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma^5)\xi^{\alpha*}(k)\xi^\beta(k')\gamma_\omega\gamma_\beta(g_V - g_A\gamma^5)u(p')] \\ &+ (p-k')^\epsilon N [\bar{u}(p')\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^\nu(k)\gamma_\epsilon\xi^{\mu*}(k')\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma^5)\xi^{\alpha*}(k)\xi^\beta(k')\gamma_\beta(g_V - g_A\gamma^5)u(p')] \\ &+ (k+p)^\omega N [\bar{u}(p')\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^\nu(k)\xi^{\mu*}(k')\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma^5)\xi^{\alpha*}(k)\xi^\beta(k')\gamma_\omega\gamma_\beta(g_V - g_A\gamma^5)u(p')] \\ &+ N^2 [\bar{u}(p')\gamma_\nu(g_V - g_A\gamma^5)\xi^\nu(k)\xi^{\mu*}(k')\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma_\alpha(g_V - g_A\gamma^5)\xi^{\alpha*}(k)\xi^\beta(k')\gamma_\beta(g_V - g_A\gamma^5)u(p')] \} \frac{1}{(S-N^2)} \end{aligned} \tag{5.25}$$

## CAPÍTULO 5. PROPUESTA

---

Como podemos observar cada uno de los cuatro términos que conforman la matriz total de probabilidad puede ser tratado por separado.

Consideremos que trabajamos con haces no polarizados de bosones U y fermiones. Así, es necesario, promediar entre todos los posibles valores de polarización del Bosón U, que en este caso son tres y de los fermiones iniciales, que para nuestro caso son dos, en el promedio aparecerá un factor de  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ . Considerando todos los estados de polarización finales posible debemos sumar sobre los espines de los estados finales.

Por otra parte, para la suma sobre los espines del producto de un espinor de Dirac con su conjugado usaremos:

$$\sum_s u(p)\bar{u}(p) = \gamma^\mu p_\mu + m, \quad (5.26)$$

siendo  $m$  la masa del fermión representado por el espinor, mientras que para los bosones:

$$\sum_\lambda \xi_\mu(q)\xi_\alpha^*(q) = -g_{\mu\alpha} + \frac{q_\mu q_\alpha}{M^2}, \quad (5.27)$$

donde  $M$  es la masa del bosón. Notemos que si realizamos el producto de  $\mathcal{M}_{1a}\mathcal{M}_{1a}^\dagger$  y sumamos sobre los estados finales y las polarizaciones como acabamos de mencionar:

$$\begin{aligned} \sum \mathcal{M}_{1a}\mathcal{M}_{1a}^\dagger &= \sum \frac{g^4(k+p)^\epsilon(k+p)^\omega}{(S-N^2)^2} \xi^\mu(k)\xi^{\alpha*}(k)\xi^{\nu*}(k')\xi^\beta(k') \\ &\times [\bar{u}(p')\gamma_\nu(g_v - g_A\gamma^5)\gamma_\epsilon\gamma_\mu(g_v - g_A\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma_\alpha\gamma_\omega\gamma_\beta(g_v - g_A\gamma^5)u(p')] \\ &= \frac{g^4(k+p)^\epsilon(k+p)^\omega}{(S-N^2)^2} (-g^{\beta\nu} + \frac{k'^\nu k'^\beta}{M^2})(-g^{\mu\alpha} + \frac{k^\mu k^\alpha}{M^2}) \\ &\times \sum [\bar{u}(p')\gamma_\nu(g_v - g_A\gamma^5)\gamma_\epsilon\gamma_\mu(g_v - g_A\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma_\alpha\gamma_\omega\gamma_\beta(g_v - g_A\gamma^5)u(p')] \end{aligned}$$

el último factor lo podemos ver como un producto matricial:

$$\begin{aligned} M &= \sum_k \bar{u}(p')_k [\gamma_\nu(g_v - g_A\gamma^5)\gamma_\epsilon\gamma_\mu(g_v - g_A\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma_\alpha\gamma_\omega\gamma_\beta(g_v - g_A\gamma^5)u(p')]_k \\ &= Tr[\gamma_\nu(g_v - g_A\gamma^5)\gamma_\epsilon\gamma_\mu(g_v - g_A\gamma^5)u(p)\bar{u}(p)\gamma_\alpha\gamma_\omega\gamma_\beta(g_v - g_A\gamma^5)u(p')\bar{u}(p')] \quad (5.28) \end{aligned}$$

Aplicando las propiedades (5.26), (5.27) y la propiedad de la traza podemos obtener el siguiente elemento de matriz de probabilidad Promedio  $|\mathcal{M}_1|^2$ :

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}_1|^2} &= \frac{g^4}{6} \left(-g^{\beta\nu} + \frac{k'^\nu k'^\beta}{M^2}\right) \left(-g^{\mu\alpha} + \frac{k^\mu k^\alpha}{M^2}\right) \frac{(k+p)^\epsilon (k+p)^\omega}{(S-N^2)^2} \\
&\times \text{Tr}[\gamma_\nu (g_\nu - g_A \gamma^5) \gamma_\epsilon \gamma_\mu (g_\nu - g_A \gamma^5) (\gamma_\lambda p^\lambda + m) \gamma_\alpha (g_\nu - g_A \gamma^5) \gamma_\omega \gamma_\beta (g_\nu - g_A \gamma^5) (\gamma_\delta p'^\delta + m)] \\
&+ \frac{g^4}{6} \left(-g^{\beta\nu} + \frac{k'^\nu k'^\beta}{M^2}\right) \left(-g^{\mu\alpha} + \frac{k^\mu k^\alpha}{M^2}\right) \frac{(k+p)^\epsilon N}{(S-N^2)^2} \\
&\times \text{Tr}[\gamma_\nu (g_\nu - g_A \gamma^5) \gamma_\epsilon \gamma_\mu (g_\nu - g_A \gamma^5) (\gamma_\lambda p^\lambda + m) \gamma_\alpha (g_\nu - g_A \gamma^5) \gamma_\beta (g_\nu - g_A \gamma^5) (\gamma_\delta p'^\delta + m)] \\
&+ \frac{g^4}{6} \left(-g^{\beta\nu} + \frac{k'^\nu k'^\beta}{M^2}\right) \left(-g^{\mu\alpha} + \frac{k^\mu k^\alpha}{M^2}\right) \frac{(k+p)^\omega N}{(S-N^2)^2} \\
&\times \text{Tr}[\gamma_\nu (g_\nu - g_A \gamma^5) \gamma_\mu (g_\nu - g_A \gamma^5) (\gamma_\lambda p^\lambda + m) \gamma_\alpha (g_\nu - g_A \gamma^5) \gamma_\omega \gamma_\beta (g_\nu - g_A \gamma^5) (\gamma_\delta p'^\delta + m)] \\
&+ \frac{g^4}{6} \left(-g^{\beta\nu} + \frac{k'^\nu k'^\beta}{M^2}\right) \left(-g^{\mu\alpha} + \frac{k^\mu k^\alpha}{M^2}\right) \frac{N^2}{(S-N^2)^2} \\
&\times \text{Tr}[\gamma_\nu (g_\nu - g_A \gamma^5) \gamma_\mu (g_\nu - g_A \gamma^5) (\gamma_\lambda p^\lambda + m) \gamma_\alpha (g_\nu - g_A \gamma^5) \gamma_\beta (g_\nu - g_A \gamma^5) (\gamma_\delta p'^\delta + m)] \tag{5.29}
\end{aligned}$$

Para calcular el término  $\overline{|\mathcal{M}_2|^2}$  el proceso a seguir es el mismo, y se puede obtener de  $\overline{|\mathcal{M}_1|^2}$  aplicando los siguientes cambios:

$$\begin{aligned}
\left(-g^{\beta\nu} + \frac{k'^\beta k'^\nu}{M^2}\right) \left(-g^{\mu\alpha} + \frac{k^\mu k^\alpha}{M^2}\right) &\rightarrow \left(-g^{\beta\nu} + \frac{k^\nu k^\beta}{M^2}\right) \left(-g^{\mu\alpha} + \frac{k'^\mu k'^\alpha}{M^2}\right) \\
S &\rightarrow U \\
(k+p) &\rightarrow (p-k') \tag{5.30}
\end{aligned}$$

Los términos cruzados se obtienen con el mismo procedimiento, para mostrar los resultados podemos expresar  $\overline{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^\dagger}$  y posteriormente hacer notar los cambios en algunos factores:

$$\begin{aligned}
\overline{M_2 \mathcal{M}_1^\dagger} &= \frac{g^4}{6} \left(-g^{\alpha\nu} + \frac{k'^\nu k'^\alpha}{M^2}\right) \left(-g^{\mu\beta} + \frac{k^\mu k^\beta}{M^2}\right) \frac{(k+p)^\epsilon (p-k')^\omega}{(S-N^2)(U-N^2)} \\
&\times \text{Tr}[\gamma_\nu (g_\nu - g_A \gamma^5) \gamma_\epsilon \gamma_\mu (g_\nu - g_A \gamma^5) (\gamma_\lambda p^\lambda + m) \gamma_\alpha (g_\nu - g_A \gamma^5) \gamma_\omega \gamma_\beta (g_\nu - g_A \gamma^5) (\gamma_\delta p'^\delta + m)] \\
&+ \frac{g^4}{6} \left(-g^{\alpha\nu} + \frac{k'^\nu k'^\alpha}{M^2}\right) \left(-g^{\mu\beta} + \frac{k^\mu k^\beta}{M^2}\right) \frac{(k+p)^\epsilon N}{(S-N^2)(U-N^2)} \\
&\times \text{Tr}[\gamma_\nu (g_\nu - g_A \gamma^5) \gamma_\epsilon \gamma_\mu (g_\nu - g_A \gamma^5) (\gamma_\lambda p^\lambda + m) \gamma_\alpha (g_\nu - g_A \gamma^5) \gamma_\beta (g_\nu - g_A \gamma^5) (\gamma_\delta p'^\delta + m)] \\
&+ \frac{g^4}{6} \left(-g^{\alpha\nu} + \frac{k'^\nu k'^\alpha}{M^2}\right) \left(-g^{\mu\beta} + \frac{k^\mu k^\beta}{M^2}\right) \frac{(p-k')^\omega N}{(S-N^2)(U-N^2)} \\
&\times \text{Tr}[\gamma_\nu (g_\nu - g_A \gamma^5) \gamma_\mu (g_\nu - g_A \gamma^5) (\gamma_\lambda p^\lambda + m) \gamma_\alpha (g_\nu - g_A \gamma^5) \gamma_\omega \gamma_\beta (g_\nu - g_A \gamma^5) (\gamma_\delta p'^\delta + m)] \\
&+ \frac{g^4}{6} \left(-g^{\alpha\nu} + \frac{k'^\nu k'^\alpha}{M^2}\right) \left(-g^{\mu\beta} + \frac{k^\mu k^\beta}{M^2}\right) \frac{N^2}{(S-N^2)(U-N^2)} \\
&\times \text{Tr}[\gamma_\nu (g_\nu - g_A \gamma^5) \gamma_\mu (g_\nu - g_A \gamma^5) (\gamma_\lambda p^\lambda + m) \gamma_\alpha (g_\nu - g_A \gamma^5) \gamma_\beta (g_\nu - g_A \gamma^5) (\gamma_\delta p'^\delta + m)] \tag{5.31}
\end{aligned}$$

Aunque en esta ocasión los cambios que utilizaremos para obtener  $\overline{\mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^\dagger}$  a partir de  $\overline{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2^\dagger}$  son:

$$\begin{aligned}
k^\mu k^\beta &\rightarrow k'^\mu k'^\beta \\
k'^\nu k'^\alpha &\rightarrow k^\nu k^\alpha \\
(k+p) &\rightarrow (p-k') \tag{5.32}
\end{aligned}$$

## CAPÍTULO 5. PROPUESTA

---

Como podemos ver, en todas las trazas de las ecuaciones (5.29) y (5.31) aparece el término  $g - g_A \gamma^5$  acompañadas por matrices de Dirac (pueden ser dos o una), utilizando las propiedades detalladas en el apéndice II, tenemos que:

$$\begin{aligned} (g_V - g_A \gamma^5)^2 &= g_V^2 + g_A^2 (\gamma^5)^2 - 2g_V g_A \gamma^5 \\ &= A - B \gamma^5, \end{aligned} \quad (5.33)$$

donde  $A = g_V^2 + g_A^2 (\gamma^5)^2 = g_V^2 + g_A^2$  y  $B = 2g_V g_A \gamma^5$ . Por otra parte, tenemos:

$$\begin{aligned} (g_V - g_A \gamma^5)(g_V + g_A \gamma^5) &= g_V^2 - g_A^2 \\ &= C. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Con estas constantes y las reglas del apéndice II obtenemos la forma final de nuestra matriz de probabilidad:

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}_1|^2 &= \frac{g^4}{6} (-g^{\nu\beta} + \frac{k'^\nu k'^\beta}{M^2}) (-g^{\mu\alpha} + \frac{k^\mu k^\alpha}{M^2}) \frac{(k+p)^\epsilon (k+p)^\omega}{(S-N^2)^2} \\ &\times Tr[(A^2 + B^2) \gamma_\nu \gamma_\epsilon \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\omega \gamma_\beta \gamma_\delta p'^\delta p^\lambda - 2AB \gamma_\nu \gamma_\epsilon \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\omega \gamma_\beta \gamma^5 \gamma_\delta p'^\delta p^\lambda + (A^2 - B^2) m^2 \gamma_\nu \gamma_\epsilon \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\omega \gamma_\beta] \\ &+ \frac{g^4}{6} (-g^{\nu\beta} + \frac{k'^\nu k'^\beta}{M^2}) (-g^{\mu\alpha} + \frac{k^\mu k^\alpha}{M^2}) \frac{(k+p)^\epsilon NCAm}{(S-N^2)^2} \times Tr[\gamma_\nu \gamma_\epsilon \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\beta p^\lambda + \gamma_\nu \gamma_\epsilon \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\delta p'^\delta] \\ &+ \frac{g^4}{6} (-g^{\nu\beta} + \frac{k'^\nu k'^\beta}{M^2}) (-g^{\mu\alpha} + \frac{k^\mu k^\alpha}{M^2}) \frac{(k+p)^\omega NACm}{(S-N^2)^2} \times Tr[\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\omega \gamma_\beta p^\lambda + \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\omega \gamma_\beta \gamma_\delta p'^\delta] \\ &+ \frac{g^4}{6} (-g^{\nu\beta} + \frac{k'^\nu k'^\beta}{M^2}) (-g^{\mu\alpha} + \frac{k^\mu k^\alpha}{M^2}) \frac{N^2 C^2}{(S-N^2)^2} \times Tr[\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\delta p^\lambda p'^\delta + m^2 \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}_2|^2 &= \frac{g^4}{6} (-g^{\nu\beta} + \frac{k^\nu k^\beta}{M^2}) (-g^{\mu\alpha} + \frac{k'^\mu k'^\alpha}{M^2}) \frac{(p-k')^\epsilon (p-k')^\omega}{(U-N^2)^2} \\ &\times Tr[(A^2 + B^2) \gamma_\nu \gamma_\epsilon \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\omega \gamma_\beta \gamma_\delta p'^\delta p^\lambda - 2AB \gamma_\nu \gamma_\epsilon \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\omega \gamma_\beta \gamma^5 \gamma_\delta p'^\delta p^\lambda + (A^2 - B^2) m^2 \gamma_\nu \gamma_\epsilon \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\omega \gamma_\beta] \\ &+ \frac{g^4}{6} (-g^{\nu\beta} + \frac{k^\nu k^\beta}{M^2}) (-g^{\mu\alpha} + \frac{k'^\mu k'^\alpha}{M^2}) \frac{(p-k')^\epsilon NCAm}{(U-N^2)^2} \times Tr[\gamma_\nu \gamma_\epsilon \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\beta p^\lambda + \gamma_\nu \gamma_\epsilon \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\delta p'^\delta] \\ &+ \frac{g^4}{6} (-g^{\nu\beta} + \frac{k^\nu k^\beta}{M^2}) (-g^{\mu\alpha} + \frac{k'^\mu k'^\alpha}{M^2}) \frac{(p-k')^\omega NACm}{(U-N^2)^2} \times Tr[\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\omega \gamma_\beta p^\lambda + \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\omega \gamma_\beta \gamma_\delta p'^\delta] \\ &+ \frac{g^4}{6} (-g^{\nu\beta} + \frac{k^\nu k^\beta}{M^2}) (-g^{\mu\alpha} + \frac{k'^\mu k'^\alpha}{M^2}) \frac{N^2 C^2}{(U-N^2)^2} \times Tr[\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\delta p^\lambda p'^\delta + m^2 \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_1 \mathcal{M}_2^\dagger &= \frac{g^4}{6} (-g^{\nu\alpha} + \frac{k'^\nu k'^\alpha}{M^2}) (-g^{\mu\beta} + \frac{k^\mu k^\beta}{M^2}) \frac{(k+p)^\epsilon (p-k')^\omega}{(S-N^2)(U-N^2)} \\ &\times Tr[(A^2 + B^2) \gamma_\nu \gamma_\epsilon \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\omega \gamma_\beta \gamma_\delta p'^\delta p^\lambda - 2AB \gamma_\nu \gamma_\epsilon \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\omega \gamma_\beta \gamma^5 \gamma_\delta p'^\delta p^\lambda + (A^2 - B^2) m^2 \gamma_\nu \gamma_\epsilon \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\omega \gamma_\beta] \\ &+ \frac{g^4}{6} (-g^{\nu\alpha} + \frac{k'^\nu k'^\alpha}{M^2}) (-g^{\mu\beta} + \frac{k^\mu k^\beta}{M^2}) \frac{(k+p)^\epsilon NCAm}{(S-N^2)(U-N^2)} \times Tr[\gamma_\nu \gamma_\epsilon \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\beta p^\lambda + \gamma_\nu \gamma_\epsilon \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\delta p'^\delta] \\ &+ \frac{g^4}{6} (-g^{\nu\alpha} + \frac{k'^\nu k'^\alpha}{M^2}) (-g^{\mu\beta} + \frac{k^\mu k^\beta}{M^2}) \frac{(p-k')^\omega NACm}{(S-N^2)(U-N^2)} \times Tr[\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\omega \gamma_\beta p^\lambda + \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\omega \gamma_\beta \gamma_\delta p'^\delta] \\ &+ \frac{g^4}{6} (-g^{\nu\alpha} + \frac{k'^\nu k'^\alpha}{M^2}) (-g^{\mu\beta} + \frac{k^\mu k^\beta}{M^2}) \frac{N^2 C^2}{(S-N^2)(U-N^2)} \times Tr[\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\delta p^\lambda p'^\delta + m^2 \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1^\dagger} &= \frac{g^4}{6} \left(-g^{\nu\alpha} + \frac{k^\nu k^\alpha}{M^2}\right) \left(-g^{\mu\beta} + \frac{k'^\mu k'^\beta}{M^2}\right) \frac{(p-k')^\epsilon (k+p)^\omega}{(S-N^2)(U-N^2)} \\
&\times \text{Tr}[(A^2 + B^2) \gamma_\nu \gamma_\epsilon \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\omega \gamma_\beta \gamma_\delta p'^\delta p^\lambda - 2AB \gamma_\nu \gamma_\epsilon \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\omega \gamma_\beta \gamma_\delta p'^\delta p^\lambda + (A^2 - B^2) m^2 \gamma_\nu \gamma_\epsilon \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\omega \gamma_\beta] \\
&+ \frac{g^4}{6} \left(-g^{\nu\alpha} + \frac{k^\nu k^\alpha}{M^2}\right) \left(-g^{\mu\beta} + \frac{k'^\mu k'^\beta}{M^2}\right) \frac{(p-k')^\epsilon N C A m}{(S-N^2)(U-N^2)} \times \text{Tr}[\gamma_\nu \gamma_\epsilon \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\beta p^\lambda + \gamma_\nu \gamma_\epsilon \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta p'^\delta] \\
&+ \frac{g^4}{6} \left(-g^{\nu\alpha} + \frac{k^\nu k^\alpha}{M^2}\right) \left(-g^{\mu\beta} + \frac{k'^\mu k'^\beta}{M^2}\right) \frac{(k+p)^\omega N A C m}{(S-N^2)(U-N^2)} \times \text{Tr}[\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\omega \gamma_\beta p^\lambda + \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\omega \gamma_\beta p'^\delta] \\
&+ \frac{g^4}{6} \left(-g^{\nu\alpha} + \frac{k^\nu k^\alpha}{M^2}\right) \left(-g^{\mu\beta} + \frac{k'^\mu k'^\beta}{M^2}\right) \frac{N^2 C^2}{(S-N^2)(U-N^2)} \times \text{Tr}[\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\beta p^\lambda p'^\delta + m^2 \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta]
\end{aligned}$$

Es importante mencionar que los términos que estaban acompañados por una  $\gamma^5$ , en la mayoría de los casos, dejaron de aparecer debido a las reglas de las trazas o bien, a que al momento de hacer el cálculo la tarza resulta cero.

Posteriormente utilizando Mathematica e implementando el paquete Feynclac [63], se calculan los términos que aparecen en las amplitudes invariantes de probabilidad al cuadrado. Los resultados se expresarán en términos de productos de los cuadrimomentos de las partículas. Haciendo uso de las herramientas del capítulo 4 podemos dejar nuestra matriz en términos de las variables de Mandelstam.

Para este caso en particular podemos expresar de las variables de Mandelstam en términos de los cuadrimomentos que están involucrados en el proceso de dispersión.

$$\begin{aligned}
S &= (p+k)^2 \\
&= M^2 + m^2 + 2p \cdot k,
\end{aligned} \tag{5.35}$$

donde  $M$  es la masa del bosón y  $m$  la masa del fermión. Para este análisis consideraremos el sistema de referencia en que el el fermión está en reposo, de modo que  $p = (m, \vec{0})$  (recordar que estamos utilizando unidades naturales),  $k = (\omega, \vec{k}), p' = (m, \vec{p}')$  y  $k' = (\omega', \vec{k}')$ ; por lo tanto,  $2p \cdot k = 2m\omega$ , obteniendo así el valor de  $S = M^2 + m^2 + 2m\omega$ . Actuando de manera similar podemos calcular los valores de  $U$  y  $t$ .

$$U = m^2 + M^2 - 2m\omega, \tag{5.36}$$

$$t = 2M^2 - 2\omega\omega' + 2k \cdot k'. \tag{5.37}$$

Haciendo dichas sustituciones, lograremos obtener  $\overline{\mathcal{M}_{if}^2}$  como función de las energías de las partículas que interactúan, sus masas y sus momentos.

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{M}_{if}^2} &= \frac{80a^2 c^2 m^2}{(-a^2 + S)^2} - \frac{40a^2 b c^2 m^2}{(-a^2 + S)^2} - \frac{128a A c m^3}{(-a^2 + S)^2} + \frac{128a A b c m^3}{(-a^2 + S)^2} + \frac{24A^2 m^4}{(-a^2 + S)^2} - \frac{26A^2 b m^4}{(-a^2 + S)^2} + \frac{24B^2 m^4}{(-a^2 + S)^2} - \frac{26b B^2 m^4}{(-a^2 + S)^2} - \\
&\frac{2A^2 b m^8}{M^4 (-a^2 + S)^2} - \frac{2b B^2 m^8}{M^4 (-a^2 + S)^2} - \frac{4A^2 b m^6}{M^2 (-a^2 + S)^2} - \frac{4b B^2 m^6}{M^2 (-a^2 + S)^2} + \frac{48a A b c m M^2}{(-a^2 + S)^2} - \frac{16A^2 m^2 M^2}{(-a^2 + S)^2} + \frac{16A^2 b m^2 M^2}{(a^2 + S)^2} - \\
&\frac{16B^2 m^2 M^2}{(-a^2 + S)^2} + \frac{16b B^2 m^2 M^2}{(-a^2 + S)^2} - \frac{8A^2 M^4}{(-a^2 + S)^2} + \frac{16A^2 b M^4}{(-a^2 + S)^2} - \frac{8B^2 M^4}{(-a^2 + S)^2} + \frac{16b B^2 M^4}{(-a^2 + S)^2} - \frac{4a^2 b c^2 S}{(a^2 + S)^2} - \frac{32a A c m S}{(-a^2 + S)^2} -
\end{aligned}$$

## CAPÍTULO 5. PROPUESTA

$$\begin{aligned}
& \frac{16aAbcmS}{(-a^2+S)^2} + \frac{72A^2m^2S}{(-a^2+S)^2} - \frac{32A^2bm^2S}{(-a^2+S)^2} - \frac{56B^2m^2S}{(-a^2+S)^2} + \frac{24bB^2m^2S}{(-a^2+S)^2} + \frac{6A^2bm^6S}{M^4(-a^2+S)^2} + \frac{6bB^2m^6S}{M^4(-a^2+S)^2} - \frac{4a^2bc^2m^2S}{M^2(-a^2+S)^2} + \\
& \frac{12aAbcm^3S}{M^2(-a^2+S)^2} + \frac{10A^2bm^4S}{M^2(-a^2+S)^2} + \frac{10bB^2m^4S}{M^2(-a^2+S)^2} + \frac{8A^2M^2S}{(-a^2+S)^2} - \frac{24A^2bM^2S}{(-a^2+S)^2} + \frac{8B^2M^2S}{(-a^2+S)^2} - \frac{24bB^2M^2S}{(-a^2+S)^2} + \frac{6A^2bS^2}{(-a^2+S)^2} + \\
& \frac{6bB^2S^2}{(-a^2+S)^2} - \frac{6A^2bm^4S^2}{M^4(-a^2+S)^2} - \frac{6bB^2m^4S^2}{M^4(-a^2+S)^2} + \frac{4a^2bc^2S^2}{M^2(-a^2+S)^2} - \frac{12aAbcmS^2}{M^2(-a^2+S)^2} - \frac{8A^2bm^2S^2}{M^2(-a^2+S)^2} - \frac{8bB^2m^2S^2}{M^2(-a^2+S)^2} + \\
& \frac{2A^2bm^2S^3}{M^4(-a^2+S)^2} + \frac{2bB^2m^2S^3}{M^4(-a^2+S)^2} + \frac{2A^2bS^3}{M^2(-a^2+S)^2} + \frac{2bB^2S^3}{M^2(-a^2+S)^2} - \frac{8a^2c^2t}{(-a^2+S)^2} + \frac{4a^2bc^2t}{(-a^2+S)^2} + \frac{32aAcmt}{(-a^2+S)^2} - \frac{32aAbcmt}{(-a^2+S)^2} - \\
& \frac{8A^2m^2t}{(-a^2+S)^2} + \frac{4A^2bm^2t}{(-a^2+S)^2} - \frac{8B^2m^2t}{(-a^2+S)^2} + \frac{4bB^2m^2t}{(-a^2+S)^2} - \frac{2a^2bc^2m^4t}{M^4(-a^2+S)^2} + \frac{2A^2bm^6t}{M^4(-a^2+S)^2} + \frac{2bB^2m^6t}{M^4(-a^2+S)^2} - \frac{4a^2bc^2m^2t}{M^2(-a^2+S)^2} - \\
& \frac{12aAbcm^3t}{M^2(-a^2+S)^2} + \frac{2A^2bm^4t}{M^2(-a^2+S)^2} + \frac{2bB^2m^4t}{M^2(-a^2+S)^2} + \frac{8A^2M^2t}{(-a^2+S)^2} - \frac{8A^2bM^2t}{(-a^2+S)^2} + \frac{8B^2M^2t}{(-a^2+S)^2} - \frac{8bB^2M^2t}{(-a^2+S)^2} + \frac{8A^2bSt}{(-a^2+S)^2} + \\
& \frac{8bB^2St}{(-a^2+S)^2} + \frac{4a^2bc^2m^2St}{M^4(-a^2+S)^2} - \frac{4A^2bm^4St}{M^4(-a^2+S)^2} - \frac{4bB^2m^4St}{M^4(-a^2+S)^2} + \frac{4a^2bc^2St}{M^2(-a^2+S)^2} + \frac{12aAbcmSt}{M^2(-a^2+S)^2} + \frac{4A^2bm^2St}{M^2(-a^2+S)^2} + \\
& \frac{4bB^2m^2St}{M^2(-a^2+S)^2} - \frac{2a^2bc^2S^2t}{M^4(-a^2+S)^2} + \frac{2A^2bm^2S^2t}{M^4(-a^2+S)^2} + \frac{2bB^2m^2S^2t}{M^4(-a^2+S)^2} - \frac{6A^2bS^2t}{M^2(-a^2+S)^2} - \frac{6bB^2S^2t}{M^2(-a^2+S)^2} + \frac{4a^2bc^2U}{(-a^2+S)^2} + \\
& \frac{32aAcmtU}{(-a^2+S)^2} - \frac{32aAbcmU}{(-a^2+S)^2} - \frac{8A^2m^2U}{(-a^2+S)^2} + \frac{4A^2bm^2U}{(-a^2+S)^2} - \frac{8B^2m^2U}{(-a^2+S)^2} + \frac{4bB^2m^2U}{(-a^2+S)^2} + \frac{2A^2bm^6U}{M^4(-a^2+S)^2} + \frac{2bB^2m^6U}{M^4(-a^2+S)^2} + \\
& \frac{4a^2bc^2m^2U}{M^2(-a^2+S)^2} - \frac{12aAbcm^3U}{M^2(-a^2+S)^2} + \frac{2A^2bm^4U}{M^2(-a^2+S)^2} + \frac{2bB^2m^4U}{M^2(-a^2+S)^2} + \frac{8A^2M^2U}{(-a^2+S)^2} - \frac{8A^2bM^2U}{(-a^2+S)^2} + \frac{8B^2M^2U}{(-a^2+S)^2} - \frac{8bB^2M^2U}{(-a^2+S)^2} - \\
& \frac{8A^2SU}{(-a^2+S)^2} + \frac{8A^2bSU}{(-a^2+S)^2} - \frac{8B^2SU}{(-a^2+S)^2} + \frac{8bB^2SU}{(-a^2+S)^2} - \frac{6A^2bm^4SU}{M^4(-a^2+S)^2} - \frac{6bB^2m^4SU}{M^4(-a^2+S)^2} - \frac{4a^2bc^2SU}{M^2(-a^2+S)^2} + \frac{12aAbcmSU}{M^2(-a^2+S)^2} - \\
& \frac{4A^2bm^2SU}{M^2(-a^2+S)^2} - \frac{4bB^2m^2SU}{M^2(-a^2+S)^2} + \frac{6A^2bm^2S^2U}{M^4(-a^2+S)^2} + \frac{6bB^2m^2S^2U}{M^4(-a^2+S)^2} + \frac{2A^2bS^2U}{M^2(-a^2+S)^2} + \frac{2bB^2S^2U}{M^2(-a^2+S)^2} - \frac{2A^2bS^3U}{M^4(-a^2+S)^2} - \\
& \frac{2bB^2S^3U}{M^4(-a^2+S)^2} + \frac{80a^2c^2m^2}{(-a^2+U)^2} - \frac{40a^2bc^2m^2}{(-a^2+U)^2} - \frac{112aAcmt^3}{(-a^2+U)^2} + \frac{118aAbcm^3}{(-a^2+U)^2} + \frac{24A^2m^4}{(-a^2+U)^2} - \frac{26A^2bm^4}{(-a^2+U)^2} + \frac{24B^2m^4}{(-a^2+U)^2} - \frac{26bB^2m^4}{(-a^2+U)^2} - \\
& \frac{256aAbcm^5}{(-a^2+U)^2} - \frac{2A^2bm^8}{M^4(-a^2+U)^2} - \frac{2bB^2m^8}{M^4(-a^2+U)^2} + \frac{6aAbcm^5}{M^2(-a^2+U)^2} - \frac{4A^2bm^6}{M^2(-a^2+U)^2} - \frac{4bB^2m^6}{M^2(-a^2+U)^2} + \frac{96aAbcm^7}{M^2(-a^2+U)^2} - \\
& \frac{16aAcmtM^2}{(-a^2+U)^2} + \frac{52aAbcmM^2}{(-a^2+U)^2} - \frac{16A^2m^2M^2}{(-a^2+U)^2} + \frac{16A^2bm^2M^2}{(-a^2+U)^2} - \frac{16B^2m^2M^2}{(-a^2+U)^2} + \frac{16bB^2m^2M^2}{(-a^2+U)^2} + \frac{224aAbcm^3M^2}{(-a^2+U)^2} - \frac{8A^2M^4}{(-a^2+U)^2} + \frac{16A^2bM^4}{(-a^2+U)^2} + \\
& \frac{16bB^2M^4}{(-a^2+U)^2} - \frac{64aAbcmM^4}{(-a^2+U)^2} - \frac{4a^2bc^2S}{(-a^2+U)^2} + \frac{32aAcmtS}{(-a^2+U)^2} - \frac{32aAbcmS}{(-a^2+U)^2} - \frac{8A^2m^2S}{(-a^2+U)^2} + \frac{4A^2bm^2S}{(-a^2+U)^2} - \frac{8B^2m^2S}{(-a^2+U)^2} + \frac{4bB^2m^2S}{(-a^2+U)^2} + \\
& \frac{2A^2bm^6S}{M^4(-a^2+U)^2} + \frac{2bB^2m^6S}{M^4(-a^2+U)^2} - \frac{4a^2bc^2m^2S}{M^2(-a^2+U)^2} - \frac{12aAbcm^3S}{M^2(-a^2+U)^2} + \frac{2A^2bm^4S}{M^2(-a^2+U)^2} + \frac{2bB^2m^4S}{M^2(-a^2+U)^2} + \frac{8A^2M^2S}{(-a^2+U)^2} - \frac{8A^2bM^2S}{(-a^2+U)^2} + \\
& \frac{8B^2M^2S}{(-a^2+U)^2} - \frac{8bB^2M^2S}{(-a^2+U)^2} + \frac{4a^2bc^2S^2}{M^2(-a^2+U)^2} - \frac{8a^2c^2t}{(-a^2+U)^2} + \frac{4a^2bc^2t}{(-a^2+U)^2} + \frac{32aAcmt}{(-a^2+U)^2} - \frac{32aAbcmt}{(-a^2+U)^2} - \frac{8A^2m^2t}{(-a^2+U)^2} + \frac{4A^2bm^2t}{(-a^2+U)^2} - \\
& \frac{8B^2m^2t}{(-a^2+U)^2} + \frac{4bB^2m^2t}{(-a^2+U)^2} - \frac{2a^2bc^2m^4t}{M^4(-a^2+U)^2} + \frac{2A^2bm^6t}{M^4(-a^2+U)^2} + \frac{2bB^2m^6t}{M^4(-a^2+U)^2} - \frac{4a^2bc^2m^2t}{M^2(-a^2+U)^2} - \frac{12aAbcm^3t}{M^2(-a^2+U)^2} + \frac{2A^2bm^4t}{M^2(-a^2+U)^2} + \\
& \frac{2bB^2m^4t}{M^2(-a^2+U)^2} + \frac{8A^2M^2t}{(-a^2+U)^2} - \frac{8A^2bM^2t}{(-a^2+U)^2} + \frac{8B^2M^2t}{(-a^2+U)^2} - \frac{8bB^2M^2t}{(-a^2+U)^2} + \frac{4a^2bc^2m^2St}{M^4(-a^2+U)^2} + \frac{4a^2bc^2St}{M^2(-a^2+U)^2} - \frac{2a^2bc^2S^2t}{M^4(-a^2+U)^2} + \\
& \frac{4a^2bc^2U}{(-a^2+U)^2} - \frac{16aAcmtU}{(-a^2+U)^2} - \frac{26aAbcmU}{(-a^2+U)^2} + \frac{72A^2m^2U}{(-a^2+U)^2} - \frac{32A^2bm^2U}{(-a^2+U)^2} + \frac{72B^2m^2U}{(-a^2+U)^2} - \frac{32bB^2m^2U}{(-a^2+U)^2} - \frac{128aAbcm^3U}{(-a^2+U)^2} + \frac{6A^2bm^6U}{M^4(-a^2+U)^2} + \\
& \frac{6bB^2m^6U}{M^4(-a^2+U)^2} + \frac{4a^2bc^2m^2U}{M^2(-a^2+U)^2} + \frac{10A^2bm^4U}{M^2(-a^2+U)^2} + \frac{10bB^2m^4U}{M^2(-a^2+U)^2} - \frac{96aAbcm^5U}{M^2(-a^2+U)^2} + \frac{8A^2M^2U}{(-a^2+U)^2} - \frac{24A^2bM^2U}{(-a^2+U)^2} + \frac{8B^2M^2U}{(-a^2+U)^2} - \\
& \frac{24bB^2M^2U}{(-a^2+U)^2} + \frac{224aAbcm^2U}{(-a^2+U)^2} - \frac{8A^2SU}{(-a^2+U)^2} + \frac{8A^2bSU}{(-a^2+U)^2} - \frac{8B^2SU}{(-a^2+U)^2} + \frac{8bB^2SU}{(-a^2+U)^2} - \frac{6A^2bm^4SU}{M^4(-a^2+U)^2} - \frac{6bB^2m^4SU}{M^4(-a^2+U)^2} - \\
& \frac{4a^2bc^2SU}{M^2(-a^2+U)^2} + \frac{12aAbcmSU}{M^2(-a^2+U)^2} - \frac{4A^2bm^2SU}{M^2(-a^2+U)^2} - \frac{4bB^2m^2SU}{M^2(-a^2+U)^2} + \frac{8A^2btU}{(-a^2+U)^2} + \frac{8bB^2tU}{(-a^2+U)^2} - \frac{4A^2bm^4tU}{M^4(-a^2+U)^2} - \frac{4bB^2m^4tU}{M^4(-a^2+U)^2} + \\
& \frac{12aAbcmtU}{M^2(-a^2+U)^2} + \frac{4A^2bm^2tU}{M^2(-a^2+U)^2} + \frac{4bB^2m^2tU}{M^2(-a^2+U)^2} + \frac{6A^2bU^2}{(-a^2+U)^2} + \frac{6bB^2U^2}{(-a^2+U)^2} - \frac{256aAbcmU^2}{(-a^2+U)^2} - \frac{6A^2bm^4U^2}{M^4(-a^2+U)^2} - \frac{6bB^2m^4U^2}{M^4(-a^2+U)^2} -
\end{aligned}$$

## CAPÍTULO 5. PROPUESTA

$$\begin{aligned}
& \frac{6aAbcmU^2}{M^2(-a^2+U)^2} - \frac{8A^2bm^2U^2}{M^2(-a^2+U)^2} - \frac{8bB^2m^2U^2}{M^2(-a^2+U)^2} - \frac{96aAbcm^3U^2}{M^2(-a^2+U)^2} + \frac{6A^2bm^2SU^2}{M^4(-a^2+U)^2} + \frac{6bB^2m^2SU^2}{M^4(-a^2+U)^2} + \frac{2A^2bSU^2}{M^2(-a^2+U)^2} + \frac{2bB^2SU^2}{M^2(-a^2+U)^2} + \\
& \frac{2A^2bm^2tU^2}{M^4(-a^2+U)^2} + \frac{2bB^2m^2tU^2}{M^4(-a^2+U)^2} - \frac{6A^2btU^2}{M^2(-a^2+U)^2} - \frac{6bB^2tU^2}{M^2(-a^2+U)^2} + \frac{2A^2bm^2U^3}{M^4(-a^2+U)^2} + \frac{2bB^2m^2U^3}{M^4(-a^2+U)^2} + \frac{2A^2bU^3}{M^2(-a^2+U)^2} + \frac{2bB^2U^3}{M^2(-a^2+U)^2} + \\
& \frac{96aAbcmU^3}{M^2(-a^2+U)^2} - \frac{2A^2bSU^3}{M^4(-a^2+U)^2} - \frac{2bB^2SU^3}{M^4(-a^2+U)^2} + \frac{160a^2c^2m^2}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{80a^2bc^2m^2}{(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{128aAc m^3}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{192aAbcm^3}{(-a^2+S)(-a^2+U)} + \\
& \frac{108A^2bm^4}{(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{108bB^2m^4}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{4A^2bm^8}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{4bB^2m^8}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{8A^2bm^6}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} - \\
& \frac{8bB^2m^6}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{96aAbcmM^2}{(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{64A^2m^2M^2}{(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{96A^2bm^2M^2}{(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{192B^2m^2M^2}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \\
& \frac{8a^2bc^2S}{(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{48aAbcmS}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{16A^2m^2S}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{28A^2bm^2S}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{48B^2m^2S}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{36bB^2m^2S}{(-a^2+S)(-a^2+U)} + \\
& \frac{8A^2bm^6S}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{8bB^2m^6S}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{8a^2bc^2m^2S}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{12A^2bm^4S}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{12bB^2m^4S}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} - \\
& \frac{8A^2bS^2}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{8bB^2S^2}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{6A^2bm^4S^2}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{6bB^2m^4S^2}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{8a^2bc^2S^2}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} + \\
& \frac{4aAbcmS^2}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{20A^2bm^2S^2}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{12bB^2m^2S^2}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{2A^2bm^2S^3}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{2bB^2m^2S^3}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \\
& \frac{4A^2bS^3}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{4bB^2S^3}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{16a^2c^2t}{(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{8a^2bc^2t}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{32aAcmt}{(-a^2+S)(-a^2+U)} + \\
& \frac{48aAbcmt}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{16A^2m^2t}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{64A^2bm^2t}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{48B^2m^2t}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{32bB^2m^2t}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{4a^2bc^2m^4t}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \\
& \frac{4A^2bm^6t}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{4bB^2m^6t}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{8a^2bc^2m^2t}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{88aAbcm^3t}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{52A^2bm^4t}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} - \\
& \frac{36bB^2m^4t}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{64A^2M^2t}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{64B^2M^2t}{(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{16A^2St}{(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{8A^2bSt}{(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{16B^2St}{(-a^2+S)(-a^2+U)} + \\
& \frac{8bB^2St}{(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{8a^2bc^2m^2St}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{4A^2bm^4St}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{4bB^2m^4St}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{8a^2bc^2St}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} - \\
& \frac{12aAbcmSt}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{12A^2bm^2St}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{20bB^2m^2St}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{4a^2bc^2S^2t}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{4aAbcmS^2t}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \\
& \frac{2A^2bm^2S^2t}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{2bB^2m^2S^2t}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{16A^2t^2}{(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{16B^2t^2}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{16aAbcm^3t^2}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \\
& \frac{10A^2bm^4t^2}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{2bB^2m^4t^2}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{16aAbcmt^2}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{16A^2bm^2t^2}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{16bB^2m^2t^2}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} - \\
& \frac{2A^2bm^2St^2}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{2bB^2m^2St^2}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{4A^2bSt^2}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{4bB^2St^2}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{4aAbcmt^3}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \\
& \frac{2A^2bm^2t^3}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{2bB^2m^2t^3}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{8a^2bc^2U}{(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{48aAbcmU}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{16A^2m^2U}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \\
& \frac{28A^2bm^2U}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{48B^2m^2U}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{36bB^2m^2U}{(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{8A^2bm^6U}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{8bB^2m^6U}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \\
& \frac{8a^2bc^2m^2U}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{12A^2bm^4U}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{12bB^2m^4U}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{12A^2bSU}{(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{12bB^2SU}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \\
& \frac{12A^2bm^4SU}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{12bB^2m^4SU}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{8a^2bc^2SU}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{8aAbcmSU}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{16A^2bm^2SU}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} + \\
& \frac{6A^2bm^2S^2U}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{6bB^2m^2S^2U}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{2A^2bS^3U}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{2bB^2S^3U}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{16A^2tU}{(-a^2+S)(-a^2+U)} + \\
& \frac{8A^2btU}{(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{16B^2tU}{(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{8bB^2tU}{(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{4A^2bm^4tU}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{4bB^2m^4tU}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \\
& \frac{12aAbcmtU}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{12A^2bm^2tU}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{20bB^2m^2tU}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{8aAbcmStU}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{8A^2bm^2StU}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} -
\end{aligned}$$

## CAPÍTULO 5. PROPUESTA

---

$$\begin{aligned}
& \frac{4A^2 bStU}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{4bB^2 StU}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{2A^2 bm^2 t^2 U}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{2bB^2 m^2 t^2 U}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{4A^2 bt^2 U}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} \\
& \frac{4bB^2 t^2 U}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{2A^2 bSt^2 U}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{2bB^2 St^2 U}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{8A^2 bU^2}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{8bB^2 U^2}{(-a^2+S)(-a^2+U)} - \\
& \frac{6A^2 bm^4 U^2}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{6bB^2 m^4 U^2}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{4aAbcmU^2}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{20A^2 bm^2 U^2}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{12bB^2 m^2 U^2}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} + \\
& \frac{6A^2 bm^2 SU^2}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{6bB^2 m^2 SU^2}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{4aAbcmU^2}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{2A^2 bm^2 tU^2}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{2bB^2 m^2 tU^2}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \\
& \frac{2A^2 bm^2 U^3}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{2bB^2 m^2 U^3}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{4A^2 bU^3}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} + \frac{4bB^2 U^3}{M^2(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{2A^2 bSU^3}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \\
& \frac{2bB^2 SU^3}{M^4(-a^2+S)(-a^2+U)} - \frac{8B^2 M^4}{(-a^2+U)^2}
\end{aligned}$$

La expresión anterior fue tomada directamente de nuestro algoritmo en mathematica, y es importante hacer algunas aclaraciones. Primero debido a que en mathematica la variable  $N$  es protegida de modo que la sustituimos por  $a$ , mientras que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  son las variables que ya fueron definidas en términos de las constantes de interacción axial y vectorial. Se agregó además un parámetro  $b$  ya que si queremos analizar el límite cuando  $M \rightarrow 0$  los términos en los que aparece un factor  $M^{-2}$  o  $M^{-4}$  divergen, para evitar esto antes de sustituir valores, el factor  $b$  toma el valor de 0 en el límite de bosón no masivo y  $b = 1$  para el caso de bosón masivo.

### 5.1. Sección Eficaz

Para el sistema del que nos estamos ocupando utilizaremos la ecuación (4.28) para calcular la sección eficaz diferencial de la reacción estudiada y dejaremos todo en términos de las masas, las energías y los momentos de las partículas que participan en la dispersión. Así tendremos:

$$d\sigma = \frac{1}{4F} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^3 p'}{2E'} \frac{d^3 k'}{2\omega'} \delta^4(p' + k' - p - k) |\overline{\mathcal{M}}_{if}|^2; \quad (5.38)$$

donde  $|\overline{\mathcal{M}}_{if}|^2$  está dada expresada en  $(\ )(\ )$ . En el subtema anterior aclaramos a que se refiere cada una de las variables colocadas en la ecuación (5.31) a excepción de  $F$ , la cual se define en el sistema en que el fermión está en reposo como:

$$F = \sqrt{(p_A \cdot p_B) - m_A^2 m_B^2}. \quad (5.39)$$

Trabajaremos un poco esta última expresión antes de sustituirla en la expresión (5.31); utilizando los cuadrimentos de nuestra reacción obtenemos:

$$\begin{aligned}
F &= \sqrt{(p \cdot k)^2 - m^2 M^2} \\
&= \sqrt{(m\omega)^2 - m^2 M^2} \\
&= m\sqrt{\omega^2 - M^2} \\
&= m|\vec{k}|.
\end{aligned} \quad (5.40)$$

Esto nos será de mucha utilidad más adelante, por ahora, haremos algunos cambios a la expresión (5.38). Comenzaremos por realizar la integral; para lograr este objetivo primeramente necesitamos hacer uso de la siguiente expresión [25]:

$$\frac{d^3 p'}{2E'} = \int_{-\infty}^{\infty} d^4 p' \delta(p'^2 - m^2) \theta(E'). \quad (5.41)$$

Sustituyendo (5.41) en la expresión para  $d\sigma$  obtenemos:

$$d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} d^4 p' \delta(p'^2 - m^2) \theta(E') \frac{1}{4F} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^3 p'}{2E'} \frac{d^3 k'}{2\omega'} \delta^4(p' + k' - p - k) |\overline{\mathcal{M}}_{if}|^2; \quad (5.42)$$

Posteriormente integramos sobre  $E'$ . Tomando  $E' > 0$ , debido a la presencia del factor  $\theta(E')$ , e integrando sobre  $p'$  se reduce así (5.38) para obtener:

$$d\sigma = \delta(p'^2 - m^2) \frac{1}{4F} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{d^3 k'}{2\omega'} |\overline{\mathcal{M}}_{if}|^2; \quad (5.43)$$

para seguir con el proceso de integración, podemos cambiar a coordenadas esféricas. Haciendo el cambio  $d^3 k' = k'^2 dk' d\cos\theta d\phi$  y una vez hecha la sustitución integramos sobre  $\phi$  para obtener:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \delta(p'^2 - m^2) \frac{1}{8F} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{k'^2 dk' d\cos\theta d\phi}{\omega'} \overline{\mathcal{M}}^2 \\ &= \delta(p'^2 - m^2) \frac{1}{8F} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2\pi k'^2 dk' d\cos\theta}{\omega'} \overline{\mathcal{M}}^2; \end{aligned} \quad (5.44)$$

Ahora llevaremos a cabo el siguiente cambio de variables utilizando las transformaciones,  $\nu = \omega - \omega'$  y  $Q^2 = -(k - k')^2$ , recordemos que  $(k - k')^2$  ya fue calculado en la expresión (5.37) por lo que,  $Q^2 = -2M^2 + 2\omega\omega' - 2\vec{k} \cdot \vec{k}' \cos\theta$ ; por lo tanto;

$$\begin{aligned} 2\pi k'^2 dk' d\cos\theta &= \frac{\omega - \nu}{2k k'^2} d\nu dQ^2 \\ &= \frac{\omega'}{2k k'^2} d\nu dQ^2. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Finalmente, introducimos las variables de Björken

$$x = \frac{Q^2}{2p \cdot (k - k')} = \frac{Q^2}{2m\nu}, \quad (5.46)$$

$$y = \frac{p \cdot (k - k')}{p \cdot k} = \frac{\nu}{\omega} \quad (5.47)$$

Ahora, podemos nuevamente hacer un cambio de variables en la ecuación (5.45), utilizando las variables  $x$  y  $y$ ; ya que:

$$d\nu dQ^2 = 2m\omega^2 y dx dy. \quad (5.48)$$

## CAPÍTULO 5. PROPUESTA

---

Empleando las transformaciones (5.45) y (5.48) obtenemos una nueva expresión para  $d\sigma$ :

$$d\sigma = \delta(p'^2 - m^2) \frac{1}{8F} \frac{1}{4\pi} \overline{\mathcal{M}} \frac{2m\omega^2 y}{k} dy dx. \quad (5.49)$$

Ahora como último paso, es necesario trabajar un poco más con la delta de Dirac que aparece en la integral. Debido a la conservación de la energía-momento tenemos que:

$$\begin{aligned} p'^2 &= [p + (k - k')]^2 \\ &= p^2 + (k - k')^2 + 2p \cdot (k - k') \\ &= m^2 - Q^2 + 2m\nu \\ &= m^2 - 2m\omega y x + 2m\omega y \\ &= m^2 + 2m\omega y(1 - x); \end{aligned} \quad (5.50)$$

al colocar este resultado dentro de la delta de Dirac obtenemos

$$\delta(p'^2 - m^2) = \frac{1}{2m\omega y} \delta(1 - x),$$

podemos sustituir este resultado además de (5.40) en (5.48) para obtener:

$$d\sigma = \frac{1}{2m\omega y} \delta(1 - x) \frac{1}{8m|\vec{k}|} \frac{1}{4\pi} \overline{\mathcal{M}} \frac{2m\omega^2 y}{k} dy dx, \quad (5.51)$$

integrando sobre el parámetro  $x$ , obtenemos:

$$d\sigma = \frac{\overline{\mathcal{M}}^2}{32\pi} \frac{\omega}{m|\vec{k}|^2} dy. \quad (5.52)$$

Como podemos ver  $d\sigma$  ha quedado escrita de una manera compacta, sin embargo, la matriz  $\overline{\mathcal{M}}$ , es completamente lo opuesto, en el capítulo anterior abordamos el efecto Compton y nos encontramos con una matriz de dispersión, que es en realidad compacta, al poseer sólo unos cuantos términos. Una forma de comprobar que los resultados obtenidos son correctos, es comprobar que en el límite en que nuestro bosón  $U$  tiene una masa casi cero y la masa del fermión de la línea interna es la del fermión externo se recupere el efecto Compton clásico ver ecuación (4.33) y por lo tanto, la forma de la sección eficaz y la matriz de dispersión. Realizando lo anterior, en efecto, se recupera la fórmula (4.33). Antes de terminar este capítulo es importante revisar las restricciones que acompañan la dispersión que estamos analizando.

### 5.2. Restricciones cinemáticas

Considerando la conservación del cuadrimomento obtenemos que:

$$Q^2 = -(k - k')^2 = 2(-M^2 + \omega\omega' - |k||k'| \cos \theta), \quad (5.53)$$

donde  $\omega' = \omega(1 - y)$  y  $|\vec{k}'| = \sqrt{\omega'^2 - M^2}$ . Notemos además que en la expresión (5.52) aparece el coseno del ángulo de dispersión, este ángulo podría, en principio, ir de 0 a  $\pi$ , sin embargo, como vimos en el efecto Compton la relación entre las energías, momentos y masas de las partículas interactuantes afecta el comportamiento del ángulo de dispersión, por lo que es importante analizar cómo se ve modificado en este caso el ángulo de dispersión.

Recordando que  $Q = m\omega y$  y tomando en cuenta la ecuación (5.53), después de despejar la variable  $\cos \theta$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{-m\omega y - M^2 + \omega\omega'}{|\vec{k}||\vec{k}'|} \\ &= \frac{-m\omega y - M^2 + \omega^2(1 - y)}{\sqrt{(\omega^2 - M^2)(\omega^2(1 - y)^2 - M^2)}}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Aplicando los siguientes cambios de variable  $r = 1 - y$ ,  $z = \cos \theta$  y elevando toda la expresión (5.54) al cuadrado obtenemos:

$$z^2(\omega^2 - M^2)(\omega^2 r^2 - M^2) = [-m\omega - M^2 + (m\omega + \omega^2)r]^2, \quad (5.55)$$

después de elevar al cuadrado el binomio de la derecha, realizar el producto de los binomios de la izquierda y agrupar términos semejantes, obtenemos la siguiente ecuación cuadrática para  $r$ :

$$[z^2 \vec{k}^2 \omega^2 - (m\omega + \omega^2)^2]r^2 + 2(m\omega + M^2)(m\omega + \omega^2)r - [(m\omega + M^2)^2 + z^2 \vec{k}^2 M^2] = 0, \quad (5.56)$$

esta última ecuación puede resolverse para  $r$  haciendo uso de la fórmula general, para obtener:

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2(z^2 \vec{k}^2 \omega^2 - (m\omega + \omega^2)^2)} \left[ -2(m\omega + M^2)(m\omega + \omega^2) \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{4(m\omega + M^2)(m\omega + \omega^2)^2 + 4(z^2 \vec{k}^2 \omega^2 - (m\omega + \omega^2)^2)((m\omega + M^2)^2 + z^2 \vec{k}^2 M^2)} \right]. \end{aligned} \quad (5.57)$$

A partir de esta última expresión podemos ver que si las masas y energías iniciales del proceso están dadas, obtenemos una relación en la que  $r$  depende del ángulo  $\theta$  y ya que  $y = 1 - r$  obtenemos una solución para  $y$  de la forma  $y = y(\theta)$ . Si nos damos a la tarea de resolver los valores de  $\theta$  para los cuales la solución de  $y$  es mayor que cero y menor que uno, fijando los parámetros  $M$ ,  $m$  y  $\omega$  de manera que  $M > 0$  y  $\omega$  tenga un valor muy alto pensando en el orden de las energías que poseen los rayos cósmicos ultraenergéticos, obtenemos que, para  $\omega \gg m$ , el ángulo  $\theta \rightarrow 0$  esto puede apreciarse de manera algebraica o analizando la gráfica que produce la ecuación (5.57).

Antes de continuar veamos que obtenemos si analizamos el límite en que  $M = 0$ , obtendremos para nuestra expresión (5.57):

$$r = \frac{1}{z^2 \omega^4 - (m\omega + \omega^2)^2} \left[ -m\omega(m\omega + \omega^2) \pm \sqrt{m^2 \omega^2 (m\omega + \omega^2)^2 + (z^2 \omega^4 - (m\omega + \omega^2)^2) m^2 \omega^2} \right]. \quad (5.58)$$

## CAPÍTULO 5. PROPUESTA

---

Agrupando términos semejantes obtenemos:

$$r = \frac{m\omega(m\omega + \omega^2) \pm \sqrt{z^2\omega^4}}{z^2\omega^4 - (m\omega + \omega^2)} \quad (5.59)$$

ya que  $z \in [-1, 1]$  obtenemos:

$$r = \frac{m\omega(m\omega + \omega^2) \pm |z|\omega^2}{z^2\omega^4 - (m\omega + \omega^2)};$$

la pregunta ahora es que signo debemos utilizar, veamos por ejemplo para el caso en que  $z > 1$  y tomamos el signo positivo:

$$\begin{aligned} r &= \frac{m\omega(z\omega^2 - (m\omega + \omega^2))}{(z\omega^2 - (m\omega + \omega^2))(z\omega^2 + (m\omega + \omega^2))} = \frac{m\omega}{z\omega^2 + m\omega + \omega^2} \\ &= \frac{m}{\omega[(z+1)\frac{\omega}{m} + 1]} = \frac{1}{(z+1)\frac{\omega}{m} + 1}, \end{aligned} \quad (5.60)$$

recordemos que  $r = 1 - y$  por lo que no es complicado notar que se recupera la expresión (4.31), solo hace falta hacer la sustitución  $E' = E(1 - y)$  en (4.31) para que el resultado sea evidente. Por otra parte, si elegimos  $z < 0$  tendremos que utilizar el signo negativo de la ecuación (5.53) para recuperar el resultado de la expresión (4.30).

Notamos entonces, que esa fórmula de donde surge el hecho de que para el tipo de dispersión que estamos analizando, el ángulo debe ser muy pequeño reproduce de manera correcta la relación que existe entre el ángulo y las energías de las partículas interactuantes en el efecto Compton de un fotón con un electrón. Tomando dicha restricción en cuenta analicemos si es posible encontrar alguna restricción sobre la variable  $y$  y a partir de la ecuación (5.57).

Retomando la ecuación (5.53) y ya que  $\theta \ll 1$  obtenemos:

$$\frac{Q^2}{2} = -M^2 + \omega\omega' - |\vec{k}||\vec{k}'|(1 - \frac{\theta^2}{2}), \quad (5.61)$$

tomando en cuenta nuevamente que  $Q^2 = 2m\omega y$ , obtendremos un límite superior y uno inferior para  $y$ .

$$-M^2 + \omega\omega' - |\vec{k}||\vec{k}'| \leq m\omega y \leq -M^2 + \omega\omega' - |\vec{k}||\vec{k}'|(1 - \frac{\theta^2}{2}), \quad (5.62)$$

Por el momento sólo tomemos en cuenta la relación con el límite inferior:

$$\begin{aligned} m\omega y &\geq -M^2 + \omega^2(1 - y) - |\vec{k}||\vec{k}'| \\ (m\omega + \omega^2)y &\geq -M^2 + \omega^2 - |\vec{k}||\vec{k}'| \\ y &\geq \frac{-M^2 + \omega^2 - |\vec{k}||\vec{k}'|}{\omega(m + \omega)}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Recordando que  $\vec{k}^2 = \omega^2 - M^2$ , entonces la expresión anterior toma la forma:

$$y \geq \frac{|\vec{k}|}{\omega(m + \omega)} [|\vec{k}| - |\vec{k}'|]. \quad (5.64)$$

Para simplificar los cálculos siguientes, utilizamos el cambio de variable  $a = \frac{\omega(m+\omega)}{|\vec{k}|}$  y elevando al cuadrado la expresión (5.64), obtenemos:

$$\begin{aligned} a^2 y^2 &\geq \vec{k}^2 + \vec{k}'^2 - 2|\vec{k}||\vec{k}'| \\ &\geq \omega^2 - M^2 + \omega^2(1 - y)^2 - M^2 - 2\sqrt{(\omega^2 - M^2)(\omega'^2 - M^2)} \\ &\geq 2\vec{k}^2 - 2\omega^2 y + \omega^2 y^2 - 2\sqrt{(\omega^2 - M^2)(\omega'^2 - M^2)}, \end{aligned}$$

agrupando términos semejantes resulta que:

$$(a^2 - \omega^2)y^2 + 2\omega^2 y - 2\vec{k}^2 \geq -2|\vec{k}||\vec{k}'|, \quad (5.65)$$

multiplicando ambos términos por un signo negativo y posteriormente elevando la expresión al cuadrado:

$$\begin{aligned} |\vec{k}'| &\geq \frac{(\omega^2 - a^2)}{2|\vec{k}|} y^2 - \frac{\omega^2}{|\vec{k}|} y + |\vec{k}| \\ \omega^2(1 - y)^2 - M^2 &\geq \left[ \frac{(\omega^2 - a^2)}{2|\vec{k}|} y^2 - \frac{\omega^2}{|\vec{k}|} y + |\vec{k}| \right]^2 \\ -2\omega^2 y + \omega^2 y^2 &\geq \frac{(\omega^2 - a^2)^2}{4\vec{k}^2} y^4 + \frac{\omega^4}{\vec{k}^2} y^2 - 2\omega^2 y + (\omega^2 - a^2)y^2 - \frac{\omega^2}{\vec{k}^2} (\omega^2 - a^2)y^3, \end{aligned}$$

agrupando términos semejantes nuevamente:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{(\omega^2 - a^2)^2}{4\vec{k}^2} y^4 + \frac{\omega^2}{\vec{k}^2} y^2 - a^2 y^2 - \frac{\omega^2}{\vec{k}^2} y^3 \\ 0 &\geq y^2 \left[ \frac{(\omega^2 - a^2)^2}{4\vec{k}^2} y^2 - \frac{\omega^2}{\vec{k}^2} y + \frac{\omega^2}{\vec{k}^2} - a^2 \right] \end{aligned} \quad (5.66)$$

Ya que sabemos que  $y \geq 0$ , tenemos que:

$$\frac{(\omega^2 - a^2)^2}{4\vec{k}^2} y^2 - \frac{\omega^2}{\vec{k}^2} y + \frac{\omega^2}{\vec{k}^2} - a^2 \leq 0 \quad (5.67)$$

Podemos resolver esta ecuación haciendo uso de la fórmula general nuevamente para encontrar los puntos en los cuales la ecuación (5.67) se hace cero, encontramos entonces que:

$$y = \frac{2}{\omega - a^2} [\omega^2 \pm |\vec{k}|a], \quad (5.68)$$

## CAPÍTULO 5. PROPUESTA

---

ya que  $a = \frac{\omega(m+\omega)}{|\vec{k}|}$ , tenemos que las soluciones para  $y$  son:

$$\begin{aligned}y_- &= \frac{-2m\omega}{\omega^2 - a^2} \\y_+ &= \frac{2}{\omega^2 - a^2}[2\omega^2 + \omega m]\end{aligned}\tag{5.69}$$

Haciendo un análisis de la ecuación cuadrática que estamos estudiando en la expresión (5.67), es posible hacer notar que estamos ante una parábola vertical que abre hacia arriba, además la solución  $y_+$  es negativa, por lo que  $y \in [0, y_-]$  para que se cumpla (5.67).

# Capítulo 6

## Discusión y resultados

En este capítulo mostramos los resultados obtenidos utilizando las ideas presentadas en los capítulos 4 y 5. Para ser más específicos, comenzaremos por utilizar la expresión de la sección diferencial calculada en el capítulo 5 y utilizamos las restricciones cinemáticas encontradas también en dicho capítulo. Posteriormente, presentamos resultados de la sección eficaz bosón U-fermión para distintos valores de los parámetros  $M$ ,  $m$ ,  $N$  y  $\omega$ . Finalmente comparamos las gráficas obtenidas con los resultados que se tienen para el efecto Compton para corroborar los resultados.

### 6.1. Sección eficaz diferencial

Comencemos por exponer el caso que a nosotros nos interesa estudiar, este es, la dispersión entre un bosón pesado U que, como ya se dijo anteriormente puede alcanzar masas hasta del orden de  $TeV$ . Por otra parte, si vemos la figura (5.1) vemos que la partícula en la línea interna de los diagramas de dispersión es un fermión espejo que aparece también en teorías de KK [41] y que posee masas del orden de algunos cientos de  $MeV$  (ver capítulo 4).

Para fijar los valores de las constantes de acoplamiento vectorial y axial tomamos los límites obtenidos mediante experimentos en la rotación del espín en el átomo de Hidrógeno [45, 46], de manera que los valores que utilizaremos son:  $g_V = 1.79 \times 10^{-7}$  y  $g_A = 6.5 \times 10^{-7}$ . Una vez fijados todos estos valores obtenemos la gráfica para la sección eficaz diferencial en la figura 6.1.

## CAPÍTULO 6. DISCUSIÓN Y RESULTADOS

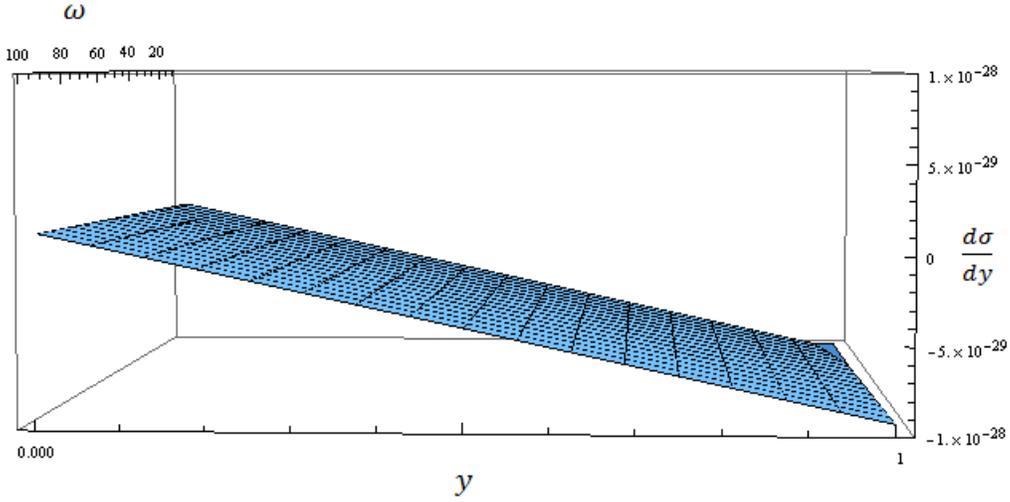


Figura 6.1: Sección eficaz obtenida para la dispersión bosón U-quark up a distintas energías, donde  $\frac{d\sigma}{dy}$  tiene unidades de  $cm^2$ ,  $\omega$  está dada en  $TeV$  y  $y$  es un parámetro adimensional. Esta gráfica fue realizada para los siguientes valores  $M = 1TeV$ ,  $N = 10^{-2}TeV$ ,  $m = 3,1 \times 10^{-6}TeV$

Notamos la presencia de valores negativos para  $\frac{d\sigma}{dy}$  lo que sugeriría a algún error en nuestros cálculos, pues si pensamos en la definición de sección eficaz diferencial, solo debería poder ser descrita por valores positivos, mientras que en la gráfica se muestra que cuando el parámetro  $y$  crece; la sección eficaz pasa de ser cero a tomar valores negativos. Es momento entonces de utilizar las restricciones cinemáticas que se obtuvieron en la sección 5.2. Tomando en cuenta que  $y \in [0, y_-]$ , nuevamente tomando los valores que asignamos a  $M$ ,  $m$ ,  $N$  y  $\omega$  para realizar la gráfica, obtenemos que  $y \in [0, 10^{-4}]$ . Al aplicar esta restricción en nuestra gráfica obtenemos las superficies mostradas en las figuras 6.2 y 6.3. En estas nuevas gráficas observamos que la sección eficaz ya es positiva para cualquier valor de la energía que tomemos. Es importante mencionar que si analizamos la forma que tiene la expresión (5.45) que es la que utilizamos para generar estas gráficas, notamos que la energía  $\omega$  no puede ser igual a la masa del bosón, lo cual no genera problemas pues estamos estudiando bosones con muy altas energías.

Otro efecto que podemos observar casi de manera inmediata es el hecho que la sección eficaz diferencial crece a medida que el parámetro  $y$  se incrementa en el intervalo de  $y$  y, además también crece con la energía  $\omega$ , esto puede apreciarse de manera un poco más clara en la figura (6.5). Es necesario entonces que analicemos estas dos características de la sección eficaz diferencial con el fin de entender si el trabajo que estamos realizando es consistente con estudios realizados previamente y más que eso, si es capaz de describir efectos físicos reales como esperamos. Como primer punto a favor de este trabajo es que la primera de las características se ha observado anteriormente en alguno casos registrados en la literatura [58].

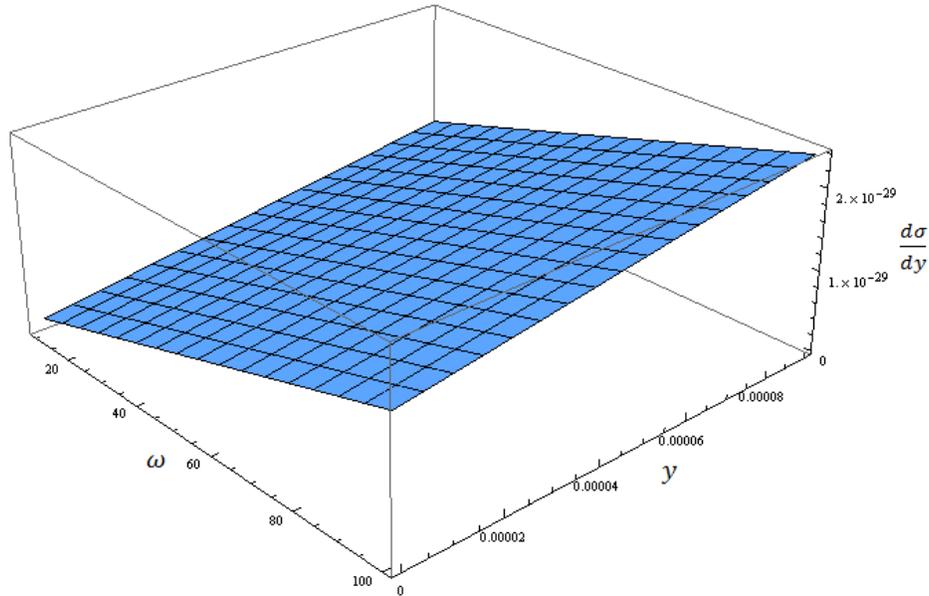


Figura 6.2: Sección eficaz obtenida para la dispersión bosón U-quark up a distintas energías, donde  $\frac{d\sigma}{dy}$  tiene unidades de  $cm^2$ ,  $\omega$  está dada en  $TeV$  y  $y$  es un parámetro adimensional que pertenece al intervalo  $[0, 10^{-4}]$ . Esta gráfica fue realizada para los siguientes valores:  $M = 1TeV$ ,  $N = 10^{-2}TeV$ ,  $m = 3,1 \times 10^{-6}TeV$ .

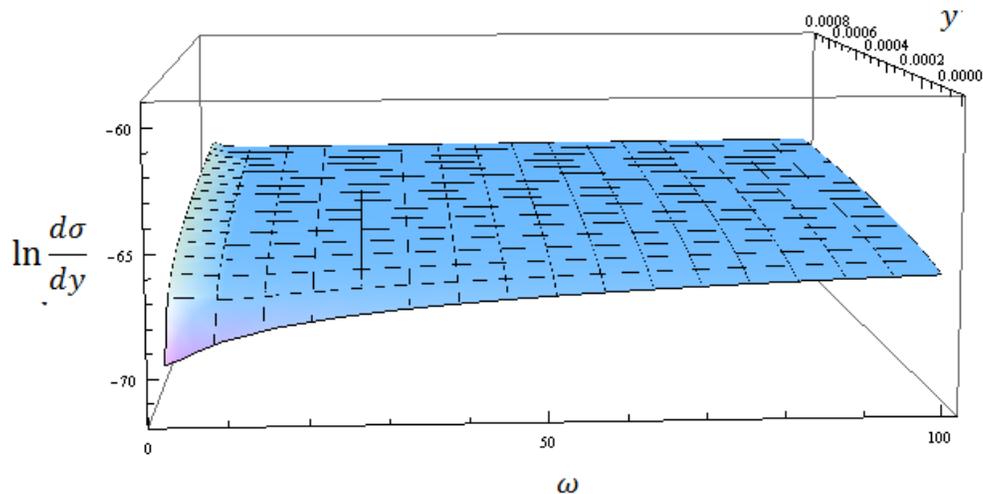


Figura 6.3: Logaritmo natural de la sección eficaz obtenida para la dispersión bosón U-quark up a distintas energías, donde  $\frac{d\sigma}{dy}$  tiene unidades de  $cm^2$ ,  $\omega$  está dada en  $TeV$  y  $y$  es un parámetro adimensional restringido a el intervalo  $[0, 10^{-4}]$ . Esta gráfica fue realizada para los siguientes valores  $M = 1TeV$ ,  $N = 10^{-2}TeV$ ,  $m = 3,1 \times 10^{-6}TeV$

Podemos ver que si graficamos  $\ln \frac{d\sigma}{dy}$  sin restringir la variable  $y$  (gráfica 6.4) existe un máximo local en que para valores muy pequeños de  $y$  la sección eficaz diferencial

## CAPÍTULO 6. DISCUSIÓN Y RESULTADOS

crece para luego decaer el cual que no se puede apreciar en la gráfica 6.1, lo cual explica por que en la gráfica 6.1 observamos un comportamiento decreciente de la sección eficaz diferencial con respecto a  $y$  mientras que en 6.2 el comportamiento es creciente.

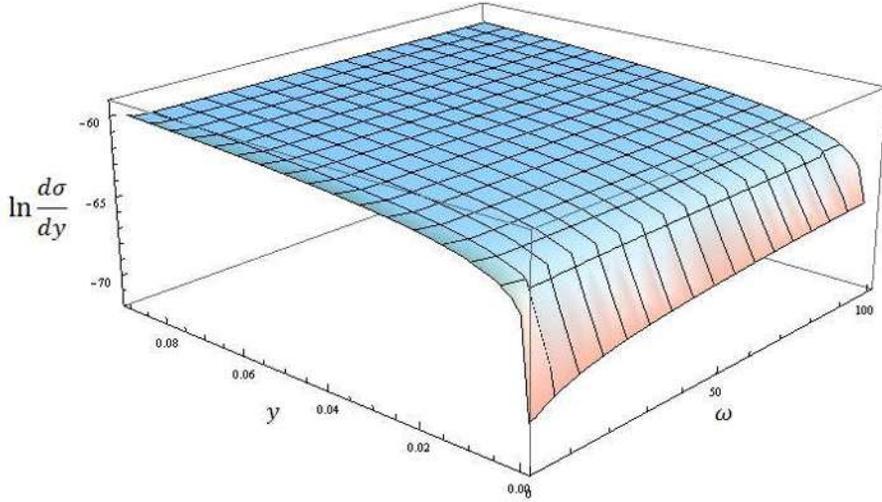


Figura 6.4: Logaritmo natural de la sección eficaz obtenida para la dispersión bosón U-quark up a distintas energías, donde  $\frac{d\sigma}{dy}$  tiene unidades de  $cm^2$ ,  $\omega$  está dada en  $TeV$  y  $y$  es un parámetro adimensional. Esta gráfica fue realizada para los siguientes valores  $M = 1TeV$ ,  $N = 10^{-2}TeV$ ,  $m = 3,1 \times 10^{-6}TeV$

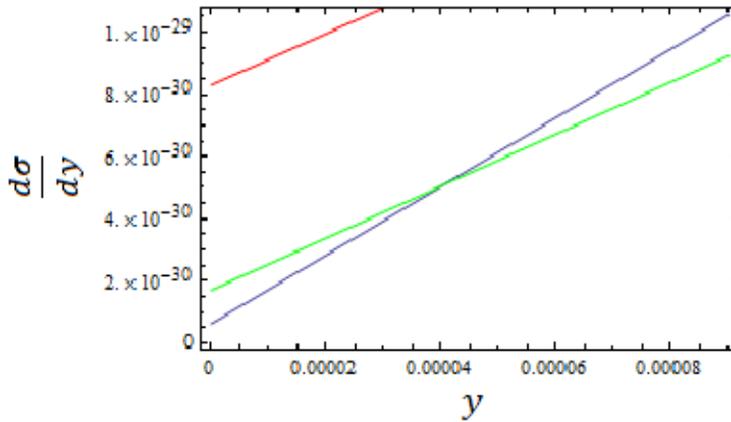


Figura 6.5: Sección eficaz obtenida para la dispersión bosón U-quark up a distintas energías, donde  $\frac{d\sigma}{dy}$  tiene unidades de  $cm^2$  y  $y$  es un parámetro adimensional. Esta gráfica fue realizada para los siguientes valores  $M = 1TeV$ ,  $N = 10^{-2}TeV$ ,  $m = 3,1 \times 10^{-6}TeV$ , donde la línea roja se realizó tomando  $\omega = 100TeV$ , la línea verde para  $\omega = 10TeV$  y la línea azul para  $\omega = 2TeV$ .

## CAPÍTULO 6. DISCUSIÓN Y RESULTADOS

---

Ahora, veamos si los resultados obtenidos son capaces de reproducir la dispersión de la que hablamos en el capítulo 4, es decir, el efecto Compton entre fotones y electrones. Para lograr esto necesitamos notar que la masa del bosón debe ser cero, además del hecho de que tenemos solamente acoplamientos vectoriales, pues las corrientes cargadas electromagnéticas no admiten acoplamientos del tipo axial, por lo que tenemos de inmediato dos parámetros que deben ser fijados  $M = 0$  y  $g_A = 0$ , si vemos las expresiones (5.26) y (5.27) entonces el parámetro  $B = 0$  y además  $A = C = g_V^2$ .

El hecho de tomar  $M = 0$  se ve reflejado en que la expresión para  $\overline{\mathcal{M}}_{if}^2$  se reduce a una expresión mucho más pequeña, pero antes de escribir la forma reducida, veremos que pasa con el parámetro  $N$  que es la masa del fermión interno. Resulta que si vemos el diagrama de la figura (4.2) vemos que la partícula interna es un electrón y, además, que el fermión que las partículas que se ven involucradas en la dispersión son electrones y fotones, por lo que usaremos  $m = N = m_e$ . De esta forma a partir de la forma que se encontró en la sección 5.1 para  $\overline{\mathcal{M}}_{if}^2$  obtenemos que:

$$\overline{\mathcal{M}}_{if}^2 = \frac{1}{12m_e^2} \left[ \left( \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} \right) + 2m_e \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} \right) + m_e^4 \left( \frac{1}{m_e\omega} - \frac{1}{m_e\omega'} \right)^2 \right],$$

por otra parte, para el efecto Compton mediante lo analizado en el capítulo 4 tenemos:

$$\overline{\mathcal{M}}_{if}^2 = \frac{e^2}{12m_e^2} \left[ \left( \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} \right) + 2m_e \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} \right) + m_e^4 \left( \frac{1}{m_e\omega} - \frac{1}{m_e\omega'} \right)^2 \right],$$

Es facil notar que la forma de ambas amplitudes invariantes es la misma, salvo el factor  $e^2$  ya que ahora no estamos trabajando con dos partículas cargadas.

Al utilizar la ecuación (6.1) para calcular al sección eficaz diferencial obtenemos que la gráfica queda como se muestra en (6.6).

La gráfica (6.6) tiene la forma de la gráfica que obtuvimos para el efecto compton. Pero en esta gráfica estamos graficando respecto al parámetro  $y$ . Para comparar con la gráfica de la fig 4.4 graficaremos contra  $z = \cos\theta$ , lo que permitirá realizar la comparación de una manera más rápida y sencilla.

Para lograr lo mencionado anteriormente tendremos que transformar la variable  $y = y(\cos\theta)$  esto ya lo hicimos de manera general mediante la ecuación (5.51), posteriormente notemos que la expresión a transformar es  $\frac{d\sigma}{dy}$  y nosotros queremos conocer  $\frac{d\sigma}{dz}$ , de manera que si ya sabemos que  $r = 1 - y$  basta con realizar la operación  $\frac{dr}{dz}$  y realizar la sustitución en (4.34) utilizando los valores para las masas y las constantes de acoplamiento que dicta el mismo efecto Compton. Realizando el procedimiento que acabamos de describir llegamos a la siguiente transformación:

## CAPÍTULO 6. DISCUSIÓN Y RESULTADOS

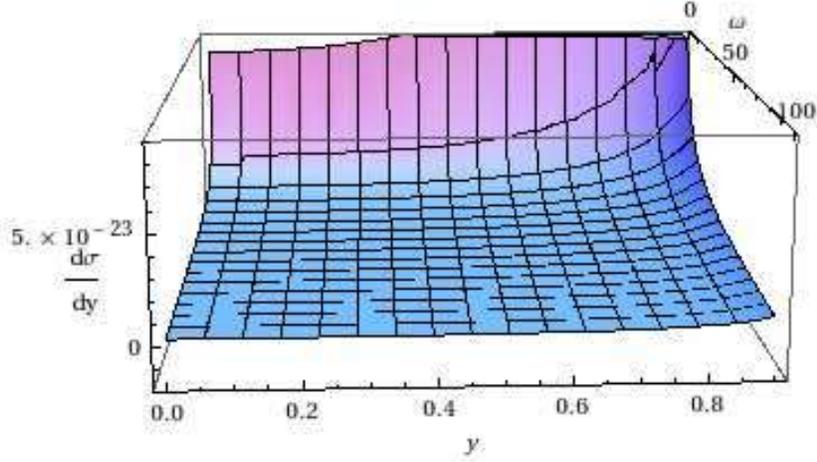


Figura 6.6: Sección eficaz obtenida para el efecto Compton entre un fotón y un electrón a distintas energías, donde  $\frac{d\sigma}{dy}$  tiene unidades de  $cm^2$ ,  $\omega$  de  $TeV$  y  $y$  es un parámetro adimensional. Esta gráfica fue realizada para los siguientes valores  $M = 0TeV$ ,  $N = 10^{-6}TeV$ ,  $m = 10^{-6}TeV$ .

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{\omega}{m_e} \frac{\left. \frac{d\sigma}{dy} \right|_{y=y(\cos\theta)}}{\left[ 1 + (1 - \cos\theta) \frac{\omega}{m_e} \right]^2}; \quad (6.1)$$

una vez realizada dicha transformación graficamos en la figura 6.6 donde vemos los resultados del efecto Compton. Esto era de esperarse pues cuando  $M = 0$  y  $N = m_e$  obtuvimos la misma amplitud de probabilidad invariante que en el efecto Compton  $e\gamma \rightarrow e\gamma$ , para el cálculo de la sección eficaz la única diferencia con la calculada para el efecto Compton en QED radica en que nosotros seguimos utilizando las constantes  $g$  y  $g_V$  con las que veníamos trabajando en lugar de las de Q.E.D.

Ahora estudiamos algunos casos que se encuentran en un punto intermedio entre el efecto Compton y la dispersión del bosón pesado  $U$  y un quark. Comencemos por el caso en que tenemos la dispersión entre un electrón y un bosón masivo aunque no con masas  $\sim TeV$ , además con una interacción con acoplamiento vectorial y axial. Fijamos entonces la masa  $M = 5 \times 10^{-11} TeV$  y utilizamos los parámetros  $g_A$  y  $g_V$  mencionados para realizar la gráfica (6.1).

Como podemos ver el comportamiento de decaimiento de la sección eficaz conforme el valor de  $y$  disminuye de 1 hasta 0 que se observa en la gráfica (6.5), se preserva aunque ya no estamos tratando con un fotón, veamos que ocurre cuando al caso anterior le cambiamos la masa del fermión interno y esta pasa de ser la del electrón a

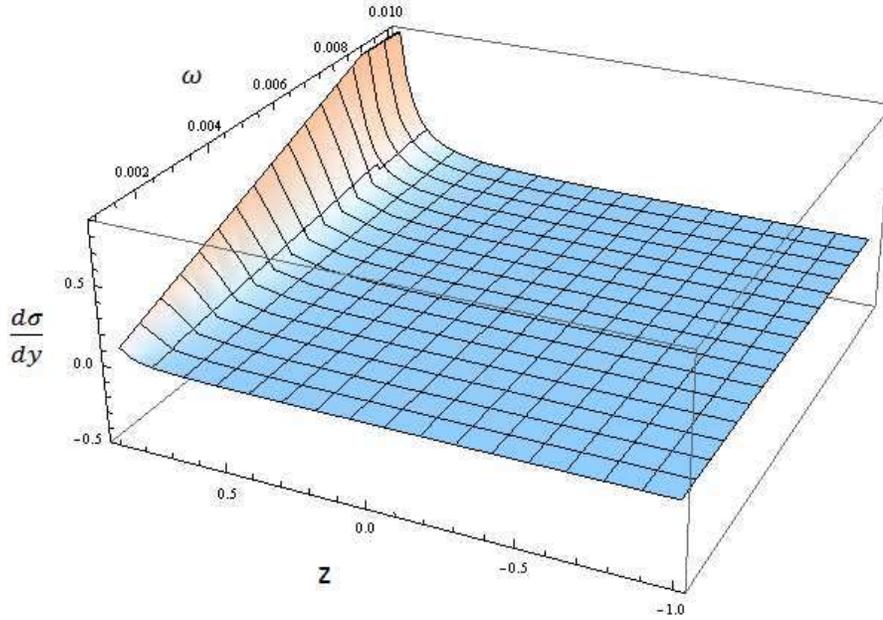


Figura 6.7: Sección eficaz obtenida para el efecto Compton entre fotón y electrón a distintas energías. donde  $\frac{d\sigma}{dy}$  tiene unidades de  $cm^2$ ,  $\omega$  está expresada en  $TeV$  y  $z = \cos \theta$  es un parámetro adimensional con  $\theta \in [0, \pi]$ . Esta gráfica fue realizada para los siguientes valores  $M = 0TeV$ ,  $N = 10^{-6}TeV$ ,  $m = 10^{-6}TeV$ .

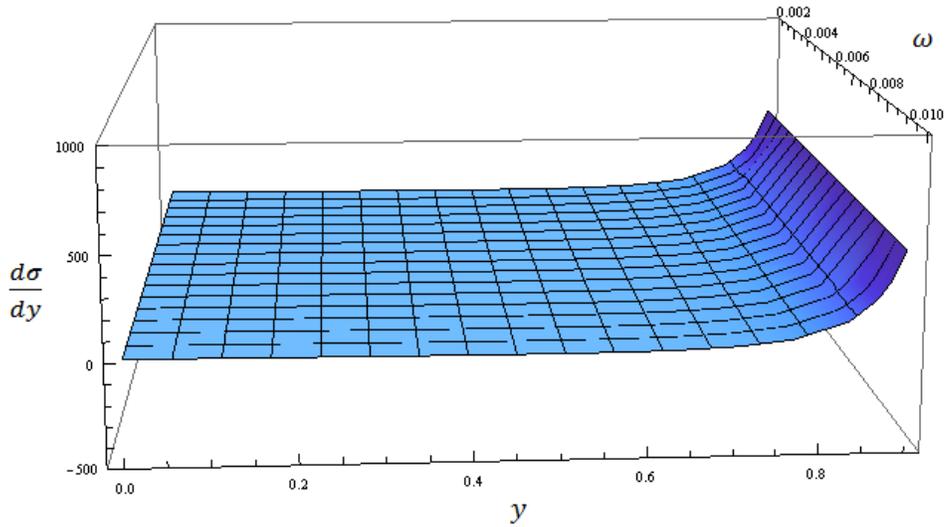


Figura 6.8: Sección eficaz obtenida para el efecto Compton entre un bosón masivo y un electrón para distintas energías, donde  $\frac{d\sigma}{dy}$  tiene unidades de  $cm^2$ ,  $\omega$  está dada en  $TeV$  y  $y$  es un parámetro adimensional. Esta gráfica fue realizada para los siguientes valores  $M = 10^{-11}TeV$ ,  $N = 10^{-6}TeV$ ,  $m = 10^{-6}TeV$ .

## CAPÍTULO 6. DISCUSIÓN Y RESULTADOS

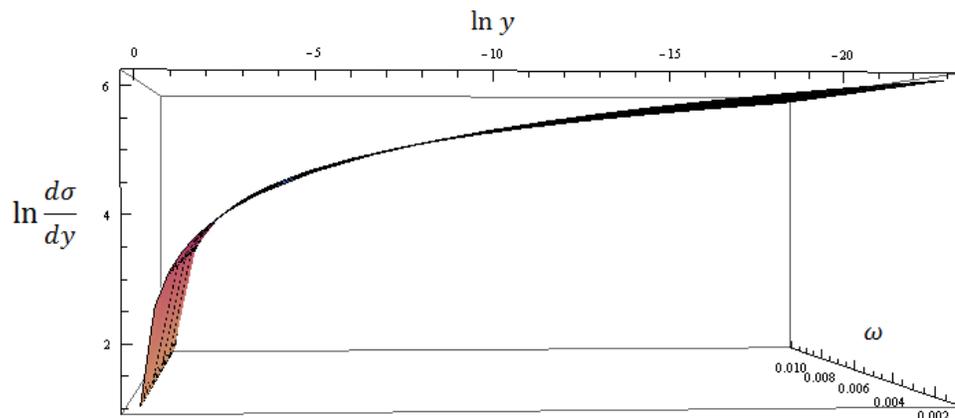


Figura 6.9: Logaritmo de la sección eficaz diferencial de un bosón masivo con un electrón, donde  $\frac{d\sigma}{dy}$  tiene unidades de  $cm^2$ ,  $\omega$  está dada en  $TeV$  y  $y$  es un parámetro adimensional. Esta gráfica fue realizada para los siguientes valores  $M = 10^{-11}TeV$ ,  $N = 10^{-6}TeV$ ,  $m = 10^{-6}TeV$ .

$N = 10^{-2} TeV$  En este caso la de un fermión de Kaluza-Klein. Obtenemos la siguiente gráfica.

El por que la sección eficaz diferencial calculada al principio del capítulo en la figura (6.2) crece con la energía es un problema al que intentaremos dar una explicación física. Lo que podemos decir es que entre mayor sea la energía con la que llega el bosón que será dispersado, en caso de que la partícula interna tenga una masa muy grande, y considerando que las partículas interactuantes no necesariamente son muy masivas, mayor probabilidad de que el proceso ocurra existirá pues hay una mayor probabilidad de que se genere la partícula virtual, de este modo si vemos la expresión (4.26), tiene sentido el resultado que obtenemos.

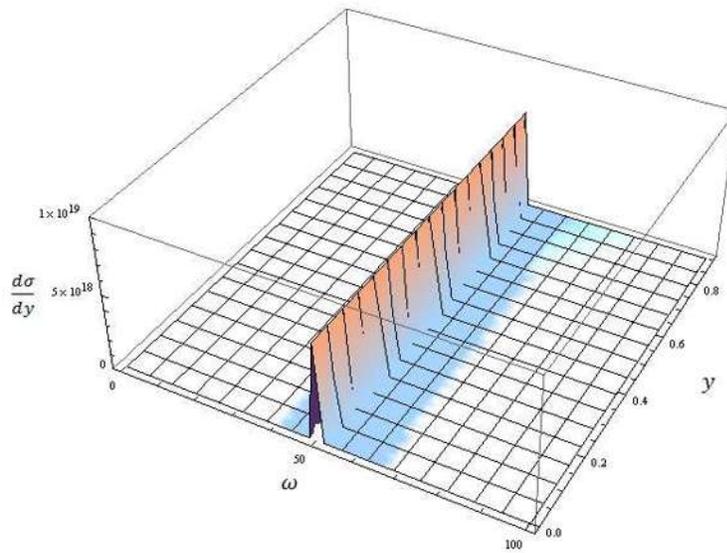


Figura 6.10: Sección eficaz obtenida para el efecto Compton entre un bosón masivo y un electrón en que la partícula que aparece en la línea interna es un fermión de Kaluza-Klein. donde  $\frac{d\sigma}{dy}$  tiene unidades de  $cm^2$ ,  $\omega$  está dada en  $TeV$  y  $y$  es un parámetro adimensional. Esta gráfica fue realizada para los siguientes valores  $M = 10^{-11}TeV$ ,  $N = 10^{-2}TeV$ ,  $m = 10^{-6}TeV$ .

## CAPÍTULO 6. DISCUSIÓN Y RESULTADOS

---

# Capítulo 7

## Conclusiones

En esta tesis presentamos la posibilidad de utilizar los rayos cósmicos ultraenergéticos como medio para sondear el universo en busca de materia oscura, bajo la suposición de que la materia oscura está conformada principalmente por un tipo de partícula conocida como bosón U. Esto como primer paso, pues se pretende, en un trabajo posterior, analizar las propiedades de la materia oscura en el halo galáctico de la Vía Láctea incorporando los cálculos realizados en esta tesis.

Puesto que el trabajo requiere el estudio de las interacciones de rayos cósmicos ultraenergéticos con la materia oscura, es preciso calcular la sección eficaz de este proceso. Una forma de conseguir lo anterior es empleando el modelo de partones para el protón y la materia oscura. En esta tesis, hemos realizado este último cálculo de la sección eficaz quark-materia oscura.

Para conseguir esto, analizamos las propiedades de varias partículas que podrían describir el comportamiento de la materia oscura desde el punto de vista de la física de partículas. Una vez hecho esto seleccionamos una partícula candidata para investigar su comportamiento al interactuar con materia ordinaria (perteneciente al modelo estándar).

En particular, seleccionamos el bosón U ya que desde el punto de vista experimental y teórico es bastante viable. Además, puede presentar interacciones tipo Compton con los fermiones del Modelo Estándar cuya sección eficaz para altas energías puede observar un efecto con rayos cósmicos ultraenergéticos.

A partir de las restricciones para el parámetro  $y$  y la relación que existe entre éste y el ángulo de dispersión, vemos que a muy altas energías tanto  $y$  como  $\theta$  son muy pequeños. Por otra parte, los cálculos son capaces de reproducir los resultados cualitativos obtenidos por Snow [45] en sus observaciones de Dispersión inelástica profunda para la dispersión  $Zp \rightarrow p\gamma$ . A medida que el parámetro  $y$  crece la sección eficaz crece también.

## CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES

---

Los resultados obtenidos y en particular las restricciones cinemáticas que se obtuvieron son válidas en el caso en que la interacción se presenta entre un bosón masivo con una masa del orden de  $TeV$  y un fermión de masas muy pequeñas en comparación con la del bosón es decir del orden de algunos  $MeV$ , además de que el bosón que colisiona es una partícula muy energética, alcanzando energías que van desde algunos  $TeV$  hasta algunos cientos de  $TeV$ , de las gráficas 6.8 y 6.6 es posible apreciar que aún cuando el bosón que interactúa con un electrón es masivo, se puede ver de manera cualitativa como una dispersión de Compton clásica, siempre y cuando la masa del bosón sea del orden de algunos  $MeV$  y la masa del fermión que aparece en la línea interna sea igual a la masa de la partícula externa.

Un resultado que se observa en la gráfica (6.2) es que mientras mayor energía posea el bosón  $U$ , una mayor posibilidad tiene de que el proceso se de y por lo tanto se genera una mayor sección eficaz.

Ya que el proceso que estudiamos es la dispersión entre un bosón pesado y un fermión los cuales interactúan de manera vectorial y axial, para verificar nuestros resultados tomamos el límite  $M \rightarrow 0$  y  $N \rightarrow m_e$ , y el fermión interno es un electrón para verificar si recuperamos el resultado de Q.E.D. de dispersión de Compton  $\gamma e \rightarrow \gamma e$  ya que dicho efecto es un caso límite del caso que estamos analizando, con la diferencia la masa de los bosones que participan en el proceso y que en el caso del efecto Compton no parece. Claro está que este último es un proceso totalmente electromagnético, por lo que, la contribución de interacción axial es nula y la constante de acoplamiento es diferente.

Los resultados mostraron que es posible reproducir los resultados para el efecto Compton a partir de la fórmula obtenida para la dispersión entre el bosón  $U$  y un fermión.

Como trabajo futuro derivado de esta tesis un primer paso será implementar los cálculos aquí realizados para conocer la sección eficaz diferencial entre un boson  $U$  y un protón, que como se explicó anteriormente, será usado para estudiar las interacciones de rayos cósmicos ultraenergéticos con la materia oscura e investigar si de aquí es posible colocar límites a las propiedades de la materia oscura. Haciendo uso teóricamente de los rayos cósmicos como método para sondear el universo. [65]

# Simetrías

Se dice que existe una simetría  $S$  cuando un sistema físico que estamos estudiando es invariante bajo la transformación definida para la simetría o equivalentemente cuando el hamiltoniano del sistema  $H$  es invariante es decir:

$$SHS^+ = H \quad (7.1)$$

o que las transiciones de probabilidad permanezcan invariantes.

$$\mathcal{P}_{if} = |\langle \psi_f | \psi_i \rangle|^2 = |\langle \psi'_f | \psi'_i \rangle|^2 = \mathcal{P}'_{if} \quad (7.2)$$

Avanzando un poco más las simetrías pueden dividirse en dos grupos, discretas y continuas; las simetrías continuas pueden dividirse a su vez en dos nuevos subgrupos, que son simetrías internas y Espacio temporales. Por el momento nos interesaremos en proporcionar más detalles sobre el grupo de simetrías discretas, en este grupo están las simetrías que se van dando por "pasos" y no de manera continua, las simetrías de la naturaleza que caen en este subgrupo son; la simetría especular, la simetría de carga y la simetría de inversión temporal.

Comencemos por la simetría de paridad o especular, imaginemos un proceso con el cual estemos familiarizados algo medianamente común como por ejemplo verse en un espejo, para nosotros es normal que al pararnos frente a un espejo este responda a nuestro acto mostrándonos nuestro reflejo, es decir nos vemos de frente a nosotros mismos, estamos viendo "dentro" del espejo un mundo "casi" invertido, este casi es necesario por que vemos que en el espejo el frente se convierte en la parte trasera, la izquierda en la derecha y viceversa, sin embargo, el arriba sigue siendo arriba y abajo sigue siendo abajo, de este modo si nosotros lanzamos un balón hacia el espejo dentro del espejo el balón viajara en sentido contrario es decir hacia nosotros; esta simetría se observa en el mundo cotidiano, en los procesos a escalas mayores a las que vemos diariamente y se pensaba que en los procesos a escalas microscópicas esta clase de simetría era válida, pero en 1957 se descubrió que esta aceveración no siempre era correcta.

Es momento de abstraer la realidad, podemos describir esta inversión espacial en terminos de objetos matemáticos, en este caso las coordenadas espaciales y lo que imponemos al momento de realizar esta abstracción es pedir que la física que existe en

## CAPÍTULO 7. SIMETRÍAS

---

este lado del espejo sea la misma que la que existe del otro lado del espejo, podemos dar la siguiente relación para las coordenadas espaciales (considerando que esta simetría especular invierte todas las coordenadas espaciales):

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} \quad (7.3)$$

y para imponer el hecho de que la física dentro y fuera del espejo es la misma:

$$\psi(x) \rightarrow \psi(x') \quad (7.4)$$

Ahora debemos dar una regla de transformación para ir de  $x$  a  $x'$

$$x' = \mathbf{P}x \quad (7.5)$$

donde

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

Ahora ya sabemos como pasar de un sistema de coordenadas a otro bajo esta simetría, pero aún no hemos dicho como pasar de un espinor de un lado a otro y son estos espinores los que llevan la información física de alguna partícula, comencemos por recordar que si la física es la misma en cualquier sistema entonces debemos pedir que la probabilidad sea la misma en ambos sistemas pues es necesario que la física sea la misma, entonces será necesario una transformación unitaria para los espinores.

$$\psi'(x') = U(\mathbf{P})\psi(x)U^{-1}(\mathbf{P}) = \gamma^0\psi(t, -x) \quad (7.7)$$

de tal manera que esta transformación unitaria puede aplicarse a alguna partícula y a su antipartícula

$$U(P)|e^-(p, s)\rangle = |e^+(-p, s)\rangle \quad (7.8)$$

el hecho de que la paridad se conserve requiere asignar una paridad intrínseca a cada partícula

partícula	paridad
$p$	1
$n$	1
fermión	1
antiferión	-1
$\gamma$	-1

Además debemos tomar en cuenta la paridad de la función de onda asociada con movimientos orbitales para sistemas compuestos, por ejemplo el momento angular  $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$  implica algunas igualdades para las distintas cantidades vectoriales del sistema.

Vectores axiales	Vectores polares
$\vec{s}' = \vec{s}$	$\vec{r}' = -\vec{r}$
$\vec{L}' = \vec{L}$	$\vec{p}' = -\vec{p}$

Analicemos otro tipo de simetría discreta, la conjugación de carga, en este caso observamos el intercambio de partícula por antipartícula y viceversa, es decir cambia el signo de los números cuánticos internos pero no los externos. Entonces para estados con energía mayor que cero definimos:

$$x \rightarrow x' = x \quad (7.9)$$

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) \quad (7.10)$$

Mientras que el espinor deberá transformarse de la siguiente manera:

$$\psi'(x) = \hat{\mathbb{C}}\bar{\psi}^T(x) = (i\gamma^2\gamma^0)\bar{\psi}^T(x) \quad (7.11)$$

Para encontrar la relación anterior se parte de la soluciones de energía negativa para partículas y se compara con la solución de energía positiva de antipartícula.

Utilizando la relación anterior podemos ver de que manera se transforma bajo esta simetría un campo escalar y un campo vectorial:

$$\text{Campo escalar: } \phi'(x) = -\phi(x) \quad (7.12)$$

$$\text{Campo Vectorial: } \bar{A}^c = -\bar{A}(x) \quad (7.13)$$

Se propone un operador un unitario que relacione  $\psi(x)$  con  $\psi^c(x)$  en algún espacio vectorial:

$$\psi^c(x) = \hat{U}(c)\psi(x)\hat{U}^{-1}(c) = \mathbb{C}\bar{\psi}^T(x) \quad (7.14)$$

Si tenemos un estado de partícula caracterizado por:

$$|\phi\rangle = |m, \vec{p}, \vec{J}, \lambda, B, Q, L\rangle \quad (7.15)$$

tomemos ahora el estado de partícula  $|\psi_c\rangle$  después de haber aplicado el operador  $\hat{U}(c)$ :

$$|\psi_c\rangle = \hat{U}(c)\psi = |m, \vec{p}, \vec{J}, \lambda, -B, -Q, -L\rangle \quad (7.16)$$

para ejemplificar la forma en que este operador trabaja podríamos aplicarlo a algunos estados de partículas conocidos como el electrón, y el neutrino.

$$\hat{U}(c)|e_L^-\rangle = |e_L^+\rangle \quad (7.17)$$

$$\hat{U}(c)|\nu_L\rangle = |\bar{\nu}_L\rangle \quad (7.18)$$

$$\hat{U}(c)|\bar{\nu}_R\rangle = |\nu_R\rangle \quad (7.19)$$



## Propiedades de las matrices $\gamma$

A continuación presentamos algunas propiedades de las trazas de productos de matrices  $\gamma$ .

- La traza de un número impar de matrices  $\gamma$  es igual a cero.

- $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$ .

- $\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu) = 4(g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu})$

- $\text{Tr}(\not{a}_1 \not{a}_2 \not{a}_3 \not{a}_4) = 4[(a_1 \cdot a_2)(a_3 \cdot a_4) + (a_1 \cdot a_4)(a_2 \cdot a_3) - (a_1 \cdot a_3)(a_2 \cdot a_4)]$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\not{a}_1 \cdots \not{a}_n) &= (a_1 \cdot a_2) \text{Tr}(\not{a}_3 \cdots \not{a}_n) - (a_1 \cdot a_3) \text{Tr}(\not{a}_2 \not{a}_3 \cdots \not{a}_n) + \cdots \\ &+ (a_1 \cdot a_n) \text{Tr}(\not{a}_2 \cdots \not{a}_{n-1}) \end{aligned}$$

- $\text{Tr}(\gamma^5) = 0$

- $\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^5) = 4i\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}$ . Donde  $\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}$  es un tensor totalmente antisimétrico que toma los valores 1 si el número de permutaciones en los índices es par y  $(-1)$  si resulta un número de permutaciones impar.

Las siguientes propiedades suelen ser de mucha ayuda para reducir elementos de matriz.

- $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4$ .

- $\gamma^\mu \not{a} \gamma_\mu = -2a$ .

- $\gamma^\mu \not{a} \not{b} \gamma_\mu = 4a \cdot b$

- $\gamma^\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma_\mu = -2\not{a} \not{b} \not{c}$ .

- $\not{a} \not{b} + \not{b} \not{a} = 2a \cdot b$ .

- $\not{a} \not{a} = a^2$ .



# Bibliografía

- [1] P.A.R. Ade et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. *Astron.Astrophys.*, 571:A16, (2014).
- [2] Bahcall, J. Weinberg, S. Piran, T. Dark Matter in the Universe, World Scientific, second edition.
- [3] V. F. Hess. *Phys. Z.*, 13(1084).
- [4] Peskin, M. Schroeder V.. (1995). An introduction to quantum field theory. stanford linear acelerator center: perseus books.
- [5] <http://www.nobelprize.org/nobelprizes/physics/laureates>
- [6] R. A. Millikan, High frequency rays of cosmic origin, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*12, 4855(1926), p. 52
- [7] P. Galison The discovery of the Muon and the failed revolution against the Quantum Electrodynamics
- [8] V. A. Kuz'min G. T. Zatsepin. Upper Limit of the Spectrum of Cosmic Rays. *Experimental and Theoretical Physics Letters*, 4:78, August .
- [9] Giorgio Matthiae 2010 *New J. Phys.* 12 075009.
- [10] E. Fermi. *Phys. Rev.*, 75(1169), 1949.
- [11] J. Linsley., *Phys. Rev. Lett.*, 10:146–148, January .
- [12] T. Stanev. *High Energy Cosmic Rays*. Springer, second edition.
- [13] H. P. Dembinski. Measurement of the flux of ultra high energy cosmic rays using data from very inclined air showers at the Pierre Auger Observatory.
- [14] T. Gaisser. *Cosmic Rays and Particle Physics*.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [15] A. M. Hillas. The Origin of Ultra-High-Energy Cosmic Rays. *Annual review of astronomy and astrophysics*, 22:425–444.
- [16] <https://www.auger.org>
- [17] Zwicky, F., 1933, *Helv. Phys. Acta* 6, 110.
- [18] Zwicky, F., 1937, *Astrophys. J.* 86, 217.
- [19] Famaey, B., S.S. McGaugh, 2012, *Living Rev. Relativity* 15, 10.
- [20] Jeans, J.H., 1922, *MNRAS*, 82, 122.
- [21] Kapteyn J.C., 1922, *ApJ*, 55, 302.
- [22] Faber, S. M. J.S. Gallagher, 1979, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 17, 135.
- [23] Rubin, V. C., D. Burstein, W.K. Ford, Jr., N. Thonnard, 1985, *Astrophys. J.* 289, 81.
- [24] Walter Greiner, Joachim Reinhardt. (1994). *quantum electrodynamics*. Saladruck Berlín: Springer.
- [25] Francis Halzen, Alan D. Martin.. (1984). *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. New York: Wiley.
- [26] Bartelmann, M., P. Schneider, 2001, *Phys. Rep.* 340, 291.
- [27] Bartelmann, M., 2010, *Rev. of Mod. Phys.* 82, 331.
- [28] Feng, J.L., 2010, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 48, 495.
- [29] Jaan Einasto, 2010, [arXiv:0901.0632v2](https://arxiv.org/abs/0901.0632v2).
- [30] Stéphane Corteau, et al., 2014, *Rev. Mod.Phys.*, 86, 47-73.
- [31] Casertano, s., 1983, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 203, 735
- [32] Houjun Mo et al., *Galaxy Formation and Evolution*. Cambridge Press, 2010.
- [33] van der Kruit, P.C., K. C. Freeman, 2011, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 49, 301.
- [34] Fabian Walter et al., 2008, *Astronomical Journal*, 136, 2563-2647.
- [35] J.F. Navarro, C.S. Frenk, and S.D.M.White, *Astrophys. J.* 462,563 (1996).
- [36] J.F. Navarro, C.S. Frenk, and S.D.M.White, *Astrophys. J.* 490,493 (1997).
- [37] A.Burkert, *Astrophys. J.*447,L25 (1995).

- [38] Cheng, H. Feng, J. L. Matchev, K. T., 2002, arXiv:hep-ph/0207125.v2
- [39] J.E. Gunn et al., Ap. J. 223, 1015G (1978)
- [40] V. Silveira, A.Zee, Phys. Lett. B161, 136 (1985)
- [41] Gianfranco Bertone. (2010). Particle Dark Matter. Cambridge: Cambridge press
- [42] John Bachal, Tsvi Piran, Steven Weinberg. (2004). Dark Matter in the Universe. London: World Scientific.
- [43] J. Einasto. Dark matter, 2009, arXiv:0901.0632[astro-ph.CO]
- [44] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 40, 223 (1978); F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 40, 279 (1978).
- [45] W.M. Snow et al. (2011). Upper bound on parity-violating neutron spin rotation in He. Physical Review, C 83, 022501-1.
- [46] H. Yan and W.M. Snow, Phys. Rev. Lett. 119, 082003 (2013)
- [47] P. Fayet, Phys. Lett. B69, 48 (1977)
- [48] C. Bohm P. Fayet, Nucl Phys, B683, 219 (2004)
- [49] P. Fayet, Phys. Lett. B95 285 (1980)
- [50] P. Fayet, 2004, arXiv: hep-ph/0408357v1
- [51] Debasish Majumdar. (2015). Dark Matter: an introduction. Florida: CRC Press.
- [52] M. Raggi V. Kozhuharov. (2014, July 22). Proposal to search for a dark photon in positron on target collisions at daphne Linac. Advances in High Energy Physics, 2014.
- [53] C.A. Baker et al An improved experimental limit on the electric dipole moment of the neutron, Phys. Rev. Lett., 97:131801, 2006 hep-ex/0602020
- [54] R.D. Peccei. Summary of the Beijing workshop on Weak Interactions and CP Violation (Invited Talk), August 22-26, 1989
- [55] R.D. Peccei and H.R. Quinn. The strong CP problem and axions, Lect. Notes, Phys. 741:3-17, 2008, hep-ph/0607268
- [56] G. Servant and T.M.P. Tait. Is the lightest Kaluza Klein particle a viable dark matter candidate?, Nucl. Phys.,B650:391-419,2003,hep-ph/0206071
- [57] E.A. Baltz and D. Hooper. Kaluza Klein dark matter, electrons and gamma.rays telescopes, JCAP, 0507:001, 2005, hep-ph/0411053

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [58] V.T. Machado, 2007, arXiv:hep-ph/0703111v2.
- [59] T. Appelquist, H.C. Cheng B.A. Dobrescu, Phys. Rev. D 64, 035002 (2001)
- [60] Se-Heong, et al., 2008, Astronomical Journal, 136:2761-2781.
- [61] Bell, E.F., de Jong, R.S. 2001, ApJ, 550, 212.
- [62] van Aldaba, T. S., Sancisi, R. 1986, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 320, 447.
- [63] feyncalc.org
- [64] Martinez A. Interacciones de rayos cósmicos ultraenergéticos con neutrinos reliquia de halos galácticos. Universidad Michoacana de san Nicolás de Hidalgo. México.
- [65] Vaára J. Anew way to explain the 511  $KeV$  signal from the center of the Universe Galaxy and some dark matter experiments, 2013, arXiv: 1204.0833v3